

00576



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

FACULTAD DE QUIMICA



**SOLUCION DE LA ECUACION DE DIFUSION DE
NEUTRONES UTILIZANDO METODOS NODALES**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
NUCLEARES**

P R E S E N T A :

VICTOR MANUEL GONZALEZ MERCADO

FALLA DE ORIGEN

ASESORES:

M. EN C. JUAN LARTIGUE GORDILLO

M. EN C. EDMUNDO DEL VALLE GALLEGOS



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA
DIRECCION.

LIC. ANTONIO DIAZ GARCIA.
JEFE DE LA UNIDAD DE
REGISTRO E INFORMACION.
CIUDAD UNIVERSITARIA.
P R E S E N T E .

Me es grato informarle que el alumno, **VICTOR MANUEL GONZALEZ MERCADO**, presentará próximamente su Examen para obtener el grado de Maestro en Ciencias Nucleares, ante el siguiente jurado:

Presidente:	Dr. Jean Pierre Hennart.
Primer Vocal:	Dr. Arturo Menchaca.
Secretario:	Dra. Susana Gómez.
Primer Suplente:	M. en C. Edmundo del Valle Gallegos.
Segundo Suplente:	M. en C. Juan Carlos Ramos Pablos.

ATENTAMENTE .
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 16 de Marzo de 1994.

DR. ANDONI GARRITZ RUIZ.
DIRECTOR.

C.c.p. Interesado.
C.c.p. Integrantes del Jurado.
C.c.p. Coordinador de Area.

A mis padres

**Antonio
y
Anselma....**

Constructores de mi existencia..... mi origen

A mis hermanos.....

Compañeros de este viaje....amigos de siempre

A mi esposa

Esperanza... Pera...

Amor.....sustento de mi existencia...

A nuestros hijos

**Victor
y
Esperanza**

Sustacia de nuestra existencia derramada al futuro

AGRADECIMIENTOS

Deseo hacer patente mi agradecimiento al M. en C. Edmundo del Valle Gallegos por la dirección desinteresada de este trabajo. Asimismo agradezco el apoyo recibido de la Comisión Nacional de Seguridad Nuclear y Salvaguardias durante el tiempo que he tenido el gusto de formar parte de su grupo de evaluadores.

SOLUCION DE LA ECUACION DE DIFUSION DE NEUTRONES UTILIZANDO METODOS NODALES

**TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS NUCLEARES**

TESISTA:

VICTOR MANUEL GONZALEZ MERCADO

DIRECTORES:

M. en C. JUAN LARTIGUE GORDILLO

**SECCION DE QUIMICA NUCLEAR
FACULTAD DE QUIMICA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

M. en C. EDMUNDO DEL VALLE GALLEGOS

**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA NUCLEAR
ESCUELA SUPERIOR DE FISICA Y MATEMATICAS
INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**

CONTENIDO

	<u>PAG.</u>
RESUMEN	a
INTRODUCCION	b
I LA ECUACION DE DIFUSION	1
1.1 LA ECUACION DE DIFUSION DE NEUTRONES	2
1.2 CONDICIONES DE FRONTERA	9
1.3 LA ECUACION DE MULTIGRUPOS	14
II METODOS NODALES	19
2.1 ELEMENTOS FINITOS NODALES	19
2.2 APLICACION A LA ECUACION DE DIFUSION	23
III SISTEMA DE ECUACIONES	27
3.1 PLANTEAMIENTO DEL SISTEMA DE ECUACIONES	27
3.1.1 PRIMAL MATEMATICO	30
3.1.2 PRIMAL FISICO	34
3.1.3 DIFERENCIAS FINITAS CENTRADAS EN LA MALLA	37
3.2 METODOLOGIA DE SOLUCION	38
IV DESCRIPCION DEL PROGRAMA	41
4.1 PROGRAMA PRINCIPAL	41
4.1.1 CALCULO ESTATICO	42
4.1.2 ITERACION EXTERNA	42
4.1.3 ITERACION INTERNA	43
4.2 PROGRAMAS PRIFIS Y PRIDIF	44
4.3 DESCRIPCION DEL ARCHIVO DE DATOS	45
4.4 RESULTADOS	47
4.5 CONCLUSIONES	49
APENDICE I	i
A.1 REACTOR HOMOGENEO	i
A.2 REACTOR CON DOS ZONAS	ii
A.3 REACTOR RAPIDO DE CRIA ENFRIADO CON METAL LIQUIDO (LMFBR)	iii

PAG.

A.4	CONFIGURACION DE REACTOR POCO ACOPLADO	iii
A.5	PROBLEMA BIDIMENSIONAL TWIGL	iv
A.6	DATOS NUCLEARES EMPLEADOS EN LAS EJECUCIONES DE PRUEBAS	vi
A.7	LISTADOS DEL PROGRAMA PRIMAT	vii
A.8	LISTADOS DE LAS SUBRUTINAS CALFLX, CALMAH, CALSOH Y CALSOV PARA EL PROGRAMA PRIFIS	xxviii
A.9	LISTADOS DE LAS SUBRUTINAS CALFLX, CALMAH, CASLOH Y CALSOV PARA EL PROGRAMA PRIDIP	xxiv

REFERENCIAS

RESUMEN

Se describe la metodología empleada para resolver la ecuación de difusión de neutrones en geometría rectangular, incluyendo la elaboración de tres programas de computadora con ese fin.

Se utiliza el método de elementos finitos nodales para discretizar especialmente la ecuación de difusión. El proceso comienza con la obtención de su forma débil e inmediatamente discretizar ésta empleando el elemento nodal RTN0 (Raviat-Thomas-Nédelec de índice cero) para obtener finalmente, el correspondiente sistema algebraico de ecuaciones donde se identifican matrices se construyen mediante el ensamblado de las correspondientes matrices locales que, para este esquema, son de orden cinco.

Se emplean tres diferentes esquemas para la obtención de Los coeficientes de la matrices locales: primal matemático, primal físico y diferencias finitas centradas en la malla. En base a estos tres esquemas se elaboraron tres programas de computadora que obtienen resultados satisfactorios para los problemas de referencia empleados.

En los primeros capítulos se hace una revisión de la física de reactores nucleares describiendo las consideraciones y suposiciones que conducen primero a la ecuación de transporte, después a la ecuación de difusión de multigrupos. Se describe además, en forma breve, la metodología de elementos finitos nodales como base teórica para el desarrollo de los programas de computadora presentes.

Los programas de computadora fueron escritos en lenguaje FORTAN y son ejecutables en computadoras personales lo que los hace atractivos tanto para ser empleados como herramienta didácticos como para ser la base de programas de producción.

INTRODUCCION

En la industria nuclear resulta de gran importancia el disponer de herramientas de cálculo que permitan la predicción del comportamiento del núcleo del reactor nuclear ya sea en estado estacionario o durante transitorios. Estas herramientas resultan ser programas de computadora con los que los diseñadores de los reactores nucleares pueden estudiar diferentes opciones de operación o tipos de combustible que permitan cubrir los requerimientos de producción de energía respetando las normas de seguridad.

Las características del núcleo de un reactor nuclear cambian a medida que se va consumiendo el combustible. El estudio de estos cambios se efectúa analizando el comportamiento del reactor en estado estacionario a diferentes tiempos en la "vida" de éste. Esto permite desarrollar estrategias que aseguren un quemado eficiente y seguro del combustible y todo esto se realiza empleando programas de computadora.

El objetivo del presente trabajo es, entonces, el desarrollo de programas de cómputo que puedan ser utilizados en este tipo de actividades.

El problema se aborda desde sus aspectos teóricos revisando conceptos básicos en la física de reactores nucleares. En primer capítulo se plantea la ecuación de transporte y se introduce las suposiciones que conducen, primero, a la ecuación de transporte y, después, a la ecuación de difusión de neutrones. Se toma en cuenta la dependencia del flujo de neutrones con la energía de éstos y se discretiza la ecuación de difusión para obtener las ecuaciones de multigrupos.

En el segundo capítulo se describen los métodos de elementos finitos tipo nodal y su aplicación a la solución de la ecuación de difusión. Se muestra en este capítulo el proceso de discretización de la ecuación de difusión de neutrones empezando con la obtención de su forma débil y continuando con la utilización del elemento nodal RTN0 (Raviat-Thomas-Nédelec de índice cero) para la obtención de un sistema algebraico de ecuaciones.

En el tercer capítulo se describen los procedimientos empleados para la obtención de los coeficientes de las matrices que forman el sistema algebraico de ecuaciones. Tres procedimientos diferentes fueron empleados: el matemático, el físico y el de diferencias finitas centradas en la malla.

La descripción de los programas de computadora se presenta en el cuarto capítulo incluyendo los datos de entrada requeridos por los programas. En este mismo capítulo se presentan los resultados obtenidos al ser ejecutados con problemas de referencia para este tipo de códigos, a partir de los cuales es posible realizar una evaluación de éstos.

I LA ECUACION DE DIFUSION

El problema central de la física de reactores puede establecerse, en forma simple, como el cálculo en cualquier tiempo t de las características de la población de neutrones en una cierta región del espacio que contiene una mezcla arbitraria, pero conocida, de materiales. En particular, deseamos conocer el número de neutrones en cualquier volumen infinitesimal dV , que tienen energías cinéticas entre E y $E + dE$ y que viajan en direcciones en ángulo infinitesimal a una dirección definida por un vector unitario Ω . Una vez conocido, este número puede ser empleado para predecir la tasa a la que se llevan a cabo las reacciones nucleares, incluyendo la fisión, en una región, y por lo tanto se podrá predecir la energía que se generará en un tiempo dado.

El determinar las características de la población de neutrones se simplifica por el hecho de que, en muchos de los casos de interés, esta población es tan grande que los neutrones pueden ser tratados como un fluido. Así, en forma similar a un gas, podemos hablar de "densidad neutrónica" y no tenemos que enfrentar el problema de seguir con detalle la vida de cada neutrón.

La cantidad de interés primario es, entonces, la densidad $n(r, \Omega, E, t)$ que queda definida cuando reconocemos que $n(r, \Omega, E, t)$ es el número de neutrones que, al tiempo t , se encuentran en el volumen infinitesimal dV , que contiene al punto r , que poseen energía cinética en el intervalo dE alrededor de E y que viajan en una dirección contenida en el cono de direcciones $d\Omega$ alrededor de Ω .

Cuando el "fluido" de neutrones se encuentra en un medio material los neutrones interactúan con éste, y es describiendo esta interacción en forma matemática, que obtendremos una ecuación que la función n deberá obedecer. Específicamente, la obtendremos escribiendo en términos matemáticos el hecho físico de que la tasa de cambio en $n(r, \Omega, E, t)$ al tiempo t es la diferencia entre la tasa a la que los neutrones ingresan al volumen dV con energías entre E y $E + dE$ con direcciones dentro de $d\Omega$ alrededor de Ω (ya sea por producción en un proceso de fisión, por dispersión o cruzando la frontera de dV) y la tasa a la que se remueven de $dV dE d\Omega$ (por absorción, por dispersión o por cruzar la frontera de dV). Podemos derivar así una ecuación integral diferencial para $n(r, \Omega, E, t)$ llamada la ecuación de transporte que, si pudiéramos resolverla, podríamos diseñar y predecir el comportamiento de los reactores nucleares en forma muy precisa.

Esta aproximación a la solución por la teoría de transporte conduce a problemas matemáticos difíciles y a ecuaciones cuya solución requiere mucho esfuerzo para la mayoría de los casos prácticos. Por fortuna puede derivarse una ecuación aproximada y que es válida para la mayoría de los casos de interés práctico. El modelo matemático que conduce a esta ecuación es llamada la teoría de difusión la cual describiremos brevemente en el presente capítulo.

1.1 LA ECUACION DE DIFUSION DE NEUTRONES

Imaginemos un medio material de volumen V que contiene neutrones. Conforme transcurre el tiempo el número de éstos en ese volumen puede variar si existe un flujo neto de neutrones hacia adentro o hacia afuera de V , si existen fuentes emisoras o, si tomamos en cuenta su energía y dirección, si son dispersados con nueva energía y dirección. El hecho físico de que los neutrones no desaparecen (si no tomamos en cuenta su decaimiento β) puede expresarse con la siguiente ecuación:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Tasa de cambio en el} \\ \text{número de neutrones} \\ \text{en } V \text{ con energía } E \\ \text{en el intervalo } dE \\ \text{y con dirección } \Omega \\ \text{en el intervalo } d\Omega. \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Tasa de producción} \\ \text{de neutrones en } V \\ \text{con energías en } E \\ \text{en el intervalo } dE \\ \text{y con dirección } \Omega \\ \text{en el intervalo } d\Omega. \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Tasa a la que} \\ \text{neutrones con energía} \\ E' \text{ en el intervalo } dE' \\ \text{y con dirección } \Omega' \\ \text{en } d\Omega' \text{ cambian a } E \\ \text{y } \Omega. \end{array} \right] \quad (1-1)$$

$$- \left[\begin{array}{l} \text{Tasa neta a la que los} \\ \text{neutrones cruzan la} \\ \text{superficie de } V. \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Tasa de remoción de} \\ \text{neutrones debida a} \\ \text{alguna reacción a} \\ \text{causa de una colisión} \\ \text{con material del} \\ \text{volumen } V. \end{array} \right]$$

Procedamos a determinar cada uno de los términos de la ec. (1-1) para lo cual podemos ver que el número de neutrones en el volumen V con energía E en el intervalo dE viajando en la dirección Ω en el intervalo $d\Omega$ es:

$$\left[\int_V n(r, E, \Omega, t) d^3r \right] dE d\Omega \quad (1-2)$$

Podemos encontrar la tasa de variación del número de neutrones en V obteniendo la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (1-2):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V n(r, E, \Omega, t) d^3r \right] dE d\Omega = \left[\int_V \frac{\partial n}{\partial t} d^3r \right] dE d\Omega \quad (1-3)$$

Consideremos ahora el término de fuente definiendo:

$$S(r, E, \Omega, t) = \left[\begin{array}{l} \text{Tasa a la que se producen los neutrones} \\ \text{en } V \text{ con energía } E \text{ en el intervalo } dE \\ \text{y con dirección } \Omega \text{ en el intervalo } d\Omega \end{array} \right] \quad (1-4)$$

por lo que podemos escribir para el número total de neutrones que se producen en V

$$\left[\int_V S(r, E, \Omega, t) d^3r \right] dE d\Omega \quad (1-5)$$

Evaluemos ahora la tasa a la que los neutrones con energía E' y dirección Ω' cambian a energía E y dirección Ω debido a dispersiones en V escribiendo:

$$\left[\int_V v_n' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) n(r, E, \Omega, t) d^3r \right] dE d\Omega \quad (1-6)$$

donde:

v_n es la velocidad del neutrón.

Consideremos en este término las contribuciones desde cualquier energía E' y dirección Ω' rescribiéndolo como:

$$\left[\int_V \left[\int_{4\pi} \left[\int_0^\infty v_n' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) n(r, E', \Omega', t) dE' \right] d\Omega' \right] d^3r \right] dE d\Omega \quad (1-7)$$

Determinemos ahora el número neto de neutrones que cruzan la superficie S del volumen V . Podemos escribir:

$$j(r, E, \Omega, t) \cdot dS = v_n \Omega n(r, E, \Omega, t) \cdot dS \quad (1-8)$$

donde j es la densidad de corriente angular definida como:

$$j = v_n \Omega n(r, E, \Omega, t) \quad (1-9)$$

De esta forma la ecuación (1-8) representa la tasa a la que los neutrones cruzan la superficie dS por lo que si integramos en toda la superficie de V tenemos que:

$$\begin{aligned} \left[\int_S v_n \Omega n(r, E, \Omega, t) \cdot dS \right] dE d\Omega &= \left[\int_V \nabla \cdot v_n \Omega n(r, E, \Omega, t) d^3r \right] dE d\Omega \\ &= \left[\int_V v_n \Omega \nabla \cdot n(r, E, \Omega, t) d^3r \right] dE d\Omega \end{aligned} \quad (1-10)$$

La tasa a la que los neutrones son removidos, debido alguna reacción resultado de la colisión de éstos con el material en V , depende de la frecuencia a la que se efectúan estas colisiones; esta frecuencia puede escribirse como:

$$I(r, E, \Omega, t) = \nu_p \Sigma_p(r, E) n(r, E, \Omega, t) \quad (1-11)$$

donde Σ_p es la sección eficaz total que considera absorciones y dispersiones a energías E' y direcciones Ω' . de esta forma podemos escribir que:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Tasa a la que los} \\ \text{neutrones en } V \text{ son} \\ \text{removidos debido a} \\ \text{alguna reacción re-} \\ \text{sultado de una cr-} \\ \text{colisión con el mate-} \\ \text{rial en } V. \end{array} \right] = \int_V \nu_p \Sigma_p(r, E) n(r, E, \Omega, t) d^3r \quad (1-12)$$

Podemos entonces substituir las ecuaciones (1-3), (1-5), (1-7), (1-10) y (1-12) en la ecuación (1-1).

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial n}{\partial t} d^3r = \int_V S(r, E, \Omega, t) d^3r \\ & - \int_V \int_{\Omega'} \int_{E'} \nu_p \Sigma_p(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) n(r, E', \Omega', t) dE' d\Omega' d^3r \\ & - \int_V \nu_p \Omega \cdot \nabla n d^3r - \int_V \nu_a \Sigma_a(r, E) n(r, E, \Omega, t) d^3r \end{aligned} \quad (1-13)$$

que puede agruparse como:

$$\begin{aligned} & \int_V \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \nu_p \Omega \cdot \nabla n + \nu_p \Sigma_p(r, E) n(r, E, \Omega, t) \right. \\ & \left. - \int_{\Omega'} \int_{E'} \nu_p \Sigma_p(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) n(r, E', \Omega', t) dE' d\Omega' \right. \\ & \left. - S(r, E, \Omega, t) \right] d^3r dE d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (1-14)$$

Para que esta ecuación se cumpla el integrando deberá ser igual a cero (0), por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial n}{\partial t} + \nu_p \Omega \cdot \nabla n + \nu_p \Sigma_p(r, E) n(r, E, \Omega, t) \\ & = \int_{\Omega'} \int_{E'} \nu_p \Sigma_p(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) n(r, E', \Omega', t) dE' d\Omega' + S(r, E, \Omega, t) \end{aligned} \quad (1-15)$$

La ecuación (1-15), es conocida como la ecuación de transporte de neutrones. Esta ecuación nos describe con detalle el cambio que sufre el número de neutrones que existen en V . Sin

embargo, para la mayoría de los cálculos de reactores, el detalle en la dependencia angular no es muy importante y lo que se requiere, por lo general, es calcular el flujo integrado angularmente, esto es:

$$v_n n(r, E, t) = \int_{4\pi} \varphi(r, E, \Omega, t) d\Omega = \phi(r, E, t) \quad (1-16)$$

Reescribiremos la ecuación (1-15) en función del producto $v_n n(r, E, \Omega, t) = \varphi(r, E, \Omega, t)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla \varphi + \Sigma_r(r, E) \varphi \\ & = \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \varphi(r, E', \Omega', t) dE' d\Omega' - S(r, E, \Omega, t) \end{aligned} \quad (1-17)$$

Integramos cada una de los términos de la ecuación (1-17) con respecto a Ω :

- Primer término, es igual a:

$$\int_{4\pi} \frac{1}{v_n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\Omega = \frac{1}{v_n} \frac{\partial}{\partial t} \int_{4\pi} \varphi d\Omega = \frac{1}{v_n} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1-18)$$

- Segundo término, es igual a:

$$\int_{4\pi} \Omega \cdot \nabla \varphi d\Omega = \nabla \cdot \int_{4\pi} \Omega \varphi d\Omega = \nabla \cdot J(r, E, t) \quad (1-19)$$

- Tercer término, es igual a:

$$\int_{4\pi} \Sigma_r \varphi d\Omega = \Sigma_r \int_{4\pi} \varphi d\Omega = \Sigma_r \phi \quad (1-20)$$

Para evaluar el cuarto término cambiemos el orden de integración:

- El cuarto término, es igual a:

$$\int_{4\pi} \left[\int_0^\infty \left(\int_{4\pi} \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega \right) \varphi(r, E', \Omega', t) dE' \right] d\Omega' \quad (1-21)$$

Dado que, $\Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)$ depende únicamente del coseno del ángulo de dispersión, es decir, de $\mu_0 = \Omega' \cdot \Omega$, podemos escribir

$$\int_{E'} \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \Sigma_s(E' \rightarrow E, u_0) du_0 = \Sigma_s(E' \rightarrow E) \quad (1-22)$$

por lo que tenemos, que el cuarto término, es igual a:

$$\int_{E'} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \int_{\Omega'} \phi(r, E', \Omega, t) d\Omega' dE'$$

$$= \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(r, E', t) dE' \quad (1-23)$$

evaluemos el quinto término definiendo:

$$\int_{\Omega'} S(r, E, \Omega, t) d\Omega = S(r, E, t) \quad (1-24)$$

reescribamos ahora la ecuación (1-16), sustituyendo cada uno de los términos que acabamos de deducir.

$$\frac{1}{v_n} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot J(r, E, t) + \Sigma_r(r, E, t) \phi(r, E, t)$$

$$= \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(r, E', t) dE' + S(r, t) \quad (1-25)$$

Esta ecuación, es conocida como la ecuación de continuidad para neutrones, puesto que no es más que un balance de neutrones.

Es muy conveniente suprimir la dependencia con la energía, suponiendo que uno puede caracterizar los neutrones considerando sólo una energía, seleccionando las secciones eficaces de manera adecuada. Reescribamos entonces, la ecuación (1-25) eliminando la dependencia con la energía.

$$\frac{1}{v_n} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot J(r, t) + \Sigma_r(r, t) \phi(r, t) = \Sigma_s(r, t) + S(r, t) \quad (1-26)$$

que podemos reorganizar a:

$$\frac{1}{v_n} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot J(r, t) + (\Sigma_r - \Sigma_s) \phi(r, t) = S(r, t) \quad (1-27)$$

ó

$$\frac{1}{v_n} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot J(r, E, t) + \Sigma_a \phi(r, t) = S(r, t) \quad (1-28)$$

donde hemos definido $\Sigma_a = \Sigma_a' - \Sigma_a$. Aunque la ecuación (1-28) posee una forma muy sencilla, contiene dos incógnitas. Es imposible expresar J en función de ϕ en forma exacta. Para poder resolver la ecuación (1-28) requerimos otra relación entre estas dos variables. En otros campos de la física, tales como en los estudios de difusión de masa, es bien conocido que la densidad de corriente es aproximadamente proporcional al gradiente espacial de las densidades de masa, en nuestro caso de n y por tanto de ϕ . Es decir, las partículas tienden a fluir de regiones de alta densidad a una de baja densidad a una tasa proporcional al gradiente negativo de la densidad. Puesto en forma matemática, puede escribirse lo que se conoce como la primera Ley de Fick.

$$J(r,t) = -D(r)\nabla\phi(r,t) \quad (1-29)$$

Si introducimos esta aproximación a la ecuación (1-27), obtenemos:

$$\frac{1}{v_n} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \nabla \cdot D(r) \nabla \phi + \Sigma_a(r) \phi(r,t) = S(r,t) \quad (1-30)$$

Que es conocida como la ecuación de difusión. Para el caso, en que ϕ es constante en el tiempo, es decir estado estacionario, tenemos:

$$-\nabla \cdot D(r) \nabla \phi + \Sigma_a(r) \phi(r) = S(r) \quad (1-31)$$

La ecuación (1-30) es la base para mucho del trabajo en teoría de reactores. Para nuestro caso particular, emplearemos la ecuación (1-31) en la que hemos eliminado la dependencia temporal. La ecuación (1-31) correspondería al estado crítico de un reactor únicamente si las secciones eficaces y el coeficiente de difusión de esta ecuación se seleccionan en forma adecuada. Esto puede lograrse si resolvemos la ecuación (1-31) reescribiéndola, para el caso homogéneo como:

$$\nabla \cdot \nabla \phi + B^2 \phi(r) = 0 \quad (1-32)$$

Donde se ha reconocido el hecho que en un reactor nuclear

$$S = v \Sigma_f \phi \quad (1-33)$$

donde:

v = neutrones producidos por fisión.

Σ_f = sección eficaz de fisión.

y el llamado "Buckling", B^2 , ha sido definido como

$$B^2 = \frac{v \Sigma_f - \Sigma_a}{D} \quad (1-34)$$

La solución de la ecuación nos conduce a determinar el valor de B^2 en función de las dimensiones del reactor.

Para el caso de un cilindro de altura H y radio R , B^2 resulta ser [1], [2].

$$B^2 = \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \quad (1-35)$$

donde:

$v_0 = 1^a$ raíz de la función Bessel de orden 0.

Las ecuaciones (1-34) y (1-35) son los llamados "Buckling Material" B_m y "Buckling Geométrico" B_g . Por supuesto para que el reactor sea crítico se debe cumplir

$$B_m = B_g \quad (1-36)$$

de donde podemos determinar la composición que hará que el reactor sea crítico para unas dimensiones dadas. El problema se complica cuando el reactor es heterogéneo volviéndose sumamente difícil la determinación de la composición y dimensiones del reactor.

En general la ecuación (1-31) no tiene solución, a menos que acertemos en la combinación correcta de dimensiones y composición del reactor lo que es difícil sobre todo para el caso heterogéneo.

Si proponemos una cierta composición y geometría del reactor y reescribimos la ecuación (1-31) introduciendo un parámetro " K " en ésta, tendríamos

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi + \Sigma_a \phi(r) = \frac{1}{K} S \quad (1-37)$$

o recordando la ecuación (1-33) tendríamos

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi + \Sigma_a \phi(r) = \frac{1}{K} v \Sigma_f \phi \quad (1-38)$$

De esta forma y para un valor dado de K , esta ecuación tendrá siempre una solución. La técnica de solución del problema es, entonces, escoger cierta composición y tamaño del reactor y determinar K . Si $K = 1$ se ha seleccionado la combinación de tamaño y composición que hacen

crítico al reactor. Sin embargo si $K \neq 1$, deberemos escoger una nueva combinación y repetir el cálculo.

En realidad esta K resulta ser el llamado factor de multiplicación y desde un punto de vista matemático introducirlo en la ecuación de difusión en estado estacionario permite ver la solución de la ecuación (1-38) como un problema de valor propio o de eigenvalor. Una vez que se calcula este eigenvalor podemos regresar a reajustar la combinación de parámetros seleccionada con el propósito de ajustar el eigenvalor al valor deseado.

1.2 CONDICIONES DE FRONTERA

Dado que la ecuación de difusión posee derivadas tanto en el espacio como en el tiempo, es necesario asignar condiciones de frontera y condiciones iniciales adecuadas. Por supuesto la condición inicial, se obtiene inmediatamente:

$$\phi(r, t = 0) = \phi_0(r) \quad (1-39)$$

Sin embargo, las condiciones de frontera son un poco más difíciles de especificar. En realidad, éstas dependen del problema físico de interés.

Antes de continuar con las condiciones de frontera, mencionemos algunas propiedades que debe poseer la función $\phi(r, t)$, para representar un flujo neutrónico real. Debe, por ejemplo, ser una función real, y dado que tanto la velocidad del neutrón como la densidad neutrónica no pueden ser negativos, debemos exigir que $\phi(r, t)$ sea mayor o igual que cero (0). En una buena parte de los casos de simetría las condiciones de frontera pueden surgir de consideraciones geométricas del problema de interés.

Consideremos pues, con la intención de obtener las condiciones de frontera, una interfase entre dos regiones con diferentes secciones eficaces. Por supuesto, la condición de frontera correcta debería ser:

$$\begin{aligned} \psi_1(r_p, \Omega, t) &= \psi_2(r_p, \Omega, t) \\ \forall \Omega \end{aligned} \quad (1-40)$$

$\forall r_p$ sobre la superficie del sistema

aquí, ψ_1 es el flujo angular en la región 1, mientras que ψ_2 es el flujo angular en la región 2. Esta condición asegura la conservación de neutrones através de la frontera. No obstante, la dependencia angular puede ser eliminada, si recordamos que:

$$\phi(r_p, t) = \int_{4\pi} \psi(r_p, \Omega, t) d\Omega \quad (1-41)$$

por lo que aproximamos la condición de frontera obteniendo los primeros dos momentos angulares de la ecuación (1-40)

$$\int_{\Sigma} \varphi_1(r_p, \Omega, t) d\Omega = \int_{\Sigma} \varphi_2(r_p, \Omega, t) d\Omega \quad (1-42)$$

de donde:

$$\phi_1(r_p, t) = \phi_2(r_p, t) \quad (1-43)$$

y,

$$\int_{\Sigma} \varphi_1(r_p, \Omega, t) \Omega d\Omega = \int_{\Sigma} \varphi_2(r_p, \Omega, t) \Omega d\Omega \quad (1-44)$$

por lo que:

$$J_1(r_p, t) = J_2(r_p, t) \quad (1-45)$$

De esta forma, las condiciones de frontera en la teoría de difusión son las de continuidad para el flujo y la densidad de corriente en la interfase, es decir:

$$\phi_1(r_p, t) = \phi_2(r_p, t)$$

y sustituyendo la Ley de Fick en la ecuación (1-45)

$$-D_1 \nabla \phi_1(r_p, t) = -D_2 \nabla \phi_2(r_p, t) \quad (1-46)$$

Revisemos ahora, el caso en el que el reactor se encuentra rodeado de espacio vacío de forma que si un neutrón sale del volumen correspondiente al reactor, no podrá regresar al sistema. Precizando un poco más, deberemos suponer que la geometría del sistema es tal que se caracteriza por una superficie no reentrante, de forma que un neutrón que sale del sistema no podrá cruzar de nuevo la superficie en algún otro punto de la misma. De esta forma, la condición de frontera apropiada deberá exponer el hecho físico de que no entrarán neutrones al sistema desde el exterior, es decir, que la densidad neutrónica sea cero (0) en cualquier dirección hacia dentro del sistema, esto es:

$$\psi(r_p, \Omega, t) = 0$$

ó

$$\varphi(r_p, \Omega, t) = 0 \quad (1-47)$$

si $\Omega \cdot ds < 0 \forall r_p$ sobre la superficie del sistema.

aproximemos esta condición de frontera para poder utilizar la teoría de difusión exigiendo que la condición se cumpla en promedio, i.e.

$$\int_{\Sigma} \varphi(r_p, \Omega, t) e_s \cdot \Omega d\Omega = \int_{\Sigma} e_s \cdot J(r_p, \Omega, t) d\Omega \equiv J_n(r_p, t) = 0 \quad (1-48)$$

donde e_x es el vector unitario normal a la superficie del sistema.

Aquí hemos encontrado que la condición promedio es equivalente a imponer que la corriente con dirección hacia el interior del sistema J_n es cero en su frontera.

Tratemos ahora de obtener una expresión para J_n expandiendo el flujo angular en función del ángulo.

$$\varphi(r, \Omega, t) = \varphi_0(r, t) + \varphi_{1x}(r, t)\Omega_x + \varphi_{1y}(r, t)\Omega_y + \varphi_{1z}(r, t)\Omega_z \quad (1-49)$$

donde hemos despreciado los términos de orden superior en Ω y φ_0 , φ_{1x} , φ_{1y} y φ_{1z} son coeficientes de expansión. Si recordamos que

$$\phi = \int_{4\pi} \varphi d\Omega = 4\pi\varphi \quad (1-50)$$

podemos entonces identificar el primer coeficiente de expansión como:

$$\varphi_0 = \frac{\phi}{4\pi} \quad (1-51)$$

además, la corriente es:

$$J = \int_{4\pi} \varphi \Omega d\Omega \quad (1-52)$$

que puede reescribirse como:

$$\frac{3}{4\pi} J \frac{4\pi}{3} = \int_{4\pi} \varphi \Omega d\Omega \quad (1-53)$$

ó

$$= \frac{3}{4\pi} \left(J_x \frac{4\pi}{3} e_x + J_y \frac{4\pi}{3} e_y + J_z \frac{4\pi}{3} e_z \right) = \int_{4\pi} \varphi \Omega d\Omega \quad (1-53a)$$

donde:

J_i = cada una de las magnitudes del vector J en la dirección i ($i = x, y, z$).
 e_i = vector unitario en la dirección i ($i = x, y, z$).

Puede demostrarse que

$$\int_{4\pi} \Omega_i \Omega d\Omega = \frac{4\pi}{3} c_i \quad (1-53b)$$

Por lo que la ecuación (1-53a) puede reescribirse y reorganizarse como:

$$\int_{4\pi} \left\{ \frac{3}{4\pi} (J_x \Omega_x - J_y \Omega_y + J_z \Omega_z) - \varphi \right\} \Omega d\Omega = 0 \quad (1-54)$$

para que esta ecuación se cumpla basta que el integrando sea igual a cero, por lo que podemos obtener

$$\varphi = \frac{3}{4\pi} (J_x \Omega_x + J_y \Omega_y + J_z \Omega_z) \quad (1-55)$$

por lo que los coeficientes φ_{1x} , φ_{1y} y φ_{1z} pueden identificarse como:

$$\begin{aligned} \varphi_{1x} &= \frac{3}{4\pi} J_x \\ \varphi_{1y} &= \frac{3}{4\pi} J_y \\ \varphi_{1z} &= \frac{3}{4\pi} J_z \end{aligned} \quad (1-56)$$

De esta forma podemos reescribir la ecuación (1-42) como:

$$\begin{aligned} \psi(r, \Omega, t) &= \frac{1}{4\pi} \phi(r, t) + \frac{3}{4\pi} [J_x \Omega_x + J_y \Omega_y + J_z \Omega_z] \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \phi(r, t) + \frac{3}{4\pi} J(r, t) \cdot \Omega \end{aligned} \quad (1-57)$$

Regresemos ahora a nuestro camino en busca de una condición frontera aproximada para la condición de vacío en los límites del reactor.

Calculemos la corriente parcial J , aprovechando el resultado que acabamos de obtener.

$$\begin{aligned}
J_z(r,t) &= \int_{2\pi\Omega} \varphi e_z \cdot \Omega d\Omega \\
&= \int_{2\pi\Omega} \left[\frac{1}{4\pi} \phi(r,t) + \frac{3}{4\pi} J(r,t) \cdot \Omega \right] e_z \cdot \Omega d\Omega \\
&= \int_{2\pi\Omega} \left[\frac{1}{4\pi} \phi(r,t) + \frac{3}{4\pi} (D\nabla\phi) \cdot \Omega \right] e_z \cdot \Omega d\Omega \\
&= \frac{1}{4} \phi(r,t) + \frac{D}{2} e_z \cdot \nabla\phi(r,t)
\end{aligned} \tag{1-58}$$

donde además, hemos introducido la aproximación de la densidad de corriente (1-29). De esta forma la condición de frontera aproximada por la teoría de difusión sería:

$$J_z(r,t) = \frac{1}{4} \phi(r,t) + \frac{D}{2} e_z \cdot \nabla\phi(r,t) = 0 \tag{1-59}$$

si lo aplicamos a una geometría unidimensional, tal que $x = x_1$, tendremos:

$$J_z(r,t) = \frac{1}{4} \phi(x_1) + \frac{D}{2} \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_1} = 0 \tag{1-60}$$

o rearreglando

$$\frac{1}{\phi(x_1)} \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_1} = \frac{-1}{2D} \tag{1-61}$$

esta relación, es como si extrapoláramos linealmente el flujo más allá de los límites del reactor de forma que éste se haría cero en el punto:

$$\tilde{x}_1 \equiv x_1 + 2D \tag{1-62}$$

por esta razón la condición de frontera para vacío

$$J_z(x_1) = 0 \tag{1-63}$$

se sustituye por una condición más simple

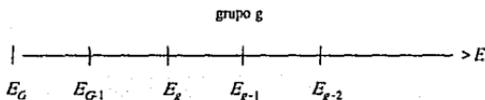
$$\phi(\tilde{x}_1) = 0 \tag{1-64}$$

donde \tilde{x}_1 es la llamada "frontera extrapolada" que será la que utilizaremos en los casos en que tengamos la condición de vacío en los límites del reactor.

1.3 LA ECUACION DE MULTIGRUPOS

Hasta el momento hemos hecho dos suposiciones muy importantes en el modelo que hemos descrito. Primero, hemos supuesto que el flujo angular depende muy poco del ángulo, de esta forma la aproximación de difusión puede considerarse válida. Generalmente esta aproximación puede considerarse satisfactoria para reactores grandes siempre y cuando el análisis se modifique un poco en las cercanías de absorbedores fuertes, en las interfaces y en las orillas del reactor para tomar en cuenta los efectos de transporte.

Sin embargo, la principal deficiencia es la suposición de que los neutrones pueden caracterizarse empleando un único valor para la energía de los neutrones. Por supuesto esto no es válido pues los neutrones en un reactor nuclear poseen energías que varían en el intervalo entre 10 Mev., hasta menos de 0.01 eV, es decir, aproximadamente nueve órdenes de magnitud. Por otro lado, las secciones eficaces dependen de manera importante de la energía de los neutrones. Por esto, es necesario tomar en cuenta la energía del neutrón pero, en lugar de tratar la variable E como si fuera continua, discretizándola en intervalos de energía. Es decir, dividamos el intervalo total de energía en G grupos de energía.



En esta discretización se ha numerado el grupo de energía de manera que el grupo de mayor energía, tiene el número menor. Nuestra tarea ahora será escribir las ecuaciones para $\phi(r, t)$, de manera que tomen en cuenta esta discretización en la energía. Empecemos reescribiendo la ecuación (1-15) introduciendo la aproximación de difusión.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{v_n} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot D(r) \nabla \phi + \Sigma_a(r, E, t) \phi(r, E, t) \\
 &= \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(r, E', t) dE' \\
 &+ \chi(E) \int_0^\infty v(E') \Sigma_f \phi(r, E', t) dE' \\
 &+ S_{ext}(r, E, t)
 \end{aligned}
 \tag{1-65}$$

en esta ecuación se ha introducido la forma explícita para la fuente:

$$\begin{aligned}
 S(r, E, t) &= S_f(r, E, t) + S_{en}(r, E, t) \\
 &= \chi(E) \int_0^\infty v(E') \Sigma_f \phi(r, E', t) dE' - S_{en}(r, E, t)
 \end{aligned}
 \tag{1-66}$$

donde $\chi(E)$ es la fracción de neutrones producidos por fisión que poseen energía E .

Continuaremos ahora eliminando la dependencia con la energía integrando la ecuación (1-65) sobre el grupo g -ésimo que se caracteriza por energías $E_g < E < E_{g-1}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \frac{1}{v_n} \phi dE - \nabla \cdot \int_{E_g}^{E_{g-1}} D \nabla \phi dE + \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_r \phi dE = \\
 \int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(r, E', t) dE' - \\
 \int_{E_g}^{E_{g-1}} \chi(E) \left[\int_0^\infty v(E') \Sigma_f(E') \phi(r, E', t) dE' - \right. \\
 \left. \int_{E_g}^{E_{g-1}} S_{en}(r, E, t) dE \right]
 \end{aligned}
 \tag{1-67}$$

Definamos ahora a:

- a) el flujo neutrónico del grupo g .

$$\phi_g(r, t) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(r, E, t) dE
 \tag{1-68}$$

- b) la sección eficaz total para el grupo g .

$$\Sigma_{gt} = \frac{1}{\phi_g} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_t(E) \phi(r, E, t) dE
 \tag{1-69}$$

- c) el coeficiente de difusión para el grupo g .

$$D_g = \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} D(E) \nabla \phi(r, E, t) dE}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \nabla \phi(r, E, t) dE}
 \tag{1-70}$$

- d) la velocidad de los neutrones del grupo g .

$$\frac{1}{v_{ng}} = \frac{1}{\phi_g} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \frac{1}{v_n} \phi(r, E, t) dE
 \tag{1-71}$$

c) la sección de dispersión

$$\Sigma_{dE} = \frac{1}{\phi_E} \int_{E_g}^{E_{g+1}} \left[\int_{E_g}^{E_{g+1}} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(r, E', t) dE' \right] dE \quad (1-72)$$

f) la sección eficaz de fisión para el grupo g'

$$v_{g'} \Sigma_{fg'} = \frac{1}{\phi_{E'}} \int_{E_g}^{E_{g+1}} v(E') \Sigma_f(E') \phi(r, E, t) dE \quad (1-73)$$

g) y la fracción de neutrones con energías en el intervalo del grupo g producidos por fisión.

$$\chi_g = \int_{E_g}^{E_{g+1}} \chi(E) dE \quad (1-74)$$

podemos entonces escribir la ecuación (1-67) como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{gg}} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \nabla \cdot D_g \nabla \phi_g - \Sigma_{dg} \phi_g(r, t) = \\ \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g} \phi_{g'} - \lambda_g \sum_{g'=1}^G v_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} - S_g \end{aligned} \quad (1-75)$$

para $g = 1, 2, \dots, G$

Escribamos la ecuación (1-75) para el caso en que tenemos estado estacionario

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{dg} \phi_g(r, t) = \\ = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{g'g} \phi_{g'} + \frac{\lambda_g}{K} \sum_{g'=1}^G v_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} \end{aligned} \quad (1-76)$$

en donde se ha incluido el factor de multiplicación, se ha supuesto que no existe fuente externa, que únicamente tenemos dispersiones a energías más bajas y se ha definido la sección eficaz de remoción del grupo g como:

$$\Sigma_{dg} - \Sigma_{dgg} = \Sigma_{rg} \quad (1-77)$$

Escribamos esta ecuación en forma matricial para G grupos de energía

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\nabla \cdot D_1 \nabla + \Sigma_{R1} & 0 & 0 & \dots \\ -\Sigma_{s12} & -\nabla \cdot D_2 \nabla + \Sigma_{R2} & 0 & \dots \\ -\Sigma_{s1j} & -\Sigma_{s2j} & -\nabla \cdot D_j \nabla + \Sigma_{Rj} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}}_\Phi$$

$$\approx \frac{1}{K} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \chi_1 \Sigma_{r1} & v_2 \chi_1 \Sigma_{r2} & \dots \\ v_1 \chi_2 \Sigma_{r1} & v_2 \chi_2 \Sigma_{r2} & \dots \\ v_1 \chi_3 \Sigma_{r1} & v_2 \chi_3 \Sigma_{r2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_F \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}}_\Phi \quad (1-78)$$

compacta o en forma

$$L\Phi = \frac{1}{K} F\Phi \quad (1-79)$$

Esta forma de la ecuación de multigrupos no es más que la representación de un problema de valor propio que por regla general se resuelve utilizando el método de las potencias. Esta metodología consiste en obtener una secuencia de aproximaciones del flujo fundamental en la forma siguiente:

$$L\psi^n = F\psi^{(n-1)} \quad (1-80)$$

calculando el eigenvalor como

$$K = \frac{F^T \psi^n}{F^T \psi^{(n-1)}} \quad (1-81)$$

Finalmente recalculamos el flujo fundamental como

$$\phi^n = \frac{\psi^{(n)}}{K^n} \quad (1-82)$$

Como puede verse en la ecuación (1-78) la matriz L es triangular inferior por lo que el primer paso de este método implica resolver la ecuación

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi + \Sigma_a \phi = S \quad (1-83)$$

para cada una de los grupos, es decir, deberemos resolver la ecuación de difusión considerando únicamente la dependencia espacial del flujo para cada uno de los grupos. En los siguientes capítulos se describe la técnica empleada para resolver este problema.

II METODOS NODALES

Hasta aquí hemos descrito brevemente la teoría que nos conduce a la ecuación de difusión la cual hemos discretizado para tomar en cuenta la dependencia con la energía, y el resultado obtenido han sido las ecuaciones de multigrupos. No obstante, no hemos hablado sobre la manera de resolver la ecuación de difusión ni siquiera en su forma monoenergética. Por supuesto, existe la posibilidad de resolver la ecuación de difusión en forma analítica para casos sencillos en los que el reactor se supone homogéneo. Sin embargo, en el diseño de reactores comerciales, los cálculos deben tomar en cuenta el hecho de que la composición del núcleo del reactor varía espacialmente, es decir, son heterogéneos.

En estos reactores deben tomarse en cuenta las heterogeneidades debidas al hecho de que existen pastillas de combustible, material del envainado, el moderador, refrigerante, barras de control y, para complicar las cosas, la mayoría de los reactores utilizan combustible de composición variable.

El procedimiento general es reescribir la ecuación de difusión discretizándola espacialmente utilizando alguna de las metodologías existentes y resolver el sistema de ecuaciones resultante.

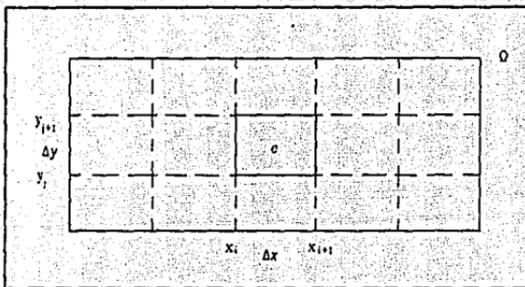
En el presente trabajo, utilizaremos los métodos nodales para la discretización de la ecuación de difusión para obtener el sistema de ecuaciones que deberemos resolver. En este capítulo describiremos estos métodos y sentaremos las bases para su aplicación en el siguiente capítulo.

2.1 ELEMENTOS FINITOS NODALES

Los métodos de elementos finitos nodales son métodos considerados intermedios entre los métodos de elementos finitos y los métodos de diferencias finitas. Introducidos a fines de la década de los 70's [3] en los cálculos de reactores nucleares; estos métodos poseen características que se consideran muy favorables heredadas de los métodos de diferencias finitas y de elementos finitos. Del método de diferencias finitas poseen la característica de producir sistemas de ecuaciones cuyas matrices son relativamente huecas lo que facilita su manipulación. Al igual que en el método de elementos finitos los métodos nodales aproximan la función de interés por una serie de funciones, normalmente polinomiales, dando por resultado una fórmula que permite el cálculo de la función en cualquier punto dentro del dominio de interés.

Aunque originalmente empleadas en el cálculo de reactores, estos métodos han sido usados en problemas en las que el método de diferencias finitas ha sido utilizado en forma tradicional en mallas más o menos regulares y en forma de rectángulos donde los coeficientes de la ecuación a resolver se suponen constantes en cada uno de ellos.

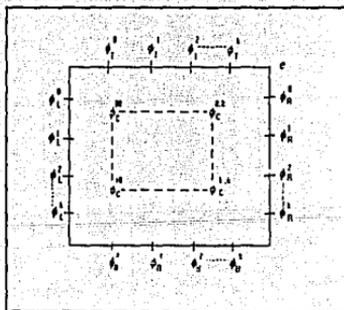
La base de la aproximación por elementos finitos nodales es la discretización del dominio de interés en subdominios o elementos.



Dentro del elemento finito e , ϕ se aproxima por funciones de la forma:

$$\phi^e = f^k(x_j, \phi_j^k), \quad i = L, R, B, T, C \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2-1)$$

Donde x_j son las variables independientes (x , y , en nuestro caso) y ϕ_j^k son los momentos de orden k de ϕ en la cara izquierda (Left) en la cara derecha (Right) en la cara inferior (Bottom) y en la cara superior (Top). Los valores nodales de la celda se designan por el subíndice C (Cell)



La forma más simple de aproximar la función es una forma lineal en los valores nodales ϕ^k y para este caso la ecuación (2.1) puede reescribirse como:

$$\phi^c = \sum u_i^k(x_j) \phi^k \quad \begin{matrix} i = L, R, B, T, C \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{matrix} \quad (2-2)$$

Donde las funciones $u_i^k(x_j)$ son las llamadas funciones base o de forma que se expresan como polinomios de x e y .

Para simplificar el análisis éste se acostumbra a realizar empleando una celda de referencia $\hat{c} = [-1, +1] \times [-1, +1]$ en las que las variables originales y las nuevas variables tienen la siguiente relación

$$\begin{aligned} x^i &= \frac{2x \cdot (x_j - x_{j+1})}{\Delta x} \\ y^i &= \frac{2y \cdot (y_j - y_{j+1})}{\Delta y} \end{aligned} \quad (2-3)$$

y en la formulación de las funciones base se emplean los polinomios de Legendre normalizados cuyas propiedades en el intervalo $[-1, +1]$ son:

$$\begin{aligned} P_n(+1) &= 1 \\ P_n(-1) &= (-1)^n \\ \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } n = m \end{cases} \end{aligned} \quad (2-4)$$

Los valores nodales se definen como:

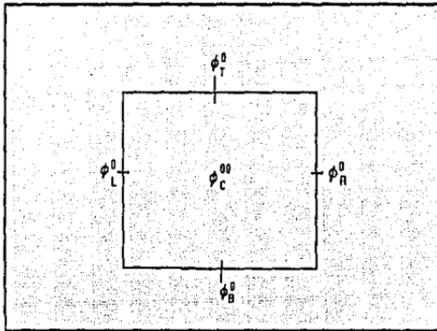
$$\begin{aligned}
\phi_k^x &= \frac{1}{N_k} \int_{-1}^1 P_k(y) u(-1, y) dy & k &= 0, 1, 2, \dots \\
\phi_k^y &= \frac{1}{N_k} \int_{-1}^1 P_k(y) u(-1, y) dy & k &= 0, 1, 2, \dots \\
\phi_k^x &= \frac{1}{N_k} \int_{-1}^1 P_k(x) u(x, -1) dx & k &= 0, 1, 2, \dots \\
\phi_k^y &= \frac{1}{N_k} \int_{-1}^1 P_k(x) u(x, -1) dx & k &= 0, 1, 2, \dots \\
\phi_{k\ell}^{xy} &= \frac{1}{N_k N_\ell} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_k(x) P_\ell(y) u(x, y) dx dy & k, \ell &= 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2-5}$$

donde: $N_k = \frac{2}{(2k+1)}$.

Las funciones base pueden obtenerse utilizando el triángulo de Pascal en el que los monomios $x^a y^b$ se representan en forma sistemática. En la referencia [4] se describe el algoritmo de obtención de estas funciones de forma utilizando el triángulo de Pascal. Los monomios $x^a y^b$ se combinan y se reemplazan por los polinomios de Legendre $P_{ab}(x, y)$. Para el caso en el que se toman los momentos de orden $k=0$ las funciones base pueden escribirse como [4], [5] :

$$\begin{aligned}
u_0^x(x, y) &= -\frac{1}{2} [P_1(x) - P_3(x)] \\
u_0^y(x, y) &= \frac{1}{2} [P_1(x) + P_3(x)] \\
u_0^{xy}(x, y) &= u_0^y(x, y) \\
u_0^x(x, y) &= u_0^y(x, y) \\
u_0^{xy}(x, y) &= 1 - P_3(x) - P_3(y)
\end{aligned} \tag{2-6}$$

que correspondería a un elemento con un valor nodal en cada cara y un valor nodal de celda.



La ecuación (2-2) puede escribirse para este caso como:

$$\dot{\phi}^c = u_L^0(x,y)\phi_L^0 + u_R^0(x,y)\phi_R^0 + u_T^0(x,y)\phi_T^0 + u_B^0(x,y)\phi_B^0 + u_C^0(x,y)\phi_c^{00} \quad (2-7)$$

De esta forma tenemos una fórmula para el flujo que podremos sustituir en la ecuación de difusión obtenida en el Capítulo I para obtener el sistema de ecuaciones que deberemos resolver. El resultado serán los valores nodales de los momentos de los flujos en cada una de las celdas que no son más que los coeficientes de la función de interpolación que acabamos de mencionar.

2.2 APLICACION A LA ECUACION DE DIFUSION

El método de elementos finitos requiere de la obtención de la forma débil de la ecuación que se va a resolver y que originalmente se encuentra en su forma fuerte. Se llama Forma Fuerte pues en ella aparecen derivadas parciales de segundo orden que actúan sobre la incógnita ϕ a diferencia de la forma débil en la que, como veremos, sólo existen derivadas de primer orden.

Para la obtención de la forma débil se multiplica la ecuación de difusión (ec. 1-31) por una función de prueba φ

$$-\varphi \nabla \cdot \mathcal{D} \nabla \phi + \varphi \Sigma \phi = \varphi S \quad (2-8)$$

integraremos ahora la ecuación (2-8) en el espacio Ω

$$-\int_{\Omega} \varphi \nabla \cdot \mathcal{D} \nabla \phi \, d\tau + \int_{\Omega} \varphi \Sigma \phi \, d\tau = \int_{\Omega} \varphi S \, d\tau \quad (2-9)$$

Integrando por partes el primer término de la ecuación (2-9), éste puede escribirse como:

$$-\int_{\Omega} \varphi \nabla \cdot \mathcal{D} \nabla \phi \, d\tau = -\int_{\Omega} \nabla(\varphi \cdot \mathcal{D} \nabla \phi) \, d\tau + \int_{\Omega} (\mathcal{D} \nabla \phi \cdot \nabla \varphi) \, d\tau \quad (2-10)$$

Aplicando el teorema de la divergencia sobre el primer término del miembro de la derecha podemos reescribir esta ecuación como:

$$-\int_{\Omega} \varphi \nabla \cdot \mathcal{D} \nabla \phi \, d\tau = -\int_{\mathcal{S}} \varphi \mathcal{D} \nabla \phi \, d\mathcal{S} + \int_{\Omega} (\mathcal{D} \nabla \phi \cdot \nabla \varphi) \, d\tau \quad (2-11)$$

Sustituyendo la ecuación (2-11) en (2-9), y reorganizando:

$$\int_{\Omega} (\mathcal{D} \nabla \phi \cdot \nabla \varphi + \Sigma \phi \varphi - S \varphi) \, d\tau - \int_{\mathcal{S}} \mathcal{D} \varphi \nabla \phi \, d\mathcal{S} = 0 \quad (2-12)$$

Para el caso en que la condición de frontera es de corriente cero (0) en la superficie, el segundo término de la ecuación (2-12) desaparece. Si tenemos una condición de frontera de vacío, este término desaparece también haciendo que la función φ cumpla con las mismas condiciones que la función original.

De esta manera la forma débil a la que llegamos es:

$$\int_{\Omega} (\mathcal{D} \nabla \phi \cdot \nabla \varphi + \Sigma \phi \varphi) \, d\tau = \int_{\Omega} S \varphi \, d\tau \quad (2-13)$$

Para resolver la ecuación (2-13) se supone que la solución verdadera ϕ puede aproximarse empleando una función ϕ_h que al sustituirse en la ecuación permite la evaluación de los parámetros o constantes de la función ϕ_h que harán que ésta se ajuste lo mejor posible a la solución verdadera.

El tipo de funciones empleadas con frecuencia son las series finitas, ya sea polinomiales o de otra forma. Podemos escribir ϕ_h como:

$$\phi_h = \sum_j^N \phi_j u_j \quad (2-14)$$

donde N es el número total de parámetros a determinar, u_j son las funciones base globales y ϕ_j para nuestro caso son los valores nodales de la función ϕ_j .

En el método de Galerkin [6], las funciones de forma o base globales se utilizan sucesivamente como funciones de prueba ϕ_i .

$$\phi = u_r \quad (2-15)$$

La ecuación (2-13) puede reescribirse como:

$$\int_{\Omega} \left[D \nabla \left(\sum_{j=1}^N \phi_j u_j \right) \cdot \nabla u_r + \sum_{j=1}^N \phi_j u_j u_r \right] dr = \int_{\Omega} S_n u_r dr \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (2-16)$$

Esta ecuación puede rearrreglarse a:

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \left[(D \phi_j \nabla u_j) \cdot \nabla u_r + \phi_j u_j u_r \right] dr = \int_{\Omega} S_n u_r dr \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (2-17)$$

Recordemos que la base del método de elementos finitos es la división del dominio de interés en subdominios de elementos o celdas cuya variable dependiente ϕ se representa por trozos en todo el dominio. En el caso de los elementos finitos "clásicos" la función solución en continua en los puntos de la malla, es decir es conforme, y la integral en todo el dominio planteada en la ecuación (2-17) es correcta. Sin embargo, en los elementos finitos nodales la función solución es continua en los momentos, es decir es no conforme, por lo que la ecuación (2-17) deberá reescribirse como:

$$\sum_{i=1}^{H_i} \sum_{j=1}^n \phi_j \int_{\Omega} (D \nabla u_j^k \cdot \nabla u_r + \sum u_j^k u_r) dr = \sum_{i=1}^{H_i} \sum_{j=1}^n S_i \int_{\Omega} u_j^k u_r dr \quad (2-18)$$

$r = 1, 2, 3, \dots, n$

donde:

- u_j son las funciones base locales
- n es el número de parámetros en una celda y,
- E es el número total de celdas.

Esta es la forma discreta de la ecuación de difusión que deseábamos obtener. El cálculo de las integrales correspondientes, tomando según el método de Galerkin la función de prueba u_r como las funciones base en forma sucesiva, nos conducirá a un sistema de ecuaciones de la forma

$$(K + M)\phi = AS$$

(2-19)

donde K es la llamada matriz de rigidez que contiene los términos provenientes de la integración de las derivadas espaciales; M es la matriz y que contiene a los elementos que son los términos sin derivada; A es la matriz que contiene los términos relacionados con la fuente mientras que los elementos de ϕ y S son los momentos de los flujos y fuente respectivamente tanto en las caras como en las celdas de todos los elementos del espacio de interés.

III SISTEMA DE ECUACIONES

Hasta ahora hemos avanzado en la solución del problema de calcular la distribución de potencia en un conjunto nuclear deduciendo la ecuación de difusión que hemos discretizado para obtener, por un lado, las ecuaciones de multigrupos en la que se toma en cuenta la dependencia del flujo neutrónico con la energía y por otro lado el sistema de ecuaciones en las que la dependencia espacial se toma en cuenta.

En el cálculo de reactores nucleares, sin embargo, ambas dependencias son tomadas en cuenta en un mismo sistema de ecuaciones, esto se realiza obteniendo la forma discretizada espacialmente de las ecuaciones de multigrupos. La obtención de la ecuación de multigrupos en forma discretizada no es diferente de la descrita en el capítulo II por lo que puede escribirse en forma directa.

En este capítulo describiremos la serie de pasos que conducirán a la obtención del sistema de ecuaciones utilizando dos procedimientos diferentes para obtener las integrales de la ecuación (2-18): integración exacta y cuadratura numérica. Los sistemas resultantes serán modificados para obtener sistemas más sencillos que serán resueltos utilizando un método iterativo.

3.1 PLANTEAMIENTO DEL SISTEMA DE ECUACIONES

Comencemos escribiendo la ecuación (2-18) para el caso bidimensional

$$\sum_{r=1}^E \sum_{i=1}^n \phi_j^r \int_r \left[D \left(\frac{\partial u_i^r}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + D \left(\frac{\partial u_i^r}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} \right) + \Sigma u_i^r \right] dx dy \quad (3-1)$$

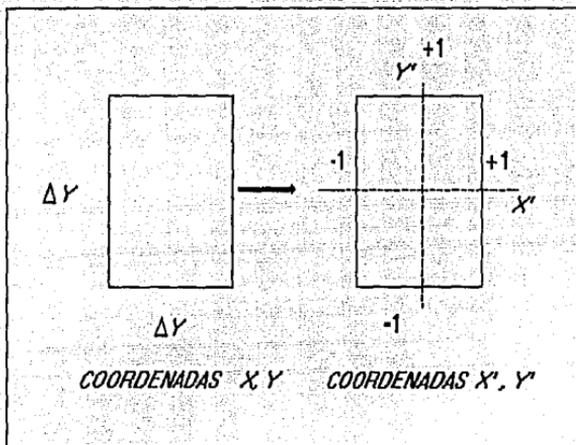
$$= \sum_{r=1}^E \sum_{i=1}^n S_j \int_r u_i^r dx dy ; \quad r=1,2,3,\dots,n$$

Consideremos el caso en el que se toman los momentos de orden cero en las caras del elemento o celda. Las funciones base que deberán utilizarse serán las descritas en la ecuación (2-6) y planteemos la integral del término con derivada x para la celda e . De acuerdo con el método de Galerkin [6] plantearemos la integral para el caso en que $u_i = u_L^0$

$$D \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left[\phi_L^0 \left(\frac{\partial u_L^0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_L^0}{\partial x} \right) + \phi_R^0 \left(\frac{\partial u_R^0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_L^0}{\partial x} \right) \right] dx dy \quad (3-2)$$

$$+ \phi_B^0 \left(\frac{\partial u_B^0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_L^0}{\partial x} \right) + \phi_T^0 \left(\frac{\partial u_T^0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_L^0}{\partial x} \right) + \phi_C^0 \left(\frac{\partial u_C^0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_L^0}{\partial x} \right) \Big] dx dy$$

Dadas las propiedades de los polinomios de Legendre, en términos de los cuales están las funciones base, es muy conveniente efectuar la integral empleando una celda de referencia.



La integral (3-2) puede reescribirse empleando las nuevas coordenadas y multiplicando por un factor de escala que para este caso resulta ser $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. De esta forma podemos escribir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} D \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[\phi_L^0 \left(\frac{\partial u_L^0}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial u_L^0}{\partial x'} \right) + \phi_R^0 \left(\frac{\partial u_R^0}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial u_L^0}{\partial x'} \right) + \phi_B^0 \left(\frac{\partial u_B^0}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial u_L^0}{\partial x'} \right) + \phi_T^0 \left(\frac{\partial u_T^0}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial u_L^0}{\partial x'} \right) + \phi_C^0 \left(\frac{\partial u_C^0}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial u_L^0}{\partial x'} \right) \right] dx' dy' \quad (3-3)$$

Expresiones similares pueden obtenerse para los casos en que u_i se iguale a u_R^0 , u_B^0 , u_T^0 y u_C^0 , sucesivamente, lo que nos dará por resultado cinco expresiones de la forma

$$k_{x1} \phi_L^0 + k_{x2} \phi_R^0 + k_{x3} \phi_B^0 + k_{x4} \phi_T^0 + k_{x5} \phi_C^0 \quad (3-4)$$

donde k_{in} son coeficientes que resultan de evaluar las integrales de la ecuación (3-3).

Utilizando el mismo procedimiento para el término de derivada en y se pueden obtener cinco expresiones como (3-3) y, al efectuar las integrales, cinco expresiones como (3-4). Para el caso del término sin derivadas la expresión equivalente a (3-3) sería

$$\frac{\Delta x \Delta y}{4} \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} \left[\phi_L^0 u_L^0 u_L^0 + \phi_R^0 u_R^0 u_L^0 + \phi_B^0 u_B^0 u_L^0 \right. \\ \left. + \phi_T^0 u_T^0 u_L^0 + \phi_C^{00} u_C^{00} u_L^0 \right] dx' dy' \quad (3-5)$$

donde el factor de escala es ahora $\frac{\Delta x \Delta y}{4}$. La expresión equivalente a (3-3) es

$$M_1 \phi_L^0 + M_2 \phi_R^0 + M_3 \phi_B^0 + M_4 \phi_T^0 + M_5 \phi_C^{00} \quad (3-6)$$

Para la evaluación de las integrales se utilizarán tres procedimientos diferentes:

- Evaluación exacta de integrales. Se sustituirán las ecuaciones (2-6) y las integrales se evaluarán en forma exacta.
- Evaluación de integrales empleando cuadratura numérica. Se sustituirán las ecuaciones (2-6) y las integrales correspondientes se evaluarán empleando una aproximación por cuadratura numérica de Radau.
- Evaluación de integrales por cuadratura numérica. Se evaluarán utilizando una aproximación por cuadratura numérica de Newton-Cotes para algunos elementos de la matriz de rigidez (K) y de Radau para la matriz de masa.

Estos procedimientos darán por resultado, al efectuarse la suma sobre todas las celdas, un sistema de ecuaciones de la forma:

$$[K_x + K_y + M] \phi = AS \quad (3-7)$$

donde K_x y K_y son conocidas como matrices, de rigidez asociadas a las direcciones x y y respectivamente mientras que a M se le conoce como matriz de masa. Localmente, es decir, a nivel de celda unitaria sus coeficientes están dados por:

$$K_T^c = D \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} \left(\frac{\partial u_i(x,y)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j(x,y)}{\partial x} \right) dx dy \quad (3-8)$$

$$K_{y\theta}^e = D \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial u_j(x, y)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \quad (3-9)$$

$$M_{\theta}^e = \Sigma_r \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} u_i(x, y) u_j(x, y) dx dy \quad (3-10)$$

donde el superíndice e indica que son matrices locales.

Para resolver el sistema de la ecuación (3-7) se despejarán primero los momentos de celda (ϕ_C^{00}) en función de los momentos en las caras (ϕ_i ; $i = L, R, B, T$). Esto puede hacerse debido a que, como se verá más adelante, los momentos de celda entre celdas diferentes no se encuentran "acoplados".

La expresión resultante para ϕ_C^{00} en función de los momentos en las caras se sustituirá en el resto de las ecuaciones para obtener el sistema en el que únicamente aparecen los momentos en las caras como incógnitas. Para resolver el sistema final se utilizará el método iterativo llamado de las potencias.

3.1.1 PRIMAL MATEMATICO

Para el caso en el que se calculan en forma exacta cada una de las integrales después de sustituir $u_r = u_i$ sucesivamente pueden obtenerse las matrices locales.

$$K_x^e = \frac{D \Delta y}{\Delta x} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

$$K_y^e = \frac{D \Delta x}{\Delta y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 12 \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

$$M^e = \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{4} \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & -\frac{2}{15} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{15} & \frac{8}{15} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{8}{15} & -\frac{2}{15} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{28}{5} \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

$$A^e = \frac{\Delta x \Delta y}{4} \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & -\frac{2}{15} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{15} & \frac{8}{15} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{8}{15} & -\frac{2}{15} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{15} & \frac{8}{15} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{28}{5} \end{pmatrix} \equiv M^T \Sigma \quad (3-14)$$

Donde el orden de las incógnitas es ϕ_L^0 , ϕ_B^0 , ϕ_B^0 , ϕ_T^0 y ϕ_C^{00} .

A partir de estas matrices locales pueden obtenerse las matrices globales. Debido a que para una celda dada las contribuciones en los momentos de celda únicamente provienen de la celda misma, es decir, no existe acoplamiento con otras celdas, tendremos que la ecuación correspondiente a la función base μ_C^{00} está dada por:

$$\begin{aligned}
& -6D \frac{\Delta y}{\Delta x} (\phi_L^0 + \phi_R^0) \\
& -6D \frac{\Delta x}{\Delta y} (\phi_B^0 + \phi_T^0) \\
& + 12D \phi_C^{\infty} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \\
& - \frac{2}{5} \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{4} (\phi_L^0 + \phi_R^0 + \phi_B^0 + \phi_T^0) \\
& + \frac{28}{5} \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{4} \phi_C^{\infty} \\
& = \frac{-2}{5} \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{4} (S_L^0 + S_R^0 + S_B^0 + S_T^0 + 14S_C^{\infty})
\end{aligned} \tag{3-15}$$

Así, podemos resolver para los momentos de celda

$$\phi_C^{\infty} = \frac{1}{\eta} \left[\epsilon (\phi_L^0 + \phi_R^0) + \zeta (\phi_B^0 + \phi_T^0) - \frac{2}{5} \theta (S_L^0 + S_R^0 + S_B^0 + S_T^0 + 14S_C^{\infty}) \right] \tag{3-16}$$

donde:

$$\eta = 12D \left[\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right] + \frac{28}{5} \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{4} \tag{3-17}$$

$$\epsilon = 6D \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{2}{5} \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{4} \tag{3-18}$$

$$\zeta = 6D \frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{2}{5} \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{4} \tag{3-19}$$

$$\theta = \frac{\Delta x \Delta y}{4} \tag{3-20}$$

Que al sustituir en el resto de ecuaciones podemos obtener:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ D \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{30} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \frac{\epsilon^2}{\eta} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \phi_L^0 \\ \phi_R^0 \end{Bmatrix} \\
 = & \left\{ -\frac{\epsilon}{\eta} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} [S_L^0 \ S_R^0 \ S_B^0 \ S_T^0]^T \\
 & + S_C^{00} (14\epsilon-1) [1 \ 1]^T \frac{\Delta x \Delta y}{10} - \frac{\epsilon \zeta}{\eta} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [\phi_b^0 \ \phi_d^0]
 \end{aligned} \tag{3-21}$$

y,

$$\begin{aligned}
 & \left\{ D \frac{\Delta x}{\Delta y} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{30} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \frac{\epsilon^2}{\eta} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \phi_B^0 \\ \phi_T^0 \end{Bmatrix} \\
 = & \left\{ -\frac{\epsilon}{\eta} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \frac{\Delta x}{\Delta y} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} [S_L^0 \ S_R^0 \ S_B^0 \ S_T^0]^T \\
 & + S_C^{00} (14\epsilon-1) [1 \ 1] \frac{\Delta x \Delta y}{10} - \frac{\epsilon \zeta}{\eta} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [\phi_L^0 \ \phi_H^0]^T
 \end{aligned} \tag{3-21a}$$

que en forma matricial pueden escribirse como:

$$B_H \phi_H = C_H S_T + S_C^{00} (14\epsilon-1) [1 \ 1]^T \frac{\Delta x \Delta y}{10} - \frac{\epsilon \zeta}{\eta} D_V \phi_V \tag{3-22}$$

$$B_V \phi_V = C_V S_T + S_C^{00} (14\epsilon-1) [1 \ 1]^T \frac{\Delta x \Delta y}{10} - \frac{\epsilon \zeta}{\eta} D_H \phi_H$$

donde:

$$D_H = D_V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-23}$$

$$\phi_H = \begin{bmatrix} \phi_L^0 \\ \phi_R^0 \end{bmatrix} \tag{3-24}$$

$$\phi_v = \begin{bmatrix} \phi_B^0 \\ \phi_T^0 \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

$$S_F = [S_L^0 \ S_R^0 \ S_B^0 \ S_T^0]^T \quad (3-26)$$

$$B_H = \left\{ D \frac{\Delta x}{\Delta y} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \frac{\epsilon^2}{\eta} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (3-27)$$

$$C_H = -\frac{\epsilon}{\eta} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \frac{\Delta x}{\Delta y} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

Las matrices B_V y C_V son iguales a B_H y C_H cambiando x por y ó viceversa.

De esta forma hemos obtenido el sistema de ecuaciones en el que hemos eliminado el momento del flujo en las celdas. Estas ecuaciones fueron programadas y el código resultante es llamado PRIMAT.

3.1.2 PRIMAL FISICO

Una de las características de los métodos de elementos finitos tipo nodales es que las matrices que se obtienen contienen pocos elementos igual a cero. Esto causa que el tiempo de CPU se incremente en forma importante cuando se usa esta técnica en la solución de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, se ha demostrado [11] que se pueden obtener matrices más huecas cuando las integrales se evalúan empleando la cuadratura de Radau de dos puntos.

Cuando las integrales se evalúan de esta forma el método es llamado nodal físico. El método nodal físico es aquél que resulta en un sistema de ecuaciones que podrían ser obtenidas empleando argumentos físicos y empleando las mismas funciones base (ecuación 2.6).

En la referencia [11] se muestra que el método nodal matemático (descrito en la sección anterior) es equivalente al método nodal físico cuando los coeficientes de las matrices de rigidez y masa se evalúan empleando la cuadratura de Radau de dos puntos cumpliendo, en promedio, con el balance en la celda y con la condición de continuidad de las corrientes entre celdas.

El procedimiento para el caso $k = 0$, se inicia obteniendo los ceros de las funciones base (ecuación 2-6) que resultan ser:

$$\left(\frac{-1}{3}, +1\right) \quad \text{para } u_L, u_D \quad (3-29)$$

$$\left(-1, \frac{-1}{3}\right) \quad \text{para } u_R, u_T$$

Empleamos, entonces, la cuadratura de Radau de dos puntos para la evaluación de los elementos de las matrices.

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{3}{2} f\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} f(+1)$$

para los acoplamientos horizontales

$$\int f(x) dx = \frac{3}{2} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} f(-1)$$

para los acoplamientos verticales.

En la evaluación los coeficientes de la matriz de rigidez empleando una cuadratura de Radau encontramos que, para el caso $k=0$, es necesario efectuar la integración de polinomios de segundo grado. Esto se debe a que, las funciones base son polinomios de segundo grado lo que al obtener su derivada se obtiene un polinomio de primer grado. Cuando se sustituyen en ecuación (3-8) y (3-9) se obtendrán polinomios de segundo grado.

Debido a que la cuadratura de Radau es exacta para polinomios de segundo grado podemos aprovechar los resultados de la sección anterior para la matriz de rigidez, por lo que los elementos de ésta son evaluados en forma exacta.

Cuando se evalúan los elementos de la matriz M^k las integrales empleando la cuadratura de Radau de dos puntos utilizando como puntos base los ceros correspondientes (ecuación 3-29) cada vez que aparezca una función base L, R, T ó B el resultado es cero. El único término que permanece es el correspondiente a $\int_r (u_C^{00})^2 dx dy$.

Para este elemento, la asimetría propia de la cuadratura de Radau, puede corregirse empleando la relación:

$$u_C^{00} = 1 + u_L^0 + u_R^0 + u_B^0 + u_T^0$$

por lo que si se emplean los ceros correspondientes tenemos

$$\int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} (u_C^{00})^2 dx dy = \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} dx dy = 4$$

que resulta ser al área de la celda unitaria.

La matriz de masa es, entonces:

$$M^e = \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (3-30)$$

La matriz A^e tendrá la misma forma que M^e y K_x^e y K_y^e son iguales a las mostradas en las ecuaciones (3-11) y (3-12).

Tenemos nuevamente un sistema "local" de cinco ecuaciones que, de acuerdo con el arreglo que hemos empleado en la sección anterior, la quinta ecuación será empleada para despejar los momentos de celda.

$$\phi_C^{00} = \frac{1}{\eta_m} [3\theta_x (\phi_2^0 - \phi_4^0) + 3\theta_y (\phi_2^0 - \phi_7^0) 2\theta_r S_C^{00}] \quad (3-31)$$

donde:

$$\eta_m = 6(\theta_x + \theta_y) + 2\theta_m \quad (3-32)$$

$$\theta_x = D \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3-33)$$

$$\theta_y = D \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (3-34)$$

$$\theta_m = \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{4}, \quad \theta_r = \frac{\Delta x \Delta y}{4} \quad (3-35)$$

que al sustituirse en las otras cuatro ecuaciones puede obtenerse:

$$\left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right] \theta_x - \frac{9\theta_x^2}{\eta_m} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \phi_6^0 \\ \phi_7^0 \end{array} \right] = \frac{6\theta_x \beta_x}{\eta_m} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] S_C^{00} - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \phi_6^0 \\ \phi_7^0 \end{array} \right] \quad (3-36)$$

$$\left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right] \theta_x - \frac{9\theta_x^2}{\eta_m} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \phi_8^0 \\ \phi_9^0 \end{array} \right] = \frac{9\theta_x \beta_x}{\eta_m} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] S_C^{00} - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \phi_8^0 \\ \phi_9^0 \end{array} \right] \quad (3-37)$$

Estas ecuaciones se emplean para modificar el programa PRIMAT y al programa resultante se le llamó PRIFIS.

3.1.3 DIFERENCIAS FINITAS CENTRADAS EN LA MALLA

Una estructura de las matrices locales idéntica a la que se obtendría si se empleara el método de diferencias finitas puede obtenerse si en la evaluación de algunos de los elementos de las matrices K_x^e y K_y^e , se emplea la cuadratura de Newton-Cotes abierta [5], [11]. El resto de los elementos de la matriz de rigidez, así como la matriz de masa se evalúan empleando procedimientos de integración por cuadratura numérica de Radau. En particular, la matriz de masa sería idéntica a la descrita en la ecuación (3-30).

Si empleamos el mismo esquema al de la sección anterior obtendríamos que la evaluación de las matrices K_x^e y K_y^e sería exacta. Las matrices son proporcionadas a $(P_1'(x)^2 - P_2'(x)^2)$ por lo que empleamos los ceros de $P_1'(x) \pm P_2'(x)$ (esto es $+\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{3}$) como puntos base podríamos obtener nuestro objetivo. La regla de cuadratura numérica que emplearemos será de Newton-Cotes abierta de 2 puntos, que es exacta para polinomios de primer grado. De esta forma en la evaluación de los elementos de la matriz K_x^e emplearemos la regla de Newton-Cotes de cuadratura numérica para que los acoplamientos en la dirección horizontal y de Radau para la dirección vertical. Para la matriz K_y^e lo haremos empleando la primera para los acoplamientos vertical y la ayuda para los acoplamientos horizontales.

Las matrices resultantes son:

$$k_x^e = \theta_x \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

$$K_y^e = \theta_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3-39)$$

En la referencia [11] se muestra que el sistema de ecuaciones obtenido mediante el procedimiento anterior, es idéntico al que se obtendría si el método de discretización empleado hubiese sido el de diferencias finitas centradas en malla.

Si empleamos además la matriz (3-30) podemos formar el sistema de ecuaciones y nuevamente podemos despejar los momentos de celda.

$$\phi_C^0 = \frac{1}{\eta_C} \theta_x (\phi_L^0 \cdot \phi_R^0) \cdot \theta_y (\phi_B^0 \cdot \phi_T^0) + 2\theta_x S_C^0 \quad (3-40)$$

donde:

$$\eta_C = 2(\theta_x \cdot \theta_y \cdot \theta_w) \quad (3-41)$$

por lo que al sustituir en el resto de las ecuaciones tenemos:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \theta_x - \frac{\theta_x^2}{\eta_C} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi_L^0 \\ \phi_R^0 \end{pmatrix} = 2\theta_x \theta_y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} S_C^0 + \frac{\theta_x \theta_y}{\eta_C} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_B^0 \\ \phi_T^0 \end{pmatrix} \quad (3-42)$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \theta_y - \frac{\theta_y^2}{\eta_C} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi_B^0 \\ \phi_T^0 \end{pmatrix} = 2\theta_x \theta_y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} S_C^0 + \frac{\theta_x \theta_y}{\eta_C} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L^0 \\ \phi_R^0 \end{pmatrix} \quad (3-43)$$

Este par de ecuaciones se emplean para modificar el Programa PRIMAT para obtener y resolver el sistema global del ecuaciones; al programa resultante se le llamó PRIDIF.

3.2 METODOLOGIA DE SOLUCION

Las ecuaciones (3-21) y (3-21a) para Primal Matemático, (3-36) y (3-37) para Primal Físico y (3-42) y (3-43) para diferencias finitas centradas en la malla, se utilizan para formar el sistema global de ecuaciones que puede escribirse en forma compacta como:

$$B\Phi = C\Phi \quad (3-44)$$

donde se ha reconocido el hecho de que la fuente es debida a fisiones. Para resolver este sistema

utilizaremos un procedimiento iterativo en el que supondremos un vector solución inicial Φ^{n-1} y resolvemos para el nuevo vector Φ^n por lo que podemos plantear la ecuación:

$$B\Phi^n = C\Phi^{n-1} \quad (3-45)$$

El sistema se resuelve en cada iteración utilizando una factorización de Cholesky [6]. El proceso termina cuando se cumple el criterio de convergencia. Una vez que la iteración converge se calculan los momentos de los flujos de celda ϕ_C^{00} utilizando la ecuación (3-16).

De esta forma habremos resuelto el problema bidimensional, sin embargo, esto es equivalente a resolver las ecuaciones de difusión para un sólo grupo de energía y como ya dijimos, es importante tomar en cuenta la dependencia del flujo neutrónico con la energía. Reescribimos las ecuaciones de multigrupos ecuación (1-78) en estado estacionario, eliminando la dependencia temporal y utilizando una forma más compacta.

$$L\Phi = \frac{1}{K} F\Phi \quad (3-46)$$

donde:

$$\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_G]^T \quad (3-47)$$

$$L = -\nabla \cdot D \nabla + S \quad (3-48)$$

$$F = \chi [\nu \Sigma_{n1}, \dots, \nu \Sigma_{nG}] \quad (3-49)$$

$$D = \text{diag} \{ D_1, \dots, D_G \} \quad (3-50)$$

en esta ecuación K es el eigenvalor o valor propio que en términos físicos es el factor de multiplicación efectivo. Para resolver el sistema de las ecuaciones utilizaremos el método de las potencias.

Este método consiste en obtener una secuencia de aproximaciones del flujo fundamental en la forma siguiente:

$$L\psi^n = F\psi^{(n-1)} \quad n = 1, 2, \dots, \text{para } \psi^{(0)} \text{ dado} \quad (3-51)$$

el eigenvalor se calcula entonces como:

$$K^{(a)} = \frac{F^T \Psi^a}{F^T \Phi^{(a-1)}} \quad (3-52)$$

y el flujo fundamental como:

$$\Phi^{(a)} = \frac{\Psi^{(a)}}{K^a} \quad (3-53)$$

Debido a que la matriz L es una matriz triangular inferior dado que no se consideran dispersiones a energías más altas, el cálculo del primer paso del procedimiento indicado por la ecuación (3-51) se reduce a resolver la ecuación de difusión para cada grupo, es decir:

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi + \Sigma \phi = S \quad (3-54)$$

pero esta ecuación es precisamente la que acabamos de resolver utilizando la metodología nodal.

Así el procedimiento de solución que emplearemos será:

- 1.- Resolver la ecuación de difusión considerando el caso bidimensional para cada uno de los G grupos de energía (iteración interna).
- 2.- Calcular el término de fuente utilizando los flujos recién calculados en el paso 1.
- 3.- Calcular el eigenvalor de acuerdo con la ecuación (3-53).
- 4.- Calcular el nuevo vector fundamental $\Phi^{(n)}$.
- 5.- Verificar convergencia del procedimiento. Si no hay convergencia regresar al paso 1 utilizando los flujos recién calculados como suposición inicial.

De esto forma resolvemos las ecuaciones de multigrupos considerando además la dependencia espacial que es el objetivo del presente trabajo.

Falta ahora describir los programas de computadora elaborados con este propósito. En el siguiente capítulo describiremos el programa para el caso en el que las integrales de la ecuación se calcularon en forma exacta (PRIMAT). Para los casos en que la matriz M se evaluó empleando una cuadratura numérica de Radau (PRIFIS) y en el que se empleó una cuadratura numérica para evaluar las matrices K y M (PRIDIF) solo se describen brevemente los programas. El procedimiento, no obstante, es el mismo y los programas son idénticos a excepción de las subrutinas que calculan las matrices globales.

IV DESCRIPCION DEL PROGRAMA

En los capítulos anteriores se ha descrito la metodología empleada en la solución de las ecuaciones de multigrupos. La dependencia espacial del flujo de neutrones se toma en cuenta requiriéndose un algoritmo iterativo para resolver la ecuación de difusión para el grupo g ($g = G...1$). La dependencia con la energía se toma en cuenta y se emplea el método de las potencias para resolver el sistema de ecuaciones.

En el presente capítulo describiremos brevemente el programa de cómputo que resuelve la ecuación de difusión en dos dimensiones tomando en cuenta la dependencia energética. Como se mencionó antes, se emplearon tres formas diferentes para efectuar las integrales por lo que se presentan tres programas prácticamente iguales excepto en el cálculo de las matrices globales.

4.1 PROGRAMA PRINCIPAL

En el programa PRIMAT las matrices globales son el resultado de efectuar las integrales de la ecuación (3-1) en forma exacta. El programa está formado por las subrutinas y funciones que se muestran en el diagrama de la Fig. 4.1.

En PRIMAT se lee la información de control del cálculo: materiales, condiciones de frontera, número de grupos de energía y número de puntos que tendrá la malla en los ejes x y y . Una vez leída esta información se determina el espacio de memoria requerido y la subrutina CMCTRL efectúa una verificación inicial, en caso de que sea excesiva, el programa parará escribiendo el mensaje SE REQUIERE DEMASIADA MEMORIA. Si existe suficiente memoria PRIMAT invoca a INPSTA para que se efectúe la lectura de datos. Esta subrutina lee los datos geométricos, la composición de cada uno de los elementos o celdas en las que se discretizó el problema, las secciones eficaces (de remoción, dispersión y de fisión) y los parámetros de iteración. INPSTA termina imprimiendo la información según fue leída para revisión posterior.

Con todos los datos ya leídos se hace una segunda determinación de la memoria requerida y nuevamente se invoca a CMCTRL para verificar que las necesidades de memoria no sean excesivas.

Finalmente, PRIMAT invoca a STATIC que efectuará el cálculo del factor de multiplicación y de la distribución de flujo para el problema descrito en los datos de entrada.

4.1.1 CALCULO ESTATICO

La subrutina **STATIC** efectúa el cálculo del factor de multiplicación efectivo y la distribución del flujo para el caso bidimensional descrito en los datos de entrada. Esta subrutina comienza el cálculo ajustando el número de iteraciones externas, variable **ITEX**, y el factor de multiplicación, variable **FLAMDN**, a cero y número total de fisiones, variable **FRN**, a uno. La distribución de flujo se supone plana al principio del cálculo por lo que los valores de los flujos se fijan a uno invocando a la subrutina **INVAL**.

Una vez fijados los valores iniciales para los flujos **STATIC** invoca a **CALMAH** para calcular la matriz global de los flujos horizontales utilizando la ecuación (3-21). Esta matriz es factorizada posteriormente invocando la subrutina **CHOBNT** que efectúa una factorización de Cholesky. El mismo procedimiento se ejecuta para construir la matriz de los momentos de los flujos verticales utilizando el lado izquierdo de la ecuación (3-21a), invocando la subrutina **CALMAV** y factorizándole posteriormente invocando a **CHOBNT**.

Utilizando la suposición inicial del momento de flujo en las celdas se calcula el total de fisiones (**FRI**) utilizando la función **RR**. Los momentos de los flujos horizontales, verticales y de celda para todas los grupos de energía se normalizan dividiéndose entre la tasa de fisión total calculada por **RR**. Estos flujos normalizados son copiados a los vectores que almacenan los valores "viejos", es decir aquellos que en el proceso iterativo guardarán la información de la iteración $n-1$, esto se efectúa invocando la subrutina **EQUAL**.

4.1.2 ITERACION EXTERNA

Se inicia entonces la iteración externa sobre todos los grupos de energía. Los momentos de los flujos normalizados calculados en el iteración anterior se copian a **EQUAL**, a vectores auxiliares que serán utilizados durante el cálculo. El valor inicial del número de iteraciones internas se fija a cero (0) y se efectúa el cálculo de la solución de la ecuación de difusión para cada uno de los grupos de energía en la interacción interna. Una vez que el flujo de neutrones correspondiente a las iteraciones internas converge dando como resultado los momentos de los flujos verticales y horizontales se calculan los momentos de los flujos de celda ϕ_c^{00} invocando la subrutina **CALFLX** que utiliza la ecuación (3-16) para este cálculo.

Los momentos de los flujos calculados en la iteración interna son copiados, invocando la subrutina **EQUAL**, a los vectores que almacenan los valores calculados en la iteración externa anterior. Utilizando los flujos de celda recién calculados se determina el nuevo número total de fisiones **FRN** invocando la función **RR**.

Podemos ahora calcular el factor de multiplicación nuevo (FLAMDN) dividiendo la tasa de fisión calculada recientemente entre la tasa de fisión de la iteración externa anterior (FRN/FRO). Esto no es más que la utilización de la ecuación (3-52) para el cálculo del eigenvalor en el método de las potencias descrito en el capítulo anterior.

Se calcula entonces el error en el factor de multiplicación entre dos iteraciones externas sucesivas (variable EPSK). El nuevo momento de los flujos de celda se calcula utilizando la ecuación (3-53) y el error en el factor de multiplicación se compara con el criterio de convergencia dado por el usuario del programa en el archivo de datos, si se cumple el criterio o el número de iteraciones externas es superior al valor máximo permitido la iteración externa termina y se imprimen resultados.

4.1.3 ITERACION INTERNA

En las iteraciones internas se calcula la solución de la ecuación de difusión para un grupo de energía dado. Estas iteraciones se inician fijando el valor inicial del número de iteraciones internas a cero (0) e incrementando el contador en uno (1). Se invoca entonces a la subrutina CALSOH para que efectúe el cálculo del término de la derecha de la ecuación (3-21) utilizando como suposición inicial una distribución plana de flujo neutrónico. El vector resultante es utilizado entonces para resolver para los flujos horizontales invocando la subrutina CHOBNS que efectúa una sustitución hacia adelante y hacia atrás aprovechando el resultado proveniente de CALSOH y de la factorización ya ejecutada en STATIC de la matriz global calculada con CALMAH.

El procedimiento se repite ahora con los flujos verticales: se invoca a CALSOV para el cálculo del término de la derecha de la ecuación (3-21a) y resolviendo el sistema invocando a CHOBNS utilizando la factorización de la matriz global de los flujos verticales efectuada en STATIC.

Se calcula entonces el error máximo de los flujos verticales y horizontales invocando sucesivamente a la subrutina ERROR que compara los flujos recién calculados con los de la iteración anterior y determina el error máximo en los flujos horizontales y flujos verticales. Se utiliza la función ERMAX para determinar el error máximo de los dos obtenidos y éste se compara con el criterio de convergencia.

Los flujos verticales y horizontales recién calculados se copian al vector que almacena los flujos de la iteración anterior. Si el resultado de la comparación del error máximo con el criterio de convergencia es positivo, es decir, el error máximo, es menor que el error permitido o si el número de iteraciones internas es superior al máximo permitido la iteración termina y se inicia la de un nuevo grupo de energía. Una vez que todos los grupos de energía han sido resueltos se termina la iteración interna.

4.2 PROGRAMAS PRIFIS Y PRIDIF

Este par de programas se prepararon utilizando las aproximaciones descritas en las secciones 3.1.2 y 3.1.3. Las integrales de las matrices M y K se calculan utilizando alguna de las cuadraturas numéricas de Radau o de Newton-Cotes. Todo lo descrito en la Sección 4.1 para el programa PRIMAT es valido para PRIFIS y PRIDIF. Las diferencias existentes entre los tres programas se encuentran en las subrutinas CALFLX, CALMAH, CALMAV, CALSOH y CALSOV. Estas para PRIFIS y PRIDIF se listan en el anexo A-8 y A-9, respectivamente. En ellas se han programado las ecuaciones descritas en las secciones 3.1.2 para PRIFIS y 3.1.3 para PRIDIF.

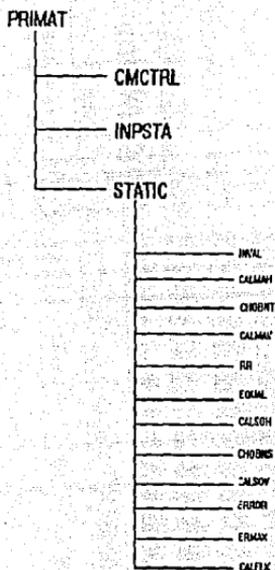


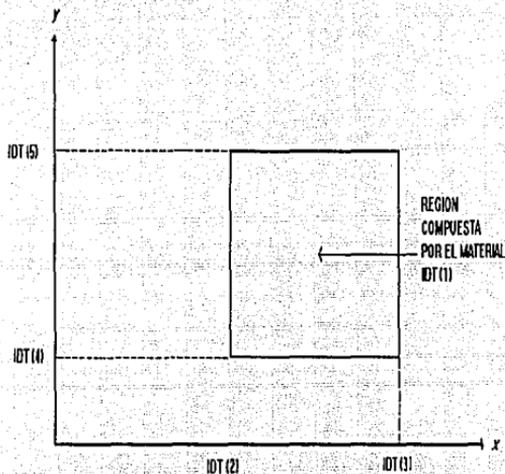
FIGURA 4.1 DIAGRAMA DEL PROGRAMA PRIMAT

4.3 DESCRIPCION DEL ARCHIVO DE DATOS

Para efectuar la ejecución de PRIMAT, PRIFIS o PRIDIF debe crearse un archivo de entrada que contenga los datos del programa. A continuación se explican cada una de las variables que deben proporcionar para modelar un problema dado.

TITLE	Se escribe el título del problema con un máximo de cincuenta caracteres.
NMA, NGR, NPX, NPY, NLBC, NRBC, NBBC, NTBC	
donde:	
NMA	Número de materiales diferentes que constituyen el reactor.
NGR	Número de grupos de energía.
NPX	Número de puntos de la malla en la dirección x.
NPY	Número de puntos de la malla en la dirección y.
NLBC	Condición de frontera a la izquierda. Si NLBC = 0 el flujo de neutrones se supone cero en la cara izquierda. Si NLBC = 1 la corriente de neutrones se supone cero.
NRBC	Condición de frontera a la derecha. Si NRBC = 0 el flujo de neutrones se supone cero en la cara derecha. Si NRBC = 1 la corriente de neutrones se supone cero en la cara derecha.
NBBC	Condición de frontera abajo. Si NBBC = 0 el flujo de neutrones se supone cero en la cara de abajo. Si NBBC = 1 la corriente de neutrones se supone cero en la cara de abajo.
NTBC	Condición de frontera arriba. Si NTBC = 0 el flujo de neutrones se supone cero en la cara de arriba. Si NTBC = 1 la corriente de neutrones se supone cero en la cara de arriba.
IDT(I) I = 1,2,...5	
IDT(1)	Número de identificación del material.
IDT(2)	Límite izquierdo de la región compuesta del material IDT(1).

- IDT(3) Límite derecho de la región compuesta por el material IDT(1).
- IDT(4) Límite inferior de la región compuesta por el material IDT(1).
- IDT(5) Límite superior de la región compuesta por el material IDT(1).



Utilizando una secuencia de cinco números se describe la forma en que están distribuidos los diferentes materiales que constituyen el reactor. La secuencia se repite para cada una de las regiones del reactor.

Una vez que se ha terminado de suministrar estos datos se escribe una secuencia con cinco ceros.

SR (K,N) K = 1 ... NGR, N = 1 ... NMA

SR (K,N) Sección eficaz macroscópica de remoción en cm^{-1} para el grupo de energía K del material N.

SF (K,N) K = 1 ... NGR, N = 1 ... NMA

SF (K,N) Producto de la sección eficaz macroscópica de fisión en cm^{-1} por el número promedio de neutrones producidos por fisión en el grupo de energía en el material N.

XI (K,N), K = 1 ... NGR, N = 1 ... NMA

XI (K,N) Componente del espectro de fisión normalizado para el grupo de energía K del material N.

S (K,r), K = 1 ... NGR, N = 1, r = 1 ... R

S (K,r) Componente de la fuente de neutrones en la región r con energías en el grupo K.

SS (K,L,N), K = 1 ... NGR, N = 1 ... NMA

SS (K,L,N) Sección eficaz macroscópica de dispersión del grupo de energía L al grupo de energía K. ($-\Sigma_g^{L \rightarrow K}$ para $g' \neq g$) del material N.

NOUT, EPSK

NOUT Número máximo de iteraciones externas.

EPSK Error máximo en K_{eff} .

0, 0, 0, 0, 0, 0.

Se finaliza el archivo de datos escribiendo una línea con seis o más ceros.

4.4 RESULTADOS

Los programas PRIMAT, PRIFIS y PRIDIF fueron probados ejecutándolos utilizando problemas que se usan en la literatura para probar este tipo de programas. Los datos geométricos, secciones eficaces y otros parámetros se presentan en el anexo A.1 al A.6 del apéndice.

En total se emplearon cinco casos diferentes:

- 1.- Reactor homogéneo.
- 2.- Reactor de dos zonas.

- 3.- Reactor de cría enfriado con metal líquido.
- 4.- Reactor poco acoplado.
- 5.- Problema TWIGLE.

Para cada uno de éstos, se prepararon diferentes archivos de datos en los que se varia el tamaño de la malla empleada. Para el caso de reactor homogéneo se emplearon cuatro diferentes mallas dependiendo del número de divisiones en la dirección x ó en la dirección y .

- a) Malla 2 x 2.
- b) Malla 4 x 4.
- c) Malla 8 x 8.
- d) Malla 16 x 16.

Los resultados se presentan en la Tabla 4.1. Para mallas gruesas el programa PRIDIF Obtiene el mejor resultado en la Keff aunque ejecuta más iteraciones externas y consume un poco más de tiempo de CPU. Para mallas más finas PRIMAT obtiene buenos resultados pero con un consumo de CPU mayor. PRIFIS por lo general se mantiene en un punto intermedio.

La Tabla 4.2 presenta los resultados obtenidos para el problema del reactor con dos zonas. Al igual que en el caso homogéneo se emplearon 4 mallas diferentes. Puede observarse que en todos los casos PRIMAT obtiene los mejores resultados aunque consume mucho más tiempo de CPU. El resultado obtenido con PRIDIF con la malla más fina es bastante bueno, aunque cuando el error es muy alto el tiempo de CPU es muy bajo comparado con los empleados por PRIMAT y PRIFIS.

Para un reactor de cría los resultados son aceptables. La tabla 4.3 muestra los resultados obtenidos para un reactor de este tipo nuevamente PRIMAT siempre obtiene los mejores resultados aunque con un consumo alto de tiempo de CPU.

La Tabla 4.4 muestra los resultados para el caso de un reactor poco acoplado. La distribución de flujo neutrónico tiene una forma complicada. Por lo que este problema es muy sensible a la malla empleada. Las mallas en este problema empleadas fueron 5 x 5, 10 x 10 y 20 x 20.

Puede verse que PRIMAT obtiene nuevamente los mejores resultados aunque a mallas muy gruesas el error es muy grande. Esto es lógico, debido a lo complicado de la forma del flujo neutrónico en el reactor poco acoplado.

Finalmente en el problema TWIGLE se obtiene resultados aceptables según se muestran en la Tabla 4.5. En este problema podemos ver muy buenos resultados para la malla 7 x 7 con el programa PRIMAT mientras que para la malla 13 x 13 PRIDIF obtiene los mejores resultados. PRIFIS en todos los casos da resultados intermedios al compararse con PRIMAT y PRIDIF.

4.5 CONCLUSIONES

En general como era de esperarse PRIMAT obtiene los mejores resultados aunque a un costo muy superior en tiempo de CPU al de PRIFIS y PRIDIF. En el caso homogéneo es el único en el que PRIDIF y PRIFIS son mejores tanto en consumo y recursos como en el resultado obtenido.

Los códigos PRIFIS y PRIMAT consumen poco tiempo de CPU y con una malla adecuada, pueden obtener buenos resultados, por lo que son muy atractivos para problemas en los que los gradientes en los flujos no sean muy importantes. Esto es consecuencia del uso de cuadraturas numéricas en la evaluación de las integrales para la obtención de las matrices K' y M' , así como de la propia aproximación por la teoría de difusión.

Los programas PRIFIS y PRIMAT puede emplearse durante el diseño para efectuar cálculos aproximados y aún para cálculos finales si la malla se selecciona en forma adecuada. La ventaja obvia es la reducción de tiempo de CPU que los hace atractivos para su uso en programas de seguimiento del núcleo durante operación normal. Tal es el uso que actualmente se está dando a programas con tratamiento tridimensional como PRESTO [9] y que podría ser sustituido por uno de manufactura nacional.

TABLA 4.1 RESULTADOS PARA EL PROBLEMA ANL.HOM

REACTOR HOMOGENEO
Keff BENCHMARK : 1.465387

PROGRAMA	PRIMAT	PRIFIS	PRIDI1
MALLA 2X2			
CPU	1.61*	1.19*	1.26*
ITEX	27	20	32
EPSK	9.9E-06	8.2E-06	8.5E-06
Keff	1.543669	1.450730	1.479687
ERR %	5.34E00	1.E00	9.7E-01
MALLA 4X4			
CPU	4.92*	2.54*	1.94*
ITEX	35	74	38
EPSK	8.7E-06	9.6E-06	9.9E-06
Keff	1.483331	1.461674	1.468957
ERR %	1.22E00	2.5E-01	2.4E-01
MALLA 8X8			
CPU	38.55*	15.30*	8.24*
ITEX	74	74	38
EPSK	9.6E-6	9.4E-6	9.1E-06
Keff	1.469493	1.464183	1.466184
ERR %	2.8E-01	8.2E-02	5.4E-02
MALLA 16X16			
CPU	646.84*	236.43*	19.39*
ITEX	242	244	95
EPSK	9.76E-06	9.6E-06	8.9E-06
Keff	1.465194	1.463940	1.465214
ERR %	1.31E-02	9.8E-02	1.18E-02

TABLA 4.2 RESULTADOS PARA EL PROBLEMA ANL.TZ

REACTOR CON DOS ZONAS
 Keff BENCHMARK : 1.197399

PROGRAMA	PRIMAT	PRIFIS	PRIDIF
MALLA 2X2			
CPU	1.69"	1.27"	1.14"
ITEX	18	15	14
EPSK	9.7E-07	6.6E-07	3.5E-07**FIX** 6.12E00 1.45E01
MALLA 4X4			
CPU	7.09"	3.39"	2.44"
ITEX	25	24	19
EPSK	9.8E-07	8.8E-07	5.7E-07
Keff	1.208305	1.217934	1.256131
ERR %	9.1E-01	1.71E00	4.9E-00
MALLA 8X8			
CPU	1'12.59"	28.15"	14.26"
ITEX	56	57	27
EPSK	7.9E-07	8.9E-07	7.8E-07
Keff	1.200275	1.202531	1.211832
ERR %	2.4E-01	4.3E-01	1.2E-00
MALLA 16X16			
CPU	15'15.64"	543.08"	276.83"
ITEX	170	176	66
EPSK	8.9E-07	9.9E-07	9.9E-07
Keff	1.197958	1.198560	1.200667
ERR %	4.6E-02	9.6E-02	2.7E-01

TABLA 4.3 RESULTADOS PARA EL PROBLEMA ANL.LMF

REACTOR DE CRIA
Keff BENCHMARK : 1.05699

PROGRAMA	PRIMAT	PRIFIS	PRIDIF
MALLA 4X5			
CPU	13.55"	3.44"	3.69"
ITEX	63	35	50
EPSK	8.9E-07	4.5E-07	6.5E-07
Keff	1.062334	1.06009	1.09379
ERR %	5.2E-01	2.9E-01	3.48E-00
MALLA 7X9			
CPU	1'12.8"	20.12"	15.48"
ITEX	57	52	55
EPSK	7.9E-07	4.5E-07	7.8E-07
Keff	1.05841	1.05879	1.06717
ERR %	1.3E-01	1.7E-01	9.6E-01
MALLA 13X17			
CPU	10'56.89"	2'49.25"	1'40.36"
ITEX	51	52	57
EPSK	7.9E-07	2.2E-07	1.1E-07
Keff	1.057343	1.05771	1.05945
ERR %	3.3E-02	6.8E-02	2.3E-01

TABLA 4.4 RESULTADOS PARA EL PROBLEMA ANLLC

REACTOR POCO ACOPLADO
Keff BENCHMARK : 0.750692

PROGRAMA	PRIMAT	PRIFIS	PRIDIF
MALLA 5 x 5			
CPU	2.81"	2.16"	1.77"
ITEX	26	27	18
EPSK	9.9E-05	9.1E-05	8.5E-05
Keff	0.900203	0.914369	0.260639
ERR %	1.91E01	2.8E01	4.62E01
MALLA 10 x 10			
CPU	13.19"	5.31"	3.66"
ITEX	26	25	15
EPSK	8.7E-05	9.4E-05	8.9E-05
Keff	0.7618348	0.773542	0.835787
ERR %	1.48E00	3.04E00	1.13E01
MALLA 20 x 20			
CPU	1'53.09"	43.46"	23.62"
ITEX	26	25	15
EPSK	8.7E-05	9.4E-05	8.9E-05
Keff	0.752060	0.755481	0.835787
ERR %	1.8E-01	6.4E-01	2.67E00

TABLA 4.5 RESULTADOS PARA EL PROBLEMA ANL.TW

REACTOR TWIGLE
Keff BENCHMARK : 0.91321

PROGRAMA	PRIMAT	PRIFIS	PRIDIF
MALLA 4X4			
CPU	3.84"	2.37"	1.79"
ITEX	55	53	47
EPSK	9.12E-07	1.6E-07	9.8E-07
Keff	0.91498	0.90070	0.92719
ERR %	1.9E-01	1.36E00	1.53E00
MALLA 7X7			
CPU	19.39"	8.29"	5.98"
ITEX	66	65	57
EPSK	8.5E-07	8.5E-07	9.7E-07
Keff	0.91385	0.90640	0.91603
ERR %	7.E-02	6.2E-01	3.E-01
MALLA 13X13			
CPU	239.92"	11.06"	33.33"
ITEX	91	99	69
EPSK	9.7E-07	8.5E-07	9.7E-07
Keff	0.91335	0.91097	0.91324
ERR %	1.5E-02	2.4E-01	9.26E-03

APENDICE

A continuación se describen los problemas empleados para probar los programas de cómputo descritos en el presente trabajo. Las descripciones para los primeros cuatro problemas fueron tomadas de la referencia [7].

A.1 REACTOR HOMOGENEO

En este problema se estudia un cuarto de un reactor homogéneo y se consideran dos grupos de energía. Podemos plantear la ecuación (1-76)

$$\begin{aligned}
 -D_1 \nabla^2 \phi_1 - \Sigma_{R1} \phi_1 &= \frac{1}{k} \chi_1 [(\nu \Sigma_f)_1 \phi_1 + (\nu \Sigma_f)_2 \phi_2] \\
 -D_2 \nabla^2 \phi_2 - \Sigma_{R2} \phi_2 &= \Sigma_{12} \phi_1 - \frac{1}{k} \chi_2 [(\nu \Sigma_f)_1 \phi_1 \\
 &\quad + (\nu \Sigma_f)_2 \phi_2]
 \end{aligned} \tag{A-1}$$

Las condiciones frontera son: que la corriente en las caras que colinden con otras porciones del reactor debe ser igual a cero i.e.

$$\left. \frac{\partial \phi_g}{\partial x} \right|_{x,y} = \left. \frac{\partial \phi_g}{\partial y} \right|_{x,y} = 0 \quad ; \quad g = 1,2 \tag{A-2}$$

y en las otras caras supondremos condición de vacío i.e.

$$\phi_g(x,L) = \phi_g(L,y) = 0 \quad ; \quad g = 1,2 \tag{A-3}$$

donde L es la longitud de la cara del cuarto de núcleo. Estas ecuaciones pueden resolverse analíticamente y obtener el factor de multiplicación como:

$$\begin{aligned}
 K_{eff} &= [\chi_1 (\nu \Sigma_f)_1 + \chi_1 (\nu \Sigma_f)_2 \Sigma_{12} \\
 &\quad + \chi_2 (\nu \Sigma_f)_2] (D_1 B^2 + \Sigma_{R1}) (D_2 B^2 + \Sigma_{R2})
 \end{aligned} \tag{A-4}$$

y la eigenfunción como:

$$\phi(x,y) = A_x \cos \frac{\pi x}{2L} \cos \frac{\pi y}{2L} \cos \frac{\pi y}{2L} ; \quad g = 1.2 \quad (A-5)$$

donde las constantes A_k dependen de la normalización empleada. Cuando se utilizan las constantes listadas en la tabla A-1 y $L = 50.05 \text{ cm}$ podemos calcular el factor de multiplicación como:

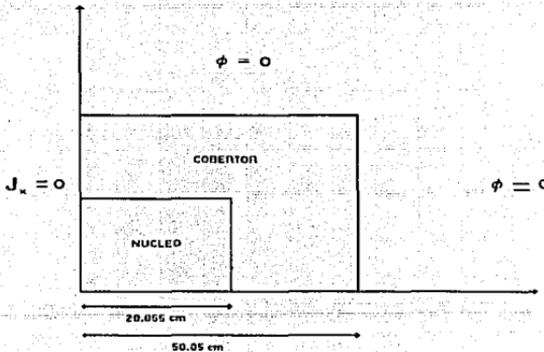
$$K_{eff} = 1.465387384104$$

A.2 REACTOR CON DOS ZONAS.

Este problema es igual que el anterior pero tiene dos zonas con diferente material.

La K_{eff} obtenida para estas configuración de acuerdo con la referencia [7] cuando se emplean las constantes de la tabla A-1 es:

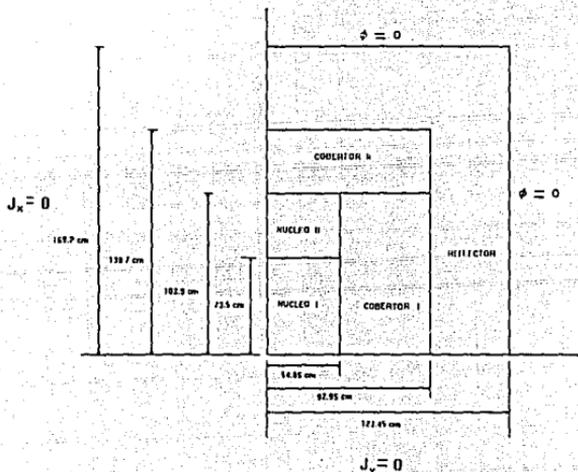
$$K_{eff} = 1.19739966$$



A.3 REACTOR RAPIDO DE CRIA ENFRIADO CON METAL LIQUIDO (LMFBR)

Este reactor posee las características básicas de un LMFBR con una potencia nominal de 2400 MW. Las fracciones del volumen total correspondientes al combustible, sodio y acero inoxidable son 0.42, 0.37 y 0.21, respectivamente.

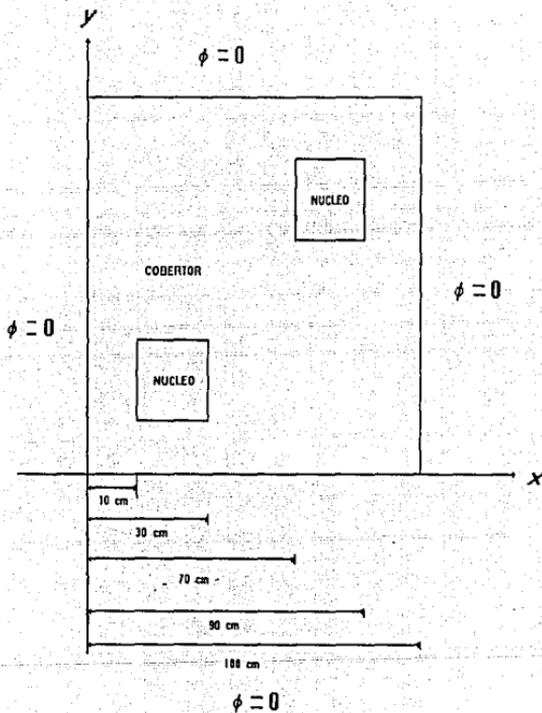
Las constantes nucleares para cuatro grupos se listan en la tabla A-1 bajo los nombres de Núcleo I, Núcleo II, Cobertor I y Reflector.



El factor de multiplicación de acuerdo con la referencia [7] es 1.0569955 .

A.4 CONFIGURACION DE REACTOR POCO ACOPLADO.

La configuración de este problema es la siguiente

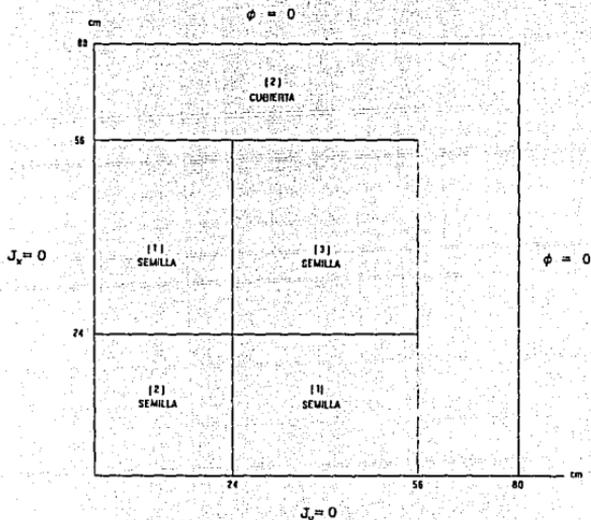


Las constantes para dos grupos se muestran en la tabla A-1 bajo el nombre de Núcleo y Cobertor y la K_{eff} de esta configuración de acuerdo con la referencia [7], es:

$$K = 0.750692$$

A.5 PROBLEMA BIDIMENSIONAL TWIGL [8]

Este problema describe un reactor de cría y aunque es empleado como prueba para problemas cinéticos se puede emplear para probar un código estático. La constante de multiplicación es 0.91321 según la referencia [8].



Las constantes se listan en la tabla A-1 bajo el nombre de MATERIAL 1 y 2.

A.6 TABLA A.1 DATOS NUCLEARES EMPLEADOS EN LAS EJECUCIONES DE PRUEBAS [7, 8, 10]

MATERIAL GRUPO G	D	SR	SP	SI	GP	SS GP G1	GP	SSGP G1	GP	SSGP P1
NUCLEO	1	2.880035	0 014377	0 030834	0 575					
	2	1.578767	0 014496	0 0252	0 425	1	0 040792			
COBERTOR	1	1.549689	0 112025	0 052464	0 575					
	2	1.094365	0 099667	0 082542	0 425	1	0 089949			
NUCLEO 1	1	2.854941	0 044404	0 017811	0 58153					
	2	1.501986	0 007377	0 004777	0 30219	1	0 017413			
	3	0 956257	0 010728	0 03681	0 02618	1	0 020191	2	0 004158	
	4	0 94979	0 028286	0 014478	0 000219	1	1 31e-08	2	1 07e-07	3
NUCLEO 2	1	2.856442	0 044312	0 019505	0 58153					
	2	1 503956	0 008021	0 008198	0 40819	1	0 037094			
	3	0 953464	0 011457	0 000809	0 001618	1	0 000183	2	0 004151	
	4	0 933461	0 032094	0 031506	0 000219	1	1 36e-08	2	1 08e-07	3
REGION DEL REFLECTOR	1	2 945423	0 030878							
	2	1 876715	0 003255				0 030282			
	3	0 908142	0 042851				0 004072	2	0 001815	
	4	0 809975	0 004302							0 00163
COBERTOR 1	1	2 717089	0 047747	0 014126	0 58153					
	2	1 433906	0 006451	0 000638	0 40819	1	0 041965			
	3	0 917867	0 008724	0 001073	0 001618	1	0 000231	2	0 004317	
	4	0 965572	0 016173	0 004265	0 000219	1		2	1 76e-07	3
COBERTOR 2	1	2 514064	0 033494	0 017501	0 58153					
	2	1 501935	0 007346	0 001558	0 40819	1	0 046322			
	3	0 861418	0 010528	0 005757	0 001618	1	0 000276	2	0 004094	
	4	0 901891	0 019874	0 00692	0 000219	1		2	1 99e-07	3
MATERIAL	1	1 4	0 02	0 007	1					
	2	0 4	0 13	0 2	1		0 01			
MATERIAL	1	7 3	0 018	0 003	1					
	2	0 5	0 06		1		0 01			

A.7 LISTADOS DEL PROGRAMA PRIMAT.

```
C*.....
C*
C*
C*      PROGRAM PRIMAT
C*
C*      PRIMAT ES EL PROGRAMA PRINCIPAL, EN EL SE CALCULAN LAS
C*      NECESIDADES DE MEMORIA Y SE LLAMA A LA SUBROUTINA
C*      STATIC QUE EFECTUA EL CALCULO ESTATICO
C*.....
C*      NMA  = NUMERO DE MATERIALES
C*      NGR  = NUMERO DE GRUPOS
C*      NPT  = NUMERO DE PUNTOS EN LA MALLA
C*      NPX  = NUMERO DE PUNTOS EN X
C*      NPY  = NUMERO DE PUNTOS EN Y
C*      NELE = NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS
C*      NELX = NUMERO DE ELEMENTOS EN X
C*      NELY = NUMERO DE ELEMENTOS EN Y
C*      NLBC = COND. FRONT. A LA IZQUIERDA
C*      NRBC = COND. FRONT. A LA DERECHA
C*      NBBC = COND. FRONT. ABAJO
C*      NTBC = COND. FRONT. ARRIBA
C*.....
C*      DIMENSION A(20000),B(27),HED(12)
C*      COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
C*      *      NOUT,EPSL,IMPX,IMPY,
C*      *      UA(2,2),UB(2),UC(2),UCAC(2,2),UM(2,2),
C*      *      UHH(2,2),UHV(2,2),UVH(2,2),UVV(2,2)
C*      LB=27
C*
C*      SE FIJA EL TAMANO DEL VECTOR DE TRABAJO 'A'
C*
C*      IFIMAX=20000
C*
C*      SE LEEN LOS DATOS GEOMETRICOS Y NUMERO DE GRUPOS DE ENERGIA
C*
C*      10  READ(5,1000) HED
C*          READ(5,*)NMA,NGR,NPX,NPY,NLBC,NRBC,NBBC,NTBC
C*          IF (NMA.EQ.0) GO TO 12
C*          WRITE (6,1000) HED
C*          WRITE(6,1040)
C*.....
C*      SE DETERMINA LA MEMORIA REQUERIDA Y MARCAS DE LOCALIZACION
C*      DE LA INFORMACION EN EL VECTOR A
C*
C*      NELX=IABS(NPX)-1
C*      NELY=IABS(NPY)-1
C*      NELE=NELX*NELY
C*      NPAX=NELX*NLBC+NRBC-1
```

NPAY=NELY+NBBC+NTBC-I
 NPAH=NPAX*NELY
 NPAV=NPAY*NELX
 NPAM=NPAH+NPAV
 NPAF=NELE
 NPAC=4*NELE-NELX*(NBBC+NTBC)-NELY*(NLBC+NRBC)
 NPACX=2*NELX-NLBC-NRBC
 NPACY=2*NELY-NBBC-NTBC
 NPACH=2*NELE-NELY*(NLBC+NRBC)
 NPACV=2*NELE-NELX*(NBBC+NTBC)
 LGM=NGR*NMA
 LGGM=LGM*NGR

C*
 ID=I
 ISR=ID+LGM
 ISF=ISR+LGM
 IXI=ISF+LGM
 ISS=IXI+LGM
 IX=ISS+LGGM
 IY=IX+IABS(NPX)
 IS=IY+IABS(NPY)
 INC=IS+LGM
 IVT=INC+NELE

C*
 C* SE VERIFICA QUE EXISTA SUFICIENTE MEMORIA PARA LA LECTURA
 C* DE DATOS
 C*
 CALL CMCTRL('INPSTA',IVT,IFIMAX)

C*
 C* SE LEEN DATOS
 C*
 CALL INPSTA(NMA,NGR,NPX,NPY,NELX,NELY,NELE,A(ID),A(ISR),A(ISF),
 * A(IXI),A(ISS),A(IX),A(IY),A(IS),A(INC))

C*
 C* SE CALCULAN LOS REQUERIMIENTOS DE MEMORIA DEL PROBLEMA
 C* Y SEÑALES DE LOCALIZACION DE LA INFORMACION EN EL VECTOR A
 C*
 NPAT=NPAM+NPAF

C*
 IFFN=IVT
 IFFO=IFFN+NPAF*NGR
 IFCHN=IFFO+NPAF*NGR
 IFCHO=IFCHN+NPACH*NGR
 IFCVN=IFCHO+NPACH*NGR
 IFCVO=IFCVN+NPACV*NGR
 IFMHN=IFCVO+NPACV*NGR
 IFMHO=IFMHN+NPAH*NGR
 IFMVN=IFMHO+NPAH*NGR
 IFMVO=IFMVN+NPAV*NGR
 IFXT=IFMVO+NPAV*NGR
 ISH=IFXT+NPAT*NGR
 ISV=ISH+NPAH

```

IFAH=ISV+NPAV
IFAV=IFAH+2*NPAH*NGR
IFAUH=IFAV+2*NPAV*NGR
IFAUV=IFAUH+NPAH*NGR
IFauc=IFAUv+NPAV*NGR
IBB=IFauc+NPAF*NGR
IVT=IBB+NPAF

C*
C* SE VERIFICA QUE SE TENGA SUFICIENTE MEMORIA PARA LA EJECUCION
C* DEL PROGRAMA
C*
CALL CMCTRL(*STATIC,IVT,IFIMAX)
LVT=IFIMAX-IVT+1

C*
C* SE EFECTUA CALCULO ESTATICO
C*
CALL STATIC(NMA,NGR,NPAx,NPAy,NELx,NELy,NPX,NPY,NELE,
* NPAH,NPAV,NPACx,NPACy,NPACH,NPACV,NPAF,NPAT,
* A(IX),A(IY),A(INC),A(ID),A(ISR),A(ISF),A(IXI),A(ISS),
* A(IS),A(ISH),A(ISV),A(IFMHN),A(IFMHO),A(IFMVN),A(IFMVO),
* A(IFCHN),A(IFCHO),A(IFCVN),A(IFCVO),A(IFFN),A(IFFO),
* A(IFAH),A(IFAV),A(IFAUv),A(IFAUH),A(IFauc),A(IBB))

C*
1000 FORMAT(12A6)
1040 FORMAT(5X,'GALERKIN CON INTEGRACION ANALITICA')
1100 FORMAT(1H1,12A6/,96(1H*))
GO TO 10
I2 CONTINUE
STOP
END

C*.....
C*
C* BLOCK DATA
C*.....
C*
C* EN ESTE BLOQUE SE GUARDAN LOS ELEMENTOS DE LAS MATRICES LOCALES
C*
C* UA,UB,UC,UCAC,UM,UHH,UHV Y UVV SON LA MATRICES LOCALES MATRICES
C* SE INTRODUCEN AQUI LOS VALORES DE CADA UNO DE LOS ELEMENTOS QUE
C* FORMAN ESTAS MATRICES
C*.....
COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
* NOUT,EPSL,IMPX,IMPY,
* UA(2,2),UB(2),UC(2),UCAC(2,2),UM(2,2),
* UHH(2,2),UHV(2,2),UVH(2,2),UVV(2,2)
DATA UA/ 1,-0.5,-0.5,1./
DATA UB/ -2.,2./
DATA UC/ -2.,2./
DATA UCAC/ 4.,2.,2.,4./
DATA UM/4.,-1.,-1.,4./
DATA UHH/ 1.,1.,1.,1./

```

```

DATA UHV/ 1.,1.,1.,1./
DATA UVH/ 1.,1.,1.,1./
DATA UVV/ 1.,1.,1.,1./
END

```

```

C*-----
C*
SUBROUTINE CALFLX(NMA,NGR,NPA X,NPA Y,NELX,NELY,NPX,NPY,
* NELE,NPAH,NPA V,NPA F,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,FMHN,FMVN,
* FFO,FFN,FMHO,FM VO,NG,FAUH,FAUV,FAUC,BB)

```

```

C*
C*
C*
C* LA SUBRUTINA CALFLX CALCULA LOS MOMENTOS DE CELDA DESPUES QUE
C* CONVERGE LA ITERACION INTERNA
C*
C*-----

```

```

C* NMA = NUMERO DE MATERIALES
C* NGR = NUMERO DE GRUPOS
C* NPT = NUMERO DE PUNTOS EN LA MALLA
C* NPX = NUMERO DE PUNTOS EN X
C* NPY = NUMERO DE PUNTOS EN Y
C* NELE = NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS
C* NELX = NUMERO DE ELEMENTOS EN X
C* NELY = NUMERO DE ELEMENTOS EN Y
C* NLBC = COND. FRONT. A LA IZQUIERDA
C* NRBC = COND. FRONT. A LA DERECHA
C* NBBC = COND. FRONT. ABAJO
C* NTBC = COND. FRONT. ARRIBA
C*-----

```

```

COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
* NOUT,EPSL,IMPX,IMPY,
* UA(2,2),UB(2),UC(2),UCAC(2,2),UM(2,2),
* UHH(2,2),UHV(2,2),UVH(2,2),UVV(2,2)
DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),
* SF(NGR,NMA),XI(NGR,NMA),SS(NGR,NGR,NMA),S(NGR,NMA),FMHN(NPAH,NGR)
* ,FMVN(NPA V,NGR),FFO(NPA F,NGR),FFN(NPA F,NGR),FMHO(NPAH,NGR),
* FMVO(NPA V,NGR),FAUH(NPA H,NGR),FAUV(NPA V,NGR),FAUC(NPA F,NGR),
* BB(NPA F)
DO 10 I=1,NPA F
10 BB(I)=0.
DO 50 J=1,NELY
YB=Y(J)
YT=Y(J+1)
DY=YT-YB
LMIN=1
IF(J.EQ.1.AND.NBBC.EQ.0)LMIN=2
LMAX=2
IF(J.EQ.NELY.AND.NTBC.EQ.0)LMAX=1
DO 50 I=1,NELX
XL=X(I)
XR=X(I+1)
DX=XR-XL

```

```

IJ=(I-1)*NELX+I
NCO=NC(IJ)
SC=SR(NG,NCO)
DC= D(NG,NCO)
XIC=XI(NG,NCO)
KMIN=1
IF(1.EQ.1.AND.NLBC.EQ.0)KMIN=2
KMAX=2
IF(1.EQ.NELX.AND.NRBC.EQ.0)KMAX=1
DO 20 M=1,NGR
SOURF=XIC*SF(M,NCO)
SOURS=SS(M,NG,NCO)
SOURSU=0.
SOURSD=0.
IF(M.LT.NG) SOURSD=SOURS
IF(M.GT.NG) SOURSU=SOURS
QL=7.*SC*DX*DY/5.+12.*DC*(DX/DY+DY/DX)
DO 11 K=KMIN,KMAX
KK=(J-1)*NPAX+I-2+NLBC+K
11 BB(IJ)=BB(IJ)-1.*DX*DY*(FAUH(KK,M)*SOURF
* +FMHO(KK,M)*SOURSU+FMHO(KK,M)*SOURSD)/QL
DO 12 L=LMIN,LMAX
LL=(I-1)*NPAY+J-2+NBBC+L
12 BB(IJ)=BB(IJ)-1.*DX*DY*(FAUV(LL,M)*SOURF
* +FMVO(LL,M)*SOURSU+FMVO(LL,M)*SOURSD)/QL
20 BB(IJ)=BB(IJ)+1.4*(FAUC(IJ,M)*SOURF+FFO(IJ,M)*SOURSU
* FFO(IJ,M)*SOURSD)*DX*DY/QL
DO 30 K=KMIN,KMAX
KK=(J-1)*NPAX+I-2+NLBC+K
30 BB(IJ)=BB(IJ)+(6.*DC*DY/DX+1.*SC*DX*DY)*
* FMHN(KK,NG)/QL
DO 40 L=LMIN,LMAX
LL=(I-1)*NPAY+J-2+NBBC+L
40 BB(IJ)=BB(IJ)+(6.*DC*DX/DY+1.*SC*DX*DY)*
* FMVN(LL,NG)/QL
50 CONTINUE
DO 60 I=1,NPAF
60 FFN(I,NG)=BB(I)
RETURN
END
C*.....
C*
SUBROUTINE CALMAH(NMA,NGR,NPAX,NPAY,NPX,NPY,NELX,NELY,NELE,
* NPAH,NPAV,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,SA,NG)
C*
C*
C* CALCULO DE LA COMPONENTE HORIZONTAL DE LA MATRIZ DE
C* LA IZQUIERDA DE LA ECUACION
C*
C*.....
C* NMA = NUMERO DE MATERIALES

```

C* NGR = NUMERO DE GRUPOS
C* NPT = NUMERO DE PUNTOS EN LA MALLA
C* NPX = NUMERO DE PUNTOS EN X
C* NPY = NUMERO DE PUNTOS EN Y
C* NELE = NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS
C* NELX = NUMERO DE ELEMENTOS EN X
C* NELY = NUMERO DE ELEMENTOS EN Y
C* NLBC = COND. FRONT. A LA IZQUIERDA
C* NRBC = COND. FRONT. A LA DERECHA
C* NBBC = COND. FRONT. ABAJO
C* NTBC = COND. FRONT. ARRIBA

C*-----
COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
* NOUT,EPSL,IMPX,IMPY,
* UA(2,2),UB(2),UC(2),UCAC(2,2),UM(2,2),
* UHH(2,2),UHV(2,2),UVH(2,2),UVV(2,2)
DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),
* SF(NGR,NMA),XI(NGR,NMA),SS(NGR,NGR,NMA),S(NGR,NMA),A(NPAH,2)
DO 10 I=1,2
DO 10 N=1,NPAH
10 A(N,I)=0.
DO 20 J=1,NELY
YB=Y(J)
YT=Y(J+1)
DY=YT-YB
DO 20 I=1,NELX
XL=X(I)
XR=X(I+1)
DX=XR-XL
IJ=(J-1)*NELX+I
NCO=NC(IJ)
SC=SR(NG,NCO)
DC= D(NG,NCO)
KMIN=1
IF(1.EQ.1.AND.NLBC.EQ.0)KMIN=2
KMAX=2
IF(1.EQ.NELX.AND.NRBC.EQ.0)KMAX=1
QL=7.*SC*DX*DY/5. +12.*DC*(DY/DX+DX/DY)
DO 20 K=KMIN,KMAX
N=(J-1)*NPAH+I-2+NLBC+K
DO 20 L=KMIN,K
M=2+L-K
20 A(N,M)=A(N,M)+UCAC(K,L)*DC*DY/DX+SC*DX*DY*UM(K,L)/30.-UHH(K,L)*
* (6.*DC*DY/DX+.1*SC*DX*DY)**2./QL
RETURN
END

C*-----
C* SUBROUTINE CALMA V(NMA,NGR,NPAH,NPAY,NPX,NPY,NELX,NELY,NELE,
* NPAH,NPAV,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,A,NG)
C*
C*

```

C*
C*   CALCULO DE LA COMPONENTE VERTICAL DE LA MATRIZ DE
C*   LA IZQUIERDA DE LA ECUACION
C*
C*.....
C*   NMA  = NUMERO DE MATERIALES
C*   NGR  = NUMERO DE GRUPOS
C*   NPT  = NUMERO DE PUNTOS EN LA MALLA
C*   NPX  = NUMERO DE PUNTOS EN X
C*   NPY  = NUMERO DE PUNTOS EN Y
C*   NELE = NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS
C*   NELX = NUMERO DE ELEMENTOS EN X
C*   NELY = NUMERO DE ELEMENTOS EN Y
C*   NLBC = COND. FRONT. A LA IZQUIERDA
C*   NRBC = COND. FRONT. A LA DERECHA
C*   NBBC = COND. FRONT. ABAJO
C*   NTBC = COND. FRONT. ARRIBA
C*.....
C*   COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
C*     NOUT,EPSL,IMPX,IMPY,
C*     UA(2,2),UB(2),UC(2),UCAC(2,2),UM(2,2),
C*     UHH(2,2),UHV(2,2),UVH(2,2),UVV(2,2)
C*   DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),
C*     SF(NGR,NMA),XI(NGR,NMA),SS(NGR,NGR,NMA),S(NGR,NMA),A(NPA V,2)
C*   DO 10 I=1,2
C*   DO 10 N=1,NPAV
10  A(N,I)=0.
C*   DO 20 I=1,NELX
C*     XL=X(I)
C*     XR=X(I+1)
C*     DX=XR-XL
C*   DO 20 J=1,NELY
C*     YB=Y(J)
C*     YT=Y(J+1)
C*     DY=YT-YB
C*     IJ=(J-1)*NELX+I
C*     NCO=NC(IJ)
C*     SC=SR(NG,NCO)
C*     DC=D(NG,NCO)
C*     KMIN=1
C*     IF(.EQ.I.AND.NBBC.EQ.0)KMIN=2
C*     KMAX=2
C*     IF(I.EQ.NELY.AND.NTBC.EQ.0)KMAX=1
C*     QL=7.*SC*DX*DY/5.+12.*DC*(DY/DX+DX/DY)
C*     DO 20 K=KMIN,KMAX
C*     N=(I-1)*NPAV+J-2+NBBC+K
C*     DO 20 L=KMIN,K
C*     M=2+L-K
20  A(N,M)=A(N,M)+UCAC(K,L)*DC*DX/DY+SC*DX*DY*UM(K,L)/30.
C*     -UVV(K,L)*(6.*DC*DX/DY+.1*SC*DX*DY)**2./QL
C*   RETURN
C*   END

```

```

C*.....
C*
SUBROUTINE CALSOH(NMA,NGR,NPAX,NPAY,NELX,NELY,NPX,NPY,NELE,
* NPAH,NPAF,NPAV,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,B,FFO,FFN,FVO,NG,
* FHO,FHN,FVN,FAUV,FAUC,FAUH)

```

```

C*
C*.....
C*      NMA  = NUMERO DE MATERIALES
C*      NGR  = NUMERO DE GRUPOS
C*      NPT  = NUMERO DE PUNTOS EN LA MALLA
C*      NPX  = NUMERO DE PUNTOS EN X
C*      NPY  = NUMERO DE PUNTOS EN Y
C*      NELE = NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS
C*      NELX = NUMERO DE ELEMENTOS EN X
C*      NELY = NUMERO DE ELEMENTOS EN Y
C*      NLBC = COND. FRONT. A LA IZQUIERDA
C*      NRBC = COND. FRONT. A LA DERECHA
C*      NBBC = COND. FRONT. ABAJO
C*      NTBC = COND. FRONT. ARRIBA
C*.....

```

```

COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,

```

```

C*
C*      CALCULO DE LA COMPONENTE HORIZONTAL DEL VECTOR DE
C*      LA FUENTE
C*

```

```

*      NOUT,EP,SL,IMPX,IMPY,
*      UA(2,2),UB(2),UC(2),UCAC(2,2),UM(2,2),
*      UHH(2,2),UHV(2,2),UVH(2,2),UVV(2,2)
DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),
* SF(NGR,NMA),XI(NGR,NMA),SS(NGR,NGR,NMA),S(NGR,NMA),B(NPAH),
* FFO(NPAF,NGR),FFN(NPAF,NGR),FVO(NPAV,NGR),
* FHO(NPAH,NGR),FHN(NPAH,NGR),FVN(NPAV,NGR),FAUV(NPAV,NGR)
* ,FAUC(NPAF,NGR),FAUH(NPAH,NGR)
DO 10 N=1,NPAH
10 B(N)=0.
DO 20 J=1,NELY
YB=Y(J)
YT=Y(J+1)
DY=YT-YB
DO 20 I=1,NELX
XL=X(I)
XR=X(I+1)
DX=XR-XL
IJ=(J-1)*NELX+I
NCO=NC(IJ)
SC=SR(NG,NCO)
DC= D(NG,NCO)
XIC=XI(NG,NCO)
KMIN=1
IF(LEQ.1.AND.NLBC.EQ.0)KMIN=2
KMAX=2

```



```

C*   NPX  = NUMERO DE PUNTOS EN X
C*   NPY  = NUMERO DE PUNTOS EN Y
C*   NELE = NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS
C*   NELX = NUMERO DE ELEMENTOS EN X
C*   NELY = NUMERO DE ELEMENTOS EN Y
C*   NLBC = COND. FRONT. A LA IZQUIERDA
C*   NRBC = COND. FRONT. A LA DERECHA
C*   NBBC = COND. FRONT. ABAJO
C*   NTBC = COND. FRONT. ARRIBA
C* .....
COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
*   NOUT,EP,SL,IMPX,IMPY,
*   UA(2,2),UB(2),UC(2),UCAC(2,2),UM(2,2),
*   UHH(2,2),UHV(2,2),UVH(2,2),UVV(2,2)
DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),
* SF(NGR,NMA),XI(NGR,NMA),SS(NGR,NGR,NMA),S(NGR,NMA),B(NPAV),
* FFO(NPA,F,NGR),FFN(NPA,F,NGR),FHO(NPA,H,NGR),
* FHN(NPA,H,NGR),FVO(NPA,V,NGR),FVN(NPA,V,NGR),FAUH(NPA,H,NGR)
* ,FAUC(NPA,F,NGR),FAUV(NPA,V,NGR)
DO 10 N=1,NPAV
10 B(N)=0.
DO 20 I=1,NELX
XL=X(I)
XR=X(I+1)
DX=XR-XL
DO 20 J=1,NELY
YB=Y(J)
YT=Y(J+1)
DY=YT-YB
IJ=(J-1)*NELX+I
NCO=NC(IJ)
SC=SR(NG,NCO)
DC= D(NG,NCO)
XIC=XI(NG,NCO)
KMIN=1
IF(J.EQ.1.AND.NBBC.EQ.0)KMIN=2
KMAX=2
IF(J.EQ.NELY.AND.NTBC.EQ.0)KMAX=1
LMIN=1
IF(I.EQ.1.AND.NLBC.EQ.0)LMIN=2
LMAX=2
IF(I.EQ.NELX.AND.NRBC.EQ.0)LMAX=1
DO 20 K=KMIN,KMAX
KK=(I-1)*NPAV+J-2+NBBC*K
QL=1.4*SC*DX*DY+12.*DC*(DY/DX+DX/DY)
ESN=6.*DC*DY/DX+.1*SC*DX*DY
ZETA=6.*DC*DX/DY+.1*SC*DX*DY
DO 15 M=1,NGR
SOURF=XIC*SF(M,NCO)
SOURS=SS(M,NG,NCO)
SOURSU=0.
SOURSD=0.

```

```

IF(M.LT.NG) SOURSD=SOURS
IF(M.GT.NG) SOURSU=SOURS
  DO 11 L=KMIN,KMAX
    LL=(I-1)*NPA Y+J-2+NBBC+L
    B(KK)=B(KK)+(UM(K,L)/J.-ZETA*UHV(K,L)/QL
  *)*(FAUV(LL,M)*SOURF+FVO(LL,M)*SOURSU+FVO(LL,M)*SOURSD)
  * *.1*DX*DY
11 CONTINUE
  DO 12 L=LMIN,LMAX
    LL=(J-1)*NPAX+I-2+NLBC+L
    B(KK)=B(KK)+(-ZETA*UVH(K,L)*(FAUH(LL,M)*SOURF+FHO(LL,M)*
  SOURSU+FHO(LL,M)*SOURSD))* .1*DX*DY/QL
12 CONTINUE
  B(KK)=B(KK)+(14.*ZETA/QL-1.)*(FAUC(IJ,M)*SOURF+FFO(IJ,M)*
  SOURSU+FFO(IJ,M)*SOURSD)*.1*DX*DY
  DO 20 L=LMIN,LMAX
    LL=(J-1)*NPAX+I-2+NLBC+L
  20 B(KK)=B(KK)+UVH(K,L)*ESN*ZETA*FHN(LL,NG)/QL
  RETURN
  END
C*.....
C*
C* SUBROUTINE CHOBNS (N,M,L,X,B)
C*
C*.....
C*
C* ESTA SUBRUTINA EFECTUA LA SUBSTITUCION HACIA ADELANTE Y HACIA
C* ATRAS PARA RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES DEL PROBLEMA
C*
C* DIMENSION L(N,I),X(I),B(I)
C*
C* REAL L
C* INTEGER P,Q
C*
C* SUBSTITUCION HACIA ADELANTE
C*
C* M1=M-1
C* DO 25 I=1,N
C* P=1
C* IF (I.LT.M) P=M-I+1
C* Q=P-M+I-1
C* Y=B(I)
C* IF(P.GT.M1) GO TO 20
C* DO 10 K=P,M1
C* Q=Q+1
C* Y=Y-L(I,K)*X(Q)
10 CONTINUE
20 X(I)=Y*L(I,M)
25 CONTINUE
C*
C* SUBSTITUCION HACIA ATRAS
C*

```

```

DO 50 I=1,N
IB=N-I+1
P=1
IF (I.LT.M) P=M-I+1
Y=X(IB)
Q=IB+M-P
IF(P.GT.M1) GO TO 40
DO 30 K=P,M1
Y=Y-L(Q,K)*X(Q)
Q=Q-1
30 CONTINUE
40 X(IB)=Y*L(IB,M)
50 CONTINUE
C*
RETURN
END
C*-----
C*
SUBROUTINE CHOBNT (N,M,A,L)
C*-----
C*
C* ESTA SUBRUTINA EFECTUA UN FACTORIZACION DE CHOLESKY
C*
C* DIMENSION A(N,1),L(N,1)
C*
REAL L
INTEGER P,Q,R,S
C*
DT=1.
ID=0
DO 100 I=1,N
P=1
IF (I.LT.M) P=M-I+1
R=I-M+P
DO 50 J=P,M
S=J-1
Q=M-J+P
Y=A(I,J)
IF (P.GT.S) GO TO 20
DO 10 K=P,S
Y=Y-L(I,K)*L(R,Q)
Q=Q+1
10 CONTINUE
C*-----
20 IF (J.EQ.M) GO TO 30
L(I,J)=Y*L(R,M)
R=R+1
GO TO 50
30 DT=DT*Y
IF (Y.EQ.0.) GO TO 110
35 IF (ABS(DT).LT.1.) GO TO 40

```

```

DT=DT*0.1
ID=ID+1
GO TO 35
40 IF (ABS(DT),GE.0.1) GO TO 45
DT=DT*10.
ID=ID-1
GO TO 40
45 L(I,J)=1./SQRT(Y)
50 CONTINUE
100 CONTINUE
RETURN
C*
110 PRINT 1000
STOP
1000 FORMAT(10H0CHIHUAHUA)
END
C*.....
C*
C* SUBROUTINE CMCTRL(SUBRTN,I,VT,LVTMAX)
C*.....
C*
C* ESTA SUBROUTINA EFECTUA UNA VERIFICACION DE LOS
C* REQUERIMIENTOS DE MEMORIA
C*
C* LVT=LVTMAX-I*VT+1
C* IF (LVT.GT.0) GO TO 10
C* WRITE(6,1000) SUBRTN,LVT
C* STOP
C*
1000 FORMAT('1TOO MUCH MEMORY NEEDED -',A6,' - LVT =',I10)
10 RETURN
END
C*.....
C*
C* SUBROUTINE EQUAL(N,M,FN,FO)
C*.....
C*
C* ESTA SUBROUTINA COPIA EL VECTOR DE LOS FLUJOS DE LA ITERACION
C* N ('NUEVOS') AL VECTOR DE LOS FLUJOS DE LA ITERACION N-1
C* ('VIEJOS')
C*
C* DIMENSION FN(N,M),FO(N,M)
C* DO 10 I=1,N
C* DO 10 J=1,M
10 FO(I,J)=FN(I,J)
RETURN
END

```

```

C* .....
C*
C* FUNCTION ERMAX(E1,E2,E3,E4,E5)
C* .....
C*
C* ESTA SUBROUTINA SELECCIONA EL EROR MAXIMO
C*
C* ERMAX=E1
C* IF(E2.GT.ERMAX) ERMAX=E2
C* IF(E3.GT.ERMAX) ERMAX=E3
C* IF(E4.GT.ERMAX) ERMAX=E4
C* IF(E5.GT.ERMAX) ERMAX=E5
C* RETURN
C* END
C* .....
C*
C* SUBROUTINE ERROR(N,M,FN,FO,EPS)
C* .....
C*
C* ESTA SUBROUTINA CALCULA EL ERROR ENTRE DOS VECTORES Y CALCULA
C* ERROR MAXIMO ENTRE ELLOS
C*
C* DIMENSION FN(N,M),FO(N,M)
C* EPS=ABS(FN(1,1)-FO(1,1))
C* DO 10 I=1,N
C* DO 10 J=1,M
C* EIJ=ABS(FN(I,J)-FO(I,J))
C* IF(EPS.LT.EIJ)EPS=EIJ
C* 10 CONTINUE
C* RETURN
C* END
C* .....
C*
C* SUBROUTINE INPSTA(NMA,NGR,NPX,NPY,NELX,NELY,NELE,D,SR,SF,XI,SS,
C* ^ X,Y,S,NC)
C* .....
C*
C* ESTA SUBROUTINA LEE EL ARCHIVO DE DATOS DE ENTRADA
C*
C* .....
C*
C* NMA = NUMERO DE MATERIALES
C* NPT = NUMERO DE PUNTOS EN LA MALLA
C* N = NUMERO DE PUNTOS EN X
C* NPY = NUMERO DE PUNTOS EN Y
C* NELE = NUMERO TOT NPT = NUMERO DE PUNTOS EN LA MAL COND. FRONT.
C* A LA IZQUIERDA
C* NRBC = COND. FRONT. A LA DERECHA
C* NBBC = COND. FRONT. ABAJO
C* NTBC = COND. FRONT. ARRIBA

```

```

C* *****
DIMENSION D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),SF(NGR,NMA)
* ,XI(NGR,NMA),SS(NGR,NOR,NMA),X(IABS(NPX)),Y(IABS(NPY)),
* S(NGR,NMA),NC(NELE),IDT(5)
COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
* NOUT,EP,SL,IMPX,IMPY,
* UA(2,2),UB(2),UC(2),UCAC(2,2),UM(2,2),
* UHH(2,2),UHV(2,2),UVH(2,2),UVV(2,2)

C*
C* CONDICIONES FRONTERA
C*
C*
C* DATOS GEOMETRICOS
C*
IF (NPX.GT.0) GO TO 5
NPX=-NPX
READ(5,*)(X(I),I=1,NPX)
GO TO 15
5 READ (5,*) X(1),X(NPX)
DX=(X(NPX)-X(1))/FLOAT(NELX)
IF (NELX.LT.2) GO TO 15
DO 10 I=2,NELX
X(I)=X(1)+FLOAT(I-1)*DX
10 CONTINUE
15 IF(NPY.GT.0)GO TO 20
NPY=-NPY
READ(5,*)(Y(I),I=1,NPY)
GO TO 30
20 READ(5,*)Y(1),Y(NPY)
DY=(Y(NPY)-Y(1))/FLOAT(NELY)
IF(NELY.LT.2)GO TO 30
DO 25 I=2,NELY
Y(I)=Y(1)+FLOAT(I-1)*DY
25 CONTINUE

C*
C* COMPOSICION DE LAS CELDAS
C*
30 DO 40 I=1,NELE
NC(I)=0
40 READ(5,*)IDT
MAT=IDT(1)
IF(MAT.EQ.0) GO TO 70
IX1=IDT(2)
IX2M1=IDT(3)-1
IY1=IDT(4)
IY2M1=IDT(5)-1
DO 60 J=IY1,IY2M1
DO 60 I=IX1,IX2M1
IJ=(J-1)*NELX+I
60 NC(IJ)=MAT
GO TO 50
C*

```



```

* 2)
1070 FORMAT(1H0,40I3)
1080 FORMAT(///15H SECC. EFICACES/1X,14(1H*)//)
1120 FORMAT(3X,'MATERIAL',J2/3X,10(1H*)//)
1140 FORMAT(10X,2I1 G,10X,11H,19X,2HSR,18X,2HSF,18X,2HXI,5X,2H S//)
1145 FORMAT(10X,I2,1P5E20,7)
1150 FORMAT(1H0,19X,2H G,8X,8HSS(GP,G//)
RETURN
END

```

C*.....

```

C* SUBROUTINE INVAL(NPAH,NPAV,NPAF,NGR,FMH,FMV,FF)
C*

```

C*.....

```

C* ESTA SUBRUTINE DA LOS VALORES INICIALES DE LOS
C* FLUJOS PARA EFECTUAR LA PRIMERA ITERACION
C*

```

```

DIMENSION FMH(NPAH,NGR),FMV(NPAV,NGR),FF(NPAF,NGR)
DO 30 K=1,NGR
DO 10 I=1,NPAH
10 FMH(I,K)=1.
DO 20 J=1,NPAV
20 FMV(J,K)=1.
DO 30 L=1,NPAF
30 FF(L,K)=1.
RETURN
END

```

C*.....

```

C* FUNCTION RR(NGR,NMA,NPX,NPY,NELX,NELY,NELE,NPAF,X,Y,NC,XS,FF)
C*

```

C*.....

```

C* ESTA SUBRUTINA CALCULA LA TASA DE FISION
C*

```

C*.....

```

COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
* NOUT,EPSL,IMPX,IMPY,
* UA(2,2),UB(2),UC(2),UCAC(2,2),UM(2,2),
* UHH(2,2),UHV(2,2),UVH(2,2),UVV(2,2)
DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),XS(NGR,NMA),FF(NPAF,NGR)
RR=0.
DO 10 J=1,NELY
YB=Y(J)
YT=Y(J+1)
DY=YT-YB
DO 10 I=1,NELX
XL=X(I)
XR=X(I+1)
DX=XR-XL
IJ=(J-1)*NELX+I
NCO=NC(IJ)

```

```

DO 10 K=1,NGR
10 RR=RR+XS(K,NC0)*FF(IJ,K)*DX*DY
RETURN
END

```

```

C* .....
C*
C* SUBROUTINE STATIC(NMA,NGR,NPAX,NPAV,NELX,NELY,NPX,NPY,NELE,
* NPAH,NPAV,NPAC,NPACV,NPACH,NPACV,NPAF,NPAT,X,Y,NC,D,SR,
* SF,XI,SS,S,SH,SV,FMHN,FMHO,FMVN,FMVO,FCHN,FCHO,FCVN,FCVO,
* FPN,FFO,FAH,FAV,FAUV,FAUH,FAUC,BB)

```

```

C* .....
C*
C* EN ESTA SUBRUTINA SE CALCULA LA DISTRIBUCION DE FLUJO
C* Y EL EIGENVALOR PARA N GRUPOS DE ENERGIA Y DOS DIMENSIONES
C*
C* .....

```

```

C* NMA = NUMERO DE MATERIALES
C* NGR = NUMERO DE GRUPOS
C* NPT = NUMERO DE PUNTOS EN LA MALLA
C* NPX = NUMERO DE PUNTOS EN X
C* NPY = NUMERO DE PUNTOS EN Y
C* NELE = NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS
C* NELX = NUMERO DE ELEMENTOS EN X
C* NELY = NUMERO DE ELEMENTOS EN Y
C* NLBC = COND. FRONT. A LA IZQUIERDA
C* NRBC = COND. FRONT. A LA DERECHA
C* NBBC = COND. FRONT. ABAJO
C* NTBC = COND. FRONT. ARRIBA
C* .....

```

```

COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
* NOUT,EPSL,IMPX,IMPY,
* UA(2,2),UB(2),UC(2),UCAC(2,2),UM(2,2),
* UIH(2,2),UHV(2,2),UVI(2,2),UVV(2,2)
DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),
* SF(NGR,NMA),XI(NGR,NMA),SS(NGR,NGR,NMA),S(NGR,NMA),
* SH(NPAH),SV(NPAV),FMHN(NPAH,NGR),FMHO(NPAH,NGR),
* FMVN(NPAV,NGR),FMVO(NPAV,NGR),FCHN(NPACH,NGR),
* FCHO(NPACH,NGR),FCVN(NPACV,NGR),FCVO(NPACV,NGR),
* FPN(NPAF,NGR),FFO(NPAF,NGR),FAH(NPAH,2,NGR),
* FAV(NPAV,2,NGR),FAUV(NPAV,NGR),FAUH(NPAH,NGR),FAUC(NPAF,NGR),
* BB(NPAF)

```

```

C*
C* DECLARACION DE VARIABLES Y LECTURA DE DATOS
C*
ITEX=0
FLAMDN=0.
FRN=1.
CALL INVAL(NPAH,NPAV,NPAF,NGR,FMHN,FMVN,FFN)
C*
C* CALCULO Y FACTORIZACION DE LA MATRIZ
C* DE LA IZQUIERDA DE LA ECUACION

```

```

C*
DO 10 K=1,NGR
CALL CALMAH(NMA,NGR,NPA X,NPA Y,NPX,NPY,NELX,NELY,NELE,
* NPAH,NPA V,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,FAH(1,1,K),K)
CALL CHOBT(NPAH,2,FAH(1,1,K),FAH(1,1,K))
CALL CALMAV(NMA,NGR,NPA X,NPA Y,NPX,NPY,NELX,NELY,NELE,
* NPAH,NPA V,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,FAV(1,1,K),K)
CALL CHOBT(NPA V,2,FAV(1,1,K),FAV(1,1,K))
10 CONTINUE
C*
C*   NORMALIZACION DE LOS FLUJOS DE LA SUPOCICION INICIAL
C*
FRI=RR(NGR,NMA,NPX,NPY,NELX,NELY,NELE,NPA F,X,Y,NC,SF,FFN)
DO 13 K=1,NGR
DO 13 N=1,NPA V
FMVN(N,K)=FMVN(N,K)/FRI
13 CONTINUE
DO 14 K=1,NGR
DO 14 N=1,NPAH
FMHN(N,K)=FMHN(N,K)/FRI
14 CONTINUE
DO 20 N=1,NPA F
DO 20 K=1,NGR
20 FFN(N,K)=FFN(N,K)/FRI
C*
C*   COPIA LOS FLUJOS 'NUEVOS' A LOS 'VIEJOS'
C*
CALL EQUAL(NPAH,NGR,FMHN,FMHO)
CALL EQUAL(NPA V,NGR,FMVN,FMVO)
CALL EQUAL(NPA F,NGR,FFN,FFO)
C*
C*   SE INICIA ITERACION EXTERNA SOBRE LOS G GRUPOS DE ENERGIA
C*   PARA EL CALCULO DEL EIGENVALOR
C*
30 ITEX=ITEX+1
FLAMDO=FLAMDN
FRO=FRN
C*
C*   COPIA LOS FLUJOS 'NUEVOS' A VECTORE AUXILIARES DE LA ITERACION
C*   EXTERNA
C*
CALL EQUAL(NPAH,NGR,FMHN,FAUH)
CALL EQUAL(NPA V,NGR,FMVN,FAUV)
CALL EQUAL(NPA F,NGR,FFN,FAUC)
C*
C*   SE RESUELVE LA ECUACION DE DIFUSION EN DOS DIMENSIONES
C*   PARA CADA UNO DE LOS G GRUPOS DE ENERGIA
C*
DO 50 K=1,NGR
ITIN=0
C*
C*   SE INICIA ITERACION INTERNA SOBRE CADA UNO DE

```

```

C*  LOS G GRUPOS DE ENERGIA
C*
40 ITIN=ITIN+1
C*
C*  SE CALCULA EL VECTOR DE FUENTE Y SE RESUELVE EL SISTEMA
C*  DE ECUACIONES
C*
CALL CALSOH(NMA,NGR,NPAX,NPAY,NELX,NELY,NPX,NPY,NELE,
* NPAH,NPAF,NPAV,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,SH,FFO,FFN,FMVO,
* K,FMHO,FMHN,FMVN,FAUV,FAUC,FAUH)
CALL CHOBNS(NPAH,2,PAH(1,1,K),FMHN(1,K),SH)
CALL CALSOV(NMA,NGR,NPAX,NPAY,NELX,NELY,NPX,NPY,NELE,
* NPAH,NPAF,NPAV,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,SV,FFO,FFN,FMHO,
* K,FMHN,FMVO,FMVN,FAUH,FAUC,FAUV)
CALL CHOBNS(NPAV,2,FAV(1,1,K),FMVN(1,K),SV)
C*
C*  SE CALCULA EL ERROR EN LOS FLUJOS VERTICALES Y HORIZONTALES
C*
CALL ERROR(NPAH,1,FMHO(1,K),FMHN(1,K),EPSMH)
CALL ERROR(NPAV,1,FMVO(1,K),FMVN(1,K),EPSMV)
C*
C*  SE CALCULA EL ERROR MAXIMO
C*
EMAX=ERMAX(EPSMH,EPSMV,0,0,0)
C*
C*  COPIA LOS FLUJOS 'NUEVOS' A LOS 'VIEJOS'
C*
CALL EQUAL(NPAH,1,FMHN(1,K),FMHO(1,K))
CALL EQUAL(NPAV,1,FMVN(1,K),FMVO(1,K))
IF(ITIN.GT.500)GO TO 45
IF(EMAX.GT.EPSL)GO TO 40
45 CONTINUE
C*
C*  SE CALCULAN LOS MOMENTOS DE CELDA
C*
CALL CALFLX(NMA,NGR,NPAX,NPAY,NELX,NELY,NPX,NPY,NELE,
* NPAH,NPAV,NPAF,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,FMHN,FMVN,FFO,FFN,
* FMHO,FMVO,K,FAUH,FAUV,FAUC,BB)
C*
C*  TERMINA ITERACION INTERNA
C*
50 CONTINUE
CALL EQUAL(NPAF,NGR,FFN,FFO)
FRN=RR(NGR,NMA,NPX,NPY,NELX,NELY,NELE,NPAF,X,Y,NC,SF,FFN)
FLAMDN=FRN/FRO
EPSK=ABS(FLAMDN-FLAMDO)/ABS(FLAMDN)
FRN=FRN/FLAMDN
DO 60 I=1,NGR
DO 60 N=1,NPAF
60 FFN(N,I)=FFN(N,I)/FLAMDN
IF(EPSK.GT.EPSL.AND.ITEX.LT.200)GO TO 30
C*

```

C* TERMINA ITERACION EXTERNA SE IMPRIMEN RESULTADOS

C*

```
WRITE(6,*)'RESULTADOS FINALES'  
WRITE(6,*)'ITEX=',ITEX,' ',EPSK=' ',EPSK,' ',Keff=' ',FLAMDN  
WRITE(6,*)'FLUJOS HORIZONTALES'  
WRITE(6,*)FMHN  
WRITE(6,*)'FLUJOS VERTICALES'  
WRITE(6,*)FMVN  
WRITE(6,*)'FLUJOS DE CELDA'  
WRITE(6,*)FFN  
RETURN  
END
```

A-8 LISTADOS DE LAS SUBROUTINAS CALFLX, CALMAH, CAISOH Y CALSOV
 PARA EL PROGRAMA PRIFIS.

```

C* .....
C*
C*   BLOCK DATA
C* .....
C*
COMMON NLBC, NRBC, NBBC, NTBC,
*   NOUT, EPSL, IMPX, IMPY,
*   UA(2,2), UB(2,2), UC(2)
DATA UA/4., 2., 2., 4./
DATA UB/.36., .36., .36./
DATA UC/.6., .6./
END
C* .....
C*
SUBROUTINE CALFLX(NMA, NGR, NPAX, NPA Y, NELX, NELY, NPX, NPY,
*   NELE, NPAH, NPA V, NPA F, X, Y, NC, D, SR, SF, XI, SS, S, FMHN, FMVN,
*   FFO, FFN, FMHO, FMVO, NG, FAUH, FAUV, FAUC, BB)
C* .....
C*
COMMON NLBC, NRBC, NBBC, NTBC,
*   NOUT, EPSL, IMPX, IMPY,
*   UA(2,2), UB(2,2), UC(2)
DIMENSION X(NPX), Y(NPY), NC(NELE), D(NGR, NMA), SR(NGR, NMA),
*   SF(NGR, NMA), XI(NGR, NMA), SS(NGR, NGR, NMA), S(NGR, NMA), FMHN(NPAH, NGR)
*   FMVN(NPA V, NGR), FFO(NPA F, NGR), FFN(NPA F, NGR), FMHO(NPAH, NGR),
*   FMVO(NPA V, NGR), FAUH(NPAH, NGR), FAUV(NPA V, NGR), FAUC(NPA F, NGR),
*   BB(NPA F)
DO 10 I=1, NPA F
10 BB(I)=0.
DO 50 J=1, NELY
YB= Y(J)
YT= Y(J+1)
DY= YT- YB
LMIN=1
IF(J.EQ.1.AND.NBBC.EQ.0) LMIN=2
LMAX=2
IF(J.EQ.NELY.AND.NTBC.EQ.0) LMAX=1
DO 50 I=1, NELX
XL= X(I)
XR= X(I+1)
DX= XR- XL
IJ= (J-1)* NELX+ I
NCO= NC(IJ)
SC= SR(NG, NCO)
DC= D(NG, NCO)
XIC= XI(NG, NCO)
TETAX= DC* DY/ DX
    
```



```

TETAY=DC*DX/DY
TETAM=.25*SC*DX*DY
KMIN=1
IF(J.EQ.1.AND.NBBC.EQ.0)KMIN=2
KMAX=2
IF(J.EQ.NELY.AND.NTBC.EQ.0)KMAX=1
DO 20 K=KMIN,KMAX
QL=I2.*(TETAX+TETAY)+4.*TETAM
N=(I-1)*NPAV+J-2+NBBC+K
DO 20 L=KMIN,K
M=2+L-K
20 A(N,M)=A(N,M)+TETAY*UA(K,L)-TETAY**2*UB(K,L)/QL
RETURN
END
C*****
C*
SUBROUTINE CALSOH(NMA,NGR,NPA,NPAV,NELX,NELY,NPX,NPY,NELE,
* NPAH,NPAF,NPAV,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,B,FFO,FFN,FVO,NG,
* FHO,FHN,FVN,FAUV,FAUC,FAUH)
C*
C*****
COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
C*
C* CALCULO DE LA COMPONENTE HORIZONTAL DE LA MATRIZ DE
C* LA FUENTE
C*
* NOUT,EPSL,IMPX,IMPY.
* UA(2,2),UB(2,2),UC(2)
DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),
* SF(NGR,NMA),XI(NGR,NMA),SS(NGR,NGR,NMA),S(NGR,NMA),B(NPAH),
* FFO(NPAF,NGR),FFN(NPAF,NGR),FVO(NPAV,NGR),
* FHO(NPAH,NGR),FHN(NPAH,NGR),FVN(NPAV,NGR),FAUV(NPAV,NGR)
* ,FAUC(NPAF,NGR),FAUH(NPAH,NGR)
DO 10 N=1,NPAH
10 B(N)=0.
DO 20 J=1,NELY
YB=Y(J)
YT=Y(J+1)
DY=YT-YB
DO 20 I=1,NELX
XL=X(I)
XR=X(I+1)
DX=XR-XL
IJ=(J-1)*NELX+I
NCO=NC(IJ)
SC=SR(NG,NCO)
DC= D(NG,NCO)
XIC=XI(NG,NCO)
TETAX=DC*DY/DX
TETAY=DC*DX/DY
TETAM=.25*SC*DX*DY
TETAFF=.25*DX*DY

```

```

QL=12.*(TETAX+TETAY)+4.*TETAM
KMIN=1
IF(I.EQ.1.AND.NLBC.EQ.0)KMIN=2
KMAX=2
IF(I.EQ.NELX.AND.NRBC.EQ.0)KMAX=1
LMIN=1
IF(J.EQ.1.AND.NBBC.EQ.0)LMIN=2
LMAX=2
IF(J.EQ.NELY.AND.NTBC.EQ.0)LMAX=1
DO 20 K=KMIN,KMAX
KK=(J-1)*NPA X+I-2+NLBC+K
DO 15 M=1,NGR
SOURF=XIC*SF(M,NCO)
SOURS=SS(M,NG,NCO)
SOURSU=0.
SOURSD=0.
IF(M.LT.NG) SOURSD=SOURS
IF(M.GT.NG) SOURSU=SOURS
B(KK)=B(KK)+24.*TETAY*TETAF*(FAUC(IJ,M))*SOURF
* + FFO(IJ,M)*SOURSI - FFO(IJ,M)*SOURSD/QL
15 CONTINUE
DO 20 L=LMIN,LMAX
LL=(I-1)*NPA Y+J-2+NBBC+L
B(KK)=B(KK)+TETA X*TETAY*UB(K,L)*FVN(LL,NG)/QL
20 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C* .....
C*
C* SUBROUTINE CALSOV(NMA,NGR,NPA X,NPA Y,NELX,NELY,NPX,NPY,NELE,
C* NPAH,NPAF,NPA V,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,B,FFO,FFN,FHO,NG,
C* FHN,FVO,FVN,FAUUC,FAUV)

```

```

C* .....
C*
C* CALCULO DE LA COMPONENTE VERTICAL DE LA MATRIZ DE
C* LA FUENTE
C*

```

```

COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
* NOUT,EPSL,IMPX,IMPY,
* UA(2,2),UB(2,2),UC(2)
DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),
* SF(NGR,NMA),XI(NGR,NMA),SS(NGR,NGR,NMA),S(NGR,NMA),B(NPA V),
* FFO(NPA F,NGR),FFN(NPA F,NGR),FHO(NPA H,NGR),
* FHN(NPA H,NGR),FVO(NPA V,NGR),FVN(NPA V,NGR),FAUH(NPA H,NGR)
* ,FAUC(NPA F,NGR),FAUV(NPA V,NGR)
DO 10 N=1,NPA V
10 B(N)=0.
DO 20 I=1,NELX
XL=X(I)
XR=X(I+1)
DX=XR-XL

```

```

DO 20 J=1,NELY
YB=Y(J)
YT=Y(J+1)
DY=YT-YB
IJ=(J-1)*NELX+1
NCO=NC(IJ)
SC=SR(NG,NCO)
DC= D(NG,NCO)
XIC=XI(NG,NCO)
TETAX=DC*DY/DX
TETAY=DC*DX/DY
TETAM=.25*SC*DX*DY
TETAF=.25*DX*DY
QL=12.*(TETAX+TETAY)+4.*TETAM
KMIN=1
IF(J.EQ.1.AND.NBBC.EQ.0)KMIN=2
KMAX=2
IF(J.EQ.NELY.AND.NTBC.EQ.0)KMAX=1
LMIN=1
IF(I.EQ.1.AND.NLBC.EQ.0)LMIN=2
LMAX=2
IF(I.EQ.NELX.AND.NRBC.EQ.0)LMAX=1
DO 20 K=KMIN,KMAX
KK=(I-1)*NPAY+J-2-NBBC+K
DO 15 M=1,NGR
SOURF=XIC*SF(M,NCO)
SOURS=SS(M,NG,NCO)
SOURSU=0.
SOURSD=0.
IF(M.LT.NG) SOURSD=SOURS
IF(M.GT.NG) SOURSU=SOURS
15 B(KK)=B(KK)+24.*TETAX*TETAF*(FAUC(IJ,M))*SOURF
* +FFO(IJ,M)*SOURSU+FFO(IJ,M)*SOURSD)/QL
DO 20 L=LMIN,LMAX
LL=(J-1)*NPAX+I-2-NLBC+L
20 B(KK)=B(KK)+TETAX*TETAY*UB(K,L)*FHN(LL,NG)/QL
RETURN
END

```

A -9 LISTADOS DE LAS SUBROUTINAS CALFLX, CALMAH, CALMAV, CALSOH Y CALSOV PARA

```

C*-----
C*
C*   BLOCK DATA
C*-----
COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
*   NOUT,EPSSL,IMPX,IMPY,
*   UA(2,2),UB(2,2),UC(2)
DATA UA/1.,0.,0.,1./
DATA UB/1.,1.,1.,1./
DATA UC/1.,1./
END
C*-----
C*
C*   SUBROUTINE CALFLX(NMA,NGR,NPAX,NPAY,NELX,NELY,NPX,NPY,
*   NELE,NPAH,NPAV,NPAF,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,FMHN,FMVN,
*   FFO,FFN,FMHO,FMVO,NG,FAUH,FAUV,FAUC,BB)
C*-----
COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
*   NOUT,EPSSL,IMPX,IMPY,
*   UA(2,2),UB(2,2),UC(2)
DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),
*   SF(NGR,NMA),XI(NGR,NMA),SS(NGR,NGR,NMA),S(NGR,NMA),FMHN(NPAH,NGR)
*   ,FMVN(NPAV,NGR),FFO(NPAF,NGR),FFN(NPAF,NGR),FMHO(NPAH,NGR),
*   FMVO(NPAV,NGR),FAUH(NPAH,NGR),FAUV(NPAV,NGR),FAUC(NPAF,NGR),
*   BB(NPAF)
DO 10 I=1,NPAF
10 BB(I)=0.
DO 50 I=1,NELY
YB=Y(J)
YT=Y(J+1)
DY=YT-YB
LMIN=1
IF(J.EQ.1.AND.NBBC.EQ.0)LMIN=2
LMAX=2
IF(J.EQ.NELY.AND.NTBC.EQ.0)LMAX=1
DO 50 I=1,NELX
XL=X(I)
XR=X(I+1)
DX=XR-XL
IJ=(J-1)*NELX+I
NCO=NC(IJ)
SC=SR(NG,NCO)
DC=D(NG,NCO)
XIC=XI(NG,NCO)
TETAX=DC*DY/DX

```

```

TETAY=DC*DX/DY
TETAM=-.25*SC*DX*DY
TETAF=-.25*DX*DY
KMIN=1
IF(I, EQ, 1, AND, NLBC, EQ, 0)KMIN=2
KMAX=2
IF(I, EQ, NELX, AND, NRBC, EQ, 0)KMAX=1
DO 20 M=1,NGR
SOURF=XIC*SF(M,NCO)
SOURS=SS(M,NG,NCO)
SOURSU=0.
SOURSD=0.
QL=2.*(TETAX+TETAY+TETAM)
IF(M,LT,NG) SOURSD=SOURS
IF(M,GT,NG) SOURSU=SOURS
20 BB(I)=BB(I)+2.*TETAF*(FAUC(IJ,M)*SOURF+FFO(IJ,M)*SOURSU+
* FFO(IJ,M)*SOURSD)/QL
DO 30 K=KMIN,KMAX
KK=(J-1)*NPAX+I-2+NLBC+K
30 BB(IJ)=BB(IJ)+TETAX*UC(K)*FMHN(KK,NG)/QL
DO 40 L=LMIN,LMAX
LL=(I-1)*NPAY+J-2+NBBC+L
40 BB(IJ)=BB(IJ)+TETAY*UC(L)*FMVN(LL,NG)/QL
50 CONTINUE
DO 60 I=1,NPAF
60 FFN(I,NG)=BB(I)
RETURN
END
.....
C*
SUBROUTINE CALMAH(NMA,NGR,NPAX,NPAY,NPX,NPY,NELX,NELY,NELE,
* NPAH,NPAV,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,A,NG)
C*
.....
C*
C* CALCULO DE LA COMPONENTE HORIZONTAL DE LA MATRIZ DE
C* LA IZQUIERDA DE LA ECUACION
C*
COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
* NOUT,EPSL,IMPX,IMPY,
* UA(2,2),UB(2,2),UC(2)
DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),
* SF(NGR,NMA),XI(NGR,NMA),SS(NGR,NGR,NMA),S(NGR,NMA),A(NPAH,2)
DO 10 I=1,2
DO 10 N=1,NPAH
10 A(N,I)=0.
DO 20 J=1,NELY
YB=Y(I)
YT=Y(J+1)
DY=YT-YB
DO 20 I=1,NELX
XL=X(I)

```

```

XR=X(I+1)
DX=XR-XL
IJ=(J-1)*NELX+I
NCO=NC(IJ)
SC=SR(NG,NCO)
DC= D(NG,NCO)
TETAX=DC*DY/DX
TETAY=DC*DX/DY
TETAM=.25*SC*DX*DY
KMIN=1
IF(1.EQ.1.AND.NLBC.EQ.0)KMIN=2
KMAX=2
IF(1.EQ.NELX.AND.NRBC.EQ.0)KMAX=1
DO 20 K=KMIN,KMAX
N=(J-1)*NPAX+I-2+NLBC+K
DO 20 L=KMIN,K
QL=2.*(TETAX+TETAY+TETAM)
M=2+L-K
20 A(N,M)=A(N,M)+TETAX*UA(K,L)-TETAX**2*UB(K,L)/QL
RETURN
END

```

```

C*.....
C*
SUBROUTINE CALMAV(NMA,NGR,NPAX,NPAY,NPX,NPY,NELX,NELY,NELE,
* NPAH,NPAV,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,A,NG)

```

```

C*.....
C*
C* CALCULO DE LA COMPONENTE VERTICAL DE LA MATRIZ DE
C* LA IZQUIERDA DE LA ECUACION
C*

```

```

COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
* NOUT,EPSL,IMPX,IMPY,
* UA(2,2),UB(2,2),UC(2)
DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),
* SF(NGR,NMA),XI(NGR,NMA),SS(NGR,NGR,NMA),S(NGR,NMA),A(NPAV,2)
DO 10 I=1,2
DO 10 N=1,NPAV
10 A(N,I)=0.
DO 20 I=1,NELX
XL=X(I)
XR=X(I+1)
DX=XR-XL
DO 20 J=1,NELY
YB=Y(J)
YT=Y(J+1)
DY=YT-YB
IJ=(J-1)*NELX+I
NCO=NC(IJ)
SC=SR(NG,NCO)
DC= D(NG,NCO)
TETAX=DC*DY/DX

```

```

TETAY = DC*DX/DY
TETAM = .25*SC*DX*DY
KMIN = 1
IF(J.EQ.1.AND.NBBC.EQ.0)KMIN = 2
KMAX = 2
IF(J.EQ.NELY.AND.NTBC.EQ.0)KMAX = 1
DO 20 K = KMIN,KMAX
QL = 2.*(TETAX + TETAY + TETAM)
N = (J-1)*NPAY + J - 2 + NBBC + K
DO 20 L = KMIN,K
M = 2 + L - K
20 A(N,M) = A(N,M) + TETAY*UA(K,L) - TETAY**2*UB(K,L)/QL
RETURN
END

```

```

C*.....
C*
SUBROUTINE CALSOH(NMA,NGR,NPAX,NPAY,NELX,NELY,NPX,NPY,NELE,
* NPAH,NPAF,NPAV,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,B,FFO,FFN,FVO,NG,
* FHO,FHN,FVN,FAUV,FAUC,FAUH)

```

```

C*.....
C*
COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,

```

```

C* CALCULO DE LA COMPONENTE HORIZONTAL DE LA MATRIZ DE
C* LA FUENTE

```

```

C*
* NOUT,EPSL,IMPX,IMPY,
* UA(2,2),UB(2,2),UC(2)
DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),
* SF(NGR,NMA),XI(NGR,NMA),SS(NGR,NGR,NMA),S(NGR,NMA),B(NPAH),
* FFO(NPAF,NGR),FFN(NPAF,NGR),FVO(NPAV,NGR),
* FHO(NPAH,NGR),FHN(NPAH,NGR),FVN(NPAV,NGR),FAUV(NPAV,NGR)
* ,FAUC(NPAF,NGR),FAUH(NPAH,NGR)
DO 10 N = 1,NPAH

```

```

10 B(N) = 0.
DO 20 J = 1,NELY
YB = Y(J)
YT = Y(J+1)
DY = YT - YB
DO 20 I = 1,NELX
XL = X(I)
XR = X(I+1)
DX = XR - XL
IJ = (J-1)*NELX + I
NCO = NC(IJ)
SC = SR(NG,NCO)
DC = D(NG,NCO)
XIC = XI(NG,NCO)
TETAX = DC*DY/DX
TETAY = DC*DX/DY
TETAM = .25*SC*DX*DY
TETAFA = .25*DX*DY

```

```

QL=2.*(TETAX+TETAY+TETAM)
KMIN=1
IF(I.EQ.1.AND.NLBC.EQ.0)KMIN=2
KMAX=2
IF(J.EQ.NELX.AND.NRBC.EQ.0)KMAX=1
LMIN=1
IF(J.EQ.1.AND.NBBC.EQ.0)LMIN=2
LMAX=2
IF(J.EQ.NELY.AND.NTBC.EQ.0)LMAX=1
DO 20 K=KMIN,KMAX
KK=(I-1)*NPAX+I-2+NLBC+K
DO 15 M=1,NGR
SOURF=XIC*SF(M,NCO)
SOURS=SS(M,NG,NCO)
SOURSU=0.
SOURSD=0.
IF(M.LT.NG) SOURSD=SOURS
IF(M.GT.NG) SOURSU=SOURS
B(KK)=B(KK)+2.*TETA*F*FAUC(I,J,M)*SOURF
*+FFO(I,J,M)*SOURSU+FFO(I,J,M)*SOURSD)/QL
15 CONTINUE
DO 20 L=LMIN,LMAX
LL=(I-1)*NPAY+J-2+NBBC+L
B(KK)=B(KK)+TETA*F*TETAY*UB(K,L)*FVN(LL,NG)/QL
20 CONTINUE
RETURN
END
C*
C*
C* SUBROUTINE CALSOV(NMA,NGR,NPAX,NPAY,NELX,NELY,NPX,NPY,NELE,
* NPAH,NPAF,NPAV,X,Y,NC,D,SR,SF,XI,SS,S,B,FFO,FFN,FHIO,NG,
* FHN,FVO,FVN,FAUH,FAUC,FAUV)
C*
C*
C*-----
C*
C* CALCULO DE LA COMPONENTE VERTICAL DE LA MATRIZ DE
C* LA FUENTE
C*
COMMON NLBC,NRBC,NBBC,NTBC,
* NOUT,EPSL,IMPX,IMPY,
* UA(2,2),UB(2,2),UC(2)
DIMENSION X(NPX),Y(NPY),NC(NELE),D(NGR,NMA),SR(NGR,NMA),
* SF(NGR,NMA),XI(NGR,NMA),SS(NGR,NGR,NMA),S(NGR,NMA),B(NPAV),
* FFO(NPAF,NGR),FFN(NPAF,NGR),FHO(NPAH,NGR),
* FHN(NPAH,NGR),FVO(NPAV,NGR),FVN(NPAV,NGR),FAUH(NPAH,NGR)
* ,FAUC(NPAF,NGR),FAUV(NPAV,NGR)
DO 10 N=1,NPAV
10 B(N)=0.
DO 20 I=1,NELX
XL=X(I)
XR=X(I+1)
DX=XR-XL

```

```

DO 20 J=1,NELY
YB=Y(J)
YT=Y(J+1)
DY=YT-YB
IJ=(J-1)*NELX+1
NCO=NC(IJ)
SC=SR(NG,NCO)
DC=D(NG,NCO)
XIC=XI(NG,NCO)
TETAX=DC*DY/DX
TETAY=DC*DX/DY
TETAM=.25*SC*DX*DY
TETAF=.25*DX*DY
QL=2.*(TETAX+TETAY+TETAM)
KMIN=1
IF(J.EQ.1.AND.NBBC.EQ.0)KMIN=2
KMAX=2
IF(J.EQ.NELY.AND.NTBC.EQ.0)KMAX=1
LMIN=1
IF(I.EQ.1.AND.NLBC.EQ.0)LMIN=2
LMAX=2
IF(I.EQ.NELX.AND.NRBC.EQ.0)LMAX=1
DO 20 K=KMIN,KMAX
KK=(I-1)*NPAY+J-2+NBBC+K
DO 15 M=1,NGR
SOURF=XIC*SF(M,NCO)
SOURS=SS(M,NG,NCO)
SOURSU=0.
SOURSD=0.
IF(M.LT.NG) SOURSD=SOURS
IF(M.GT.NG) SOURSU=SOURS
15 B(KK)=B(KK)+2.*TETAY*TETAF*(FAUC(IJ,M))*SOURF
* +FFO(IJ,M)*SOURSU+FFO(IJ,M)*SOURSD)/QL
DO 20 L=LMIN,LMAX
LL=(I-1)*NPAX+I-2+NLBC+L
20 B(KK)=B(KK)+TETAY*TETAX*UB(K,L)*FHN(LL,NG)/QL
RETURN
END

```

REFERENCIAS

- [1] J. Duderstadt y L.J. Hamilton, "Nuclear Reactor Analysis", John Wiley and Sons (1976).
- [2] S. Glasstone and M. C. Edmund "The Elements of Nuclear Reactor Theory" D. Van Nostrand Company Inc. (1966)
- [3] J.J. Dorning. "Modern Coarse-Mesh Methods. A Development of 70's", In Comp. Meth. in Nuc. Eng. Vol. 1, pp. 3.1-3.31, Williamsburg, Virginias. (1979).
- [4] J.P. Hennart, J. Jaffre, J.E. Roberts, "A Constructive Method for Deriving Finite Elements of Nodal Types" Numeriche Mathematik 53, 701-738 (1988).
- [5] J.P. Hennart. "Nodal Schemes, Mixed-Hybrid Finite Element and Block - Centered Finite Differences", INRIA Rapports de Recherche No. 386, 60p (1985).
- [6] Shoichiro Nakamura. "Computational Methods in Engineering and Science", Wiley & Sons, New York (1977).
- [7] Hans G. Kaper, Gary K. Leaf and Arthur J. Lindeman. "A Timing Comparison Study for Some High Order Finite Element Approximation. Procedures and Low Order Finite Difference Approximation Procedure for Numerical Solution of the Multigroup Neutron Diffusion Ecuation". Nuc. Sci. and Eng. 49, 27-48. 1972.
- [8] Jean Pierre Hennart, Edmundo del Valle "Un Código Nodal de Cinética Espacio-tiempo" Proyecto IIMAS-CNSNS. México D. F., Febrero de 1992.
- [9] S. Borrensen, L. Moberg. "User Manual for PRESTO FMS Scandpower Fuel Management System". January 1986.
- [10] K.S. Smith "An Analytical Nodal Method for Solving the Two Group, Multidimensional, Static and Transient Neutron Diffusion Equations". M.S. Thesis Massachusetts Institute of Technology (March 1979).
- [11] J. P. Hennart, "A Finite Element Approach to Point and Mesh-Centered Finite Difference Schemes Over Rectangular Grids, IIMAS-UNAM. Annuals of Nuclear Energy vol. 2 No. 15 (julio 1992)
- [12] J. P. Hennart, "A General Family of Nodal Schemes" SIAM J. Sci. Stat. Comput. Vol. 7, No. 1, January 1986.