

00571



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

A
28

ROTACION DE UNA ESFERA EN LA INTERCARA DE DOS FLUIDOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS QUIMICAS
(FISICOQUIMICA)

P R E S E N T A :

ALEJANDRO GERARDO RODRIGUEZ MONTES DE OCA



CD. UNIVERSITARIA

1995

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

La presente tesis estudia el problema de rotación de una esfera en la intercarra de dos fluidos.

El primer capítulo muestra el desarrollo de las ecuaciones fundamentales de la Hidrodinámica. También se plantea el problema en su caso más general, así como las condiciones a la frontera del mismo.

En el segundo capítulo se resuelve totalmente el problema de rotación de una esfera en un fluido infinito, utilizando teoría de perturbaciones. Se obtienen las soluciones a este problema a diferentes ordenes, las cuales en la mayoría de los casos (ordenes uno, dos y tres), no se encuentran reportadas en la literatura. El objetivo de atacar inicialmente este caso es desarrollar un esquema para poder resolver el problema de rotación en una intercarra, ya que ambos tiene idéntica solución general y únicamente cambian las condiciones a la frontera. Sin embargo, el caso de rotación en un fluido infinito es mucho más sencillo. Además se obtuvieron resultados de gran interés en este problema específico.

En el tercer capítulo se intenta resolver el caso de rotación en una intercarra utilizando el mismo esquema plantando el el capítulo anterior, sin embargo, la solución encontrada tiene fuertes restricciones, lo cual no resulta adecuado. Se intenta utilizar algunos otros métodos como son perturbaciones alrededor del estado de equilibrio, o cambiando el sistema coordenado utilizado para encontrar otra solución en variables separables (Schneider, 1973), sin obtener un resultado satisfactorio.

El camino recorrido durante este capítulo acumula una buena experiencia para intentar nuevamente resolver el problema emplendo mecánicas diferentes

a las utilizadas en esta tesis.

Por último el capítulo cuarto muestra las conclusiones del trabajo efectuado, así como algunas ideas generales, que pensamos puedan ser de utilidad en el momento de que se decida retomar nuevamente el problema.

A mi esposa Lilliana, por la felicidad que me ha dado en estos diez años.

00571

AGRADECIMIENTOS

A Juan Ramón Sánchez, por sus excelentes fotografías.

A Daniel Cruz, por su colaboración en la parte gráfica de la tesis.

De manera muy especial a Ramón Peralta-Fabi por su paciencia, enseñanza y apoyo.

INTEGRANTES DEL JURADO

Dra. María Eugenia Costas Basin.

Dr. Rafael Fernández Flores.

Dr. Jesús Gracia Fadrique.

M. en C. Raúl Rechtman.

Dr. Víctor Romero.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Ramón Peralta-Fabi.

Si en la lid el destino te derriba,

si tu camino es todo cuesta arriba,

si tu sonrisa es ansia insatisfecha,

si hay fuerza excesiva y vil sospecha,

si a tu caudal se contraponen diques,

tómate una tregua pero no claudiques.

**ROTACION DE UNA ESFERA EN LA
INTERCARA DE DOS FLUIDOS**

I N D I C E

CAPITULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1	Introducción general	2
1.2	Ecuaciones hidrodinámicas	3
1.2.1	Conservación de la masa	4
1.2.2	Conservación del momento	7
1.2.3	Conservación de la energía	10
1.2.4	Conservación del momento angular	12
1.3	Ecuaciones constitutivas	14
1.4	Condiciones a la frontera	17
1.5	Número de Reynolds	20
1.6	Planteamiento del problema	21
1.6.1	Hipótesis involucradas	23
1.6.2	Variables adimensionales	23
1.6.3	Ecuaciones del problema	24
1.6.4	Condiciones a la frontera	25
1.6.5	Relación entre los radios principales de curvatura y la intercara líquida.....	31
1.6.6	Función de corriente	35
1.6.6	Ecuaciones generales	35
1.6.7	Condiciones a la frontera en términos de las funciones ϕ y ψ	37
1.7	Resumen	39

CAPITULO 2

ROTACION DE UN FLUIDO

2.1	Generalidades	41
2.2	Teoría general de perturbaciones	42
2.2.1	Solución general	44
2.2.2	Solución a orden cero	50
2.2.3	Solución a primer orden	53
2.2.4	Solución a segundo orden	59
2.3	Cálculo de la torca aplicada a la esfera	62
2.4	Solución a tercer orden	66
2.5	Conclusiones	76

CAPITULO 3

ROTACION EN UNA INTERCARA

3.1	Introducción	78
3.2	Solución a orden cero	78
3.3	El estado de equilibrio	80
3.4	Observaciones experimentales	84
3.5	Perspectivas	89
3.6	Replanteamiento del problema	90

CAPITULO 4

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

4.1	Conclusiones	97
4.2	Perspectivas	99

APENDICE	101
----------------	-----

BIBLIOGRAFIA	104
--------------------	-----

CAPITULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 INTRODUCCION GENERAL

El estudio del movimiento de los fluidos es extremadamente complejo debido principalmente a la dificultad que presenta la resolución de las ecuaciones que lo describen. Actualmente se conocen algunas soluciones exactas y otras aproximadas de estas ecuaciones, sin embargo, todavía existen gran cantidad de casos en donde no podemos encontrar expresiones que puedan predecir los fenómenos observados en el laboratorio.

El desarrollo de estos estudios es de fundamental importancia por la gran diversidad de aplicaciones que se presentan en diferentes niveles, ya que han contribuido notablemente en campos que van desde la aviación hasta su interrelación con la termodinámica para el estudio de procesos irreversibles.

Desafortunadamente las soluciones encontradas para las ecuaciones de movimiento se limitan a ciertos problemas en donde se presentan simetrías sencillas y casos estacionarios, lo cual indica que se tiene un gran camino por recorrer en el estudio del movimiento de los fluidos.

En esta tesis nos ocuparemos de estudiar un caso particular de la infinidad de fenómenos asociados con este campo de la Física.

Este problema encuentra su origen en el movimiento de rotación de una partícula esférica en la intercara que separa dos fluidos homogéneos, incompresibles y Newtonianos (O'Neill, 1985).

La solución de este problema contribuirá al estudio del movimiento rotacional y traslacional de una partícula Browniana. En el campo de la Biología es de gran importancia el estudio de este tipo de movimientos en moléculas de proteínas y lípidos en una membrana (Saffman, 1975).

Este problema toma un particular interés en el caso en donde una molécula gira en la intercara celular, ya que se ha encontrado que la

viscosidad del fluido contenido en el interior de la célula influye notablemente en el movimiento de difusión de las partículas celulares.

A lo largo de esta tesis intentaremos resolver las ecuaciones de movimiento ajustando las condiciones a la frontera específicas para este problema.

En el desarrollo de este trabajo se podrá apreciar que mediante la solución de las ecuaciones de movimiento se puede obtener la relación de viscosidades conociendo la torca aplicada a la esfera. Es decir, este dispositivo podría ser considerado como un viscosímetro, ya que la torca es posible medirla experimentalmente.

Al margen de la motivación para el estudio de este caso, expresada anteriormente, se presentan algunos fenómenos de gran interés observados experimentalmente (que se citarán a lo largo de esta tesis) que incrementan de manera notable el interés por resolver teóricamente este problema.

1.2 ECUACIONES HIDRODINAMICAS

Antes de deducir las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica, introduciremos algunos conceptos básicos, los cuales nos ayudarán a entender mas claramente la física involucrada en el desarrollo de estas expresiones.

En primer lugar identificaremos como fluido a un medio (o un cuerpo) que al aplicarle una fuerza, por pequeña que sea, se deforma ilimitadamente. La hidrodinámica tiene por objeto el estudio del movimiento de todos los medios que puedan ser considerados como fluidos.

Si nos situamos en el contexto de la Mecánica Clásica, el movimiento del fluido quedaría totalmente determinado si pudiéramos conocer la trayectoria de cada una de sus partículas.

Sin embargo, esto es muy complicado y carece normalmente de sentido

práctico. Para simplificar el problema consideraremos que cualquier partícula o elemento de fluido es muy pequeño comparado con el volumen característico, por ejemplo: una esfera o un cilindro inmerso en el fluido. Aún así suponemos que contiene un gran número de moléculas, es decir, el elemento es muy grande en relación a las distancias intermoleculares. Debido a esto los términos punto y partícula de fluido son indistintos.

Con base en lo anterior, podemos determinar el movimiento del fluido si concemos la velocidad de cada una de sus partículas como una función de la posición y el tiempo. Además, por tratarse de una descripción macroscópica se hace necesario también conocer algunas propiedades termodinámicas (temperatura, presión y densidad) en función de la posición y el tiempo (lo cual resulta de la hipótesis de equilibrio local, como se verá mas adelante).

Ahora obtendremos las ecuaciones fundamentales a partir de los principios de conservación de masa, energía y momentos lineal y angular; Landau (1986), Currie (1974).

1.2.1 CONSERVACION DE LA MASA

Este principio surge de postular que la masa de nuestro sistema permanece constante. Para desarrollar la ecuación que representa la conservación de la materia, inicialmente establecemos que la masa total (M) de un fluido, contenida en un volumen de control V_0 , está dada por:

$$M = \int_{V_0} \rho \, dV ,$$

donde ρ es la densidad del sistema.

La masa del fluido que pasa por unidad de tiempo a través de un elemento df (el cual es un vector normal a la superficie y cuya magnitud es igual a un elemento de dicha área) es :

$$\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} ,$$

donde \mathbf{v} es la velocidad local del fluido.

La masa total de fluido que sale del volumen de control (V_0) resulta de integrar sobre toda la superficie (S_0):

$$\oint_{S_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} .$$

La disminución de masa en V_0 puede ser escrita como:

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho \, dV .$$

Para que la masa del sistema se conserve es necesario que se cumpla :

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho \, dV = \oint_{S_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} .$$

Si utilizamos el teorema de Green (Hildebrand, 1976), obtenemos:

$$\oint_{S_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_{V_0} \text{div}(\rho \mathbf{v}) \, dV ,$$

y finalmente se tiene:

$$\int_{V_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 .$$

Esto ocurre para cualquier volumen, por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 . \quad (1.2.1)$$

Para demostrar que la ecuación (1.2.1) no se modifica al considerar que el volumen de control es una función del tiempo ($V(t)$), utilizaremos los siguientes argumentos:

El operador d/dt aplicado a cualquier campo arbitrario:

$$\frac{d}{dt} \alpha$$

representa el cambio del campo en el tiempo. Esta derivada puede expresarse en términos de cantidades referidas a puntos fijos. Para lograr esto consideraremos que el cambio " $d\alpha$ " está compuesto de dos partes:

i) El cambio en el tiempo en un punto fijo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha dt$$

ii) El cambio de α entre dos puntos cercanos, a un tiempo fijo:

$$dx \frac{\partial}{\partial x} \alpha + dy \frac{\partial}{\partial y} \alpha + dz \frac{\partial}{\partial z} \alpha = (dr \cdot \nabla) \alpha$$

Así el cambio total, dividido por " dt " es:

$$\frac{d}{dt} \alpha = \frac{\partial}{\partial t} \alpha + (v \cdot \nabla) \alpha \quad (1.2.2)$$

esta ecuación es el resultado de aplicar la regla de la cadena al término del lado derecho.

El término del lado derecho de la ecuación (1.2.2) representa la derivada de α con respecto al tiempo en el sistema de coordenadas lagrangiano. En este sistema establecemos una masa específica de fluido y seguimos los cambios en el tiempo de α cuando esta fluye, considerando siempre que la masa del sistema permanece constante.

El lado derecho de la ecuación anterior está expresado en coordenadas denominadas eulerianas. Este sistema establece un volumen de control fijo en el espacio y se determinan los cambios de α cuando el fluido pasa através de dicho volumen.

En general el sistema lagrangiano únicamente se utiliza para obtener las

ecuaciones fundamentales de la Hidrodinámica y mediante el sistema euleriano se resuelven la mayoría de los problemas .

La ecuación anterior expresa el cambio de α con respecto al tiempo, en el sistema lagrangiano, en términos de derivadas eulerianas.

Existe una expresión similar a (1.2.2), pero en forma integral, la cual se denomina teorema de transporte de Reynolds (Currie, 1974) y se presenta de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \alpha \, dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \alpha + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \alpha \right] dV. \quad (1.2.3)$$

Las ecuaciones (1.2.2) y (1.2.3) tienen la utilidad de separar los cambios involucrados en el análisis del movimiento del fluido.

En el caso de que α sea la densidad en (1.2.3), el principio de conservación de la masa nos conduce nuevamente a la expresión (1.2.1), solo que ahora consideramos el caso $V(t)$, que es más general.

La expresión (1.2.1) representa el principio de conservación de la masa para un sistema cerrado y en el cual no ocurren reacciones químicas. En el caso particular de densidad constante, se obtiene:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (1.2.4)$$

Para fines de simplicidad algebraica es conveniente expresar las ecuaciones (1.2.1) y (1.2.4) usando la notación de Einstein, en la que los índices repetidos representan una suma, así obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k), \quad (1.2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} v_k = 0. \quad (1.2.6)$$

1.2.2 CONSERVACION DEL MOMENTO

Para desarrollar las ecuaciones que representan este principio es necesario distinguir las diferentes fuerzas externas que pueden actuar sobre una masa de fluido. Estas fuerzas las podemos clasificar en dos grupos, de acuerdo a la manera en que actúan sobre el cuerpo:

a) Fuerzas de superficie, las cuales actúan en el área envolvente de un cuerpo, como por ejemplo, la presión.

b) Fuerzas de volumen, que se ejercen sobre la masa del elemento considerado. Como ejemplo tenemos a las fuerzas gravitacionales y las electromagnéticas.

Para establecer la conservación del momento, consideremos un elemento de fluido contenido en un volumen de control (V_0), el cual se encuentra sujeto a la acción de diferentes fuerzas (de superficie y de volumen). Si aplicamos la Segunda Ley de Newton a este sistema, encontraremos un conjunto de ecuaciones que resume el principio de conservación del momento.

Primeramente establecemos la resultante de las fuerzas de superficie:

$$\oint_S P \, ds .$$

Si expresamos la fuerza de superficie, por unidad de área, P como el producto escalar del tensor de esfuerzos ($\underline{\sigma}$) y el vector normal (Landau, 1986) a la superficie (n), se tiene:

$$\oint_S P \, ds = \oint_S \underline{\sigma} \cdot n \, ds ,$$

y transformando esta integral de superficie en una de volumen:

$$\oint_S \underline{\sigma} \cdot n \, ds = \int_{V_0} \text{div } \underline{\sigma} \, dV .$$

La fuerza total de volumen es:

$$\int_{V_0} \rho \mathbf{F} dV ,$$

por lo tanto, la fuerza total que actúa en el volumen V_0 es:

$$\int_{V_0} \left[(\mathbf{V} \cdot \underline{\sigma}) + \rho \mathbf{F} \right] dV .$$

Podemos decir que el término $(\mathbf{V} \cdot \underline{\sigma} + \rho \mathbf{F})$ es una fuerza que actúa sobre un volumen unitario de fluido. Si aplicamos la Segunda de Newton se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \mathbf{v}) dV = \int_V \left[\mathbf{V} \cdot \underline{\sigma} + \rho \mathbf{F} \right] dV ; \quad (1.2.7)$$

el miembro de la izquierda es el cambio de momento por unidad de tiempo, mientras que el lado derecho representa a la suma de fuerzas externas por unidad de volumen, que actúan sobre el cuerpo.

Sustituyendo (1.2.2) en la ecuación (1.2.7) y usando (1.2.1) y (1.2.3) resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\sigma} + \mathbf{F} , \quad (1.2.8)$$

y reescribiendo esta ecuación en la notación de Einstein, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_i = -v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + F_i ,$$

para cada componente. Al combinar esta ecuación con la expresión (1.2.5):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) + \rho F_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} . \quad (1.2.9)$$

Existen dos tipos de fuerzas de superficie:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij} ,$$

donde $\underline{\sigma}'$ se denomina tensor de esfuerzo viscoso, que representa los efectos que se deben a la fricción interna (que están asociados con la viscosidad),

y p es la presión del sistema. Al sustituir esta última expresión en (1.2.9) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = - \frac{\partial}{\partial x_j} (p \delta_{ij} - \sigma'_{ij}) + \rho F_i, \quad (1.2.10)$$

para $i = 1, 2, 3$. El lado izquierdo de esta expresión representa la magnitud del cambio de momento de un volumen unitario de fluido (aceleración temporal y convectiva); el lado derecho representa a las fuerzas (de superficie y de cuerpo) que provocan dicha aceleración.

El conjunto de ecuaciones (1.2.10) deben ser satisfechas para que el sistema cumpla con el balance del momento.

1.2.3 CONSERVACION DE LA ENERGIA

Consideremos un elemento de fluido como un sistema, el cual se encuentra inicialmente contenido en un volumen de control, cuya superficie forma una pared que lo aísla de los alrededores. Si quitamos restricciones a la pared, este sistema puede intercambiar calor, volumen y/o masa con los alrededores (para nuestros propósitos es suficiente pedir que la pared sea diatérmica y flexible) y cambiar su estado de equilibrio. El cambio de energía interna del sistema, debido al proceso, es igual a la suma del trabajo efectuado por el sistema y el calor que fluye a través de las paredes. Debido a que en este caso el fluido se encuentra en movimiento, este principio no puede aplicarse. Sin embargo, esta dificultad se puede eliminar si definimos una energía instantánea, la cual tiene dos contribuciones:

i) energía interna (e).

ii) energía cinética;

la energía instantánea será función de la posición y del tiempo y a la cual le aplicaremos el principio de conservación.

Esta hipótesis significa que cada punto del fluido (en el contexto esbozado en la sección 1.2), está en equilibrio termodinámico. Sin embargo esto no quiere decir que el sistema en su totalidad se encuentre en equilibrio, ya que cada punto de fluido puede interactuar con los elementos restantes (alrededores) y encontrarse en un estado de equilibrio distinto a los circundantes.

Debido a lo anterior, es posible definir la energía interna, entropía, entalpía, etc., en una forma puntual y por lo tanto serán función de la posición y el tiempo; además también se pueden aplicar relaciones termodinámicas entre estas cantidades. Esto se conoce como la hipótesis de equilibrio local (De Groot y Mazur 1969). Si bien parece ser una aproximación fuerte, mediante su utilización es posible predecir fenómenos observados en el laboratorio.

La energía instantánea total en un volumen V es:

$$\int_V (pe + \frac{1}{2} \rho v \cdot v) dV$$

El trabajo efectuado por unidad de tiempo (potencia) es el producto escalar entre las fuerzas ejercidas sobre el fluido y la velocidad:

$$\int_S v \cdot P dS + \int_V v \cdot F dV$$

donde P y F son las resultantes de las fuerzas de superficie y volumen, respectivamente.

Si q es el flujo de calor, entonces la cantidad de calor intercambiada es:

$$\int_S q \cdot n \, dS.$$

Entonces el cambio temporal de la energía lo podemos expresar como:

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho e + \frac{1}{2} \rho v \cdot v) \, dV = \int_S v \cdot P \, dS + \int_V v \cdot \rho F \, dV - \int_S q \cdot n \, dS.$$

Nuevamente el operador d/dt se refiere al cambio en el tiempo de alguna cantidad, pero como ya hemos visto anteriormente se puede expresar en términos de cambios referidos a puntos fijos en el espacio y variación espacial a tiempos fijos.

La fuerza P la podemos expresar como el producto escalar del tensor de esfuerzo σ y el vector normal n . Aplicando el teorema de Green tenemos:

$$\int_S v \cdot \sigma \cdot n \, dS = \int_V \text{div} (v \cdot \sigma) \, dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j \sigma_{ij}) \, dV.$$

De una manera similar reordenamos el término asociado con el calor:

$$\int_S q \cdot n \, dS = \int_V \text{div} q \, dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} q_j \, dV.$$

Sustituyendo en la ecuación de balance de energía y reorganizando tenemos:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} e + \rho v_k \frac{\partial}{\partial x_k} e = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j - \frac{\partial}{\partial x_j} q_j \quad (1.2.11)$$

Esta ecuación es un balance de energía. El lado izquierdo representa el cambio de energía interna (temporal y convectivo); el primer término del lado derecho es el trabajo efectuado por las fuerzas de superficie y el segundo término es el calor transferido al sistema.

1.2.4 CONSERVACION DEL MOMENTO ANGULAR

Para un conjunto de partículas cuyas interacciones son iguales y opuestas, el cambio en el tiempo del momento angular para todo el sistema, es igual a la suma de los momentos de las fuerzas externas que actúan sobre todas las partículas. Se postula (Batchelor, 1967) que este principio se puede expresar, para un fluido, de la siguiente manera:

$$\int_S \mathbf{r} \times (\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} \, dV = \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) \, dV,$$

y utilizando el teorema de transporte de Reynolds (Currie, 1974), obtenemos:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v})] + \nabla \cdot [\mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v}] \right] dV = \int_S \mathbf{r} \times (\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \int_V \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{F}) \, dV,$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición con respecto al origen de un sistema coordenado. Desarrollando esta ecuación en componentes tenemos:

$$\int_V \left[\epsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) + \epsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho v_j v_l) \right] dV = \int_V \left[\epsilon_{ijk} \sigma_{ji} + \epsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\sigma_{jl}) + \epsilon_{ijk} x_i \rho F_j \right] dV,$$

en esta expresión, el término ϵ_{ijk} es el tensor alternante de Levi-Civita.

Esta ecuación puede representarse del siguiente modo:

$$\int \left[\epsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) + \epsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_j v_i) - \epsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ji}) - \epsilon_{ijk} \sigma_{ji} - \epsilon_{ijk} x_i \rho F_j \right] dV = 0.$$

Rearreglando esta ecuación y utilizando las expresiones (1.2.1) y (1.2.10) llegamos a :

$$\int \epsilon_{ijk} \sigma_{ji} dV = 0,$$

lo cual implica que:

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{ji} = 0,$$

por lo tanto:

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij}. \quad (1.2.12)$$

Esto significa que el tensor de esfuerzos es simétrico.

1.3 ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Hasta el momento contamos con un conjunto de cinco ecuaciones (conservación de masa, momento(3) y energía), y con la condición de simetría del tensor de esfuerzos, las cuales son válidas para cualquier tipo de fluido, ya que las hipótesis utilizadas tienen un carácter general.

Sin embargo, necesitamos proponer otras ecuaciones que permitan cerrar el sistema, puesto que tenemos un mayor número de incógnitas que de ecuaciones.

Inicialmente obtendremos una relación adicional para el tensor de esfuerzos, lo cual es posible lograr si suponemos que se cumplen las siguientes condiciones:

a) Si el fluido está en reposo ($v = 0$), el esfuerzo es hidrostático y la presión coincide con el valor termodinámico

b) El tensor de esfuerzos tiene una relación lineal con el tensor de rapidez de deformación (e):

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right],$$

(Currie, 1974).

c) El tensor de esfuerzos es isotrópico.

Con estas hipótesis puede mostrarse que el tensor de esfuerzos se puede expresar como (Landau, 1986 y Currie, 1974):

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left[\frac{\partial}{\partial x_j} v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} v_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} v_k \right] + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} v_k. \quad (1.3.1)$$

En esta ecuación, los coeficientes λ y η representan a los coeficientes viscosos del fluido, los cuales dependen generalmente de la densidad y de la temperatura; en la mayoría de los casos se pueden considerar constantes. El fluido que cumple con los incisos a,b,c, y por lo tanto satisface (1.3.1) es conocido como NEWTONIANO.

Mediante análisis anterior hemos obtenido una expresión adicional a las ecuaciones de conservación, la cual relaciona el tensor de esfuerzos con el campo de velocidad. Sustituyendo (1.3.1) en las ecuaciones de conservación del momento obtenemos:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} v + (v \cdot \nabla) v \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 v + \left(\lambda + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\text{div } v) + F; \quad (1.3.2)$$

el conjunto de expresiones escalares que se obtiene de (1.3.2) se denomina ecuación de Navier-Stokes.

Por otro lado consideraremos que el flujo de calor (q) se debe únicamente a efectos de conducción (es decir, los mecanismos de transmisión de calor por convección y radiación son considerados despreciables), para lo cual la ley de Fourier nos proporciona la siguiente expresión (Landau, 1986):

$$q = -k \nabla T, \quad (1.3.3)$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica del fluido y T es la temperatura absoluta.

Si introducimos (1.3.3), en la ecuación de conservación de energía se tiene:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \\ & -p \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + k \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + \lambda \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right]^2 + \\ & \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Además, la hipótesis de equilibrio local nos asegura que las siguientes relaciones (ecuaciones de estado) son aplicables:

$$p = p(\rho, T), \quad (1.3.5)$$

$$e = e(\rho, T). \quad (1.3.6)$$

Con lo cual tenemos un sistema completo de siete ecuaciones (conservación de masa y energía, ecuaciones de Navier-Stokes y dos relaciones termodinámicas) con igual número de incógnitas (v, p, T, ρ y e).

Las relaciones termodinámicas requieren para su formulación un camino independiente a la hidrodinámica, el cual se basa en la ecuación fundamental del sistema:

$$e = e(v, s),$$

donde s y v son la entropía específica y el volumen por unidad de masa del sistema.

La ecuación fundamental se obtiene mediante el experimento o por argumentos microscópicos (Mecánica Estadística) y requieren ciertas hipótesis para su formulación (como ejemplo tenemos los casos de gases ideales y de van der Waals). Debido a esto se puede suponer que las expresiones (1.3.5) y (1.3.6) se conocen a priori y trabajar únicamente con las ecuaciones y variables (v, ρ, T) restantes.

1.4 CONDICIONES A LA FRONTERA

En esta sección analizaremos las condiciones a la frontera en las diferentes intercara que se pueden presentar:

- a) fluido-sólido,
- b) fluido-fluido.

Para discutir los efectos del primer tipo de intercara, consideremos un fluido que se mueve con una velocidad v con relación a un sólido en reposo. Podemos establecer que en este caso la primera condición a la frontera es:

$$v \cdot n = 0, \quad (1.4.1)$$

donde n es el vector unitario normal a la superficie. Esta ecuación significa que el fluido no puede penetrar al sólido, lo cual es claramente admisible y no da lugar a objeciones. Existe un caso particular en el cual

esta condición no se cumple: flujo a través de medios porosos.

La segunda condición, la cual se denomina de adherencia (porque suponemos que el fluido se pega a la superficie sólida) se establece de la siguiente manera:

$$v \times n = 0, \quad (1.4.2)$$

y significa que la velocidad tangencial del fluido, relativa a la superficie, es idénticamente cero.

La condición de adherencia funciona adecuadamente en la mayoría de los problemas hidrodinámicos; sin embargo, todavía existen dudas referentes a la interacción fluido-sólido a nivel microscópico (en el contexto esbozado en la sección 1.2) en ciertos casos.

Debido a lo anterior se han realizado diversos estudios, como el de Richardson (1973). En este trabajo presenta un análisis fundamentado en la rugosidad de todas las superficies a nivel microscópico. El autor muestra que cuando el fluido viaja sobre la superficie rugosa, se producen elevados gradientes de velocidad, los cuales provocan que se frene el fluido. Este efecto ocasiona que se observe macroscópicamente la adherencia total del fluido al sólido.

A pesar de la explicación anterior existen ejemplos donde el fluido presenta cierto grado de deslizamiento en la superficie. Si el deslizamiento es total se puede plantear la condición a la frontera como sigue:

$$(\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \times \underline{n} = 0. \quad (1.4.3)$$

Esto significa que no existen fuerzas tangenciales sobre la frontera sólida (Landau, 1986).

Ahora tenemos dos casos extremos en la condición a la frontera: adherencia y deslizamiento. Es muy posible que lo que ocurra realmente sea

un caso intermedio entre estos dos límites. Sin embargo, para no complicar demasiado los problemas adoptaremos como válida la condición de adherencia (lo cual se justifica con base en los experimentos).

Si el sólido se mueve con una velocidad u las ecuaciones se modifican como sigue:

$$v = u \quad (1.4.4)$$

En lo referente a la intercara fluido-fluido utilizaremos las siguientes condiciones a la frontera:

a) La intercara no se desplaza, es decir:

$$v_1 \cdot n = 0 ; v_2 \cdot n = 0 ,$$

donde los subíndices se refieren a cada uno de los fluidos (cabe aclarar que esto no siempre ocurre como por ejemplo el oleaje).

b) Las velocidades tangenciales son iguales:

$$v_1 \times n = v_2 \times n \quad (1.4.5)$$

c) Los fluidos no resbalarán entre sí, es decir, las fuerzas que se ejercen en la intercara son iguales y opuestas:

$$(\underline{\sigma}_1 \cdot n) \cdot n = (\underline{\sigma}_2 \cdot n) \cdot n \quad (1.4.6)$$

$$(\underline{\sigma}_1 \cdot n) \times n = (\underline{\sigma}_2 \cdot n) \times n \quad (1.4.7)$$

donde $\underline{\sigma}_1$ y $\underline{\sigma}_2$ son los tensores de esfuerzo viscoso que se ejercen en los fluidos 1 y 2 respectivamente.

Si desearamos incluir los efectos de tensión superficial, debemos considerar que la diferencia entre las fuerzas normales que se ejercen en la intercara representan justamente a la tensión superficial (Landau,

1986).

Con esta consideración la ecuación (1.4.6) se modifica de la siguiente manera:

$$n \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot n = \alpha \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right], \quad (1.4.8)$$

en esta expresión α es la tensión superficial entre los fluidos; R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura de la intercara.

La expresión (1.4.7) no sufre modificaciones por la incorporación de los efectos de tensión superficial.

Estas son las condiciones a la frontera que aplicaremos en general a cualquier problema hidrodinámico. Algunas excepciones tendrán que analizarse mas detalladamente.

1.5 NUMERO DE REYNOLDS

En Hidrodinámica existen casos en donde los cuerpos involucrados tienen la misma forma geométrica, es decir, son semejantes. Considerando esta condición se puede obtener la solución de un problema a partir de otro cambiando todas las dimensiones lineales en la misma relación. De aquí que si se da la forma de un cuerpo, basta con especificar cualquiera de sus dimensiones lineales (radio de una esfera o tubería cilíndrica, etc.) con objeto de determinar por completo sus dimensiones.

En general podemos caracterizar cualquier flujo por estos parámetros:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \text{ (viscosidad cinemática),}$$

u (velocidad de la corriente principal),

l (dimensión lineal).

Es posible obtener una magnitud adimensional combinando los tres parámetros anteriores. Esta combinación se denomina número de Reynolds, y se expresa de la siguiente manera:

$$R = \frac{\rho u l}{\eta} = \frac{u l}{\nu}$$

Cualquier otro parámetro adicional, en Hidrodinámica, puede escribirse en función de R.

Para el caso de dos flujos diferentes del mismo tipo, las velocidades v/u son la misma función del cociente r/l , si el número de Reynolds es el mismo para cada flujo. Estos tipos de flujos pueden obtenerse unos a partir de otros cambiando la unidad de medida de las coordenadas de velocidades y se dice que los flujos son semejantes.

También el número de Reynolds nos da una idea de la relación entre los términos inerciales (no lineales) y viscosos.

1.6 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Como lo mencionamos en la introducción de esta tesis existe interés en la obtención de los campos de velocidad y presión de un sistema que consiste en dos fluidos inmiscibles, separados por una intercara, en la cual gira una esfera. La solución hidrodinámica de este problema nos permitirá evaluar la viscosidad de uno de los fluidos, a partir del conocimiento de la torca aplicada a la esfera.

Nosotros intentaremos encontrar la solución considerando algunas simplificaciones:

i) Las dimensiones de la esfera son despreciables en comparación con el volumen de los fluidos (no existen efectos de borde).

ii) La esfera rota con velocidad angular constante (ω).

1.6.1 HIPOTESIS INVOLUCRADAS.

Las ecuaciones hidrodinámicas son muy complejas, por lo cual es necesario simplificarlas con base en argumentos extraídos de la física del problema. Estas hipótesis son:

- a) Simetría azimutal (coordenada ϕ ignorable):

$$p = p(r, \theta) ,$$

$$v = v(r, \theta) ;$$

esta suposición encuentra su justificación en la observación experimental (si la velocidad angular es pequeña) (Sanchez, Peralta-Fabi, 1990).

- b) Debido a que en este caso el número de Mach es pequeño consideraremos al fluido incompresible (Batchelor, 1967), es decir:

$$\rho_1 = \text{constante} ,$$

$$\rho_2 = \text{constante} .$$

- c) Únicamente estudiaremos el caso estacionario, así: $\frac{\partial}{\partial t} v = 0$.

1.6.2 VARIABLES ADIMENSIONALES.

Es conveniente reescalar las variables involucradas en el problema, con el propósito de obtener una solución independiente de los parámetros particulares de cada caso específico (tamaño de la esfera, tipo de fluido, etc.). Las variables adimensionales adecuadas son:

$$a) v' = \frac{v}{\omega a} ,$$

$$b) r' = \frac{r}{a} ,$$

$$c) p' = \frac{p}{\omega \eta}$$

donde: a es el radio de la esfera, ω es la magnitud del vector $\bar{\omega}$, y η representa la viscosidad cortante de alguno de los fluidos.

1.6.3 ECUACIONES DEL PROBLEMA.

La utilización de las hipótesis anteriores y de las variables dimensionales, nos proporciona el siguiente conjunto de expresiones:

$$R_I \left[[v_I \cdot \nabla] v_{I r} - \frac{v_{I \theta} + v_{I \phi}}{r} \right] = - \frac{1}{\rho_I} \frac{\partial p_I}{\partial r} + \nabla^2 v_{I r} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial(v_{I \theta} \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2v_{I r}}{r^2} \quad (1.6.1,2)$$

$$R_I \left[[v_I \cdot \nabla] v_{I \theta} + \frac{v_{I r} v_{I \theta}}{r} - \frac{v_{I \phi}^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} \right] = - \frac{1}{\rho_I r} \frac{\partial p_I}{\partial \theta} + \nabla^2 v_{I \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{I r}}{\partial \theta} - \frac{v_{I \theta}}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (1.6.3,4)$$

$$R_I \left[[v_I \cdot \nabla] v_{I \phi} + \frac{v_{I r} v_{I \phi}}{r} + \frac{v_{I \theta} v_{I \phi} \operatorname{cot} \theta}{r} \right] = \nabla^2 v_{I \phi} - \frac{v_{I \phi}}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (1.6.5,6)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_{I r})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v_{I \theta} \sin \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (1.6.7,8)$$

donde:

$$[v_i \cdot \nabla] f = v_{ir} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_{i\theta}}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta},$$

y:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right].$$

En estas ecuaciones se han suprimido las primas para simplificar la notación y el subíndice i indica el fluido de que se trata (números 1 ó 2), para el inferior o superior, respectivamente. Además R es el número de Reynolds, el cual se expresa (en este caso particular), como:

$$R_i = \frac{\omega \rho_i a^2}{\eta_i}.$$

Es evidente que en nuestro caso tenemos un número de Reynolds para cada uno de los fluidos.

Tenemos un conjunto de cuatro ecuaciones con igual número de incógnitas (v, p) para cada fluido. Ambos sistemas se encuentran acoplados por las condiciones a la frontera en la intercara. Es conveniente aclarar que la ecuación que representa el principio de conservación de la energía se encuentra desacoplada de las expresiones restantes debido a la hipótesis de incompresibilidad, por esta razón no la incluimos en el contexto de la formulación específica del problema.

1.6.4 CONDICIONES A LA FRONTERA.

Ahora discutiremos las diversas condiciones a la frontera de nuestro problema. Este análisis es una particularización de las condiciones generales establecidas en la sección 1.4.

a) Condiciones a la frontera en la superficie de la esfera (para $r = 1$):

$$v_1 = \hat{n} \times \hat{e}_r; \text{ para: } 0 \leq \theta \leq \theta_0, \quad (1.6.9)$$

$$v_2 = \hat{n} \times \hat{e}_r; \text{ para: } \theta_0 \leq \theta \leq \pi, \quad (1.6.10)$$

donde los subíndices 1 y 2 indican el tipo de fluido en cuestión, y θ_0 es el ángulo donde hacen contacto las tres fases (sólido y dos fluidos), como se muestra en la figura número 1.

b) Condiciones en la intercara fluido-fluido.

Si $s = s(r, \theta)$ es la ecuación de la superficie que forma la intercara, el vector unitario normal está dado por:

$$n = \frac{\nabla s}{|\nabla s|}$$

En este momento, lo único que podemos decir de la intercara es que debe depender de alguna manera del número de Reynolds de cada fluido y de las tensiones superficiales sólido-fluido y fluido-fluido. Esta observación tiene una justificación experimental (Sanchez, Peralta-Fabi, 1990).

b₁) Condiciones sobre las velocidades.

En la intercara las velocidades tangenciales de los fluidos deben ser las mismas:

$$v_1 \times n = v_2 \times n.$$

Además, si consideramos que la intercara no se mueve, las velocidades normales deben ser idénticamente iguales a cero:

$$v_1 \cdot n = 0.$$

$$v_2 \cdot n = 0 .$$

Desarrollando términos se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$v_{1r} n_r + v_{1\theta} n_\theta = 0 ,$$

$$v_{2r} n_r + v_{2\theta} n_\theta = 0 ,$$

$$v_{1\theta} n_r - v_{1r} n_\theta = v_{2\theta} n_r - v_{2r} n_\theta ,$$

$$v_{1\phi} = v_{2\phi} .$$

Donde n_r y n_θ son las componentes del vector n y están dados por:

$$n_r = \frac{\frac{\partial s}{\partial r}}{|\nabla s|} , \quad (1.6.11)$$

$$n_\theta = \frac{\frac{\partial s}{\partial \theta}}{r|\nabla s|} , \quad (1.6.12)$$

El conjunto de condiciones sobre las velocidades en la intercara, nos conduce a las siguientes expresiones:

$$v_{1r} = v_{2r} , \quad (1.6.13)$$

$$v_{1\theta} = v_{2\theta} , \quad (1.6.14)$$

$$v_{1\phi} = v_{2\phi} , \quad (1.6.15)$$

$$v_{1r} n_r + v_{1\theta} n_\theta = 0 . \quad (1.6.16)$$

b₂) Condiciones sobre esfuerzos.

Como ya hemos mencionado anteriormente, las fuerzas en la intercara deben ser iguales y opuestas. Estas fuerzas se pueden expresar en términos de esfuerzos de la siguiente manera:

$\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{n}$ = fuerza ejercida por el fluido 1.

$\underline{\sigma}_2 \cdot \underline{n}$ = fuerza ejercida por el fluido 2.

Así las condiciones a la frontera son :

$$\underline{n} \cdot (\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{n}) - \underline{n} \cdot (\underline{\sigma}_2 \cdot \underline{n}) = \alpha \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right], \text{ componente normal,}$$

$$(\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{n}) \times \underline{n} = (\underline{\sigma}_2 \cdot \underline{n}) \times \underline{n}, \text{ componente tangencial.}$$

Desarrollando términos tenemos:

$$\left[\sigma_1 - \sigma_2 \right] \frac{n_r^2}{r r} + \left[\sigma_1 - \sigma_2 \right] \frac{2n_r n_\theta}{r \theta} + \left[\sigma_1 - \sigma_2 \right] \frac{n_\theta^2}{\theta \theta} = \alpha \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right],$$

$$\left[\sigma_1 - \sigma_2 \right] \frac{n_r}{\phi r} + \left[\sigma_1 - \sigma_2 \right] \frac{n_\theta}{\phi \theta} = 0,$$

$$\left[\sigma_1 - \sigma_2 \right] \frac{n_r n_\theta}{r r} - \left[\sigma_1 - \sigma_2 \right] \frac{n_r n_\theta}{\theta \theta} + \left[\sigma_1 - \sigma_2 \right] (n_\theta^2 - n_r^2) = 0.$$

Utilizando la ecuación (1.3.1) los componentes del tensor de esfuerzos se pueden expresar en términos de velocidades adimensionales:

$$\sigma_{(rr)} = \omega\eta \left[-p + 2 \frac{\partial}{\partial r} v_r \right],$$

$$\sigma_{(r\theta)} = \eta\omega \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_r + \frac{\partial}{\partial r} v_\theta - v_\theta r^{-1} \right],$$

$$\sigma_{(\theta\theta)} = \omega\eta \left[-p + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta + v_r r^{-1} \right) \right],$$

$$\sigma_{(\phi r)} = \omega\eta \left[\frac{\partial}{\partial r} v_\phi - v_\phi r^{-1} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} v_r \right],$$

$$\sigma_{(\theta\phi)} = \eta\omega \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} v_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_\phi - r^{-1} \operatorname{ctg} \theta v_\phi \right].$$

Sustituyendo estas ecuaciones en las condiciones a la frontera, utilizando cantidades adimensionales y las expresiones (1.6.12) y (1.6.13), se tiene:

$$\eta_2 p_2 - \eta_1 p_1 + 2(\eta_1 - \eta_2) \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right] \frac{\partial s}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v_r \right] \frac{\partial s}{\partial \theta} \frac{\partial s}{\partial \theta} \right] = \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \frac{\alpha (\nabla s)^2}{\omega}, \quad (1.6.17)$$

$$(\eta_1 - \eta_2) \left[\left[\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right] \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} v_\phi \right] \frac{\partial s}{\partial \theta} \right] = 0, \quad (1.6.18)$$

$$\frac{1}{r} (\eta_2 p_2 - \eta_1 p_1) \frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial s}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\eta_1 - \eta_2) \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial s}{\partial \theta} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \right.$$

$$\left. \frac{v_r}{r} \right] \frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial s}{\partial \theta} + \frac{1}{2r^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \right.$$

$$\left. \frac{v_\theta}{r} \right] \left(\frac{\partial s}{\partial \theta} \frac{\partial s}{\partial \theta} - r^2 \frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial s}{\partial r} \right) = 0, \quad (1.6.19)$$

en estas ecuaciones también hemos utilizado (1.6.13), (1.6.14) y (1.6.15).

c) Condiciones de regularidad en el infinito:

$$c_1) \lim_{r \rightarrow \infty} v_1 < \infty,$$

$$c_2) \lim_{r \rightarrow \infty} v_2 < \infty,$$

$$c_3) \lim_{r \rightarrow \infty} n = k \text{ (superficie plana).}$$

Hemos planteado las condiciones en todas las fronteras del sistema, las cuales fueron obtenidas de la física del problema.

Antes de discutir si el sistema de ecuaciones planteado en esta sección es consistente, es necesario obtener una expresión que relacione los radios principales de curvatura con la superficie que representa a la intercara líquida.

1.6.5 RELACION ENTRE LOS RADIOS PRINCIPALES DE CURVATURA Y LA
INTERCARA LIQUIDA

Consideremos una curva representada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k,$$

donde r es el vector de posición y t es el parámetro.

Se puede mostrar (Hildebrand, 1976) que si " ds " es una longitud de arco diferencial de la curva, entonces el vector:

$$t = \frac{dr}{ds},$$

es unitario y tangente. La derivada de " t " representa a un vector unitario normal a la curva y cambia de dirección a lo largo de la misma. Entonces se puede definir:

$$\frac{dt}{ds} = K n,$$

donde n es el vector unitario normal a la curva y K es la magnitud de dt/ds .

El parámetro K es denominado curvatura y su inverso es llamado radio de curvatura:

$$R = \frac{1}{K}.$$

Ahora consideraremos una superficie representada por las ecuaciones paramétricas:

$$x = x(u, v),$$

$$y = y(u, v),$$

$$z = z(u, v),$$

y con un vector de posición:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z),$$

entonces definimos:

$$E = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right]^2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad G = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right]^2,$$

$$\mathbf{e} = \left[\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2} \right], \quad \mathbf{f} = \left[\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v} \right], \quad \mathbf{g} = \left[\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} \right],$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal a la superficie y se expresa como:

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}.$$

Si consideramos a todos los planos normales que intersectan a la superficie, en una familia de curvas cuyas normales son paralelas a \mathbf{n} , podríamos calcular la curvatura de alguna de estas curvas en la dirección en que cambian los parámetros u y v . De todas estas direcciones se consideran como principales aquellas que están dadas por las raíces de la siguiente ecuación (Lass, 1950):

$$K_n^2 [F^2 - EG] + K [eG + gE - 2fg] + f^2 - eG = 0, \quad (1.6.20)$$

y se denominan curvaturas principales en un punto dado.

Es evidente que los dos radios principales de curvatura están dados por:

$$R_n = \frac{1}{K_n}.$$

En la mecánica de resolución de la ecuación (1.6.20) utilizaremos primeramente coordenadas cilíndricas para después transformar los resultados a coordenadas esféricas e incorporarlos al contexto del problema. Esto se

debe a que resulta más sencillo este procedimiento, que trabajar con coordenadas esféricas desde un principio.

Para una superficie con ecuaciones paramétricas (en coordenadas cilíndricas):

$$x = \gamma \cos \theta ,$$

$$y = \gamma \operatorname{sen} \theta ,$$

$$z = f(\gamma) ,$$

evaluamos las cantidades E, F, G, e, f, g y sustituyendo en la ecuación (1.6.20) obtenemos:

$$K_1 + K_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = - \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}} - \frac{f'}{\gamma (1 + f'^2)^{1/2}} , \quad (1.6.21)$$

donde f' es la derivada de f .

En coordenadas esféricas tenemos que $f = f(r, \theta)$, y podemos plantear la siguiente relación:

$$\frac{df}{d\gamma} = f' = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \gamma} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} ,$$

en donde los términos $\partial r / \partial \gamma$ y $\partial \theta / \partial \gamma$ se evalúan mediante las ecuaciones de transformación de un sistema coordenado a otro. Realizando el álgebra y sustituyendo se tiene:

$$f' = \operatorname{sen} \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} ,$$

y:

$$f'' = \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial r} ,$$

calculando f'' y sustituyendo en (1.6.21), se llega a:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = - \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial f^2}{\partial r \partial \theta} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial f}{\partial r}}{\left[r^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial f^2}{\partial r} + 2r \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \cos^2 \theta \frac{\partial f^2}{\partial \theta} \right]^{3/2}} -$$

$$\frac{r \operatorname{sen} \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}}{r \operatorname{sen} \theta \left[r^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial f^2}{\partial r} + 2r \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \cos^2 \theta \frac{\partial f^2}{\partial \theta} \right]^{1/2}}$$

Esta ecuación (1.6.22) representa la relación buscada entre los radios principales de curvatura y la superficie que representa a la intercara líquida. Sin embargo, para incorporar esta expresión a las condiciones a la frontera planteadas en la sección anterior, es necesario considerar que el vector n esté definido sobre la superficie:

$$s(r, \theta) = \text{constante.}$$

Entonces se tiene la siguiente relación entre $s(r, \theta)$ y $f(r, \theta)$:

$$s(r, \theta) = f(r, \theta) - r \cos \theta = \text{constante.}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial r} - \cos \theta, \quad (1.6.23)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} + r \operatorname{sen} \theta, \quad (1.6.24)$$

con lo cual ya es posible utilizar (1.6.22) en el planteamiento del problema.

1.6.6 FUNCIÓN DE CORRIENTE.

Dada la estructura de la ecuación de continuidad, es conveniente definir la velocidad en términos de la función de la corriente (Ψ), de manera que se satisfaga trivialmente esta ecuación. De este modo se trabajará únicamente con las ecuaciones de Navier-Stokes en términos de esta nueva función.

En términos de la función de corriente Ψ el campo de velocidades se puede expresar como:

$$v_r = -\frac{1}{r^2} \Psi_x,$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r(1-x^2)^{1/2}} \Psi_r,$$

donde $x = \cos \theta$ y el subíndice en Ψ representa la derivada parcial respecto a x ó r (nota: es conveniente aclarar que de este punto en adelante utilizaremos un subíndice para representar cualquier derivada parcial).

También, es conveniente definir (cuya utilidad se apreciará mas tarde) la función ϕ de la siguiente manera:

$$v_\phi = \frac{(1-x^2)^{1/2} \phi}{r^2}.$$

1.6.6. ECUACIONES GENERALES.

Sustituyendo las funciones Ψ y ϕ en las ecuaciones de Navier-Stokes y eliminando grad p (lo que equivale a tomar el rotacional de las ecuaciones) tenemos las expresiones generales:

$$r^4 G^4 \psi_i = R_1 \left[\frac{2}{r} \phi_i (1-x^2) \left[(1-x^2) \phi_{ix} + r x \phi_{ir} - 3x \phi_i \right] + \frac{4(1-x^2)}{r} \psi_{ix} \psi_{ixx} + \right. \\ \left. (1-x^2) \left[\psi_{ir} \psi_{ixxx} - \psi_{ix} \psi_{ixxx} \right] + 2r \psi_{ix} \psi_{irr} + r \psi_{ir}^2 \psi_{irrx} - r \psi_{irrr}^2 \psi_{ix} + \right. \\ \left. 2xr^2 (1-x^2)^{-1} \left[\psi_{ir} \psi_{ir} \right] \right], \quad (1.6.25,26)$$

$$\left[(1-x^2) \phi_i \right]_{xx} + r^3 \left[\frac{\phi_i}{r} \right]_{rr} = \frac{R_1}{r} \left[\psi_{ix} (\phi_i - r \phi_{ir}) + r \psi_{ir} (\phi_{ix} - \right. \\ \left. \frac{2x}{1-x^2} \phi_i) \right], \quad (1.6.27,28)$$

donde el subíndice i (1,2) indica el fluido de que se trata (superior ó inferior).

En las expresiones anteriores " G^{2n} " es un operador definido de la siguiente forma:

$$G^2 = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial xx}. \quad (1.6.29)$$

Además es evidente que " G^4 " significa que (1.6.27) se debe aplicar en dos ocasiones. También es conveniente recordar que R es el número de Reynolds de alguno de los sistemas.

Ahora tenemos un sistema de cuatro ecuaciones ((1.6.25), (1.6.26), (1.6.27), y (1.6.28)) con igual número de incógnitas (ϕ, ψ) para cada fluido.

1.6.7 CONDICIONES A LA FRONTERA EN TERMINOS

DE LAS FUNCIONES ϕ y ψ .

Sustituyendo las funciones ϕ y ψ en las condiciones a la frontera tenemos:

a) En $r = 1$ (superficie de la esfera):

$$\psi_1 = \text{constante}, \quad (1.6.30)$$

$$\phi_1 = 1, \quad (1.6.31)$$

$$\psi_2 = \text{constante}, \quad (1.6.32)$$

$$\phi_2 = 1. \quad (1.6.33)$$

b) En $s = f(r, \theta)$ (la intercara fluido-fluido):

b₁) Condiciones sobre velocidades (ecuaciones 1.6.13) a (1.6.16):

$$\psi_{1x} = \psi_{2x}, \quad (1.6.34)$$

$$\psi_{1r} = \psi_{2r}, \quad (1.6.35)$$

$$\phi_1 = \phi_2, \quad (1.6.36)$$

$$\psi_{1x} s_r - \psi_{1r} s_x = 0. \quad (1.6.37)$$

b₂) Condiciones sobre los esfuerzos:

$$\eta_2 p_2 - \eta_1 p_1 + \frac{2(\eta_1 - \eta_2)}{r s} \left[r^2 [2\psi_{xx} - r\psi_{xr}] s_r^2 - [(1-x^2)\psi_{xx} + r(2\psi_r - r\psi_{rr})] r s_r s_x + \right.$$

$$\left. [(1-x^2)(r\psi_{rx} - \psi_x) - xr\psi_r] s_x^2 \right] = \frac{\alpha r^{-2}}{\omega} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] (r^2 s_r^2 + (1-x^2) s_x^2). \quad (1.6.38)$$

$$(\eta_1 - \eta_2) \left[-s_x (1-x^2) \phi_x + r s_r (r \phi_r - 3\phi) \right] = 0, \quad (1.6.39)$$

$$(1-x^2)(\eta_2 p_2 - \eta_1 p_1) s_r s_x + \frac{(\eta_1 - \eta_2)}{r^4} \left[-(1-x^2)(\psi_x - r\psi_r) r s_r s_x + \right. \\ \left. \frac{1}{2} [(1-x^2)\psi_{xx} + r(2\psi_r - r\psi_{rr})] [(1-x^2)s_x^2 - r^2 s_r^2] \right] = 0. \quad (1.6.40)$$

donde:

$$s_r = f_r - x, \quad (1.6.41)$$

$$s_x = \frac{(1-x^2)}{r} \left[f_x - r \right]. \quad (1.6.42)$$

Los radios principales de curvatura y f se relacionan mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = - \frac{r^2 (1-x^2)^{1/2} \left[r f_{rr} - x(1-x^2)^{1/2} f_{xr} \right] + r^2 x^2 f_r}{\left[r^2 + (1-x^2)(r^2 f_r^2 - 2x r f_r f_x + x^2 f_x^2) \right]^{3/2}} - \\ \frac{r f_r - x f_x}{r \left[r^2 + (1-x^2)(r^2 f_r^2 - 2x r f_r f_x + x^2 f_x^2) \right]^{1/2}}. \quad (1.6.43)$$

c) Condiciones cuando $r \rightarrow \infty$:

$$c_1) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} \psi_{1x}, \frac{1}{r} \psi_{1r}, \frac{1}{r^2} \phi_1 < \infty,$$

$$c_2) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} \psi_{2x}, \frac{1}{r} \psi_{2r}, \frac{1}{r^2} \phi_2 < \infty,$$

$$c_3) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} n = k .$$

1.7 RESUMEN

En este capítulo hemos planteado totalmente las ecuaciones de movimiento y las condiciones a la frontera generales asociadas con el problema de interés.

Las ecuaciones (1.6.25), (1.6.26), (1.6.27) y (1.6.28) nos determinan la forma general del campo de velocidades de cada fluido. Las expresiones (1.6.30) a la (1.6.33) fijan la forma del campo de velocidades en la superficie de la esfera.

En lo referente a las condiciones en la intercara líquida (ecuaciones (1.6.34) a (1.6.40)) nos determinan la velocidad de cada fluido en esta región y auxiliadas por (1.6.41), (1.6.42) y (1.6.43) nos proporcionan la ecuación de la superficie que forma la intercara.

Por último, las condiciones cuando la coordenada r tiende a infinito, nos aseguran que el campo de velocidades se anula lejos de la esfera.

Como puede observarse se ha planteado totalmente el problema, ahora se presenta la gran tarea de resolver las ecuaciones y ajustar las condiciones a la frontera.

CAPITULO 2

ROTACION DE UN FLUIDO

2.1 GENERALIDADES

Para obtener la solución general del problema planteado en el capítulo anterior, resolvamos inicialmente el caso de rotación de una esfera en un solo fluido.

Esto se debe a que ambos problemas tienen idéntica solución general. Sin embargo, el caso de un solo fluido es un problema menos complejo y ya existen algunos resultados reportados en la literatura, con los cuales se pueden establecer ciertas comparaciones (Ovseenko, 1963).

Las ecuaciones generales (1.6.25) y (1.6.26) planteadas anteriormente son también válidas para el caso de rotación en un solo fluido.

En lo referente a las condiciones a la frontera en la superficie de la esfera, las expresiones (1.6.28) y (1.6.29) son aplicables, es decir:

$$\psi = \text{constante} . .$$

$$\phi = 1 .$$

Además también se debe cumplir que el campo de velocidades esté acotado cuando la coordenada radial tienda a infinito.

Como puede imaginarse, el problema de rotación de una esfera en un solo fluido tiene una estructura más simple que la planteada en las secciones 1.6.6 y 1.6.7 .

Debido a esto intentaremos en primer lugar resolver el caso menos complejo, y con la solución general obtenida, pasar al problema de rotación en una intercara, ajustando las condiciones a la frontera en $s(r, \theta)$.

2.2 TEORIA REGULAR DE PERTURBACIONES.

Para resolver las ecuaciones generales, utilizaremos el método de teoría regular de perturbaciones. Esta consiste en efectuar pequeños cambios al sistema en estudio através de un parámetro denominado perturbativo, el cual, es una cantidad característica del problema, de magnitud pequeña. Esto se logra mediante el planteamiento de una solución en series de potencias en términos de la magnitud seleccionada.

Debido a la naturaleza y estructura del problema, el parámetro perturbativo que es conveniente emplear es el número de Reynolds, el cual se supondrá pequeño.

En este contexto podemos proponer soluciones en serie de potencias en términos del número de Reynolds, es decir:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \Psi^{(n)}, \quad (2.2.1)$$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \Phi^{(n)}. \quad (2.2.2)$$

Ahora el problema consiste en encontrar las funciones $\Psi^{(n)}$ y $\Phi^{(n)}$ de las series (2.2.1) y (2.2.2) para cada n . Si sustituimos las soluciones en series en las ecuaciones (1.6.25) y (1.6.26) e igualamos a cero los coeficientes de cada potencia del número de Reynolds se obtiene:

$$\begin{aligned} \left[(1-x^2) \Phi^{(k)} \right]_{xx} + r^2 \left[\frac{\Phi^{(k)}}{r} \right]_{rr} = r^4 \sum_{n=0}^{k-1} \left[\frac{\Psi^{(n)}}{x} \left[\Phi^{(k-n-1)} - r \frac{\Phi^{(k-n-1)}}{r} \right] + \right. \\ \left. r \frac{\Psi^{(n)}}{r} \left[\frac{\Phi^{(k-n-1)}}{x} - \frac{2x}{1-x^2} \Phi^{(k-n-1)} \right] \right], \quad (2.2.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r^4 G^4 \psi^{(k)} = \sum_{n=0}^{k-1} & \left[\frac{4(1-x^2)}{r} \psi_x^{(n)} \psi_{xx}^{(k-n-1)} + (1-x^2) \left[\psi_r^{(n)} \psi_{xxx}^{(k-n-1)} - \right. \right. \\
& \left. \left. \psi_x^{(n)} \psi_{xxr}^{(k-n-1)} \right] + 2r \psi_x^{(n)} \psi_{rr}^{(k-n-1)} + r^2 \psi_r^{(n)} \psi_{rrx}^{(k-n-1)} - r^2 \psi_{rrr}^{(n)} \psi_x^{(k-n-1)} + \right. \\
& \left. \frac{2xr^2}{1-x^2} \psi_{rr}^{(n)} \psi_r^{(k-n-1)} + \frac{2(1-x^2)}{r} \phi^{(n)} \left[(1-x^2) \phi_x^{(k-n-1)} + (1-x^2) \phi_x^{(k-n-1)} + \right. \right. \\
& \left. \left. xr \phi_r^{(k-n-1)} - 3x \phi^{(k-n-1)} \right] \right], \quad (2.2.4)
\end{aligned}$$

en esta última expresión tenemos que G está dado por la ecuación (1.6.27) y k toma valores desde cero hasta infinito. Para k = 0 tenemos el caso de una ecuación homogénea (las sumatorias son iguales a cero).

Las expresiones (2.2.3) y (2.3.4) se resuelven para cada k y de este modo obtenemos los coeficientes del desarrollo en series del número de Reynolds.

Para ajustar las condiciones a la frontera en la superficie de la esfera (r = 1) consideremos lo siguiente:

$$\psi = \text{constante} = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \psi^{(n)}.$$

Debido a la relación que existe entre la función ψ y el campo de velocidades, es conveniente expresar esta condición a la frontera en términos de las derivadas de ψ con respecto a x y a r. Por lo tanto la igualdad anterior nos conduce a las siguientes expresiones:

$$\psi_x^{(k)} = 0, \quad (2.2.5)$$

$$\psi_r^{(k)} = 0, \quad (2.2.6)$$

para k = 0, 1, 2, en r = 1. Además se tiene que:

$$\phi = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \phi^{(n)}.$$

Esto se cumple si consideramos lo siguiente:

$$\phi^{(0)} = 1, \quad (2.2.7)$$

$$\phi^{(k)} = 0, \quad (2.2.8)$$

para $k = 1, 2, \dots$ en $r = 1$. También debe cumplirse que:

$$\frac{1}{r^2} \psi_x^{(k)} < \infty, \quad (2.2.9)$$

$$\frac{1}{r} \psi_r^{(k)} < \infty, \quad (2.2.10)$$

$$\frac{1}{r^2} \psi^{(k)} < \infty, \quad (2.2.11)$$

para $k = 0, 1, \dots$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Con estas expresiones nos aseguramos que las soluciones en series cumplan con las restricciones que la física impone a este problema particular.

2.2.1 SOLUCION GENERAL.

Dada la estructura de las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4) podemos construir las soluciones de la siguiente manera:

$$\phi^{(k)} = \phi_H^{(k)} + \phi_I^{(k)}, \quad (2.2.12)$$

$$\psi^{(k)} = \psi_H^{(k)} + \psi_I^{(k)}, \quad (2.2.13)$$

el subíndice H indica que se trata de la solución general de la ecuación homogénea, mientras que el término con el subíndice I representa una solución particular de la ecuación no homogénea. Estas soluciones dependen de la forma que tenga la no homogeneidad para cada k en particular. Debido a lo anterior es necesario encontrar primeramente la solución de las siguientes ecuaciones homogéneas:

$$G^4 \psi_H = 0, \quad (2.2.14)$$

$$\left[(1-x^2) \phi_H \right]_{xx} + r^3 \left[\frac{\phi_H}{r} \right]_{rr} = 0. \quad (2.2.15)$$

Para resolver las expresiones anteriores proponemos una solución separable:

$$\phi_H = r X(x) T(r),$$

que al sustituirla en la ecuación (2.2.14) obtenemos:

$$\frac{[(1-x^2) X(x)]''}{X(x)} = \frac{r^2 T''(r)}{T(r)} = -n(n+1).$$

Esta expresión nos proporciona dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$r^2 T''(r) - n(n+1) T(r) = 0,$$

$$(1-x^2) X''(x) - 4x X'(x) + (n(n+1)-2) X(x) = 0.$$

Al resolver para $T(r)$ obtenemos:

$$T(r) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^{-n+1} + B_n r^{-n}], \quad (2.2.16)$$

donde A_n y B_n son constantes a determinar para cada n específica.

Para resolver la ecuación diferencial de $X(x)$ utilizaremos su analogía con la expresión de Legendre (Hildebrand, 1976):

$$(1-x^2) F''(x) - 2x F'(x) + n(n+1) F(x) = 0,$$

si derivamos esta ecuación tenemos:

$$(1-x^2) F'''(x) - 4x F''(x) + [n(n+1) - 2] F'(x) = 0,$$

esta expresión es igual a la ecuación diferencial para $X(x)$. Debido a lo

anterior podemos plantear una expresión para ϕ_H en términos de polinomios de Legendre, $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ (Hildebrand, 1976):

$$\phi_H = \sum_{n=0}^{\infty} r \left[[A_n r^{n+1} + B_n r^{-n}] P'_n(x) + [C_n r^{n+1} + D_n r^{-n}] Q'_n(x) \right], \quad (2.2.17)$$

en esta expresión los términos C_n y D_n son los coeficientes de los $Q_n(x)$ para cada n .

Ahora pasaremos a resolver la ecuación para ψ_H :

$$G^2 \psi_H = 0.$$

La solución más general de esta ecuación se puede expresar del siguiente modo:

$$\psi_H = \psi_1 + \psi_2,$$

donde las funciones ψ_1 y ψ_2 deben cumplir:

$$G^4 \psi_1 = 0 \text{ (homogénea),}$$

$$G^2 \psi_2 = W \text{ (no homogénea),}$$

además debemos pedir que:

$$G^2 W = 0,$$

con lo cual aseguramos que se cumple la ecuación diferencial para ψ_H .

Primeramente encontraremos la función ψ_1 , para lo cual utilizaremos la ecuación (1.5.27):

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi_1 + \frac{(1-x^2)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1 = 0.$$

Proponemos una solución en variables separables:

$$\Psi_1 = U(x) V(r) ,$$

y sustituyéndola en la ecuación diferencial tenemos:

$$\frac{r^2 V''(r)}{V(r)} = \frac{(1-x^2)U''(x)}{U(x)} = -n(n-1) .$$

Ahora resolvemos para $V(r)$:

$$r^2 V''(r) + n(n-1) V(r) = 0 ,$$

la solución a esta ecuación es:

$$V(r) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-(n-1)}] , \quad (2.2.18)$$

donde a_n y b_n son constantes para cada n en particular.

La expresión para $U(x)$ que obtenemos es la siguiente:

$$(1-x^2) U''(x) + n(n-1) U(x) = 0 ,$$

la cual es igual a la ecuación de Gegenbauer (Arfken, 1981 y Happel-Brenner, 1973):

$$(1-x^2)y''(x) - 2(1+\beta)y'(x) + n(n+2\beta+1)y(x) = 0 ,$$

cuando $\beta = -1$. Las soluciones a esta ecuación son los llamados funciones de Gegenbauer $I_n(x)$ y $H_n(x)$. Estas funciones forman una base completa y tienen propiedades bien definidas (ver apéndice). Debido a lo anterior podemos establecer una expresión para $U(x)$:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n I_n(x) + d_n H_n(x)) ,$$

en la cual c_n y d_n son coeficientes para cada n en particular.

Las funciones $I_n(x)$ y $H_n(x)$ están relacionadas con las soluciones a la ecuación de Legendre $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ respectivamente (ver apéndice). Debido a lo anterior la solución general a Ψ_1 la podemos expresar como:

$$\Psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[[a_n r^n + b_n r^{-(n-1)}] I_n(x) + [c_n r^n + d_n r^{-(n-1)}] H_n(x) \right]. \quad (2.2.19)$$

Para obtener Ψ_2 podemos proponer para esta función una estructura similar a la que presenta Ψ_1 :

$$\Psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[R_n(r) I_n(x) + S_n(r) H_n(x) \right], \quad (2.2.20)$$

donde $R_n(r)$ y $S_n(r)$ son funciones a determinar, así:

$$G^2 \Psi_2 = W = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left[R_n'' - \frac{n(n-1)}{r^2} R_n \right] I_n + \left[S_n'' - \frac{n(n-1)}{r^2} S_n \right] H_n \right]. \quad (2.2.21)$$

Debido a que:

$$G^2 W(r, x) = 0,$$

la función W debe tener la misma estructura que $\Psi_1(r, x)$:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \left[[e_n r^n + f_n r^{-(n-1)}] I_n(x) + [h_n r^n + g_n r^{-(n-1)}] H_n(x) \right],$$

donde e_n , f_n , h_n y g_n son los coeficientes de los polinomios para cada n .

Igualando términos con la expresión (2.2.21) tenemos:

$$R_n''(r) - \frac{n(n-1)}{r^2} R_n(r) = f_n r^{-(n-1)} + e_n r^n,$$

$$S_n''(r) - \frac{n(n-1)}{r^2} S_n(r) = h_n r^{-(n-1)} + g_n r^n.$$

Al resolver para $R(r)$ tenemos que esta función se puede expresar del siguiente modo:

$$R_n(r) = R_{1,n} + R_{2,n},$$

donde $R_{1,n}$ es la solución general a la ecuación homogénea y $R_{2,n}$ es una solución particular a la expresión no homogénea.

La ecuación homogénea tiene la siguiente solución:

$$R_{1,n} = E_n r^n + F_n r^{1-n},$$

por otro lado una solución particular a la expresión no homogénea es:

$$R_{2,n} = G_n r^{3-n} + L_n r^{n+2},$$

con lo cual:

$$R_n = E_n r^n + F_n r^{1-n} + G_n r^{3-n} + L_n r^{n+2},$$

es evidente que S_n tiene una estructura idéntica. Sustituyendo en la ecuación (2.2.20):

$$\begin{aligned} \psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} & \left[\left[F_n r^{-(n-1)} + G_n r^{3-n} + E_n r^n + L_n r^{n+2} \right] I_n(x) + \right. \\ & \left. \left[i_n r^{-(n-1)} + j_n r^{3-n} + o_n r^n + p_n r^{n+2} \right] H_n(x) \right], \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

donde F_n , G_n , E_n , L_n , i_n , j_n , o_n , y p_n son los coeficientes de los polinomios para cada n en particular.

Mediante las ecuaciones (2.2.19) y (2.2.22) obtenemos la solución general a la ecuación homogénea:

$$\begin{aligned} \psi_H = \sum_{n=0}^{\infty} & \left[\left[\alpha_n r^n + \delta_n r^{-(n-1)} + \kappa_n r^{3-n} + \lambda_n r^{n+2} \right] I_n(x) + \right. \\ & \left. \left[\tau_n r^n + \vartheta_n r^{-(n-1)} + \pi_n r^{3-n} + \zeta_n r^{n+2} \right] H_n(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Antes de pasar a ajustar las condiciones a la frontera es conveniente expresar la solución general ϕ_H en términos de las funciones de Gegenbauer, para lo cual utilizaremos las siguientes identidades (ver apéndice 1):

$$\frac{d}{dx} I_n(x) = -P_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = -Q_{n-1}(x).$$

Con estas expresiones rearrreglamos la ecuación (2.2.17) y obtenemos:

$$\phi_H = \sum_{n=1}^{\infty} -r \left[[L_n r^n + m_n r^{-n+1}] I_n''(x) + [-L_n r^n + N_n r^{-n+1}] H_n''(x) \right]. \quad (2.2.24)$$

Las funciones ϕ_H y ψ_H son las soluciones a las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4) en su forma homogénea, y como hemos mencionado anteriormente, son fundamentales en el esquema desarrollado para resolver el problema.

2.2.2 SOLUCION A ORDEN CERO.

Antes de ajustar condiciones a la frontera en la superficie de la esfera, para la solución de las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4) en su forma homogénea, verificaremos que se cumplan los siguientes límites:

$$\lim_{|x| \rightarrow 1} v < \infty,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v < \infty,$$

esto es debido a que necesitamos asegurar que la solución encontrada no diverja en ningún punto del espacio. Para calcular estos límites evaluaremos las componentes del campo de velocidad (a orden cero) a partir de (2.2.23), (2.2.24) y de la definición de las funciones ϕ y ψ (Capítulo 1). Sin embargo, primeramente consideraremos que debido a la estructura de las funciones $H_n(x)$ (ver apéndice 1) que divergen en los puntos $|x| = 1$ para $n > 1$, los coeficientes de estas funciones deberán ser idénticamente iguales a cero.

Debido a lo anterior podemos representar las soluciones de los campos de velocidad de la siguiente manera:

$$v_{\phi} = \frac{(1-x^2)^{1/2}}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} r^{-n-1} + \frac{m}{n} r^{-n+1} \right] I_n''(x), \quad (2.2.25)$$

$$v_r = -r^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n r^n + \delta_n r^{-(n-1)} + \kappa_n r^{3-n} + \lambda_n r^{n+2} \right] I_n'(x), \quad (2.2.26)$$

$$v_{\theta} = \frac{r^{-1}}{(1-x^2)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[n\alpha_n r^{n-1} + (-n+1)\delta_n r^{-n} + (-n+3)\kappa_n r^{-n+2} + (n+2)\lambda_n r^{n+1} \right] I_n(x). \quad (2.2.27)$$

Haciendo un análisis de cada uno de los términos de las ecuaciones anteriores, en los límites de interés, y cambiando los nombres de las constantes, observamos que las soluciones a orden cero se pueden expresar del siguiente modo:

$$\Psi^{(0)} = c_1 - c_2 x + 2c_3 r^2 (1-x^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[b_n r^{-n+1} + d_n r^{-n+3} \right] I_n(x), \quad (2.2.28)$$

$$\Phi^{(0)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n r^{-n+2}}{1-x^2} I_n(x). \quad (2.2.29)$$

Ahora pasaremos a ajustar las condiciones a la frontera en la superficie de la esfera ($r = 1$):

$$\Psi_x^{(0)} = \Psi_r^{(0)} = 0,$$

esto implica que:

$$c_2 = c_3 = 0,$$

$$d_n = b_n = 0, \text{ para toda } n,$$

por lo tanto:

$$\Psi^{(0)} = \text{constante}.$$

Dado que el valor de esta constante resulta irrelevante en el contexto del problema, asumimos que:

$$\psi^{(0)} = 0 . \quad (2.2.30)$$

La otra condición a la frontera en $r = 1$ es:

$$\phi^{(0)} = 1 ,$$

lo que nos lleva a obtener los siguientes valores de las constantes:

$$A_2 = 1 ,$$

$$A_n = 0 , \text{ para } n > 2 ,$$

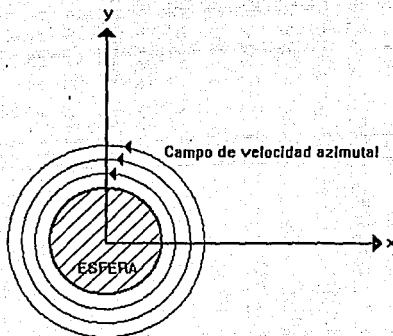


Figura 2. Solución a orden cero.

de donde tenemos:

$$\phi^{(0)} = 1 . \quad (2.2.31)$$

Esta ecuación nos representa la conveniencia de definir la función ϕ como lo hicimos en el primer capítulo de esta tesis.

Las ecuaciones (2.2.30) y (2.2.31) representan los primeros términos de las series en que está expresada la solución del problema de la rotación de una esfera en un fluido. Es evidente que necesitamos conocer algunos otros términos de estas series para poder obtener expresiones que puedan ser consideradas como una buena aproximación a la solución completa del problema. Sin embargo, si el número de Reynolds es pequeño, los primeros términos de las series pueden predominar sobre los restantes. En este caso las ecuaciones (2.2.30) y (2.2.31) deberían ser consideradas como la solución completa del problema, por lo que es conveniente analizarlas.

A orden cero el campo de velocidad es exclusivamente azimutal, es decir:

$$v_r = v_\theta = 0 ,$$

$$v_\phi = \frac{\text{sen } \theta}{r^2} ,$$

lo cual significa que el fluido se mueve en forma de círculos concéntricos alrededor del eje z. Esto se puede observar gráficamente en la figura 2.

2.2.3 SOLUCION A PRIMER ORDEN.

Ahora obtendremos los coeficientes de los términos de primer orden de las series (2.2.1) y (2.2.2).

Comenzaremos utilizando las expresiones generales de $\phi^{(k)}$ y $\psi^{(k)}$ para obtener las ecuaciones diferenciales que satisfacen estas funciones cuando $k = 1$:

$$r^4 G^4 \psi^{(1)} = - \frac{6x(1-x^2)}{r} = - \frac{3}{r} I_3(x) , \quad (2.2.32)$$

$$\left[(1-x^2) \phi^{(1)} \right]_{xx} + r^3 \left[\frac{\phi^{(1)}}{r} \right]_{rr} = 0 \quad (2.2.33)$$

En estas ecuaciones se han incluido las expresiones para $k = 0$ (2.2.30) y (2.2.31), y el término $I_3(x)$ es el polinomio de Gegenbauer cuando $n = 3$.

De las ecuaciones anteriores podemos concluir que $\phi^{(1)}$ tiene igual estructura que $\phi^{(0)}$, es decir:

$$\phi^{(1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n r^{-n+2}}{1-x^2} I_n(x) \quad (2.2.34)$$

A partir de la estructura de (2.2.31) podemos descomponer a la función $\psi^{(1)}$ de la siguiente manera:

$$\psi^{(1)} = \psi_H + \psi_p^{(1)}$$

donde el primer término del lado derecho representa a la solución general de la ecuación homogénea; mientras que $\psi_p^{(1)}$ es alguna solución particular de la ecuación no homogénea.

La solución general a la ecuación homogénea es justamente la función $\psi^{(0)}$ representada por la expresión (2.2.28).

Proponemos una estructura de la solución particular a (2.2.32) de la siguiente manera:

$$\psi_p^{(1)} = k r^\alpha I_n(x) \quad (2.2.35)$$

esto está justificado por la forma de la inhomogeneidad. Si sustituimos la solución particular en el lado derecho de la ecuación (2.2.31) se tiene:

$$r^4 G^4 \psi_p^{(1)} = k(1-x^2)r^\alpha \left[(1-x^2) I_n''(x) - 4x I_n''(x) + [(\alpha-2)(\alpha-3) + (\alpha+1)(\alpha-2)] I_n'(x) + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{(1-x^2)} I_n(x) \right] \quad (2.2.36)$$

Sabemos que los polinomios de Gegenbauer cumplen la siguiente ecuación (Abramovich, 1973):

$$(1-x^2) I_n''(x) + n(n-1) I_n'(x) = 0,$$

la cual, al derivarla dos veces, da:

$$(1-x^2) I_n''''(x) - 4x I_n''''(x) + (n+1)(n-2) I_n''(x) = 0.$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en (2.2.36) y reagrupando términos se tiene:

$$r^4 G^4 \psi_p^{(1)} = k r^\alpha \left[\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) + [(n+1)(n-2) - (\alpha-2)(\alpha-3) - (\alpha+1)(\alpha-2)] n(n-1) \right] I_n(x),$$

por facilidad en el manejo de las ecuaciones efectuaremos un cambio de notación en la expresión anterior:

$$r^4 G^4 \psi_p^{(1)} = k r^\alpha K(\alpha, n) I_n(x), \quad (2.2.37)$$

donde:

$$K(\alpha, n) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) + [(n+1)(n-2) - (\alpha-2)(\alpha-3) - (\alpha+1)(\alpha-2)] n(n-1)$$

Sustituyendo (2.2.37) en la ecuación (2.2.32) tenemos:

$$k r^\alpha K(\alpha, n) I_n(x) = -\frac{3}{F} I_3(x),$$

entonces para $\alpha = -1$ y $n = 3$:

$$K(\alpha, n) = K(-1, 3) = -24 ;$$

por lo tanto:

$$k = -1/8 ,$$

con base en estos datos, la solución particular es:

$$\psi_{\mu}^{(1)} = -\frac{1}{8} r^{-1} I_3(x) . \quad (2.2.38)$$

Finalmente la solución general a la ecuación (2.2.32) es:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} = & c_1 - c_2 x + 2c_3 r^2 (1-x^2) - \frac{r^{-1}}{8} I_3(x) + \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \left[b_n r^{-n+1} + d_n r^{-n+3} \right] I_n(x) . \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

Ahora ajustaremos las condiciones a la frontera en la superficie de la esfera:

$$\psi_x^{(1)} = \psi_r^{(1)} = \phi^{(1)} = 0 \text{ (en } r = 1),$$

con lo cual podemos evaluar las constantes que aparecen en las ecuaciones (2.2.34) y (2.2.39). Primeramente tenemos:

$A_n = 0$, para toda n , es decir:

$$\phi^{(1)} = 0 . \quad (2.2.40)$$

Para calcular las constantes de la función $\psi^{(1)}$ se tiene, para r igual uno:

$$\psi_x^{(1)} = -c_2 - 4c_3 x - \frac{1}{8} I_3(x) + \sum_{n=2}^{\infty} (b_n + d_n) I_n(x) = 0 ,$$

$$\psi_r^{(1)} = 4c_3(1-x^2) + \frac{1}{8} I_3(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-n+1)b_n + (-n+3)d_n \right] I_n(x) ;$$

con estas expresiones evaluamos las constantes:

$$b_n = d_n = 0 , \text{ para } n \neq 3 ,$$

$$d_3 = b_3 = 1/16 ;$$

con estos resultados y considerando la función que representa al polinomio de Gegenbauer de orden tres (apéndice 1) se obtiene:

$$\psi^{(1)} = -\frac{1}{8} x(1-x^2) \left[1 - \frac{2}{r} + \frac{1}{r^2} \right] . \quad (2.2.41)$$

Las expresiones (2.2.40) y (2.2.41) representan un campo de velocidades en el que el campo azimutal es idénticamente cero. Además representan la primera corrección a los términos de orden cero, por lo cual tienen una importancia significativa en el desarrollo del problema.

Debido a lo anterior es conveniente visualizar gráficamente el movimiento del fluido ocasionado por un campo de velocidades representado por las ecuaciones (2.2.40) y (2.2.41).

Es posible demostrar (Landau, 1986) que para este caso particular (u otros semejantes) las partículas de fluido se mueven a lo largo de las curvas representadas por la condición:

$$\psi = \text{constante} , \quad (2.2.42)$$

las cuales se denominan líneas de corriente.

Las líneas de corriente que deseamos graficar son:

$$\psi^{(1)} = -\frac{1}{8} \text{sen}^2\theta \cos\theta \left[1 - \frac{2}{r} + \frac{1}{r^2} \right] = \text{constante} = A ,$$

esta expresión es justamente (2.2.41) rearrglada y sujeta a (2.2.42). La condición nos proporciona una relación funcional entre las coordenadas r y θ

$$r = \frac{\text{sen}^2 \theta \cos \theta}{8|A| + \text{sen}^2 \theta \cos \theta} \left[1 + \left[\frac{8|A|}{\text{sen}^2 \theta \cos \theta} \right]^{1/2} \right]$$

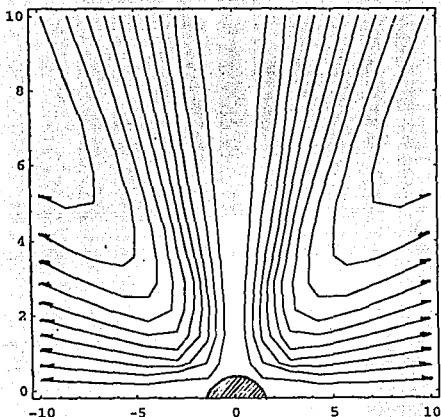


FIGURA 3
SOLUCION A PRIMER ORDEN

Esta función puede observarse en la figura 3 para distintos valores de la constante A . Se puede apreciar el movimiento del fluido representado por las ecuaciones (2.2.40) y (2.2.41), mediante líneas de corriente graficadas en el plano ZX. La posición de la esfera se muestra también en la figura.

2.2.4 SOLUCION A SEGUNDO ORDEN.

Para encontrar las ecuaciones diferenciales que determinan a las funciones $\phi^{(2)}$ y $\psi^{(2)}$ utilizaremos las expresiones (2.2.3) y (2.2.4) y las soluciones a ordenes cero y uno ya encontradas en las secciones 2.2.2 y 2.2.3 de esta tesis. Realizando lo anterior, para $k = 2$ tenemos:

$$C^4 \psi^{(2)} = 0 ; \quad (2.2.43)$$

$$\left[(1-x^2) \phi^{(2)} \right]_{xx} + r^3 \left[\frac{\phi^{(2)}}{r} \right]_{rr} = \psi_x^{(1)} - 2xr(1-x^2)^{-1} \phi_r^{(1)}. \quad (2.2.44)$$

De (2.2.44) podemos concluir inmediatamente que $\psi^{(2)}$ tiene la misma estructura que la función $\psi^{(0)}$, es decir:

$$\psi^{(2)} = c_1 - c_2 x + 2c_3 r^2 (1-x^2) + \sum_2^{\infty} \left[b_n r^{-n+1} + d_n r^{-n+3} \right] I_n(x). \quad (2.2.45)$$

Para obtener $\phi^{(2)}$ primero evaluamos los términos del lado derecho de la ecuación (2.2.44), usando la función ψ a primer orden :

$$L^2 \phi^{(2)} = -\frac{1}{8} r^{-4} \left[x^2 \left[-3 + \frac{2}{r} + \frac{1}{r^2} \right] + \left[1 - \frac{2}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \right], \quad (2.2.46)$$

en esta expresión utilizamos el siguiente cambio de notación:

$$L^2 \phi^{(2)} = \left[(1-x^2) \phi^{(2)} \right]_{xx} + r^3 \left[\frac{\phi^{(2)}}{r} \right]_{rr},$$

donde L^2 representa al operador diferencial que aparece en el lado izquierdo de la ecuación (2.2.44). La solución de la expresión (2.2.44) se puede representar de la siguiente manera:

$$\phi^{(2)} = \phi_H + \phi_p^{(2)},$$

donde ϕ_H es la solución general de la ecuación homogénea, mientras que el

segundo término del lado derecho representa a alguna solución particular de la ecuación no homogénea.

La función ϕ_H esta representada por la ecuación (2.2.29), y dada la estructura de la inhomogeneidad propondremos una solución particular a (2.2.44) de la siguiente forma:

$$\phi_p^{(2)} = A_1 r^{\alpha_1} x^{\beta_1} + A_2 r^{\alpha_2} x^{\beta_2} + \dots + A_6 r^{\alpha_6} x^{\beta_6}$$

Si aplicamos el operador L^2 al primer término del lado derecho tenemos:

$$L^2 [A_1 r^{\alpha_1} x^{\beta_1}] = A_1 r^{\alpha_1} [\beta_1(\beta_1-1)x^{\beta_1-2} [(\alpha_1-1)(\alpha_1-2) - (\beta_1+2)(\beta_1+1)] x^{\beta_1}],$$

y comparando con (2.2.44) se tiene:

$$\beta_1 = 2,$$

$$\alpha_1 = -4,$$

$$18 A_1 = 3/8;$$

siguiendo un método similar con cada uno de los términos de la solución particular y reorganizando tenemos:

$$\phi_p^{(2)} = -\frac{1}{8} \left[x^2 \left[-\frac{1}{6r^4} + \frac{1}{15r^5} + \frac{1}{44r^6} \right] + \frac{1}{21r^4} - \frac{4}{75r^5} + \frac{21}{1188r^6} \right]. \quad (2.2.47)$$

Finalmente la solución general a orden dos es:

$$\phi^{(2)} = \phi_p^{(2)} + \sum_2^{\infty} \frac{A_n r^{-n+2}}{1-x^2} I_n(x). \quad (2.2.48)$$

Ahora ajustaremos condiciones a la frontera en la superficie de la esfera, en r igual a uno:

$$\psi_r^{(2)} = \psi_x^{(2)} = \phi^{(2)} = 0;$$

por lo tanto:

$$c_2 = c_3 = b_n = d_n = 0,$$

es decir:

$$\psi^{(2)} = 0. \quad (2.2.49)$$

Para ajustar la condición a la frontera sobre la función $\phi^{(2)}$ primero reorganizamos la ecuación (2.2.47) utilizando propiedades de los polinomios de Gegenbauer (ver apéndice):

$$\phi^{(2)} = -\frac{1}{8} \left[x^2 \left[-\frac{1}{6r^4} + \frac{1}{15r^5} + \frac{1}{44r^6} \right] + \frac{1}{27r^4} - \frac{1}{75r^5} + \frac{21}{1188r^6} \right] - \sum_{n=2}^{\infty} B_n r^{-n+2} I_n(x);$$

al aplicar la condición a la frontera se obtienen las constantes B_n y el resultado es:

$$\phi^{(2)} = -\frac{1}{8} \left[\frac{x^2}{660} \left[+\frac{51}{r^2} - \frac{110}{r^4} + \frac{44}{r^5} + \frac{15}{r^6} \right] + \frac{1}{21} \left[\frac{1}{r^4} - 1 \right] - \frac{4}{75} \left[\frac{1}{r^5} - 1 \right] + \frac{21}{1188} \left[\frac{1}{r^6} - 1 \right] - \frac{51}{3300} \left[\frac{1}{r^2} - 1 \right] \right]. \quad (2.2.50)$$

Las expresiones (2.2.49) y (2.2.50) son la segunda corrección a los términos de orden cero en las series (2.1.1) y (2.2.2). Estas funciones representan a un campo de velocidades exclusivamente azimutal (como en el caso de los términos de orden cero). Es decir, el fluido se mueve en círculos concéntricos alrededor de la esfera, como puede visualizarse gráficamente en la figura número 2.

2.3 CALCULO DE LA TORCA APLICADA A LA ESFERA.

Ahora procederemos a buscar una expresión para la torca ejercida sobre la esfera, a partir del campo de velocidades aproximado hasta segundo orden. Este cálculo tiene una singular importancia debido a lo siguiente:

a) La torca es una magnitud que es posible medir experimentalmente (para este problema en particular), por lo tanto, se trata de un parámetro de comparación teórico-práctico.

b) A partir del conocimiento de la torca se puede evaluar la viscosidad de uno de los fluidos (viscosímetro). Este hecho forma parte del conjunto de motivaciones que dieron origen a buscar una solución al problema de rotación de una esfera en un fluido en una intercara.

La torca aplicada a la superficie de la esfera se expresa (en coordenadas esféricas) como:

$$T' = \int_S \left[\underline{\sigma} \cdot \hat{e}_r \right]_{r=a} \times r \, ds,$$

donde r es el vector de posición con respecto al origen del sistema coordenado.

Podemos reorganizar la ecuación de la torca, usando el hecho de que $|r|=a$:

$$T' = a \int_S \left[\underline{\sigma} \cdot \hat{e}_r \right]_{r=a} \times \hat{e}_r \, ds,$$

y realizando los productos punto y cruz se tiene:

$$T' = a \int_S \left[\sigma(r\theta) \hat{e}_\theta - \sigma(r\theta) \hat{e}_\phi \right]_{r=a} ds.$$

La componente del tensor de esfuerzo $\sigma(r\theta)$, evaluado en $r = a$, es idénticamente cero, por lo tanto:

$$T' = a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \text{sen} \theta [\sigma^{(r\phi)}]_{r=a} d\theta d\phi \hat{e}_\theta .$$

Si el vector unitario \hat{e}_θ lo expresamos en términos de sus componentes cartesianas y lo incluimos en la ecuación de la torca tenemos:

$$T' = a^3 \left[\hat{i} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta \text{sen} \theta \cos \phi [\sigma^{(r\phi)}]_{r=a} d\theta d\phi + \right.$$

$$\left. \hat{j} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta \text{sen} \theta \text{sen} \phi [\sigma^{(r\phi)}]_{r=a} d\theta d\phi - \right.$$

$$\left. \hat{k} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}^2 \theta [\sigma^{(r\phi)}]_{r=a} d\theta d\phi \right] .$$

Sustituyendo en esta ecuación la expresión de $\sigma^{(r\phi)}$ y la definición de la función ϕ , mencionadas en el primer capítulo de esta tesis, y realizando algunas simplificaciones, se obtiene la expresión final de la torca:

$$T = \frac{4\pi}{R} \hat{k} \int_{-1}^1 [3\phi - \phi_r]_{r=1} (1-x^2) dx , \quad (2.3.1)$$

donde:

$$T = \frac{T'}{\frac{1}{2} \rho \omega^2 a^5}$$

Para una expresión en series de potencias en el número de Reynolds para la función ϕ :

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} R + \phi^{(2)} R^2 + \dots ,$$

la ecuación de la torca se modifica:

$$\tau = 4\pi \int_{-1}^1 (1-x^2) \left[[3\phi^{(0)} - \phi_r^{(0)}]_{r=1} + [3\phi^{(1)} - \phi_r^{(1)}]_{r=1} R + \dots \right] dx, \quad (2.3.2)$$

en esta expresión hemos realizado el siguiente cambio:

$$|T| = \tau,$$

donde τ es la magnitud del vector que representa a la torca.

De resultados anteriores tenemos que:

$$\phi^{(0)} = 1,$$

$$\phi^{(1)} = 0,$$

por lo tanto la ecuación de la torca se puede simplificar del siguiente modo:

$$\tau = \frac{16\pi}{R} \left[1 + \frac{R^2}{4} \int_{-1}^1 (1-x^2) [3\phi^{(2)} - \phi_r^{(2)}]_{r=1} dx + \dots \right].$$

En lo referente a segundo orden, de la ecuación (2.2.49), para $r = 1$, se tiene que:

$$\phi^{(2)} = 0$$

y:

$$\phi_r^{(2)} = \frac{1}{8} \left[\frac{x^2}{660} [102 - 440 + 220 + 90] + \frac{4}{21} - \frac{20}{75} + \frac{126}{1188} - \frac{102}{3300} \right].$$

Evaluando la integral del término de segundo orden que aparece en la ecuación de la torca obtenemos:

$$\frac{R^2}{4} \int_{-1}^1 (1-x^2) [\phi_r^{(2)}]_{r=1} dx = -\frac{R^2}{2520}.$$

Considerando todos los resultados obtenidos en esta sección, finalmente

resulta:

$$\tau = \frac{16\pi}{R} \left[1 + \frac{R^2}{2520} + \dots \right]. \quad (2.3.3)$$

Esta expresión nos proporciona una relación directa entre la torca y el número de Reynolds, la cual es válida hasta una aproximación a segundo orden.

Existe reportada otra expresión para la torca, debida a Ovseenko (1963):

$$\tau = \frac{16\pi}{R} \left[1 + \frac{R^2}{1200} + \dots \right]. \quad (2.3.4)$$

Las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4) difieren en las constantes que aparecen en el segundo término del lado derecho. Sin embargo, el álgebra utilizada para el desarrollo de la expresión obtenida en esta tesis fue corroborada en una computadora personal mediante el uso de un programa de matemática simbólica (Derive, versión 2).

En la figura 4 podemos observar una comparación entre los resultados predichos por la ecuación (2.3.3) (línea continua) y los datos experimentales reportados (puntos individuales) en la literatura (Ovseenko.1963). En la gráfica podemos ver que la ecuación predice aceptablemente los datos hasta un número de Reynolds aproximadamente igual a cuarenta. A partir de este valor la expresión (2.3.3) se aleja definitivamente de lo obtenido en el experimento.

El comportamiento descrito anteriormente es lógico considerando la mecánica empleada (teoría de perturbaciones) en la resolución de las ecuaciones de movimiento y de la aproximación hasta tercer orden, pues sabemos que $\phi^{(3)} = 0$, es decir, el próximo término que aparecería en la ecuación (2.3.4) es de cuarto grado.

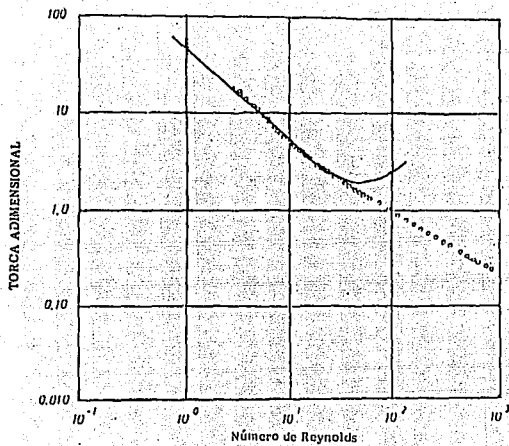


FIGURA 4
 COMPARACION DE RESULTADOS EXPERIMENTALES
 ANTE TEORICOS

2.4 SOLUCION A TERCER ORDEN.

Ahora pasaremos a calcular los siguientes términos de las series que representan la solución al problema. De las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4), para k igual a tres, se obtiene:

$$\left[(1-x^2) \phi^{(3)} \right]_{xx} + r^3 \left[\frac{\phi^{(3)}}{r} \right]_{rr} = 0, \quad (2.6.1)$$

$$\begin{aligned} r^4 G^4 \psi^{(3)} = & \frac{2(1-x^2)}{r} \left[(1-x^2) \phi_x^{(2)} + xr \phi_r^{(2)} - 6x \phi^{(2)} \right] - \frac{6x(1-x^2)}{r} \phi^{(2)} \\ & + \frac{4(1-x^2)}{r} \psi_x^{(1)} \psi_{xx}^{(1)} + (1-x^2) \left[\psi_r^{(1)} \psi_{xxx}^{(1)} - \psi_x^{(1)} \psi_{xxr}^{(1)} \right] + 2r \psi_x^{(1)} \psi_{rr}^{(1)} + \\ & r^2 \psi_r^{(1)} \psi_{rrx}^{(1)} - r^2 \psi_{rrr}^{(1)} \psi_x^{(1)} + \frac{2xr^2}{r^2} \psi_{rr}^{(1)} \psi_r^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

y sustituyendo los valores de $\phi^{(2)}$ y $\psi^{(1)}$ en esta última expresión resulta:

$$\begin{aligned} r^4 G^4 \psi^{(3)} = & - \frac{1}{11550 r^7} \left[I_3(x) [2596r^6 - 11550r^5 + 16806r^4 - \right. \\ & \left. 7425r^3 - 275r^2 - 2013r + 700] + 5 I_5(x) [2970r^6 - 10395r^5 + \right. \\ & \left. 12225r^4 - 4290r^3 - 1320r^2 + 572r - 210] \right], \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

donde $I_3(x)$ e $I_5(x)$ son los polinomios de Gegenbauer de órdenes tres y cinco respectivamente.

De (2.6.1) podemos observar que las funciones $\phi^{(3)}$ y $\phi^{(0)}$ tienen la misma estructura, por lo tanto concluimos que:

$$\psi^{(3)} = \sum_2^{\infty} \frac{A_n r^{-n+2}}{1-x^2} I_n(x) . \quad (2.6.4)$$

La ecuación (2.6.3) se puede expresar del siguiente modo:

$$r^4 G^4 \psi^{(3)} = \sum_{I=1}^{14} f_I(x) g_I(r) .$$

Para obtener su solución general consideraremos que esta se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\psi^{(3)} = \psi_H + \psi_P ,$$

donde ψ_H es la solución general de la ecuación homogénea y el término $\psi_P^{(3)}$ representa una solución particular a la ecuación no homogénea. Debido a que anteriormente ya hemos encontrado a la función ψ_H , nuestro problema se reduce a buscar únicamente alguna solución particular a (2.6.3).

Si proponemos una solución particular de la forma:

$$\psi_P^{(3)} = \sum_{I=1}^{14} \psi_I , \quad (2.6.5)$$

donde:

$$\psi_I = k_I I_n(x) r^{\alpha_I} , \quad (2.6.6)$$

a la cual le aplicamos el operador del lado derecho de la ecuación (2.6.3), podemos ajustar las constantes k_I , n_I y α_I de tal modo que podamos obtener cada uno de los términos que forman la inhomogeneidad, como lo realizado en el primer capítulo para obtener la función $\psi^{(1)}$, es decir:

$$r^4 G^4 \psi_I = f_I(x) g_I(r) ,$$

para I de 1 a 14.

Sin embargo, al utilizar esta mecánica encontramos que no es posible ajustar algunas de las funciones Ψ_1 en la forma (2.6.6) para obtener algunos de los términos del lado izquierdo de (2.6.3).

Si realizamos el procedimiento anteriormente descrito encontramos la siguiente solución particular:

$$\Psi_p^{(3)} = -\frac{1}{11550 r^7} \left[I_3(x) \left[-\frac{649}{6} r^6 + \frac{2801}{24} r^4 - \frac{825}{56} r^3 - \frac{11}{48} r^2 - \frac{671}{800} r + \frac{1}{6} \right] + 5I_5(x) \left[\frac{165}{8} r^6 - \frac{2445}{16} r^4 + \frac{11}{3} r^2 + \frac{r}{2} + \frac{1}{12} \right] \right] + \Psi_2 + \Psi_9 + \Psi_{11} \quad (2.6.7)$$

donde los tres últimos términos del lado izquierdo son las funciones que no pudieron ser ajustadas mediante la forma (2.6.6), y cumplen la siguiente ecuación diferencial:

$$r^4 G^4 [\Psi_2 + \Psi_9 + \Psi_{11}] = -\frac{1}{11550 r^7} \left[-11550 r^5 I_3(x) + 5 \left[-10395 r^5 - 4290 r^3 \right] I_5(x) \right] \quad (2.6.8)$$

Primeramente resolveremos (2.6.8) para Ψ_2 :

$$r^4 G^4 \Psi_2 = \frac{1}{r^2} I_3(x), \quad (2.6.9)$$

para lo cual proponemos una estructura para la función de la siguiente manera:

$$\Psi_2 = I_n(x) R(r),$$

y aplicamos el operador del lado derecho de (2.6.9):

$$r^4 G^4 [I_n(x) R(r)] = I_n(x) \left[r^4 R'''' + n(n-1) [-2r^2 R'' + 4rR' + R((n+1)(n-2) - 4)] \right], \quad (2.6.10)$$

y comparando con (2.6.9) tenemos:

$$I_n(x) \left[r^4 R'''' + n(n-1) [-2r^2 R'' + 4rR' + R((n-1)(n-2) - 4)] \right] = \frac{1}{r^2} I_3(x),$$

con lo cual tenemos una ecuación diferencial para $R(r)$:

$$r^2 \left[r^4 R'''' + 6 [-2r^2 R'' + 4rR'] \right] = 1, \quad (2.6.11)$$

cuando n es igual a tres.

Ahora nuestro problema se reduce a encontrar alguna solución particular a (2.6.11) y así poder encontrar la función Ψ_2 . Para resolver (2.6.11) primero encontramos la solución general a la ecuación homogénea:

$$R_h = k_1 r^5 + k_2 + k_3 r^3 + k_4 r^{-2} \quad (2.6.12)$$

donde las k_i (1,2,3,4) son constantes indeterminadas.

La solución particular se puede obtener a partir de (2.6.12) utilizando el método de variación de parámetros (Hildebrand, 1976).

El método de variación de parámetros supone una solución particular con estructura similar a la de la solución homogénea, es decir:

$$R_p = k_1(r) r^5 + k_2(r) + k_3(r) r^3 + k_4(r) r^{-2}, \quad (2.6.13)$$

donde k_i (1,2,3,4) son funciones de r , a determinar. Sustituyendo esta última

expresión en (2.6.11) obtenemos las ecuaciones algebraicas que deben cumplir las k_i para que R_p pueda satisfacer la ecuación diferencial. Estas expresiones son las siguientes:

$$r^5 k_1'(r) + k_2'(r) + r^3 k_3'(r) + r^{-2} k_4'(r) = 0 ,$$

$$5r^4 k_1'(r) + 3r^2 k_3'(r) - 2r^{-3} k_4'(r) = 0 .$$

$$20r^3 k_1'(r) + 6r k_3'(r) + 6r^{-4} k_4'(r) = 0 ,$$

$$60r^6 k_1'(r) + 6r^6 k_3'(r) - 24r k_4'(r) = 0 .$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores e integrando se obtienen los valores de las funciones k_i :

$$k_1(r) = - \frac{1}{490r^3} ,$$

$$k_2(r) = - \frac{1}{60r^2} ,$$

$$k_3(r) = \frac{1}{150r^6} ,$$

$$k_4(r) = - \frac{\ln(r)}{70} ,$$

donde $\ln(r)$ es el logaritmo natural de r . Sustituyendo los valores de las k_i en (2.6.13) obtenemos la solución particular requerida:

$$R_p = - \frac{1}{r^2} \left[\frac{59}{4900} + \frac{\ln(r)}{70} \right] \quad (2.6.14)$$

Con esta solución particular se puede obtener una expresión para la función ψ_2 :

$$\psi_2 = - \frac{I_3(x)}{r^2} \left[\frac{59}{4900} + \frac{\text{Ln}(r)}{70} \right] . \quad (2.6.15)$$

Realizando un procedimiento similar podemos encontrar los términos restantes para completar la solución particular a (2.6.3):

$$\psi_9 = - \frac{5 I_5(x)}{11550 r^2} \left[\frac{1705}{84} - \frac{165}{2} \text{Ln}(r) \right] . \quad (2.6.16)$$

$$\psi_{11} = - \frac{5 I_5(x)}{11550 r^4} \left[\frac{298155}{19602} + \frac{165}{3} \text{Ln}(r) \right] . \quad (2.6.17)$$

con lo cual ya podemos expresar la solución a orden tres:

$$\begin{aligned} \psi^{(3)} = & - \frac{1}{11550 r^7} \left[I_3(x) \left[- \frac{649}{6} r^6 - 11550 r^5 \left[\frac{59}{49000} + \frac{\text{Ln}(r)}{70} \right] + \right. \right. \\ & \left. \frac{2801}{24} r^4 - \frac{825}{56} r^3 - \frac{11}{48} r^2 - \frac{671}{800} r + \frac{1}{6} \right] + 5 I_5(x) \left[\frac{165}{8} r^6 + \right. \\ & \left. r^5 \left[\frac{1705}{84} + \frac{165}{2} \text{Ln}(r) \right] - \frac{2445}{16} r^4 + r^3 \left[\frac{9035}{594} + \frac{65}{3} \text{Ln}(r) \right] + \right. \\ & \left. \frac{11}{3} r^2 + \frac{r}{2} + \frac{1}{12} \right] \left. \right] + c_1 - c_2 x + 2c_3 r^2 (1-x^2) + \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \left[b_n r^{-n+1} + d_n r^{-n+3} \right] I_n(x) . \quad (2.6.18) \end{aligned}$$

en esta última expresión hemos incluido la solución a (2.6.3) en su forma homogénea.

Ahora debemos ajustar condiciones a la frontera en la superficie de la esfera ($r = 1$) y así poder evaluar las constantes indeterminadas en la ecuación (2.6.3). En esta región se debe cumplir lo siguiente:

$$\left| \begin{array}{l} \psi_r^{(3)} = 0, \\ r=1 \end{array} \right. \quad (2.6.19)$$

$$\left| \begin{array}{l} \psi_x^{(3)} = 0. \\ r=1 \end{array} \right. \quad (2.6.20)$$

Con objeto de simplificar la notación cambiaremos la notación de la ecuación (2.6.18):

$$\psi^{(3)} = P(r) I_3(x) + Q(r) I_5(x) + c_1 - c_2 x + 2c_3 r^2 (1-x^2) + \sum_{n=2}^{\infty} [b_n r^{-n+1} + d_n r^{-n+3}] I_n(x),$$

donde $P(r)$ y $Q(r)$ son polinomios de r :

$$P(r) = -\frac{1}{11550 r^7} \left[-\frac{649}{6} r^6 - r^5 \left[\frac{1947}{140} + 165 \ln(r) \right] + \frac{2801}{24} r^4 - \frac{825}{56} r^3 - \frac{11}{48} r^2 - \frac{671}{800} r + \frac{1}{16} \right],$$

$$Q(r) = -\frac{5}{11550 r^7} \left[\frac{165}{8} r^6 + r^5 \left[\frac{1705}{84} - \frac{165}{2} \ln(r) \right] - \frac{2445}{16} r^4 + r^3 \left[\frac{9035}{594} + \frac{65}{3} \ln(r) \right] + \frac{11}{3} r^2 + \frac{r}{2} + \frac{1}{12} \right].$$

Aplicando (2.6.19) y (2.6.20) tenemos las siguientes ecuaciones:

$$P(1)I_3(x) + Q(1)I_5(x) + 4c_3(1-x^2) + \sum_{n=2}^{\infty} [(-n+1)b_n + (-n+3)d_n] I_n(x) = 0,$$

$$P(1)I_3'(x) + Q(1)I_5'(x) - c_2 - 4c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} [b_n + d_n] I_n'(x) = 0,$$

con lo cual se obtienen los siguientes valores de las constantes:

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0,$$

$$b_n = 0 \text{ (para } n \neq 3),$$

$$d_n = 0 \text{ (para } n \neq 3),$$

$$b_3 = \frac{P'(1)}{2},$$

$$d_3 = -P(1) - \frac{P'(1)}{2},$$

$$b_5 + d_5 = Q(1),$$

$$2d_5 + 4b_5 = Q'(1),$$

donde $P(1)$ y $Q(1)$ son polinomios de r , evaluados, en uno y $P'(1)$ y $Q'(1)$ son las derivadas de esos polinomios también evaluadas en la unidad:

$$P(1) = -\frac{1}{11550} \left[-\frac{352781}{16800} \right],$$

$$Q(1) = -\frac{5}{11550} \left[-\frac{3074573}{33264} \right],$$

$$P'(1) = -\frac{1}{11550} \left[-\frac{125791}{400} \right],$$

$$Q'(1) = -\frac{5}{11550} \left[-\frac{8436599}{33264} \right].$$

Calculando las constantes tenemos:

$$b_3 = -\frac{1}{11550} \left[-\frac{125791}{800} \right],$$

$$d_3 = -\frac{1}{11550} \left[\frac{142590}{800} \right],$$

$$b_s = -\frac{5}{11550} \left[\frac{2297453}{66528} \right],$$

$$d_s = -\frac{5}{11550} \left[\frac{3861693}{66528} \right],$$

sustituyendo el valor de las constantes en (2.6.18) se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \psi^{(3)} = & -\frac{1}{11550 r^7} \left[I_3(x) \left[+ \frac{14259}{80} r^7 - \frac{649}{6} r^6 - r^5 \left[\frac{958417}{5600} + 165 \ln(r) \right] + \right. \right. \\ & \left. \frac{2801}{24} r^4 - \frac{825}{56} r^3 - \frac{11}{48} r^2 - \frac{671}{800} r + \frac{1}{6} \right] + 5I_5(x) \left[\frac{165}{8} r^6 + \right. \\ & \left. r^5 \left[\frac{27577}{352} - \frac{165}{2} \ln(r) \right] - \frac{2445}{16} r^4 + r^3 \left[\frac{17457}{352} + \frac{65}{3} \ln(r) \right] + \right. \\ & \left. \left. \frac{11}{3} r^2 + \frac{r}{2} + \frac{1}{12} \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

Ahora ajustaremos condiciones a la frontera para la función $\phi^{(3)}$, en r igual a uno:

$$\left. \phi^{(3)} \right|_{r=1} = 0, \quad (2.6.22)$$

con lo cual se concluye inmediatamente que:

$$\phi^{(3)} = 0. \quad (2.6.23)$$

Mediante las expresiones (2.6.21) y (2.6.22) tenemos completamente determinado el campo de velocidades a tercer orden.

La condición :

$$\psi^{(3)} = \text{constante},$$

determina la forma de las líneas de corriente, y por lo tanto nos indica la trayectoria que sigue una partícula de fluido, que se mueve mediante el campo de velocidades a orden tres. Esto se realizó anteriormente para el caso de la solución a primer orden.

Las líneas de corriente, a tercer orden se pueden visualizar gráficamente en la figura 5. Se puede observar que el movimiento del fluido es exactamente igual a lo encontrado para primer orden y es justamente lo que se esperaba obtener.

Con esto se completa el estudio del movimiento del fluido a tercer orden.

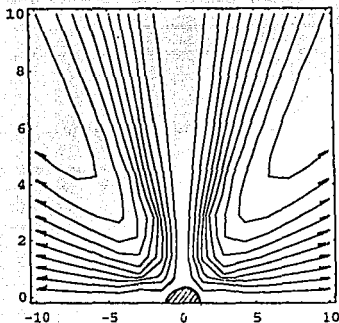


FIGURA 5
SOLUCION A TERCER ORDEN

2.5 CONCLUSIONES.

En este momento podemos decir que el problema de resolver las ecuaciones de movimiento para el caso de una esfera en rotación, dentro de un fluido viscoso infinito está resuelto hasta términos de cuarto orden.

Si quisieramos tener una solución mas exacta a la obtenida, se requeriría calcular las soluciones a ordenes cuatro, cinco, etc. Nosotros creemos que no se presentarán problemas de divergencia y que los próximos términos serán pequeñas correcciones a las soluciones encontradas en la presente tesis. Sin embargo, la manipulación algebraica se tornará mas compleja.

Pensamos que las soluciones encontradas hasta tercer orden son una buena aproximación al problema. Además los resultados obtenidos son congruentes con la fisica involucrada.

Es conveniente mencionar que la mayor parte los resultados obtenidos en la presente sección de esta tesis, no fueron encontrados en la revisión bibliográfica realizada, es decir, las soluciones a ordenes uno, dos y tres son originales del trabajo efectuado. El único parámetro de comparación encontrado en la literatura es el cálculo de la torca a orden dos, sin embargo, el autor del artículo no presenta una solución explicita a ese orden.

Con esta experiencia, pasamos ahora a discutir la solución del problema de rotación en una intercara.

CAPITULO 3

ROTACION EN UNA INTERCARA

3.1 INTRODUCCION.

Como habiamos mencionado en la introducción de esta tesis el problema que estamos interesados en solucionar, es el de encontrar el flujo que forma una esfera rotando en una intercara fluido-fluido, ya que este caso tiene importancia significativa en algunos fenómenos físicos que son de particular interés.

En este capítulo intentaremos resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para este sistema, tal como fue planteado anteriormente en la primera parte de esa tesis. Ahora contamos con los resultados obtenidos para el problema de rotación en un solo fluido, que como ya se había comentado, tiene gran relación con el caso en que está presente la intercara. Inicialmente intentaremos ajustar la solución general a orden cero obtenida en el capítulo anterior a las condiciones a la frontera en la intercara entre los fluidos. Con esto esperamos obtener la ecuación de la superficie que forma la intercara, a ese orden. Si se obtienen resultados congruentes con lo observado en el laboratorio, podemos proceder a efectuar una mecánica similar con los términos a órdenes uno, dos, etc. Mediante el procedimiento descrito suponemos que es posible obtener la forma de la intercara a cada orden y por consiguiente resolver el problema.

3.2 SOLUCION A ORDEN CERO.

Si consideramos el campo de velocidades a orden cero:

$$v_1^{(0)} = \frac{\text{sen}\theta}{r^2},$$

o en términos de la función ϕ :

$$\phi_1^{(0)} = 1,$$

donde el subíndice i indica el fluido (1 arriba y 2 abajo de la intercara), y sustituimos la primera expresión en las condiciones a la frontera en la intercara (ecuaciones (1.6.13) a (1.6.16) y (1.6.17) a (1.6.19)) se obtienen los siguientes resultados:

1) Todas las expresiones se cumplen trivialmente excepto (1.6.17), (1.6.18) y (1.6.19).

2) Para que se cumplan (1.6.17) es necesario pedir que la diferencia de presiones de los fluidos de cada lado de la intercara sean iguales.

3) Si el término $\sin\theta$ es idénticamente cero la ecuación (1.6.18) se cumple.

4) Si el inciso 2 es cierto la ecuación (1.6.19) se cumple trivialmente.

Podemos concluir que la intercara que satisfase las condiciones a la frontera, debe cumplir lo siguiente:

1) La forma de la superficie debe ser un plano.

2) El plano debe bisectar simétricamente a la esfera.

Como puede observarse las restricciones que deben imponerse sobre la superficie de la esfera, son demasiado rígidas y limitadas a un caso muy particular.

Se puede pensar a priori, que en una situación real, usualmente no se presenta este tipo de intercara. Para demostrar esta situación estudiaremos el caso en el cual el campo de velocidades es idénticamente cero, que se conoce como estado de equilibrio del sistema.

Si en la condición de equilibrio no se obtiene una intercara plana, se puede esperar que ninguna perturbación, por pequeña que sea, dará lugar a una intercara con esta característica.

3.3 EL ESTADO DE EQUILIBRIO.

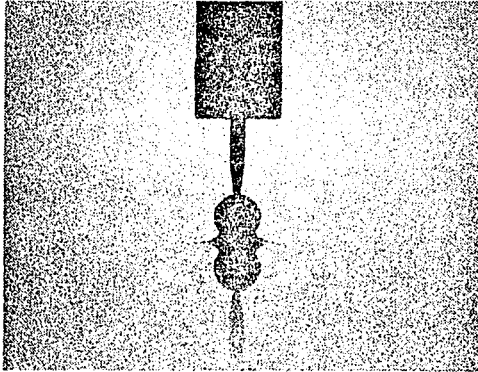
El estado de equilibrio es aquel en donde:

$$v_1 = v_2 = 0 .$$

y:

$$P_1 = P_2 = P_0 ,$$

donde p_0 es constante. Este estado del sistema lo podemos visualizar graficamente en la fotografia 1 (cortesía de Peralta-Fabi y Sanchez-Jacome).



FOTOGRAFIA 1
EL ESTADO DE EQUILIBRIO

Este estado lo caracterizamos al especificar la ecuación que tiene la superficie que forma la intercara, la cual es generalmente función de las

tensiones superficiales fluido-fluido (α_{12}) y sólido-fluido (α_{1s}, α_{2s}).

Para obtener las ecuaciones que describen el estado de equilibrio, sustituimos la condición de velocidad cero en las ecuaciones de movimiento y condiciones a la frontera asociadas.

Se puede observar que todas las ecuaciones se cumplen trivialmente, excepto (1.6.38), la cual representa el balance de fuerzas en dirección normal a la intercara. Esta expresión se reduce, en condiciones de equilibrio, a lo siguiente:

$$\alpha \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] = p_1 - p_2 \quad (3.3.1)$$

Por cuestión de sencillez supondremos que el fluido 2 es la atmósfera (presión constante) y que el medio 1 es un fluido incompresible. Bajo estas circunstancias tenemos que la diferencia de presiones está dada por:

$$p_2 - p_1 = \rho g z - \text{constante},$$

donde g es la aceleración que produce el campo terrestre, ρ es la densidad del líquido y z es la coordenada vertical. Entonces la ecuación (3.3.1) se expresa del siguiente modo:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{\rho g z}{\alpha} = \text{constante} \quad (3.3.2)$$

Ahora intentaremos resolver esta ecuación diferencial imponiendo condiciones a la frontera obtenidas de parámetros experimentales, y así poder obtener una expresión que nos represente al estado de equilibrio del sistema.

Primeramente aclararemos que en la resolución de (3.3.2) emplearemos coordenadas cilíndricas, ya que la ecuación que relaciona R_1 y R_2 con la

intercara es menos compleja en este sistema.

Utilizando (1.6.21) para sustituirla en (3.3.1) y reorganizando se tiene :

$$\frac{z'}{(1+z'^2)^{3/2}} + \frac{z'}{r(1+z'^2)^{1/2}} - \frac{2z}{a^2} = 0, \quad (3.3.3)$$

en la cual:

$$a^2 = \frac{2\alpha_{12}}{\rho E}$$

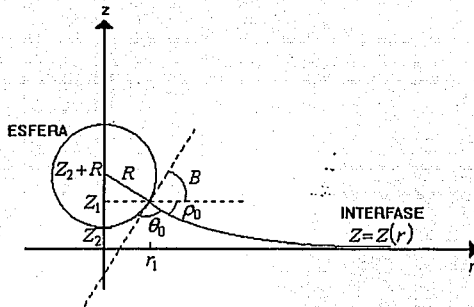


Figura 6. Estado de equilibrio.

En la figura 6 podemos observar los parámetros geométricos asociados con la resolución de (3.3.2).

Al establecer las condiciones a la frontera se obtiene:

- 1) Cuando $r \rightarrow \infty$ tenemos que $z = z' = z'' = 0$.
- 2) Para $r_1 = (R^2 - z_1^2)^{1/2}$ tenemos que $z(r_1) = z_1$.

3) También se tiene que $z(\infty) = 0$ y $z'(r_1) = -\tan \beta$.

Los valores experimentales utilizados serán los siguientes:

$$\alpha_{12} = 72.5 \text{ erg/cm},$$

$$g = 980 \text{ cm/seg},$$

$$\rho = 1 \text{ gr/cm}^3,$$

$$R = 1.25 \text{ cm},$$

$$z_1 = 0.25 \text{ cm},$$

$$\theta_0 = 20.4^\circ,$$

como ya se mencionó en el Capítulo 1, θ_0 es el ángulo de contacto.

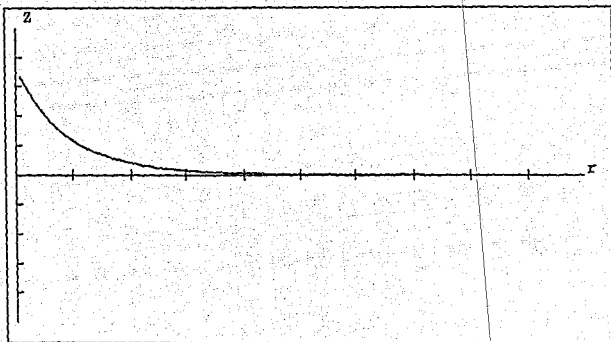


FIGURA 7

FORMA DE LA INTERCARA EN EQUILIBRIO

El ángulo de contacto se obtuvo por medición directa en un acercamiento fotográfico del dispositivo experimental, en el laboratorio (cortesía de Sanchez y Peralta-Fabi). Posteriormente se depuró el valor obtenido mediante el método del disparo, al resolver la ecuación (3.3.2).

Mediante la relación geométrica:

$$\tan \beta = \tan \left[\pi - \theta_0 - \arctan \frac{(R^2 - z_1^2)}{z_2 + R - z_1} \right],$$

es posible obtener el ángulo β (ver figura 5) a partir de los parámetros experimentales conocidos. Para este caso en particular $\beta = 30.4^\circ$.

Con esta información se procedió a resolver (3.3.2) mediante el método de Runge-Kutta de segundo orden, con lo que se obtuvo la forma de la intercara, la cual puede visualizarse en la figura 7. Se puede observar que la intercara encontrada es justamente lo que se esperaba obtenerse al reproducir el estado de equilibrio experimentalmente.

Como era de suponerse este resultado se contrapone a lo que obtuvimos en la sección anterior, en lo referente a la forma de la intercara. Debido a esto se puede concluir que la mecánica de resolución empleada para el caso de rotación en un solo fluido no funciona cuando se encuentra presente una intercara líquida.

3.4 OBSERVACIONES EXPERIMENTALES.

En este momento resulta conveniente citar los resultados experimentales obtenidos en el laboratorio de fluidos de la Facultad de Ciencias (Sanchez, Peralta-Fabi, 1990). Esto es con el objeto de corroborar la forma de la intercara obtenida en la sección anterior, y además determinar los perfiles de flujo con diferentes números de Reynolds. Las fotografías utilizadas en esta sección son cortesía de los autores citados.

EL dispositivo experimental utilizado en este trabajo, consiste en una intercara aire-agua en donde una esfera metálica rota uniformemente. El eje de rotación es normal a la intercara y el centro de masa de la esfera está fijo en el espacio. La velocidad de rotación de la esfera se incrementa y se observan los patrones de flujo en la superficie del agua. Cabe aclarar que las dimensiones de la esfera son despreciables en comparación al recipiente en donde se encuentra contenida el agua, por lo cual es posible considerar al líquido como un medio infinito.

Como puede observarse el experimento descrito es precisamente el problema planteado en esta tesis.

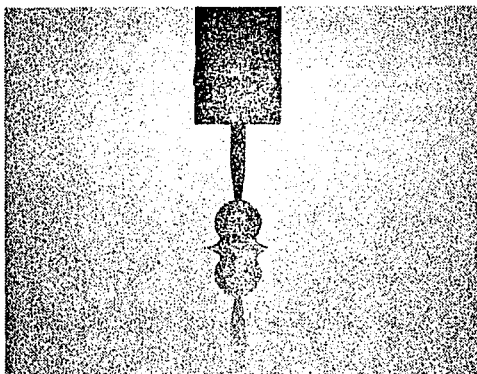
Se obtuvieron cuatro diferentes patrones de flujo caracterizados por una velocidad angular específica ($\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ y Ω_4).

Cuando se incrementa la velocidad angular de cero a Ω_1 , la forma de la superficie no se modifica. Esto significa que una pequeña perturbación no cambia la intercara que se presenta en el estado de equilibrio. El movimiento de la superficie del agua es en planos horizontales, es decir, las líneas de corriente son círculos concéntricos. Esto coincide plenamente con los resultados obtenidos a orden cero en el capítulo anterior.

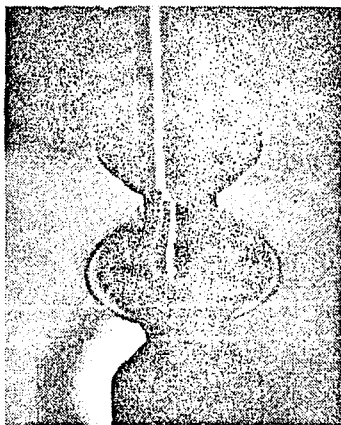
Este caso se observa graficamente en la fotografía 1.

Al valor específico de Ω_1 un anillo de agua se forma alrededor de la esfera (fotografía 2). Cuando se incrementa la velocidad angular se obtiene un crecimiento proporcional del tamaño del anillo. La altura de la capa de agua que forma el anillo es del orden de fracciones de un milímetro.

Cuando se alcanza un valor de velocidad angular Ω_2 el flujo se tornará inestable, se presentarán ondas espirales en la línea de contacto de las tres fases y se observa oleaje en el ecuador de la esfera. El flujo resultante tiene una estructura turbulenta como se muestra en la



FOTOGRAFIA 2
FLUJO DE STOKES



FOTOGRAFIA 3
FLUJO TIPO ANILLO

fotografía 3.

A velocidad angular mas alta (Ω_3) el flujo será nuevamente estable. En el intervalo de valores entre Ω_2 y Ω_3 aparecerá una "dona" turbulenta envolviendo la parte inferior de la esfera y se forma una película de agua en el ecuador. Esta capa aumenta de tamaño hasta que comienza a desprender gotas que son expedidas tangencial y horizontalmente, simulando una fuente.

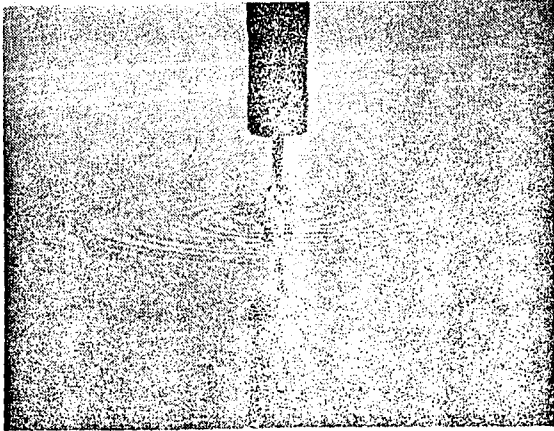
En este momento el anillo ya no puede ser observado claramente. Este patrón de flujo puede ser observado en la fotografía 4

A continuación presentamos una tabla resumida (cortesía de los mismos autores), que muestra las velocidades angulares en las cuales se presentan las transiciones para diferentes diámetros de esfera:

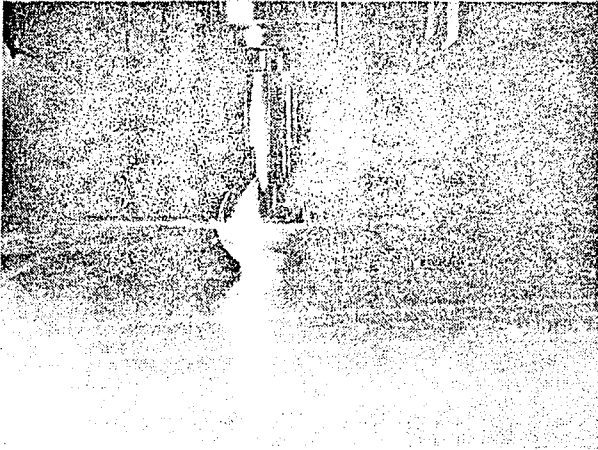
DIAMETRO (mm)	ANILLO Hz	VORTICE Hz	FUENTE Hz
9.55	40.6 +/- 5.6	129.9 +/- 2.3	170.3 +/- 2.3
10.00	57.4 +/- 1.3	90.7 +/- 1.5	132.9 +/- 2.0
12.35	30.1 +/- 1.3	84.0 +/- 2.5	106.7 +/- 2.1
14.2	24.8 +/- 1.7	71.2 +/- 1.2	79.1 +/- 8.4
15.00	23.6 +/- 4.4	64.4 +/- 7.9	66.9 +/- 6.9

Esta explicación es un breve resumen del trabajo experimental que nos confirma que no es posible obtener en este caso una intercara plana simétricamente colocada. Además ratifica la forma de la intercara obtenida de resolver las ecuaciones para el caso de equilibrio.

Todos los patrones de flujo y transiciones observadas en el laboratorio deben ser predecibles por la resolución de las ecuaciones de movimiento, inclusive en el caso no estacionario. Sin embargo, en este trabajo, hasta el momento no hemos podido obtener una solución satisfactoria, ni para el caso



FOTOGRAFIA 4
VORTICE DE TAYLOR



FOTOGRAFIA 5
FLUJO TIPO FUENTE

mas sencillo. Esto nos indica, que todavía tenemos mucho que trabajar, ya que la resolución teórica del problema tiene un gran camino por delante.

3.5 PERSPECTIVAS.

Con los resultados obtenidos hasta el momento, en este capítulo, resulta inmediato concluir que la mecánica de resolución empleada en el caso de rotación en un fluido, no resulta adecuada cuando se encuentra presente la intercara.

Lo primero que se nos ocurre pensar en que la solución del problema no puede expresarse en términos de variables separables, en coordenadas esféricas.

Resulta más sencillo buscar una solución en variables separables en otro sistema coordenado (cilíndrico, toroidal, etc.), que tratar de encontrar una solución no separable en coordenadas esféricas. Sin embargo, debido a que el problema tiene simetría esférica, las expresiones que representen las condiciones a la frontera, serán más complicadas empleando algún otro sistema coordenado.

También es recomendable realizar perturbaciones alrededor del estado de equilibrio del sistema, en lugar de utilizar como parámetros perturbativos los números de Reynolds. Esto nos evitará la dificultad que se tiene al emplear dos R (uno para cada fluido) en el mismo problema.

Debido a la manera en que obtuvimos la solución del estado de equilibrio y a facilidad de manipulación, lo primero que deberíamos intentar es replantear el problema en coordenadas cilíndricas.

3.6 REPLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Podemos considerar que al efectuarse una pequeña perturbación al estado de equilibrio del sistema se presenta lo siguiente:

a) Aparece un campo de velocidades v que podemos considerar de magnitud pequeña. Debido a esto es posible despreñar los términos no lineales en las ecuaciones de movimiento.

b) La presión estará dada por:

$$p = p_0 + p' ,$$

donde p_0 y p' son las presiones de equilibrio y dinámica del sistema respectivamente.

c) La ecuación de la superficie no se ve modificada con relación a la que se presenta en equilibrio ($z = f(r)$).

La mecánica que emplearemos consiste en reescribir las ecuaciones de movimiento y las condiciones a la frontera, mencionadas en la sección 1.5.4, en términos de coordenadas cilíndricas. Además utilizaremos las consideraciones mencionadas en los incisos a,b,c de esta sección.

Para cada fluido tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \cdot v_i = 0 ,$$

$$R_i (v_i \cdot \nabla) v_i = - \nabla p_i' + \nabla^2 v_i ,$$

donde el subíndice i (número 1 ó 2) indica el fluido de que se trata (inferior ó superior).

Sin embargo, si despreñamos los términos no lineales y eliminamos la presión se tiene el siguiente conjunto:

$$\nabla \cdot v_i = 0 ,$$

$$\nabla^2 v_i = \nabla p_i,$$

utilizando coordenadas cilíndricas podemos definir la función de corriente de la siguiente manera (considerando la coordenada azimutal ignorable):

$$v_r = \frac{\psi_z}{r}, \quad (3.5.1)$$

$$v_z = -\frac{\psi_r}{r}, \quad (3.5.2)$$

y sustituyendo en las ecuaciones de movimiento tenemos:

$$R_1 \left[-r\psi_{iz} \psi_{irr} + \psi_{iz} \psi_{ir} + \psi_{ir} \psi_{irz} \right] = -r^3 p_{iz} - r^2 \psi_{irrr} + r^2 \psi_{irr} + r\psi_{ir} - \psi_{irzz}, \quad (3.5.3,4)$$

$$r^4 R_1 \left[r\phi_{ir} \psi_{iz} + \phi_{iz} \psi_{ir} - r\psi_{ir} \phi_{iz} \right] = r^2 \phi_{irr} + r\phi_{ir} + r^2 \phi_{izz} + \phi_{iz}, \quad (3.5.5,6)$$

$$R_1 \left[r\psi_{iz} \psi_{izr} - \psi_{iz}^2 - r^4 \phi_{iz}^2 - r\psi_{ir} \psi_{izz} \right] = -r^3 p_{ir} + r^2 \psi_{izr} - r\psi_{izr} + r^2 \psi_{izz}, \quad (3.5.7,8)$$

donde la función ϕ representa: $v_\phi = \phi$.

Las condiciones a la frontera en la superficie de la esfera son las siguientes:

$$\text{En } r = (1 - z^2)^{1/2}:$$

$$\psi_1, \phi_1 = \begin{cases} 0, 1 & \text{para: } z_0 \leq z; \\ 0, 0 & \text{para: } z < z_0; \end{cases}$$

$$\psi_2, \phi_2 = \begin{cases} 0, 0 & \text{para: } z_0 \leq z; \\ 0, 1 & \text{para: } z < z_0; \end{cases}$$

en estas expresiones se debe considerar que $|z| \leq 1$.

En lo referente a las condiciones a la frontera en la intercara fluida ($z = f(r)$) tenemos lo siguiente:

Condiciones sobre velocidades:

$$\psi_{1r} = \psi_{2r}, \quad (3.5.9)$$

$$\psi_{1z} = \psi_{2z}, \quad (3.5.10)$$

$$\phi_1 = \phi_2, \quad (3.5.11)$$

$$\psi_{1z} n_r - \psi_{2r} n_z = 0, \quad (3.5.12)$$

donde:

$$s = s(r, z),$$

es la ecuación de la superficie y:

$$n_r = \frac{\frac{\partial s}{\partial r}}{|\nabla s|},$$

$$n_z = \frac{\frac{\partial s}{\partial z}}{|\nabla s|},$$

son los componentes del vector unitario normal a la intercara.

Con respecto a los esfuerzos se tiene:

$$\eta_2 p_2 - \eta_1 p_1 - \frac{2(\eta_1 - \eta_2)}{r^2} \left[[r\psi_{zr} - \psi_z] n_r^2 + [-r\psi_{rr} + \psi_r + r\psi_{zz}] n_r n_z + [-r\psi_{rz}] n_z^2 \right] = \frac{\alpha(\nabla s)^2}{\Omega} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right], \quad (3.5.13)$$

$$\left[\eta_2 p_2 - \eta_1 p_1 \right] n_r n_z - \frac{(\eta_1 - \eta_2)}{r^2} \left[[2\psi_{rz} + r\psi_r] n_r n_z + [-r\psi_{rr} + r\psi_{zz} + \psi_r] [n_z^2 - n_r^2] \right] = 0, \quad (3.5.14)$$

$$(\phi_r - \phi) n_r + r\phi_z n_z = 0. \quad (3.5.15)$$

Este problema fue resuelto por Schneider, O'Neill y Brenner (1973) con las siguientes simplificaciones:

- 1) El campo de velocidades es puramente azimutal.
- 2) La presión de cada fluido es constante, por lo tanto, el gradiente de la presión es cero.
- 3) Considera a priori que la intercara es plana. Con estas hipótesis las ecuaciones que se requieren resolver son:

$$\xi_1(\gamma, \phi, z) = \text{sen}\phi [v_1(\gamma, z)],$$

donde:

$$\nabla^2 \xi_1 = 0.$$

y γ , ϕ y z son las coordenadas cilíndricas. Nuevamente el subíndice i indica el fluido de que se trata.

Antes de proceder a resolver las ecuaciones, se replantean en términos

de coordenadas ortogonales curvilineas (q_1, q_2) en un plano meridiano $\phi =$ constante (intercara plana):

$$\xi_1(q_1, q_2, \phi) = \text{sen} \phi [v_1(q_1, q_2)],$$

y:

$$\nabla^2 \xi_1 = 0.$$

Este sistema coordenado se conoce como toroidal y tiene las siguientes ecuaciones de transformación:

$$z = \frac{c \text{ sen } q_1}{\cosh q_2 - \cos q_1},$$

$$y = \frac{c \text{ senh } q_2}{\cosh q_2 - \cos q_1}.$$

Utilizando la solución de Robin (1959), de la ecuación de Laplace en coordenadas toroidales, en variables separables, se obtiene una expresión general para la velocidad:

$$v_1(q_1, q_2) = [\cosh q_2 - \cos q_1]^{1/2} \int_0^m \left[A_1(s) \cosh sq_1 + B_1(s) \text{ senh } sq_1 \right] K_n^1(\cosh q_2) ds,$$

donde:

$$K_n^1(\cosh q_2) = P_{-1}^1 \left(\frac{\cosh q_2}{2} + 1 \right),$$

con P_n^m una función asociada de Legendre de orden n y rango m .

Las funciones $A_1(s)$ y $B_1(s)$ se determinan a partir del ajuste de condiciones a la frontera.

La expresión de velocidad encontrada por los autores es válida para una

intercara colocada en cualquier plano meridiano ($\phi = \text{constante}$).

Como puede observarse, esta mecánica de resolución del problema ya ha sido estudiada previamente, y si no resuelve el problema en su forma general. Esto significa que aunque todavía existe la limitante de que la solución encontrada solo es válida para una intercara plana, ahora ya no se presenta la restricción de que se encuentre simétricamente colocada.

Sin embargo, nos encontramos aún en un caso particular, que en general no se presenta en el laboratorio. Esto indica claramente que el problema no ha sido resuelto satisfactoriamente y queda mucho camino por recorrer, para lograr predecir lo que ocurre experimentalmente.

CAPITULO 4

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

4.1 CONCLUSIONES

A lo largo del trabajo desarrollado en esta tesis hemos podido mostrar lo siguiente:

1) Para el caso del problema de rotación de una esfera en un fluido, se planteó la mecánica de resolución completamente y se obtuvo una solución hasta tercer orden.

Las soluciones encontradas a ordenes uno dos y tres son desarrolladas mediante el presente trabajo, es decir, no fueron encontradas en la revisión bibliográfica efectuada.

Como ya lo mencionamos anteriormente, nosotros pensamos que el problema está prácticamente resuelto y solo restaría, si así se requiere, obtener una solución mas exacta calculando los términos de ordenes superiores. El esquema planteado permite evaluar la solución a cualquier orden a partir de los términos anteriores.

La física involucrada en el problema está descrita totalmente considerando el caso estacionario.

La forma obtenida de la trayectoria que siguen las partículas de fluido, coincide con las observaciones realizadas y con la física del problema. El cálculo realizado de la torca, a segundo orden, concuerda con los datos experimentales, hasta un cierto número de Reynolds. Para obtener una mejor estimación de la torca se requeriría encontrar el término de cuarto orden, sin embargo, el álgebra involucrada es compleja y se escapa de finalidad del presente trabajo.

En resumen, creemos que la parte de esta tesis dedicada a este problema fue adecuada y se lograron obtener los resultados esperados de una manera clara y concluyente.

2) En lo referente al caso de rotación de una esfera en una intercara tenemos lo siguiente:

a) El esquema planteado en el caso de un fluido no puede ser aplicado directamente para resolver este problema. Esto se debe a que la solución encontrada restringe el problema a un caso particular, en donde la esfera debe encontrarse simétricamente colocada en una intercara plana.

b) Se caracterizó numéricamente el estado de equilibrio del sistema, encontrándose que en general la forma de la intercara no satisface las características mencionadas en el inciso anterior. Además se citan observaciones experimentales que afirman esto y muestran la complejidad del problema.

c) Con base en lo anterior se concluye que la solución del problema no puede expresarse en variables separables, en coordenadas esféricas.

Se sugiere encontrar una solución en variables separables en coordenadas cilíndricas, reescribiendo las ecuaciones de movimiento y las condiciones a la frontera en este sistema. Encontramos en la literatura un análisis del problema en los términos planteados, empleando algunas aproximaciones adicionales (O'Neill, 1973). En este trabajo se obtiene una solución limitada al caso particular de una intercara sujeta a la condición $\phi = \text{constante}$. Sin embargo, esto no representa un adelanto sustancial a la resolución problema. A pesar de que en este trabajo de tesis no se pudo obtener una solución adecuada, si se registró un avance importante en la búsqueda de la forma precisa de resolver las ecuaciones de movimiento.

La forma inicial de atacar el problema, utilizando los resultados obtenidos en el capítulo 2, empleando coordenadas esféricas, es la más conveniente considerando la simetría del problema y el avance alcanzado en el caso de rotación en un fluido. Al presentarse la falla de esta técnica se

trata de atacar al problema replanteándolo con base en el estado de equilibrio caracterizado en coordenadas cilíndricas. Esta mecánica también resulta conveniente si se consideran pequeñas perturbaciones al sistema inicialmente en reposo.

Esto significa que las técnicas de solución empleadas en este trabajo fueron a *priori* factibles y adecuadas, tomando como base la física del problema.

En este momento, se tiene una buena experiencia acumulada, teórica y experimental, de este fenómeno físico. Esto permitirá buscar nuevas rutas que conduzcan a encontrar un modelo, que resulte adecuado, para explicar algunas de las observaciones realizadas en el laboratorio.

4.2 PERSPECTIVAS.

Buscar alguna otra técnica de solución del problema no entra dentro de los alcances de la presente tesis, sin embargo, queremos esbozar brevemente la manera en que se podría intentar resolver el problema de rotación en una intercara.

Considerando que el trabajo de Schneider (1973) expuesto brevemente en la sección 3.5 de esta tesis, nos conduce a resultados importantes, podríamos tomar su idea de la mecánica de solución del problema.

Como ya se mencionó anteriormente, el trabajo de Schneider establece de antemano que la forma de intercara es un plano meridiano $\phi = \text{constante}$, y resuelve las ecuaciones de movimiento utilizando coordenadas curvilíneas ortogonales en ese plano, las cuales se conocen como toroidales.

Es factible establecer, en una primera aproximación, que la forma de la intercara en equilibrio no se modifica cuando se presenta la rotación de la esfera. Esto significa que la ecuación de la intercara se conoce a *priori*.

En estas condiciones es conveniente definir una triada de vectores en cada punto a lo largo de la superficie que representa a las intercara (figura 8).

Este conjunto de vectores no representa un sistema ortogonal, ya que a pesar de que el vector l es ortogonal a los vectores m y q , estos dos últimos no lo son. Sin embargo, estos vectores generan totalmente el espacio en tres dimensiones.

Mediante esta triada de vectores podemos definir un sistema coordenado curvilíneo no ortogonal a lo largo de la superficie que forma la intercara.

Con este nuevo sistema coordenado podemos reescribir las ecuaciones de movimiento e intentar resolverlas. Nosotros esperamos que la solución pueda ser expresada en términos de variables separables, y el ajuste de condiciones a la frontera pueda ser efectuado sin que se presenten las restricciones mencionadas en la sección 3.2 de la presente tesis.

Es conveniente aclarar que debido a que no contamos con una expresión analítica de la ecuación que representa a la intercara, el problema completo deberá atacarse totalmente en forma numérica. A pesar de esto pensamos que esta técnica es una buena alternativa que se puede tomar de manera inmediata, para intentar avanzar en la búsqueda de la solución al problema de rotación de una esfera en una intercara.

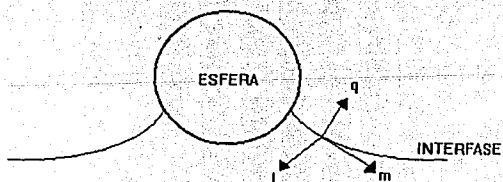


Figura 8. Sistema coordenado propuesto.

A P E N D I C E

Es conveniente mencionar algunas de las propiedades de los polinomios de Gegenbauer, ya que algunas de estas son utilizadas a lo largo del desarrollo de la presente tesis.

Primeramente tenemos la ecuación generadora de los polinomios de Gegenbauer:

$$I_n(x) = -\frac{1}{n(n-1)!} \left[\frac{d}{dx} \right]^{n-2} \left[\frac{x^2-1}{2} \right]^{n-1}, \quad (A.1)$$

y de sus polinomios asociados:

$$H_n(x) = \frac{1}{2} I_n(x) I_n \left[\frac{1+x}{1-x} \right] + K_n(x), \quad (A.2)$$

donde:

$$\frac{1}{2} n \leq k \leq \frac{1}{2} (n+1),$$

y:

$$K_n = -\sum_k \frac{2n-4k+1}{k(2k-1)(n-k)} \left[1 - \frac{(2k-1)(n-k)}{n(n-1)} \right] I_{n-2k+1}(x).$$

Con base en las anteriores expresiones se puede mostrar que:

$$H_n = 0 \text{ en } |x| = 1.$$

Tenemos también las siguientes relaciones importantes:

$$\frac{d}{dx} I_n(x) = -P_{n-1}(x), \quad (A.3)$$

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = -Q_{n-1}(x), \quad (A.4)$$

$$I_n(x) = \frac{P_{n-2}(x) - P_n(x)}{2n-1}, \quad (\text{A.5})$$

$$H_n(x) = \frac{Q_{n-2}(x) - Q_n(x)}{2n-1}, \quad (\text{A.6})$$

donde $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ son los polinomios de Legendre y sus asociados respectivamente. Es conveniente recalcar que las últimas dos ecuaciones son válidas para $n \geq 2$.

Con las expresiones anteriores se pueden obtener los polinomios de Gegenbauer; a continuación enlistaremos algunos de ellos:

$$I_0 = 1,$$

$$I_1 = -x,$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(1-x^2),$$

$$I_3 = \frac{1}{2}x(1-x^2),$$

$$I_4 = \frac{1}{8}(1-x^2)(5x^2-1),$$

$$I_5 = \frac{1}{8}x(1-x^2)(7x^2-3),$$

y algunos de sus polinomios asociados:

$$H_0 = -x,$$

$$H_1 = -1.$$

Finalmente se tiene:

$$\int_{-1}^1 I_n(x) dx = 0 \text{ para } n \neq 0 \text{ ó } 2,$$

en el caso de que n sea 0 ó 2 el valor de la integral será 2 y $\frac{2}{3}$ respectivamente.

Mediante el conjunto de relaciones anteriores, podemos manipular mas fácilmente las ecuaciones que se presentan a lo largo de la presente tesis.

B I B L I O G R A F I A

Abramowitz, M., and Stegun, I. A., 1973, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Dover Publications, New York.

Arfken, G., 1981, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, New York.

Batchelor, B. K., 1967, An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge, University Press UK.

Bird, R. B., and Steward, W. E., and Lightfoot, E. N., 1960, Transport Phenomena, Wiley, New York.

Callen, H. B., 1981, Termodinámica, Editorial AC, Madrid.

Currie, I. G., 1974, Fundamental Mechanics of Fluids, McGraw-Hill, New York.

De Groot, S. R., and Mazur, P., 1969, Non Equilibrium Thermodynamics, North Holland Publishing Company, Amsterdam-London.

Happel, J., and Brenner, H., 1973, Low Reynolds Number Hydrodynamics, Noordhoff International Amsterdam.

Hildebrand, F. B., 1976, Advanced Calculus for Application, Prantice Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.

Landau, L. D., and Lifshitz, E. M., 1986, Fluid Mechanics, Pergamon Press, London.

Lass, H., 1950, Vector and Tensor Analysis, Mc Graw Hill, New York.

O'Neill, M. E., Ranger, K. B., and Brenner, H., 1986, Phys. Fluids 29(4), pag 913-924.

Ovseenko, Ju. G., 1963 Über die Bewegung einer Viskosen Flüssigkeit Zwischen zwei Rotierenden Kugelflächen, Izvestija VUZ Matematika H.4, S.129.

Richardson, S., 1973, J. Fluid Mechanics, 59, 107.

Robin, L., 1959, Fonctions Spheriques de Legendre et Fonctions Spheroidales, Gauthier-Villars, Paris.

Sanchez, J.R. and Peralta-Fabi, R. 1990 Dynamics Days, Austin, Tx, USA.

Saffman, P. G., and Delbruck, M., 1975 Brownian Motion in Biological Membranes, Biophysics Vol 72, No 8 pp 3111-31143.

Schneider, J. C., O' Neill, M., and Brenner, H., 1973 Matematika 20, 175-196.

Takagi, H., 1977, Viscous Flow Induced by Slow Rotation Of a Sphere,
J. Phys Soc Japan 42(1) 319-325.