

01170

2

Escobar Valderrama

Control Robusto Adaptable de una Clase de Sistemas No-Lineales

Gerardo Escobar Valderrama

Junio 1995

FALLA DE ORIGEN

1995



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedico este trabajo:

A ti Señor Dios mi inseparable amigo.

A mis padres y hermanos.

A todos mis amigos.

A mis profesores de la maestría.

A la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería.

Agradezco especialmente al Dr. Yu Tang por su paciencia y dirección y al Dr. Gerardo Espinosa por sus valiosos comentarios, quienes hicieron posible la realización de esta tesis, al igual que al CONACyT por brindarme el apoyo económico durante el desarrollo de la misma.

*Porque él mira hasta los fines de la tierra,
Y ve cuanto hay bajo los cielos.
Al dar peso al viento,
Y poner las aguas por medida;
Cuando él dió ley a la lluvia,
Y caminó al relámpago de los truenos,
Entonces la veía él, y la manifestaba;
La preparó y la descubrió también.
Y dijo al hombre:
He aquí que el temor del Señor es la sabiduría,
Y el apartarse del mal, la inteligencia.*

Indice

1	Introducción	1
2	Formulación del problema	4
2.1	La clase de sistemas considerados	4
2.2	Propiedades	5
2.3	Formulación del problema	6
2.4	Suposiciones generales	7
2.5	Metodología de diseño	7
2.6	Aplicación de la metodología	8
2.7	Ejemplo numérico	13
3	Control de trayectoria de robots rígidos	16
3.1	Introducción	16
3.2	Definición del problema	17
3.3	Ley de control basada en pasividad	17
3.4	Ley de control robusta	19
3.5	Ley de control robusta adaptable	21
3.6	Ley de control robusta adaptable con estructura variable	24
3.7	Resultados de simulación	29
3.7.1	Ley robusta adaptable	31
3.7.2	Ley robusta adaptable con estructura variable	34
3.8	Resultados experimentales	36
4	Control de trayectoria de robots flexibles	40
4.1	Introducción	40
4.2	Definición del problema	41
4.3	Ley de control compuesta	42

<i>Índice</i>	iii
4.4 Caso parámetros conocidos	42
4.5 Caso parámetros desconocidos	45
5 Conclusiones	49
A Descripción del robot experimental	51
A.1 Construcción mecánica	51
A.2 Construcción electrónica	52
A.2.1 Motores	52
A.2.2 Tarjeta interna	53
A.2.3 Tarjeta externa	53
A.3 Consideraciones para la implementación	54
A.3.1 Estimación de la velocidad	54
A.3.2 Determinación de factores	55
A.4 Programa de control	56
Bibliografía	61

Capítulo 1

Introducción

En el diseño de controladores para sistemas físicos generalmente se empieza por obtener su modelo matemático. Frecuentemente dichos modelos contienen un cierto grado de incertidumbre, tales incertidumbres podrían ser debidas, por ejemplo, a la dificultad de poder medir con exactitud los parámetros del sistema o quizá a las perturbaciones en las entradas y/o en las salidas, las cuales no pueden ser predichas con precisión, o tal vez a la dificultad de caracterizar dentro del modelo a los posibles elementos no lineales inherentes a los sistemas físicos.

De esta manera, se presenta el problema de diseñar controladores que alcancen un comportamiento específico deseado para un sistema del cual se tiene información incompleta, esto es, para el cual se tiene un nivel considerable de incertidumbres debidas principalmente al desconocimiento de los parámetros de la planta, de la estructura y perturbaciones externas.

En algunas situaciones uno podría disponer de un modelo razonablemente exacto del sistema pero quisiera diseñar un controlador de tal manera que este se comportara adecuadamente para un cierto rango de valores de un determinado parámetro del sistema. Por ejemplo, al diseñar el controlador para un robot que requiere mover cargas de diferentes masas de un punto a otro, sería preferible tener un controlador simple que trabajara para ese rango de cargas, a tener que cambiar el controlador o ajustar manualmente alguno de sus parámetros para cada carga. Como podemos ver, éste sería en esencia el mismo problema que el de diseñar un controlador para un sistema con incertidumbre en los parámetros.

Existen básicamente dos filosofías para el control de sistemas sujetos a incertidumbres en los parámetros: el recurso del control adaptable de parámetros y el recurso de control robusto, esto es, controladores con robustez respecto a dicha incertidumbre, definiendo a la robustez como la capacidad de un sistema para conservar la estabilidad en su comportamiento cuando este es sometido a la influencia de un agente perturbador. En el adaptable, se diseña un controlador en el cual las ganancias del controlador son sintonizadas en línea usando mediciones de las entradas y las salidas de la planta. En el robusto, se diseña una ley de control fija, i.e. el controlador tiene estructura y parámetros fijos, lográndose un comportamiento aceptable, ya que la desviación de las señales respecto a las del caso ideal son muy pequeñas, y garantizando estabilidad en el sistema en lazo cerrado para un cierto nivel de incertidumbre. En general, el adaptable se aplica cuando las incertidumbres varían

dentro de un amplio rango, a diferencia del control robusto en el que hay que suponer que los parámetros varían dentro de un cierto rango. En este caso, la cota sobre las incertidumbres debe ser conocida. Sin embargo, los controladores robustos son más simples de implementar y no se requiere tiempo para sintonizar el controlador ante variaciones en la planta. Un problema del adaptable es su robustez ante dinámicas no modeladas y perturbaciones [25]. Como en el control adaptable hay un algoritmo de adaptación, cuando no hay excitación apropiada, puede presentarse el fenómeno de deriva de los parámetros estimados, esto es, los parámetros crecen indefinidamente en valor absoluto conforme el tiempo avanza, mientras que en el robusto, el control es independiente de la excitación de las señales. Se ha visto que al combinar los dos esquemas, el adaptable con el robusto [35, 16], podemos aprovechar las bondades que ofrecen cada uno, obteniéndose con ello leyes de control más simples.

En este trabajo se presentan algunas leyes de control que explotan el recurso de combinar ambos esquemas para tratar el problema de incertidumbres en los parámetros de los robots con uniones rígidas y flexibles. Estos dos sistemas son elementos muy representativos de una clase de plantas, la cual está integrada por todas aquellas plantas modeladas por las ecuaciones de Euler-Lagrange y que cumple con ciertas propiedades muy ligadas a su estructura.

La idea es la siguiente, se diseña una ley de control a la que denominamos nominal, bajo la suposición del conocimiento de los parámetros de la planta, que asegura la estabilidad uniforme asintótica (u.a.s.) del sistema en lazo cerrado en la ausencia de incertidumbres y libre de perturbaciones, en seguida, se diseña una señal de compensación adaptable que garantice la estabilidad uniformemente asintóticamente acotada (u.u.b.) (ver [5] para una definición amplia acerca de este tipo de estabilidad) en presencia de incertidumbre en los parámetros, donde el parámetro a estimar será la cota superior de la incertidumbre en los parámetros. De esta forma, dado que en el diseño de esta ley de control no se requiere del conocimiento de los parámetros de la planta ni de la cota sobre la incertidumbre paramétrica, el conocimiento *a priori* es el mismo que el usualmente asumido para la mayoría de los esquemas adaptables tradicionales (ver, e.g. [26, 2] para una revisión sobre este tema), y con la ventaja de que, a diferencia de estos, únicamente se actualiza un parámetro. Esto nos da una ley de control simple para su implantación pues se evita el problema de estimar numerosas ganancias y con esto se disminuyen los efectos de la deriva paramétrica ganándose robustez respecto a las perturbaciones.

El estudio de los robots ya sea con uniones rígidas o con uniones flexibles, a atraído la atención de diversos investigadores durante muchos años, y hasta la fecha continúan siendo estudiados pues aun quedan varios problemas abiertos por resolver.

Recientemente se han presentado algunas leyes de control robusto para robots de n grado de libertad con uniones rígidas (e.g., [7, 32, 24, 34, 35, 41, 16, 1, 37]) , en ellos, siguiendo el recurso de Corless-Leitman [5], se calcula una señal de compensación y se añade a la señal de control nominal para garantizar u.u.b. [7, 32, 24, 34, 16] o bien u.a.s. [35, 41].

Spong, en [34], presenta una ley robusta para seguimiento que asegura u.u.b. Siguiendo el recurso de Corless-Leitman [5], propone una ley nominal con base en el algoritmo de Slotine-Li [28], añadiendo una señal de compensación conmutable. En [35] Spong hace la extensión al caso adaptable, obteniendo una ley globalmente convergente en la que introduce un estimador

en línea para adaptar únicamente dos parámetros, la cota superior de la incertidumbre paramétrica y un parámetro de diseño, por lo que no se requiere el conocimiento previo de dicha cota. Nuevamente la señal de compensación es de tipo conmutable. Presenta el problema de que sus leyes de actualización son siempre crecientes y para evitar este problema comenta la posibilidad de utilizar la modificación σ , la cual había ya sido introducida en [11].

En [41] Yaz propone la misma ley de control que Spong [34], solo que ahora, su señal de compensación es de naturaleza continua, pudiendo probar u.a.s.. Sin embargo, dicha señal se calcula dividiendo dos cantidades que tienden a cero conforme el tiempo avanza, resultando una señal de control con un gran contenido de altas frecuencias a pesar de que $\bar{q} \rightarrow 0$. Estos resultados se observaron de pruebas de simulación.

Koo y Kim [16] hacen la extensión del esquema de Spong [34] al caso adaptable probando u.u.b. En su esquema solo se estima la cota sobre la incertidumbre paramétrica, su ley de actualización incluye una zona muerta, sin embargo presenta el inconveniente de que su ley de adaptación es siempre creciente por lo que también sugiere introducir la modificación σ para evitar este problema.

Una recopilación acerca de los diferentes esquemas aplicados al control robusto de robots se presenta en [1] donde destacan entre los métodos discutidos, aquellos basados en pasividad, con estructura variable, robusto con saturación y robusto adaptable.

Al igual que en [34, 35, 41, 16], los esquemas aquí propuestos para el control de robots, utilizan la ley de control Slotine-Li basada en pasividad [28] para asegurar la u.a.s. del sistema en lazo cerrado en ausencia de incertidumbres, sin embargo, la señal de compensación, que va a garantizar u.u.b. en presencia de incertidumbres, va a diferir de aquellas en que: primero, no es resultado de la división entre dos funciones tendientes a cero conforme $t \rightarrow \infty$, y como consecuencia la señal de control no presenta componentes de alta frecuencia, i.e. "chattering", segundo, el estimador para la cota superior de la incertidumbre incluye una modificación σ , lo que evita la deriva del estimado. De esta forma se garantiza robustez en presencia de perturbaciones.

La tesis está organizada de la siguiente manera: En el capítulo 2 se presenta la clase de sistemas a estudiar y algunas de sus propiedades, se plantea el problema de control y la metodología a seguir para su solución. A manera de ejemplo se toma la misma clase de plantas que en Corless-Leitman [5], y aunque no corresponde a la clase de plantas de interés en este trabajo, si nos permite mostrar la aplicación de la metodología conservando la misma idea de diseño. Cabe mencionar que este resultado nos permite ligar los resultados presentados utilizando el recurso de Corless-Leitman [5] con los presentados en esta tesis. En el capítulo 3 se aplica la metodología al problema de control de trayectoria del robot rígido, donde se exponen los casos adaptable y no adaptable, y una versión utilizando el esquema de estructura variable. Se muestran algunos resultados de simulaciones numéricas, y finalmente se presentan los resultados experimentales obtenidos al aplicar la versión adaptable del algoritmo a un robot de dos grados de libertad planar. Con el fin de extender estos resultados al caso de robots flexibles, en el capítulo 4 se estudia el esquema de desacoplamiento para estos, con lo que se pretende recobrar los resultados anteriores. Finalmente en el capítulo 5 se dan las conclusiones del trabajo y se plantean posibles investigaciones a futuro.

Capítulo 2

Formulación del problema

2.1 La clase de sistemas considerados

La clase de plantas a estudiar en el presente trabajo queda definida por todas aquellas plantas de la forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Kq + G(q) = Fu \quad (2.1)$$

donde $M(q), C(q, \dot{q}), K \in \mathbb{R}^{n \times n}, G(q), q \in \mathbb{R}^n, F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $u \in \mathbb{R}^m$. Esta clase incluye a aquellos sistemas susceptibles de modelarse por el método Lagrangiano cuya energía cinética está descrita por una función cuadrática, i.e., $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$, con energía potencial $V(q)$ y $G(q) = \frac{\partial}{\partial q} V(q)$. Dentro de esta clase de plantas se encuentran diversos sistemas físicos, entre los que destacan los robots, a quienes están enfocados los principales resultados de la presente tesis.

La mecánica clásica lagrangiana nos proporciona modelos dinámicos de sistemas, en los cuales es relativamente sencillo visualizar los espacios de estados y de entradas de control. Las características dimensionales de estos espacios nos permiten realizar la siguiente clasificación: si las dimensiones de ambos espacios coinciden, i.e. $\rho(F) = m = n$, decimos que el sistema es *totalmente actuado*, donde $\rho(F)$ es el rango de la matriz F . Ahora bien, si la dimensión del espacio de estados es superior a la del espacio de entradas, i.e. $\rho(F) = m < n$, esto es, cuando hay menos entradas que variables a controlar, el sistema es denominado *subactuado*.

Los robots con uniones rígidas son un ejemplo claro de sistemas totalmente actuados, en los cuales el término Kq desaparece del modelo (2.1) y $F = I_n$. Por su parte los robots con uniones flexibles pertenecen a los sistemas subactuados, en este caso sí aparece el término Kq en el modelo (2.1), concentrándose en la matriz K las constantes de rigidez de los elementos flexibles que acoplan a los actuadores con los eslabones, además de esto, también es factible realizar la partición $F = [0 \ I_m]^T$, que permite visualizar mejor la parte del sistema sobre la que no tienen acción directa las fuerzas externas y la parte del sistema sobre la que sí se ejerce acción.

2.2 Propiedades

Es bien sabido [26] que las ecuaciones no lineales (2.1) y en especial los robots, poseen las siguientes propiedades:

1. $\underline{m}I \leq M(q) = M^T(q) \leq \bar{m}I, \quad \forall q \in \mathfrak{R}^n$
2. Si se define $C(q, \dot{q})$ como en [26] via los símbolos de Christoffel, entonces

$$v^T [M(q) - 2C(q, \dot{q})]v = 0, \quad \forall v \in \mathfrak{R}^n \quad (2.2)$$

i.e., $[M(q) - 2C(q, \dot{q})]$ es skew-simétrica.

3. Parametrización lineal, i.e., la ecuación (2.1) puede escribirse como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + Kq + G(q) = Fu = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta, \quad (2.3)$$

donde θ es un vector de dimensión p que contiene los parámetros, y $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ es una matriz de $n \times p$ llamada regresor, de funciones conocidas de las variables generalizadas y sus derivadas de orden superior.

4. $K = K^T \geq 0$

Además de las anteriores, en [23] son reportadas las siguientes:

5. $C(q, x)y = C(q, y)x$
6. $C(q, \dot{q}), G(q)$ son funciones acotadas de sus argumentos.
7. $\|C(q, \dot{q})\| \leq K_c \|\dot{q}\|, K_c \geq 0, \quad \forall q, \dot{q}$
8. $\|g(q)\| \leq G_m, \quad G_m \in \mathfrak{R}_+$
9. La energía potencial $V(q)$ es positiva todo el tiempo.

Una propiedad muy importante de los robots es la llamada *pasividad*. Decimos que un sistema es pasivo cuando este absorbe más energía del mundo exterior exterior que la que él puede suministrarle, en otras palabras, es un sistema que siempre disipa energía. Esta propiedad es de gran importancia para el análisis y diseño de controladores, pues permite explotar las cualidades disipativas propias de la estructura de los sistemas, la cual está muy relacionada con las propiedades de estabilidad de los mismos, y como uno podría esperarse, existen algunas conexiones útiles entre la pasividad y la estabilidad en el sentido de Lyapunov.

Lema 1: Las ecuaciones dinámicas (2.1) definen un mapeo pasivo de $Fu \rightarrow \dot{q}$, i.e.

$$\langle Fu, \dot{q} \rangle_T = \int_0^T \dot{q}^T F u dt \geq -\beta \quad (2.4)$$

para alguna $\beta > 0, \beta \in \mathfrak{R}, \forall T \geq 0$.

Prueba: En esta prueba se omiten los argumentos de $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $G(q)$. Sustituyendo primeramente Fu por su valor en (2.1), aprovechando la propiedad de antisimetría y sabiendo que $V(q(t))$ es acotada por abajo, tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \dot{q}^T F u dt &= \int_0^T \dot{q}^T (M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + G) dt \\
 &= \int_0^T \dot{q}^T M\ddot{q} dt + \int_0^T \dot{q}^T (C\dot{q} + Kq + G) dt \\
 &= \int_0^T \frac{d}{dt} \dot{q}^T M \dot{q} dt - \int_0^T \dot{q}^T \left(\frac{1}{2} M \dot{q} - C\dot{q} \right) dt + \int_0^T \dot{q}^T (Kq + G) dt \\
 &= \frac{1}{2} \dot{q}(T)^T M \dot{q}(T) - \frac{1}{2} \dot{q}(0)^T M \dot{q}(0) + \int_0^T \dot{q}^T K q dt + \int_0^T \dot{q}^T G dt \\
 &\geq -\frac{1}{2} \dot{q}(0)^T M \dot{q}(0) + \frac{1}{2} q(T)^T K q(T) - \frac{1}{2} q(0)^T K q(0) + V(q(T)) - V(q(0)) \\
 &\geq -\frac{1}{2} \dot{q}(0)^T M \dot{q}(0) - \frac{1}{2} q(0)^T K q(0) - V(q(0)) \\
 &= -\beta
 \end{aligned}$$

□□□

2.3 Formulación del problema

A continuación se presenta el problema a resolver en este trabajo, este problema se traduce básicamente en encontrar una ley de control que reúna ciertas características para la planta objeto de interés.

Considere la planta (2.1) de la forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Kq + G(q) = Fu$$

donde $q \in \mathbb{R}^n$, con las matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$, K , $G(q)$, F de dimensiones correspondientes. Más aún, para el caso de sistemas subactuados, es factible realizar la partición $q = [q_1 \ q_2]^T \in \mathbb{R}^n$, donde $q_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ representa los estados sobre los cuales no actúan directamente las fuerzas externas y $q_2 \in \mathbb{R}^m$ representa a los estados que si reciben acción directa.

Suponiendo que se desconocen los parámetros verdaderos θ de la planta, con θ proveniente de la parametrización lineal, el problema de control consiste en diseñar una ley con base en un conjunto de parámetros nominales θ_0 , considerado el mejor estimado *a priori* para θ , (donde y en lo que resta $(\cdot)_0$ denota el valor nominal de (\cdot)), tal que el error de seguimiento definido por

$$\tilde{q}(t) \triangleq q(t) - q^d(t)$$

con $q^d(t)$ la señal de referencia, tienda asintóticamente hacia una vecindad de radio cero conforme $t \rightarrow \infty$, manteniendo todas las señales internas acotadas a pesar de la incertidumbre en los parámetros de la planta, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{q}(t)\| \leq \beta$$

con $\beta \geq 0$ que dependerá de los parámetros de diseño y de la medida de la desviación en los parámetros. Dicha desviación o incertidumbre se define como

$$\hat{\theta} \triangleq \theta_0 - \theta$$

con θ los parámetros verdaderos y θ_0 los parámetros nominales de la planta.

Nota 1: A este tipo de estabilidad en la literatura se le conoce como estabilidad uniformemente asintóticamente acotada u.u.b. [5, 6, 7, 34].

2.4 Suposiciones generales

En seguida se presentan una serie de suposiciones generales necesarias para desarrollar e implementar la ley de control, otras suposiciones se irán proponiendo a lo largo del desarrollo del trabajo.

- S.1 Existe $q_d(t) \in C^2[0, \infty)$ y en ciertos casos se requerirá incluso $q_d(t) \in C^4[0, \infty)$, donde $C^i[0, \infty)$ es el conjunto de todas las funciones continuamente diferenciables sobre el rango $[0, \infty)$ para las cuales se conocen sus derivadas hasta de orden i -ésimo. Esta suposición se plantea bajo la base de que tenemos la libertad de escoger a la señal de referencia según se desee.
- S.2 Se suponen medibles los estados del sistema. Esta suposición es de tipo restrictiva, ya que nos limita a tratar únicamente con aquellos sistemas en los que tengamos acceso a todos sus estados.
- S.3 Se supone que la desviación de los parámetros está acotada por ρ , esto es, existe esta cota aunque quizá se desconozca su valor exacto, i.e.

$$\exists \rho \in \mathfrak{R}_+ \text{ tal que } \|\hat{\theta}\| \leq \rho$$

En este caso, esta suposición deriva del hecho de que estamos considerando sistemas físicos cuyas características físicas en caso de cambiar, lo hacen en forma limitada, de esta forma diremos que esta cota tiene un comportamiento constante aunque de valor desconocido.

- S.4 Se han despreciado los términos debidos a efectos de fricción, lo cual no hace que se pierda generalidad en el resultado pues generalmente su influencia radica en hacer más amortiguada la respuesta del sistema.

2.5 Metodología de diseño

Bajo las suposiciones anteriores, a continuación se describe someramente la estrategia de diseño a seguir,

- D.1 Se propone una ley de control que resuelve el problema para el caso de parámetros conocidos asegurando estabilidad uniformemente asintótica u.a.s. Para tal efecto nos basaremos en el resultado presentado en [28], cuya ley se basa en la teoría de pasividad [26]. Esta ley utiliza los parámetros de la planta θ así como ciertos parámetros de diseño para su cálculo. Nos referiremos a este caso como "ideal".
- D.2 En la ley de control "ideal" anterior, se sustituyen los supuestos valores verdaderos θ por unos valores nominales θ_0 que son valores muy cercanos a los verdaderos, i.e., representan el mejor estimado a priori para los parámetros de la planta, formándose así lo que en adelante denominaremos la ley de control "nominal".
- D.3 A la ley de control "nominal", se añade una señal de compensación, $w(t)$, a fin de compensar la incertidumbre en los parámetros, i.e. $\theta_0 + w(t)$, esto quiere decir que al vector de parámetros nominales propuestos, se adicionará una señal que va a compensar su desviación respecto de los parámetros verdaderos. A este tipo de compensación se le conoce como compensación en los parámetros o a nivel parámetros.
- D.4 Se realiza el diseño de la señal de compensación con base en el análisis de Lyapunov, y utilizando algunas propiedades de las normas. Primeramente se analizará el caso en que se conoce el valor de la cota de la desviación en los parámetros ρ a la que se considerará constante por lo que se obtendrá una ley puramente robusta, y enseguida se analizará el caso en que se desconoce dicha cota, para la que en este caso, además se propondrá una ley de adaptación para estimarla, quedando una ley compuesta robusta y adaptable.
- D.5 A partir del mismo análisis de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado con el controlador, y habiendo aplicado la señal de compensación $w(t)$, se obtiene el tamaño de la vecindad a la cual converge el error de seguimiento $\tilde{q}(t)$ al $t \rightarrow \infty$.

2.6 Aplicación de la metodología

Con el objetivo de ligar los resultados que se presentarán a lo largo de esta tesis con el recurso de Corless-Leitman [5], del cual proviene parte de la idea, y para ilustrar la metodología de diseño antes descrita, esta metodología se aplica a la misma clase de plantas no lineales considerada por Corless-Leitman en [5] para las que existe incertidumbre en sus parámetros. Haciendo esto, se logra extender los resultados de ellos y relajar algunas de sus condiciones. Como se verá en seguida, esa clase de plantas no corresponde exactamente a la clase de plantas descrita anteriormente.

Partimos del hecho de que contamos con la dinámica del error del sistema en lazo cerrado, esto es, consideramos que ha sido aplicada a la planta la ley de control nominal, por lo que la dinámica del error resulta ser

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + B(x, t)[\bar{\theta} + w(t)] \quad (2.5)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el error de seguimiento, $w(t) \in \mathbb{R}^n$ es la señal necesaria para compensar la incertidumbre en los parámetros representada por $\hat{\theta} \triangleq \theta_0 - \theta \in \mathbb{R}^n$ y las funciones $f(\cdot)$ y $B(\cdot)$ son conocidas y Lipschitz.

Además asumimos que para (2.5) se satisfacen las siguientes suposiciones

Suposición 5: Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y un intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ existen funciones Lebesgue integrables $m_i(\cdot) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$ tales que $\forall (x, t) \in E \times [a, b]$

$$\| f(x, t) \| \leq m_1(t)$$

$$\| B(x, t) \| \rho \leq m_2(t)$$

Suposición 6: En la ausencia de la incertidumbre en los parámetros ($\hat{\theta} = 0$), haciéndose innecesario el cálculo de $w(t)$, el sistema estaría descrito por

$$\dot{x}(t) = f(x, t) \quad (2.6)$$

donde el punto $x=0$ es uniformemente asintóticamente estable (u.a.s.), i.e., existe una función candidata Lyapunov $V_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ que satisface

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V_0(x, t) \leq \gamma_2(\|x\|) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial V_0(x, t)}{\partial t} + \nabla_x^T V_0(x, t) f(x, t) \leq -\gamma_3(\|x\|) \quad (2.8)$$

para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, donde $\gamma_i (i = 1, 2, 3)$ son funciones clase-K, con $\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_i(r) = \infty$.

Habiendo establecido las características de la clase de plantas de Corless-Leitmann, se propone calcular la señal de compensación de la siguiente manera

$$w(t) = -\hat{\rho} \frac{B^T W}{\|B^T W\| + \epsilon} \quad (2.9)$$

donde el parámetro $\hat{\rho}$ se calcula de acuerdo a la siguiente ley de adaptación

$$\dot{\hat{\rho}} = -\sigma \hat{\rho} + \gamma \frac{\|B^T W\|^2}{\|B^T W\| + \epsilon}, \quad \hat{\rho}(0) > 0, \quad (2.10)$$

donde $\hat{\cdot}$ denota el estimado de (\cdot) , $W \triangleq \frac{\partial V_0}{\partial x}$, y $\epsilon, \sigma, \gamma > 0$ son parámetros de diseño.

Para probar que al aplicar esta señal de compensación adaptable $w(t)$ al sistema en lazo cerrado (2.5) se obtiene estabilidad en el sentido de acotamiento asintótico y uniforme (u.u.b.) en presencia de incertidumbre paramétrica, considere la siguiente función positiva definida

$$V(x, t) = V_0(x, t) + \frac{1}{2\gamma} \hat{\rho}^2 \quad (2.11)$$

donde $\hat{\rho} \triangleq \hat{\rho} - \rho$,

Su derivada respecto al tiempo a lo largo de (2.5) y (2.16) es

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial V_0}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \dot{\rho} \dot{\rho} \quad (2.12)$$

$$= W^T f + \frac{\partial V_0}{\partial t} + W^T B[\dot{\theta} + w] + \frac{1}{\gamma} \dot{\rho} \dot{\rho} \quad (2.13)$$

$$\leq -\gamma_3(\|x\|) + \left(W^T B[\dot{\theta} + w] + \frac{1}{\gamma} \dot{\rho} \dot{\rho} \right) \quad (2.14)$$

Examinando el segundo término del lado derecho

$$\begin{aligned} W^T B[\dot{\theta} + w] + \frac{1}{\gamma} \dot{\rho} \dot{\rho} &= W^T B \left[\dot{\theta} - \hat{\rho} \frac{B^T W}{\|B^T W\| + \epsilon} \right] + \frac{1}{\gamma} \dot{\rho} \dot{\rho} \\ &\leq \|W^T B\| \left[\|\dot{\theta}\| - \hat{\rho} \frac{\|B^T W\|}{\|B^T W\| + \epsilon} \right]^2 + \frac{1}{\gamma} \dot{\rho} \dot{\rho} \\ &= \frac{\|B^T W\|^2}{\|B^T W\| + \epsilon} \left[(\rho - \hat{\rho}) + (\|\dot{\theta}\| - \rho) + \frac{\epsilon}{\|B^T W\|} \|\dot{\theta}\| \right] + \frac{1}{\gamma} \dot{\rho} \dot{\rho} \\ &\leq \frac{\hat{\rho}}{\gamma} \left[-\gamma \frac{\|B^T W\|^2}{\|B^T W\| + \epsilon} + \dot{\rho} \right] + \frac{\|B^T W\|}{\|B^T W\| + \epsilon} \epsilon \rho \end{aligned} \quad (2.15)$$

dado que (2.10) puede expresarse como

$$\dot{\rho} - \gamma \frac{\|W^T B\|^2}{\|W^T B\| + \epsilon} = -\sigma \hat{\rho}. \quad (2.16)$$

sustituyendo en (2.15) nos queda

$$\begin{aligned} &\leq -\frac{\sigma}{\gamma} \hat{\rho} \dot{\rho} + \epsilon \rho \\ &= -\frac{\sigma}{\gamma} \left(\hat{\rho} - \frac{1}{2} \rho \right)^2 + \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 + \epsilon \rho \\ &\leq \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 + \epsilon \rho, \end{aligned} \quad (2.17)$$

obteniéndose finalmente

$$\dot{V} \leq -\gamma_3(\|x\|) + \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 + \epsilon \rho \quad (2.18)$$

Para ver el acotamiento asintótico sobre $\|x\|$, de (2.18) $\dot{V}(t) \geq 0$ si

$$\begin{aligned} \gamma_3(\|x\|) &\leq \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 + \epsilon \rho \\ \|x\| &\leq \gamma_3^{-1} \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 + \epsilon \rho \end{aligned} \quad (2.19)$$

esto quiere decir que conforme $t \rightarrow \infty$, el error de seguimiento se queda dentro de una bola de radio constante.

Acerca del acotamiento uniforme se establece que, si $x(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathfrak{R}^n, x(t_0) = x_0$, es una solución de (2.5), entonces

$$\|x_0\| \leq r \Rightarrow \|x(t)\| \leq d(r), \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

donde

$$d(r) = \begin{cases} (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(R) & \text{si } r \leq R \\ (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(r) & \text{si } r > R \end{cases} \quad (2.20)$$

y

$$R = \gamma_3^{-1} \left(\frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 + c\rho \right) \quad (2.21)$$

más aún, la solución se extiende sobre $[t_0, \infty)$.

Para probar lo anterior considere una solución $x(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathfrak{R}^n, x(t_0) = x_0$, con $\|x_0\| \leq r$, y defina

$$\delta \triangleq \max\{r, R\}$$

tal que

$$\|x_0\| \leq \delta \text{ y } R \leq \delta$$

además por (2.20)

$$d(r) = (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(\delta).$$

más aún, de (2.7)

$$\gamma_1(\delta) \leq \gamma_2(\delta)$$

$$\delta \leq (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(\delta) = d(r).$$

asi,

$$\|x(t_0)\| = \|x_0\| \leq \delta \leq d(r).$$

Ahora, suponga que existe un tiempo $t_3 > t_0$ tal que

$$\|x(t_3)\| > d(r). \quad (2.22)$$

dado que $x(\cdot)$ es continua y

$$\|x(t_0)\| \leq \delta \leq d(r) < \|x(t_3)\|$$

entonces existe un $t_2 \in [t_0, t_3]$ tal que

$$\|x(t_2)\| = \delta$$

y

$$\|x(t)\| \geq \delta \quad \forall t \in [t_2, t_3].$$

Ahora bien, de (2.7), (2.18) y (2.5)

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(\|x(t_3)\|) &\leq V(x(t_3), t_3) \\
 &= V(x(t_2), t_2) + \int_{t_2}^{t_3} \dot{V}(x(\tau), \tau) d\tau \\
 &\leq \gamma_2(\|x(t_2)\|) + \int_{t_2}^{t_3} [-\gamma_3(\|x(\tau)\|) + \frac{\sigma}{4\gamma}\rho^2 + \epsilon\rho] d\tau \\
 &\leq \gamma_2(\delta) + \int_{t_2}^{t_3} [-\gamma_3(R) + \frac{\sigma}{4\gamma}\rho^2 + \epsilon\rho] d\tau \\
 &= \gamma_2(\delta).
 \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\|x(t_3)\| \leq (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(\delta) = d(r).$$

Sin embargo, esto contradice a la suposición (2.22); de aquí que,

$$\|x(t)\| \leq d(r), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Como consecuencia existe un conjunto compacto E , digamos,

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \xi < d(r)\}$$

para el cual ninguna solución (con $\|x_0\| \leq r$ puede escapar. De aquí que cada solución puede extenderse sobre cualquier intervalo compacto y por lo tanto sobre $[t_0, \infty)$.

□□

Nota 1: La señal de compensación $w(t)$ proporciona una señal de control continua que garantiza la estabilidad uniformemente asintóticamente acotada (u.u.b.) del sistema ante la presencia de incertidumbre paramétrica (para el caso en que además se consideran perturbaciones ver [38]). Los resultados presentados aquí son una simplificación de los presentados en [38], que a su vez son una extensión de los resultados de [5].

Nota 2: La modificación- σ en la ley de actualización (2.10) fue motivada de las investigaciones en control robusto con parámetros adaptables PAC [11], con esto se evita que $\hat{\rho}$ sea siempre positiva, evitando por ello, la deriva en la estimación de los parámetros.

Nota 3: Las pruebas de existencia, unicidad de la solución son presentadas en [5], en ellas se pide que las funciones $f(\cdot)$ y $B(\cdot)$ sean Carathéodory pero es relativamente sencillo ver que basta con que sean Lipschitz para asegurar existencia y unicidad de la solución (ver [13] pag 74).

2.7 Ejemplo numérico

Se aplica ahora el resultado anterior y por ende la metodología de diseño propuesta a un péndulo simple de longitud l y masa m sujeto a un par u aplicado en su soporte como se muestra en la Fig. 2.1 [5]. Este sistema mecánico cae dentro de la clase de sistemas a estudiar, lo cual se puede ver inmediatamente de su modelo matemático (2.23).

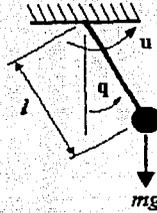


Figura 2.1: Pendulo simple.

Siendo q la posición angular del péndulo, el modelo de este sistema es

$$ml^2\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + mgl\sin(q(t)) = u(t) \quad (2.23)$$

El objetivo de control es seguir una trayectoria q_d para la cual existen su primera y segunda derivada.

Suponiendo que se cuenta con los parámetros conocidos de la planta, se propone la siguiente ley de control "ideal" (ver e.g., [28, 2])

$$u = ml^2\dot{a} + ba + mgl\sin(q) - K_v v \quad (2.24)$$

$$= Y(q, a, \dot{a})\theta - K_v v \quad (2.25)$$

con $K_v > 0$,

$$Y(q, a, \dot{a}) \triangleq [\dot{a} \quad a \quad \sin(q)]$$

$$\theta \triangleq [ml^2 \quad b \quad mgl]^T,$$

y

$$a \triangleq \dot{q}_d - \lambda\dot{q}, \quad \lambda > 0$$

$$\dot{q} \triangleq \dot{q} - \dot{q}_d$$

$$v \triangleq \dot{q} + \lambda\dot{q}$$

En malla cerrada se obtiene el sistema

$$ml^2\dot{v} + (b + K_v)v = 0, \quad (2.26)$$

que es u.a.s., ya que al proponer la candidata a función Lyapunov

$$V_0 \triangleq \frac{1}{2} m l^2 v^2$$

su derivada respecto al tiempo resulta

$$\dot{V}_0 = -(b + K_v)v^2.$$

Ahora bien, para el caso de parámetros desconocidos, se propone la ley de control

$$u = u_0 + Y(q, a, \dot{a})w \quad (2.27)$$

con la ley nominal

$$u_0 = Y(q, a, \dot{a})\theta_0 - K_v v$$

obteniéndose en malla cerrada el sistema

$$\dot{v} = -\frac{(b + K_v)}{m l^2} v + B(\hat{\theta} + w) \quad (2.28)$$

donde

$$B = \frac{1}{m l^2} Y(q, a, \dot{a})$$

el cual tiene la forma de (2.5). Advierta que en este ejemplo aunque B es desconocida, $B^T W$ si es conocida, ya que en este caso

$$W \triangleq \frac{\partial V_0}{\partial x} = m l^2 v$$

y de aquí

$$B^T W = Y^T(q, a, \dot{a})v$$

Por esta razón, la ley de control (2.9) se puede utilizar sin problema.

En la simulación numérica, aplicando la ley de control (2.27) y (2.9), se utilizaron los siguientes valores para los parámetros de diseño

$$K_v = 40, \lambda = 10, c = 0.1,$$

$$\gamma = 1, \sigma = 1$$

Los valores utilizados para los parámetros θ , se concentran en la tabla (2.1).

La trayectoria deseada se generó con base en un sistema de segundo orden críticamente amortiguado. Tomando el valor 1 como condición inicial para \hat{p} .

La fig. 2.2 muestra la señal de control, la cual resulta ser acotada además de no presentar mucho "chattering". En la fig. 2.3 se observa como al principio la trayectoria real tiende a acercarse a la deseada y, posteriormente, se mantiene dentro de un cierto margen teóricamente establecido por (2.19). Finalmente la fig. 2.4 muestra la evolución del estimado de ρ , donde se observa que este estimado no crece indefinidamente gracias a la modificación sigma incorporada en la ley de actualización.

Nota 3: Al aplicar un escalón filtrado como señal de referencia, se observó que el error de seguimiento en el estado estable fue del orden de 10^{-3} .

θ	Definition	True values	Nominal values	Uncertainty bound
θ_1	ml^2	1.00	0.50	0.50
θ_2	B	0.10	0.05	0.05
θ_3	$mg l$	9.80	4.90	4.90

Tabla 2.1: Parámetros θ utilizados en simulación.

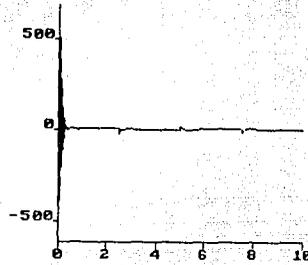


Figura 2.2: Señal de Control $u(t)$.

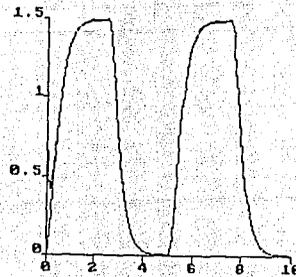


Figura 2.3: Trayectoria real $q(t)$ y deseada $q_d(t)$.

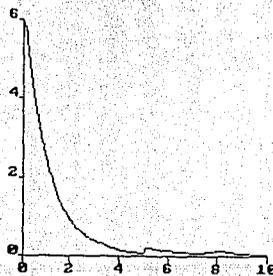


Figura 2.4: Evolución de $\hat{\rho}(t)$.

Capítulo 3

Control de trayectoria de robots rígidos

3.1 Introducción

Siguiendo con la filosofía del esquema desarrollado en el capítulo anterior, en este capítulo se presentan algunas leyes de control robustas simples enfocadas al control de trayectoria del robot rígido con n grados de libertad.

Al igual que en [34, 35, 41, 16], el esquema aquí propuesto utiliza la ley de control basada en pasividad [28] para formar la ley de control nominal.

Sin embargo, aquí la señal de compensación difiere de las presentadas en [34, 35, 41, 16], en que, primeramente, para su cálculo no se presentan divisiones entre dos funciones que tienden a cero conforme $t \rightarrow \infty$, y como consecuencia, se obtiene una señal de control cuyo "chattering" es mínimo e incluso hay algunos casos en los que tiende a desaparecer, y en segundo lugar, el estimador para la cota superior en la incertidumbre incorpora la modificación σ , la cual evita que el estimado de este parámetro crezca indefinidamente.

Al igual que la mayoría de los esquemas de control adaptable (ver [26, 2]), la versión adaptable de este no requiere para su implantación del conocimiento *a priori* de los parámetros de la planta, ni tampoco de la cota superior de la incertidumbre. Además, esta ley de control solamente estima un parámetro (la cota superior de las incertidumbres) mientras que los algoritmos adaptables típicos requieren adaptar a veces hasta diez parámetros por cada eslabón del robot.

A lo largo del presente capítulo se desarrollarán las versiones adaptable y no adaptable para la señal de compensación robusta con la estructura planteada en el capítulo anterior y su versión utilizando un esquema de estructura variable, con lo que se muestra la versatilidad del esquema propuesto.

3.2 Definición del problema

Considere el modelo matemático de un robot de n grados de libertad [26]

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (3.1)$$

donde q es el vector n -dimensional que contiene los ángulos de las uniones, $M(q)$ la matriz de inercias de orden $n \times n$, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ son los términos debidos a fuerzas centrífugas y de Coriolis, $g(q)$ los términos gravitacionales, y τ el vector n -dimensional de los pares de entrada.

El problema de control se concentra en diseñar una ley de control para el robot con uniones rígidas cuyo modelo esta representado por (3.1) que garantice estabilidad en el sentido de acotamiento aintótico y uniforme (u.u.b.) manteniendo a las señales internas acotadas bajo las suposiciones propuestas en el capítulo 2, y considerando en este caso que la trayectoria deseada $q^d \in C^2[0, \infty)$,

3.3 Ley de control basada en pasividad

En esta sección presentamos la ley de control basada en pasividad que se empleará para formar la ley nominal dentro de nuestro esquema. Se analiza el caso ideal, i.e., el caso en que se conocen los parámetros verdaderos θ de la planta, en este caso del robot.

Considere el sistema descrito por (3.1)

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (3.2)$$

realizando el siguiente cambio de variables

$$a \triangleq \dot{q}^d - \lambda \tilde{q}, \quad \tilde{q} \triangleq q - q^d, \quad \lambda > 0 \quad (3.3)$$

$$v \triangleq \dot{q} - a = F^{-1}(s)\tilde{q}, \quad \text{con } F(s) \triangleq 1/(s + \lambda), \quad (3.4)$$

se obtiene

$$M(q)(\dot{v} + \dot{a}) + C(q, \dot{q})(v + a) + g(q) = \tau \quad (3.5)$$

$$M(q)\dot{v} + C(q, \dot{q})v = \tau - [M(q)\dot{a} + C(q, \dot{q})a + g(q)] \quad (3.6)$$

$$M(q)\dot{v} + C(q, \dot{q})v = \varphi \quad (3.7)$$

Lema 2: La ecuación (3.7) define un mapeo $\varphi \rightarrow v$ pasivo, i.e.

$$\langle v, \varphi \rangle_T = \int_0^T v^T \varphi dt \geq -\beta \quad (3.8)$$

para toda T y alguna $\beta \geq 0$.

Prueba: Considere la siguiente función positiva definida

$$H = \frac{1}{2} v^T M v$$

su derivada respecto al tiempo es

$$\begin{aligned}
 \dot{H} &= v^T M \dot{v} + \frac{1}{2} v^T \dot{M} v \\
 &= v^T (-Cv + \varphi) + \frac{1}{2} v^T \dot{M} v \\
 &= v^T \varphi + v^T \left(\frac{1}{2} \dot{M} - C \right) v \\
 &= v^T \varphi
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

integrando de ambos lados de esta igualdad se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \dot{H} dt &= \int_0^T v^T \varphi dt \\
 H(T) - H(0) &= \langle v, \varphi \rangle_T
 \end{aligned}$$

eliminando el término $H(T)$ que es positivo $\forall t$ y recordando se obtiene finalmente

$$\langle v, \varphi \rangle_T \geq -H(0)$$

□□

El lema anterior establece que el sistema (3.7) define un bloque pasivo con entrada φ y salida v .

Definamos ahora a la señal φ como

$$\varphi = -K_v v, \quad K_v = K_v^T > 0 \tag{3.10}$$

lo cual define un mapeo estrictamente pasivo de $-v \rightarrow \varphi$ ya que en este caso es fácil ver que

$$\int_0^T -v^T \varphi dt \geq \lambda_{\min} K_v \|v\|^2$$

es decir, (3.10) representa un bloque estrictamente pasivo con entrada v y salida φ (ver [8] pag. 173 para la definición de pasividad estricta)

De lo anterior se observa que el sistema en lazo cerrado aparece como la interconexión entre dos bloques uno de ellos pasivo (3.7) y otro estrictamente pasivo (3.10), de esta manera, aprovechando el teorema de pasividad ([8] pag. 181), se establece que

$$v \in L_2$$

donde L_p se define como el espacio de funciones cuya norma p es acotada, i.e.

$$L_p = \{f : \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}^n \mid \|f\|_p < \infty\}, \quad 2 \text{ donde } p = 1, 2, \dots, \infty$$

Para establecer el acotamiento y convergencia a cero de las señales, de (3.4) vemos que

$$\hat{q} = F(s)v$$

donde $F(s) \in \mathfrak{R}(s)$ es una función de transferencia estrictamente propia y exponencialmente estable, entonces utilizando el resultado presentado en [8] (pag. 59), se establece que si $v \in L_2 \Rightarrow \dot{q} \in L_2 \cap L_\infty, \ddot{q} \in L_2, \dot{q}$ es continua y $\dot{q} \rightarrow 0$ al $t \rightarrow 0$. Si además $v \rightarrow 0$ al $t \rightarrow 0$, entonces $\ddot{q} \rightarrow 0$.

Resumiendo, de (3.10) y (3.7), la ley de control resulta ser

$$\tau = M(q)\dot{a} + C(q, \dot{q})a + g(q) - K_v v \quad (3.11)$$

$$= Y(q, \dot{q}, a, \dot{a})\theta - K_v v, \quad (3.12)$$

que es conocida en la literatura como ley Slotine-Li [28].

Una forma alterna para probar la estabilidad uniformemente asintótica del sistema (3.1) en lazo cerrado con el control (3.12) utilizando argumentos estándar es la siguiente.

Aplicando la ley de control (3.12) a la planta (3.1) se obtiene en lazo cerrado

$$M(q)\ddot{v} + C(q, \dot{q})\dot{v} + K_v v = 0. \quad (3.13)$$

Definiendo la candidata a función Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} v^T M(q)v,$$

su derivada a lo largo de (3.13) es

$$\dot{V} = -v^T K_v v.$$

Dado que la matriz inercia $M(q)$ es uniformemente acotada, de la teoría de estabilidad de Lyapunov [36], se prueba la u.a.s., y del teorema de LaSalle se sigue que el error de seguimiento $\tilde{q}(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

3.4 Ley de control robusta

Proponiendo un vector de parámetros nominales θ_0 , la ley de control nominal queda definida por

$$\tau_0 = M_0(q)\dot{a} + C_0(q, \dot{q})a + g_0(q) - K_v v \quad (3.14)$$

$$= Y(q, \dot{q}, a, \dot{a})\theta_0 - K_v v, \quad (3.15)$$

Señal de compensación

Añadiendo la señal de compensación, la ley de control resulta

$$\tau = \tau_0 + Y(q, \dot{q}, a, \dot{a})w = Y(q, \dot{q}, a, \dot{a})(\theta_0 + w) - K_v v, \quad (3.16)$$

donde la señal w se diseña con el objetivo de compensar a la incertidumbre en los parámetros definida por $\hat{\theta} \triangleq \theta_0 - \theta$, y se calcula como

$$w = -\rho_0 \frac{Y^T v}{\|Y^T v\| + c}, \quad (3.17)$$

con $\| \cdot \|$ la norma Euclídeana, y ρ_0 el valor conocido *a priori* para la cota superior de la incertidumbre en los parámetros ρ , i.e., $\| \hat{\theta} \| \leq \rho_0$.

Sustituyendo la ley de control (3.16) en (3.1), se obtiene

$$M(q)\dot{v} + C(q, \dot{q})v + K_v v = Y(q, \dot{q}, a, \dot{a})(\hat{\theta} + w). \quad (3.18)$$

En el siguiente teorema se agrupan los planteamientos anteriores y se establecen las características con que se presenta la estabilidad:

Teorema 1: Considere el sistema en lazo cerrado (3.1), (3.16)-(3.17). Sea ρ_0 un valor conocido *a priori* para la cota ρ . Entonces,

- (i) todas las señales están acotadas, y
- (ii) el error de seguimiento es estable uniformemente asintóticamente acotado (u.u.b.) por

$$\| \tilde{q} \| \leq \frac{1}{\lambda \lambda_{\min}^{1/2}(K_v)} (\epsilon \rho_0)^{1/2} \quad (3.19)$$

donde $\lambda_{\min}(K_v)$ denota el valor propio mínimo de K_v .

Prueba: Sea la candidata a función Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} v^T M(q) v,$$

su derivada a lo largo de (3.18) es

$$\dot{V} = -v^T K_v v + v^T Y(\hat{\theta} + w)$$

Examinando el segundo término del lado derecho,

$$v^T Y(\hat{\theta} + w) \quad (3.20)$$

$$= v^T Y \hat{\theta} - \rho_0 \frac{\| Y^T v \|^2}{\| Y^T v \| + \epsilon} \quad (3.21)$$

$$\leq \| v^T Y \| \left[\| \hat{\theta} \| - \rho_0 \frac{\| Y^T v \|}{\| Y^T v \| + \epsilon} \right] \quad (3.22)$$

$$= \frac{\| Y^T v \|^2}{\| Y^T v \| + \epsilon} \left[\| \hat{\theta} \| - \rho_0 + \frac{1}{\| Y^T v \|} \| \hat{\theta} \| \epsilon \right] \quad (3.23)$$

$$= \frac{\| Y^T v \|}{\| Y^T v \| + \epsilon} \| \hat{\theta} \| \epsilon \quad (3.24)$$

$$\leq \| \hat{\theta} \| \epsilon \quad (3.25)$$

$$\leq \epsilon \rho_0, \quad (3.26)$$

se obtiene

$$\dot{V}(t) \leq -v^T K_v v + \epsilon \rho_0 \quad (3.27)$$

Por lo tanto, el acotamiento de las señales sigue inmediatamente de acuerdo a argumentos similares a los utilizados en la prueba de la ley basada en pasividad.

A fin de obtener la cota sobre el error de seguimiento (ii), de (3.27) observamos que $\dot{V}(t) \geq 0$ si

$$v^T K_v v \leq \epsilon \rho_0$$

puesto que $K_v = K_v^T > 0$, entonces se cumple

$$\lambda_{\min}(K_v) \|v\|^2 \leq \epsilon \rho_0$$

despejando $\|v\|$ de la ecuación anterior

$$\|v\| \leq \left[\frac{1}{\lambda_{\min}(K_v)} \epsilon \rho_0 \right]^{1/2}. \quad (3.28)$$

En (3.4) se define a \hat{q} como

$$\hat{q} = \frac{1}{s + \lambda} v = F(s)v$$

donde $F(s)$ representa un mapa lineal. Calculando las normas a ambos lados de la igualdad (ver [8] pag. 25 para el cálculo de la norma inducida de un mapa lineal), se obtiene

$$\|\hat{q}\| \leq \left\| \frac{1}{s + \lambda} \right\|_2 \|v\| = \frac{1}{\lambda} \|v\|. \quad (3.29)$$

aplicando este resultado a (3.28) se obtiene (ii).

□□□

Nota 1: Como en [34], la extensión de la ley de control al caso $|\tilde{\theta}_i| \leq \rho_i, i = 1, 2, \dots, p$, es directa.

3.5 Ley de control robusta adaptable

Tomando nuevamente como base la estructura del controlador pasivo (3.12) se diseña la ley de control nominal (3.15) suponiendo que se cuenta con los parámetros nominales θ_0 , de donde

$$\tau_0 = M_0(q)\ddot{a} + C_0(q, \dot{q})\dot{a} + g_0(q) - K_v v \quad (3.30)$$

$$= Y(q, \dot{q}, a, \dot{a})\theta_0 - K_v v, \quad (3.31)$$

Señal de compensación

Una vez más se añade a la ley de control una señal w para compensar la incertidumbre en los parámetros,

$$\tau = \tau_0 + Y(q, \dot{q}, a, \dot{a})w = Y(q, \dot{q}, a, \dot{a})(\theta_0 + w) - K_v v, \quad (3.32)$$

sin embargo, ahora se supone desconocido el valor para la cota superior de la desviación en los parámetros ρ . La señal de compensación queda

$$w = -\hat{\rho} \frac{Y^T v}{\|Y^T v\| + \epsilon}, \quad (3.33)$$

con $\hat{\rho}$ el estimado de ρ , $\|\tilde{\theta}\| \leq \rho$, la que es actualizada conforme a la ley

$$\dot{\hat{\rho}} = -\sigma \hat{\rho} + \gamma \frac{\|Y^T v\|^2}{\|Y^T v\| + \epsilon}, \quad \hat{\rho}(0) > 0, \quad (3.34)$$

donde $\epsilon, \sigma > 0$ son parámetros de diseño, y $\gamma > 0$ es la ganancia de adaptación.

Cerrando el lazo (3.32) en (3.1), se obtiene

$$M(q)\dot{v} + C(q, \dot{q})v - K_v v = Y(q, \dot{q}, a, \dot{a})(\tilde{\theta} + w). \quad (3.35)$$

Análisis de estabilidad

Teorema 2. Considere el sistema en lazo cerrado (3.1), (3.32)-(3.34). Entonces,

- (i) todas las señales están acotadas, y
- (ii) el error de seguimiento, $\tilde{\rho} \triangleq \rho - \hat{\rho}$, es estable uniformemente asintóticamente acotado (u.u.b.) por

$$\|\tilde{\rho}\| \leq \frac{1}{\lambda \lambda_{\min}^{1/2}(K_v)} \left(\frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 + \epsilon \rho \right)^{1/2}, \quad (3.36)$$

donde $\lambda_{\min}(K_v)$ denota el eigenvalor mínimo de K_v .

Prueba: De la ec. (3.34), vemos que esta se puede expresar como

$$\frac{1}{\gamma} \dot{\hat{\rho}} + \frac{\|Y^T v\|^2}{\|Y^T v\| + \epsilon} = \frac{\sigma}{\gamma} \hat{\rho}. \quad (3.37)$$

Considere ahora la candidata a función Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} v^T M v + \frac{1}{2\gamma} \hat{\rho}^2,$$

su derivada con respecto al tiempo a lo largo de (3.35) y (3.37) es

$$\dot{V}(t) = -v^T K_v v + v^T Y(\tilde{\theta} + w) + \frac{1}{\gamma} \hat{\rho} \dot{\hat{\rho}}.$$

Examinando el segundo y tercer término,

$$v^T Y(\tilde{\theta} + w) + \frac{1}{\gamma} \hat{\rho} \dot{\hat{\rho}} \quad (3.38)$$

$$= v^T Y(\tilde{\theta} - \hat{\rho} \frac{\|Y^T v\|}{\|Y^T v\| + \epsilon}) + \frac{1}{\gamma} \hat{\rho} \dot{\hat{\rho}} \quad (3.39)$$

$$\leq \|v^T Y\| (\|\hat{\theta}\| - \hat{\rho} \frac{\|Y^T v\|}{\|Y^T v\| + \epsilon}) + \frac{1}{\gamma} \hat{\rho} \dot{\hat{\rho}} \quad (3.40)$$

$$= \frac{\|Y^T v\|^2}{\|Y^T v\| + \epsilon} (\|\hat{\theta}\| - \rho) + \hat{\rho} \left(\frac{\|Y^T v\|^2}{\|Y^T v\| + \epsilon} + \frac{1}{\gamma} \dot{\hat{\rho}} \right) + \frac{\|Y^T v\|}{\|Y^T v\| + \epsilon} \|\hat{\theta}\| \epsilon \quad (3.41)$$

$$\leq \frac{\sigma}{\gamma} \hat{\rho} \dot{\hat{\rho}} + \epsilon \rho \quad (3.42)$$

$$= -\frac{\sigma}{\gamma} \left(\hat{\rho} - \frac{1}{2} \rho \right)^2 + \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 + \epsilon \rho, \quad (3.43)$$

se obtiene

$$\dot{V}(t) \leq -v^T K_v v - \frac{\sigma}{\gamma} \left(\hat{\rho} - \frac{1}{2} \rho \right)^2 + \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 + \epsilon \rho.$$

y dado que $-\frac{\sigma}{\gamma} \left(\hat{\rho} - \frac{1}{2} \rho \right)^2 \leq 0$ entonces

$$\dot{V}(t) \leq -v^T K_v v + \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 + \epsilon \rho. \quad (3.44)$$

El acotamiento de las señales sigue inmediatamente de argumentos estándar.

Para ver (ii), de (3.44) $\dot{V}(t) \geq 0$ si

$$v^T K_v v \leq \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 + \epsilon \rho$$

y sabiendo que K_v es simétrica positiva definida

$$\lambda_{\min}(K_v) \|v\|^2 \leq \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 + \epsilon \rho$$

despejando $\|v\|$

$$\|v\| \leq \left[\frac{1}{\lambda_{\min}(K_v)} \left(\frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 + \epsilon \rho \right) \right]^{1/2}. \quad (3.45)$$

y finalmente de (3.29) en (3.45) se obtiene (ii).

□□□

Nota 2: La señal de compensación w proporciona una señal de control continua. La expresión (3.33) es parecida a la propuesta en [7].

Nota 3: Note que de (3.29), (3.31)-(3.34) y (3.45), en la selección de los parámetros K_v , σ , γ y ϵ , existe un compromiso entre la cota del error de seguimiento y la magnitud de la señal de control.

Nota 5: La modificación σ en la ley de actualización (3.34) evita que $\hat{\rho}$ sea siempre positiva, lo que ocasionaría que la estimación del parámetro fuera siempre creciente.

Nota 6: Similarmente a [41], seleccionando $\epsilon = \gamma_1 e^{-\gamma_1 t}$ y $\sigma = 0$, la u.a.s. se puede probar. Sin embargo, simulaciones numéricas mostraron una señal de control con bastante "chattering" al momento de seguir a una señal cuadrada, además de que $\hat{\rho}(t)$ crecía todo el tiempo.

3.6 Ley de control robusta adaptable con estructura variable

En esta sección se presenta la utilización del recurso de modos deslizantes (ver [33] cap. 11 para una descripción acerca de esta técnica) para el cálculo de la señal de compensación w , que también asegura u.u.b.

El recurso de modos deslizantes es un caso especial del diseño de sistemas con estructura variable, entendiéndose por sistema con estructura variable aquel cuya estructura puede ser cambiada o switcheada abruptamente conforme a una cierta lógica de switcheo, un ejemplo muy simple de este tipo de sistemas es el denominado control "on-off".

La característica principal del recurso de modos deslizantes es la aparición de una velocidad de switcheo extremadamente alta entre los valores que toma el la señal de control [1]. La idea básica en esta técnica consiste en definir una superficie en el espacio de estados, denominada superficie deslizante, tal que sea capaz de deslizar cualquier trayectoria que caiga sobre ella hacia el punto de equilibrio, o una vecindad en torno de él. Así, la ley de control se diseña con la finalidad de hacer tender a todas las trayectorias cercanas hacia dicha superficie, ya que una vez atrapada la trayectoria en esta, la dinámica del sistema en lazo cerrado es completamente gobernada por las ecuaciones que definen a la superficie [33].

En el resultado que se presenta a continuación, únicamente la señal de compensación w es calculada utilizando esta técnica, de esta forma, la estructura general de la señal de control presentada en la sección anterior ec. (3.32) conserva su misma forma, i.e.

$$\tau = \tau_0 + Y^T(q, \dot{q}, a, \dot{a})w = Y^T(q, \dot{q}, a, \dot{a})(\bar{\theta}_0 + w) - K_v v, \quad (3.46)$$

Al igual que la dinámica del error, cerrando el lazo entre (3.46) y (3.1), i.e.

$$M(q)\dot{v} + C(q, \dot{q})v - K_v v = Y^T(q, \dot{q}, a, \dot{a})(\bar{\theta} + w). \quad (3.47)$$

Primeramente analizaremos el caso más simple, esto es, se supone conocida la cota ρ . Se propone la siguiente señal de compensación

$$w = -\rho \operatorname{sgn}(Y^T v). \quad (3.48)$$

En este caso, se establece como superficie deslizante

$$\dot{q} \triangleq v - \lambda \bar{q}, \quad \text{para } v = 0$$

como en [33], se puede garantizar atractividad de la superficie deslizante tomando la siguiente candidata a función Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} v^T M v \quad (3.49)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (3.35) y (3.48) es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -v^T K_v v + v^T Y^T (\bar{\theta} + w) \\ &= -v^T K_v v + v^T Y^T [\bar{\theta} - \rho \operatorname{sgn}(Y^T v)] \\ &\leq -v^T K_v v + |v^T Y^T| (\|\bar{\theta}\| - \rho) \\ &\leq -v^T K_v v \end{aligned} \quad (3.50)$$

Sabemos por la desigualdad de Raileigh que

$$-v^T K_v v \leq -\lambda_{\min}(K_v) v^T v \quad (3.51)$$

y de (3.49) por la propiedad 1

$$V = \frac{1}{2} v^T M v \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(M) v^T v \quad (3.52)$$

sustituyendo (3.52) en (3.51)

$$-v^T K_v v \leq -2 \frac{\lambda_{\min}(K_v)}{\lambda_{\max}(M)} V \quad (3.53)$$

llevando esta última a (3.50) se obtiene

$$\frac{1}{2} \dot{V} \leq -\eta V, \quad \text{para } \eta = \frac{\lambda_{\min}(K_v)}{\lambda_{\max}(M)}$$

que es la condición de atracción de la superficie deslizante. Para mas detalles ver [33].

La versión adaptable de esta ley se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 3: Considere el sistema en lazo cerrado (3.1), (3.32) con señal de compensación

$$w = -\hat{\rho} \operatorname{sgn}(Y^T v)$$

donde el parámetro $\hat{\rho}(t)$ se actualiza de acuerdo a la siguiente ley

$$\dot{\hat{\rho}} = -\sigma \hat{\rho} + \gamma |Y^T v| \quad (3.54)$$

Entonces,

- (i) todas las señales están acotadas, y
- (ii) el error de seguimiento es estable uniformemente acotado (u.u.b.) por

$$\|\hat{q}\| \leq \frac{1}{\lambda \lambda_{\min}^{1/2}(K_v)} \left(\frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 \right)^{1/2}, \quad (3.55)$$

donde $\lambda_{\min}(K_v)$ denota el valor propio mínimo de K_v .

Prueba: Vemos que la ec. (3.54) puede expresarse como

$$\frac{1}{\gamma} \dot{\hat{\rho}} + |Y^T v| = \frac{\sigma}{\gamma} \hat{\rho}. \quad (3.56)$$

Con base en esto se propone la candidata a función Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} v^T M v + \frac{1}{2\gamma} \hat{\rho}^2,$$

cuya derivada con respecto al tiempo a lo largo de (3.35) es

$$\dot{V}(t) = -v^T K_v v + v^T Y'(\bar{\theta} + w) + \frac{1}{\gamma} \dot{\rho} \dot{\rho}.$$

Examinando el segundo y tercer término, y considerando (3.56),

$$v^T Y'(\bar{\theta} + w) + \frac{1}{\gamma} \dot{\rho} \dot{\rho} \quad (3.57)$$

$$= v^T Y' \bar{\theta} - v^T Y' \hat{\rho} \operatorname{sgn}(Y^T v) + \frac{1}{\gamma} \dot{\rho} \dot{\rho} \quad (3.58)$$

$$= v^T Y' \bar{\theta} - \hat{\rho} |Y^T v| + \frac{1}{\gamma} \dot{\rho} \dot{\rho} \quad (3.59)$$

$$\leq -\hat{\rho} |Y^T v| + \frac{1}{\gamma} \dot{\rho} \dot{\rho} \quad (3.60)$$

$$\leq \frac{\sigma}{\gamma} \dot{\rho} \dot{\rho} \quad (3.61)$$

$$= -\frac{\sigma}{\gamma} \left(\hat{\rho} - \frac{1}{2} \rho \right)^2 + \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 \quad (3.62)$$

$$\leq \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 \quad (3.63)$$

se obtiene

$$\dot{V}(t) \leq -v^T K_v v + \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 \quad (3.64)$$

El acotamiento de las señales sigue inmediatamente de argumentos estándar.

Para ver (ii), de (3.64) $\dot{V}(t) \geq 0$ si

$$v^T K_v v \leq \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2$$

y sabiendo que K_v es simétrica positiva definida

$$\lambda_{\min}(K_v) \|v\|^2 \leq \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2$$

despejando $\|v\|$

$$\|v\| \leq \left[\frac{1}{\lambda_{\min}(K_v)} \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 \right]^{1/2}. \quad (3.65)$$

y finalmente de (3.29) en (3.65) se obtiene (ii).

Siguiendo un proceso similar al de la ley anterior se puede probar que esta ley cumple con la condición de existencia y atractividad de la superficie deslizante. Se debe notar que ahora la superficie deslizante no está definida para $v = 0$ sino que v queda definida por una vecindad, esto por supuesto acarrea problemas de "chattering" al momento de caer en la superficie deslizante, pues la ley de control va a estar switchando sobre dicha superficie hasta que la trayectoria alcance la bola de equilibrio.

□□□

Debido a la introducción de la función $\text{sgn}(\cdot)$, esta ley de control presenta cierto "chattering". A fin de aliviar este problema se propone modificar la señal de compensación de la siguiente forma

$$w = \begin{cases} -\hat{\rho} \text{sgn}(Y^T v) & |Y^T v| > \epsilon \\ -\hat{\rho} \frac{Y^T v}{\epsilon} & |Y^T v| \leq \epsilon \end{cases} \quad (3.66)$$

esto es, suavizar el brinco entre uno y otro valor de la función $\text{sgn}(\cdot)$, tal y como lo proponen [10, 34].

Con la correspondiente ley de actualización

$$\dot{\hat{\rho}} = \begin{cases} -\sigma \hat{\rho} + \gamma |Y^T v| & |Y^T v| > \epsilon \\ -\sigma \hat{\rho} + \gamma \frac{|Y^T v|^2}{\epsilon} & |Y^T v| \leq \epsilon \end{cases} \quad (3.67)$$

Análisis de estabilidad

Teorema 4: Considere el sistema en lazo cerrado (3.1), (3.32) con señal de compensación (3.66) y ley de actualización (3.67).

Entonces,

- (i) todas las señales están acotadas, y
- (ii) el error de seguimiento es estable uniformemente acotado (u.u.b.) por

$$\|\tilde{q}\| \leq \frac{1}{2\lambda \lambda_{\min}^{1/2}(K_v)} (\frac{\sigma}{\gamma} \rho^2 + \epsilon \rho)^{1/2}, \quad (3.68)$$

donde $\lambda_{\min}(K_v)$ denota el eigenvalor mínimo de K_v .

Prueba: Considerando la misma función candidata

$$V(t) = \frac{1}{2} v^T M v + \frac{1}{2\gamma} \hat{\rho}^2$$

cuya derivada respecto al tiempo es

$$\dot{V}(t) = -v^T K_v v + v^T Y(\bar{\theta} + w) + \frac{1}{\gamma} \hat{\rho} \dot{\hat{\rho}}$$

Si $|Y^T v| > \epsilon$, entonces la señal de compensación y la ley de actualización son respectivamente

$$w = -\hat{\rho} \text{sgn}(Y^T v) \quad (3.69)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = -\sigma \hat{\rho} + \gamma |Y^T v| \quad (3.70)$$

Este caso ya fue analizado antes, de donde se obtuvo

$$\dot{V}(t) \leq -v^T K_v v + \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 \quad (3.71)$$

y el acotamiento para $\|v\|$ resultó

$$\|v\| \leq \left[\frac{1}{\lambda_{\min}(K_v)} \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 \right]^{1/2}. \quad (3.72)$$

Ahora, si $|Y^T v| \leq \epsilon$, entonces se toman como leyes de compensación y de actualización las siguientes

$$w = -\hat{\rho} \frac{Y^T v}{\epsilon} \quad (3.73)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = -\sigma \hat{\rho} + \gamma \frac{|Y^T v|^2}{\epsilon} \quad (3.74)$$

Nuevamente analizando el segundo y tercer término de $\dot{V}(t)$ y sabiendo que $\dot{\hat{\rho}} = -\dot{\rho}$,

$$v^T Y (\hat{\theta} + w) + \frac{1}{\gamma} \hat{\rho} \dot{\hat{\rho}} \quad (3.75)$$

$$= v^T Y \hat{\theta} - v^T Y \hat{\rho} \frac{Y^T v}{\epsilon} + \frac{1}{\gamma} \hat{\rho} \dot{\hat{\rho}} \quad (3.76)$$

$$\leq \rho |v^T Y| - \frac{\hat{\rho}}{\epsilon} |Y^T v|^2 + \frac{1}{\gamma} \hat{\rho} \dot{\hat{\rho}} \quad (3.77)$$

$$= \rho |v^T Y| - \frac{\hat{\rho}}{\epsilon} |Y^T v|^2 + \frac{\dot{\hat{\rho}}}{\epsilon} |Y^T v|^2 + \frac{1}{\gamma} \hat{\rho} \dot{\hat{\rho}} \quad (3.78)$$

$$\leq \frac{\rho \epsilon}{4} + \hat{\rho} \left[\frac{|Y^T v|^2}{\epsilon} + \frac{\dot{\hat{\rho}}}{\gamma} \right] \quad (3.79)$$

$$= \frac{\rho \epsilon}{4} + \frac{\sigma}{\gamma} \hat{\rho} \dot{\hat{\rho}} \quad (3.80)$$

$$= \frac{\rho \epsilon}{4} + \frac{\sigma}{\gamma} \left(\frac{\rho^2}{4} - \left(\hat{\rho} - \frac{\rho}{2} \right)^2 \right) \quad (3.81)$$

$$\leq \frac{\rho \epsilon}{4} + \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 \quad (3.82)$$

sustituyendo en la ec. de $\dot{V}(t)$ se obtiene

$$\dot{V}(t) \leq -v^T K_v v + \frac{\rho \epsilon}{4} + \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 \quad (3.83)$$

de donde el acotamiento para $\|v\|$ resulta

$$\|v\| \leq \left[\frac{1}{\lambda_{\min}(K_v)} \left(\frac{\rho \epsilon}{4} + \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 \right) \right]^{1/2} \quad (3.84)$$

tomando el máximo para $\|v\|$ de entre (3.72) y (3.84), se obtiene

$$\|v\| \leq \left[\frac{1}{\lambda_{\min}(K_v)} \left(\frac{\rho \epsilon}{4} + \frac{\sigma}{4\gamma} \rho^2 \right) \right]^{1/2} \quad (3.85)$$

Y finalmente tras sustituir $\|\hat{q}\| \leq \frac{1}{\lambda} \|v\|$ en (3.85) se obtiene (ii). Nuevamente, el acotamiento de las señales se sigue inmediatamente de argumentos estándar.

□□□

Nota 6: Note que estas señales de compensación actúan directamente sobre la incertidumbre en los parámetros lo que se puede ver de la dinámica del error ec. (3.47), a diferencia de los algoritmos encontrados en la literatura [1] basados también en estructura variable, los cuales compensan a nivel de señal de par.

3.7 Resultados de simulación

A fin de observar el desempeño de las leyes de control robusto vistas en las secciones anteriores, se realizaron una serie de simulaciones en las cuales se tomó el mismo robot manipulador de dos grados de libertad considerado en [34] (ver fig. 3.1).

El modelo matemático de este robot está descrito por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + c_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{211}\dot{q}_2^2 + \phi_1 &= \tau_1 \\ d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 + c_{112}\dot{q}_1^2 + \phi_2 &= \tau_2 \end{aligned} \quad (3.86)$$

donde

$$\begin{aligned} d_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2 \\ d_{12} &= d_{21} = m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 \\ d_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ c_{121} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \\ c_{221} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \\ c_{112} &= m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \\ \phi_1 &= (m_1 l_{c1} + m_2 l_1)g \cos q_1 + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \\ \phi_2 &= m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

m_1	m_2	l_1	l_2	l_{c1}	l_{c2}	I_1	I_2
10.0	5.0	1	1	0.5	0.5	10/12	5/12

Tabla 3.1: Parámetros del robot para la simulación.

Para este robot se realizó la parametrización lineal necesaria para implementar la ley de control (3.15), donde el regresor quedó definido por

$$\begin{aligned} y_{11} &= \dot{a}_1 & y_{21} &= 0 \\ y_{12} &= \dot{a}_1 + \dot{a}_2 & y_{22} &= \dot{a}_1 + \dot{a}_2 \\ y_{13} &= \cos(q_2)(2\dot{a}_1 + \dot{a}_2) & y_{23} &= \cos(q_2)\dot{a}_1 + \sin(q_2)\dot{q}_1 a_1 \\ & - \sin(q_2)(\dot{q}_2 a_2 + \dot{q}_1 a_2 \dot{q}_2 a_1) & & \\ y_{14} &= g \cos(q_1) & y_{24} &= 0 \\ y_{15} &= g \cos(q_1) & y_{25} &= 0 \\ y_{16} &= g \cos(q_1 + q_2) & y_{26} &= g \cos(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

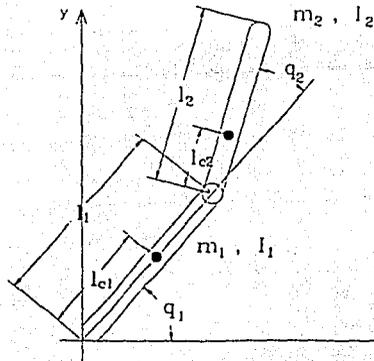


Figura 3.1: Robot planar de dos grados de libertad.

el vector de parámetros θ , para los casos sin carga y nominal correspondiente a esta parametrización lineal, se presenta en la tabla 3.2 donde además, se incluye una columna para las cotas en las incertidumbres de cada elemento de este vector. Esta tabla se obtiene a partir de los valores de los parámetros del robot, tabla 3.1, junto con los valores medios para

$$0 \leq \Delta m_2 \leq 10,$$

$$0 \leq \Delta l_{c2} \leq 0.5,$$

$$0 \leq \Delta l_2 \leq 1.25.$$

Esta variación en los parámetros corresponde a la carga desconocida soportada por el segundo eslabón del robot, traduciendo en una cota superior para $\rho = 13.64$.

θ	Definición	Brazo sin carga	Valor Nominal	Cota en las incertidumbres
θ_1	$m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + l_1$	8.33	13.33	5.00
θ_2	$m_2 l_{c2}^2 + l_2$	1.67	8.96	7.29
θ_3	$m_2 l_1 l_{c2}$	2.50	8.75	6.25
θ_4	$m_1 l_{c1}$	5.00	5.00	0.00
θ_5	$m_2 l_1$	5.00	10.00	5.00
θ_6	$m_2 l_{c2}$	2.50	8.75	6.25

Tabla 3.2: Vector de parámetros θ para simulación.

3.7.1 Ley robusta adaptable

Primeramente se presentan los resultados obtenidos al aplicar la ley robusta adaptable descrita por las ecuaciones (3.32), (3.33) y (3.34) propuestas en la sección 4.5.

Tomando los siguientes parámetros de diseño

$$\lambda = 100, \quad K_{v_1} = K_{v_2} = 40,$$

$$\sigma = 0.5, \quad \epsilon = 0.5, \quad \gamma = 4,$$

y considerando el valor 1 como condición inicial para $\hat{\rho}$. Las trayectorias deseadas fueron generadas utilizando un modelo de segundo orden críticamente amortiguado, al que se alimentó una señal cuadrada.

En la fig. 3.2 se puede observar que las señales de control son acotadas y no presentan mucho "chattering". La fig. 3.3 muestra como, para cada eslabón, la trayectoria real tiende a acercarse a la deseada y se mantiene dentro de un cierto margen teóricamente establecido por (3.36). La evolución del estimado $\hat{\rho}$ se presenta en la fig. 3.4, de donde se observa que este no crece indefinidamente gracias a la modificación sigma incorporada en la ley de actualización.

Para observar el comportamiento en el estado estacionario se aplicó un escalón (filtrado) como señal a seguir. Las gráficas para el error de seguimiento, la señal de control, las trayectorias real y deseada, y para el estimado de ρ cuando la señal de referencia es un escalón (filtrado) se encuentran en las figuras 3.5, 3.6 3.7, 3.8 respectivamente. De allí se observa que el error de seguimiento fué de $\hat{q}_1 = -5.48E - 6$ y $\hat{q}_2 = -8.84E - 4$.

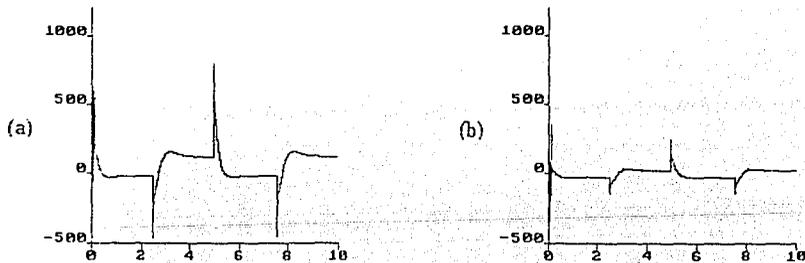


Figura 3.2: Señales de control (a) $u_1(t)$ y (b) $u_2(t)$.

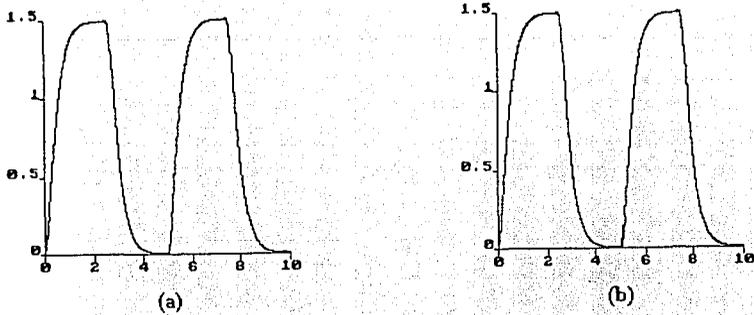


Figura 3.3: Trayectorias real y deseada (a) $q_1(t), q_1^d(t)$ y (b) $q_2(t), q_2^d(t)$.

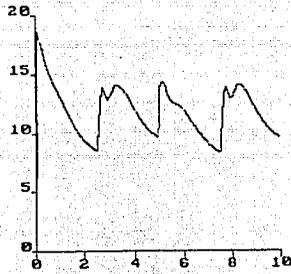


Figura 3.4: Evolución de $\hat{p}(t)$.

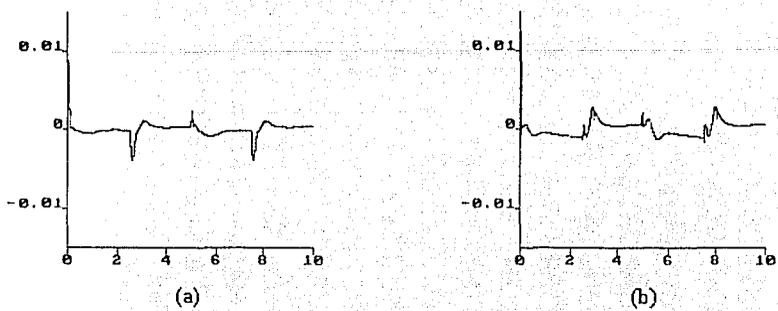


Figura 3.5: Errores de seguimiento (a) $\hat{q}_1(t)$ y (b) $\hat{q}_2(t)$.

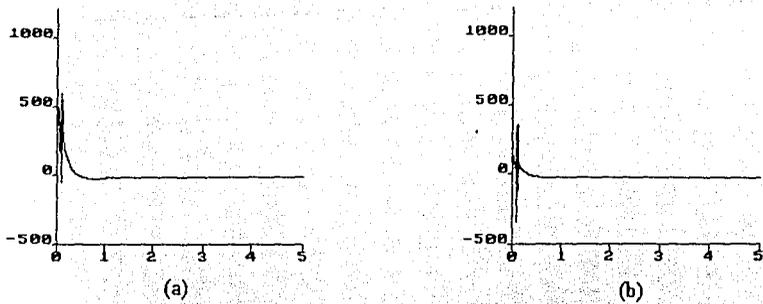


Figura 3.6: Señales de control (a) $u_1(t)$ y (b) $u_2(t)$.

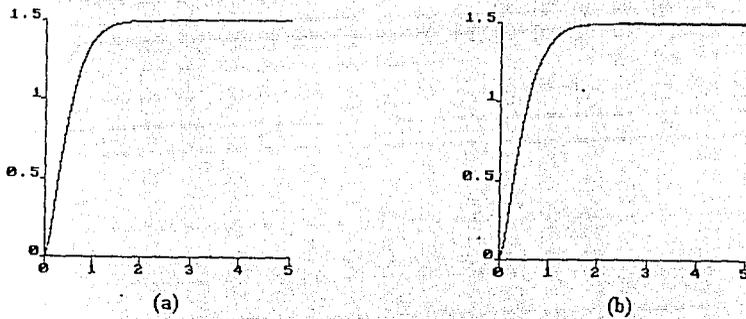


Figura 3.7: Trayectorias real y deseada (a) $q_1(t)$, $q_1^d(t)$ y (b) $q_2(t)$, $q_2^d(t)$.

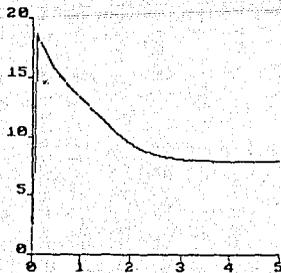


Figura 3.8: Evolución de $\hat{\rho}(t)$.

3.7.2 Ley robusta adaptable con estructura variable

A continuación se presentan los resultados de simulación para el caso de la ley de control robusta-adaptable con estructura variable descrita por las ecuaciones (3.32), (3.66) y (3.67) propuestas en la sección 4.6.

Tomando los siguientes parámetros de diseño

$$\lambda = 200, K_{v1} = K_{v2} = 60,$$

$$\sigma = 0.5, \epsilon = 1, \gamma = 2,$$

y considerando el valor 1 como condición inicial para $\hat{\rho}$. Nuevamente, las trayectorias deseadas fueron generadas utilizando un modelo de segundo orden críticamente amortiguado, al que se alimentó una señal cuadrada.

La fig. 3.9 muestra que las señales de control son acotadas, aunque presentan ciertas componentes de alta frecuencia debido a la conmutación en la señal de compensación. Las posiciones angulares real y deseada para cada eslabón se presentan en la fig. 3.10, y los correspondientes errores de seguimiento en la 3.11. La evolución del estimado de ρ se presenta en la fig. 3.12

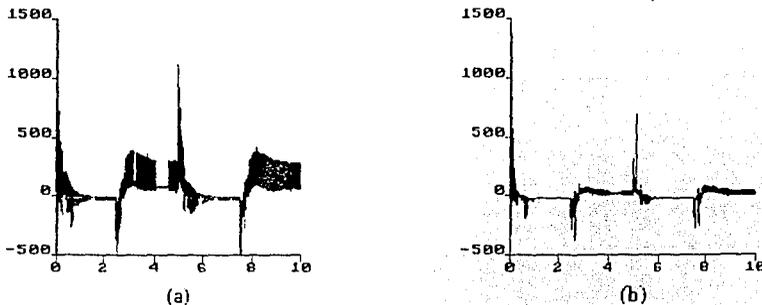


Figura 3.9: Señales de control (a) $u_1(t)$ y (b) $u_2(t)$.

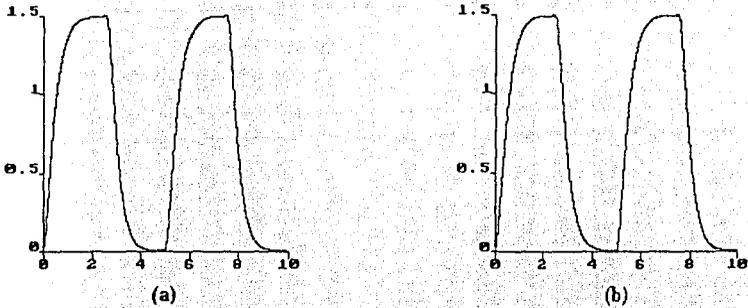


Figura 3.10: Trayectorias real y deseada (a) $q_1(t)$, $q_1^d(t)$ y (b) $q_2(t)$, $q_2^d(t)$.

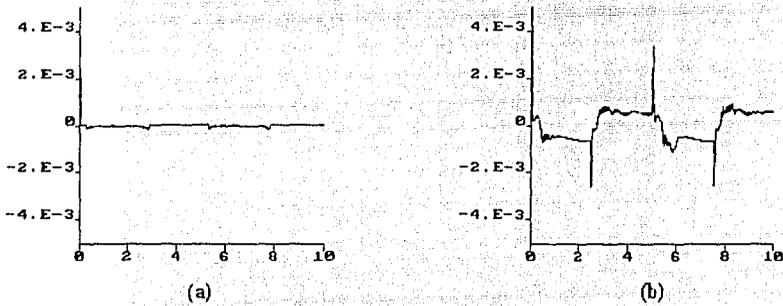


Figura 3.11: Errores de seguimiento (a) $\hat{q}_1(t)$ y (b) $\hat{q}_2(t)$.

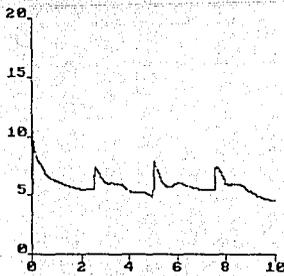


Figura 3.12: Evolución de $\hat{\rho}(t)$.

3.8 Resultados experimentales

Para verificar los resultados teóricos y de simulación se realizaron una serie de experimentos con los controladores propuestos empleando para ello un robot manipulador de dos grados de libertad desarrollado en el Laboratorio de Control de la DEPF1. En el apéndice A se da una breve descripción de las partes físicas que lo integran así como del programa desarrollado.

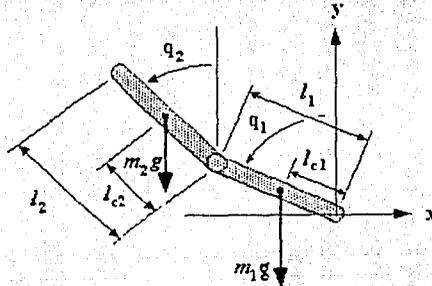


Figura 3.13: Esquema del robot 2 DOF.

El modelo matemático correspondiente al esquema presentado en la figura 3.13 está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + c_{12}\dot{q}_2 + \phi_1 &= \tau_1 \\ d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}\dot{q}_1 + \phi_2 &= \tau_2 \end{aligned} \tag{3.87}$$

donde

$$\begin{aligned} d_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ d_{12} &= d_{21} = m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2 - q_1) \\ d_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ c_{12} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2 \\ c_{21} &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1 \\ \phi_1 &= (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \sin q_1 \\ \phi_2 &= m_2 l_{c2} g \sin q_2 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Los valores nominales considerados para los parámetros del robot se concentran en la tabla 3.3, estos parámetros se obtuvieron en forma experimental y son muy cercanos a los verdaderos.

Considerando los parámetros nominales de la tabla 3.3, los elementos del vector de parámetros θ toman los valores dados en la tabla 3.4.

m_1	m_2	l_1	l_2	l_{c1}	l_{c2}	J_1	J_2
0.3000	0.2500	0.2300	0.2000	0.1000	0.1000	0.0013	0.0011

Tabla 3.3: Parámetros nominales del robot para la experimentación.

θ	Nominal
θ_1	0.0175
θ_2	0.0036
θ_3	0.0058
θ_4	0.0300
θ_5	0.0575
θ_6	0.0250

Tabla 3.4: Vector θ nominal para los experimentos.

En todos los experimentos se fijó la frecuencia de muestreo a 50 Hz, lo que implica un periodo de muestreo de 0.02 segundos.

Los resultados aquí presentados se refieren únicamente a la implementación de la ley robusta adaptable descrita por las ecuaciones (3.32), (3.33) y (3.34) propuestas en la sección 4.5

Los parámetros de diseño utilizados fueron

$$\lambda = 32, K_{v1} = K_{v2} = 32,$$

$$\sigma = 0.75, \epsilon = 0.75, \gamma = 0.5,$$

tomando como condicion inicial para \hat{p} el valor de 1.

Las trayectorias deseadas así como sus respectivas primera y segunda derivadas para cada eslabón se generaron a partir de un modelo LIT críticamente amortiguado de tercer orden al que se alimentó una señal cuadrada alterna. Utilizando el paquete de simulación Matlab se generó el archivo que contenía las columnas de datos correspondientes a estas trayectorias deseadas y sus respectivas derivadas, reuniendo un total de seis columnas.

En la fig. 3.14 se puede apreciar como las posiciones angulares de ambos eslabones tienden a mantenerse muy cerca de las señales de referencia respectivas.

Las señales de control $v_1(t)$ y $v_2(t)$, fig. 3.15, poseen componentes de alta frecuencia debidas principalmente a la estimación de la velocidad y a la baja resolución en los sensores de posición. Se observa además que ambas señales son acotadas, de hecho los parámetros de diseño y las señales de referencia se propusieron de tal manera que, el valor absoluto de las señales de control no excediera a 10, para evitar la saturación en la etapa de potencia, ya que esta etapa está diseñada para entregar voltajes en el rango de $[-10, +10]$ volts.

La fig. 3.16 muestra el error de seguimiento de ambos eslabones, el cual también resulta acotado. Si se sustituye la señal de referencia por un escalón, se observa que el error de

seguimiento resultante en estado estable no excede al valor de $5.7E - 2$, esto, aun a pesar de la baja precisión en los instrumentos utilizados en el experimento.

De la fig. 3.17 vemos que el estimado $\hat{\rho}$ resulta también acotado, y que gracias a la modificación sigma en la ley de actualización, este estimado se mantiene dentro de un cierto umbral.

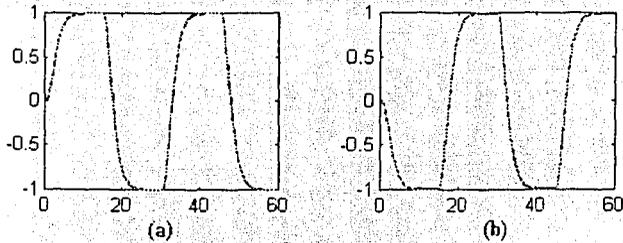


Figura 3.14: Posición angular: (a) $q_1(t)$, $q_1^d(t)$ y (b) $q_2(t)$, $q_2^d(t)$.

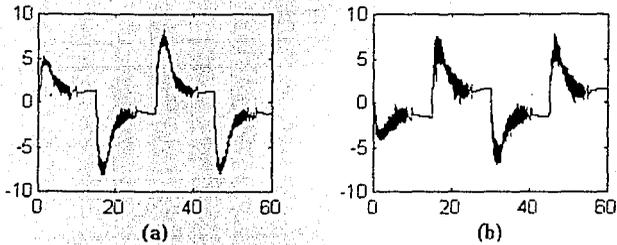


Figura 3.15: Señal de control: (a) $u_1(t)$, (b) $u_2(t)$.

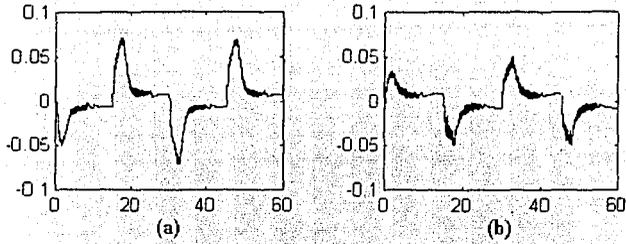


Figura 3.16: Error de seguimiento: (a) $\hat{q}_1(t)$, (b) $\hat{q}_2(t)$.

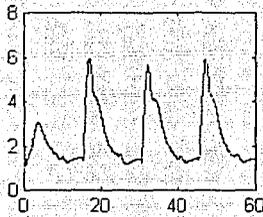


Figura 3.17: Evolución de $\hat{\rho}(t)$.

Capítulo 4

Control de trayectoria de robots flexibles

4.1 Introducción

Uno de los requerimientos para los robots actuales es el de elevar su velocidad en la operación, conservando la exactitud al seguir una trayectoria o un punto deseado. Se presenta así el problema de diseñar controladores en los que no se puede seguir despreciando ciertos fenómenos físicos que aparecen en este caso, tal como la flexibilidad que aparece en las uniones y en los eslabones del robot.

Se ha visto que para los robots con flexibilidad en las uniones, su dinámica presenta un fenómeno de resonancia [22, 30], que tiene gran influencia en su comportamiento. El despreciar este fenómeno en control, podría provocar graves problemas en la estabilidad del sistema completo. Es bien cierto también que incluir el efecto de la flexibilidad en el modelo, lo hace más complejo y complica el problema de diseño.

La elasticidad en las uniones puede ser observada en robots que utilizan actuadores armónicos, donde la deformación de los componentes mecánicos, cadenas y engranes, es significativa; otros actuadores como los hidráulicos y los actuadores directos muestran también cierto grado de elasticidad [31, 42]. En algunas situaciones, la elasticidad en las uniones, se ha introducido intensionalmente con el objeto de evitar daños al brazo del robot por colisiones accidentales cuando al interactuar con objetos externos.

Este problema ha atraído la atención de investigadores durante algún tiempo y se han propuesto varios métodos de diseño en la literatura, utilizando por ejemplo, perturbaciones singulares [9, 14, 32], estructura variable, análisis geométrico, métodos de linealización, técnicas basadas en pasividad [18, 20, 22], backstepping [15, 17], esquema basado en desacoplamiento [22, 42], entre otros.

En el esquema basado en desacoplamiento [22, 42], a través de un cambio de coordenadas en el modelo del robot flexible, se obtiene un sistema dinámico compuesto de dos etapas o bloques en cascada, denominados bloque del eslabón y bloque del actuador, razón por la que este tipo de esquema recibe el nombre de "esquema compuesto" o "esquema basado en

desacoplamiento”.

En presente capítulo nos enfocaremos a atacar dicho problema utilizando este último tipo de esquema, primeramente se obtendrá la versión de parámetros conocidos, y en seguida se verá la extensión al caso de incertidumbre en los parámetros basándonos para ello en los resultados obtenidos en los capítulos anteriores.

4.2 Definición del problema

Considérese el modelo simplificado de un robot de n eslabones como el propuesto en [30]

$$\begin{aligned} M(q_1)\ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1 + g(q_1) &= K(q_2 - q_1) \\ J\ddot{q}_2 + K(q_2 - q_1) &= \tau \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde $q_1 \in \mathbb{R}^n$ y $q_2 \in \mathbb{R}^n$ representan los ángulos del eslabón y del motor respectivamente, $M(q_1)$ es la matriz de inercias de $n \times n$ de los eslabones rígidos, J es la matriz diagonal de las inercias del actuador, $C(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1$ representa las fuerzas centrífugas y de coriolis, $g(q_1)$ representa los términos gravitacionales y $k \geq 0$ es la matriz diagonal conteniendo los coeficientes de rigidez de las uniones. En lo que resta nos referiremos a las dos ecuaciones anteriores como la dinámica de los eslabones y la dinámica del motor o actuador respectivamente.

Nota 1: Nuevamente $M(q_1)$, $C(q_1, \dot{q}_1)$ y $g(q_1)$ cumplen con las propiedades vistas en el capítulo 4 para el caso del robot rígido, siendo ahora el mapeo de $\tau \rightarrow \dot{q}_2$ es pasivo.

Nota 2: Mas aún, debido a la estructura diagonal a bloques de la matriz de inercias, el modelo (4.1) puede ser decompuesto en dos subsistemas en cascada con un cierto cambio de coordenadas, [42, 22, 21]

En principio, y bajo la suposición de que se conocen los parámetros del robot, el problema de control consistirá en encontrar una ley de control internamente estable para el sistema (4.1) tal que, con condiciones iniciales arbitrarias y para toda $q_1^d(t) \in C^1[0, \infty)$ acotada, se asegure

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} (q_1 - q_1^d) = 0$$

i.e., se va a buscar una ley que asegure seguimiento globalmente asintótico, manteniendo señales internas acotadas.

En seguida se obtendrá una ley con base en la vista en el capítulo anterior, para el caso en que existe incertidumbre en los parámetros, que asegure

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{q}_1\| \leq \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}_+$$

i.e., que asegure u.u.b. manteniendo las señales internas acotadas, con β suficientemente pequeña.

4.3 Ley de control compuesta

Reordenando el modelo dado por las ecuaciones (4.1), obtenemos

$$M(q_1)\ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1 + g(q_1) + Kq_1 = Kq_2 \quad (4.2)$$

$$J\ddot{q}_2 + Kq_2 = \tau + Kq_1 \quad (4.3)$$

Observamos que la ecuación (4.2) es similar a la del robot rígido, a excepción de que en este caso, la entrada está asociada al término q_2 , que es precisamente la salida de la siguiente ecuación que tiene por entradas a las señales τ y q_1 , de esta forma, podemos considerar al sistema así descrito como la interconexión entre dos bloques (fig. 4.1), el del eslabón y el del actuador, representados por las ecuaciones (4.2) y (4.3) respectivamente.

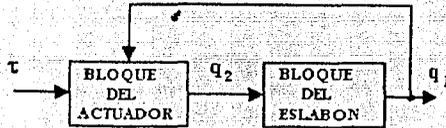


Figura 4.1: Descomposición en dos bloques

En este esquema, a diferencia del caso del robot rígido, la señal de control para los eslabones no se diseña directamente, de hecho, está asociada a la salida q_2 del bloque del actuador. La idea es hacer que la salida del bloque del actuador q_2 , siga a una cierta señal $q_2^d(t)$ tal que provoque que el bloque del eslabón siga a su vez a la señal de referencia $q_1^d(t)$.

4.4 Caso parámetros conocidos

Bloque del eslabón

Para el bloque del eslabón definido por la ecuación (4.2), proponemos la siguiente "ley de control" que es la comunmente denominada ley PD + precompensación

$$q_2^d = K^{-1}(M(q_1)\ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1 + g(q_1) + Kq_1 - K_{p1}\dot{q}_1 - K_{d1}\dot{q}_1) \quad (4.4)$$

donde $\hat{q}_1 = q_1 - q_1^d$.

A esta ley en realidad la podemos ver como una ley de control virtual, i.e., una señal que permitiría a este bloque, en caso de aplicarse a su entrada, seguir una trayectoria predeterminada.

En lazo cerrado con (4.2) obtenemos

$$M(q_1)\ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1 + K_{d1}\dot{q}_1 + (K_{p1} + K)\dot{q}_1 = K\dot{q}_2 \quad (4.5)$$

donde $\dot{q}_2 = q_2 - q_2^d$

En un intento por probar la estabilidad asintótica del sistema (4.5) propondríamos la siguiente función de Lyapunov positiva definida

$$V_1 = \frac{1}{2}\dot{q}_1^T M(q_1)\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_1^T (K_{p1} + K)\dot{q}_1 \quad (4.6)$$

cuya derivada respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de (4.5) es

$$\dot{V}_1 = -\dot{q}_1^T K_{d1}\dot{q}_1 + \dot{q}_1^T K\dot{q}_2 \quad (4.7)$$

de donde observamos que si hacemos que \dot{q}_2 tienda a cero, entonces la salida de este bloque, será asintóticamente estable.

Bloque del actuador

Para este bloque representado por (4.3) proponemos la siguiente ley de control nuevamente del tipo PD + precompensación

$$\tau = J\ddot{q}_2^d + K(q_2^d - q_1^d) + K_{p2}\dot{q}_2 - K_{d2}\dot{q}_2 \quad (4.8)$$

en lazo cerrado con (4.3)

$$J\ddot{q}_2 + K_{d2}\dot{q}_2 + (K_{p2} + K)\dot{q}_2 = K\dot{q}_1 \quad (4.9)$$

Para este caso, proponemos la siguiente función Lyapunov

$$V_2 = \frac{1}{2}\dot{q}_2^T J\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^T (K_{p2} + K)\dot{q}_2 \quad (4.10)$$

cuya derivada respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de (4.9) es

$$\dot{V}_2 = -\dot{q}_2^T K_{d2}\dot{q}_2 + \dot{q}_2^T K\dot{q}_1 \quad (4.11)$$

nuevamente, observamos que si hacemos que \dot{q}_1 tienda a cero, se cancela el segundo término.

Agrupando estos resultados, podemos ahora plantear el siguiente teorema.

Teorema 6: Considere el sistema (4.1) con ley de control compuesta por (4.4), (4.8). Entonces,

- (i) todas las señales se mantienen acotadas,
- (ii) \dot{q}_1 y \dot{q}_2 convergen a cero conforme $t \rightarrow \infty$.

Prueba: Se propone la siguiente candidata a Lyapunov

$$V = V_1 + V_2 + \dot{q}_1^T K\dot{q}_2 \quad (4.12)$$

en la cual se ha incluido un término cruzado a fin de cancelar los términos cruzados que aparecen en \dot{V}_1 y \dot{V}_2 .

Expresando (4.12) en forma matricial

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}_1 & \dot{\bar{q}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(q_1) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}_1 \\ \dot{\bar{q}}_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 & \bar{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K + K_{p1} & -K \\ -K & K + K_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

donde se observa que V es positiva definida para K_{p1} y K_{p2} positivas definidas.

Su derivada a lo largo de las trayectorias de (4.5) y (4.9) es

$$\dot{V} = -\dot{\bar{q}}_1^T K_{d1} \dot{\bar{q}}_1 - \dot{\bar{q}}_2^T K_{d2} \dot{\bar{q}}_2 \quad (4.14)$$

se puede demostrar que V verifica la desigualdad $\dot{V} \leq -\alpha V$ para $\alpha = 2 \frac{\lambda_{\max}(K_D)}{\lambda_{\min}(D(q_1))}$, $K_D = \text{diag}[K_{d1} \ K_{d2}]$ y $D(q_1) = \text{diag}[M(q_1) \ J]$ de donde se concluye estabilidad exponencial del punto de equilibrio.

□□□

Nota 3: Observe que la ley de control (4.8) contiene al término \ddot{q}_2^d el cual puede ser obtenido derivando dos veces (4.4). La expresión \ddot{q}_2^d envolverá términos como $M(q_1)$, $\dot{C}(q_1, \dot{q}_1)$ que a su vez dependen de \bar{q}_1 y $q_1^{(3)}$. Sin embargo, estos últimos pueden ser obtenidos a partir de (4.1). Por lo tanto la ley de control (4.8) requerirá mediciones únicamente de $q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, \dot{q}_2$.

Existen diversas opciones para calcular $q_2^d(t)$ por ejemplo el caso presentado por Brogliato y Ortega en [20, 3], donde para el cálculo de la ley de control integrada por q_2^d y τ proponen utilizar la ley de Slotine-Li [29] como a continuación

Bloque del eslabón

Definiendo

$$v_1 = \dot{\bar{q}}_1 + \lambda_1 \bar{q}_1, \quad a_1 = \dot{q}_1^d - \lambda_1 \bar{q}_1 \quad (4.15)$$

entonces q_2^d se calcula como

$$q_2^d = K^{-1}(u_R + K q_1^d) \quad (4.16)$$

donde

$$u_R = M(q_1) \dot{a}_1 + C(q_1, \dot{q}_1) a_1 + g(q_1) - K_{v1} v_1 \quad (4.17)$$

y en lazo cerrado con (4.2)

$$M(q_1) \dot{v}_1 + C(q_1, \dot{q}_1) v_1 + K_{v1} v_1 = K(\bar{q}_2 - \bar{q}_1) \quad (4.18)$$

Bloque del actuador

Siguiendo el mismo algoritmo de Slotine-Li, τ nos queda

$$\tau = J \dot{a}_2 + K(q_2^d - q_1^d) - K_{v2} v_2 \quad (4.19)$$

donde

$$v_2 = \dot{\bar{q}}_2 + \lambda_2 \bar{q}_2, \quad a_2 = \dot{q}_2^d - \lambda_2 \bar{q}_2$$

en lazo cerrado con (4.3)

$$J\dot{v}_2 + K_{v2}v_2 = K(\hat{q}_1 - \hat{q}_2) \quad (4.20)$$

Para el análisis de estabilidad, se propone la siguiente función Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(q_1) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{q}_1 & \hat{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K + 2\lambda K_{v1} & -K \\ -K & K + 2\lambda K_{v2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (4.18) y (4.20) después de algunos cálculos directos resulta

$$\dot{V} = - \begin{bmatrix} \hat{q}_1 & \hat{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(K + K_{v1}) & -\lambda K \\ -\lambda K & \lambda(K + K_{v2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\hat{q}}_1 & \dot{\hat{q}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{v1} & 0 \\ 0 & K_{v2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{q}}_1 \\ \dot{\hat{q}}_2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Esto prueba la estabilidad del equilibrio, más aún, V verifica la desigualdad $\dot{V} \leq -\alpha V$ para alguna $\alpha \geq 0$, de donde se concluye estabilidad exponencial del punto de equilibrio. Ver [20, 3] para más detalles.

Nota 4: Cabe mencionar que en forma simultánea fue presentado por [4] un resultado similar utilizando el esquema compuesto, con la diferencia de que para el bloque del actuador utiliza PD + precompensación y además cancela completamente al término de acoplamiento $K(q_2 - q_1)$.

Nota 5: Como puede verse, se pueden derivar una gran cantidad de controladores siguiendo esta estructura, ya que en principio, es posible aplicar los mismos algoritmos que han sido utilizados para el caso de robots rígidos, e incluso se pueden dar combinaciones entre ellos.

4.5 Caso parámetros desconocidos

Se propone nuevamente una serie de parámetros nominales con base en los cuales se plantea la ley de control nominal, en este caso compuesta por dos partes, una por cada bloque, y a cada una de ellas se añade la respectiva señal de compensación.

Bloque del eslabón

Se propone calcular q_2^d siguiendo el algoritmo Slotine-Li como en la sección anterior, i.e.

$$q_2^d = K^{-1}(u_{R0} + Y_1 w_1 + K q_1) \quad (4.23)$$

donde

$$u_{R0} = M_0(q_1)\dot{a}_1 + C_0(q_1, \dot{q}_1)a_1 + g_0(q_1) - K_{v1}v_1 \quad (4.24)$$

$$= Y_1^T \theta_{10} - K_{v1}v_1 \quad (4.25)$$

con Y_1 el regresor, θ_{10} el vector de parámetros nominales y v_1, a_1 definidas como

$$v_1 = \dot{\hat{q}}_1 + \lambda_1 \hat{q}_1, \quad a_1 = \ddot{q}_1^d - \lambda_1 \dot{\hat{q}}_1$$

(4.23) en lazo cerrado con (4.2) resulta

$$M(q_1)\dot{v}_1 + C(q_1, \dot{q}_1)v_1 + K_{v1}v_1 = Y_1^T(\bar{\theta}_1 + w_1) + K(\bar{q}_2) \quad (4.26)$$

donde $\bar{\theta}_1 \triangleq \theta_{10} - \theta_1$

Proponiendo la siguiente función positiva definida

$$V_1 = \frac{1}{2}v_1^T D(q_1)v_1$$

su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado es

$$\dot{V}_1 = -v_1^T K_{v1}v_1 + v_1^T Y(\bar{\theta}_1 + w_1) + v_1^T K\bar{q}_2$$

Note que el segundo término de esta ecuación es muy parecido a los términos analizados para el caso rígido, de esta manera, si definimos la señal de compensación como en el capítulo anterior, esto es,

$$w_1 = -\rho_1 \frac{Y_1^T v_1}{\|Y_1^T v_1\| + \epsilon_1}, \quad (4.27)$$

donde ρ es la cota superior de la incertidumbre en los parámetros del eslabón, i.e., $\|\bar{\theta}\| \leq \rho$ y ϵ_1 es parámetro de diseño.

Entonces haciendo uso de los mismos argumentos del capítulo anterior, y con base en esta definición de w_1 , el segundo término cumple con

$$v_1^T Y(\bar{\theta}_1 + w_1) \leq \rho_1 \epsilon_1$$

Por lo tanto, \dot{V}_1 nos queda

$$\dot{V}_1 \leq -v_1^T K_{v1}v_1 + \rho_1 \epsilon_1 + v_1^T K\bar{q}_2 \quad (4.28)$$

Bloque del actuador

Para este bloque, τ se propone como

$$\begin{aligned} \tau &= J\hat{a}_2 + K(q_2 - q_1) + Y_2 w_2 - K_{v2}v_2 \\ &= Y_2(\theta_{20} + w_2) + K(q_2 - q_1) - K_{v2}v_2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde Y_2 y θ_{20} provienen de la parametrización lineal, y

$$v_2 = \dot{q}_2 + \lambda_2 \bar{q}_2, \quad a_2 = \dot{q}_2^d - \lambda_2 \bar{q}_2$$

de (4.29) en lazo cerrado con (4.3) resulta

$$J\dot{v}_2 + K_{v2}v_2 = Y_2(\bar{\theta}_{20} + w_2) \quad (4.30)$$

donde $\bar{\theta}_{20} \triangleq \theta_{20} - \theta_2$

Se propone la siguiente función positiva definida

$$V_2 = \frac{1}{2} v_2^T J v_2$$

su derivada a lo largo de las trayectorias de (4.30) es

$$\dot{V}_2 = -v_2^T K_{v2} v_2 + v_2^T Y_2 (\dot{\theta}_2 + w_2)$$

Al igual que para el bloque de eslabón, el segundo término de esta ecuación es similar a aquellos analizados para el caso rígido.

Si definimos la señal de compensación como

$$w_2 = -\rho_2 \frac{Y_2^T v_2}{\|Y_2^T v_2\| + \epsilon_2} \quad (4.31)$$

donde ρ_2 es la cota superior de la incertidumbre en los parámetros del actuador, i.e. $\|\dot{\theta}_2\| \leq \rho_2$ y ϵ_2 es parámetro de diseño.

Entonces el segundo término cumple con

$$v_2^T Y_2 (\dot{\theta}_2 + w_2) \leq \rho_2 \epsilon_2$$

Por lo que \dot{V}_2 resulta

$$\dot{V}_2 \leq -v_2^T K_{v2} v_2 + \rho_2 \epsilon_2 \quad (4.32)$$

Para el análisis de estabilidad del sistema completo, se propone la siguiente función Lyapunov

$$V = V_1 + V_2$$

cuya derivada, conforme a (4.28) y (4.32), es

$$\dot{V} \leq -v_1^T K_{v1} v_1 + \rho_1 \epsilon_1 + v_1^T K \hat{q}_2 - v_2^T K_{v2} v_2 + \rho_2 \epsilon_2$$

haciendo uso de algunas propiedades de las normas obtenemos

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(K_{v1}) \|v_1\|^2 + \lambda_{\max}(K) \|v_1\| \|\hat{q}_2\| - \lambda_{\min}(K_{v2}) \|v_2\|^2 + \rho_1 \epsilon_1 + \rho_2 \epsilon_2$$

y sabiendo que

$$\|\hat{q}_i\| \leq \frac{1}{s + \lambda_i} \|v_i\| = \frac{1}{\lambda_i} \|v_i\| \quad (4.33)$$

entonces

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(K_{v1}) \|v_1\|^2 + \frac{\lambda_{\max}(K)}{\lambda_2} \|v_1\| \|v_2\| - \lambda_{\min}(K_{v2}) \|v_2\|^2 + \rho_1 \epsilon_1 + \rho_2 \epsilon_2$$

Con la finalidad de obtener el tamaño de las cotas sobre $\|\hat{q}_1\|$ y $\|\hat{q}_2\|$ analizamos el caso $\dot{V} \geq 0$ de donde se define la siguiente bola

$$\lambda_{\min}(K_{v1}) \|v_1\|^2 - \frac{\lambda_{\max}(K)}{\lambda_2} \|v_1\| \|v_2\| + \lambda_{\min}(K_{v2}) \|v_2\|^2 \leq \rho_1 \epsilon_1 + \rho_2 \epsilon_2 \quad (4.34)$$

de esta forma, dentro de la bola $\dot{V} \geq 0$ y fuera de ella $\dot{V} \leq 0$

Completando el cuadrado en (4.34) para $\|v_2\|$

$$\lambda_{\min}(K_{v1}) \left[\|v_1\| - \frac{\lambda_{\max}(K)}{\sqrt{2}\lambda_2\lambda_{\min}(K_{v1})} \|v_2\| \right]^2 + \left[\frac{\lambda_{\max}^2(K)}{2\lambda_2^2\lambda_{\min}^2(K_{v1})} - \lambda_{\min}(K_{v2}) \right] \|v_2\|^2 \leq \rho_1\epsilon_1 + \rho_2\epsilon_2 \quad (4.35)$$

Si se elimina el primer término del lado izquierdo de la desigualdad (4.35) su sentido no cambia pues dicho término es siempre positivo, quedando

$$\left[\frac{\lambda_{\max}^2(K)}{2\lambda_2^2\lambda_{\min}^2(K_{v1})} - \lambda_{\min}(K_{v2}) \right] \|v_2\|^2 \leq \rho_1\epsilon_1 + \rho_2\epsilon_2 \quad (4.36)$$

despejando $\|v_2\|$ de (4.36) y considerando (4.33) se obtiene

$$\|\hat{q}_2\| \leq \frac{1}{\lambda_2} \left[\frac{\rho_1\epsilon_1 + \rho_2\epsilon_2}{\frac{\lambda_{\max}^2(K)}{2\lambda_2^2\lambda_{\min}^2(K_{v1})} - \lambda_{\min}(K_{v2})} \right]^{\frac{1}{2}}$$

bajo la condición

$$\frac{\lambda_{\max}^2(K)}{2\lambda_2^2\lambda_{\min}^2(K_{v1})} > \lambda_{\min}(K_{v2})$$

Si siguiendo el mismo proceso anterior, pero ahora para $\|v_1\|$, se obtiene

$$\|\hat{q}_1\| \leq \frac{1}{\lambda_1} \left[\frac{\rho_1\epsilon_1 + \rho_2\epsilon_2}{\frac{\lambda_{\max}^2(K)}{2\lambda_1^2\lambda_{\min}^2(K_{v2})} - \lambda_{\min}(K_{v1})} \right]^{\frac{1}{2}}$$

con

$$\frac{\lambda_{\max}^2(K)}{2\lambda_1^2\lambda_{\min}^2(K_{v2})} > \lambda_{\min}(K_{v1})$$

De esta forma, vemos que la ley propuesta permite alcanzar estabilidad u.u.b. y también, de acuerdo a los argumentos estándar, se puede ver que se mantienen acotadas todas las señales.

Nota 6: En la ecuación (4.29) se requiere \hat{a}_2 , la cual a su vez contiene al término \hat{q}_2^2 , dicho término puede ser obtenido derivando la ecuación (4.23) dos veces quedando en función de $q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, q_1^{(3)}$ e implicando además el conocimiento de hasta la 4a. derivada para q_1^d .

Nota 7: Las derivadas de la ecuación (4.23) implican el cálculo de $(Y_1^* \dot{w}_1)$ y $(Y_1^* w_1)$ que aunque involucran el cálculo de la derivada de una norma, se puede realizar, pues ésta última no es más que una sumatoria de productos.

Nota 8: La presente ley tiene la desventaja de requerir mediciones de la aceleración y del comunmente llamado "jerk", i.e. $q_1^{(3)}$, para su implantación. Sin embargo, consideramos que es un principio para futuras investigaciones.

Capítulo 5

Conclusiones

- Se ha presentado una metodología para diseñar controladores del tipo robusto así como su combinación con adaptable; para una cierta clase de sistemas no lineales representada por los robots rígidos y flexibles para los cuales se tiene incertidumbre en los parámetros.
- Los controladores así diseñados, siguen muy de cerca el esquema utilizado por Corless-Leitmann y aseguran un tipo de estabilidad denominada estabilidad uniformemente asintóticamente acotada u.u.b.
- Se ha mostrado la sencillez de implantación de este tipo de leyes sobre todo para el caso del robot rígido, la cual se debe a las siguientes ventajas
 - No se requiere conocimiento exacto de los parámetros del sistema.
 - En las versiones no adaptables, únicamente se requiere conocer la cota sobre la desviación entre los parámetros verdaderos y los nominales propuestos.
 - Para la versión adaptable solamente se requiere actualizar un parámetro en línea, la cota superior de la incertidumbre en los parámetros.
 - La condición de excitación requerida es mucho menor que en los esquemas de control adaptable tradicionales puesto que al estimar solo un parámetro se requiere únicamente una espiga en el espectro de frecuencia de las señales involucradas en la ley de estimación.
 - El conocimiento a priori requerido para el diseño de esta ley es el mismo que el requerido para la mayoría de los esquemas de control adaptable de parámetros.
- En las leyes de control propuestas, la estructura siempre es la misma, se plantea una ley con parámetros nominales y se le añade una señal para compensar la incertidumbre, esta ley de compensación es en todo caso la que puede tomar otras formas, continua o discontinua, adaptable o no, pudiéndose generar una gran cantidad de leyes.
- Las leyes de control aquí presentadas tienen la ventaja sobre aquellas reportadas en la literatura en que no presentan un gran contenido de altas frecuencias, i.e., "chattering",

el cual generalmente es debido a que la señal de compensación se calcula como la división de dos cantidades que tienden a cero conforme el tiempo tiende a infinito.

- El utilizar la modificación σ en la ley de adaptación, nos permite asegurar que el estimado del parámetro no va a crecer indefinidamente, a diferencia de los resultados similares reportados en la literatura, lo que hace de éste, un resultado novedoso. En estos últimos, la ley de adaptación es puramente integral, donde el integrando es o bien positivo o cero, así que basta con cualquier ruido por pequeño que este sea, para que el estimado crezca todo el tiempo.
- En esta tesis se enfocó la mayor parte del trabajo a tratar con el caso del robot, sin embargo, nos interesaría transportar estos resultados a otras plantas, creemos que esto es factible de realizarse y se plantea como un posible trabajo a futuro.
- En el caso del robot flexible, el hecho de requerir medir hasta la tercera derivada de la posición del eslabón en la síntesis de la ley de control, constituye por supuesto una gran desventaja. Ahora bien, este problema surge del hecho de pretender hacer seguir al bloque del actuador una cierta señal variante en el tiempo que depende de la posición y velocidad del eslabón. Siendo éste bloque, un filtro de segundo orden, sabemos que para realizar el seguimiento se requiere conocer la primera y segunda derivadas de la señal a seguir, así que, para relajar dichas condiciones, se ha pensado en utilizar sus estimados, aprovechando el recurso presentado por Kelly en [12], i.e., pasar las señales por filtros de primer y segundo orden propios. Hasta el momento no se cuenta con una prueba formal de dicha conjetura, por lo que queda como problema abierto para futuras investigaciones.
- El esquema de desacoplamiento presentado en este trabajo para el estudio de los robots flexibles, nos plantea otro punto de vista para intentar trabajar con este tipo de plantas, de hecho, resultados como los de Tomei y los del mismo Kelly sin medir velocidad para control de posición de robots flexibles resultan más fáciles de visualizar lo mismo que las pruebas de estabilidad.

Apéndice A

Descripción del robot experimental

A.1 Construcción mecánica

La parte mecánica del robot, i.e. el brazo, consta de dos eslabones cada uno accionado por un motor de C. D. con reductor de velocidad (motoreductor). Los eslabones están elaborados con base en placas de aluminio y forman una estructura articulada que permite el movimiento independiente de cada uno desde 0 hasta 180 grados aproximadamente. La estructura está montada a una base de la que están sujetos los actuadores y esta a su vez reposa sobre una plancha de acero suficientemente pesada que permite movimientos rígidos en los brazos sin tener exceso de vibraciones.

El movimiento se transmite a cada eslabón a través de unas bandas dentadas flexibles, que comunican el movimiento desde los engranes sujetos a las flechas de los motoreductores, hacia los engranes fijos a los eslabones. Debe hacerse notar que este tipo de transmisión por banda, presenta la desventaja de incorporar un poco de flexibilidad en las uniones.

Esta disposición del brazo mecánico hace que los eslabones se desplacen manteniéndose siempre dentro de un mismo plano vertical, por lo que a este tipo de robots se les conoce en la literatura como robots planares (ver fig. A.1).

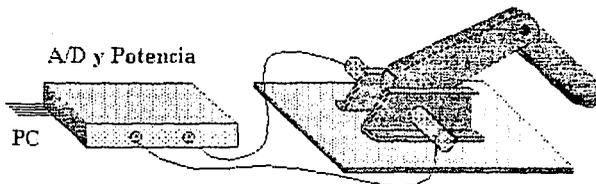


Figura A.1: Robot de 2 grados de libertad planar.

La relación de engranajes de cada motor es de:

$$r_{gm} = \frac{25}{8} \frac{34}{12} \frac{34}{12} \frac{29}{11} = \frac{838100}{12672} = 66.13794192$$

donde cada fracción corresponde a la relación de engranajes de cada engrane interno del motoreductor (relación de número de dientes entre engranes contiguos).

La relación entre el engrane acoplado al motoreductor y el engrane acoplado al eslabón para cada brazo es de:

$$r_{g11} = \frac{10}{3} \quad r_{g12} = \frac{25}{9}$$

Resultando una reducción total para cada brazo de

$$r_{g1} = r_{g11} * r_{gm} = 220.4598063$$

$$r_{g2} = r_{g12} * r_{gm} = 183.7165052$$

Los motores tienen acoplados a su flecha unos "encoders" como sensores de posición, proporcionando 6 pulsos por revolución (6 ppr) en cuadratura, pudiéndose detectar magnitud y sentido del giro.

Tomando en cuenta los datos anteriores, las posiciones de cada eslabón se pueden calcular de la siguiente manera en radianes:

$$\begin{aligned} Pos_1 &= \#Puls_1 / (r_{g1} * \frac{6}{2\pi}) = \#Puls_1 / 210.5236076 \text{ rad} \\ Pos_2 &= \#Puls_2 / (r_{g2} * \frac{6}{2\pi}) = \#Puls_2 / 175.4363397 \text{ rad} \end{aligned} \quad (A.1)$$

donde $\#Puls_i$ = número de pulsos generados por el encoder i .

A.2 Construcción electrónica

A.2.1 Motores

Los motores marca Rhino utilizados como actuadores en el robot tienen las siguientes características:

- Son motores de corriente directa de imán permanente en el estator que trabajan con voltajes máximos de ± 20 Volts.
- Tiene integrado un reductor de velocidad mecánico (motoreductor).
- Tienen acoplado un circuito para detectar la posición que consiste de dos parejas led-detector infrarojos sobre un disco de franjas blancas y negras que entregan señales cuadradas de amplitud 0-5 Volts, defasadas 90 grados una respecto a la otra, es decir, están en cuadratura (ver fig. A.5).

Nota 1: Cabe hacer la observación de que se deben aterrizar las carcazas para evitar interferencia o ruido en los contadores.

Para controlar al manipulador desde una computadora personal fue necesario diseñar y construir los circuitos necesarios para las tareas de adquisición de señales de los sensores (lectura de la posición de los brazos) y envío de las señales de control a los actuadores (voltaje a los motores), de esta forma se construyeron dos tarjetas: una que se introduce a la computadora y la otra que es externa.

A.2.2 Tarjeta interna

Esta tarjeta se introduce en algun "slot" libre de 8 bits de la PC. Está compuesta por los siguientes elementos:

[1.1] Interfaz Digital

Se compone de dos dispositivos PPI 8255 y los circuitos de decodificación necesarios para que puedan ser accedados por la computadora. Cada dispositivo PPI cuenta con tres puertos programables de entrada-salida de 8 bits cada uno. Uno de los PPI se programó como entrada, a través de el se lee la información de los contadores que monitorean la posición de los brazos. El otro dispositivo envía, a través de dos de sus puertos, la información hacia los convertidores digital - analógico conectados a la etapa de potencia para controlar a los motores. El tercer puerto tiene un uso mixto ya que a través de el se monitorean los interruptores de límite del robot, las señales del circuito de tiempo y también se envía la señal de restablecimiento (reset) hacia los contadores (ver fig. A.2).

[1.2] Circuito de Tiempo

Es un circuito necesario para fijar la frecuencia de muestreo. Para generar la base de tiempo se utilizó un circuito "Timer" LM-555 en configuración de oscilador de corrida libre con una frecuencia de 50 Hz. la que se ajusta a través de un potenciómetro de precisión. La salida de este circuito es monitoreada constantemente por una de las líneas de los puertos de entrada, y se hace sincronizar con la ejecución del programa para cada periodo de muestreo (ver fig. A.2).

[1.3] Circuitos Contadores

Se trata de dos arreglos de contadores, uno para cada brazo del robot que nos permiten determinar su posición. Ambos son idénticos y están formados, cada uno, por tres contadores "up-down" de 4 bits conectados en cascada, haciéndose dos arreglos de doce bits cada uno. Ambos arreglos tienen dos entradas, una de ellas para indicar si la cuenta será ascendente o descendente "up-down" y la otra para introducir los pulsos que se contabilizarán (ver fig. A.3).

A.2.3 Tarjeta externa

[2.1] Circuitos Convertidores Digital-Analógico (DAC)

Son dos "convertidores" Digital-Analógico de 8 bits DAC0800LCN que operan sobre la

señal de control. Estos circuitos toman la señal de control digital proveniente del PPI y la pasan a su forma analógica como niveles de voltaje, para ser enviada al circuito de potencia (ver fig. A.4).

Para acoplar la señal de salida analógica del convertor a la etapa de potencia se utilizó un amplificador seguidor de corriente JFET de bajo ruido TL082CP, que refuerza la señal del convertor y evita que se sobrecargue, además impide que entren señales de ruido que podrían desestabilizar la etapa de potencia.

[2.2] Circuito de Potencia

Dos amplificadores operacionales, externamente compensados LM301AN, reciben las señales de control provenientes del amplificador seguidor, la filtran y la envían a las bases de los transistores de potencia. Para cada motor se tiene una configuración con un transistor de potencia Darlington NPN TIP122 y otro PNP TIP127 en configuración complementaria. Estos reciben en sus bases la señal de control que proviene del amplificador operacional y entregan la señal amplificada en corriente al motor (ver fig. A.4).

[2.3] Circuito acondicionador de las señales de posición

Este circuito es el encargado de acondicionar la señal de salida de los detectores de posición para que pueda ser interpretada por los circuitos contadores. Como ya se había mencionado, los detectores ópticos entregan cada uno dos señales cuadradas defasadas 90° una respecto a la otra, de donde se extrae información del sentido de giro y número de pasos avanzados. La función del circuito de acondicionamiento de señal de posición es separar esta información y enviarla a los contadores.

Para detectar el sentido de giro del motor se toma una de las señales provenientes de los circuitos ópticos y se conecta directamente a la entrada "up-down" de los contadores. En el conteo de los pulsos, los flancos de subida de la otra señal son enviados a las entradas de los contadores correspondientes pasando por un circuito mono-estable formado por un arreglo R-C. Este circuito es necesario debido la forma en que operan los contadores 74LS191 (ver fig. A.3).

[2.4] Fuente de voltaje

Se requiere una fuente de voltaje polarizada con ± 12 Volts D.C. @1 Amp. para alimentar a las etapas de potencia y conversión, y una de 5 Volts D.C. @.5 Amp. utilizada también por los convertidores DAC's.

A.3 Consideraciones para la implementación

A.3.1 Estimación de la velocidad

Los motores actuadores poseen encoders que únicamente pueden sensar desplazamiento angular, haciéndose necesario implementar algún algoritmo para estimar la velocidad a partir de esta señal. En un principio se utilizó una aproximación numérica directa de la derivada, i.e., se dividía un incremento del desplazamiento por cada periodo de muestreo. Esta aproximación era demasiado burda, la señal de velocidad obtenida era muy ruidosa y por lo tanto

el desempeño de los controladores implementados con base en ella era muy pobre. Finalmente, se optó por utilizar un filtro de primer orden propio para realizar la estimación de la velocidad de cada motor como el propuesto por Kelly en [12]. Los filtros tienen la siguiente estructura

$$v_i = \frac{pb_i}{p + a_i} q_i \quad (A.2)$$

donde

- v_i : velocidad estimada del eslabón i
- q_i : posición angular del eslabón i
- p : operador derivada
- a_i, b_i : constantes positivas

con representación en espacio de estados (quitando el subíndice i)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax - abq \\ u &= x + bq \end{aligned}$$

discretizando

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= e^{-ah} x_k + b(e^{-ah} - 1)q_k \\ v_k &= x_k + bq_k \end{aligned}$$

tras una serie de experimentos se encontraron los siguientes valores mas o menos adecuados para los parámetros

$$a = 7, b = 11.83, h = 0.02$$

que sustituidos en la ecuación anterior dan como resultado

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 0.7558x_k - 2.889055q_k \\ v_k &= x_k + 11.83q_k \end{aligned}$$

A.3.2 Determinación de factores

Sabemos que en la obtención del modelo matemático se realizaron los siguientes cambios de variables

$$\begin{aligned} V_1 &= (r_{g1} \frac{R_1}{Km_1}) * \tau_1 = Fact_1 * \tau_1 \\ V_2 &= (r_{g2} \frac{R_2}{Km_2}) * \tau_2 = Fact_2 * \tau_2 \end{aligned}$$

donde

- V_i : voltaje de entrada el motor i
- r_{gi} : relación de engranajes del eslabón i
- R_i : Resistencia del devanado del rotor del motor i
- Km_i : Ganancia del motor i

quedando como entradas al robot τ_1 y τ_2 que son señales de par. Sin embargo, dado que la tarjeta de potencia entrega únicamente señales de voltaje, es necesario hacer una transformación de unidades y por ende encontrar los factores correspondientes.

Tras de una serie de experimentos se obtuvieron los siguientes valores para dichos factores

$$\begin{aligned} Fact_1 &= 0.09 \\ Fact_2 &= 0.1078815 \end{aligned}$$

A.4 Programa de control

El programa que lleva a cabo el control del sistema fue escrito en lenguaje C++. Este programa esta formado por diversas funciones que realizan tareas bien definidas. A continuación se describen algunas de las más importantes

- **home_manual**: función que nos permite en forma manual enviar al robot a una posición fija inicial.
- **captura**: permite introducir algunos parámetros de diseño al programa al momento de correrlo, tales como las constantes del controlador, etc.
- **lee_tray**: función que se encarga de leer el archivo de las trayectorias deseadas y sus derivadas,
- **posicion**: lee el valor acumulado hasta el momento en los contadores de pulsos de la tarjeta de interface, entregando a su salida las posiciones angulares de ambos eslabones,
- **velocidad**: estima las velocidades de los eslabones a partir de las posiciones angulares,
- **ley_control**: calcula las señales de control con base en el algoritmo propuesto
- **salida**: envia las señales de control recién calculadas (voltajes de armadura) hacia los convertidores D/A para ser entregadas a los respectivos motores.
- **escri_tray**: terminado el proceso de control, manda los datos generados a un archivo externo dispuesto en formato tal, que es posible cargarlo en Matlab para realizar la graficación de las señales de interés.

Por supuesto que se escribieron otras tantas funciones auxiliares que nos permitieron hacer el manejo de puertos en la tarjeta de interfaz, así como la transformación entre los diversos formatos de las variables utilizadas, etc.

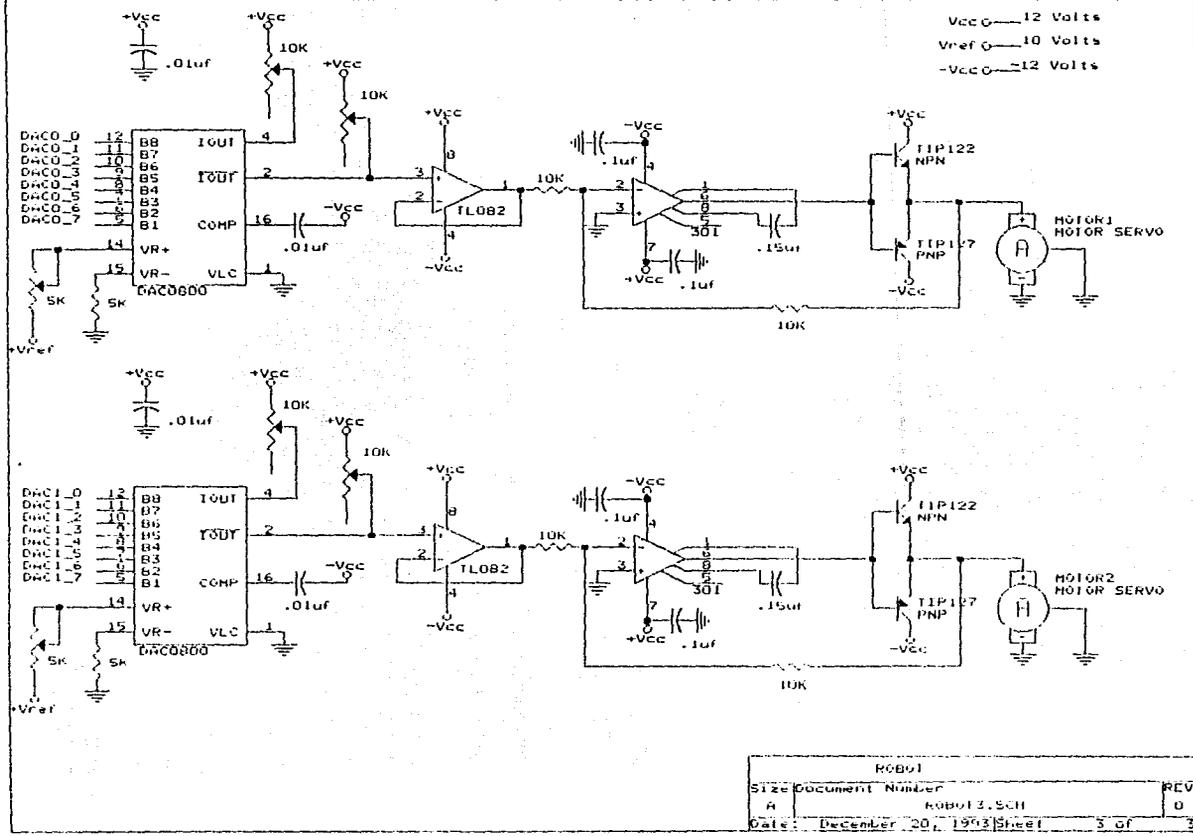


Figura A.4: Convertidores DAC y etapa de potencia.

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

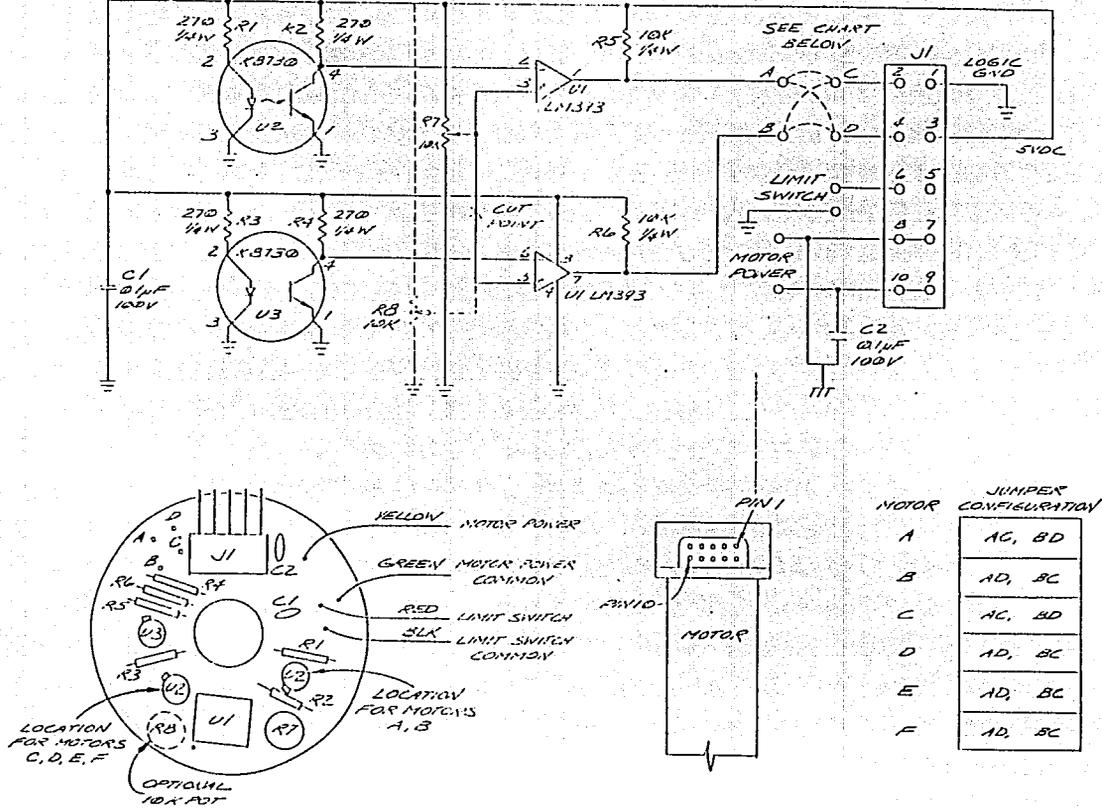


Figura A.5: Codificador óptico "Encoder".

Bibliografía

- [1] Abdallah C., D Dawson, P. Dorato and M. Jamshidi, "Survey of robust control for rigid robots," *IEEE Contr. Syst. Mag.*, Vol. 11, pp. 24-30, 1991.
- [2] Brogliato B., I. Landau and R. Lozano-Leal, "Adaptive motion control of robot manipulators: a unified approach based on passivity," *I. J. Rob. Nonlin. Contr.*, Vol. 1, pp. 187-202, 1991.
- [3] Brogliato B., R. Ortega and R. Lozano, "Globally stable nonlinear controllers for flexible joint manipulators: a comparative study," Groningen, Holland, June 1993.
- [4] Brogliato B., Ortega R. and R. Lozano "Global tracking controllers for flexible joint manipulators: a comparative study", submitted, 1994.
- [5] Corless M. and G. Leitmann, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 26, pp. 1139-1144, 1981.
- [6] Corless M. and G. Leitmann, "Adaptive control of systems containing uncertain functions and unknown functions with uncertain bounds", *J. Opt. Theory Appl.*, Vol. 41, pp. 155-168, 1983.
- [7] Corless M., "Tracking controllers for uncertain systems: application to manutec R3 robot", *J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, Vol. 111, pp. 609-618, 1989.
- [8] Desoer C.A. and M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press Inc., New York, 1975.
- [9] Ghorbel F., M. Spong and J. Hung, "Adaptive control of flexible joint manipulator", *Proc. 1989 IEEE Int. Conf. Rob. and Aut.*, Phoenix, pp. 1188-1193.
- [10] Hsu L., A.D. de Araujo and R.R. Costa, "Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 39, pp. 4-21, 1994.
- [11] Ioannou P.A. and J. Sun, "Theory and design of robust direct and indirect control schemes", *I. J. Control*, Vol. 47, pp.775-813, 1988.
- [12] Kelly R., "A simple set-point robot controller by using only position measurements", *Proc. IFAC World Congress*, Sydney, 1993.

- [13] Khalil Hassan K., *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Co., New York, 1992.
- [14] Khorasani K., "Adaptive control of flexible joint robots", *IEEE Trans. Rob. and Automat.*, Vol. 8, pp. 250-267, April 1992.
- [15] Kokotovic P. and H. Sussmann, "A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems", *Systems and Control Letters*, Vol. 13, pp. 125-133, 1989.
- [16] Koo K.M. and J.H. Kim, "Robust control of robot manipulators with parametric uncertainty", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 39, pp. 1230-1233, 1994.
- [17] Nicosia S. and P. Tomei, "Global tracking controller", *Journal of Robotics Systems*, Vol. 10 (6), pp. 835-846, 1993.
- [18] Lanari L., P. Sicard and J.T. Wen, "A passivity/Lyapunov approach for the control of flexible joint manipulators", *Proc. ACC World Congress*, San Francisco, Cal., June 1993.
- [19] Landau Y.D., *Adaptive Control - The Model Reference Approach*. NY:Marcel Dekker, 1979.
- [20] Lozano R. and B. Brogliato, "Adaptive control of robot manipulators with flexible joints", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, No. 2, pp. 174-181, February 1992.
- [21] Mrad F. and S. Ahmad, "Control of flexible joint robots", *Proc. IEEE Int. Conf. Rob. and Atom.*, Sacramento, Cal., April 1991.
- [22] M'Sirdi N.K. and A. Benallegue, "Passive control for robot manipulators with elastic joints", *IMACS MCTS 91*, Casablanca, Marroco, May 1991.
- [23] Nicosia S. and P. Tomei, "Robot control by using only joint position measurements", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 35, pp. 1058-1061, 1990.
- [24] Qu Z. and J. Dorsey, "Robust tracking control of robots by a linear feedback law", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 36, pp. 1081-1084, 1991.
- [25] Ortega R. and Y. Tang, "Robustness of adaptive controllers: a survey", *Automatica* Vol. 25, pp.651-677, 1989.
- [26] Ortega R. and M. Spong, "Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial", *Automatica*, Vol. 25, pp. 877-888, 1989.
- [27] Seto D. and J. Baillieul, "Control Problems in Super-Articulated Mechanical Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 39, pp. 2442-2453, 1994.
- [28] Slotine J.J. and W. Li, "On the adaptive control of robot manipulators", *Int. J. Robotics Res.*, Vol. 6, pp. 49-59, Fall, 1987.
- [29] Slotine J.J. and W. Li, "Adaptive manipulator control: a case study", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 33, pp. 995-1003, November 1988.

- [30] Spong M.W., "Modeling and control of elastic joint robots", *ASME Jour. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, Vol 109, pp.310-319, 1987.
- [31] Spong M., K.Khorasani and P.V. Kokotovic, "An integral manifold approach to the feedback control of flexible joint robots", *Journal of Robotics and Automation*, RA-3, No. 4, pp. 291-300, 1987.
- [32] Spong M.W., "Adaptive control of flexible joint manipulator", *Systems and Control Letters*, Vol. 13, pp. 15-21, 1989.
- [33] Spong M.W. and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, 1989.
- [34] Spong M.W., "On the robust control of robot manipulators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, pp. 1782-1786, 1992.
- [35] Spong M.W., "Adaptive control of robot manipulators: design and robustness", *Proc. ACC*, San Francisco, pp. 2826-2830, 1993.
- [36] Vidyasagar M., *Nonlinear systems analysis*, Prentice Hall, 1993.
- [37] Tang Y. and G. Escobar, "A simple robust control for rigid robots", *Proc. ACC*, Seattle, 1995.
- [38] Tang Y., "Simple robust adaptive control for a class of nonlinear systems: an adaptive signal synthesis approach", *IV Workshop on adaptive control*, Cancún, Dec. 1995.
- [39] Tang Y., "Introducción al control no lineal", *Apunte DEPMI UNAM*, México, 1994.
- [40] Tomei P., "A simple PD controller for robots with elastic joints", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 36, pp. 1208-1213, 1991.
- [41] Yaz E., "Comments on 'On the robust control of robot manipulators'", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 38, pp. 511-512, 1993.
- [42] Yuan J. and Y. Stepanenko, "Composite adaptive control of flexible joint robots", *Automatica*, Vol. 29, pp. 609-619, 1993.