



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

95

Zejen

FACULTAD DE INGENIERIA

SINTONIZACION DE CONTROLADORES PID
MEDIANTE OPTIMIZACION PARAMETRICA

FALLA DE ORIGEN

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A :

DAVID HERAS DELGADILLO

DIRECTOR: ING. FRANCISCO RODRIGUEZ RAMIREZ



MEXICO, D.F.

JUNIO 1995

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Mi agradecimiento a todos aquellos que hicieron posible la realización de este trabajo, en especial a Paco, que comprometió mi prudencia y buen juicio a fin de superar mis limitaciones.

El que tiene a la verdad de su parte es un necio y un cobarde si siente miedo a confesarla a causa de la multitud de opiniones de los demás.

Este trabajo se lo dedico a mi padre que siempre ha predicado con el mejor de los ejemplos.

El amor te ofrece la posibilidad de ser mejor, siempre te amaré *Julieta*.

A la facultad de ingeniería que a simple vista parece una madre impositiva, que agobia la personalidad y hace a cada uno de sus alumnos un prototipo de robot; pero que afortunadamente no es así, si no que te da los argumentos suficientes para crecer en la dirección que elijas, lo que permite tener una amplia gama de formas, las cuales procuran un enriquecimiento no solamente a nivel personal, si no global; pues somos una familia que se permite tener mediocres y en el mejor de los casos grandes triunfadores, aquellos que caminan en tus pasillos sin aspavientos, ni soberbias poses, aquellos que eligieron lo mejor que tú les proporcionaste. Aquellos tus mejores hijos a los cuales quisiera pertenecer. Te amo, no con un amor simple, por el contrario uno forjado con esperanza, momentos sombríos y la alegría de haber desafiado mis limitaciones. Gracias por todo, yo soy parte de ti, de la misma forma que tú eres un elemento vital de mi ser.

Gracias a un trabajo semejante a este pude encontrar la diferencia entre un compañero y un amigo; el primero se le puede reemplazar cuando es conveniente, no así un amigo, con el cual te haces cómplice de sus debilidades, es común oír que un verdadero amigo se conoce en las malas, pero yo digo que lo conocemos en las buenas, cuando las cosas nos salen bien y cuando cada paso que damos es un reproche para él e incluso un insulto. El verdadero amigo se alegra de nuestra buena fortuna, sin reservas. Pero si no es realmente buen amigo, el gusano de la envidia entrará en su corazón y lo roerá.

En el recuento de este lapso de mi vida perdí un mal compañero y fui recompensado por el mejor de los amigos.

Mil gracias

1 INTRODUCCIÓN	1
2 ANTECEDENTES	
2.1 Introducción.....	3
2.2 Representación de los sistemas de primer orden.....	3
2.3 Representación de los sistemas de segundo orden.....	4
2.4 Representación de los sistemas de tercer y orden superior.....	6
2.5 Sistemas con tiempo muerto.....	6
2.6 Aproximaciones del retardo de transporte ó tiempo muerto	8
2.7 Sistemas de primer orden con retraso de tiempo	11
3 CONTROLADORES Y SINTONIZACIÓN	
3.1 Introducción.....	12
3.2 Clasificación de controladores	12
3.3 Acción de control de dos posiciones.....	12
3.4 Acción de control proporcional	14
3.5 Acción de control integral	15
3.6 Acción de control derivativa.....	16
3.7 Acción de control proporcional-integral.....	17
3.8 Acción de control proporcional-derivativa.....	18
3.9 Acción de control proporcional-integral-derivativa	20
3.10 Métodos convencionales de sintonización.....	21
3.10.1 Método de oscilaciones sostenidas (Ziegler-Nichols 1942).....	21
3.10.2 Método de oscilaciones amortiguadas (Harriot 1957)	23
3.10.3 Método de la curva de reacción (Ziegler-Nichols 1942).....	24
3.10.4 Método de la curva de reacción (Cohen-Coon 1950).....	25
3.10.5 Método de sintonización de prueba y error en línea.....	27
3.11 Discusiones.....	28

4	OPTIMIZACIÓN PARAMÉTRICA	
4.1	Introducción	30
4.2	Índices de desempeño	30
4.2.1	Requerimientos de los índices de desempeño	30
4.2.2	Índices de error de desempeño	31
4.2.2.1	Criterio integral del error cuadrático (ISE)	31
4.2.2.2	Criterio integral del cuadrado del error por el tiempo (ITSE)	32
4.2.2.3	Criterio integral del valor absoluto del error (IAE)	33
4.2.2.4	Criterio integral del producto del error absoluto por el tiempo (ITAE)	33
4.2.2.5	Comparación de los índices de desempeño	33
4.3	Métodos de sintonización basados en criterios de desempeño	34
4.4	Optimización paramétrica	39
4.4.1	Condiciones de estabilidad	39
4.4.2	Método propuesto	48
4.4.2.1	Control proporcional	48
4.4.2.2	Control PI	49
4.4.2.3	Control PD	51
4.4.2.4	Control PID	52
5	CONCLUSIONES	79
6	REFERENCIAS	83

INTRODUCCIÓN

El uso del controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) es muy frecuente en la industria, pues una gran cantidad de sistemas se pueden controlar de un modo adecuado. Es por ello que resulta atractivo que tales controladores funcionen en forma óptima.

Sin embargo, si la planta es tan complicada que no se puede obtener fácilmente su modelo matemático, no resulta posible desarrollar un método analítico a fin de diseñar un controlador PID. Entonces hay que recurrir a procedimientos experimentales para el diseño de los controladores, el proceso de seleccionar los parámetros del controlador se conoce como afinación o sintonización del controlador.

Ziegler y Nichols sugirieron reglas para afinar o sintonizar controladores PID (esto es fijar los valores K_p , T_i , T_d) basándose en la respuesta experimental al escalón, mediante el solo uso de la acción de un control proporcional en lazo abierto.

El objetivo del presente trabajo es ofrecer un método que se utilice con simplicidad a fin de obtener una sintonización de los parámetros de un controlador PID con el propósito de que funcionen de la mejor manera haciendo uso de los índices de desempeño.

Esta sintonización a diferencia del método propuesto por Ziegler-Nichols se hará en un sistema en lazo cerrado. Utilizando las diferentes combinaciones de controladores. Haremos uso del paquete de simulación SIMNON con el objeto de evaluar los distintos índices de desempeño propuestos con el objeto de encontrar los valores de los parámetros del controlador que los minimicen.

El trabajo escrito se estructura de la siguiente manera. En el segundo capítulo se presentan las características y conceptos generales relacionados con la descripción matemática de los sistemas físicos, y en especial con aquellos que pueden ser representados como plantas de primer orden con tiempo muerto. El capítulo tres describe las acciones de control sus efectos y desventajas así como los métodos convencionales de sintonización. En el

cuarto capítulo se presentan los diferentes índices de desempeño y se propone un método para optimizar los parámetros haciendo uso de los mencionados índices. El quinto capítulo contiene una comparación entre los distintos métodos de sintonización y las conclusiones sobre el desempeño del método propuesto haciendo énfasis en las bondades y desventajas del método.

ANTECEDENTES

2.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se considera la parte más importante y fundamental de cualquier problema de control, es decir, la representación de la planta a través de un modelo matemático apropiado. Por planta se entiende el equipo físico relacionado con la cantidad a ser controlada. El modelo matemático es una abstracción del objeto físico el cual se describe en términos de fórmulas matemáticas. Un modelo matemático únicamente proporciona una aproximación al comportamiento de un sistema real y físico, de hecho los sistemas de interés en este trabajo son aquellos que presentan retardos de tiempo; por tanto explicaremos su estructura, sus propiedades y sus problemas de control.

2.2 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Los sistemas de primer orden se caracterizan principalmente por tener un elemento capaz de almacenar energía. Este tipo de sistemas se representan desde el punto de vista matemático por ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Un sistema de primer orden en general, se representa por un modelo matemático de la forma:

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(x)$$

Normalizando con respecto a la derivada de mayor orden, se tiene:

$$\frac{dx}{dt} + b_0 x = b_1 f(x)$$

haciendo las siguientes asignaciones:

$$b_0 = \frac{a_0}{a_1} \quad y \quad b_1 = \frac{1}{a_1}$$

donde

b_0 : frecuencia natural del sistema

b_1 : factor que afecta la excitación externa o entrada aplicada al sistema.

$f(t)$: excitación externa o entrada del sistema.

$x(t)$: variable de estudio o interés del sistema considerado.

La función de transferencia de este sistema es:

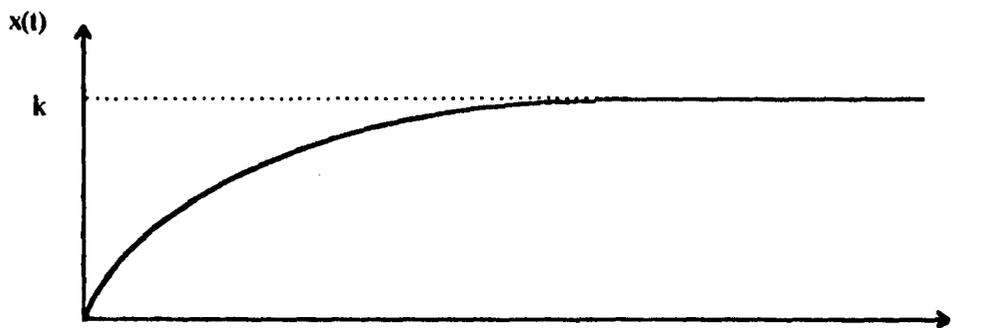
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1}{s + b_0}$$

Donde la constante de tiempo es: $\frac{1}{b_0}$

La respuesta escalón de un sistema de primer orden se puede expresar en forma general como:

$$x(t) = k(1 - e^{-b_0 t}) \quad t \geq 0$$

donde k : es el valor final que alcanza la respuesta escalón



Respuesta de un sistema de primer orden a un escalón.

2.3 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Los sistemas de segundo orden pueden ser caracterizados en forma general por tener dos elementos capaces de almacenar energía. En general, un sistema de segundo orden se puede representar matemáticamente por ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de la forma:

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = g(t)$$

Este modelo matemático puede ser expresado en forma normalizada con respecto al coeficiente de la derivada de mayor orden como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0x = c_0g(t)$$

Definiendo los coeficientes de la forma:

$$b_1 = \frac{a_1}{a_2} = 2\alpha; \quad b_0 = \frac{a_0}{a_2} = \omega_n^2; \quad c_0 = \frac{1}{a_2}; \quad \alpha = \xi\omega_n$$

Y su función de transferencia es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Debido a que la ecuación característica de una ecuación diferencial de segundo orden es una ecuación cuadrática de la forma:

$$m^2 + b_1m + b_0 = 0$$

Existen dos valores de m que la satisfacen, estos es, la ecuación tiene dos raíces y están dadas por:

$$m_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}{2} = -\xi\omega_n + \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$m_2 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}{2} = -\xi\omega_n - \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Puesto que son dos los valores de m que satisfacen a las anteriores ecuaciones, existen cuatro posibles casos para las raíces, estos son:

1. Raíces reales diferentes, *sistema sobreamortiguado* ($b_1^2 > 4b_0$; $\xi > 1$)
2. Raíces reales iguales, *sistema críticamente amortiguado* ($b_1^2 = 4b_0$; $\xi = 1$)
3. Raíces complejas, *sistema subamortiguado* ($b_1^2 < 4b_0$; $\xi < 1$)
4. Raíces imaginarias, *sistema no amortiguado* ($b_1 = 0$; $\xi = 0$)

2.4 SISTEMAS DE TERCER ORDEN Y ORDEN SUPERIOR

Los sistemas de tercer orden y orden superior se representan por ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer o mayor orden, de hecho el orden de tales ecuaciones la determina el número de elementos almacenadores de energía, estas ecuaciones tienen la siguiente forma normalizada:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + c_{n-2} \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + c_n x = Du(t)$$

La curva de respuesta de un sistema estable de orden superior es la suma de un número de curvas exponenciales y curvas senoidales amortiguadas; Una característica particular de estas curvas de respuesta es que hay pequeñas oscilaciones superpuestas a las oscilaciones mayores o a curvas exponenciales.

Una forma alternativa de la representación de sistemas físicos es la función de transferencia que en este caso se puede escribir como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k(s + z_1)(s + z_2)\dots\dots\dots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\dots\dots\dots(s + p_n)}, \quad m \leq n$$

Si todos los polos se encuentran en el semiplano izquierdo, esto es, si el sistema es estable, es posible demostrar que un par de polo y cero muy cercanos se cancelan entre si; si hay un polo ubicado muy lejos del origen, su aportación es muy pequeña. Esto es los transitorios correspondientes a este polo son pequeños y duran poco y por tanto, pueden ignorarse; Un par de polos completos conjugados producen un término de segundo orden. Por todo lo anterior los sistemas de orden superior se puede aproximar por uno de orden inferior tomando en consideración solamente los efectos de polos dominantes En resumen la respuesta de un sistema de orden superior esta compuesta por una cantidad de términos que incluyen las funciones simples halladas en las respuestas de los sistemas de primer y segundo orden.

2.5 SISTEMAS CON TIEMPO MUERTO

En la mayor parte de los procesos de control existen retardos de tiempo durante la ejecución de los comandos de control. En sistemas de control a nivel procesos pueden existir grandes retardos de tiempo relacionados con transporte de material. En sistemas mecánicos y aeroespaciales, las dinámicas no moderadas no oscilatorias tales como aquellas asociadas con el movimiento de los actuadores pueden ser consideradas como retardos en los comandos de actuación. El efecto primario de ciertas no linealidades se pueden resumir como un retardo de tiempo.

El modelo de un retardo de tiempo no produce una función de transferencia racional, los retardos de tiempo producen limitaciones inherentes a los sistemas de control que no son fáciles de superar.

Si existe un retardo de tiempo en un sistema, dicho sistema no puede reaccionar al comando de entrada en un entorno de tiempo más rápido que la duración del retardo. A menudo los retardos de tiempo se excluyen del modelo nominal de la planta y de este modo se convierte en parte de las posibles perturbaciones al modelo de la planta.

La entrada $X(t)$ de un elemento con retardo de transporte o tiempo muerto están relacionados por:

$$y(t) = x(t - T)$$

donde T es el tiempo muerto

La función de transferencia del retardo de transporte o tiempo muerto esta dada por:

$$\text{Función de transferencia del retardo de transporte o tiempo muerto} = \frac{L[x(t - T)](t - T)}{L[x(t)](t)}$$

$$L(s) = \frac{x(s)e^{-Ts}}{x(s)} = e^{-Ts}$$

Obsérvese que $L(s)$ no es una función racional, es decir, un cociente de dos funciones que normalmente son polinomios en s , y por tanto No tiene polos o ceros finitos.

Ahora bien, si hacemos un análisis de respuesta en frecuencia, el retardo de transporte tiene un comportamiento de fase no mínima y tiene retardo excesivo de fase sin atenuación en altas frecuencias.

Considere el retardo de transporte dado por

$$L(j\omega) = e^{-j\omega t}$$

la magnitud es siempre la unidad, puesto que

$$|x(j\omega)| = |\cos \omega t - j \text{sen } \omega t| = 1$$

Por lo tanto, el logaritmo de la magnitud del retardo de transporte $e^{j\omega t}$ es usual a 0 db. El ángulo de fase del retardo de transporte es

$$\begin{aligned}\angle L(j\omega) &= -\omega T \text{ (radianes)} \\ &= -57.3\omega T \text{ (grados)}\end{aligned}$$

El ángulo de fase varía linealmente con la frecuencia ω . En la figura 2-1 se puede ver el ángulo de fase para el retardo de transporte.

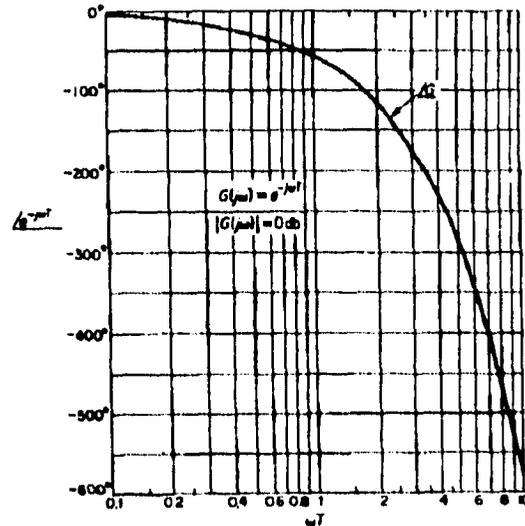


Figura 2-1

Como puede observarse la fase se vuelve cada vez más negativa en proporción a la frecuencia. Esto también se espera, ya que un retraso de tiempo fijo T se convierte en una fracción mayor o en un múltiplo de un periodo de ondas sinusoidal cuando el periodo disminuye a causa del aumento de frecuencia. En la fig. 2-1 se observa como el atraso en la fase es mayor que 270° para valores de ωT mayores que aproximadamente 5 rad. Esto implica que sería virtualmente imposible estabilizar un sistema (alcanzar un Margen de Fase positivo) con una frecuencia de cruce mayor que $\omega = 5/T$, y sería difícil para aquellas frecuencias mayores a $\omega = 3/T$. Estas características imponen una restricción sobre el ancho de banda alcanzable, de cualquier sistema con retraso de tiempo.

Podemos concluir que los sistemas de fase no mínima son lentos en su respuesta debido a su comportamiento defectuoso al comenzar la respuesta. En la mayoría de los sistemas de control prácticos, debe evitarse un excesivo retardo de fase.

2.6 APROXIMACIONES DEL RETARDO DE TRANSPORTE O TIEMPO MUERTO

1) Expansión en series de Taylor (Matemáticos)

$$e^{-s\theta} = 1 - s\theta + \frac{(s\theta)^2}{2!} - \frac{(s\theta)^3}{3!} + \frac{(s\theta)^4}{4!} - \frac{(s\theta)^5}{5!} + \dots$$

2) Si el tiempo muerto T es muy pequeño e^{-Ts} se puede aproximar por

$$e^{-Ts} \approx 1 - Ts$$

o bien

$$e^{-Ts} \approx \frac{1}{Ts + 1}$$

Esta aproximación es buena si el tiempo muerto es muy pequeño y si además, la función entrada $f(t)$ al elemento del tiempo muerto es suave y continua, (esto significa que las derivadas de órdenes segundo y superiores de $f(t)$ son pequeñas)

3) Aproximación de PADÉ

Una aproximación de la función no racional $e^{-j\omega t}$ a una función racional, haciendo énfasis que tratamos con sistemas de control y por tanto típicamente con bajas frecuencias, además que requerimos que esta sea buena para $s = 0$ y proximidades. El medio más común para encontrar esta aproximación se atribuye a Padé y está basado en ajustar la expansión en serie de la función trascendente $e^{-j\omega t}$ a la de una función racional, una relación de numerador polinomial de grado p y denominador polinomial de grado q . El resultado se llama aproximación (p, q) de Padé. Para nuestros propósitos consideraremos sólo el caso $p = q$. También para generalizar, calcularemos las aproximaciones a $e^{-j\omega t}$ y en el resultado, Ts se puede sustituir por s para permitir cualquier retraso deseado.

Para ilustrar el proceso, empezaremos con la aproximación (1.1). En este caso, deseamos elegir b_0, b_1 , y a_0 de modo que el tiempo muerto

$$e^{-s} = \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s + 1}$$

Para la aproximación expandimos e^{-s} y la función racional en una serie de McLaurin y ajustamos tantos términos iniciales como sea posible. Las series son:

$$e^{-s\theta} = 1 - s\theta + \frac{(s\theta)^2}{2!} - \frac{(s\theta)^3}{3!} + \frac{(s\theta)^4}{4!} - \frac{(s\theta)^5}{5!} + \dots$$

$$\frac{b_0 s + b_1}{a_0 s + 1} = b_1 + (b_0 - a_0 b_1)s - a_0(b_0 - a_0 b_1)s^2 + a_0^2(b_0 - a_0 b_1)s^3 + \dots$$

ajustando coeficientes, debemos resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \\ b_0 - a_0 b_1 &= -1 \\ -a_0(b_0 - a_0 b_1) &= \frac{1}{2} \\ a_0^2(b_0 - a_0 b_1) &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

ahora observamos que tenemos un número infinito de ecuaciones pero solamente 3 parámetros. La aproximación de Padé se determina cuando se ajustan los 3 primeros coeficientes, con lo cual obtenemos:

$$e^{-s} \cong \frac{1 - (\frac{s}{2})}{1 + (\frac{s}{2})}$$

si suponemos que $p = q = 2$, tenemos cinco parámetros y es posible una mejor adecuación, las primeras aproximaciones están dadas en la tabla 2.1

La comparación de esas tres aproximaciones se observa mejor a partir de su configuración de polos y ceros y su uso en un lugar geométrico de raíces. Las localizaciones de los polos se muestran en el semiplano izquierdo; los ceros están en el semiplano derecho en las reflexiones de los polos.

$p=q$	$H_q(s)$
1	$\frac{1 - (\frac{s}{2})}{1 + (\frac{s}{2})}$
2	$\frac{1 - (\frac{s}{2}) + (\frac{s^2}{12})}{1 + (\frac{s}{2}) + (\frac{s^2}{12})}$
3	$\frac{1 - (\frac{s}{2}) + (\frac{s^2}{10}) - (\frac{s^3}{120})}{1 + (\frac{s}{2}) + (\frac{s^2}{10}) + (\frac{s^3}{120})}$

Tabla 2.1 Tres aproximaciones de Padé

2.7 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN CON RETRASO DE TIEMPO

Durante la obtención del modelo matemático para un sistema físico a menudo es deseable que el modelo sea lo más sencillo posible siempre que pueda proporcionar suficiente información para diseñar un controlador efectivo. De esta manera, los efectos de orden superior que se pueden considerar y que dificultan su modelado con frecuencia no se utilizan. Se debe estar seguro de que tales efectos de orden superior están siempre presentes aun cuando estos no aparecen explícitamente en el modelo.

Por otro lado un sistema que posee una función de transferencia la cual tiene más de un polo, pero cuya respuesta al escalón puede ser bien aproximada por un sistema de primer orden nos permite utilizar el concepto de un sistema dominante de primer orden. Ahora bien si la respuesta total del sistema es muy pequeña al inicio y después de un tiempo se mueve rápidamente hacia la respuesta que resulta de un polo dominante, es entonces posible reescribir al sistema como un sistema de primer orden con tiempo de retardo, donde la respuesta de primer orden representa el efecto del polo dominante y el retraso de tiempo simula los efectos de órdenes superiores o dinámicas no modeladas.

Por tanto resulta natural el uso de un sistema de primer orden con tiempo muerto o tiempo de transporte, para representar el comportamiento de algún sistema cuya complejidad nos ofrezca más limitaciones que ventajas. Las características de un sistema de primer orden con tiempo muerto, son en términos generales similares a un sistema de primer orden con la agravante de poseer las limitaciones inherentes de los sistemas con retardo las cuales fueron enumeradas anteriormente.

Debido a las razones anteriores el objetivo de este trabajo se limitará a utilizar un modelo de primer orden con retraso de tiempo, que en un sistema de control sea posible controlarlo de la mejor manera.

CONTROLADORES Y SINTONIZACIÓN

3.1 INTRODUCCIÓN

Un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con la entrada de referencia (valor deseado), determina el error, y produce una señal de control que reducirá el error a cero, o a un valor muy pequeño. La forma como el controlador automático produce la señal de control, se denomina *Acción de Control*.

En este capítulo se analizarán las acciones básicas de control, esto es, se analizarán los efectos de la acción proporcional, integral y derivativa así como sus posibles combinaciones en el comportamiento del sistema por medio de la retroalimentación.

3.2 CLASIFICACIÓN DE CONTROLADORES

Los controladores industriales analógicos, se pueden clasificar de acuerdo con sus funciones de control, de la siguiente forma:

1. Controladores de dos posiciones, o intermitentes (encendido-apagado).
2. Controladores proporcionales (**P**).
3. Controladores integrales (**I**).
4. Controladores proporcional-integral (**PI**)
5. Controladores proporcional-derivativo (**PD**)
6. Controladores proporcional-integral-derivativo (**PID**)

3.3 ACCIÓN DE CONTROL DE DOS POSICIONES

En un sistema de control de dos posiciones, el actuador tiene sólo dos posiciones fijas, que en muchos casos son, simplemente conectado y desconectado. El controlador de dos

posiciones o de encendido-apagado es relativamente simple y económico, y por esta razón se usa ampliamente en sistemas de control tanto industriales como domésticos.

Sea $u(t)$ la señal de salida del controlador y $e(t)$ la señal de error. En un controlador de dos posiciones, la señal $u(t)$ pertenece en un valor máximo o mínimo, según sea la señal de error positiva o negativa, de manera que

$$\begin{aligned} u(t) &= U_1 && \text{para } e(t) > 0 \\ u(t) &= U_2 && \text{para } e(t) < 0 \end{aligned}$$

Donde U_1 y U_2 son constantes. Generalmente el valor mínimo de U_2 puede ser, o bien 0, ó $-U_1$. En general los controladores de dos posiciones son dispositivos eléctricos. Los controladores neumáticos proporcionales con muy altas ganancias también actúan como controladores de dos posiciones y se les conoce como controladores neumáticos de dos posiciones.

En las figuras 3-1 (a) y (b) se pueden ver diagramas de bloques de controladores de posiciones. El rango en el que la señal de error debe variar antes que se produzca la conmutación, se denomina brecha diferencial o zona muerta. En la figura 3-1 (b) se indica una brecha diferencial. Tal brecha diferencial hace que la salida del controlador $u(t)$ mantenga su valor hasta que la señal de error haya rebasado ligeramente el valor de cero. En ambos casos, la brecha diferencial es el resultado de una fricción no intencional o movimiento perdido; sin embargo, a veces se provoca en forma deliberada para impedir la acción excesivamente frecuente del actuador y elemento final de control. Como se puede ver en la figura 3-2, la señal de salida fluctúa continuamente entre los dos límites requeridos para producir la acción del actuador desde una posición fija a la otra.

Nótese que existe una oscilación entre dos límites, pues cuando la salida alcanza el valor más alto permisible se desactiva ésta, por ende la señal decrece hasta alcanzar el lumbral pequeño que indica la necesidad de activar la entrada. Esta es una respuesta típica de un sistema bajo la acción de un controlador de dos posiciones.

De la figura 3-2, se puede deducir que la amplitud de la oscilación de salida puede reducirse disminuyendo la brecha diferencial, sin embargo, la reducción de la brecha diferencial aumenta la cantidad de conmutaciones por minuto, y por tanto reduce la vida útil de los componentes. La magnitud de la brecha diferencial se debe determinar por consideraciones de exactitud deseada y duración de los componentes.

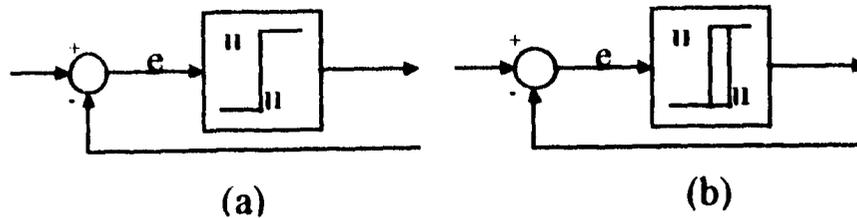


figura 3-1

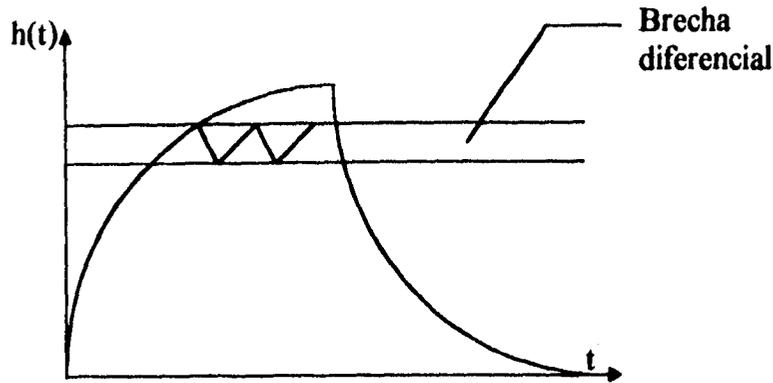


figura 3-2

3.4 ACCIÓN DE CONTROL PROPORCIONAL

Para un controlador de acción de control proporcional, la relación entre la salida del controlador $u(t)$ y la señal de error $e(t)$, es

$$u(t) = K_p e(t)$$

o, en transformada de Laplace:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

Donde K_p se denomina ganancia proporcional.

Sin importar el mecanismo en sí y la potencia que lo alimenta, el controlador proporcional es esencialmente un amplificador con ganancia ajustable. En la figura 3-3 se puede ver un diagrama de bloques de este controlador.

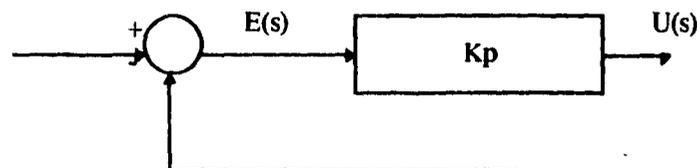


figura 3-3

El efecto del uso de este controlador es en forma general modificar la velocidad del sistema; Además de que el error estacionario se puede reducir aumentando el valor de la ganancia K_p . Sin embargo, al aumentar este valor, la respuesta del sistema se vuelve oscilatoria.

EFFECTOS DEL CONTROL PROPORCIONAL SOBRE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN

1. El sistema permanece como de primer orden con respecto a cambios en la referencia.
2. La constante de tiempo ha sido reducida, y la respuesta en lazo cerrado, es más rápida que la de lazo abierto ante cambios en la referencia o en la carga.
3. Las ganancias estáticas han disminuido.

3.5 ACCIÓN DE CONTROL INTEGRAL

En un controlador con acción de control integral, el valor de la salida del controlador $u(t)$ varía en razón proporcional a la integral de la señal de error $e(t)$. Es decir,

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t)$$

o bien

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt$$

donde K_i es una constante ajustable. La razón de transferencia del controlador integral es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

si se duplica el valor de $e(t)$ el valor de $u(t)$ varía a doble velocidad. Ante un error igual a cero, el valor de $u(t)$ permanece estacionario. En ocasiones la acción del control integral recibe el nombre de *Control de reposición o restablecimiento*. En la figura 3-4 aparece un diagrama de bloques de este control.

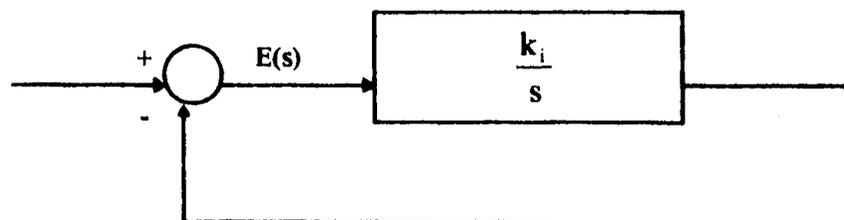


figura 3-4

De existir un error de estado estacionario, o corrimiento en la respuesta a la entrada escalón esta se puede eliminar si se incluye la acción del control integral. Nótese que la acción de control integral, si bien remueve el corrimiento o error estacionario, puede llevar a una respuesta oscilatoria de amplitud lentamente creciente o aun de magnitud creciente, ambas son indeseables generalmente.

EFFECTO DEL CONTROL INTEGRAL SOBRE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN

1. El control integral aumenta en uno el orden del sistema en lazo cerrado ante cambios en la referencia. Así, el sistema original de primer orden se vuelve de segundo orden y su respuesta depende del valor del factor de amortiguamiento.
2. El control integral elimina el error de estado estacionario.
3. Las características de la respuesta dependen de K_c y T_i , ya que ambos afectan a la nueva constante de tiempo del sistema retroalimentado y su factor de amortiguamiento.
 - Si K_c aumenta, el factor de amortiguamiento disminuye y la respuesta se hace más rápida pero tanto el sobre impulso como la razón de decaimiento de la respuesta se hacen mayores.
 - Si T_i disminuye, los efectos sobre la respuesta son similares al aumento de K_c .
4. Si el error no se elimina rápidamente, se puede presentar el efecto de saturación en el dispositivo de control final.

3.6 ACCIÓN DE CONTROL DERIVATIVA

En un controlador con acción de control derivativa, el valor de la salida del controlador $u(t)$ varia en razón proporcional a la derivada de la señal de error $e(t)$ es decir:

$$u(t) = T_d \frac{de(t)}{dt}$$

o bien:

$$\int_0^t u(t) = T_d e(t)$$

donde T_d es la constante ajustable, la función de transferencia del controlador derivativo es:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = T_d s$$

Una ventaja de utilizar la acción de control derivativa, es que responde al ritmo de variación del error y puede producir una corrección significativa antes que la magnitud del error sea

excesivamente grande, así; el control derivativo anticipa el error actuante, inicia una acción correctiva temprana y tiende a incrementar la estabilidad del sistema.

Aun cuando el control derivativo no afecta directamente al error en estado estacionario, añade amortiguamiento al sistema y permite así usar valores mas elevados de ganancia, lo que resulta en una mejora de la exactitud en estado estacionario. En la figura 3-5 aparece un diagrama de bloques de este control.

EFFECTO DEL CONTROL DERIVATIVO SOBRE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN

1. El control derivativo no cambia el orden de la respuesta en lazo cerrado ante cambios en la referencia (caso ideal), pues en la realidad, a fin de implementar el efecto derivativo es necesario utilizar una función de transferencia con un cero y un polo el cual éste es muy pequeño, la existencia de este polo implica un aumento en el orden.
2. La constante de tiempo de lazo cerrado es mayor que la de lazo abierto, es decir, la respuesta del sistema controlado es más lenta que la del sistema original.
3. Si se incrementa la ganancia del controlador, la respuesta es aún más lenta.

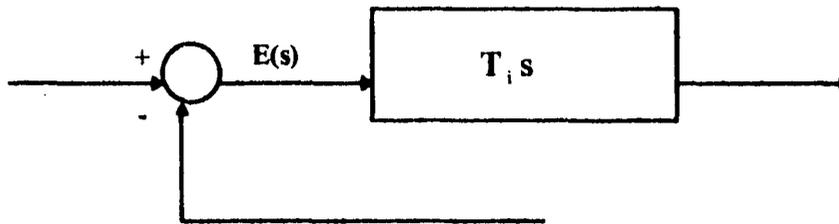


figura 3-5

3.7 ACCIÓN DE CONTROL PROPORCIONAL - INTEGRAL

La acción de un controlador proporcional-integral queda definida por la siguiente ecuación:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

y la función de transferencia del controlador es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

donde K_p es la ganancia proporcional y T_i se denomina tiempo integral ambos valores, K_p y T_i son ajustables. El tiempo integral regula la acción de control integral, mientras que una

modificación en K_p afecta tanto a la parte integral como a la proporcional de la acción de control. El recíproco del tiempo integral T_i recibe el nombre de *Frecuencia de reposición*. La Frecuencia de reposición es la cantidad de veces por minuto en que se repite la acción proporcional. La frecuencia de reposición se mide en término de reposiciones por minuto. La figura 3-6(a) muestra un diagrama de bloques de un controlador proporcional integral. Si la señal de error $e(t)$ es una función escalón unitario como se ve en la figura 3-6(b), la salida del controlador $u(t)$ pasa a ser la indicada en la figura 3-6(c).

EFECTO DEL CONTROL PI

1. El orden de la respuesta se incrementa (debido al modo I).
2. Se elimina el error de estado estacionario (debido al modo I).
3. Si K_c se incrementa, la respuesta se vuelve más rápida (debido al modo P), y más oscilatoria ante cambios en la referencia, se incrementan el sobretiro y la razón de decaimiento, (debido al modo I).
4. Si K_c se mantiene constante y T_i disminuye, la respuesta se vuelve más rápida, pero más oscilatoria (debido al modo I).

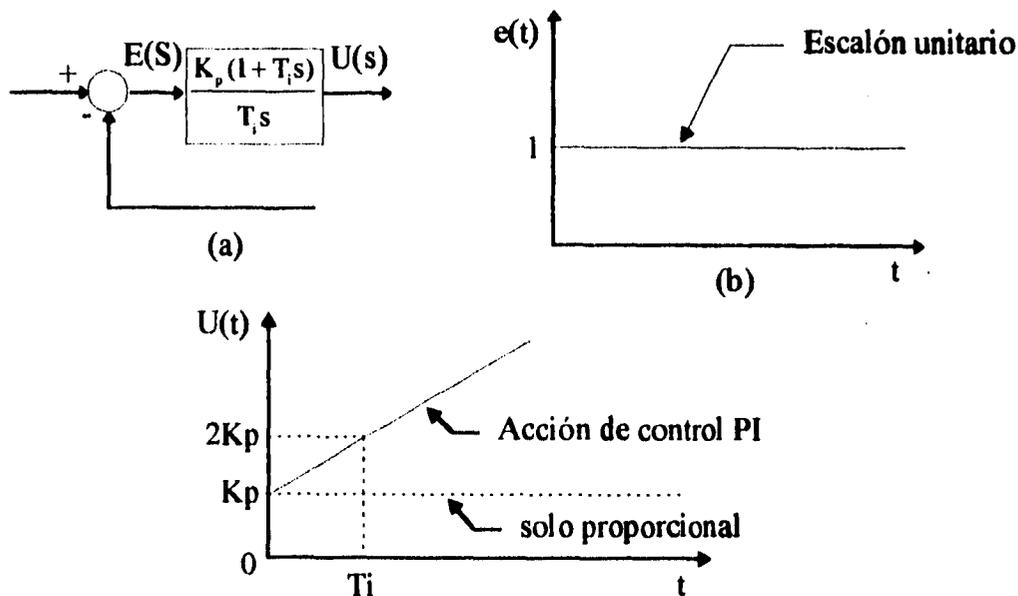


figura 3-6

3. 8 ACCIÓN DE CONTROL PROPORCIONAL - DERIVATIVO

La acción de control proporcional-derivativo se define por la siguiente ecuación

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

y la función de transferencia es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

donde K_p es la ganancia proporcional y T_d es una constante denominada tiempo derivativo o tiempo de adelanto. Tanto K_p como T_d son sintonizables. La acción de control derivativa, a veces llamada Control de velocidad, se presenta cuando el valor de salida del controlador es proporcional a la velocidad de variación de la señal de error. Y el tiempo derivativo T_d es el intervalo de tiempo en el que la acción derivativa se adelanta al efecto de la acción proporcional. En la figura 3-7(a) se puede ver un diagrama de bloques de un controlador proporcional-derivativo. Si la señal de error $e(t)$ es una función rampa unitaria como se muestra en la figura 3-7(b), la salida del controlador $u(t)$ es la que se ve en la figura 3-7(c), la acción derivativa tiene una característica anticipatoria. Por supuesto, una acción derivativa nunca puede anticipar una acción que aun no acontece.

En cuanto acontece la acción derivativa tiene una ventaja al anticiparse al error, sus desventajas son que amplifica las señales de ruido y produce un efecto de saturación en el actuador.

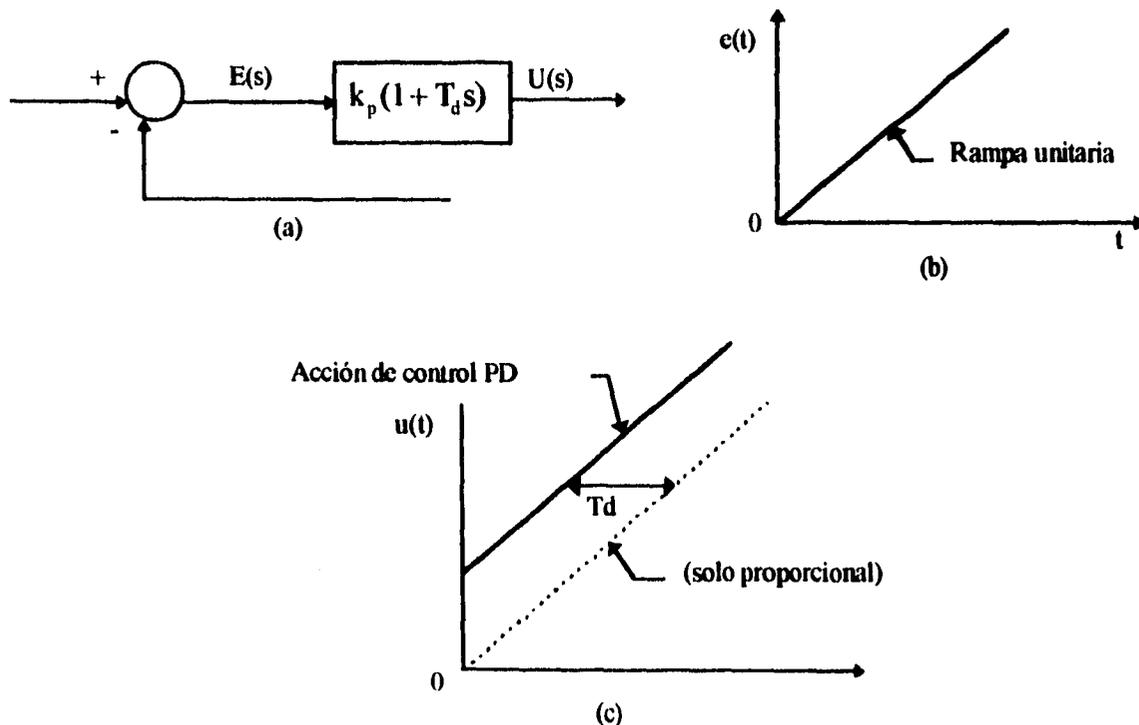


figura 3-7

Nótese que nunca se usará una sola acción de control derivativo, porque este control es efectivo durante periodos transitorios solamente.

3. 9 ACCIÓN DE CONTROL PROPORCIONAL-INTEGRAL-DERIVATIVO

La combinación de la acción proporcional-integral-derivativa, tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un control con esta acción de control es

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

y la función de transferencia es:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

donde K_p es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral, y T_d es el tiempo derivativo. En la figura 3-8(a) se puede ver el diagrama de bloques de un controlador proporcional, integral y derivativo. Si $e(t)$ es una función rampa unitaria, como se ve la figura 3-8(b), la salida del controlador $u(t)$ resulta ser la que se muestra en la figura 3-8(c).

EFECTO DEL CONTROLADOR PID

1. El general, tiene una respuesta similar, cualitativamente, a la del control PI.
2. El modo D introduce los siguientes beneficios: ante incrementos de K_c , el sobreimpulso casi no varía y el tiempo de establecimiento, t_s , es más corto; la respuesta es más rápida.

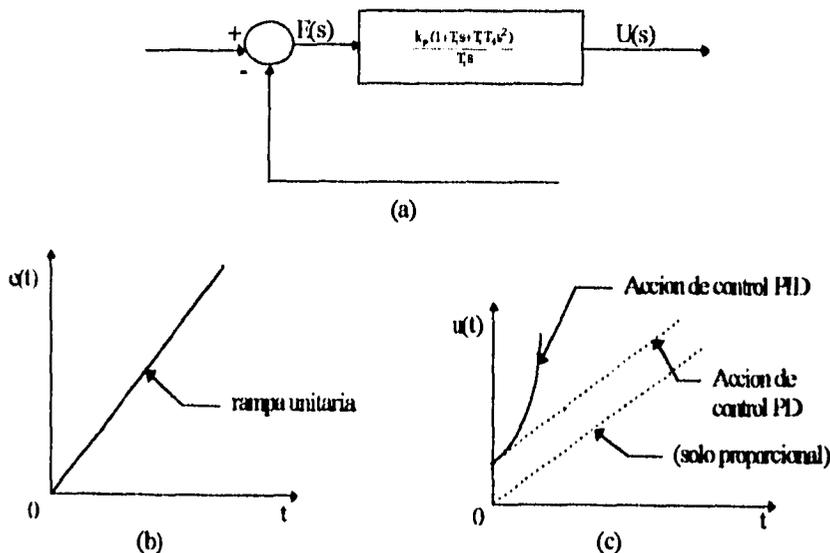


figura 3-7

figura 3-8

3. 10 MÉTODOS CONVENCIONALES DE SINTONIZACIÓN

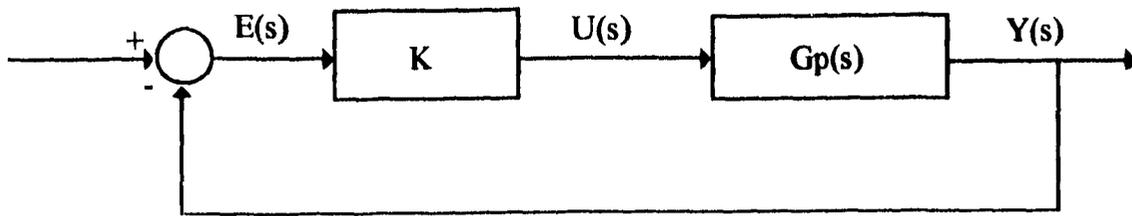
El proceso de sintonización de un controlador, consiste en ajustar los parámetros de éste para producir una respuesta de lazo cerrado deseada. La sintonización del lazo de control es análogo al procedimiento que se sigue al afinar la máquina de un automóvil o al de ajuste (sintonización) de una televisión. La sintonización de un controlador proporcional integral derivativo (PID o controlador de tres modos), presenta algunas dificultades puesto que son tres los parámetros que se deben ajustar; la ganancia (K_p), el tiempo integral (T_i) y el tiempo derivativo (T_d). El ajuste de los parámetros del controlador se pueden llevar a cabo para satisfacer un juego de especificaciones de diseño, éste es quizá uno de los procedimientos de mayor dificultad, puesto que son tres los parámetros a ajustar y necesariamente sería un procedimiento de prueba y error. Otra forma alternativa de hacerlo sería mediante la técnica de CONTORNOS DE LAS RAÍCES, que es la misma del Lugar Geométrico de las Raíces pero con variación múltiple de parámetros.

Por otra parte, existen algunos procedimientos estándar, que están basados en criterios para minimizar la función de error de varias maneras distintas. Es necesario mencionar que los resultados que se obtienen al aplicar estos procedimientos, son los parámetros óptimos, sin embargo, sólo dan indicación de los parámetros iniciales (base) y a partir de éstos es todavía necesario hacer un reajuste de los mismos en caso de no obtener la respuesta deseada en lazo cerrado. En las siguientes páginas se presentan en forma breve los procedimientos de uso frecuente, siendo éstos:

- Método de oscilaciones sostenidas
- Método de oscilaciones amortiguadas
- Método de la curva de reacción
 - *Ziegler-Nichols
 - *Cohen-Coon
- Criterios de desempeño

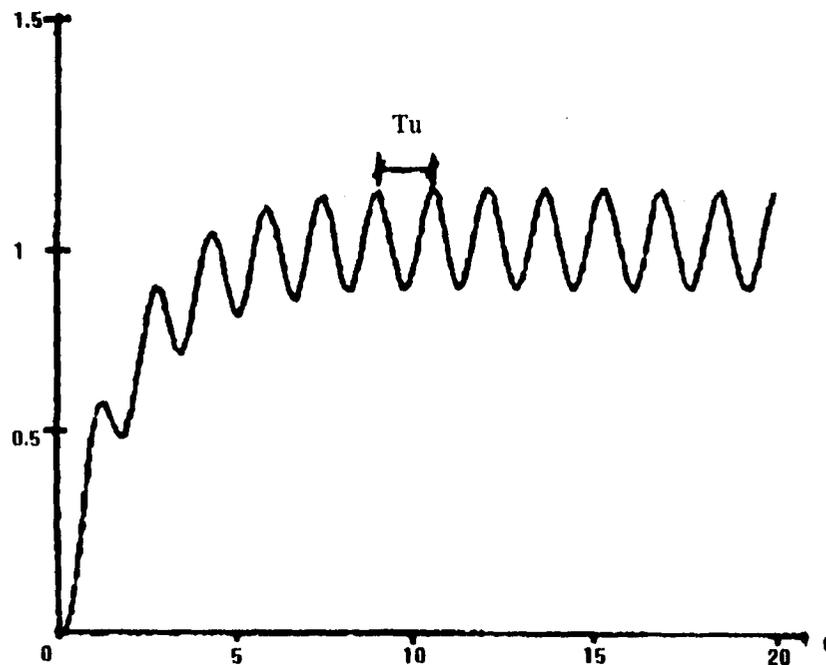
3.10.1 Método de oscilaciones sostenidas (Ziegler-Nichols 1942)

En este método los parámetros del controlador se calculan a partir de las características dinámicas del proceso a controlar. Estas características son representadas por la “ganancia límite” (de un controlador proporcional) y el periodo de oscilación, esto es, el sistema (proceso) se realimenta con un controlador proporcional de acuerdo a la siguiente topología:



La ganancia del controlador proporcional se varía (incrementa) hasta que el sistema realimentado presenta oscilaciones sostenidas y se evalúa el período de oscilación, es decir, la respuesta escalón de lazo cerrado es de la forma:

donde, las características dinámicas del proceso son:



K_u : Es el valor de K para el cual el sistema realimentado presenta oscilaciones sostenidas.

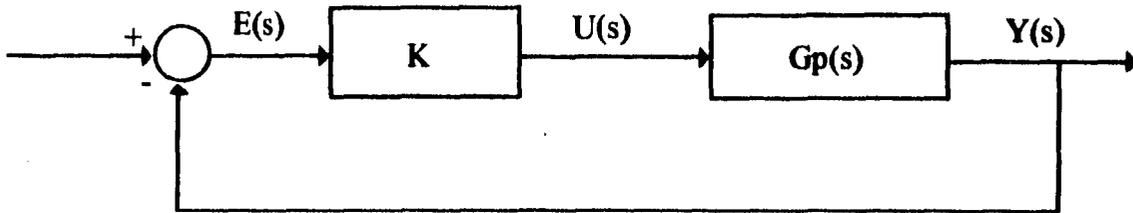
T_u : Es el período de oscilaciones de la señal de salida del sistema en segundos.

Las fórmulas de sintonización son en este caso:

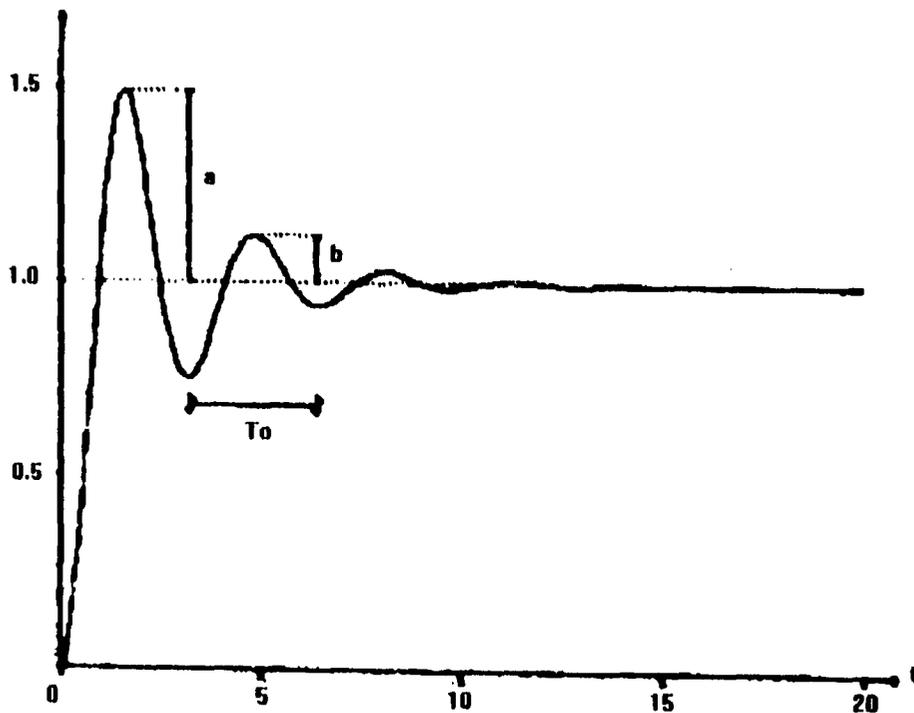
Tipo de Controlador	K_c	T_i	T_d
P	$\frac{K_u}{2}$	--	--
PI	$\frac{K_u}{2.2}$	$\frac{T_u}{1.2}$	--
PID	$\frac{K_u}{1.7}$	$\frac{T_u}{2}$	$\frac{T_u}{8}$

3.10.2 Método de oscilaciones amortiguadas (Harriot 1957)

En muchos casos no es posible determinar las características dinámicas del proceso, requeridas por el método de oscilaciones sostenidas (K_o y T_o), debido a la naturaleza del proceso a controlar. Para resolver tal situación, se propone un segundo método que el de oscilaciones amortiguadas. Este método consiste en realimentar el sistema (proceso) a controlar con un controlador proporcional, empleando la siguiente configuración:



La ganancia del controlador proporcional se varía hasta que la respuesta escalón del sistema realimentado tiene la siguiente forma:



la relación entre el primer y segundo sobrepasos debe ser igual a 0.25, esto es:

$$\frac{b}{a} = 0.25$$

Esta condición se logra cuando el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes es de 0.2176. En este caso, el proceso queda caracterizado desde el punto de vista dinámico mediante:

T_c : Es el valor de K para la cual la respuesta escalón del sistema realimentado presenta una relación entre el segundo y primer sobrepasos de 0.25.

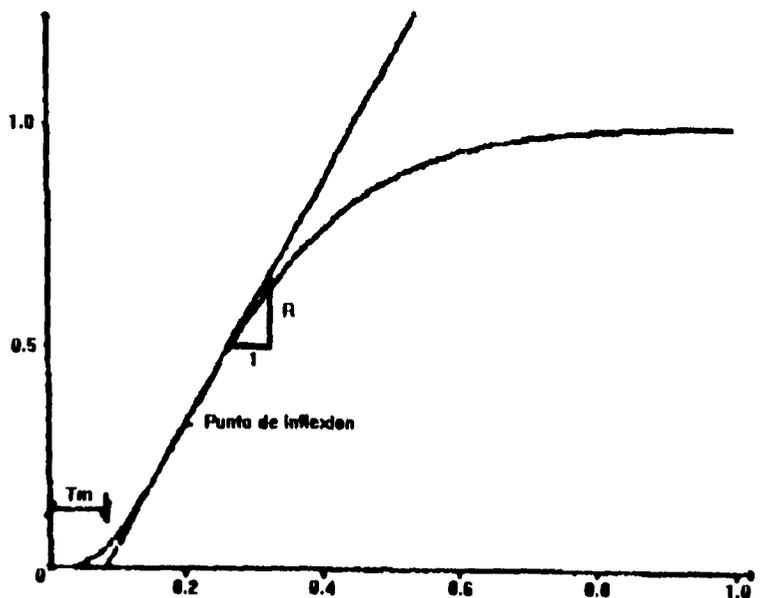
T_c : Es el período de oscilación de la respuesta escalón del sistema realimentado para las condiciones especificadas.

Las fórmulas de sintonización son en este caso:

Tipo de Controlador	K_c	T_i	T_d
P	K_o	--	--
PI	K_o	T_o	--
PID	K_o	$\frac{T_o}{1.5}$	$\frac{T_o}{6}$

3.10.3 Método de la curva de reacción (Ziegler-Nichols 1942)

Se propone un método adicional de sintonización en el que se determinan las características dinámicas del proceso a controlar, a partir de la respuesta del sistema de en lazo abierto. Una vez que se tienen estas características es posible obtener los parámetros del controlador. El procedimiento para la caracterización del proceso es como sigue; el proceso en lazo abierto es excitado con una función escalón y se obtiene su respuesta, teniéndose en este caso una curva como se muestra en la siguiente figura:



Para esta curva se determina el punto o puntos de inflexión y sobre el que tiene mayor pendiente se traza una recta tangente a la curva. Esta recta intercepta al eje de tiempos (eje horizontal) y el tiempo muerto que caracteriza al sistema se mide desde el origen hasta este punto de intersección como se muestra en la figura. El otro parámetro que se requiere para el cálculo de los parámetros del controlador es la pendiente de la recta tangente a la respuesta escalón que pasa por el punto de inflexión (R).

Las fórmulas de sintonización están dadas en la siguiente tabla:

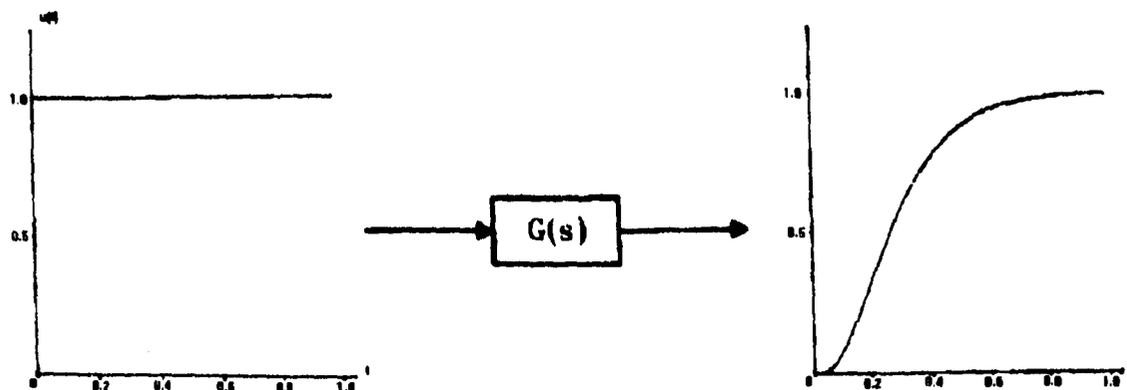
Tipo de Controlador	K_c	T_i	T_d
P	$\frac{1}{RT_m}$		
PI	$\frac{0.9}{RT_m}$		
PID	$\frac{1.2}{RT_m}$	$\frac{0.3}{T_m}$	$0.8T_m$

3.10.4 Método de la curva reacción (Cohen-Coon 1950)

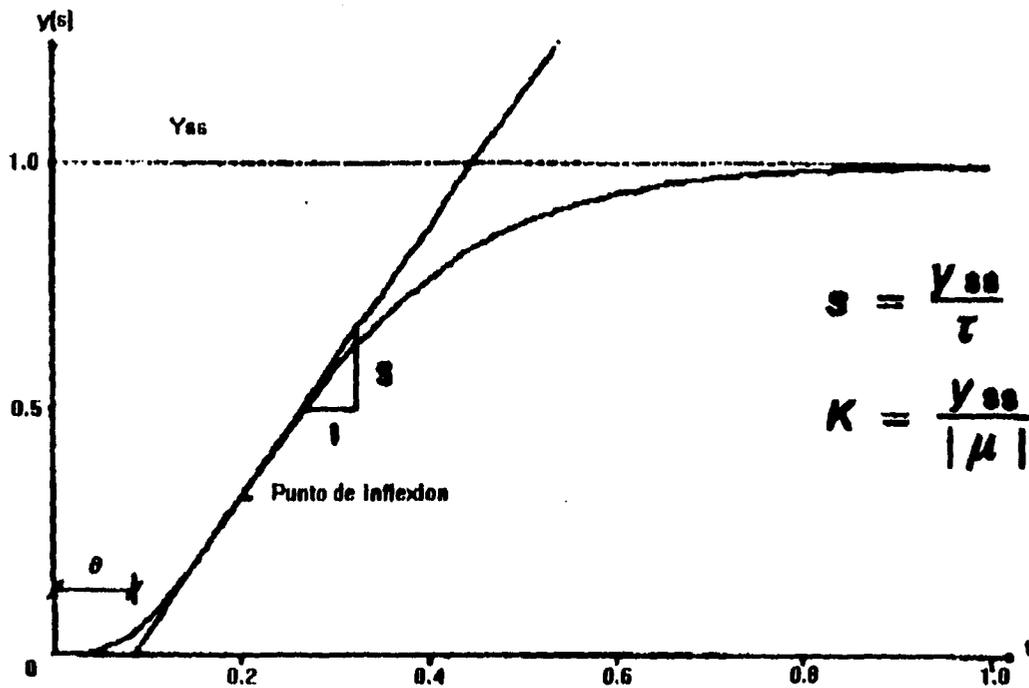
Este método es muy similar al de lazo abierto de Ziegler y Nichols, en este caso el proceso a controlar se caracteriza mediante una función de transferencia de primer orden con tiempo muerto, de la siguiente forma:

$$G_p = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1}$$

y los parámetros K, y r son determinados a partir de la respuesta escalón del sistema en lazo abierto, esto es:



Teniendo que la respuesta escalón es de la forma:



Las expresiones para sintonización, están dadas en este caso por:

- Proporcional (P)

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta} \left[1 + \frac{\theta}{3\tau} \right]$$

- Proporcional-integral (PI)

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta} \left[\frac{9}{10} + \frac{\theta}{12\tau} \right]$$

$$T_i = \theta \frac{30 + \frac{3\theta}{\tau}}{9 + \frac{\theta}{\tau}}$$

- Proporcional-derivativo (PD)

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta} \left[\frac{5}{4} + \frac{\theta}{6\tau} \right]$$

$$T_d = \theta \frac{6 - \frac{2\theta}{\tau}}{22 + \frac{3\theta}{\tau}}$$

- Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

$$K_c = \frac{1}{k} \frac{\tau}{\theta} \left[\frac{3}{4} + \frac{\theta}{4\tau} \right]$$

$$T_i = \theta \frac{32 + \frac{6\theta}{\tau}}{13 + \frac{8\theta}{\tau}}$$

$$T_d = \theta \frac{4}{11 + \frac{2\theta}{\tau}}$$

3.10.5 MÉTODO DE SINTONIZACIÓN DE PRUEBA Y ERROR EN LÍNEA (Método sugerido por fabricantes de controladores)

- PASO1) Elimina las acciones integral y derivativa, ajustando Y_d a su valor mínimo y t_i a su valor ajustado.
- PASO2) Ajustar K_c a un valor bajo (p. ej. $K_c = 0.5$) y poner al controlador en automático.
- PASO3) Incrementar la ganancia del controlador K_c poco a poco (incrementos pequeños)
- PASO4) Reducir K_c por un factor de 2.
- PASO5) Disminuir t_i poco a poco hasta que se obtenga nuevamente una oscilación continua. Ajustar t_i igual a tres veces este valor.
- PASO6) Incrementar T_d hasta que sea obtenida nuevamente una oscilación continua, hacer que T_d sea igual a un tercio de este valor.

NOTAS .

- 1) En cada variación de los parámetros del controlador, se debe hacer un pequeño cambio en la referencia o en la carga.
- 2) El valor de K_c del paso 3, que provoca la oscilación sostenida es conocida como "ganancia última K_{cu} ".
- 3) Al realizar la prueba, no se debe permitir que la salida del controlador se sature.

3.11 DISCUSIÓN DE LOS MÉTODOS PRESENTADOS

OBSERVACIONES DE LOS MÉTODOS DE OSCILACIONES SOSTENIDAS, AMORTIGUADAS Y DE LAS CURVAS DE REACCIÓN

- 1) La ganancia K_c del controlador PI es menor que la del controlador Po. Esto se debe a que la acción integral hace más sensible al sistema y la ganancia K_c debe ser más conservativa.
- 2) El efecto estabilizador del modo derivativo permite que el controlador PID use valores más altos de ganancia que los controladores P y PI.

VENTAJAS:

- 1) Sólo se necesita realizar un ensayo experimental.
- 2) No se requiere el procedimiento iterativo prueba y error.
- 3) Los parámetros del controlador se calculan fácilmente.

DESVENTAJAS:

- 1) La prueba experimental se desarrolla en lazo abierto y si ocurren cambios significativos en la carga o perturbaciones durante prueba, no se toma ninguna acción correctiva, y los resultados de la prueba pueden estar distorsionados significativamente.
- 2) Puede resultar difícil la determinación de la pendiente con el punto de inflexión, especialmente si la medición es ruidosa.
- 3) El método tiende a ser sensible a errores de calibración del controlador.
- 4) Los parámetros resultantes del controlador tienden a resultar en respuestas oscilatorias ya que están basados en un criterio de la razón de decaimiento de $\frac{1}{4}$.
- 5) El método no es recomendable para procesos que tienen respuestas oscilatorias en lazo abierto.

DESVENTAJAS DEL MÉTODO DE SINTONIZACIÓN EN LÍNEA

- 1) Consume mucho tiempo si se requiere muchas pruebas para sintonizar K_c , t_i , t_d , o si la dinámica del proceso es muy lenta, puede resultar costosa la prueba, por la pérdida de productividad o por una mala calidad del producto.
- 2) La condición de la oscilación sostenida acerca al proceso al límite de estabilidad y si ocurren perturbaciones externas o cambios en el proceso durante la sintonización, pueden presentarse situaciones peligrosas u operaciones inestables.

- 3) Este método no es aplicable a procesos que son inestables en lazo abierto, que típicamente son inestables en valores bajos y elevados de K_c y estables para un rango intermedio de valores de K_c .
- 4) Algunos procesos simples no tienen una ganancia última.

OPTIMIZACIÓN PARAMÉTRICA

4.1 INTRODUCCIÓN

De lo tratado en el capítulo precedente se puede concluir que los procedimientos para la sintonización de controladores PID presentan muchas desventajas; dos de las más importantes son que el método no es riguroso y que se basa en procedimientos de tanteo. Por el contrario, el proyecto de sistemas de conducción óptima se dirige a obtener un sistema que sea lo mejor posible con respecto a algún índice o criterio de desempeño. Dos de los más importantes criterios utilizados en la conducción óptima son la optimización del tiempo y la optimización con respecto a un índice de desempeño.

El presente capítulo abordará los índices de desempeño como una herramienta útil a fin de sintonizar de la mejor manera un controlador PID en retroalimentación unitaria con una planta de primer orden con tiempo muerto.

4.2 ÍNDICES DE DESEMPEÑO

Un índice de desempeño es un número que indica la “bondad” del comportamiento de un sistema. Se considera que un sistema de control es óptimo, si los valores de los parámetros se eligen de modo que el índice de desempeño elegido sea mínimo o máximo, según el caso. Los valores óptimos de los parámetros dependen directamente del índice de desempeño seleccionado.

4.2.1 REQUERIMIENTOS DE LOS ÍNDICES DE DESEMPEÑO

Un índice de desempeño debe brindar selectividad, es decir, un ajuste óptimo de los parámetros que se distinguen claramente de los ajustes no óptimos de los parámetros. Además, un índice de desempeño debe presentar un único valor numérico positivo o cero, éste último se obtiene si y solamente si la medida de la desviación es idénticamente cero.

Para que un índice de desempeño sea útil, debe ser una función de los parámetros del sistema y debe presentar un máximo o un mínimo. Finalmente, para que tenga utilidad práctica, debe ser fácilmente calculable, en forma analítica o mediante computadora.

4.2.2 ÍNDICES DE ERROR DE DESEMPEÑO

A continuación, se tratarán diversos criterios de error, cuyos índices de desempeño son integrales de alguna función o una función pesante de la desviación de la salida del sistema respecto a la entrada. Dado que es posible obtener los valores de las integrales como funciones de los parámetros del sistema, una vez especificado un índice de desempeño, se puede diseñar un sistema óptimo ajustando los parámetros que produzcan, un valor mínimo de la integral.

Este trabajo analizará los cuatro siguientes índices:

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad \int_0^{\infty} t e^2(t) dt \quad \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

Sea un sistema de control cuya salida deseada y real sea $r(t)$ y $c(t)$, respectivamente. El error $e(t)$ se define como:

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

Note que, a menos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

los índices de desempeño tienden a infinito $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ no tiende a cero, se puede definir

$$e(t) = c(\infty) - c(t)$$

Con esta definición de error, los índices de desempeño darán números finitos, si el sistema es estable.

4.2.2.1 CRITERIO INTEGRAL DEL ERROR CUADRÁTICO

De acuerdo con el criterio integral de error cuadrático (ISE), la calidad de comportamiento del sistema se evalúa por medio de la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

donde el límite superior se puede substituir por T , que se elige lo suficientemente grande como para que $e(t)$ sea despreciable para $T < t$. El sistema óptimo será el que minimice esta integral. Este índice se ha utilizado extensamente tanto para entradas determinísticas (como entrada escalón), como para entradas estadísticas, debido a la facilidad de cálculo de la integral, ya sea en forma analítica o experimental. Una característica de este índice de desempeño es que da mayor importancia a los errores grandes y menos a los pequeños. Este criterio no es muy selectivo, por ejemplo al considerar el siguiente sistema de segundo orden:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

un cambio en ξ de 0.5 a 0.7 no resulta en un cambio importante en el valor de esta integral.

Un sistema diseñado con este criterio tiende a mostrar una disminución en un error inicial elevado, por lo tanto la respuesta es rápida y oscilatoria. Así, el sistema tiene estabilidad relativa pobre.

Sin embargo, nótese que el criterio integral de error cuadrático con frecuencia es de significación práctica, ya que la minimización del índice de desempeño, resulta en una minimización de consumo de potencia para algunos sistemas.

4.2.2.2 CRITERIO INTEGRAL DEL CUADRADO DEL ERROR POR EL TIEMPO

Este índice de desempeño definido por el criterio integral de error absoluto (ITSE) es

$$\int_0^{\infty} t e^2(t) dt$$

El sistema óptimo es el que minimiza esta integral.

Este criterio tiene la característica de que la respuesta al escalón unitario del sistema ante un error inicial grande, tiene poco peso, mientras que los errores que se producen más tarde en la respuesta transitoria, se castigan severamente. Este criterio tiene una mejor selectividad comparada con el criterio de error cuadrático integral.

4.2.2.3 CRITERIO INTEGRAL DEL VALOR ABSOLUTO DEL ERROR

Este índice de desempeño por el criterio integral del valor absoluto del error (**IAE**) es

$$\int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

Este es uno de los índices de desempeño de más fácil aplicación. Si se utiliza este criterio, no se puede optimizar ni los sistemas altamente subamortiguados, ni los altamente sobreamortiguados. Un sistema basado en éste criterio es un sistema con característica de respuesta satisfactoria y amortiguamiento razonable. Sin embargo, este índice de desempeño no se puede evaluar fácilmente por medios analíticos.

4.2.2.4 CRITERIO INTEGRAL DEL PRODUCTO DEL ERROR ABSOLUTO POR TIEMPO

De acuerdo a este criterio (**ITAE**) el sistema óptimo es el que minimiza el siguiente índice de desempeño

$$\int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

Como en los criterios precedentes, un error inicial grande en la respuesta al escalón unitario tiene poco peso y los errores tardíos en la respuesta transitoria, son penalizados severamente.

Un sistema diseñado con este criterio se caracteriza por que el sobreimpulso en la respuesta transitoria es pequeño, y los oscilaciones son bien amortiguadas. Este criterio posee buena selectividad y constituye una mejora respecto al criterio integral de error absoluto. Sin embargo, es muy difícil de evaluar analíticamente, aunque se puede medir experimentalmente con facilidad.

4.2.2.5 COMPARACIÓN DE LOS DIVERSOS CRITERIOS DE ERROR.

Si se quiere suprimir o atenuar fuertemente errores grandes, el criterio **ISE** es mejor que el **IAE**, por que los errores se elevan al cuadrado y contribuyen más al valor de la integral.

Si se requiere suprimir los errores pequeños, el criterio **IAE** es el mejor que el **ISE**, por que al elevar al cuadrado valores pequeños y menores que 1 se hacen aún más pequeños y

contribuyen menos al valor de la integral. Así, el criterio **IAE** toma en cuenta mejor a los errores pequeños.

Si se deseará suprimir errores, que persisten durante tiempos prolongados, el criterio **ITAE** es el mejor por que la presencia de un t elevado amplifica el efecto de los errores, aún los pequeños.

NOTA: Para un mismo criterio, diferentes cambios en la entrada de referencia darán lugar a diversos diseños.

4.3 MÉTODOS DE SINTONIZACIÓN BASADOS EN CRITERIOS DE DESEMPEÑO

En estos métodos se parte de una caracterización del proceso a controlar idéntica a la del método de la curva de reacción de Cohen y Coon, presentando algunas variantes en lo referente al cálculo de los parámetros que caracterizan al proceso. Las fórmulas de sintonización se obtienen a partir de la minimización de la integral de la función de error (criterios de desempeño integrales), estos criterios son:

a) Minimización de la integral de la función de error al cuadrado (**ISE**), definido de la forma:

$$ISE = \int |e(t)|^2 dt$$

b) Minimización de la integral de la función de error en valor absoluto (**IAE**), definido de la forma:

$$IAE = \int |e(t)| dt$$

c) Minimización de la integral de la función de error en valor absoluto multiplicada por el tiempo (**ITAE**), definido de la forma:

$$ITAE = \int t|e(t)| dt$$

Se establecen expresiones para la sintonización de los parámetros del controlador, mediante estos criterios de desempeño para las cuatro estructuras de controladores **PID** descritas.

Por otra parte, para la utilización de estas expresiones de sintonización se requieren tres parámetros que son los que caracterizan al proceso o sistema a controlar (K, θ, τ)

CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO

Sea un proceso o sistema descrito mediante la función de transferencia:

$$Gp(s) = G \frac{q(s)}{p(s)}$$

donde:

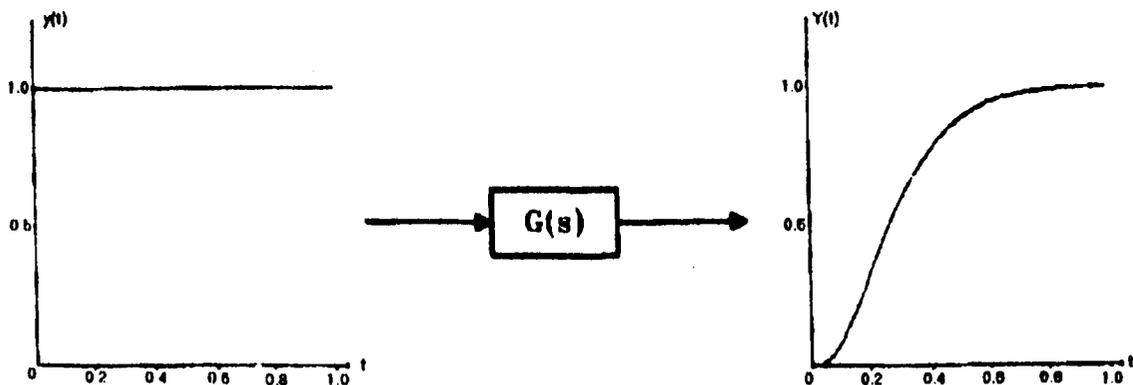
- G:** Es la ganancia del sistema.
- q(S):** Es un polinomio en S de grado m cuyas raíces son los ceros del sistema.
- p(S):** Es un polinomio en S de grado n cuyas raíces son los polos del sistema.

Además, se debe satisfacer la condición de que $n > m$ para que el sistema sea físicamente realizable.

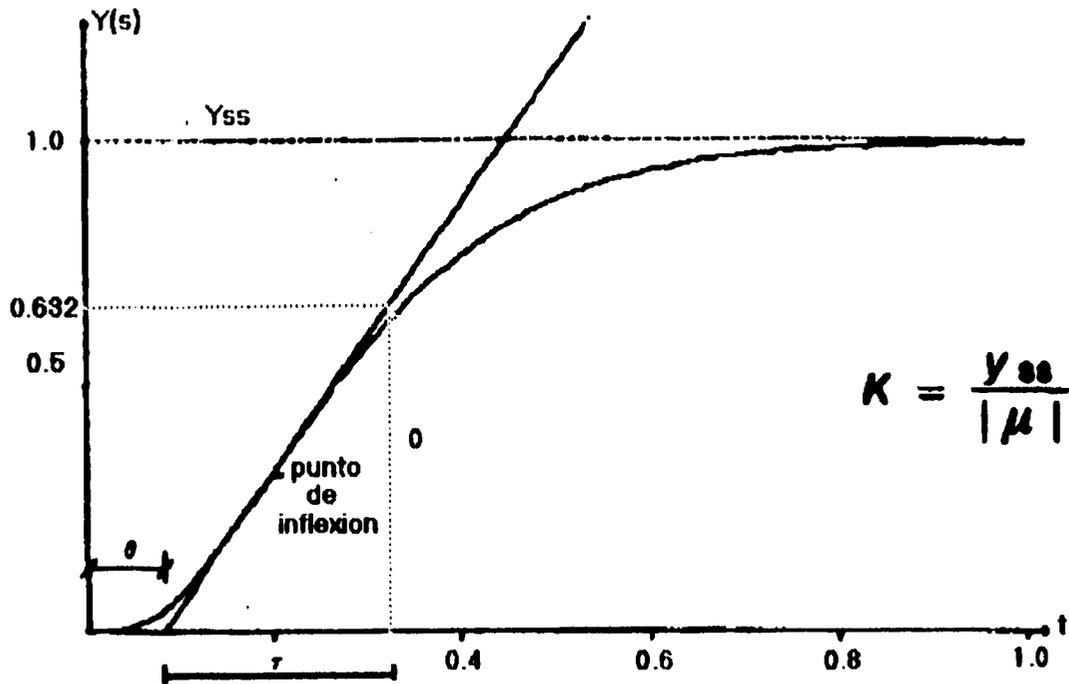
El proceso descrito mediante $G(S)$ será entonces caracterizado por la función de transferencia de un sistema de primer orden con tiempo muerto, siendo ésta de la forma:

$$Gp(s) = \frac{ke^{-0s}}{\tau s + 1}$$

Los parámetros K, y se evalúan (estiman) a partir de la respuesta escalón del sistema en lazo abierto, esto es:



La respuesta escalón del sistema está dada por la gráfica:



Mediante estos métodos se puede hacer sintonización tanto para la entrada de referencia como para perturbaciones. De este modo se tienen las siguientes expresiones para el cálculo de los parámetros del controlador:

a) Sintonización para perturbaciones

$$K_c = \frac{a\left(\frac{\theta}{\tau}\right)}{K}$$

$$T_i = \frac{\tau}{c\left(\frac{\theta}{\tau}\right)^d}$$

$$T_d = e^{\left(\frac{\theta}{\tau}\right)^r \tau}$$

b) Sintonización para entrada de referencia

$$K_c = \frac{a\left(\frac{\theta}{\tau}\right)^b}{K}$$

$$T_i = \frac{\tau}{c + d \frac{\theta}{\tau}}$$

$$T_d = \frac{e \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^f}{\tau}$$

Las constantes a, b, c, d, e y f para cada uno de los casos se encuentran en las siguientes tablas y éstas son empleadas para las distintas estructuras del controlador.

constantes	SINTONIZACIÓN					
	PERTURBACIÓN			REFERENCIA		
	CRITERIO			CRITERIO		
	ISE	IAE	ITAE	ISE	IAE	ITAE
a	1.495	1.453	1.357	-	1.086	0.965
b	-0.945	-0.921	-0.947	-	-0.869	-0.855
c	1.101	0.878	0.842	-	0.740	0.796
d	0.771	0.749	0.738	-	-0.130	-0.147
e	0.560	0.482	0.381	-	0.348	0.308
f	1.006	1.137	0.995	-	0.914	0.9292

Tabla 4-1 Constantes de sintonización para el controlador descrito por la ecuación

$$M(s) = k_c \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] E(s) \text{ considerando } 0 < \frac{\theta}{\tau} \leq 1$$

constante	SINTONIZACIÓN					
	PERTURBACIÓN			REFERENCIA		
	CRITERIO			CRITERIO		
	ISE	IAE	ITAE	ISE	IAE	ITAE
a	1.11907	0.98089	0.77902	0.71959	0.65000	1.12762
b	-0.89711	-0.76167	-1.06401	-1.03092	-1.04432	-0.80368
c	0.79870	0.91032	1.14311	1.12666	0.98850	0.99783
d	-0.95480	-1.5211	-0.70949	-0.18145	-0.09539	0.02860
e	0.54766	0.59974	0.57137	0.54568	0.50814	0.42844
f	0.87798	0.89819	1.03826	0.861411	1.8433	1.00810

Tabla 4-2 Constantes de sintonización para el controlador descrito por la ecuación

$$M(s) = K_c \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] \left[\frac{1 + T_d s}{1 + T_n s} \right] E(s) \text{ considerando } 0 < \frac{\theta}{\tau} \leq 1$$

constante	SINTONIZACIÓN					
	PERTURBACIÓN			REFERENCIA		
	CRITERIO			CRITERIO		
	ISE	IAE	ITAE	ISE	IAE	ITAE
a	1.1147	0.91	0.7058	1.1427	0.81699	0.8326
b	-0.8992	-0.7938	-0.8872	-0.9365	-1.004	-0.7607
c	0.9324	1.01495	1.03326	0.99223	1.09112	1.00268
d	-0.8753	-1.00403	-0.99138	-0.35269	-0.22387	0.00854
e	0.54766	0.59974	0.57137	0.54568	0.50814	0.42844
f	0.91107	0.7848	0.971	0.78088	0.97186	1.11499

Tabla 4-3 Constantes de sintonización para el controlador descrito por la ecuación

$$M(s) = K_c \left[1 + \frac{1}{T_i s} \right] E(s) - \left[\frac{T_d s}{T_a s + 1} \right] Y(s) \text{ considerando } 0 < \frac{\theta}{\tau} \leq 1$$

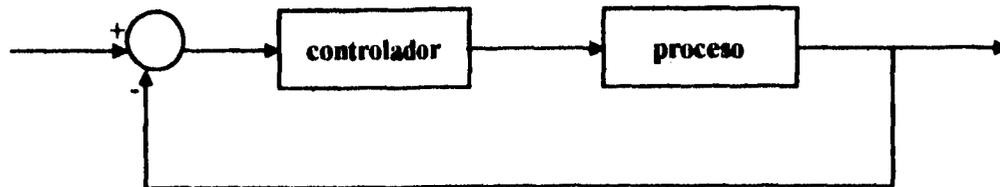
constante	SINTONIZACIÓN					
	PERTURBACIÓN			REFERENCIA		
	CRITERIO			CRITERIO		
	ISE	IAE	ITAE	ISE	IAE	ITAE
a	1.3466	1.31509	1.3176	1.26239	1.13031	0.98384
b	-0.9308	-0.8826	-0.7937	-0.8388	-0.81314	-0.49851
c	1.6585	1.2587	1.12499	6.0356	5.7527	2.71348
d	-1.25738	-1.3756	-1.42603	-6.0191	-5.7241	-2.29778
e	0.79715	0.5655	0.49547	0.47617	0.32175	0.21443
f	0.41941	0.4576	0.41932	0.24572	0.17707	0.16768

Tabla 4-4 Constantes de sintonización para el controlador descrito por la ecuación

$$M(s) = K_c \left[1 + \frac{1}{T_i s} \right] \left[R(s) - \left[\frac{T_d s + 1}{T_{\alpha s} + 1} \right] Y(s) \right] \text{ considerando } 0 < \frac{\theta}{\tau} \leq T$$

4.4 OPTIMIZACIÓN PARAMÉTRICA

El objetivo del método es controlar un proceso descrito por medio de un sistema de primer orden con tiempo muerto, haciendo uso de una estructura de retroalimentación mostrada en la figura siguiente:



la función de transferencia del proceso está descrita de la siguiente forma

$$Gp(s) = \frac{K_p e^{-\theta s}}{\tau s + 1}$$

a fin de representar el efecto del tiempo muerto, se propone una aproximación por series de Taylor con dos términos y así poder establecer los compromisos impuestos por la presencia de un retraso de tiempo. Se entiende por optimización paramétrica, al hecho de minimizar los índices de desempeño a través de una sintonización adecuada, la cual se logra haciendo uso del siguiente método propuesto para sintonizar los parámetros de los controladores.

Por otra parte los controladores a utilizar serán:

- CASO 1) Proporcional.
- CASO 2) Proporcional integral.
- CASO 3) Proporcional derivativo.
- CASO 4) Proporcional - integral - derivativo.

NOTA: Es indispensable que la planta con una estructura descrita en la figura anterior sea estable, pues los índices de desempeño están en función de la integral del error. Por ende éste debe ser pequeño; y esto no se cumple si la planta no es estable, por lo tanto la estabilidad es un requisito del método, es por ello que estudiaremos sus condiciones.

4.4.1 CONDICIONES DE ESTABILIDAD

CASO 1. Considerando un controlador proporcional cuya función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = K_p$$

Obtenemos que su función de transferencia en lazo cerrado es:

$$H(s) = \frac{\left(-kk_p \frac{\theta}{\tau}\right)s + 2kk_p}{\left(\frac{\theta}{\tau}\right)s^2 + \left(2 + \frac{\theta}{\tau} - kk_p \frac{\theta}{\tau}\right)s + (2 + 2kk_p)}$$

la estabilidad del sistema se puede garantizar si se cumplen con las siguientes relaciones

$$\frac{\theta}{\tau} > 0$$

$$kk_p > \frac{2}{\theta/\tau} + 1$$

CASO 2. El controlador está descrito por la función de transferencia:

$$k \left(1 + \frac{1}{s} \right)$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$H(s) = \frac{\left(\frac{-kk_p}{2} \left(\frac{\theta}{\tau}\right)\right)s^2 + \left(kk_p - \frac{kk_p}{2T_i} \left(\frac{\theta}{\tau}\right)\right)s + \frac{kk_p}{T_i}}{\left(\frac{\theta}{2\tau}\right)s^3 + \left(1 + \frac{\theta}{2\tau} - \frac{kk_p}{2} \left(\frac{\theta}{\tau}\right)\right)s^2 + \left(1 + kk_p - \frac{kk_p}{2T_i} \left(\frac{\theta}{\tau}\right)\right)s + \frac{kk_p}{T_i}}$$

Por el hecho que el polinomio del denominador sea de tercer orden, nos obliga a hacer uso del criterio de estabilidad de Routh que nos permite obtener información sobre la estabilidad absoluta directamente a partir de los coeficientes de la ecuación característica.

$$a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s^1 + a_3s^0$$

s^3	a_0	a_2
s^2	a_1	a_3
s^1	$\frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	
s^0	a_3	

Es por ello que podemos asegurar la estabilidad del sistema si se cumple con las siguientes desigualdades:

$$\frac{\theta}{\tau} > 0$$

$$kk_p < \left(\frac{\theta}{\tau}\right) + 1$$

$$T_i < \frac{\frac{kk_p}{4}\left(\frac{\theta}{\tau}\right)^2 - kk_p\left(\frac{\theta}{\tau}\right) - \frac{kk_p}{4}\left(\frac{\theta}{\tau}\right)^2}{\frac{kk_p^2}{2}\left(\frac{\theta}{\tau}\right) - kk_p - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\tau}\right)}$$

CASO 3. La función de transferencia del controlador esta descrita por:

$$k\left(1 + \frac{NT_d s}{T_d s + N}\right)$$

la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$H(s) = \frac{\left(\frac{-kk_p T_d \theta}{2\tau} - \frac{Nkk_p T_d \theta}{2\tau}\right) s^2 + \left(kk_p + kk_p T_d N - \frac{Nkk_p \theta}{2\tau}\right) s + Nkk_p}{\left(\frac{T_d \theta}{2\tau}\right) s^3 + \left(\frac{T_d \theta}{2\tau} + T_d + \frac{N\theta}{2\tau} - \frac{kk_p T_d \theta}{2\tau} - \frac{Nkk_p T_d \theta}{2\tau}\right) s^2 + \left(T_d + \frac{N\theta}{2\tau} + N + kk_p T_d + kk_p T_d N - \frac{Nkk_p \theta}{2\tau}\right) s + (N + Nkk_p)}$$

haciendo uso del criterio de estabilidad de Routh, tenemos las siguientes expresiones que debemos de cumplir:

$$T_d > 0$$

$$\frac{\theta}{\tau} > 0$$

$$kk_p > 0$$

$$T_d^2 \left[11kk_p - \frac{121}{2}kk_p^2 \frac{\theta}{\tau} + \frac{\theta}{\tau} + 1 \right] + T_d \left[10\frac{\theta}{\tau} - 30kk_p \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^2 + \frac{5}{2}\left(\frac{\theta}{\tau}\right)^2 + 10 - 10kk_p \frac{\theta}{\tau} + \frac{55}{2}kk_p^2 \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^2 \right] + \left[25\left(\frac{\theta}{\tau}\right) + 50\frac{\theta}{\tau} - 25kk_p \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^2 \right] > 0$$

$$\frac{T_d}{2} \left(\frac{\theta}{\tau} \right) + T_d + \frac{N}{2} \left(\frac{\theta}{\tau} \right) - \frac{kk_p T_d}{2} \left(\frac{\theta}{\tau} \right) - \frac{Nkk_p T_d}{2} \left(\frac{\theta}{\tau} \right) > 0$$

CASO 4. La función de transferencia que describe al controlador PID es:

$$k \left(1 + \frac{1}{s} + \frac{NT_d s}{T_d s + N} \right)$$

y la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$H(s) = \frac{\left[\frac{-11kk_p T_d}{2} \left(\frac{\theta}{\tau} \right) \right] s^4 + \left[11T_d kk_p - 5kk_p \left(\frac{\theta}{\tau} \right) - \frac{T_d kk_p}{2T_i} \left(\frac{\theta}{\tau} \right) \right] s^3 + \left[10kk_p + \frac{T_d kk_p}{T_i} - \frac{5kk_p}{T_i} \left(\frac{\theta}{\tau} \right) \right] s^2 + \frac{10kk_p}{T_i} s + \frac{10kk_p}{T_i}}{a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s^1 + a_4 s^0}$$

$$a_0 = \frac{T_d}{2} \left(\frac{\theta}{\tau} \right)$$

$$a_1 = T_d + \frac{T_d}{2} \left(\frac{\theta}{\tau} \right) + 5 \left(\frac{\theta}{\tau} \right) - \frac{11}{2} kk_p T_d \left(\frac{\theta}{\tau} \right)$$

$$a_2 = T_d + 10 + 5 \left(\frac{\theta}{\tau} \right) + 11kk_p - 5kk_p \left(\frac{\theta}{\tau} \right) - \frac{kk_p T_d}{2T_i} \left(\frac{\theta}{\tau} \right)$$

$$a_3 = 10 + 10kk_p + \frac{kk_p T_d}{T_i} - \frac{5kk_p}{T_i} \left(\frac{\theta}{\tau} \right)$$

$$a_4 = \frac{10kk_p}{T_i}$$

A fin de asegurar, hacemos uso del criterio de estabilidad de Routh y tenemos que:

s^4	a_0	a_2	a_4
s^3	a_1	a_3	
s^2	d_1	a_4	
s^1	c_1		
s^0	a_4		

por tanto requerimos que

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad d_1 > 0; \quad c_1 > 0; \quad a_4 > 0$$

ahora bien d_1 y c_1 están definidas como:

$$d_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \dots(1)$$

$$c_1 = \frac{d_1 a_3 - a_1 a_4}{d_1} \dots(2)$$

tomando el hecho que d_1 debe ser positiva a fin de cumplir la estabilidad tenemos que:

$$d_1 a_3 - a_1 a_4 > 0$$

por lo tanto concluimos que $a_3 > 0$

de 2

$$a_3 - \frac{a_1^2 a_4}{a_1 a_2 - a_0 a_3} > 0$$

de 1

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

por lo tanto concluimos que $a_2 > 0$

podemos entonces asegurar la estabilidad del sistema si se cumplen las siguientes desigualdades:

$$a_0 > 0$$

$$a_1 > 0$$

$$a_2 > 0$$

$$a_3 > 0$$

$$a_4 > 0$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \dots(5)$$

$$a_3 - a_1^2 a_4 > 0 \dots(6)$$

una forma alternativa de ver estos compromisos es la siguiente:

de las relaciones a_0 y a_4 sabemos que:

$$\left(\frac{\theta}{\tau}\right) > 0$$

$$kk_p > 0$$

de a_1

$$T_d \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\tau} \right) - \frac{11}{2} kk_p \left(\frac{\theta}{\tau} \right) \right) + 5 \left(\frac{\theta}{\tau} \right) > 0$$

$$T_d > \frac{-5 \left(\frac{\theta}{\tau} \right)}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\tau} \right) - \frac{11}{2} kk_p \left(\frac{\theta}{\tau} \right)}$$

$$\text{si } 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\tau} \right) - \frac{11}{2} kk_p \left(\frac{\theta}{\tau} \right) > 0$$

$$T_d < - \frac{5 \left(\frac{\theta}{\tau} \right)}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\tau} \right) - \frac{11}{2} kk_p \left(\frac{\theta}{\tau} \right)}$$

$$\text{si } 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\tau} \right) - \frac{11}{2} kk_p \left(\frac{\theta}{\tau} \right) < 0$$

de a

$$T > \frac{kk \left(\frac{\theta}{\tau} \right) - kk T}{+ kk}$$

Una vez cumplidas las anteriores condiciones debemos garantizar el cumplimiento de las desigualdades 5 y 6 con el objeto de asegurar la estabilidad.

Una vez obtenidas las condiciones con las que podemos garantizar la estabilidad del sistema, realizamos un conjunto de simulaciones con el objeto de encontrar la sintonización que

minimice el valor de los índices de desempeño, estas simulaciones se realizaron utilizando el paquete SIMNON; los archivos utilizados son los siguientes:

```

continuous system taylor2
time t
input u
output y
state x1 x2
der dx1 dx2
"process"

dx1= x2
dx2= -a2*x1-a1*x2+u
y= b2*x1-b1*x2
a2=2*yy/teta
a1=2*yy/teta+1
b2=2*yy*k/teta
b1=K
teta=cte*yy
yy:1
cte:1
K:1
end

continuous system controla
time t
input e
output u er
state x1 x2
der dx1 dx2

"REGULADOR"
"proporcional"
P=Kc*e
"integral"
dx1=e
IT=(Kc*Ti)*x1
"derivativo"
dx2=(-1/Ta)*x2+(1/Ta)*e
D=- (Kc*Td/Ta)*x2+(Kc*Td/Ta)*e
"SALIDA DEL CONTROLADOR"
u=C1*P+C2*IT+C3*D
er=e

"PARÁMETROS"

C1:1
C2:1
C3:1
Kc:1
Td:1
Ti:1
Ta=Td/N
N:10
end

CONTINUOUS SYSTEM IAE

```

```

TIME t
INPUT er
OUTPUT h
STATE x
DER dx

dx=ABS(er)
h=x
END

CONTINUOUS SYSTEM ISE
TIME t
INPUT er
OUTPUT i
STATE x
DER dx

dx=er*er
i=x
END

CONTINUOUS SYSTEM ITAE
TIME t
INPUT er
OUTPUT J
STATE x1
DER dx1

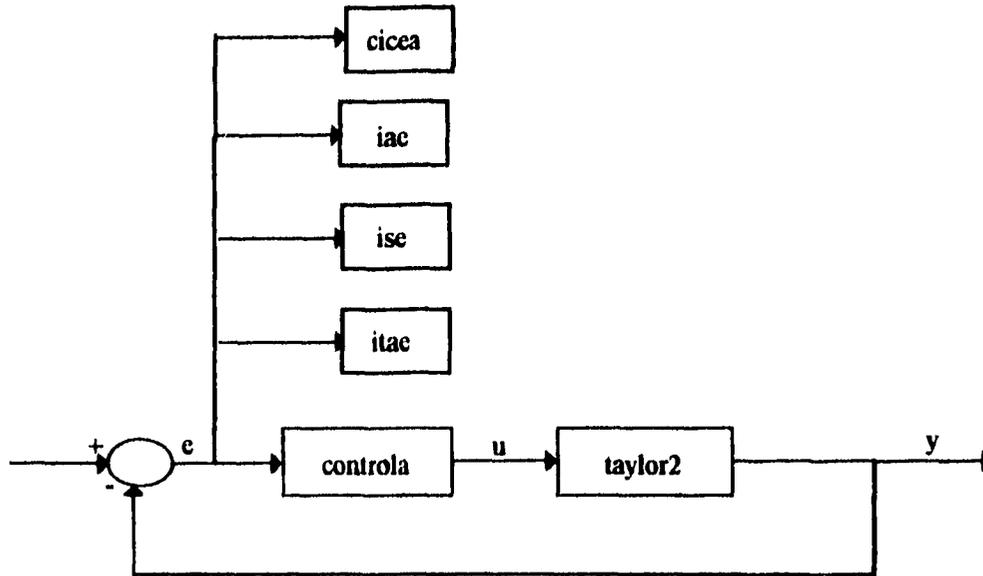
"Loss ITAE:
dx1 = t*abs(er)
J = x1
END

Continuous system itse
time t
input er
output c
state x
der dx
dx=t*er*er
c=x
end

connecting system conecto
time t
u[taylor2]=u[controla]
er[itae]=er[controla]
er[ise]=er[controla]
er[iae]=er[controla]
e[controla]=r-y[taylor2]
r=1
end

```

Un diagrama de bloques de los elementos utilizados en la simulación es el siguiente:



Una vez determinados los mejores valores de los parámetros de cada uno de los controladores en función de los diferentes índices de desempeño antes mencionados, se realizó un compendio de éstos con el objeto de encontrar expresiones que describieran su comportamiento.

4.4.2 METODOLOGÍA PARA SINTONIZAR CONTROLADORES USANDO ÍNDICES DE DESEMPEÑO

Nuestro objetivo inicial es proponer un método simple capaz de determinar el conjunto de valores del controlador tal que minimicen un índice de desempeño cuando se cuenta con la representación del proceso con una planta de primer orden con tiempo muerto, para lograrlo se proponen los siguientes pasos:

1. Determinar el controlador a utilizar de acuerdo a nuestros objetivos y necesidades de control
2. Seleccionar cual de los índices de desempeño ha de usarse a fin de minimizar su valor
3. Evaluar las expresiones correspondientes con el objeto de encontrar el valor de los parámetros que intervienen, otra variante si no se desea hacer ningún cálculo es utilizar las gráficas correspondientes a cada controlador.

A continuación se enumeran las ecuaciones de cada uno de los controladores, así como las gráficas correspondientes.

4.4.2.1 CONTROLADOR PROPORCIONAL

La forma del polinomio es la siguiente:

$$kk_p = a_0 \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^5 + a_1 \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^4 + a_2 \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^3 + a_3 \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^2 + a_4 \left(\frac{\theta}{\tau}\right) + a_5$$

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$KK_p(\text{itac})$	-391.025641	1236.305361	-1503.817016	884.023893	-258.768881	36.133333
$KK_p(\text{ise})$	-462.820513	1447.144522	-1727.080420	981.209207	-269.417879	33.593333
$KK_p(\text{iac})$	-370.512821	1152.797203	-1374.784382	788.583916	-224.143310	30.806667
$KK_p(\text{itsc})$	-358.974359	1138.403263	-1387.121212	814.699883	-237.332984	33.166667

4.4.2.2 CONTROLADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL

La forma del polinomio es la siguiente:

$$T_i = a_0 k k_p^5 + a_1 k k_p^4 + a_2 k k_p^3 + a_3 k k_p^2 + a_4 k k_p + a_5$$

$\left(\frac{\theta}{\tau}\right) = 0.1$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i(\text{itac})$	-0.000009	0.000639	-0.015761	0.170568	-0.814235	2.334972
$T_i(\text{ise})$	0.000049	-0.001706	0.021839	-0.115381	0.372776	0.075213
$T_i(\text{iae})$	0.000011	-0.000475	0.009250	-0.090416	0.425490	0.244717
$T_i(\text{itsc})$	0.000014	-0.000511	0.007523	-0.056501	0.290343	0.271217
$\left(\frac{\theta}{\tau}\right) = 0.2$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i(\text{itac})$	0.000679	-0.016126	0.150295	-0.656918	1.323848	0.023096
$T_i(\text{ise})$	0.002366	-0.048977	0.371824	-1.210962	1.877389	-0.422965
$T_i(\text{iae})$	0.000919	-0.020859	0.183249	-0.753623	1.499832	-0.193278
$T_i(\text{itsc})$	0.000808	-0.016916	0.136659	-0.514803	1.076383	-0.062484
$\left(\frac{\theta}{\tau}\right) = 0.3$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i(\text{itac})$	0.013345	-0.215356	1.280995	-3.379903	3.896811	-0.574762
$T_i(\text{ise})$	0.000518	0.014052	-0.160779	0.540148	-0.141036	0.278392
$T_i(\text{iae})$	0.020037	-0.324772	1.921919	-4.986418	5.585904	-1.172682
$T_i(\text{itsc})$	0.017479	-0.275332	1.580334	-3.954068	4.398193	-0.865166
$\left(\frac{\theta}{\tau}\right) = 0.4$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i(\text{itac})$	0.032926	-0.415165	1.954697	-4.132669	3.983266	-0.416608
$T_i(\text{ise})$	0.030499	-0.334007	1.380199	-2.501022	2.480255	-0.301832
$T_i(\text{iae})$	0.042600	-0.532796	2.473902	-5.129314	4.870412	-0.740940
$T_i(\text{itsc})$	0.049870	-0.612097	2.761085	-5.475500	4.984673	-0.794920
$\left(\frac{\theta}{\tau}\right) = 0.5$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i(\text{itac})$	0.038384	-0.396640	1.620781	-3.114769	3.026037	-0.137885
$T_i(\text{ise})$	0.062486	-0.564877	1.944131	-2.948237	2.622294	-0.255288
$T_i(\text{iae})$	0.054042	-0.531352	2.026551	-3.607443	3.361586	-0.303269
$T_i(\text{itsc})$	0.031957	-0.284322	1.009170	-1.702554	1.937490	-0.064231
$\left(\frac{\theta}{\tau}\right) = 0.6$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i(\text{itac})$	0.087255	-0.748298	2.522369	-4.025997	3.385573	-0.121629
$T_i(\text{ise})$	0.096877	-0.722383	2.096540	-2.709229	2.378948	-0.150943
$T_i(\text{iae})$	0.060273	-0.513827	1.805670	-3.058678	2.958161	-0.161342
$T_i(\text{itsc})$	0.030354	-0.203415	0.646873	-1.124777	1.697952	0.011893
$\left(\frac{\theta}{\tau}\right) = 0.7$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i(\text{itac})$	0.713554	-5.891252	17.826017	-23.745351	13.786261	-1.686003
$T_i(\text{ise})$	0.144636	-0.879080	2.066772	-2.138302	1.984449	-0.039442
$T_i(\text{iae})$	0.606852	-4.916394	14.682449	-19.412126	11.521377	-1.431327
$T_i(\text{itsc})$	0.541990	-4.324556	12.719290	-16.487521	9.784308	-1.198741

$\left(\frac{\theta}{\tau}\right) = 0.8$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i(\text{itac})$	0.531234	-3.798739	10.187642	-12.286278	7.068542	-0.512696
$T_i(\text{ise})$	0.995111	-6.962952	17.867593	-19.886348	10.166978	-1.068600
$T_i(\text{iae})$	0.610351	-4.329788	11.465761	-13.556568	7.655481	-0.667951
$T_i(\text{itse})$	0.480790	-3.234612	8.163129	-9.213477	5.429612	-0.410038
$\left(\frac{\theta}{\tau}\right) = 0.9$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i(\text{itac})$	0.665504	-4.306885	10.592000	-11.883803	6.642926	-0.404025
$T_i(\text{ise})$	0.698187	-4.284073	9.915674	-10.065103	5.525419	-0.431852
$T_i(\text{iae})$	0.787002	-5.050480	12.210491	-13.340323	7.290174	-0.565418
$T_i(\text{itse})$	0.540055	-3.267516	7.573161	-7.999995	4.806573	-0.295402
$\left(\frac{\theta}{\tau}\right) = 1$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i(\text{itac})$	1.430724	-8.796261	20.194286	-20.807009	10.107671	-0.766976
$T_i(\text{ise})$	1.744243	-10.479631	23.319507	-22.679059	10.515714	-0.983220
$T_i(\text{iae})$	1.547273	-9.404523	21.273758	-21.489813	10.348785	-0.866486
$T_i(\text{itse})$	1.343622	-7.976730	17.656846	-17.394128	8.489844	-0.691327

4.4.2.3 CONTROLADOR PROPORCIONAL-DERIVATIVO

La forma del polinomio es la siguiente:

$$T_d = a_0 \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^5 + a_1 \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^4 + a_2 \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^3 + a_3 \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^2 + a_4 \left(\frac{\theta}{\tau}\right) + a_5$$

$kk_p = 0.1$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_d(\text{itae})$	0.128205	-0.454545	0.709207	-0.420163	0.092848	0.894000
$T_d(\text{ise})$	0.512821	-1.701632	2.184149	-1.263403	0.174308	0.922667
$T_d(\text{iae})$	1.153846	-3.129371	3.171911	-1.281760	0.206557	0.889333
$T_d(\text{itse})$	44.358974	-137.867133	162.332168	-89.363054	22.801100	-1.196000
$kk_p = 0.2$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_d(\text{itae})$	0.256410	-0.238928	-0.358974	0.579545	-0.235690	0.918000
$T_d(\text{ise})$	-2.179487	6.445221	-6.951632	3.400350	-0.986816	0.992000
$T_d(\text{iae})$	-0.256410	0.238928	0.358974	-0.367424	0.081145	0.895333
$T_d(\text{itse})$	42.307692	-130.361305	152.371795	-83.467949	21.213077	-1.066667
$kk_p = 0.3$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_d(\text{itae})$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.900000
$T_d(\text{ise})$	1.153846	-2.954545	2.694056	-0.800991	-0.431322	0.959333
$T_d(\text{iae})$	0.769231	-2.377622	2.681818	-1.320513	0.262918	0.884000
$T_d(\text{itse})$	42.051282	-129.860140	151.664336	-82.643357	20.697077	-0.994667
$kk_p = 0.4$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_d(\text{itae})$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.900000
$T_d(\text{ise})$	2.307692	-6.608392	6.623543	-2.318765	-0.435254	0.962000
$T_d(\text{iae})$	-2.820513	7.639860	-7.216783	2.818473	-0.465336	0.925333
$T_d(\text{itse})$	39.615385	-123.379953	145.998252	-80.969697	20.597524	-1.024000
$kk_p = 0.5$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_d(\text{itae})$	4.743590	-12.913753	12.767483	-5.588578	1.018261	0.841333
$T_d(\text{ise})$	2.051282	-5.553613	5.001166	-1.064977	-0.956207	0.984000
$T_d(\text{iae})$	-2.820513	6.445221	-4.308858	0.486597	0.119688	0.885333
$T_d(\text{itse})$	41.666667	-129.050117	151.535548	-83.077797	20.701224	-1.010000
$kk_p = 0.6$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_d(\text{itae})$	5.897436	-15.168998	13.713287	-5.493298	0.943233	0.847333
$T_d(\text{ise})$	2.564103	-5.506993	2.768065	1.496795	-1.950431	1.040000
$T_d(\text{iae})$	-2.564103	3.991841	0.611888	-3.073718	0.936212	0.833333
$T_d(\text{itse})$	52.435897	-161.491841	188.107809	-101.946387	24.948457	-1.367333
$kk_p = 0.7$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_d(\text{itae})$	-7.692308	23.484848	-24.988345	10.729021	-1.865082	1.003333
$T_d(\text{ise})$	-0.512821	3.449883	-7.184149	6.837995	-3.343888	1.124000
$T_d(\text{iae})$	16.025641	-50.145688	57.817599	-29.237471	5.625117	0.573333
$T_d(\text{itse})$	47.051282	-145.285548	169.772145	-92.283508	22.572422	-1.198667
$kk_p = 0.8$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_d(\text{itae})$	-13.717949	36.311189	-32.930653	11.615676	-1.659322	0.978667
$T_d(\text{ise})$	-2.820513	10.262238	-14.944056	11.134907	-4.484100	1.182000
$T_d(\text{iae})$	20.128205	-58.397436	61.689394	-27.906469	4.401746	0.688000
$T_d(\text{itse})$	52.564103	-161.655012	187.488345	-100.634033	24.131166	-1.326667

$kk_p = 0.9$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_d(itac)$	-1.794872	-1.270396	10.117716	-9.569347	2.271100	0.780667
$T_d(isc)$	-7.179487	23.444056	-29.977855	19.060897	-6.327545	1.279333
$T_d(iae)$	18.461538	-52.983683	54.666667	-23.386946	2.984051	0.802667
$T_d(itse)$	28.717949	-87.249417	99.270396	-51.453380	11.420322	-0.180667

4.4.2.4 CONTROLADOR PID

La forma del polinomio es la siguiente:

$$T_i = a_0 T_d^5 + a_1 T_d^4 + a_2 T_d^3 + a_3 T_d^2 + a_4 T_d + a_5$$

Los siguientes polinomios minimizan el índice itae

$kk_p = 0.1$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-0.805492	1.993270	-1.661543	0.519330	-0.058170	0.101771
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.561762	-1.201842	0.662190	0.046548	-0.091587	0.142028
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.582941	-1.511252	1.422271	-0.598879	0.099641	0.155476
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	0.353928	-0.856251	0.658526	-0.121618	-0.048187	0.194088
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.792570	-2.150654	2.068559	-0.804173	0.086441	0.207924
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	1.696056	-4.132046	3.452859	-1.126066	0.103526	0.228240
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-0.947638	2.487549	-2.263562	0.822587	-0.113886	0.254427
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-1.244133	3.529967	-3.580392	1.536183	-0.263326	0.281557
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-1.457352	3.945268	-3.860983	1.645259	-0.292515	0.298888
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	0.097994	0.011878	-0.277242	0.197436	-0.041085	0.302088

$kk_p = 0.2$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	0.250191	-0.969101	1.433008	-0.914163	0.167666	0.182600
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-0.679140	1.148660	-0.592736	0.090953	-0.012399	0.250723
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.408130	-0.928474	0.712686	-0.201724	-0.022977	0.302528
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-1.257056	4.153102	-4.812469	2.320178	-0.453786	0.362147
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.506125	-1.358150	1.362706	-0.668710	0.122428	0.374211
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.751290	1.867407	-1.494741	0.373280	-0.025813	0.450183
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.735496	-2.059472	2.137252	-1.034900	0.188625	0.461023
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-0.057074	-0.049136	0.363362	-0.374708	0.090928	0.475133
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	0.000359	-0.391202	0.814346	-0.525190	0.061387	0.518007
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	0.779647	-1.794899	1.397490	-0.383266	-0.060244	0.562045

$kk_p = 0.3$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	2.279356	-3.913818	1.179428	0.734153	-0.403999	0.304763
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-2.018396	6.117663	-6.622520	3.007984	-0.588975	0.382819
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	-0.104814	0.505399	-0.597101	0.197013	-0.070739	0.420099
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	0.445461	-1.318934	1.597632	-0.951843	0.174201	0.462186
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-0.251268	0.659577	-0.625721	0.258327	-0.123516	0.534102
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	0.739086	-2.603450	3.256278	-1.742030	0.285284	0.558185
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	1.208597	-3.664803	3.894671	-1.693146	0.180940	0.614182
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-4.799569	13.755577	-15.012407	7.785311	-1.966758	0.823812
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	1.743438	-5.088543	5.165583	-2.080212	0.184750	0.702706
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	1.895634	-4.915976	4.455833	-1.613840	0.106459	0.748822

$kk_p = 0.4$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-9.956656	24.029410	-20.212793	6.996015	-1.062133	0.398539
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-5.522861	11.948123	-8.397342	2.005800	-0.194113	0.450363
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	2.217975	-6.063763	6.183724	-2.849867	0.418830	0.503593
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.045228	-0.407673	0.940906	-0.634815	0.022513	0.590365
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.648988	-1.923657	1.887674	-0.699793	-0.045733	0.656131
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	1.922556	-4.841330	4.147694	-1.325825	-0.026504	0.713187
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.872257	-2.497502	2.354373	-0.792608	-0.061004	0.762879
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	1.950913	-5.188349	4.719178	-1.681767	0.078530	0.808127
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	3.088437	-8.487924	8.331379	-3.485447	0.469247	0.832901
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	1.633598	-4.845899	5.209836	-2.406482	0.308605	0.898404

$kk_p = 0.5$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-4.775878	14.343992	-15.278387	6.777567	-1.330236	0.484528
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	4.279804	-12.016740	12.051571	-5.247612	0.757613	0.498646
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	1.488222	-4.052815	3.973797	-1.709426	0.132664	0.607798
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	0.542020	-1.330821	0.955212	-0.131127	-0.219537	0.702110
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	2.087674	-5.599049	5.103253	-1.822454	0.059493	0.749627
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	3.224481	-8.056870	6.895231	-2.275002	0.071958	0.811007
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	3.442007	-9.121436	8.571916	-3.380670	0.351564	0.859731
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	1.692825	-4.593163	4.498702	-1.903522	0.161929	0.925489
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	3.645533	-9.481214	8.750744	-3.397923	0.345512	0.977836
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-0.419258	1.488059	-1.853888	0.993335	-0.395871	1.079692

$kk_p = 0.6$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-4.919460	11.588615	-9.896570	3.777455	-0.895897	0.538351
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-1.009019	-0.052146	2.772939	-2.242886	0.258581	0.593312
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	7.002468	-18.823032	17.850629	-7.053144	0.824881	0.658607
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.529457	2.439865	-3.643145	2.224267	-0.722766	0.803666
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	2.635438	-6.539491	5.510340	-1.742405	-0.059109	0.848297
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	3.326782	-8.496221	7.578791	-2.755544	0.162317	0.907062
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-0.433257	1.655233	-1.992372	0.951973	-0.386684	0.999322
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	0.047741	-0.373630	0.525904	-0.215922	-0.185997	1.050336
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	1.789025	-4.354981	3.733329	-1.359777	-0.011417	1.107055
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	7.303630	-20.262860	20.234205	-8.683544	1.270399	1.100268

$kk_p = 0.7$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-7.495311	18.861937	-17.348775	6.971550	-1.518081	0.687460
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	8.582582	-19.281766	14.953752	-4.854582	0.288630	0.719954
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	9.938350	-25.883707	24.127028	-9.575356	1.163757	0.766875
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	1.082604	-2.546107	2.026266	-0.739632	-0.115025	0.896110
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	3.053978	-7.704442	6.867463	-2.612139	0.138342	0.967524
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.627092	1.233014	-0.646961	-0.078236	-0.164417	1.061595
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-1.346435	3.111296	-2.247387	0.307486	-0.083925	1.106021
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	2.072957	-6.444646	7.543217	-4.101788	0.735864	1.130028
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	1.089783	-3.556766	4.553948	-2.863185	0.576687	1.193951
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	2.865886	-8.223726	8.975868	-4.661944	0.875306	1.239375

$kk_p = 0.8$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-5.031453	14.686719	-16.329458	8.150440	-2.161087	0.779260
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-3.972540	9.791897	-7.781894	1.872973	-0.303243	0.769363
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	4.647732	-10.622328	7.954350	-2.140247	-0.198224	0.886683
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-1.720106	4.928687	-4.690192	1.639023	-0.490836	0.969841
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-0.681294	1.151866	-0.444958	-0.133211	-0.230477	1.043093
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.163324	-1.169536	3.165263	-2.587703	0.469729	1.066899
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-1334.61766	1528.268897	338.496288	-720.518923	184.205929	-9.072978
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	0.538430	-3.534674	6.233658	-4.465168	1.012518	1.149641
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-1.963476	4.485371	-3.025771	0.085030	0.171006	1.253627
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-5.276619	14.026930	-13.099810	4.831920	-0.767418	1.373179

$kk_p = 0.9$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-7.150357	17.950619	-15.848881	5.561191	-1.204282	0.760103
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	7.106205	-16.794267	14.072806	-5.312224	0.507125	0.791483
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	8.175887	-22.296985	21.105609	-8.448615	1.043484	0.862218
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-21.763719	53.284369	-46.197493	16.806352	-2.749312	1.113957
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-4.555122	8.813087	-4.859694	0.255194	-0.046097	1.067624
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	2.256024	-7.266609	8.592267	-4.696848	0.832693	1.083375
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	2.180643	-6.166253	6.984494	-4.087724	0.875046	1.129288
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	9.521246	-23.025449	20.529691	-8.545813	1.403019	1.182820
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	3.237044	-7.180737	5.868560	-2.497318	0.353559	1.300617
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	7.216763	-14.522653	10.032850	-3.030753	0.226422	1.386576

$kk_p = 1$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-7.150357	17.950619	-15.848881	5.561191	-1.204282	0.760103
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	7.106205	-16.794267	14.072806	-5.312224	0.507125	0.791483
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	8.175887	-22.296985	21.105609	-8.448615	1.043484	0.862218
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-21.763719	53.284369	-46.197493	16.806352	-2.749312	1.113957
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-4.555122	8.813087	-4.859694	0.255194	-0.046097	1.067624
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	2.256024	-7.266609	8.592267	-4.696848	0.832693	1.083375
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	2.180643	-6.166253	6.984494	-4.087724	0.875046	1.129288
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	9.521246	-23.025449	20.529691	-8.545813	1.403019	1.182820
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	3.237044	-7.180737	5.868560	-2.497318	0.353559	1.300617
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	7.216763	-14.522653	10.032850	-3.030753	0.226422	1.386576

LOS SIGUIENTES POLINOMIOS MINIMIZAN EL INDICE ISE

$kk_p = 0.1$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.040000
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.060000
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.353928	-1.001872	0.964330	-0.385798	0.060628	0.077333
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.805492	2.235563	-2.170359	0.853628	-0.128698	0.105393
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.792570	-2.150654	2.068559	-0.804173	0.086441	0.117924
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	0.859694	-2.065493	1.715703	-0.599436	0.083380	0.126669
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.097994	-0.526348	0.853033	-0.537104	0.107117	0.144815
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	0.859694	-2.065493	1.715703	-0.599436	0.083380	0.156669
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	0.097994	-0.526348	0.853033	-0.537104	0.107117	0.174815
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	0.097994	0.011878	-0.277242	0.197436	-0.041085	0.192088

$kk_p = 0.2$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	0.097994	0.011878	-0.277242	0.197436	-0.041085	0.072088
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-0.451564	1.379312	-1.511834	0.732010	-0.176885	0.129481
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.957688	-2.591841	2.568736	-1.136539	0.190498	0.141484
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	0.408130	-0.928474	0.712686	-0.201724	-0.022977	0.192528
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.054202	-0.072223	0.054160	-0.080106	0.025210	0.208440
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.353569	1.148896	-1.280259	0.595148	-0.147443	0.287946
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.363979	-0.960544	0.963700	-0.435570	0.028425	0.299999
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	0.000359	-0.148909	0.305530	-0.190892	-0.009140	0.311629
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-0.189528	0.415929	-0.308315	0.088158	-0.058132	0.343965
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-0.189528	0.579090	-0.650953	0.325679	-0.118651	0.373119

$kk_p = 0.3$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-9.956656	24.029410	-20.212793	6.996015	-1.062133	0.398539
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-5.522861	11.948123	-8.397342	2.005800	-0.194113	0.450363
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	2.217975	-6.063763	6.183724	-2.849867	0.418830	0.503593
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.045228	-0.407673	0.940906	-0.634815	0.022513	0.590365
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.648988	-1.923657	1.887674	-0.699793	-0.045733	0.656131
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	1.922556	-4.841330	4.147694	-1.325825	-0.026504	0.713187
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.872257	-2.497502	2.354373	-0.792608	-0.061004	0.762879
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	1.950913	-5.188349	4.719178	-1.681767	0.078530	0.808127
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	3.088437	-8.487924	8.331379	-3.485447	0.469247	0.832901
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	1.633598	-4.845899	5.209836	-2.406482	0.308605	0.898404

$kk_p = 0.4$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-0.561045	1.507516	-1.502670	0.676991	-0.188879	0.146635
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-0.087944	0.099406	0.046984	-0.075071	-0.055406	0.213568
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.185938	-0.271695	0.019451	0.125856	-0.146010	0.286169
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.379055	0.995020	-0.959268	0.413838	-0.176783	0.347084
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-0.380491	0.909866	-0.766741	0.292408	-0.171788	0.407466
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.041639	0.309989	-0.543012	0.393578	-0.251164	0.471351
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-0.149325	0.314068	-0.188668	0.026530	-0.138513	0.516552
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	0.169785	-0.326069	0.121380	0.114390	-0.232655	0.581569
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-0.344237	1.039758	-1.149771	0.593007	-0.302379	0.634439
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-0.471306	1.218313	-1.197090	0.579638	-0.304041	0.684814

$kk_p = 0.5$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	0.511509	-1.279588	1.165753	-0.472580	0.002963	0.161073
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	1.090860	-2.940295	2.876750	-1.207360	0.090425	0.248562
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.586889	-1.519067	1.417477	-0.540912	-0.061072	0.336380
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.201732	0.620101	-0.736762	0.436563	-0.270266	0.422679
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.224346	-0.512733	0.383560	-0.048656	-0.208669	0.490846
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.290035	0.687307	-0.507131	0.144870	-0.215137	0.560428
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-1.049580	3.025588	-3.159587	1.474336	-0.500456	0.640667
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-0.648270	1.295439	-0.769920	0.161686	-0.253499	0.693165
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	0.194912	-0.653287	0.726335	-0.252739	-0.246269	0.760738
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-0.207834	0.514666	-0.441445	0.215690	-0.328449	0.827553

$kk_p = 0.6$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	0.330237	-0.783661	0.615214	-0.150257	-0.117923	0.195583
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.416745	-1.037360	0.958487	-0.380870	-0.081686	0.294299
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	-1.249518	3.422648	-3.402835	1.518808	-0.466974	0.407540
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	1.014762	-2.925113	3.008431	-1.256221	-0.024006	0.473609
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-1.343922	3.319155	-2.965177	1.250224	-0.493326	0.581165
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	0.098712	-0.397704	0.467037	-0.108183	-0.304408	0.654190
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-0.561045	1.499562	-1.485967	0.766229	-0.491787	0.742840
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-0.402028	0.891959	-0.786757	0.491855	-0.500881	0.824899
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	0.781442	-1.881496	1.522240	-0.355248	-0.376246	0.889721
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-0.316956	1.067879	-1.331980	0.867421	-0.627725	0.980913

$kk_p = 0.7$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	1.079733	-2.751086	2.501261	-0.951695	0.000507	0.210958
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.380850	-1.003708	0.954183	-0.342862	-0.155518	0.338430
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	12.083098	-28.158168	23.458549	-8.329806	0.945520	0.394197
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.515457	1.259870	-1.057617	0.446076	-0.371589	0.549873
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-0.384439	1.154468	-1.296401	0.756095	-0.513658	0.654109
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.153273	0.380825	-0.344852	0.273903	-0.459130	0.742864
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.814825	-2.009610	1.676942	-0.387342	-0.428047	0.833790
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	1.337461	-3.437006	3.051454	-0.925447	-0.389014	0.922630
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-0.451923	1.002843	-0.714070	0.289822	-0.511201	1.002836
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	0.337775	-0.538210	-0.064690	0.612507	-0.787703	1.120091

$kk_p = 0.8$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-0.181990	0.527384	-0.538446	0.254911	-0.213137	0.239327
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.189886	-0.419217	0.308041	-0.014870	-0.259823	0.374418
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.548840	-1.509539	1.384861	-0.374357	-0.294457	0.494826
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.010769	0.154513	-0.337869	0.382096	-0.481063	0.613787
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.076457	-0.145939	0.033754	0.216317	-0.513591	0.722952
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.637143	1.618963	-1.550955	0.858198	-0.671943	0.834541
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.417822	-1.347643	1.505006	-0.509053	-0.471079	0.923946
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-0.470947	1.448957	-1.725333	1.161719	-0.886436	1.053690
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-0.804774	2.000359	-1.874996	1.052064	-0.883940	1.151776
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	0.979226	-2.564145	2.241872	-0.491671	-0.710804	1.246507

$kk_p = 0.9$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	0.012922	-0.225227	0.396469	-0.193436	-0.168999	0.258716
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.194912	-0.278834	-0.060018	0.330889	-0.425602	0.419686
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	-0.626015	1.551716	-1.428651	0.740486	-0.523293	0.545060
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.022973	0.163503	-0.396084	0.534549	-0.629434	0.679857
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.190245	-0.276272	-0.146820	0.560802	-0.735199	0.806489
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	0.453000	-1.236236	1.056047	-0.063410	-0.662624	0.914440
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.600171	-1.448182	1.037435	0.086765	-0.785850	1.037391
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-0.040921	0.288729	-0.740007	0.971964	-1.058803	1.169325
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	0.057433	-0.502372	0.557406	0.194021	-0.940569	1.274943
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-0.048459	0.198485	-0.647583	0.997337	-1.210047	1.409484

$kk_p = 1$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-0.646834	1.957978	-2.157007	1.089137	-0.453937	0.292088
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.321622	-0.935833	0.834911	-0.082101	-0.409407	0.450633
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	-0.396644	1.212203	-1.456979	0.994321	-0.695662	0.602270
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.294701	0.872812	-1.014826	0.780444	-0.739909	0.735861
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-0.273882	0.421681	-0.288509	0.443530	-0.779576	0.869731
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.705703	1.768646	-1.788846	1.165014	-0.984214	1.003890
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.105532	-0.511158	0.376366	0.374351	-0.977025	1.136503
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-0.783955	1.260025	-0.922335	0.898454	-1.189554	1.278933
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-2.933728	6.347312	-5.361634	2.647991	-1.560041	1.423774
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-2.945933	6.432988	-5.697875	3.018024	-1.779181	1.572753

LOS SIGUIENTES POLINOMIOS MINIMIZAN EL INDICE IAE

$kk_p = 0.1$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	0.792570	-2.010336	1.773890	-0.660192	0.097697	0.055891
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.097994	0.011878	-0.277242	0.197436	-0.041085	0.092088
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.792570	-2.150654	2.068559	-0.804173	0.086441	0.117924
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	0.097994	-0.526348	0.853033	-0.537104	0.107117	0.134815
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-0.805492	1.993270	-1.661543	0.519330	-0.058170	0.161771
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.805492	1.993270	-1.661543	0.519330	-0.058170	0.181771
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.097994	-0.526348	0.853033	-0.537104	0.107117	0.194815
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	1.146498	-3.152527	3.032888	-1.189971	0.147069	0.215257
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-0.805492	2.235563	-2.170359	0.853628	-0.128698	0.235393
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-0.805492	1.993270	-1.661543	0.519330	-0.058170	0.251771

$kk_p = 0.2$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	1.311617	-2.909866	2.096986	-0.523617	-0.005892	0.122845
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.408130	-1.214210	1.312730	-0.625996	0.091735	0.166653
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.762059	-1.930347	1.677016	-0.587522	0.037651	0.219861
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.353569	1.148896	-1.280259	0.595148	-0.147443	0.267946
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-0.047741	0.269615	-0.408143	0.228839	-0.094986	0.306078
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	0.098353	-0.137031	0.028287	0.006544	-0.050226	0.373717
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.668013	-1.952692	2.173504	-1.086528	0.164501	0.383608
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	1.011890	-3.046472	3.425953	-1.711035	0.292132	0.387182
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	0.462332	-1.140812	1.061086	-0.441922	0.008129	0.441848
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	1.459147	-3.664550	3.213881	-1.159562	0.093221	0.467614

$kk_p = 0.3$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	2.058599	-5.285837	4.841467	-1.891369	0.222118	0.161496
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-2.257101	5.759485	-5.213241	2.010730	-0.391166	0.265691
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.255575	-0.598890	0.623590	-0.352674	0.002196	0.310490
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	0.715754	-2.073626	2.103973	-0.875969	0.041184	0.370587
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-0.528380	1.213027	-0.971661	0.326919	-0.139377	0.428086
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.007538	0.244031	-0.550654	0.453975	-0.251797	0.491446
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-1.301207	3.452074	-3.270200	1.324844	-0.323233	0.536419
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-0.010410	-0.005409	0.036800	-0.028836	-0.108397	0.574338
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-0.033024	0.571071	-1.034494	0.632312	-0.256955	0.630589
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-1.475300	3.494128	-2.829093	0.907257	-0.225859	0.668578

$kk_p = 0.4$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	1.974604	-4.751469	3.911566	-1.262991	0.028374	0.220094
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	2.058599	-5.327239	4.875384	-1.859569	0.155713	0.306453
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.850720	-1.451396	0.413201	0.341344	-0.297981	0.414928
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.851797	1.985006	-1.700368	0.705983	-0.296161	0.483245
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	1.863328	-5.503396	5.678282	-2.369404	0.175252	0.533711
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.907435	2.237823	-1.904537	0.719051	-0.308846	0.614618
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-3.574101	9.048659	-8.194724	3.205701	-0.692739	0.691084
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-0.365056	1.368723	-1.676154	0.843182	-0.355696	0.737485
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-0.359672	0.875406	-0.727637	0.291222	-0.276491	0.793852
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	0.192758	-0.318661	0.181230	-0.063416	-0.190507	0.839633

$kk_p = 0.5$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	0.913178	-2.422790	2.315491	-0.930641	-0.014446	0.262414
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-1.394894	3.979760	-4.120654	1.855189	-0.505824	0.403309
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	-1.808408	4.582076	-4.195241	1.688300	-0.473037	0.492190
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	0.884103	-2.063690	1.618127	-0.420325	-0.213715	0.568672
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	1.792973	-4.898983	4.670156	-1.782669	-0.002722	0.640083
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	1.264594	-3.304772	3.069654	-1.176505	-0.079459	0.715344
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	2.291201	-6.037551	5.794120	-2.414305	0.137766	0.776747
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	0.984969	-2.996504	3.153750	-1.320011	-0.082109	0.856808
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	1.367972	-3.707485	3.659144	-1.536793	-0.038317	0.916043
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	2.475703	-5.954274	4.911167	-1.504235	-0.208631	0.999620

$kk_p = 0.6$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	0.320546	-0.054691	-0.788042	0.695998	-0.361020	0.317630
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	2.556468	-6.031572	4.989882	-1.723497	0.008011	0.433240
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	4.610401	-11.649327	10.391316	-3.840860	0.277914	0.532241
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.464127	1.329793	-1.372288	0.691302	-0.455901	0.661710
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-0.694934	1.622699	-1.383796	0.562243	-0.409914	0.748869
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	0.094046	-0.570541	0.680859	-0.144582	-0.381862	0.838908
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-1.379459	3.988293	-4.111961	1.905158	-0.743542	0.931388
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-0.039844	0.491995	-0.899606	0.670147	-0.552675	0.990763
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-0.315879	1.266658	-1.771767	1.189570	-0.736138	1.087877
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	4.090636	-11.217816	10.832422	-4.219846	0.151830	1.120029

$kk_p = 0.7$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	2.110289	-5.263868	4.688846	-1.766599	0.009958	0.343763
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-1.297258	3.673907	-3.812895	1.825924	-0.670118	0.521993
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	3.049311	-6.986829	5.404196	-1.469771	-0.273186	0.627902
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-3.278324	7.758693	-6.215442	2.099322	-0.695584	0.752270
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-1.277875	3.238782	-2.893399	1.133616	-0.566839	0.836731
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.848207	2.069196	-1.866070	0.851910	-0.581629	0.924731
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	1.029838	-2.572082	2.226946	-0.666394	-0.422548	1.014008
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	2.132903	-5.141203	4.059433	-0.910681	-0.561292	1.115531
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	2.644053	-7.591853	7.882003	-3.337732	0.013784	1.154160
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	2.309867	-7.184620	8.263845	-4.090911	0.306029	1.204123

$kk_p = 0.8$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-0.215372	0.578609	-0.571328	0.258870	-0.336844	0.394781
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-0.514022	1.967482	-2.643618	1.647151	-0.790660	0.579562
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	2.767533	-6.202801	4.577299	-1.094591	-0.391527	0.693091
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.186297	-0.358285	1.231226	-0.728431	-0.354765	0.806033
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	3.634765	-9.792525	9.507765	-3.865489	0.140327	0.874524
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	0.521919	-0.688636	-0.167910	0.668583	-0.795239	1.035866
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-0.911024	1.897062	-1.276234	0.489767	-0.677445	1.118359
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	3.012339	-8.593277	8.872165	-3.847135	0.100985	1.155897
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	0.920357	-3.929661	5.532629	-3.121564	0.139810	1.220118
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	4.332212	-11.921193	12.255947	-5.687804	0.601461	1.266537

$kk_p = 0.9$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	3.028851	-7.846719	7.103724	-2.593959	-0.023896	0.423530
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-0.338134	1.569819	-2.276759	1.403530	-0.744057	0.622789
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	2.644770	-6.881133	6.419840	-2.372289	-0.204684	0.742869
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.134249	0.171906	-0.071545	0.181899	-0.615162	0.876972
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.442949	-0.199072	-0.884773	1.056137	-0.907135	1.005819
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	0.873334	-2.832055	3.052204	-1.042055	-0.580681	1.102704
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	1.818818	-5.698397	6.425315	-2.968815	-0.083030	1.150562
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	3.385292	-10.321288	11.590159	-5.677846	0.541600	1.193066
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-3146.61713	8177.388743	-7488.61358	2911.551767	-451.243867	21.023904
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	2.093059	-6.260625	7.198076	-3.808961	0.276262	1.355465

$kk_p = 1$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	2.057163	-6.248388	6.932980	-3.339390	0.237660	0.437994
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.655449	-1.899420	1.985912	-0.733598	-0.434972	0.652813
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	-4.384978	10.536701	-8.829233	3.246769	-1.065844	0.828830
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	4.310674	-10.861220	9.493179	-3.146046	-0.295784	0.926996
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	1.058913	-1.641805	0.010707	1.156068	-1.166481	1.091925
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	2875.585229	-6830.70923	5518.187413	-1760.25240	208.029852	-5.685861
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	5479.613048	-12764.3416	10653.06773	-3829.32241	555.161771	-21.953891
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	16.115942	-37.872596	32.992682	-12.985936	1.567773	1.200735
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	5719.750886	-13390.5067	11227.58097	-4052.86308	589.751345	-23.302024
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-18.169875	44.534784	-38.060554	13.432926	-2.443053	1.549028

LOS SIGUIENTES POLINOMIOS MINIMIZAN EL INDICE ITSE:

$kk_p = 0.1$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	0.097994	-0.526348	0.853033	-0.537104	0.107117	0.064815
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.353928	-1.001872	0.964330	-0.385798	0.060628	0.087333
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.353928	-1.001872	0.964330	-0.385798	0.060628	0.107333
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	0.582941	-1.268958	0.913455	-0.264581	0.029113	0.129099
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-0.805492	1.993270	-1.661543	0.519330	-0.058170	0.151771
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	0.353928	-0.856251	0.658526	-0.121618	-0.048187	0.174088
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.859694	-2.065493	1.715703	-0.599436	0.083380	0.176669
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	0.097994	-0.526348	0.853033	-0.537104	0.107117	0.194815
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	0.353928	-1.001872	0.964330	-0.385798	0.060628	0.207333
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-0.805492	1.993270	-1.661543	0.519330	-0.058170	0.231771

$kk_p = 0.2$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-0.451564	0.991397	-0.697213	0.133531	0.002458	0.119104
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.262036	-0.807564	0.876300	-0.403702	0.046975	0.169014
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.408130	-1.214210	1.312730	-0.625996	0.091735	0.206653
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.499663	1.113988	-0.789426	0.153020	-0.005713	0.239902
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-1.049222	2.777355	-2.645477	1.087836	-0.219188	0.290946
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-1.049222	2.777355	-2.645477	1.087836	-0.219188	0.350946
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.903845	-2.372594	2.198647	-0.847084	0.078472	0.358324
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	0.903845	-2.372594	2.198647	-0.847084	0.078472	0.368324
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	0.000359	-0.148909	0.305530	-0.190892	-0.009140	0.401629
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-0.754162	1.788470	-1.495563	0.534210	-0.124689	0.432465

$kk_p = 0.3$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-1.649033	4.188598	-3.884669	1.555186	-0.294761	0.192896
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	1.021941	-2.712270	2.629017	-1.138028	0.154602	0.234563
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.879795	-2.460285	2.535815	-1.169069	0.169414	0.283598
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	0.278907	-0.819932	0.887280	-0.431265	0.023947	0.340508
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-0.155068	0.396652	-0.403217	0.214582	-0.128770	0.397565
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.605196	1.508486	-1.321040	0.480756	-0.138721	0.436929
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.444385	-1.350677	1.489056	-0.717178	0.064168	0.469069
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-0.184143	0.617882	-0.764388	0.432116	-0.189976	0.527848
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-0.509714	1.356763	-1.345766	0.618543	-0.217754	0.569169
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	0.087585	-0.275595	0.284180	-0.096114	-0.095128	0.603456

$kk_p = 0.4$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-0.767802	2.233198	-2.291798	0.974937	-0.234662	0.238747
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.416386	-1.191114	1.270602	-0.617224	0.043210	0.300286
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.379055	-0.995020	0.959268	-0.413838	-0.023217	0.372916
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.379055	0.995020	-0.959268	0.413838	-0.176783	0.437084
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-0.522637	1.404145	-1.368760	0.595665	-0.227504	0.500123
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	0.089379	-0.454990	0.686039	-0.382444	-0.051906	0.544891
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-0.041639	0.309989	-0.543012	0.393578	-0.251164	0.611351
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-0.540584	1.606260	-1.748354	0.861734	-0.322307	0.664382
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-0.504689	1.303189	-1.260993	0.582202	-0.271287	0.712076
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-0.249114	0.824631	-0.988647	0.544563	-0.286501	0.763324

$kk_p = 0.5$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-2.431552	6.117688	-5.496905	2.056903	-0.387999	0.287873
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.203886	-0.760158	0.886814	-0.423421	-0.031328	0.360300
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	-0.278907	0.819932	-0.887280	0.431265	-0.223947	0.449492
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-1.021941	2.712270	-2.629017	1.138028	-0.354602	0.525437
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.543456	-1.272181	0.966841	-0.209776	-0.190055	0.590123
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	0.145735	-0.112116	-0.174903	0.232778	-0.254915	0.652764
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.012922	0.017067	-0.112348	0.140862	-0.239526	0.712338
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	4.072329	-11.412768	11.398763	-4.737860	0.520723	0.740655
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	1.002199	-3.109852	3.440585	-1.584567	0.062446	0.818544
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	0.353928	-0.856251	0.658526	-0.121618	-0.248187	0.894088

$kk_p = 0.6$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	1.483196	-3.643551	3.176827	-1.201093	0.044232	0.311568
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-0.177323	0.259891	-0.061221	-0.082644	-0.106835	0.414591
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	1.060349	-2.760166	2.532870	-0.947300	-0.051469	0.503242
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.342442	0.656412	-0.347678	0.043609	-0.200065	0.589970
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	-0.979943	2.527686	-2.381662	1.026457	-0.410203	0.676068
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	0.290035	-0.835375	0.818074	-0.263571	-0.231635	0.742446
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.597658	-1.720897	1.728915	-0.637938	-0.199751	0.812159
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	0.295419	-0.696240	0.528180	-0.080096	-0.301131	0.883553
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	0.326289	-0.769523	0.603794	-0.087397	-0.339156	0.956895
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-0.109122	0.450626	-0.675101	0.516125	-0.475648	1.032393

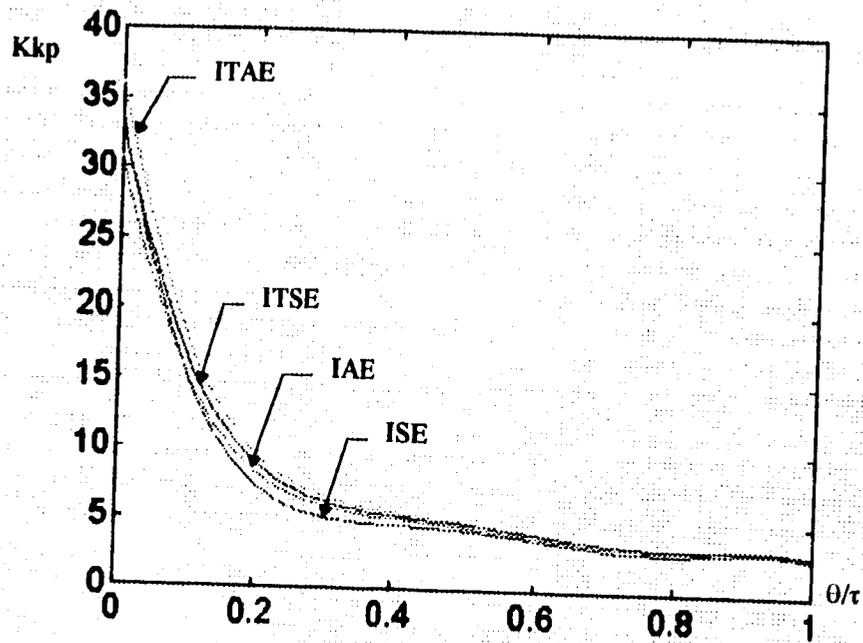
$kk_p = 0.7$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-12.135505	35.955522	-39.624696	19.847138	-4.565105	0.685735
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	1.834971	-5.005454	4.841581	-1.948183	0.097486	0.457554
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	1.781128	-4.500063	4.106521	-1.612748	0.042372	0.549994
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	1.244492	-3.392936	3.285449	-1.318913	-0.043373	0.644793
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.413156	-0.477678	-0.420311	0.785847	-0.568749	0.759276
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.483870	1.347455	-1.435670	0.771983	-0.483337	0.831955
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.588684	-1.759240	1.903894	-0.826066	-0.190559	0.892485
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	1.446942	-3.872359	3.733317	-1.474599	-0.134692	0.971900
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-0.623502	2.241714	-2.996426	1.906422	-0.889628	1.090916
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	4.358415	-12.585209	12.972476	-5.473900	0.404038	1.106359

$kk_p = 0.8$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-2.539597	6.461778	-5.856257	2.196232	-0.504291	0.401602
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	0.015794	0.001575	-0.078179	0.041845	-0.216082	0.511080
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	4.490151	-11.272385	10.183390	-3.945200	0.338022	0.589473
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	0.120249	-0.309230	0.258587	-0.029784	-0.315436	0.714678
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.734419	-1.999437	1.949503	-0.745605	-0.231779	0.802349
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	0.108045	-0.311458	0.241876	0.068203	-0.437121	0.902369
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	0.027639	-0.272527	0.444910	-0.161297	-0.390687	0.983067
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-0.472742	1.329360	-1.416586	0.832224	-0.664637	1.091208
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-0.226859	0.681367	-0.930715	0.797007	-0.756704	1.187214
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-1.070041	2.694135	-2.591966	1.392148	-0.895035	1.280151

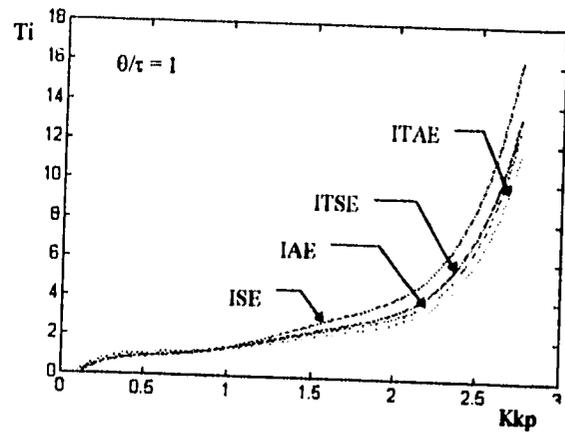
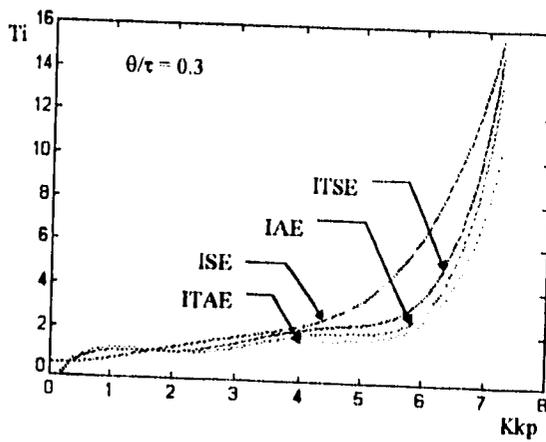
$kk_p = 0.9$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-1.713286	4.539695	-4.415812	1.842175	-0.550092	0.442476
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	1.457711	-3.624273	3.074804	-1.020984	-0.154606	0.550522
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	0.944407	-2.590120	2.484505	-0.917594	-0.205310	0.661123
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-1.238031	3.082694	-2.819448	1.249494	-0.610115	0.785068
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.284291	-0.713021	0.582335	-0.039333	-0.466258	0.880629
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-0.278548	0.819499	-1.032237	0.797277	-0.710599	0.993660
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-0.064971	0.362976	-0.717780	0.721303	-0.736656	1.085863
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-	4342.534409	-	2119.918074	-287.095454	10.610802
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	1369.432584	-	4815.352585	-	-	-
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-0.581505	1.449561	-1.635193	1.234878	-1.004572	1.298289
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-0.514022	1.232035	-1.313572	1.030182	-1.001809	1.389247

$kk_p = 1$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.1\right)$	-0.258806	0.047423	0.704338	-0.823988	0.011175	0.440270
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.2\right)$	-3.197559	8.214116	-7.475053	2.856404	-0.729912	0.609956
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.3\right)$	-1.700722	4.513141	-4.180230	1.677325	-0.637719	0.719264
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.4\right)$	-0.155786	0.501532	-0.695745	0.568341	-0.587221	0.835922
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.5\right)$	0.756674	-2.032159	1.843009	-0.500809	-0.468916	0.933478
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.6\right)$	-1.680980	4.140196	-3.794973	1.771229	-0.906635	1.059489
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.7\right)$	-0.195271	0.479342	-0.783309	0.878252	-0.911344	1.172661
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.8\right)$	-2.488985	5.481810	-4.579481	2.112751	-1.143410	1.284733
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 0.9\right)$	-4.854489	11.215849	-9.697968	4.188316	-1.571512	1.412075
$T_i\left(\frac{\theta}{\tau} = 1\right)$	-8.565352	20.144528	-17.622289	7.367090	-2.183057	1.547114

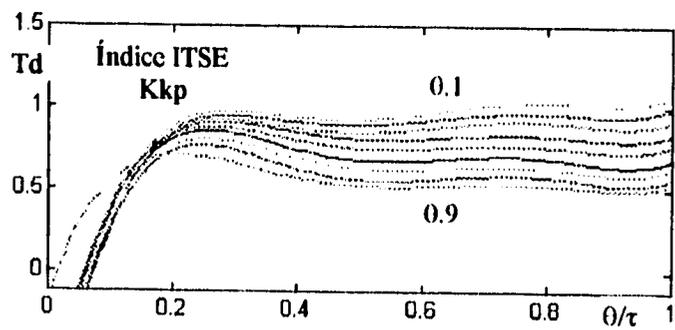
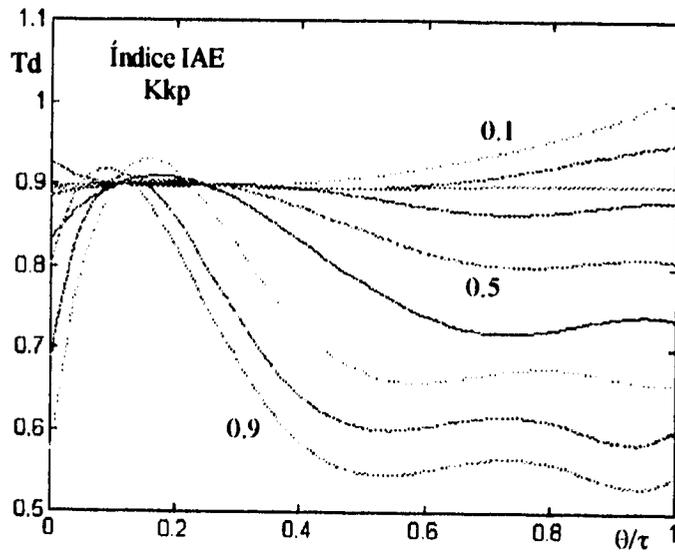
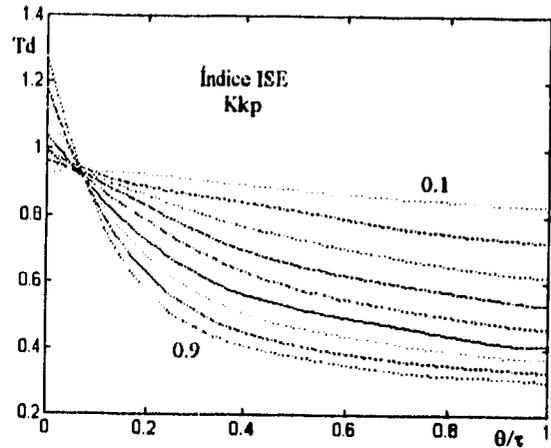
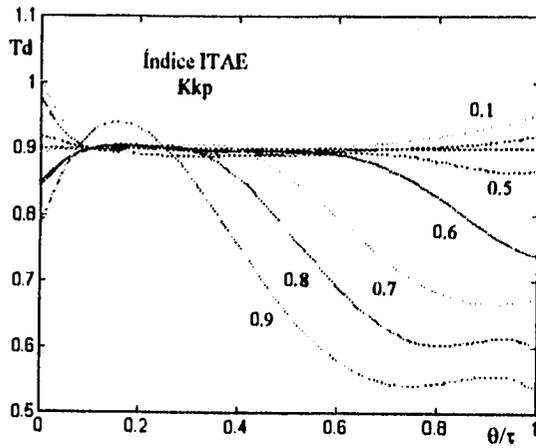
GRÁFICA DEL CONTROLADOR PROPORCIONAL



GRÁFICA DEL CONTROLADOR P.I.

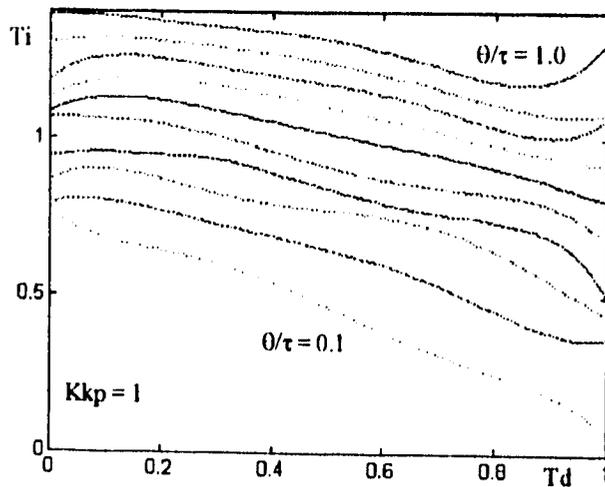
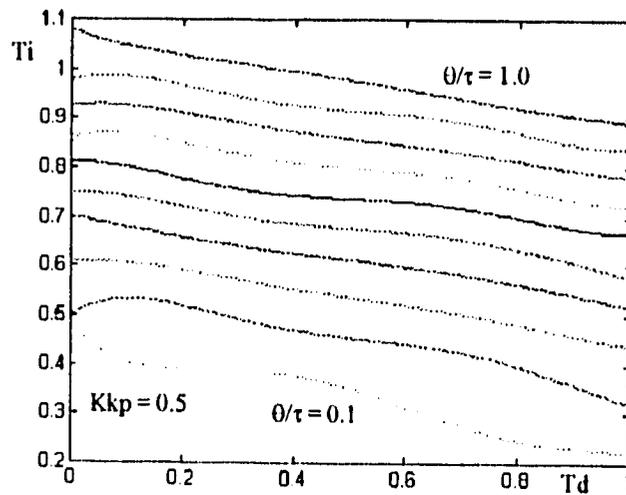
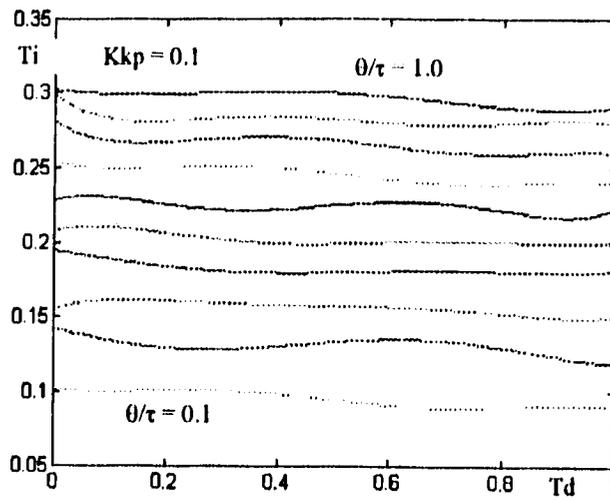


GRÁFICAS DEL CONTROLADOR P.D.

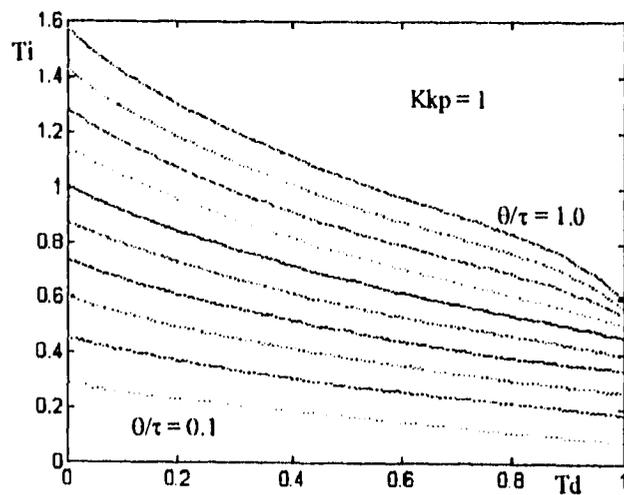
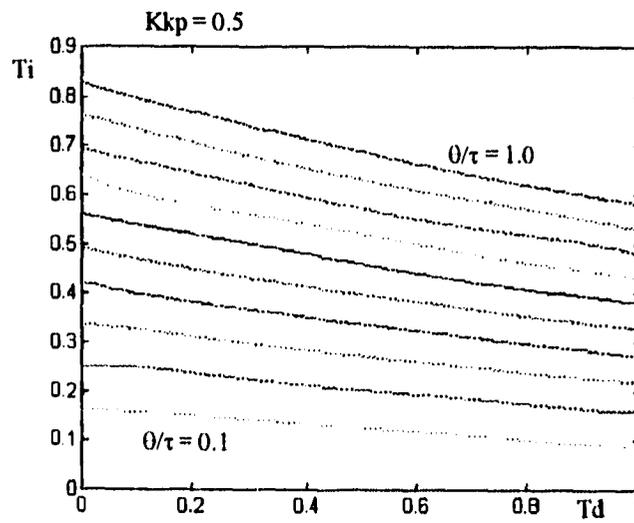
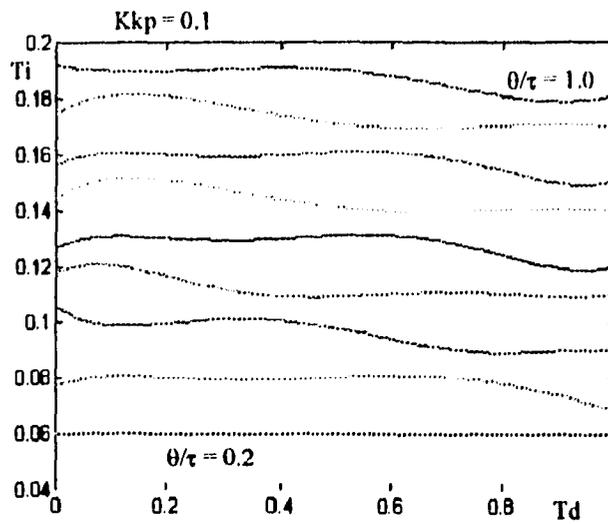


GRÁFICAS DEL CONTROLADOR PID.

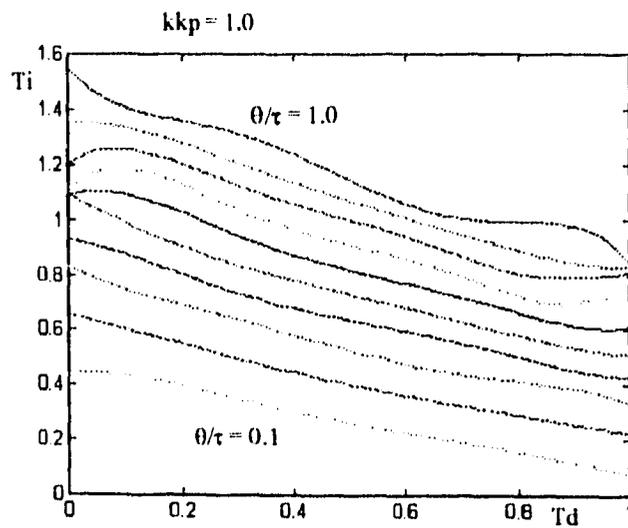
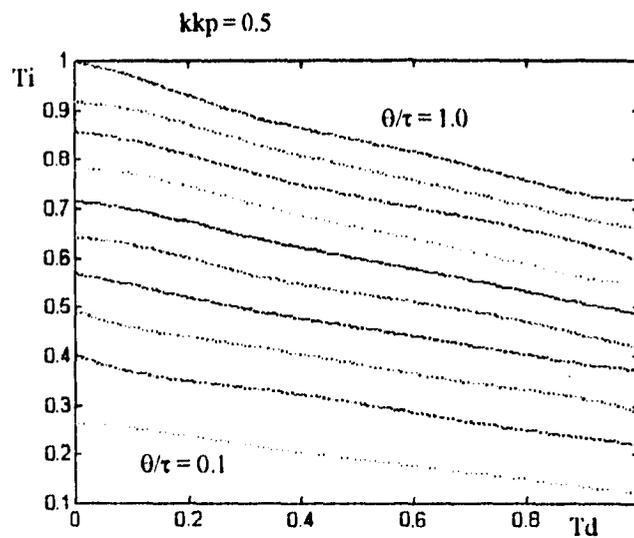
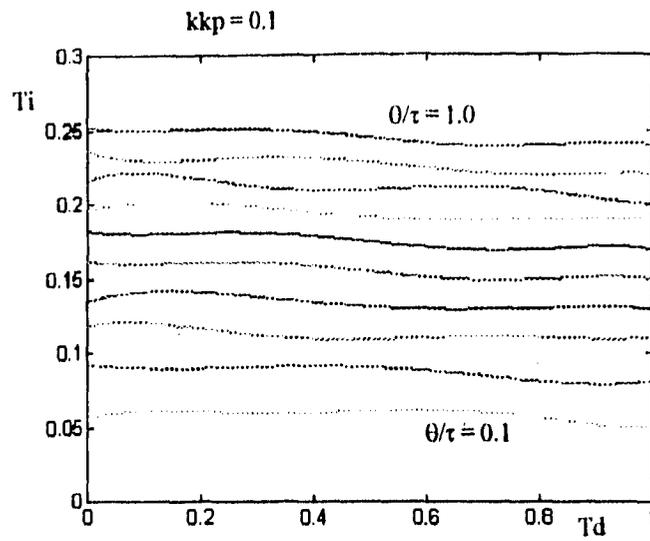
Índice ITAE



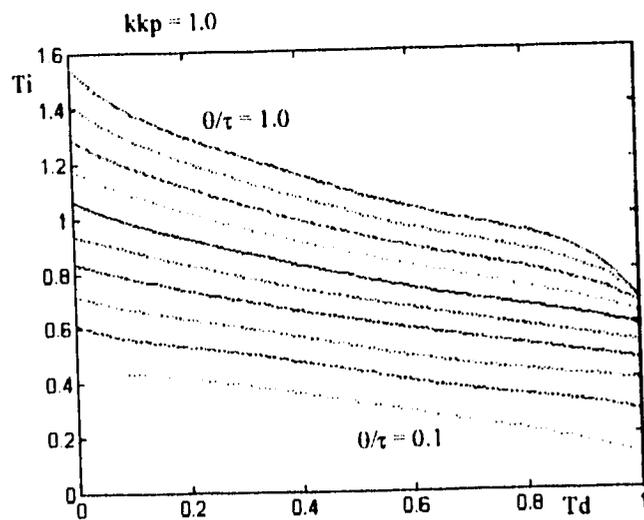
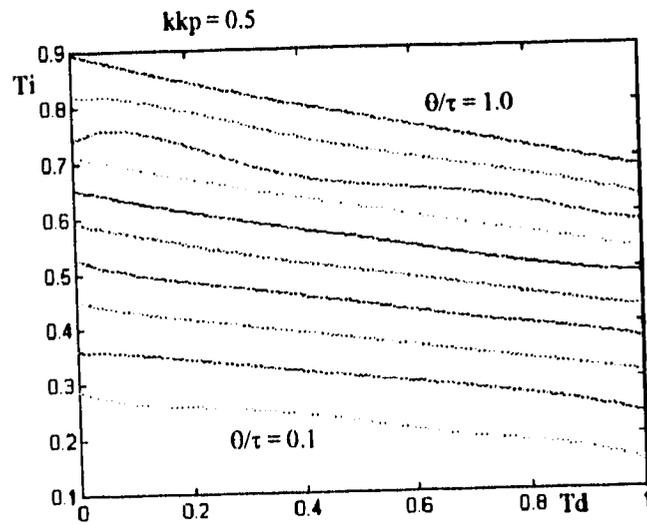
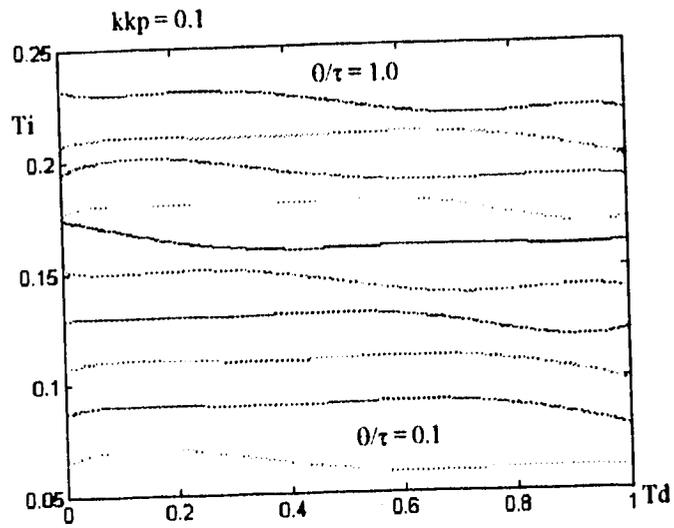
Índice ISE



Índice IAE



Índice ITSE



CONCLUSIONES

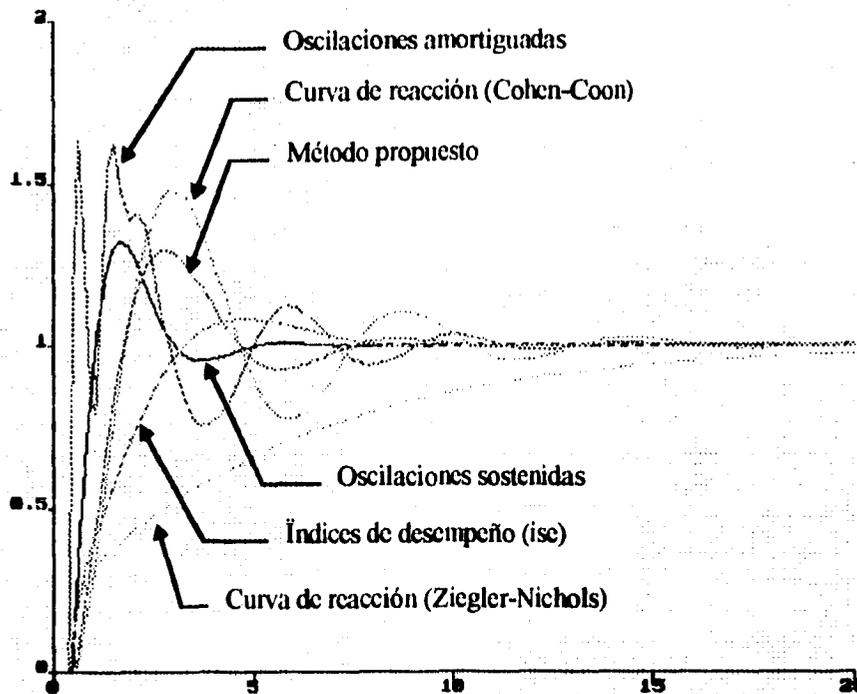
El propósito inicial de este trabajo es ofrecer una metodología para sintonizar controladores industriales PID, en una planta que pueda ser modelada por medio de un sistema de primer orden con tiempo muerto, a través de la minimización de un índice de desempeño.

Para observar las características y comparar el método aquí expuesto con los demás métodos de sintonización convencionales descritos en el capítulo 3, y aquellos que hacen uso de los índices de desempeño del capítulo 4, se simuló una planta de primer orden, con tiempo muerto cuya relación $\theta/\tau = 1$, retroalimentación unitaria y con un controlador PID. Los parámetros obtenidos utilizando los métodos convencionales fueron:

Método	Kc	Ti	Td	ISE
Oscilaciones sostenidas	1.765	1	0.25	1.2574
Oscilaciones amortiguadas	1.7	2	0.5	2.0853
Curva de reacción (Ziegler-Nichols)	0.5459	0.375	0.64	2.2798
Curva de reacción (Cohen-Coon)	0.8	1.809	0.307	1.6010
Índices de desempeño (ISE)	0.7196	1.0580	0.5457	1.2372
MÉTODO PROPUESTO (ISE)	1	1.25	0.25	1.2000

En la tabla anterior se observa el índice de desempeño ISE obtenido para cada método. Los métodos que utilizan los índices de desempeño fueron los que obtuvieron mejores resultados. Esto también se observa en la siguiente gráfica:

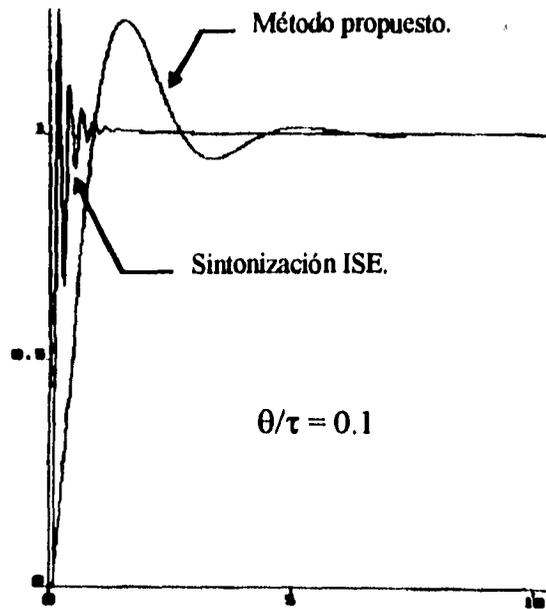
ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA



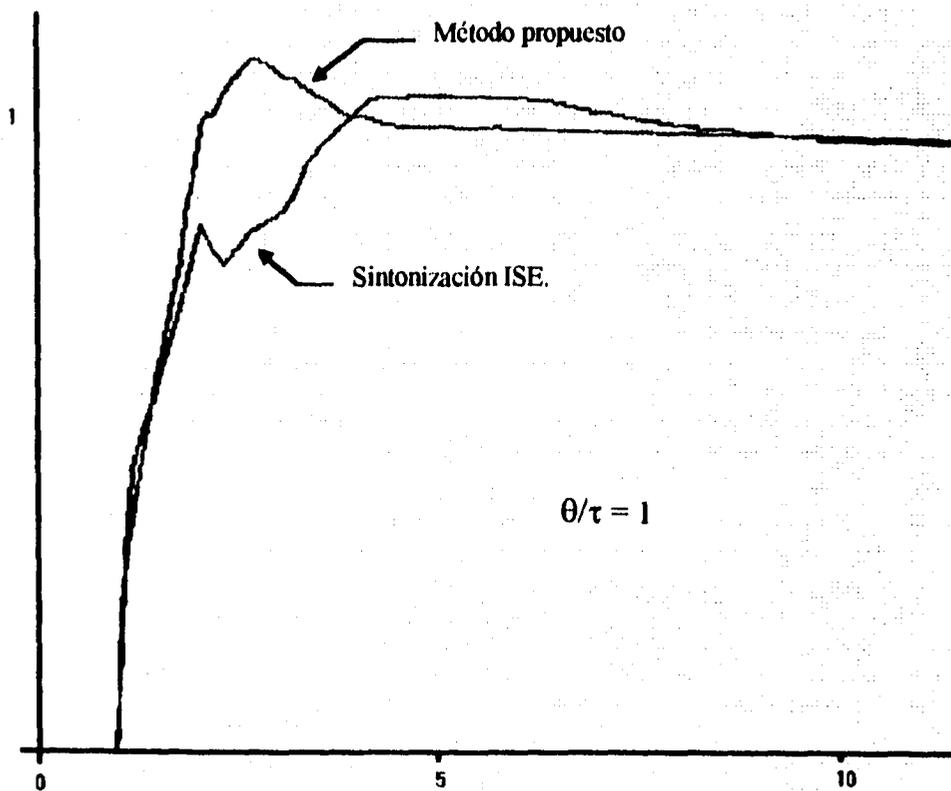
Como se observa, los métodos convencionales ofrecen un desempeño mas pobre en comparación con aquellos que utilizan los índices, ahora nos concentramos en estos últimos. Haciendo varias simulaciones para diferentes tiempos de retraso se llega a lo siguiente:

1. Cuando se presenta un tiempo muerto pequeño ($0 < \theta/\tau < 0.5$) los métodos que hacen uso de los índices de desempeño tienen un mejor comportamiento que el método propuesto, debido a que en la concepción del método se conseguían condiciones de estabilidad con ganancias proporcionales pequeñas, restándole velocidad en la respuesta transitoria.
2. Por otro lado, en presencia de tiempos muertos grandes ($\theta/\tau > 0.5$) el método propuesto tiene un mejor desempeño que todos los demás métodos.
3. Con los métodos tradicionales puede darse el caso de obtener un valor de los parámetros fuera del rango permitido por el controlador; no así en el método propuesto puesto que a partir de dos valores de los parámetros, que el diseñador fija, se obtiene el tercero que satisface la minimización del índice seleccionado.
4. Se logró obtener un método de sintonización a partir del índice ITSE el cual no ha sido considerado en los métodos tradicionales.
5. El método esta diseñado para sintonizar el tiempo derivativo e integral hasta centésimas de segundo. Sin embargo, utilizando la metodología aquí expuesta es posible lograr resoluciones mayores.

Para ilustrar lo anterior se muestran las siguientes gráficas:



Salida de una planta con tiempo muerto pequeño



Salida de una planta con tiempo muerto grande

Por la razón del punto (1) antes descrito, es posible mejorar el método permitiendo que se tengan valores mayores en la ganancia proporcional. Debido a la forma descrita por los polinomios obtenidos, es posible lograr una expresión más simplificada, haciéndolo más accesible en su uso, con el inconveniente de perder exactitud.

Por último, la enseñanza adquirida en este trabajo me permitió abstraer un problema ingenieril, estudiarlo, y llevarlo a sus últimas consecuencias. Observando que no importa que tan complicado sea el método utilizado, el sentido común es de vital importancia en la solución de cualquier problema, por ello concluyo que la universidad no quita nuestras limitaciones.

REFERENCIAS

Ziegler, J.C. and N. B. Nichols, "Optimum settings for automatic controllers", ASME 1942.

P.W. Murrill and C.L. Smith, "Criteria for Adjusting Controllers", IEEE 1969.

A. M. Lopez , J. A. Miller, P.W. Murrill and C.L. Smith, "Tuning controllers with error-integral criteria", Instrumentation Technology, November 1967.

David W. Pessen, "A new look at PID-controller tuning", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, September 1994.

Franklin, Gene F., and Powell J.D., "Control de sistemas dinámicos con retroalimentación", MA Addison-Wesley, 1986.

Dorf, and Richard C., "Sistemas modernos de control", MA Addison-Wesley, 1989.

Kuo Tsung, "Sistemas automáticos de control".

Katsuhiko Ogata, "Ingeniería de control moderna", Prentice Hall, 1993.

C. E. Rohrs, J. L. Melsa, and D. G. Schultz, "Sistemas de control lineal", McGraw Hill, 1994.

F. J. Rodriguez, "Apuntes de sistemas dinámicos", Facultad de Ingeniería UNAM, 1986.