35
2EJ

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROYECTO DE TEXTO PARA EL CURSO DE TEMAS SELECTOS DE MATEMATICAS UBICADO EN EL PLAN DE ESTUDIOS DEL 3er. AÑO DE BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
ACTUARIO

P R E S E N T A :

GRISELDA GARCIA NAUMIS

MEXICO, D.F. 1995

35
2EJ

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROYECTO DE TEXTO PARA EL CURSO DE TEMAS SELECTOS DE MATEMATICAS UBICADO EN EL PLAN DE ESTUDIOS DEL 3er: AÑO DE BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE ACTUARIO

P R E S E N T A :

GRISELDA GARCIA NAUMIS

MEXICO, D.F. 1995

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPN°MA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron la pasante(s) Griselda García Naumis

con número de cuenta 8353647-2 con el Título: "Proyecto de texto para el curso de Temas Selectos de Matemáticas ubicado en el plan de estudios del 3er. año de bachillerato"

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Actuario

GRADO	NOMBRE(S) APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
M.en C.	Guillermo Gómez Alcaraz	
Director de Tesis		
M. en C.	Francisco Struck Chávez	
Act.	Javier Fernández García	
M. en C.	Guadalupe Carrasco Licea	
Suplente		
Mat.	Enrique Vega Ramírez	
Suplente		

Tesis profesional

Proyecto de texto para el curso de Temas Selectos de Matemáticas ubicado en el plan de estudios del 3er. año de bachillerato

Griselda García Naumis

Director de tesis :

M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz

Facultad de Ciencias, UNAM , 1995

A mis padres

A mi esposo

INTRODUCCIÓN

El curso "Temas Selectos de Matemáticas" , introducido por la Universidad Nacional Autónoma de México al programa de tercer año del bachillerato incorporado, correspondiente al área Físico-Matemática, tiene como finalidad orientar al alumno hacia una modalidad sistematizada de razonamiento y proporcionarle una visión general de temas que cubran un amplio espectro.

Este programa procura, dentro de un marco muy flexible, enfatizar la formación del estudiante en cuanto a su capacidad para desarrollar demostraciones.

Abreviadamente, los temas incluidos en dicho programa son:

1. Sistemas de numeración
2. Teoría de Conjuntos
3. Números Complejos
4. Teoría de ecuaciones
5. Desigualdades
6. Sistemas de ecuaciones lineales
7. Sucesiones y series
8. Análisis combinatorio
9. El teorema del Binomio de Newton
10. Probabilidad
11. Estadística
12. Estructuras algebraicas

Como puede verse de esta enumeración, se incluyen varios temas ya vistos por el estudiante en los años previos, pero con menos profundidad, y sobre todo sin un enfoque estrictamente formal. También la uniformidad del tratamiento de los temas se entiendió necesaria para que este curso resultase efectivo en la preparación del estudiantes orientado al área Físico-matemática.

Asimismo, un componente importante del programa consite en evidenciar la interdependencia y concatenación lógica de los temas, pero sin omitir la idea del desarrollo paralelo en los diversos campos.

Hasta la fecha, para brindar soporte bibliográfico a la totalidad del curso únicamente se ha publicado el libro titulado "Temas Selectos de Matemáticas" de autoría del Prof. Flores Meyer (edit. Progreso, 1991), el cual representó un aporte útil, pero sin embargo soslaya, a juicio de la autora del presente trabajo, un abordaje inductivo a muchos de los resultados. Además este libro, en algunos temas presenta la información de una manera excesivamente condensada.

La alternativa al uso de este libro por parte de los estudiantes consiste en consultar distintos textos que cubren parte del programa, pero aún así hay temas como el de "Sistemas de numeración" para el cual no es fácil conseguir buenos libros de nivel adecuado. En otros casos, como en el tema de "Estructuras algebraicas", únicamente se pueden encontrar textos cuyo formalismo resulta excesivo por completo para los estudiantes de bachillerato.

Durante los últimos seis años, la autora ha trabajado como profesora de este curso en un colegio privado con alta exigencia académica y control contínuo del aprendizaje; ello le ha servido para apreciar las dificultades y carencias bibliográficas que deben enfrentar los estudiantes, y de aquí surgió la inquietud por comenzar a escribir material de estudio referente a los temas en que aquellas dificultades y carencias eran mayores.

Como parte de la enseñanza activa del colegio, los referidos materiales preliminares fueron sometidos a las crítica de los estudiantes, y progresivamente enriquecidos por la discusión colectiva.

De alguna manera, entonces, la visión personal de la autora acerca de cómo debería enseñarse cada tema, resultó matizada por la apreciación necesariamente más puntual de los estudiantes, y entonces el principal desafío consistió en sostener una metodología y un nivel homogéneos a lo largo de todo un texto.

Debe entenderse sin embargo, que el texto que ahora se presenta constituye una primera presentación del mismo, en que figuran reunidos todos los temas, y que el colegio piensa editarlo en tiraje limitado y mediante técnica que permita irle introduciendo mejoras en años sucesivos.

Antes de arribar a una versión estabiliazada y satisfactoria, es preciso que este proceso de retro-alimentación complete varios ciclos.

Varios libros de texto muy conocidos han inspirado el tratamiento de los temas, como es el caso de CRAMER para Estadística., de SWOKOSKI para Teoría de Ecuaciones. Sin embargo se ha brindado especial atención a dotar cada sección con un enfoque uniforme y propio, resultante de la expriencia personal como maestra y de la consulta a libros especializados de enseñanza de las Matemáticas, porque se trata de satisfacer una necesiad bien concreta y en un ámbito escolar bien definido.

Para la concepción general y el tratamiento particular de cada tema, la autora se benefició de la experiencia acumulada por el Profesor Guillermo Gómez, del Depto. de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, quien actuó como director de la tesis.

De sus alumnos, la autora ha recibicido inumerables comentarios y sugerencias, mismos que al ser tenidos en cuenta y adaptados a la necesidad docente, no han restado a la obra un cierto matiz de creación colectiva, que resulta particularmente gratificante para la maestra.

Terminada la presente versión, luego de revisada por los sinodales de la tesis y enriquecida por sus consejos, se confía en que el texto resulte útil para los estudiantes.

Contenido

1. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

A cualquier persona le resulta muy sencillo asociar el símbolo "3" con algún objeto que aparezca tres veces, pero al hombre le costó muchos siglos construir una estructura o sistema que le sirviera para representar cantidades numéricas. En particular la idea de que, por ejemplo, el número 3 es el símbolo que representa a todos los posibles conjuntos que puedan ponerse mutuamente en correspondencia con un conjunto de tres elementos.

Actualmente se utiliza en casi todo el mundo el sistema de numeración decimal, pero esto no siempre fué así. A lo largo de la historia se han utilizado sistemas numéricos completamente diferentes al actual. La razón fundamental por la que se adoptó el sistema decimal es que la forma más primitiva para contar es utilizando los diez dedos de las manos, asociando la ocurrencia de cada elemento con el desplegar un dedo de la mano.

Un sistema de numeración consta de numerales o guarismos que representan las cantidades, y un número, casi siempre llamado base del sistema, que indica que base de unidades simples (unidades de primer orden) forman una unidad de segundo orden y que base unidades de segundo orden forman una unidad de tercer orden . Por ejemplo nuestro sistema tiene base 10 y consta de 10 guarismos diferentes que son :

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Cuando contamos 1,2,3 objetos contamos unidades de primer orden, pero al llegar a 10 (base del sistema) formamos una decena, que es una unidad de segundo orden y al contar 10 decenas formamos una centena que es una unidad de tercer orden, y así sucesivamente. En general diez unidades de cualquier orden forman la unidad de orden inmediato superior.

Es importante notar que cuando se nos terminan los guarismos comenzamos a combinarlos entre sí con un cierto orden. Por ejemplo en base 10 comenzamos a contar

0
1
2
⋮
9 se terminan los guarismos
10 se comienza a combinar

1.1 Sistemas posicionales y no posicionales

En el sistema babilónico, así como en el maya, un numeral podía tener un significado completamente distinto dependiendo de la posición que ocupase dentro del número, es decir que se trataba de un sistema de posiciones.

En nuestro sistema, utilizamos el primer lugar a la derecha para escribir las unidades (primer orden), la segunda cifra a la derecha representa decenas (segundo orden) y por cada lugar que nos corramos el dígito representa 10 unidades más grandes que el dígito de la derecha.

Cada tres órdenes, se forma una clase, éstas se cuentan siempre de derecha a izquierda. Por ejemplo $1,\underbrace{538}_{clase}$.

En general, si llamamos b a la base del sistema, d_i a cada uno de los numerales o dígitos y k a la cantidad de dígitos del número, un número escrito es un sistema posicional se representa de la forma:

$$d_k b^k + d_{k-1} b^{k-1} + \ldots + d_1 b^1 + d_0 b^0$$

pero para escribir más abreviadamente el número, sólo escribimos

$$d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_{0_b}$$

donde el subíndice b final significa que el número en cuestión está en base b.

Los sistemas no posicionales se basan en diferentes principios, como por ejemplo, que cada guarismo represente una cantidad, escribir los guarismos y al final sumar las cantidades. El sistema romano de numeración, que todavía usamos para escribir los siglos, se basa precisamente en el principio de la suma, es decir no importa la posición que ocupan los numerales. Por ejemplo en el número XII, el numeral I tiene el mismo valor las dos veces.

1.2 Antiguos sistemas de numeración

Los antiguos egipcios, que vivían en el valle del Nilo desde antes del año 3000 A.C. contaban con una escritura llamada jeroglífica y un sistema de numeración de base decimal, cuyos símbolos aparecen en la siguiente figura

1 10 100 1000 10000 100000 1000000

Cada símbolo podía repetirse hasta nueve veces y para representar cualquier número bastaba con sumar las cantidades que representaba cada símbolo. Por ejemplo:

 = 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 = 232

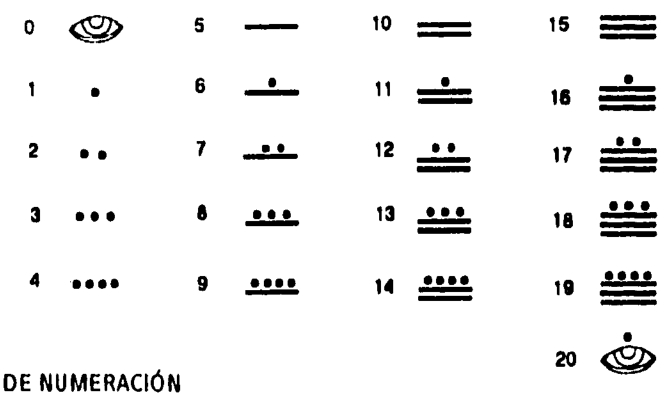
En el valle que se encuentra entre los ríos Tigris y Eufrates de Irak, floreció la antigua Babilonia, donde se utilizaba un sistema sexagesimal (base 60) de posiciones. Se desconoce cuál fué el origen de este sistema en base sesenta, aunque algunos investigadores lo atribuyen a que la duración del año babilónico era de 360 días. Todavía conservamos vestigios de este sistema, puesto que dividimos la hora en 60 minutos y el minuto en 60 segundos, también lo utilizamos para medir ángulos, una vuelta son 360 grados, 1 grado son 60 minutos y 1 minuto son 60 segundos. Sin embargo este sistema resultaba complicado, aún para los babilonios, ya que se necesitaban demasiados guarismos, por lo que la población en general utilizaba un sistema alterno de base 12.

Los guarismos que utilizaban eran en forma de cuña y por eso se llamaban caracteres cuneiformes, la siguiente figura muestra como la cuña era la misma pero cambiaba de valor al rotarse

La civilización maya fué la primera que utilizó un sistema numérico de posiciones incluyendo al número 0. El sistema de numeración maya estaba en uso 5 ó 6 siglos antes que cualquier otro país del mundo utilizace un sistema semejante.

La gran importancia del 0 radica en que sirve para indicar la ausencia de unidades de un cierto orden, por ejemplo:
en el número 102 , el 0 indica que no hay decenas, o bien nos hace distinguir entre 4 y 40

El sistema maya era de base vigesimal (base 20) y los números se representaban por puntos y rayas como muestra la siguiente tabla:



1.3 Sistemas de numeración en diferentes bases

El gran matemático francés Laplace emitió la siguiente opinión:

"La base de nuestro sistema de numeración no es divisible entre 3 ni entre 4, es decir, entre dos divisores empleados por su sencillez. La incorporación de dos nuevos símbolos (guarismos) daría al sistema de numeración esta ventaja; pero tal inovación sería, sin duda, contraproducente. Perderíamos la utilidad que dió origen a nuestra aritmética que es, la posibilidad de calcular con los dedos de las manos"

El número 12 es el gran derrotado por el número 10 en la lucha por ser la base del sistema de numeración. El doce ofrece la gran ventaja de tener más múltiplos que el número 10.

Pero conservamos doce meses en al año, dividimos los días en docenas de horas, nuestros relojes dividen la hora en 5 docenas de minutos, en el sistema inglés de medición un pie tiene doce pulgadas. En nuestros mercados todavía se venden naranjas, tortillas, huevos , elotes y hasta pollos por docena.

Los símbolos que actualmente utilizamos para representar números se llaman arábigos, aunque, en realidad se originaron en la India, durante el siglo VIII y fueron llevados a Europa por los árabes.

Prácticamente los sistemas numéricos más utilizados son el binario (base 2) y el hexadecimal (base 16). El caso más interesante de la base binaria es que como sólo tenemos dos símbolos, no hay posibilidad de confusión. Por ejemplo, todos los dispositivos electrónicos digitales se basan en un mismo principio: el voltaje de un cable está alto o bajo. Todos los nervios del cuerpo humano funcionan bajo este mismo principio digital, ya que solamente dan una señal que se llama potencial de acción, o bien están en reposo.

El sistema hexadecimal tiene su principal aplicación en la estructura de computadora, ya que permite representar los números de manera más compacta. Cuando se representan cantidades o bien las direcciones internas de los dispositivos se utiliza base 16.

Utilizando los principios básicos de construcción para nuestro sistema de numeración, podemos construir un sistema de numeración que tenga como base a cualquier número positivo a partir de 2:

1.3.1 Principios básicos para sistemas de numeración

1. **En todo sistema, el número de unidades de cualquier orden, igual a la base, forma una unidad del orden inmediato superior.** Por ejemplo, si estamos contando zanahorias en base 10, al llegar a 9 , se nos acabaron los guarismos, ya que el 9 es el décimo, entonces seguimos contando con la formación de un orden inmediato superior, el número 10.

Es decir, al momento de llegar al número de zanahorias igual a la base (10 en este caso) tuvimos que agregar otro dígito al número.

2. **En todo sistema una cifra escrita a la izquierda de otra, representa unidades tantas veces mayor que las que representa la anterior, como indique la base.**
   Esto se desprende de que estamos tratando con sistemas posicionales, entonces, por ejemplo en el número 12 en base 3, 1 representa una unidad 3 veces mayor que 2.

3. **En todo sistema con tantos guarismos como unidades tenga la base, se pueden escribir todos los números.**

Observemos que del principio 2 se desprende que el 0 no se escribe a la izquierda de un número, ya que el cero representa la ausencia de unidades.

Ahora construiremos los primeros 11 números en los sistemas de base 2,3,4,5 y 10, utilizando los guarismos que ya conocemos.

Binario	Ternario	Cuaternario	Quinario	Decimal
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
10	2	2	2	2
11	10	3	3	3
100	11	10	4	4
101	12	11	10	5
110	20	12	11	6
111	21	13	12	7
1000	22	20	13	8
1001	100	21	14	9
1010	101	22	20	10
1011	102	23	21	11
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

De tal modo que 110_2 (el subíndice indica la base) representa físicamente la misma cantidad de unidades que 20_3, que 12_4, que 11_5 y que 7_{10}. Cuando alguien nos dice que en una fiesta había 50 personas, nosotros no nos imaginamos un símbolo "50", sino la cantidad física de personas; y esto es muy importante, ya que como podemos ver, si la base de nuestro sistema fuera otra "50" representaría otra cantidad.

Anteriormente se dijo que se podían construir sistemas de numeración con cualquier base, veamos entonces lo que sucede con sistemas con bases mayores a 10.

El único poblema es que no tenemos más que 10 símbolos, entonces tendríamos que inventar nuevos símbolos, estos podrían ser caracoles, peces, bastones o simplemente un garabato, pero debido a que tenemos otros símbolos muy conocidos para todos, que son las letras, utilizaremos estas.

Base 10	Base 11	Base 12	Base 13	Base 14
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9
10	A	A	A	A
11	10	B	B	B
12	11	10	C	C
13	12	11	10	D
14	13	12	11	10
15	14	13	12	11
16	15	14	13	12
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Claro que cuando llegaramos a una base 36 se nos habrían acabado las letras, pero tendríamos todavía algunos símbolos y más que nada imaginación para inventar símbolos nuevos.

El número 1011_2 representa el mismo número de unidades que B_{14} , pero en base 2 se necesitan más dígitos que en base 14. Cuanto más grande sea la base del sistema, se necesitarán menos dígitos para representar un número.

1.3.2 Operaciones aritméticas en diferentes sistemas

Gracias al principio posicional de nuestro sistema, podemos efectuar las cuatro operaciones aritméticas suma, resta, multiplicación y división, rápida y fácilmente, ya que todos los dígitos se operan como si fueran unidades de primer orden , y sólo al obtener el resultado final tomamos en cuenta su orden.

Suma

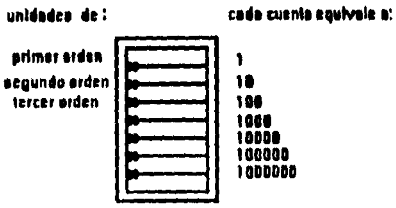
Desde muy pequeños, se nos enseñó un método para sumar que consiste en reagrupar números para formar grupos de 10. Cuando se junta un grupo de 10 o más nos "llevamos" las unidades de orden superior al siguiente grupo.

Ejemplo:

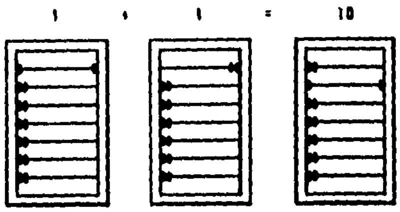
1	
18	empezamos por sumarle al 8, 7 unidades, cuando
+ 47	llegamos a la base (10) nos "llevamos" el dígito
5	de orden superior al siguiente grupo (1+4)

$$\begin{array}{r} 1 \\ 18 \\ +\underline{47} \\ 65 \end{array}$$ luego agrupamos el siguiente grupo $1 + 1 + 4 = 6$

Este mismo método lo podemos utilizar para cualquier base; y por cierto que este método se facilita si utilizamos un ábaco con tantas cuentas en cada línea como unidades tenga la base.



Ahora vamos a utilizar este ábaco para sumar $1_2 + 1_2$



Observemos que las dos cuentas de la primera línea del segundo ábaco se regresan al lado izquierdo en el tercer ábaco y se aumenta una cuenta de la segunda línea, esto es debido al principio 1 de sistemas de numeración.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} AB8C_{16} \\ +\underline{\ \ 875E_{16}} \\ 132EA \end{array}$$ En base 16 se llega hasta la letra F

Resta

El método que utilizamos para restar consiste en contar el número de unidades que nos faltan para llegar a la unidad que está arriba, si la unidad que está arriba (en el minuendo) es más pequeña que el número que vamos a restar (del sustraendo), entonces se pueden hacer dos cosas:

a) (en el minuendo)se le "pide prestado" una unidad a la cifra de junto a la izquierda

b) le sumamos uno al número que está a la izquierda del número que vamos a restar

Estas dos soluciones tienen un mismo objetivo: sumarle una unidad de orden superior al número al que le vamos a restar.

Ejemplo:

(por conveniencia de notación utilizaremos la forma de restar a)

$$\begin{array}{r} -1 \\ 67 \\ \underline{-\,49} \\ 18 \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} \cdot1\cdot1\cdot1 \\ 4\,2\,3\,3_6 \\ \underline{-\quad 2\,3\,5_6} \\ 3\,5\,5\,4_6 \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} \cdot1\phantom{00_{13}} \\ 1AB5_{13} \\ \underline{-\,678_{13}} \\ 143A_{13} \end{array}$$

base 13 llega hasta la letra C

Multiplicación

Sabemos que multiplicar $a \times b$ equivale a sumar a veces b, o viceversa, pero sería laborioso multiplicar así, es por esto que en la escuela tuvimos que aprender de memoria las tablas de multiplicar para unidades de primer orden. Es así que para multiplicar en base 4, por ejemplo, necesitamos obtener de la tabla de multiplicar para base 4:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 231_4 \\ \underline{\times\quad 102_4} \\ 1122_4 \\ {}_1000_4 \\ \underline{231_4} \\ 30222_4 \end{array}$$

×	1	2	3
1	1	2	3
2	2	10	12
3	3	12	21

División

Dividir un número, llamado dividendo, entre otro número llamado divisor, es equivalente a partir el dividendo en "divisor" partes iguales, es decir, se trata de una operación inversa a la multiplicación.

Para realizar con éxito una división en una base numérica con la que no estamos familiarizados, se necesita la tabla de multiplicar en la base correspondiente y recordar el primer método con el que nos enseñaron a dividir:

- Primero separamos en el dividendo tantos dígitos como tenga el divisor, por ejemplo dividiremos el número $A8C.4_{14} \div B_{14}$

$$B_{14}\,\overline{)\,A,8C.4_{14}}$$

- Ahora nos preguntamos ¿Cuántas veces cabe el divisor en los dígitos separados?, en este caso no cabe, entonces, agregamos otro dígito a nuestra separación

$$B\,\overline{)\,A8,C.4_{14}}$$

Recordemos que cada vez que llegamos a 10, ya se contó una vez la base; en este caso 14 y si llegamos a la letra A_{14}, la base se contó 10 veces, por lo que B debe caber aproximadamente unas $C_{14}(12)$ veces en $A8_{14}$,

multiplicamos $C \times B$

$$\begin{array}{r} C\phantom{,C.4_{14}} \\ B_{14}\,\overline{)\,A8,C.4_{14}} \\ \underline{-96}\phantom{,C.4_{14}} \\ 12\phantom{,C.4_{14}} \end{array}$$

Nos está quedando un residuo de dos dígitos y el divisor es de un dígito, por lo que nuestro cálculo aproximado fué incorrecto, debemos tomar un número más grande que B_{14}

$$\begin{array}{l} \phantom{B_{14}\,)\,A}D7.6_{14} \\ B_{14}\,\overline{)\,A8C.4_{14}} \\ \phantom{B_{14}\,}\underline{-A3} \\ \phantom{B_{14}\,)\,}05C \\ \phantom{B_{14}\,)\,}\underline{-57} \\ \phantom{B_{14}\,)\,A}054 \\ \phantom{B_{14}\,)\,A}\underline{-4A} \\ \phantom{B_{14}\,)\,A8}08 \end{array}$$

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D
2	2	4	6	8	A	C	10	12	14	16	18	1A	1C
3	3	6	9	C	11	14	17	1A	1D	22	25	28	[illegible]
4	4	8	C	12	16	1A	20	24	28	2C	32	36	3A
5	5	A	11	16	1B	22	27	2C	33	38	3D	44	49
6	6	C	14	1A	22	28	30	36	3C	44	4A	52	58
7	7	10	17	20	27	30	37	40	47	50	57	60	67
8	8	12	1A	24	2C	36	40	48	52	5A	64	6C	76
9	9	14	1D	28	33	3C	47	52	[illegible]	66	71	7A	85
A	A	16	22	2C	38	44	50	5A	66	72	7C	88	94
B	B	18	25	32	3D	4A	57	64	71	7C	[illegible]	[illegible]	A3
C	C	1A	28	36	44	52	60	6C	7A	88	96	A4	B2
D	D	1C	[illegible]	3A	49	58	67	76	85	94	A3	B2	C1

- Agregando ceros, podemos continuar con la división hasta obtener el número de fraccionarios deseado o bien hasta que el residuo sea 0.

1.3.3 Conversión de un número en base diferente a 10 a base 10.

Como estamos trabajando con sistemas de posiciones, sabemos que un dígito a la izquierda es una unidad de orden superior al dígito de la derecha. Si consideramos el valor que tendría dicho dígito en base 10, entonces podemos sumar cada dígito del número multiplicado por su valor en base 10 y así obtener dicho número en base 10.

Para facilitar la idea dividimos cada dígito del número a convertir con rayas y escribimos abajo el valor por el cual tenemos que multiplicar cada dígito

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_n \\ base^{n-1} & base^{n-2} & base^{n-3} & \cdots & base^0 \end{array}$$

donde d_i es un dígito del número,entonces

$d_1 d_2 d_3 d \ldots d_{n_{base}} =$

$$= d_1 \times base^{n-1} + d_2 \times base^{n-2} + d_3 \times base^{n-3} + \ldots + d_n \times base^0_{10}$$

Los dígitos que esten a la derecha del punto, son una unidad de orden menor por cada lugar a la derecha, esto es

$$\begin{array}{c|c|c|c} df_1 & df_2 & df_3 & df_4 s \\ \frac{1}{base^1} & \frac{1}{base^2} & \frac{1}{base^3} & \frac{1}{base^4} \end{array}$$

Cuando hagamos un cambio de una base mayor a 10 a base 10, simplemente tomamos cada letra con su valor en base 10, es decir, A equivale a 10, B equivale a 11, etc.

<u>Ejemplo:</u>

$8CBA_{15} \longrightarrow X_{10}$

$$\begin{array}{c|c|c|c} 8 & C & B & A \\ 15^3 & 15^2 & 15^1 & 15^0 \end{array}$$

$8CBA_{15} = 8 \times 15^3 + 12 \times 15^2 + 11 \times 15^1 + 10 \times 15^0 = 27000 + 2700 + 165 + 10 =$
$= 29875_{10}$

1.3.4 Conversión de un número en base 10 a un número en otra base

Es evidente que el proceso tiene que ser el inverso al anterior, es decir, en lugar de multpilicar por la base, dividmos entre la base, y nos quedaremos con el residuo de la división entera, ya que lo que nos interesa es saber cuántas veces enteras cabe el número "base" en nuestro número de base 10.

Veámoslo con un ejemplo:

$441_{10} \longrightarrow X_5$

88	17	3	0	
$5\,\overline{)441}$	$5\,\overline{)88}$	$5\,\overline{)17}$	$5\,\overline{)3}$	$441_{10} = 3231_5$
41	38	2	3	
1	3			

Los residuos de la división se van tomando al revés para obtener el número final, esto porque la primera división nos da las unidades de primer orden en base 5, la segunda división nos da las unidades de segundo orden, etc.

El proceso para cambiar la parte fraccionaria de un número en base 10 a otra base, es básicamente el mismo, se trata de obtener el número de veces enteras que cabe $\frac{1}{base}$ para obtener el primer fraccionario, $\frac{1}{base^2}$ para obtener el segundo y así sucesivamente.

<u>Ejemplo:</u>

$0.216 \longrightarrow X_5$ dígito en base 5

$$
\begin{array}{llcccccccl}
0.216 & \div 5^{-1} & = & 1.08 & \longrightarrow & 1 & \Rightarrow & 0.216- & (5^{-1}\cdot 1) & = 0.016 \\
0.016 & \div 5^{-2} & = & 0.4 & \longrightarrow & 0 & \Rightarrow & 0.016- & (5^{-2}\cdot 0) & = 0.016 \\
0.016 & \div 5^{-3} & = & 2 & \longrightarrow & 2 & \Rightarrow & 0.016- & (5^{-3}\cdot 2) & = 0
\end{array}
$$

$0.216_{10} = 0.102_5$

<u>Ejemplo:</u>

$9912.784_{10} \longrightarrow X_{16}$

Primero cambiaremos de base la parte entera

619	38	2	0
$16\,\overline{)9912}$	$16\,\overline{)619}$	$16\,\overline{)38}$	$16\,\overline{)2}$
8	11	6	2

Cuando hagamos un cambio de una base mayor a 10 a base 10, simplemente tomamos cada letra con su valor en base 10, es decir, A equivale a 10, B equivale a 11, etc.

Ahora la parte fraccionaria

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
0.784 \div 16^{-1} & = & 12.54 & \longrightarrow & 12 & \Rightarrow & 0.034 \\
0.034 \div 16^{-2} & = & 8.704 & \longrightarrow & 8 & \Rightarrow & 0.00275 \\
0.00275 \div 16^{-3} & = & 11.264 & \longrightarrow & 11 & \Rightarrow & 0.000064453
\end{array}
$$

Finalmente $9912.784_{10} = 26B8.C8B_{16}$

2. TEORÍA DE CONJUNTOS

La teoría de conjuntos es una parte de la Matemática que da posibilidad de globalizar el conocimiento y utiliza un lenguaje simbólico para ordenar y expresar sus proposiciones, modelos y resultados. Todos los conocimientos de matemáticas pueden irse remontando hacia atrás hasta llegar a la teoría de los conjuntos, de modo que esta es una de las maneras que tenemos para fundamentar las matemáticas. Las ideas básicas sobre conjuntos las desarrollaron George Boole (1815-1854) y George Cantor.

No es necesario definir el concepto de conjunto, ya que se trata de una idea primitiva, que todos intuitivamente conocemos y manejamos. Todos los días utilizamos conjuntos, desde que salimos del conjunto de sábanas, escogemos un par de calcetines de entre nuestra colección de calcetines, oímos un conjunto musical ... hasta dar las buenas noches utilizando un conjunto de letras.

Ahora bien las expresiones matemáticas son rigurosamente lógicas y no admiten ambigüedades , es por esto que la matemática se ocupa de conjuntos bien definidos , es decir, de aquellos para los cuales se tiene una propiedad que nos permita saber si un elemento pertenence o no al conjunto.

En el párrafo anterior, hemos tocado un punto muy importante : si un elemento pertenece o no al conjunto. Esta relación de pertenencia es un concepto que también tomaremos como primario, ya que intuitivamente todos conocemos esta relación. Para denotar la relación de pertenencia entre un elemento y un conjunto se utiliza el símbolo $\in$ (introducido por Peano 1858-1932), mientras que para indicar no pertenencia usaremos $\notin$. Esta notación sólo tiene sentido cuando el objeto que se encuentra del lado izquierdo del símbolo $\in$ es considerado como elemento y el que se encuentra del lado derecho es considerado como conjunto.

En general, usaremos letras mayúsculas A,B,C,... para representar a los conjuntos y minúsculas a,b,c,... para representar a sus elementos.

2.1 Descripción de un conjunto

La forma en que describimos un conjunto debe indicarnos claramente cuáles son los elementos que pertenecen al conjunto y cuáles no.

Podemos describir los elementos de un conjunto de las siguientes formas:

- **extensión** - Consiste en listar todos los elementos del conjunto

- **comprensión** -Se utiliza una expresión o frase que describa las características en común de los elementos del conjunto.

Tanto para los conjuntos descritos por extensión, como para los descritos por compresión, usaremos la notación entre llaves.

Ejemplo :

Describir el conjunto que contiene a todas las notas musicales

por extensión $Notas = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$

por comprensión $Notas = \{x \mid x \text{ es una nota musical}\}$

El ejemplo anterior muestra un conjunto que se puede describir por compresión o por extensión, pero no sucede lo mismo con todos los conjuntos. sólo los conjuntos finitos pueden ser descritos por extensión ¿pero qué és un conjunto finito?

2.2 Cardinalidad.

La **cardinalidad** de un conjunto es el número de elementos diferentes entre sí que tiene el conjunto. Se denota mediante el símbolo # seguido del nombre del conjunto. Si tomamos como ejemplo el conjunto *Notas* compuesto por las notas musicales: $\#Notas = 6$.

Comprender la "magnitud" de un conjunto sólo es posible estableciendo equivalencias. Si tenemos dos conjuntos y logramos que a cada elemento del primer conjunto le corresponda un (y sólo uno) elemento del segundo conjunto y viceversa , entonces la coorespondencia entre estos conjuntos se llama biunívoca y se dice que los conjuntos son equivalentes . Esto es la verdadera idea de contar, ya que como se mencionó en al capítulo anterior lo que hacemos al contar es establecer una correspondencia biunívoca entre los objetos a contar y los dedos de la mano. De hecho, los números responden a la pregunta de cuántos objetos tiene la colección de todos los posibles conjuntos equivalentes con el mismo número de elementos.

Así que la idea de CANTOR para definir un **conjunto infinito,** fue establecer una correspondencia biunívoca entre todos los números reales y los puntos de la recta. Utilizando esta misma idea, podemos decir que un **conjunto** es **finito** si y sólo si es equivalente con un segmento inicial de los naturales o es vacío.

Hay que ser muy cuidadosos cuando utilicemos la palabra "infinito", porque comunmente la usamos para referirnos a números muy grandes y un número por más grande que sea siempre es finito.

Un número entero muy grande es el llamado Googol. La definición de un Googol es: un uno seguido de cien ceros. El Googol es un número más grande que los mayores números usados en física o en astronomía, ya que estos números requieren menos de cien ceros. El número de electrones que pasan a través del filamento de una lámpara eléctrica común, de cincuenta watts, en el término de un minuto, iguala al número de gotas de agua que caen por las cataratas del Niagara en un siglo. El número total de electrones, en el universo entero, puede determinarse por medio de la física de Einstein y es muchísimo menor que un Googol . Los conjuntos que se encuentran en la naturaleza, si bien son a veces muy grandes, son todos, por cierto finitos.

2.3 Relaciones entre conjuntos

2.3.1 Subconjuntos

Decimos que un conjunto A es **subconjunto** de otro conjunto B (o bien que A está contenido en B), si y sólo si ($\Leftrightarrow$) todos los elementos que pertenecen a A, también pertenecen a B. La contención se denota mediante el símbolo $\subset$. Ahora escribiremos esto mismo usando notación de conjuntos:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow {}^{1} x \in B$$

Esta definición de subconjunto nos permite afirmar que todo conjunto es un subconjunto de sí mismo, puesto que todos los elementos del conjunto A, también están en A, i.e. $A \subset A$. Pero nosotros vamos a reservarnos el signo $\subset$ únicamente para denotar a un **subconjunto propio**, es decir aquellos subconjuntos que no contengan todos los elementos del conjunto original. Por ejemplo los enteros pares son un subconjunto propio del conjunto de todos los números racionales.

Cuando sucede que un subconjunto tiene los mismos elementos que el conjunto original, se dice que se trata de un **subconjunto impropio.** Si un conjunto A es subconjunto impropio de B, entonces es que A y B son iguales. Claro está que en ocasiones no tenemos la certeza de que un subconjunto A del conjunto B sea subconjunto propio o impropio, entonces utilizamos el símobolo $\subseteq$.

[1] Donde la flecha $\Rightarrow$ (se lee como entonces) une la hipótesis con la tesis

La contención de un conjunto dentro de otro, tiene las siguientes propiedades. Sean A, B y C conjuntos:

1. **Reflexiva** : $A \subset A$

2. **Transitiva** : si $A \subset B$ y $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Para afirmar que una propiedad se cumple para todos los conjuntos debemos demostrarla.

Demostrar quiere decir que a partir de una cierta hipótesis debemos concluir una tesis, hay muchos caminos para llegar de una hipóitesis a una tesis, pero todos ellos tienen algo en común: sólo es válido utilizar verdades universales (i.e. , proposiciones ya demostradas o definiciones). Nunca será posible demostrar una propiedad (proposición o teorema) utilizando un ejemplo en particular, ya que puede ocurrir que esta se cumpla para el ejemplo elegido pero no para todos los demás casos.

Sin embargo, cuando queremos demostrar que una proposición no es válida, basta con que encontremos un sólo ejemplo que no cumpla la proposión(contraejemplo), ya que esto indica que la proposición no tiene validez universal.

Demostraremos la segunda propiedad para la contención entre conjuntos

Por demostrar que $\forall$ (para todo) A, B y C,

$$\text{si } \underbrace{A \subset B \text{ y } B \subset C}_{\text{Hipótesis}} \Longrightarrow \underbrace{A \subset C}_{\text{Tesis}}$$

En este caso utilizaremos la demostración directa, la cual consiste en partir de la hipótesis y llegar a la tesis, utilizando únicamente los elementos de la hipótesis y verdades universales. Es un error muy común, en el que no debemos incurrir, hacer uso de la tesis para efectuar la demostración; por ejemplo, si sabemos que en cierta isla existe un tesoro y queremos encontrarlo, no podemos utilizar el dinero del tesoro para comprar el barco que se necesita para llegar a la isla.

<u>**Demostración :**</u> *(escrita con palabras)*

tomemos cualquier elemento x del conjunto A, como la hipótesis nos indica que $A \subset B$, entonces x es también un elemento de B, pero según la hiptesis $B \subset C$, entonces x también es un elemento de C , por lo tanto, si partimos de tomar cualquier elemento x del conjunto A y llegamos a que este elemento también está en el conjunto C, concluímos que $A \subset C$. □

<u>**Demostración :**</u> *(escrita con símbolos matemáticos)*

Sea $x \in A$, como $A \subset B \Rightarrow x \in B$, pero $B \subset C \Rightarrow x \in C$ □

El número total de subconjuntos de un conjunto A es igual a $2^{\#A}$. Algunos capítulos más adelante veremos la justificación de esta afirmación.

Ejemplo: Obtener todos los subconjuntos de $Moneda = \{águila, sol\}$
$\#Moneda = 2$ entonces el número de subconjuntos deberá ser $2^2 = 4$
$S_1 = \{águila, sol\}$ subconjunto impropio
$S_2 = \{águila\}$ subconjunto propio
$S_3 = \{sol\}$ subconjunto propio
ya no tenemos más posibilidades de obtener subconjuntos y sin embargo, ¿dónde está el cuarto subconjunto?

2.4 Conjuntos especiales

2.4.1 Conjunto Vacío

Todos los conjuntos contienen al **conjunto vacío** (lo denotaremos como $\{\}$ o bien como $\emptyset$), que es el conjunto que no tiene ningún elemento. Hay que tener mucho cuidado en no confundir la notación, no es lo mismo $\{\emptyset\}$ que $\{\}$ o que $\emptyset$; $\{\emptyset\}$ representa al conjunto cuyo único elemento es el conjunto vacío, entonces no está vacío contiene un elemento.

El subconjunto que nos faltó en el ejemplo anterior es $\emptyset$
$S_4 = \{\}$ subconjunto propio

2.4.2 Conjunto Universo

Llamaremos **conjunto Universal** (denotado por U) a un conjunto fijo que contiene a todos los demás conjuntos que estamos estudiando, por conveniencia el conjunto universo se incluye a sí mismo.

2.4.3 Conjunto Complemento

El conjunto complemento A^c del conjunto A está formado por todos los elementos que están en el conjunto Universo pero no están en A.

$A^c = \{x \mid x \notin A\}$

2.5 Igualdad

Dos conjuntos A y B **son iguales** si contienen exactamente los mismos elementos , o lo que es lo mismo, si todos los elementos que están en A también están en B, y si todos los elementos que están en B también están en A. Esto quiere decir que si A y B son iguales es porque $A \subset B$ y $B \subset A$. Ahora escribamos esto en notación de conjuntos :

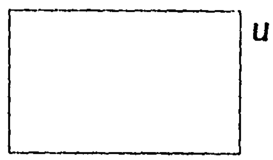
Si $A = B \Rightarrow A \subset B$ y $B \subset A$

La igualdad entre conjuntos tiene las siguientes propiedades:
Sean A, B, C conjuntos en un universo U

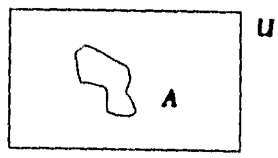
1. **Reflexiva :** $A = A$
2. **Transitiva :** si $A = B$ y $B = C \Rightarrow A = C$
3. **Simétrica :** si $A = B \Rightarrow B = A$

2.6 Diagramas de Venn-Euler

Un diagrama de Venn es un modelo geométrico para visualizar conjuntos y sus operaciones. Consiste en representar el conjunto universal por el área comprendida en un rectángulo



Cualquier conjunto que este dentro del universo se representa por medio de una región en el rectángulo. Es común que dicha región sea circular, sin embargo podemos representar al conjunto por



2.7 Operaciones entre conjuntos

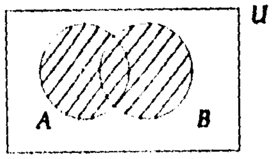
2.7.1 Unión

Unir dos conjuntos A y B es equivalente a juntar todos los elementos del conjunto A con los del conjunto B, sólo que sin repetir los elementos que están en el conjunto A y a su vez estén en el conjunto B. La operación de unir dos conjuntos es similar a la operación de sumar números, inclusive algunos textos utilizan la notación de + para la unión, nosotros utilizaremos el símbolo $\cup$.

La unión de dos conjuntos forman un nuevo conjunto :

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$

Gráficamente:



Ejemplo:

Sean los conjuntos

$A = \{x \mid x \text{ es uno de los cuatro primeros números perfectos}\}$

$B = \{x \mid x \text{ es uno de los cinco primeros números pares}\}$

Entonces:

$A = \{6, 8, 10, 14\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Así:

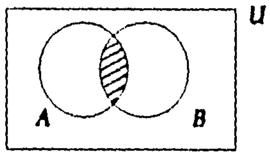
$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 14\}$

2.7.2 Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B, es el conjunto que contiene todos los elementos que están en A y que también están en B. Para denotarla utilizaremos el símbolo $\cap$.

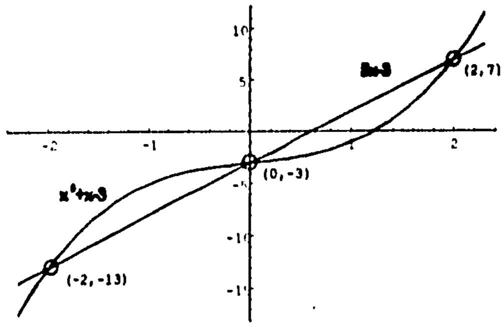
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$

Gráficamente:



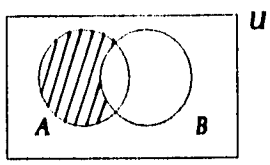
Ejemplo:

$W = \{p \mid p$ es un punto sobre la línea recta $y = 5x - 3\}$
$T = \{u \mid u$ es un punto sobre la curva $x^3 + x - 3\}$
Así:
$W \cap T = \{\ (-2, -13)\ ,\ (0, -3)\ ,\ (2, 7)\ \}$
Gráficamente:



2.7.3 Resta

La resta de dos conjuntos A y B denotada por $A - B$,es la operación mediante la cual obtenemos los elementos que están en A y que no están en B.
$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$
Gráficamente:



Ejemplo:

$A = \{x \mid x$ es una letra del alfabeto$\}$
$B = \{x \mid x$ es una vocal$\}$
Entonces: $A - B = \{x \mid x$ es una consonante$\}$

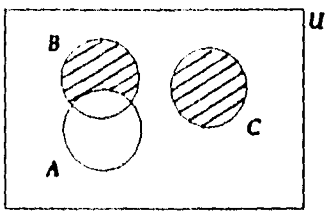
2.7.4 Uso general de la nomenclatura de conjuntos

En la actualidad los conceptos de conjunto, de intersección unión y resta están hallando aplicaciones directas en que no se van a utilizar nuevas manipulaciones matemáticas. Este sería el caso de cuando se efectúan búsquedas bibliográficas por ejemplo: todos los libros de matemáticas para nivel bachillerato, todos los libros de estadística y libros que traten de estadísitica y sean para nivel de bachillerato.

También es importante señalar que varios lenguajes de programación como PASCAL y C por ejemplo, admiten la definición de variables tipo conjunto , y efectuan de manera automática operaciones como la resta o la intersección.

Ejemplo:

Representar gráficamente la operación
$(B - A) \cup C$
teniendo la siguiente información acerca de los conjuntos A, B y C
$A \cap C = \emptyset \qquad B \cap C = \emptyset$
Sabemos que A no se intersecta con C ni tampoco B se intersecta con C, entonces podemos graficar el área que represente al conjunto C separada de las áreas que representen a los conjuntos A y B. Pero no sabemos si los conjuntos A y B se intersectan o no, por lo que al dibujarlos tendremos mucho cuidado en intersectarlos, ya que si los conjuntos no se intersectan entonces el área correspondiente a la intersección estará vacía, en cambio, si los conjuntos se intersectan y los dibujamos separados nuestro dibujo estaría mal hecho.



2.7.5 Propiedades para las operaciones entre conjuntos

Dados A, B y C conjuntos en un universo U, se cumplen las siguientes propiedades

1. **De Idempotencia**

   (a) $A \cup A = A$

(b) $A \cap A = A$

Por la forma en la que se define la igualdad entre conjuntos, cuando tenemos que demostrar alguna igualdad entre conjuntos debemos partir la demostración en dos partes, en la primera parte se demostrará la contención hacia un lado y en la segunda parte hacia el otro.

Demostraremos la propiedad (a).

Por demostar : $A \cup A = A$

Demostración:

$\Rightarrow$] *P.D.* $A \cup A \subset A$

Tomemos cualquier elemento r dentro del conjunto $A \cup A$, entonces $r \in A$ ó $r \in A$, por lo que $r \in A$, si partimos de tomar cualquier elemento de r dentro de $A \cup A$ y llegamos a que este elemento también está en A concluimos que $A \cup A \subset A$

$\Leftarrow$] *P.D.* $A \subset A \cup A$

Tomemos cualquier elemento r dentro del conjunto A, entonces $r \in A$, por lo que $r \in A$ ó $r \in A$, si partimos de tomar cualquier elemento de r dentro de A y llegamos a que este elemento está también dentro de $A \cup A$ concluimos que $A \subset A \cup A$

Por lo tanto $A \cup A = A$. □

2. **Conmutativas**

(a) $A \cup A = A$

(b) $A \cap B = B \cap A$

3. **Asociativas**

(a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

4. **Distributivas**

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostraremos la propiedad (a), nuevamente como se trata de una igualdad entre conjuntos debemos tratar la demostración en dos partes

Por demostar : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Demostración:

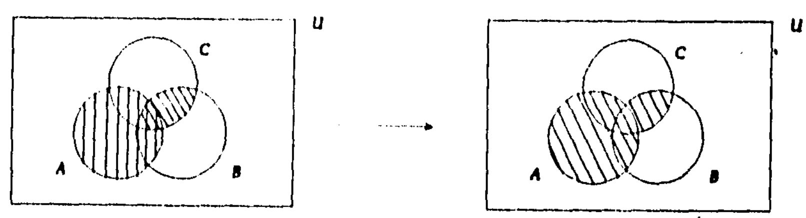
$\Rightarrow$] *P.D.* $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Tomemos cualquier elemento w dentro del conjunto $A \cup (B \cap C)$, entonces $w \in A$ ó $w \in (B \cap C)$, esto es $w \in A$ ó$(w \in B$ y $w \in C)$, *entonces* ($w \in A$ ó $w \in B$) *y* ($w \in A$ ó $w \in C$) *por lo que* ($w \in A \cup B$) *y* ($w \in A \cup C$), *así* $w \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, *concluimos que* $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

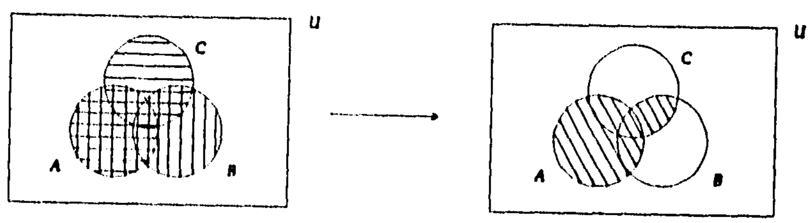
$\Leftarrow$] *P.D.* $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$
Análoga a la anterior.
Por lo tanto $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. $\square$

También podemos visualizar la validez de esta propiedad usando diagramas de Venn

$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$



5. **De la identidad**

(a) $A \cup U = U$
(b) $A \cap U = A$
(c) $A \cup \emptyset = A$
(d) $A \cap \emptyset = \emptyset$

6. **Del complemento**

(a) $A \cup A^c = U$

(b) $A \cap A^c = \emptyset$

(c) $(A^c)^c = A$

(d) $U^c = \emptyset$

(e) $\emptyset^c = U$

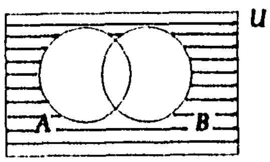
7. **De D'Morgan**

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

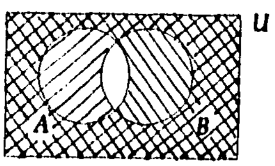
(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

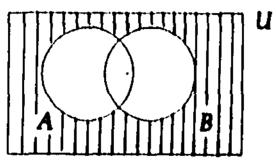
Observemos geométricamente la validez de la propiedad (a) de D'Morgan

$(A \cup B)^c$



$A^c \cap B^c$





3. NÚMEROS COMPLEJOS

Los números surgen a partir de la necesidad de contar, por esto es que el primer conjunto de números utilizado por el hombre, es el conjunto de los números naturales (denotado por N) que se define como :

$$N = \{x \mid x \text{ es un número que sirve para contar}\}$$

Si definimos de esta forma el conjunto N es claro que el cero no es un elemento del conjunto, ya que no se pueden contar cero unidades de algo.

Posteriormente se descubre el cero (ver capítulo 1) y los números negativos , así que al conjunto conocido hasta el momento se le añaden estos elementos y se le da el nombre de conjunto de los números enteros , denotado por Z.

$$Z = N \cup \{0\} \cup N^- = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Tal vez al racionar un pastel o repartir una herencia alguien se dió cuenta de la necesidad de agregar al conjunto de números conocidos, números que se pudieran expresar como la división de dos números enteros, al nuevo conjunto se le llamó conjunto de los números racionales:

$$Q = \{x \mid x \text{ se puede expresar de la forma } \frac{p}{q}, \text{donde } p, q \in Z, q \neq 0\}$$

Notemos que cualquier entero se puede expresar de la forma $\frac{p}{q}$, si tomamos $q = 1$ y para cualquier racional basta que $p \in Z$ y $q \in N$.

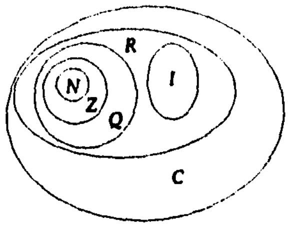
Aproximadamente 400 años antes del nacimiento de Cristo, los griegos se encontraron con un problema muy grande: ¡se dieron cuenta que el conjunto de números conocido tenía huecos!. Los griegos le atribuían propiedades casi divinas a la proporción dorada (ver capítulo 7) inclusive el Partenón fué construido utilizando medidas doradas, pero al tratar de calcular el número dorado se dieron cuenta de que no se podía expresar como división de dos enteros, más aún, a pesar de que el número se podía obtener geométricamente no se podía obtener numéricamente, ya que dicho número tiene un infinito número de decimales, es decir, no se podía medir, (lo mismo sucede con el número π) por ello nombraron a estos números inconmensurables, y más adelante se le dió el nombre de conjunto de los números irracionales, denotado por I.

$$I = \{x \mid x \text{ es un número que no se puede expresar de la forma } \frac{p}{q}\}$$

Ahora bien, el conjunto de los irracionales viene a rellenar los huecos que dejan los números racionales, así que la unión de estos conjuntos forma el conjunto de los números reales, denotados por R.

$$R = I \cup Q$$

Gráficamente:



como podemos observar $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Como sabemos un número real puede ser positivo o negativo, pero su cuadrado siempre es positivo, entonces no existe ningún número real que pueda satisfacer la ecuación:

$$x^2 = -1$$

Así que los matemáticos iniciaron la búsqueda de una nueva clase de números.

Es claro que cualquier número de la forma $\sqrt{-x}, x \in R$, se puede escribir como $\sqrt{-1 \cdot x} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{x}$, sólo que $\sqrt{-1}$ resultaba tan "extraño" que nadie se ponía de acuerdo en si llamarlo número o no. Una de la razones por las que resultaba "extraño" era que no había ninguna forma de comparar su tamaño con los demás números reales. Finalmente se decidió llamarlo número imaginario y se tomó la primera letra de la palabra "imaginario" para denotar :

$$\sqrt{-1} = i$$

Los números imaginarios pueden ser sumados, restados, divididos, multiplicados y junto con los números reales forman el conjunto de los números complejos [18]. Un número complejo es de la forma :

$$\underbrace{a}_{\text{parte real}} + \underbrace{bi}_{\text{parte imaginaria}}$$

donde a y b son números reales.

Si $a = 0$ (parte real) , entonces decimos que se trata de un número imaginario puro, si $b = 0$ entonces se trata de un número real.

El signo de más es notación para poder operar algebraicamente con ellos y no significa que la parte real se este "sumando" a la parte imaginaria.

3.1 Representación gráfica del número complejo

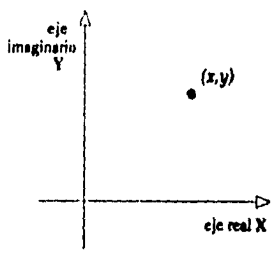
En general casi todos los conceptos matemáticos se nos facilitan si tenemos la posibilidad de representarlos de forma gráfica. Podemos representar un número real en una línea recta, pero el número complejo además de la parte real, tiene una parte imaginaria y entonces necesitamos una dimensión más para poder representarlo gráficamente, por lo que utlizaremos un sistema de ejes coordenados.

Primero graficamos la parte real del número complejo sobre un eje horizontal X, al que llamaremos eje real. Después, dibujamos un eje vertical Y, al que llamaremos eje imaginario, en este eje graficaremos la parte imaginaria, asociando el punto $x = 0, y = 1$ con el número imaginario i, por lo que se conoce al número i como la unidad imaginaria.

En general, dados dos números reales x y y al número complejo:

$$z = x + yi$$

le podemos asociar el punto (x, y) en un sistema de ejes coordenados $X - Y$.

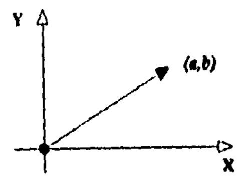


Observemos que la parte real de los números que aparecen sobre el eje Y es cero, siendo éstos los números imaginarios puros. Análogamente, la parte imaginaria de los números que aparecen sobre el eje X es cero; y estos son los números reales. Todos los números de este plano, incluso los que se encuentran sobre los ejes, son complejos. Los números reales y los imaginarios puros son casos particulares de números complejos.

También suele representarse un número complejo como el vector de posición z que va del origen del plano coordenado al punto (a, b) ; y entonces en lugar de utilizar la notación $a + bi$, lo denotamos como la pareja ordenada (a, b), por lo que podemos definir el conjunto de los números complejos de la siguiente manera:

$$C = \{(a, b) \mid a, b \in R\}$$

y geométricamente queda representado por el vector que va del $(0, 0)$ al (a, b).



3.2 Igualdad

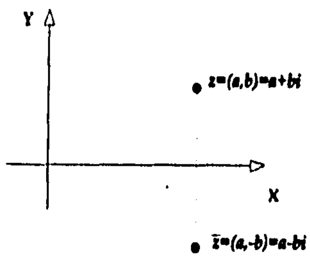
Dos números complejos z y w son iguales si y solo si la parte real de z es igual a la parte real de w y la parte imaginaria de z es igual a la parte imaginaria de w. (o bien si sus partes correspondientes como parejas ordenadas son iguales).

Sean $z, w \in C \Rightarrow z = a + bi$, $w = c + di$,

$$z = w \Leftrightarrow a = c \quad y \quad b = d.$$

3.3 Números complejos conjugados

El complejo conjugado de $z = a + bi$, denotado por $\bar{z}$, se define como $a - bi$, i.e., se le cambia el signo a la parte imaginaria de z.



Ejemplos:

Si $z = 3 + 4i \quad \Rightarrow \bar{z} = 3 - 4i$

$\overline{2 - 7i} = 2 + 7i$

$\overline{-i} = i$

$\overline{(9,3)} = (9,-3)$

3.4 Operaciones

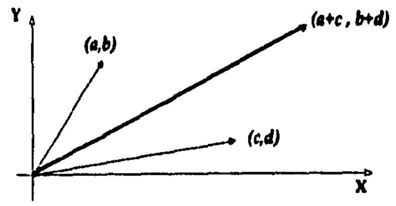
3.4.1 Suma

La suma de dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ se define como $(a + c) + (b + d)i$

Sean $z, w \in C$,

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Geométricamente significa sumar los dos vectores de posición



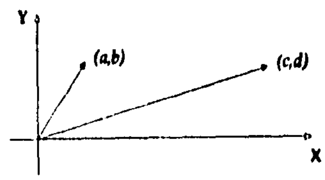
3.4.2 Resta

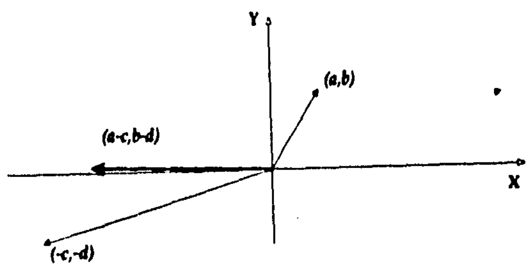
La resta de dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ se define como $(a + c) - (b + d)i$

Sean $z, w \in C$,

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Geométricamente su ilustración se reduce a una suma ya que $z - w = z + (-w)$:





Ejemplos:

$(3+7i)+(5+2i)=8+9i$
$(-i)+(7-2i)=7-3i$
$(2+i)-\overline{(-6+2i)}=(2+i)-(-6-2i)=8+3i$

Demostrar que la suma de un número complejo con su conjugado es un número real.

Demostración (escrita con palabras)

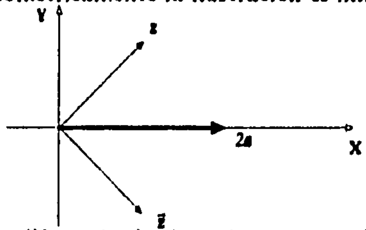
Tomemos cualquier elemento z dentro del conjunto de los números complejos, entonces z tiene la forma $a+bi$ y su conjugado tiene la forma $a-bi$, entonces si sumamos z con z-conjugado el resultado es $2a+0i$, como la parte imaginaria es 0, entonces el número es real. Por lo tanto concluimos que la suma de un número complejo con su conjugado es un número real. $\square$

Demostración (en notación matemática)

Sea $z \in C \Rightarrow z = a+bi$ *y* $\bar{z} = a-bi \Rightarrow z+\bar{z} = (a+bi)+(a-bi) = 2a+0i = 2a,\ 2a \in R$

por lo tanto $z+\bar{z} \in R$ $\square$

Obsérvese que geométricamente la ilustración es inmediata:



Demostrar que la diferencia de dos números complejos conjugados es un número imagianrio puro.

Demostración:

Sea $z \in C$, $\Rightarrow z = a+bi$ *y* $\bar{z} = a-bi \Rightarrow z-\bar{z} = (a+bi)-(a-bi) = (a-a)+(bi-(-bi)) = 0+2bi$

$2bi$ es un imaginario puro, ya que la parte real es igual a 0 ,$z-\bar{z}$ es un imagiario puro $\square$

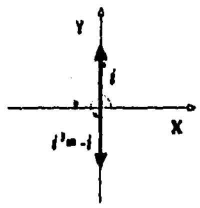
Geométricamente : $z-\bar{z} = z+(-\bar{z})$

3.4.3 Producto

Antes de definir el producto haremos una reflexión del resultado de multiplicar la unidad imaginaria i por sí misma:

$$
\begin{array}{lllll}
i^2 & = i \cdot i & = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} & = & -1 \\
i^3 & = i^2 \cdot i & = \quad -1 \cdot i & = & -i \\
i^4 & = i^3 \cdot i & = \quad -i \cdot i & = & 1 \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

Gráficamente:



Observemos del gráfico anterior que para el producto de complejos sus ángulos se suman y su tamaño es el tamaño del vector producto. (veáse más adelante la justificación)

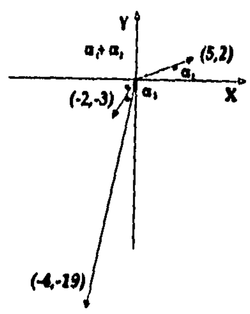
El producto de dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ se define como $(a \cdot c - b \cdot d) + (b \cdot c + a \cdot d)i$, o bien algebraicamente podemos multiplicar verticalmente:

$$
\begin{array}{r}
a + bi \\
\times \quad \underline{c + di} \\
adi + \boxed{bdi^2} \\
\underline{ac + cbi \quad\quad} \\
ac + (ad + cb)\,i - bd
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\
\\
/bdi^2 = bd \cdot (-1) = -bd/ \\
\\
= \quad (ac - bd) + (ad + cb)\,i
\end{array}
$$

<u>Ejemplo:</u>

$$(5 + 2i) \cdot (-2 - 3i) = (-10 - (-6)) + (-4i - 15i) = -4 - 19i$$

$$
\begin{array}{r}
5 + 2i \\
\times \quad \underline{-2 - 3i} \\
-15i - 6i^2 \\
\underline{-10 - 4i \quad\quad\;\;} \\
-10 - 19i + 6
\end{array}
\quad = \quad -4 - 19i
$$



Demostrar que el producto de dos números complejos conjugados es real y positivo.

Demostración:

$Sea\ z \in C\ ,\ z = a + bi\ \ y\ \ \overline{z} = a - bi\ ,\ z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi)$

$$\begin{array}{r} a + bi \\ \times \quad a - bi \\ \hline -abi - b^2i^2 \\ a^2 + abi \quad \\ \hline a^2 \ + \ 0 \ + \ b^2 \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad -b^2i^2 = -b^2 \cdot (-1) = b^2$$

$\Rightarrow z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2\ y\ a^2 + b^2 > 0$

por lo tanto $z \cdot \overline{z} \in R^+$ □

Este número $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ es el cuadrado del tamaño o longitud del vector z:$|z|^2$, así que el tamaño o longitud del vector z será :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3.4.4 División

Para definir la división nos encontramos con el problema de que primero tenemos que "deshacernos" de la i que aparece en el denominador para poder realizar la división $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$.

Demostramos que $z \cdot \overline{z} \in R^+, z \in C$, entonces nos podemos valer de un artificio algebraico para eliminar la i del denominador, este artificio consiste en multiplicar la división por un 1 (la división no se altera) "disfrazado" del cociente del conjugado del denominador :$\frac{\overline{(c+di)}}{\overline{(c+di)}} = \frac{c-di}{c-di}$, esto con el objeto de que al multiplicar el denominador por su conjugado nos quede como resultado un número real.

$$\frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + bd) + (-ad + cb)\, i}{c^2 + d^2}$$

$$\begin{array}{r} a + bi \\ \times \quad c - di \\ \hline -adi - bdi^2 \\ ac + cbi \quad \\ \hline ac + (cb - ad)\, i + bd \end{array}$$

Ejemplo:

Realizar la siguiente división $\frac{5-2i}{1+i}$

$\frac{5+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{7-3i}{1^2+1^2} = \frac{7-3i}{2} = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}i$

Demostrar que la parte real del cociente de dos números complejos conjugados es numéricamente menor o igual que 1.

$$parte\ real\ de\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = Re\left(\frac{a+bi}{a-bi}\right)$$

Haremos la división para poder separar la parte real del resultado:

$$\frac{a+bi}{a-bi} = \frac{a+bi}{a-bi}\cdot\frac{a+bi}{a+bi} = \frac{(a^2-b^2)+2abi}{a^2+b^2} = \frac{(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{2abi}{a^2+b^2} \Rightarrow Re\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$$

y la parte imaginaria es

$$Im\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right) = \frac{2abi}{a^2+b^2}$$

P.D. (por demostrar) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \leq 1$

Para realizar esta demostración utilizaremos la técnica de reducción al absurdo, que consiste en suponer que la tesis de la proposición es falsa. Si con esta suposición se llega a una contradicción con la hipótesis original de la proposición, esto significará que la hipótesis de partida de la demostración es falsa, luego la tesis de la proposición es verdadera.

Demostración

Suponer que $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} > 1 \Rightarrow a^2-b^2 > 1\cdot a^2+b^2 \Rightarrow a^2-b^2 > a^2+b^2 \Rightarrow$

$-b^2 > b^2\ \overset{\nabla}{\circ}$

por lo tanto $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \leq 1$ □

Demostrar que el coeficiente real de la parte imaginaria del cociente de dos números complejos conjugados es numéricamente menor igual que 1.

P.D. $\frac{2ab}{a^2+b^2} \leq 1$

Demostración: (también utilizaremos reducción al absurdo)

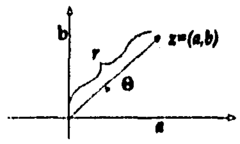
Suponer que $\frac{2ab}{a^2+b^2} > 1 \Rightarrow 2ab > 1\cdot(a^2+b^2) \Rightarrow 2ab > a^2+b^2 \Rightarrow 0 > a^2+b^2-2ab \Rightarrow 0 > (a-b)^2\ \overset{\nabla}{\circ}$

(como cualquier número elevado al cuadrado es mayor que 0, esto representa una contradicción)

por lo tanto $\frac{2ab}{a^2+b^2} \leq 1$ □

3.5 Forma trigonométrica o polar

Pensemos en el número complejo $a + bi$ como un vector, entonces se puede describir como la pareja ordenada (a, b), o bien utilizando el ángulo que forma el vector con respecto al eje real y la magnitud (o módulo) del vector. La magnitud es la longitud que tiene el vector en valor absoluto.



Usando el triángulo de Pitágoras, obtenemos la longitud del vector :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sólo tomaremos el resultado positivo de la raíz ya que r representa la longitud del vector y las longitudes son números no negativos.

Ahora el ángulo θ del vector de posición queda dado por $tan\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{b}{a}$ para obtener el ángulo θ aplicamos la función inversa de la función tangente a ambos lados de la igualdad para no alterarla

$\arctan\ (\tan\ \theta) = \arctan\ \frac{b}{a} \Rightarrow$

$$\theta = arctan \frac{b}{a}$$

Así hemos obtenido r y θ como funciones de a y b.

Recíprocamente se puede obtener a y b en términos de r y θ . En efecto se puede observar de la figura anterior que a es el cateto adyacente y $\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{a}{r}$, entonces

$$a = r\ \cos\theta$$

Análogamente $sen\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{r}$, entonces

$$b = r\ sen\,\theta$$

Finalmente la equivalencia de notaciones queda así:

Forma	
rectangular	$a + bi$
pareja ordenada	(a, b)
polar	$r\ \cos\ \theta + (r\ sen\ \theta)\ i$
vectorial	$\vec{z}$

Para reducir la forma de escritura polar se acostumbra escribir $r\ cis\theta$ en lugar de $r\ cos\theta + (r\ sen\theta)i$.

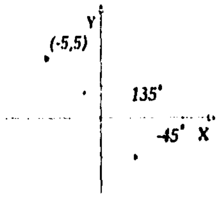
$$a + bi = r\ cos\theta + (r\ sen\,\theta)i \longrightarrow r\ cis\theta$$

Ejemplo:

Escribir en forma polar el siguiente número complejo
$-5+5i \qquad r=\sqrt{(-5)^2+(5)^2}=\sqrt{50} \quad y \quad \theta = arctan - \frac{5}{5} = 135°$
por lo tanto $-5+5i=\sqrt{50}\ cis\ 135°$

¡Cuidado con la calculadora!

Si calculamos *arctan* − 1 en algunas calculadoras el **resultado será -45**, **que sí es un resultado correcto**, lo que sucede con los **ángulos negativos es** que en lugar de estar medidos a partir del ángulo 0 en el **sentido contrario** a las manecillas del reloj, están medidos en el sentido de **las manecillas** (saetas) del reloj. Para hacer la corrección basta con **sumar 180° al ángulo** negativo : $-45° + 180° = 135°$



Por esto es muy importante imaginarse o bien **dibujar la posición del vector antes de escribir como ángulo el resultado de una calculadora.**

Ejemplo:

Escribir en forma polar el número $-3+4i \qquad r=\sqrt{9+16}=5 \quad y$
$\theta = arctan - \frac{4}{3} = -53.130102°$
Al obtener este resultado utilizando calculadora (**algunas**) **nos queda** $-53.130102°$, por ser un ángulo negativo le sumamos 360° **y queda como** resultado 326.86989° , gracias a que tuvimos la precaución **de imaginarnos** la posición del vector antes de realizar ningún cálculo, **nos podemos dar** cuenta de que el resultado no es correcto.
Veamos lo que sucede en cada cuadrante

		utilizando calculadora	
1^er^ *cuadrante*	$5+5i$	$\theta = 45°$	*es correcto*
2^do^ *cuadrante*	$-5+5i$	$\theta = -45°$	*sumar* 180°
3^er^ *cuadrante*	$-5-5i$	$\theta = 45°$	*sumar* 180°
4^to^ *cuadrante*	$5-5i$	$\theta = -45°$	*sumar* 360°

Así que en el caso del ejercicio anterior debemos sumar 180° **para obtener el** resultado correcto, que sería 126.86989°, de este modo $-3+4i \longrightarrow 5\ cis\ 126.86989°$

Ejemplo:

Escribir en forma rectangular los siguientes números

$4\ cis\,90° = 4\ cos\,90° + (4\ sen\,90°)i = 4i$

$20\ cis\,180° = -20$

3.5.1 Operaciones

Las únicas opciones para sumar o restar números complejos es o bien hacerlo gráficamente o hacerlo con el número en coordenadas rectangulares. Cuando dos números complejos están dados en coordenadas polares no es posible obtener el resultado de la suma porque no existen identidades trigonométricas que puedan relacionarlos:

$r_1\ cis\,\theta_1 + r_2\ cis\,\theta_2 = (r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2) + (r_1\ sen\,\theta_1 + r_2\ sen\,\theta_2)\,i$

para obtener el resultado de la expresión anterior debemos aplicar la función seno y coseno.

A diferencia de la operación suma, dividir o multiplicar números complejos en forma polar resulta en ocasiones más sencillo que hacerlo cuando el número complejo está en coordenadas rectangulares.

Para determinar fórmulas que simplifiquen el multiplicar y dividir dos vectores necesitaremos recordar las siguientes identidadades trigonométricas:

$$\begin{aligned}
sen(\alpha+\beta) &= sen\,\alpha \cdot \cos\beta + cos\,\alpha \cdot sen\,\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta \\
sen(\alpha-\beta) &= sen\,\alpha \cdot \cos\beta - cos\,\alpha \cdot sen\,\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta
\end{aligned}$$

Multiplicación

Sean z y $w \in C \Rightarrow z = r_1\ \cos\,\theta_1 + (r_1\ sen\,\theta_1)\,i$ y $r_2\ \cos\,\theta_2 + (r_2\ sen\,\theta_2)\,i$

Calculamos $z \cdot w$

$$\begin{array}{rr}
 & r_1\ \cos\theta_1 + (r_1\ sen\,\theta_1)\,i \\
\times & r_2\ \cos\theta_2 + (r_2\ sen\,\theta_2)\,i \\
\hline
 & i\ r_1r_2 \cos\theta_1 sen\,\theta_2 \quad + \qquad i^2 r_1 r_2\ sen\theta_1 sen\theta_2 \\
r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\ r_1r_2 sen\theta_1 \cos\theta_2 & \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\ r_1r_2(\cos\theta_1 sen\,\theta_2 + sen\,\theta_1\cos\theta_2) - r_1r_2\ sen\,\theta_1 sen\,\theta_2}
\end{array}$$

factorizamos r_1r_2

$$r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i(\cos\theta_1 sen\,\theta_2 + sen\theta_1\cos\theta_2) - sen\,\theta_1 sen\,\theta_2)$$

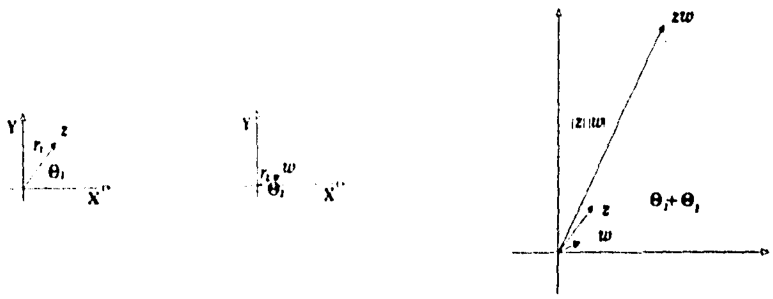
separamos la parte real y la parte imaginaria

$$r_1r_2\cdot\left[\underbrace{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - sen\,\theta_1 sen\,\theta_2)}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i\underbrace{(\cos\theta_1 sen\,\theta_2 + sen\theta_1\cos\theta_2)}_{sen\,(\theta_1+\theta_2)}\right]$$

entonces,

$$z\cdot w = r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,sen\,(\theta_1+\theta_2)) = r_1r_2\,cis\,(\theta_1+\theta_2)$$

Gráficamente esto coincide con la interpretación que dimos antes de esta misma operación, i.e. que el complejo producto tiene por ángulo la suma de los ángulos de sus componentes y por magnitud el producto de las magnitudes de los mismos 2 complejos originales.



División

Sean z y $w \in C \Rightarrow r_1\ \cos\theta_1 + (r_1\ sen\,\theta_1)\,i$ y $r_2\ \cos\theta_2 + (r_2\ sen\,\theta_2)\,i$

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1\ \cos\theta_1 + (r_1\ sen\,\theta_1)\,i}{r_2\ \cos\theta_2 + (r_2\ sen\,\theta_2)\,i}$$

Sucede aquí lo mismo que cuando los números están en forma rectangular, debemos primero deshacernos de la i que aparece en el denominador, y para ello multiplicaremos por un 1 "disfrazado" del cociente del conjugado del denominador

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1\ \cos\theta_1 + (r_1\ sen\,\theta_1)\,i}{r_2\ \cos\theta_2 + (r_2\ sen\,\theta_2)\,i}\cdot\frac{r_1\ \cos\theta_1 - (r_1\ sen\,\theta_1)\,i}{r_2\ \cos\theta_2 - (r_2\ sen\,\theta_2)\,i}$$

Anteriormente habíamos demostrado que el resultado de multiplicar dos números complejos conjugados es igual a sumar la parte real elevada al cuadrado más el coeficiente de la parte imaginaria elevado al cuadrado. Entonces:

$$(r_2\ \cos\theta_2 + (r_2\ sen\,\theta_2)\,i)\cdot(r_2\ \cos\theta_2 - (r_2\ sen\,\theta_2)\,i) =$$
$$= r_2^2(\cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2) = r_2^2$$

$$\frac{z}{w} = \frac{[r_1 \cos \theta_1 + (r_1 \, sen \, \theta_1)\, i] \cdot [r_2 \cos \theta_2 - (r_2 \, sen \, \theta_2)\, i]}{r_2^2} =$$

$$= \frac{r_1 r_2 [(\cos \theta_1 + i \, sen \, \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 - i \, sen \, \theta_2)]}{r_2^2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 + i \, sen \, \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \, sen \, \theta_2)$$

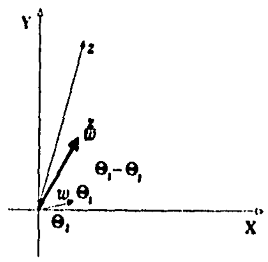
$$\begin{array}{r} \cos \theta_1 + i \, sen \, \theta_1 \\ \times \qquad \cos \theta_2 - i \, sen \, \theta_2 \\ \hline - i \cos \theta_1 sen \, \theta_2 - i^2 \, sen \, \theta_1 sen \, \theta_2 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_2 sen \, \theta_1 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline \cos \theta_1 \cos \theta_2 + i (\cos \theta_2 sen \theta_1 - \cos \theta_1 sen \theta_2) + sen \theta_1 sen \theta_2 \end{array}$$

$$\underbrace{\cos \theta_1 \cos \theta_2 + sen \theta_1 sen \theta_2}_{\cos (\theta_1 - \theta_2)} + i \underbrace{(\cos \theta_2 sen \theta_1 - \cos \theta_1 sen \theta_2)}_{sen \, (\theta_1 - \theta_2)}$$

por lo tanto

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} \, cis \, (\theta_1 - \theta_2)$$

Geométricamente obtenemos como cociente de dos complejos, otro complejo cuyo ángulo es la resta de los ángulos de los complejos originales y cuya magnitud es el cociente de las magnitudes de los complejos originales.



Potenciación

Teorema de Moivre

$$z^n = (r \, cis \, \alpha)^n = r^n \, cis \, n \cdot \alpha \qquad \forall n \in N \cup \{0\}$$

Este teorema no se puede demostrar directamente, porque tendríamos que probar la igualdad para cada valor de los infinitos valores de n. Realizaremos esta demostración unos capítulos más adelante cuando estudiemos inducción matemática.

A pesar de no contar todavía con las herramientas para demostrar este teorema es claro que elevar un número z a la potencia n es equivalente a multiplicar n veces z:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n-veces}$$

Pero ya vimos que multiplicar dos números complejos equivale a sumar sus ángulos, entonces el ángulo de z^n es $\underbrace{\alpha + \alpha + \alpha + \ldots + \alpha}_{n-veces}$,es decir, $\alpha \cdot n$; y multiplicar sus magnitudes es: $\underbrace{r \cdot r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n-veces} = r^n$

Ejemplo:

$$i^{20} = (1\ cis\, 90°)^{20} = 1^{20} cis\,(90 \cdot 20) = 1\ cis\, 1800° = 1\ cis\, 0° = 1$$

Raíces n-ésimas

Teorema sobre raíces n-ésimas. *Si z es cualquier número complejo ($r\ cis\,\theta$) diferente de cero y n es cualquier entero positivo, entonces z tiene n raíces distintas. Dichas raíces las denotaremos por z_k y están dadas por:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{(\theta + 2\pi k)}{n} + sen\frac{(\theta + 2\pi k)}{n}\right]$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ y donde las z_k son los diferentes valores de $\sqrt[n]{z}$.

Como estamos trabajando todos los ángulos en grados, tomaremos π en grados, i. e. , 180° .

La demostración de este teorema también requiere de la técnica de inducción matemática porque se necesita demostrar la igualdad para cada valor de n.

Cada raíz n-ésima del número z es un número tal que multiplicado por sí mismo n veces nos da como resultado z, por ejemplo:

$$\underbrace{z_1 \cdot z_1 \cdot z_1 \cdot \ldots \cdot z_1}_{n-veces} = z$$

Esto quiere decir que para calcular el ángulo de la raíz, debemos dividir el ángulo de z, en n partes iguales, con el fin de que al multiplicar la raíz por sí misma recuperemos el ángulo de z, ya que al multiplicarse dos complejos los ángulos se suman.

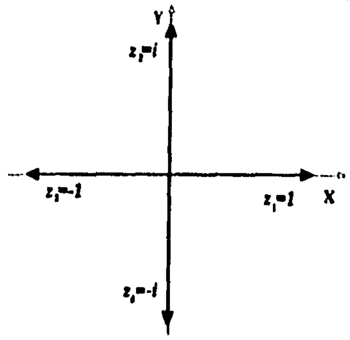
Recordando que cualquier número real se puede escribir como número complejo, descubrimos al fin, en donde estaban las otras 4 raíces, por ejemplo, cuando calculámos la raíz quinta de algún número.

Ejemplo:

Encontrar las raíz cuarta del número 1. Como vimos la $\sqrt[4]{1}$ tiene 4 raíces. A tales raíces se les llama raíces de la unidad.
$1 = 1\ cis\, 0°$
Entonces tenemos que calcular $\sqrt[4]{1\ cis\, 0°}$

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{1}cis\frac{(0°+2\pi\cdot 0)}{4} = 1\ cis\, 0° = 1\,(\cos 0° + i\ sen\, 0°) = 1 \\
z_1 &= \sqrt[4]{1}cis\frac{(0°+2\pi\cdot 1)}{4} = 1\ cis\, 90° = 1\,(\cos 90° + i\ sen\, 90°) = i \\
z_2 &= \sqrt[4]{1}cis\frac{(0°+2\pi\cdot 2)}{4} = 1\ cis\, 180° = 1\,(\cos 180° + i\ sen\, 180°) = -1 \\
z_3 &= \sqrt[4]{1}cis\frac{(0°+2\pi\cdot 3)}{4} = 1\ cis\, 270° = 1\,(\cos 270° + i\ sen\, 270°) = -i
\end{aligned}
$$

Obsérvese que geométricamente esto significa que en el plano complejo las raíces de la unidad están sobre el círculo unitario (círculo de radio 1).



Podemos ahora comprobar que cada raíz obtenida es en efecto una raíz de la unidad :

$z_1 = 1$
$(z_1)^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
$z_2 = i$
$(z_2)^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = 1$
$z_3 = -1$
$(z_3)^4 = -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 = 1$
$z_4 = -i$
$(z_4)^4 = -i \cdot -i \cdot -i \cdot -i = 1$

4. TEORÍA DE ECUACIONES

El idioma del álgebra es la ecuación. "Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades, basta con traducir dicho problema, del inglés u otra lengua al idioma algebraico", escribió Newton en su manual de Álgebra titulado Aritmética Universal.[36]

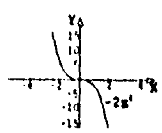
4.1 Polinomios

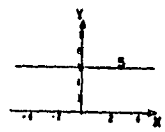
Entenderemos por **expresión algebraica** una representación simbólica de variables, constantes y números de un cierto conjunto numérico, ligados por las operaciones algebraicas básicas en un cierto orden y sólo un número finito de veces. Una expresión, por ejemplo, que contenga el paso al límite no puede ser una expresión algebraica.

Un **monomio** en x es una expresión algebraica de la forma ax^n , donde a es un número real, n es un número entero no negativo y x es una variable.

Ejemplos:

Monomio	a	n
$-2x^3$	-2	3
5	5	0



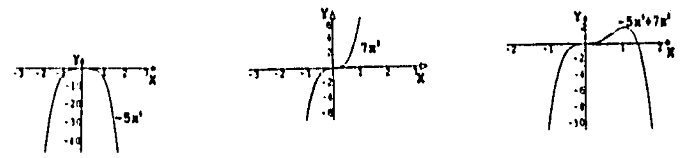


$\frac{2}{x}$ no es un monomio porque la variable x está elevada a la potencia -1, y este es un entero negativo:
$\frac{2}{x} = 2x^{-1}$ $\quad a = 2 \quad n = -1$

Un **binomio** es la suma algebraica de dos monomios.

Ejemplos:

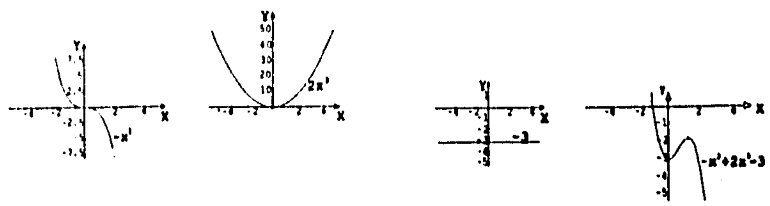
Monomio 1	Monomio 2	Binomio
$-5x^4$	$7x^3$	$-5x^4 + 7x^3$
z^8	z^2	$z^8 + z^2$



Un **trinomio** es la suma algebraica de tres monomios.

Ejemplos:

Monomio 1	Monomio 2	Monomio 3	Trinomio
$-x^3$	$2x^2$	-3	$-x^3+2x^2-3$
λ^6	λ^4	1	$\lambda^6-\lambda^4+1$



Un **polinomio** es la suma de varios monomios.
Un polinomio de grado n en la variable x es una función de la forma :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

Se dice que f, dada por la expresión anterior, es un **polinomio entero y racional**, si los coeficientes a_i , donde $i = n, n-1, n-2, \ldots, 1, 0$, son **números complejos**, n es un entero positivo que indica el **grado del polinomio**, x es la variable y sólo son admisibles las operaciones de **suma y multiplicación**..

Es importante recordar que el conjunto de los números **reales es un subconjunto de los complejos**, de tal forma que los coeficientes a_i **pueden ser reales**, imaginarios puros o complejos y que para dichos coeficientes **son admisibles** todas las operaciones básicas.

El coeficiente a_n , comunmente llamado término **dominante no debe ser igual a 0, ya que si el coeficiente de x^n fuera 0, entonces el polinomio no tiene grado n, sino grado $n-1$ o menor.**

Al coeficiente a_0 lo llamaremos término independiente, pues a diferencia de los demás términos (monomios) del polinomio **no depende de la variable x.**

Gráficamente un polinomio de grado 1 ($n = 1$) **representa una línea recta** , un polinomio de grado 2 ($n = 2$) representa una parábola, **cuando es de grado** mayor que 2 representa una línea que tiene $n-1$ cambios de curvatura.

Los polinomios tienen la propiedad de ser contínuos, es decir que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, (esta propiedad se estudia ampliamente en cálculo diferencial), esto implica que un cambio pequeño en la variable x produce un cambio pequeño en la función $f(x)$.

4.1.1 Operaciones con polinomios

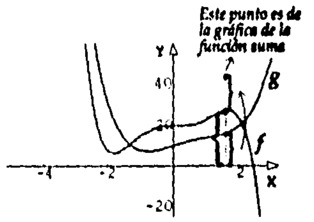
Suma y resta

Para sumar o restar un polinomio $f(x)$ con otro $g(x)$ basta con sumar o restar los términos semejantes, esto es, los términos que contienen la variable elevada a la misma potencia.

Ejemplo:

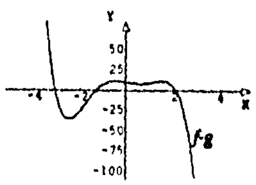
$\mathbf{f(x)} = -x^5 + 5x^3 - x^2 + 20$ y $\mathbf{g(x)} = x^4 - 2x^3 + 5x + 10$

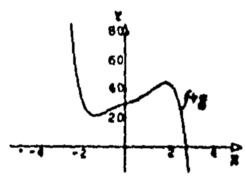
$$\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) = -x^5 + x^4 + x^3(5-2) - x^2 + 5x + (20+10) =$$
$$= -x^5 + x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x + 30$$



Observemos de la gráfica anterior que a cada abscisa x_0 de la función suma, le corresponde una ordenada $(f+g)(x_0)$ que se obtiene al sumar la ordenada $f(x_0)$ con la ordenada $g(x_0)$.

$$\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x) = -x^5 - x^4 + x^3(5-(-2)) - x^2 - 5x + (20-10) =$$
$$= -x^5 - x^4 + 7x^3 - x^2 - 5x + 10$$





Producto

El producto de dos polinomios f y g se obtiene al multiplicar cada término (monomio) del polinomio f por cada término del polinomio g.

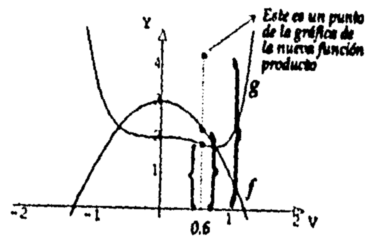
Ejemplo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = -2v^2 + 2 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{g}(\mathbf{v}) = v^6 - v^3 + 1$$

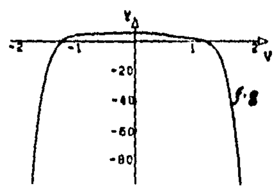
$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{v}) &= -2v^2 \cdot (v^6 - v^3 + 1) + 2 \cdot (v^6 - v^3 + 1) = \\ &= -2v^8 + 2v^5 - 2v^2 + 2v^6 - 2v^3 + 2 = \\ &= -2v^8 + 2v^6 + 2v^5 - 2v^3 - 2v^2 + 2\end{aligned}$$

En ocasiones resulta más fácil de hacer la multiplicación en **forma vertical**:

$$\begin{array}{rrrrrr} & & v^6 & & -v^3 & +1 \\ & \times & & & -2v^2 & +2 \\ \hline & & 2v^6 & & -2v^3 & +2 \\ -2v^8 & & & +2v^5 & -2v^2 & \\ \hline -2v^8 & & +2v^6 & +2v^5 & -2v^3 & -2v^2 + 2 \end{array}$$



Observemos del gráfico anterior que cada punto de abscisa x_0 (0.6 en el gráfico) de la función producto tiene como ordenada a $f(x_0) \cdot g(x_0)$ ($2.28 \cdot 1.83 = 4.1739$ en el gráfico). Si alguna de las dos ordenadas $f(x_0)$ ó $g(x_0)$ fuese menor o igual a 1 en valor absoluto, tendríamos que realizar un análisis más delicado, ya que cualquier número multiplicado por otro número menor que 1 en valor absoluto nos da como resultado un número más pequeño que el primero.

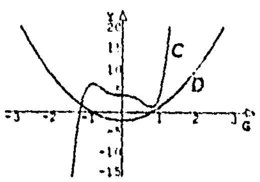


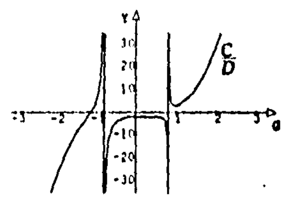
División

El proceso de división de polinomios es similar al que utilizamos para dividir enteros, veámoslo con un ejemplo:

$$C(g) = 12g^5 - 13g^3 + 4 \qquad \text{y} \qquad D(g) = 3g^2 - 2$$

$$\begin{array}{r|l} & 4g^3 - \frac{5}{3}g \\ \hline 3g^2 - 2 & 12g^5 - 13g^3 \qquad + 4 \\ & \underline{-12g^5 + 8g^3} \\ & \quad 0 - 5g^3 \\ & \qquad \underline{5g^3 - \frac{10}{3}g} \\ & \qquad 0 - \frac{10}{3}g + 4 \end{array}$$





La gráfica de la función $\frac{C}{D}$ presenta dos asíntotas verticales en $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -0.816497$ y en $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816497$, esto se debe a que la función D toma el valor de 0 en estas abscisas, entonces estaríamos dividiendo entre 0 y por lo tanto la función $\frac{C}{D}$ tiende hacia infinito en estos valores de x.

Si multiplicamos a $C(g) = 4g^3 - \frac{5}{3}g$ por $D(g) = 3g^2 - 2$ y le sumamos $R(g) = -\frac{10}{3} + 4$, obtenemos $P(g) = 12g^5 - 13g^3 + 4$, es decir que la división $\frac{P(g)}{D(g)}$ puede representarse como:

$$P(g) = D(g)C(g) + R(g)$$

<u>ALGORITMO PARA LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS</u>

En general, si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios y $g(x) \neq 0$, entonces existen dos polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

donde $r(x)$, llamado residuo, puede ser ser igual a 0 o bien es de grado menor que el divisor $g(x)$. A $q(x)$ se le llama el cociente de la división de f entre g.

$$\text{divisor}\{g(x)\ \overline{\big)\, \overset{\overbrace{q(x)}^{\text{cociente}}}{f(x)}}\ \}\text{dividendo}$$
$$\underbrace{r(x)}_{\text{residuo}}$$

Obsérvese que, en efecto, de lo propuesto como algoritmo se obtiene la forma usual de la división:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

o bien

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

Cuando dividimos un polinomio $f(x)$ por otro polinomio lineal $x - c$ (grado 1 y $c \in R$) sucede algo muy interesante: el residuo que se obtiene al dividir $f(x)$ entre $x - c$ es igual al resultado de evaluar el polinomio en c.

Ejemplo:

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 2 \qquad y \qquad x - c = x - 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + x - 3 \\ \hline
x - 1 & 2x^3 - x^2 - 4x + 2 \\
 & \underline{-2x^3 + 2x^2} \\
 & \quad x^2 - 4x \\
 & \quad \underline{-x^2 - x} \\
 & \qquad -3x + 2 \\
 & \qquad \underline{-3x + 3} \\
 & \qquad\qquad \boxed{-1}
\end{array}$$

$\hookrightarrow$Residuo

$$f(1) = 2(1)^3 - (1)^2 - 4(1) + 2 = \boxed{-1}$$

Teorema del residuo (resto)

Si dividimos el polinomio $f(x)$ entre $x - c$, donde c es un número real, entonces el residuo de dicha división es $f(c)$.

Demostración:

Por el algoritmo de la división para polinomios sabemos que $f(x)$ se puede escribir como:

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

pero en este caso $g(x) = x - c$ *que es un polinomio de grado 1, y por lo tanto* $r(x)$ *es de grado 0, ya que el grado del residuo siempre es menor que el grado del divisor, esto significa que* $r(x)$ *es un número real.*
$r(x) = d,\ d \in R \Rightarrow f(x) = q(x)(x - c) + d$
si sustituimos c en $f(x)$
$f(c) = q(c)(c - c) + d \Rightarrow f(c) = 0 + d \Rightarrow f(c) = d$
por lo tanto $f(x) = q(x)(x - c) + f(c)$ □

Del Teorema del Residuo se desprende otro importante teorema:

<u>Teorema del Factor</u>

Un polinomio $f(x)$ tiene como factor a $x - c$, si y sólo si $f(c) = 0$.

<u>Demostración:</u>

Sea $f(x)$ *un polinomio* $\Rightarrow$ *por el Teorema del Residuo sabemos que* $f(x)$ *se puede escribir como :*

$$f(x) = q(x)(x - c) + f(c)$$

¡Cuidado! Este teorema incluye un si y sólo si (doble implicación), entonces, tenemos que partir la demostración en dos partes:

i) *Si* $f(x)$ *tiene como factor a* $x - c$ *P.D. que* $f(c) = 0$
Si $x - c$ *es un factor de* $f(x)$ $\Rightarrow$ *al dividir* $f(x)$ *entre* $x - c$ *el residuo es igual a 0 , pero el residuo es a su vez* $f(c)$ *por haber dividido entre* $x - c$*(por el teorema del residuo)*$\Rightarrow f(c) = 0$

ii) *Si* $f(c) = 0$ *P.D.* $x - c$ *es un factor de* $f(x)$
Si $f(c) = 0 \Rightarrow f(x) = q(x)(x - c) \Rightarrow x - c$ *es un factor de* $f(x)$

por i) y ii) concluimos que $x - c$ *es factor de* $f(x) \Leftrightarrow f(c) = 0$ □

División sintética o Regla de Ruffini.

Valuar un polinomio $p(x)$ de grado 5 en w ($w \in R$), por ejemplo, resulta una labor tediosa, ya que tenemos que elevar w a la potencia 5 y multiplicar el resultado por su coeficiente, a este nuevo resultado le tenemos que sumar w elevada a la potencia 4 , multiplicar por su coeficiente y así sucesivamente. Pero el Teorema del Residuo nos dice que es lo mismo valuar $p(x)$ en w , que dividir $p(x)$ entre $x - w$, el problema es que la división algebraica tampoco resulta un proceso rápido y fácil.

Afortunadamente hay una forma de simplificar la división de un polinomio $p(x)$ entre $x - w$, mediante el siguiente procedimiento:

1. Determinar w
2. Escribir $p(x)$ en orden decreciente de los exponenetes, incluyendo los coeficientes iguales a 0.
3. Escribir:
$$\begin{array}{l|llllll} \underline{w} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & & & & & \\ \hline \end{array}$$
4. Escribir a_n en tercer renglón bajo a_n (primera columna)
$$\begin{array}{l|llllll} \underline{w} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$
5. Multiplicar a_n por w y ponerle el resultado bajo el coeficiente que está en la siguiente columna, en el tercer renglón escribir la suma de los dos números que aparecen en la columna
$$\begin{array}{l|llllll} \underline{w} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & a_n w & & & & \\ \hline & a_n & a_{n-1} + a_n w & & & & \end{array}$$
6. Realizar el mismo procedieminto que en el paso 5, utilizando la tercera columna, luego la cuarta y así sucesivamente.

Ilustraremos este proceso, llamado división sintética, utilizando el polinomio del ejemplo anterior:
$f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 2$

$$\begin{array}{l|rrrr} \underline{1} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{2 \quad -1 \quad -4 \quad 2}^{coeficientes\ del\ polinomio}} \\ & & 2 & 1 & -3 \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{2 \quad 1 \quad -3}_{coeficientes\ de\ q(x)}} & -1 \end{array}$$

$$2x^3 - x^2 - 4x + 2 = (2x^2 + x - 3)(x - 1) - 1 \Rightarrow f(1) = -1$$

Ejemplo:

Demostrar que $x - 2$ es un factor del polinomio $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$. Por el Teorema del Factor sabemos que si $x - 2$ es un factor de $f(x)$ entonces $f(2) = 0$, resulta mucho más rápido utilizar división sintética para calcular $f(2)$ que sustituir x por 2.

	1	0	−2	−3	−2
2		2	4	4	2
	1	2	2	1	$\boxed{0}$

<u>TEOREMA:</u>

Todo polinomio de grado> 0, con coeficientes complejos, se puede factorizar en n factores lineales complejos del tipo $x - r$.

$$p(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)...(x - c_n)$$

<u>Ejemplo:</u>

$p(x) = 2x^2 + 4x - 6 = 2(x - 1)(x + 3)$

No se puede dividir $p(x)$ entre 2 pues se altera el resultado, aunque si el polinomio estuviera igualado a cero entonces sí se podría dividir entre 2.

4.2 Ecuaciones

Las ecuaciones aparecen cuando igualamos un polinomio a 0, i.e.:

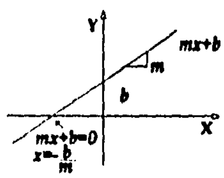
$$f(x) = 0$$

Una ecuación es una igualdad algebraica en la que las dos expresiones que forman la igualdad, son iguales solamente para determinados valores de las literales (las literales simbolizan variables, éstas pueden tomar distintos valores a lo largo de una expresión matemática). Precisamente los valores que transforman la ecuación en una igualdad se llaman soluciones de la ecuación.

En este capítulo sólo estudiaremos las ecuaciones polinomiales, éstas tienen una sola incógnita o variable y entonces las soluciones se llaman raíces o ceros del polinomio.

Los egipcios resolvieron las ecuaciones de primer grado hace quizá 4000 años [49]. Es decir, encontraron que la solución de la ecuación: $mx + b = 0$ (polinomio de grado 1 igualado a 0), representada por una línea recta, es:

$$x = -\frac{b}{m}$$



La ecuación de segundo grado: $ax^2+bx+c=0$ fué resuelta por los hindúes y los árabes con la fórmula:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

donde x_1 corresponde a la solución con + y x_2 con - y esto queda denotado por $x_{1,2}$.

Luego, en el siglo XVI, los italianos resolvieron las ecuaciones de tercero y cuarto grados, obteniendo fórmulas extensas que involucraban raíces cúbicas y cuadradas. De manera que, allá por el año de 1550, pocos años antes del nacimiento de Shakespeare, habían sido resueltas las ecuaciones de primero, segundo, tercero y cuarto grados. Hubo luego una pausa de 250 años, porque los matemáticos estaban luchando con la ecuación de quinto grado, la "quíntica general". Finalmente, en los comienzos del siglo XIX , Ruffini y Abel demostraron que las ecuaciones de quinto grado no podían ser resueltas con radicales.

De acuerdo a los términos de las ecuaciones, éstas se pueden clasificar en:

Enteras	Los términos son expresiones enteras respecto a las incógnitas
Fraccionarias	En alguno de los términos la incógnita figura como divisor

De acuerdo a las potencias a la que este elevada la variable, las ecuaciones se clasifican en:

Racionales	Las potencias son enteras
Irracionales	Las potencias son fraccionarias

En este texto sólo trabajaremos con ecuaciones racionales y enteras.

Una ecuación entera y racional de grado n en la variable x es de la forma.

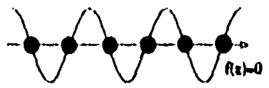
$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x^1+a_0=0$$

4.2.1 Raíces de una ecuación

Las soluciones (raíces) de una ecuación son muy importantes porque son los valores que hacen que se cumpla la igualdad $f(x)=0$, desafortunadamente, en la mayor parte de los casos, estas raíces son muy difíciles de encontrar. Pero existen algunos métodos para hallar o aproximar soluciones de ecuaciones.

Aplicando el Teorema del Factor podemos afirmar que c es una raíz (o cero) del polinomio $f(x)$ si $x-c$ es un factor de $f(x)$, puesto que el residuo

$f(c) = 0$. Dicho en palabras más simples, una raíz de una ecuación, es un punto en donde la gráfica de la función intersecta el eje horizontal.



TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

> Toda ecuación racional y entera $f(x) = 0$, admite al menos una raíz real o compleja.

Gauss demostró este teorema a los 22 años, en 1799. En algunos textos lo podemos encontrar también enunciado de la siguiente forma:

Toda ecuación racional y entera $f(x) = 0$ de grado $n > 0$, tiene n raíces complejas.

El número de raíces de una ecuación está determinado por su grado, ya que si tenemos una ecuación de grado n quiere decir que esta se originó de multiplicar n factores de la forma $x - c$ (donde c puede o no cambiar para cada factor).

Las raíces de una ecuación pueden ser reales o complejas. Las raíces reales las podemos ver en el plano de dos dimensiones porque son los puntos en que la gráfica de $f(x)$ atraviesa el eje horizontal, en cambio, las raíces imaginarias atraviesan el eje imaginario y para visualizarlo tenemos que salirnos a otra dimensión, por lo cual no se pueden ver en una gráfica de dos dimensiones.

Cuando consideramos polinomios con coeficientes reales, no siempre sus raíces o soluciones son reales, muchas veces, como ya lo mencionamos, éstas pueden ser complejas; como es el caso de la ecuación

$$x^2 + 1 = 0 \text{ cuyas soluciones son } i \text{ y } -i.$$

Es aquí entonces donde se da la necesidad algebraica de los números complejos, que resultan como una extensión de los números reales.

Multiplicidad de una raíz

Se dice que la raíz r de $f(x) = 0$ es una raíz de multiplicidad n si el polinomio $x - r$ aparece n veces como factor de $f(x)$. Anteriormente se dijo que una ecuación de grado n siempre tiene n raíces, por lo que la suma de las multiplicidades de las raíces debe ser igual al grado de la ecuación.

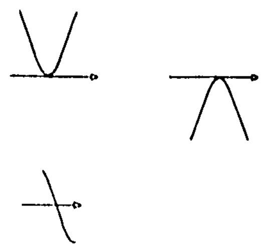
Apoyándonos en el curso cálculo, también podemos decir que r es una raíz de multplicidad k para el polinomio $p(x)$ si:

$$\left.\begin{array}{lcl} p(r) & \equiv & 0 \\ p'(r) & \equiv & 0 \\ p''(r) & \equiv & 0 \\ & \vdots & \\ p^{k-1}(r) & \equiv & 0 \end{array}\right\} k-1 \text{ primeras derivadas}$$

en cambio $p^k(r) \neq 0$

Gráficamente cuando una raíz se repite un número par de veces, la línea toca al eje de las X's, pero no lo atraviesa; en cambio, cuando la raíz se repite un número impar de veces, atraviesa el eje de las X's.

multiplicidad $\begin{cases} \textit{par} \\ \\ \textit{impar} \end{cases}$

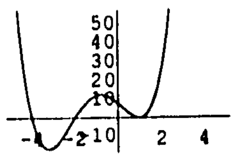


Cuando se grafique un polinomio de grado n se debe de tener cuidado con los cambios de curvaturas que va teniendo el polinomio, que siempre son $n-1$.

Ejemplo:

Determinar las raíces y su multiplicidad, correspondientes a la ecuación: $(x-1)^2(x+2)(x+4)=0$

$r_1 = 1$	multiplicidad	2
$r_2 = -2$	multiplicidad	1
$r_3 = -4$	multiplicidad	1
	grado $\rightarrow$	$\overline{4}$

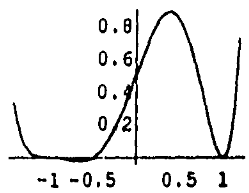


Si multiplicaramos todos los factores de la ecuación del ejemplo anterior, obtendríamos: $x^4+4x^3-3x^2-10x+8$. Esta ecuación es de grado 4 y según lo expuesto anteriormente debe tener 4 raíces; y si las tiene, lo que pasa es que hay una raíz que se repite dos veces: la raíz 1.

Ejemplo:

Determinar las raíces y su multiplicidad, correspondientes a la ecuación: $(x+1)(x^2-1)^2(x+\frac{1}{2})=0$

$$(x+1)[(x+1)(x-1)]^2(x+\tfrac{1}{2})=0$$
$$(x+1)^3(x-1)^2(x+\tfrac{1}{2})=0$$



$$\begin{array}{lcll} x_1 & = & -1 & \text{de multiplicidad } 3 \\ x_2 & = & -\frac{1}{2} & \text{de multiplicidad } 1 \\ x_3 & = & 1 & \text{de multiplicidad } \underline{2} \\ & & & \quad\text{grado} \rightarrow \quad 6 \end{array}$$

Multiplicando los factores la ecuación nos queda como:

$$x^6+\frac{3}{2}x^5-\frac{3}{2}x^4-3x^3+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$$

Para comprobar si la multiplicación es correcta, el lector puede sustituir las raíces en la ecuación obtenida. Claro que será mucho más rápido usar división sintética y verificar que el residuo sea igual a 0.

Regla de los signos de Descartes.

Como ya se mencionó anteriormente, por lo general las raíces son difíciles de encontrar. La regla de los signos de Descartes nos indica las posibilidades de la forma en que están distribuidas las raíces, separándolas en la siguiente forma:

$$\text{Raíces}\begin{cases}\text{Reales}\begin{cases}\text{Positivas}\\ \text{Negativas}\end{cases}\\ \text{Complejas}\end{cases}$$

La regla dice así:
Si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales

i) El número de raíces reales positivas de la ecuación $f(x)=0$, es igual al número de variaciones de signo de $f(x)$, o ese número disminuido en un entero par.

ii) El número de raíces reales negativas de la ecuación $f(x)=0$, es igual al número de variaciones de signo de $f(-x)$ o ese número disminuido en un entero par.

Nota: Los coeficientes iguales a cero no se toman en cuenta para contar las variaciones de signo.

Como sabemos que toda ecuación de grado n, tiene n raíces (descontando multiplicidades), entonces la suma del número de raíces positivas con el número de raíces negativas, con el número de raíces complejas, deberá ser igual a n.

Ejemplo:

Aplicar la regla de los signos de Descartes a la siguiente ecuación:

$$2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5 = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2x^5 & -7x^4 & +3x^2 & +6x & -5 & = & 0 \\ + & - & + & + & - & & \end{array}$$

variaciones de signo de ($f(x)$) = 3, esto quiere decir que el número de raíces positivas de la ecuación deberá ser de 3, o bien este número disminuido en un entero par, pero el único entero par que se le puede restar a 3 sería 2, entonces también cabe la posibilidad de que la ecuación tenga (3-2=1) sólo una raíz positiva.

$$f(-x) = -2^5x - 7x^4 + 3x^2 - 6x - 5$$

variaciones de signo de ($f(-x)$) = 2

Al hacer la tabla de distribución de raíces debemos tener cuidado de combinar todas las posibilidades de las raíces negativas con las posibilidades de las raíces positivas. Como ya se mencionó, el número de raíces complejas será igual a la resta del grado de la ecuación (5 en este caso) menos la suma del número de raíces positivas y del número de raíces negativas.

$r(+)$	3	1	3	1
$r(-)$	2	2	0	0
$r(complejas)$	0	2	2	4
grado→	5	5	5	5

Cotas para las raíces de los polinomios.

Las cotas son valores que sirven para saber en qué intervalo se encuentran las raíces reales de una ecuación.

Una cota superior es un punto sobre el eje X después del cual la función no tiene ninguna raíz real, i.e. no se vuelve a intersectar con el eje X, de manera análoga, una cota inferior es un punto sobre el eje X, antes del cual la función no tiene ninguna raíz real .

Supóngase que $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, y que el coeficiente dominante a_n es positivo; usamos división sintética para dividir $f(x)$ entre $x - c$:

i) Si $c > 0$ y todos los números del tercer renglón en el proceso de división sintética son positivos o cero, entonces c es una cota superior para las soluciones reales de $f(x) = 0$.

ii) Si $c < 0$ y todos los números en el tercer renglón del proceso de división sintética tienen signos alternados, (+ ó -, donde 0 puede ser + ó -)entonces c es una cota inferior para las soluciones reales de$f(x) = 0$.

<u>Ejemplo:</u>

Encontrar cotas para la ecuación $2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = 0$

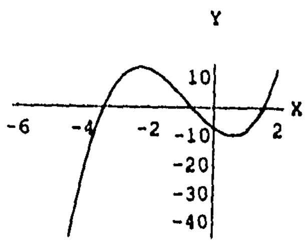
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -8 & -7 \\ \underline{1} & & 2 & 7 & -1 \\ \hline & 2 & 7 & -1 & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -8 & -7 \\ \underline{2} & & 4 & 18 & 20 \\ \hline & 2 & 9 & 10 & 13 \end{array}$$

por lo tanto 2 es una cota superior para las raíces de la ecuación.
Todos los valores después de 2, también son cotas aunque sean cotas, más lejanas.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -8 & -7 \\ \underline{-3} & & -6 & 3 & 15 \\ \hline & 2 & -1 & -5 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -8 & -7 \\ \underline{-4} & & -8 & 12 & -16 \\ \hline & 2 & -3 & 4 & -23 \end{array}$$



por lo tanto -4 es una cota inferior.
Todos los valores que están antes del -4 también son cotas.

Raíces racionales

Las soluciones de una ecuación pueden ser:

$$\begin{cases} \text{Reales} & \begin{cases} \text{Racionales} \\ \text{Irracionales} \end{cases} \\ \text{Complejas} & \end{cases}$$

Las raíces racionales son las más fáciles de hallar mediante el método que estudiaremos a continuación:

<u>TEOREMA DE RAÍCES RACIONALES</u>

Supongamos que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ es un polinomio con coeficientes enteros. Si $\frac{c}{d}$ es una raíz racional de $f(x)$, donde c y d no tienen factores primos en común y $c > 0$, entonces c es un factor de a_0 y d es un factor de a_n.

Esto es, formamos dos conjuntos:

C = {todos los divisores del término independiente}

D = {todos los divisores del término dominante}

y a partir estos formamos el "conjunto simbólico" $\frac{C}{D}$, este conjunto es el que contiene todas las posibles raíces racionales $\frac{c}{d}$ que pueda tener la ecuación $f(x) = 0$.

<u>Ejemplo:</u>

Resolver la siguiente ecuación: $x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 10x = 0$

Inmediatamente nos damos cuenta que una de las raíces de esta ecuación es 0, pues $f(0) = 0$, entonces podemos dividir la ecuación por x, obteniendo:

$$x^3 - 3x^2 - 8x - 10 = 0$$

Buscamos los conjuntos C y D

$C = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$ y $D = \{\pm 1\}$,

luego el "conjunto simbólico":

$$\frac{C}{D} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$$

Para saber si alguno de los elementos del conjunto $\frac{C}{D}$ es raíz de la ecuación, tendríamos que dividir el polinomio entre cada uno de dichos elementos. Sin embargo puede ser que al aplicar la regla de los signos de Descartes, esta nos indicara, por ejemplo, que no es posible que la ecuación tenga raíces negativas y así evitamos probar con los elementos negativos. Apliquemos pues la regla de los signos de Descartes en la ecuación:

$$x^3 \quad -3x^2 \quad -8x \quad -10 \quad = \quad 0$$

variaciones de signo de $(f(x)) = 1$

$$f(-x) \quad = \quad -x^3 \quad -3x^2 \quad +8x \quad -10 \quad = \quad 0$$

variaciones de signo de $(f(-x)) = 2$

$r(+)$	1	1
$r(-)$	2	0
r (complejas)	0	2
grado →	3	3

Con esta tabla obtuvimos una pista muy importante de por dónde debemos buscar raíces: sabemos que hay una raíz positiva y puede ser que haya 2 negativas o ninguna negativa, entonces lo que nos conviene es buscar la positiva.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -8 & -10 \\ \underline{1} & & 1 & -2 & -10 \\ \hline & 1 & -2 & -10 & -20 \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{C}{D} = \{\cancel{1}, -1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -8 & -10 \\ \underline{2} & & 2 & -2 & -20 \\ \hline & 1 & -1 & -10 & -30 \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{C}{D} = \{\cancel{1}, -1, \cancel{2}, -2, \pm 5, \pm 10\}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -8 & -10 \\ \underline{5} & & 5 & 10 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 8x - 10 = (x^2 + 2x + 2)(x - 5)$$

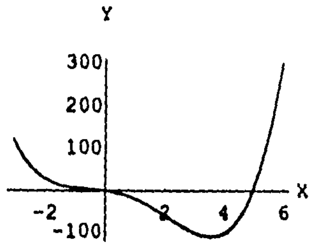
Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

Finalmente, las soluciones de la ecuación:

$x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 10x = 0$ son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 5 \\ x_3 &= -1+i \\ x_4 &= -1-i \end{aligned}$$



Raíces complejas e irracionales

Estas son las raíces más difíciles de encontrar, aunque a veces, si nos dan una pista (una raíz), podemos aplicar alguno de los dos siguientes Teoremas:

<u>Teorema de raíces complejas conjugadas</u>

> Si un número complejo $r = a + bi$ es una raíz de la ecuación racional y entera $p(x) = 0$, de coeficientes reales, el complejo conjugado $a - bi$ también es raíz de dicha ecuación.

A pesar de que no se incluye la demostración a este Teorema, es muy fácil darse cuenta de su veracidad. Pensemos en una ecuación de segundo grado, al aplicar la fórmula, encontrada por los árabes e hindúes, aparece un número imaginario si el discriminante es negativo, pero como el discriminante se toma con signo más y con signo menos, el resultado final son dos números complejos conjugados.

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\overbrace{\sqrt{b^2-4ac}}^{\text{discri min ante}}}{2a}$$

si discrimiente es menor que 0,

$$x = \frac{-b \pm wi}{2a} = \begin{array}{l} \nearrow \ \frac{-b+wi}{2a} \\ \searrow \ \frac{-b-wi}{2a} \end{array}$$

<u>Ejemplo:</u>

$$x^2 + 25 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{-25} \Rightarrow x_1 = -5i \quad x_2 = 5i$$

Si el grado de la ecuación es mayor que 2, entonces al dividir el polinomio entre $a + bi$, $q(x)$ (el resultado) nos quedará con coeficientes complejos, que sólo se eliminan al dividir $q(x)$ entre $a - bi$.

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x^4 - x^3 - 16x^2 + 59x + 13 = 0$ sabiendo que $x = 3+2i$ es una raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -16 & 59 & 13 \\ 3+2i & & 3+2i & 2+10i & -62+2i & -13 \\ \hline & 1 & 2+2i & -14+10i & -3+2i & 0 \end{array}$$

Observemos que $q(x)$ (tiene grado 3) quedó con coeficientes complejos, pero cuando lo dividamos entre el conjugado de la raíz, se van a ir cancelando todas las partes imaginarias.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2+2i & -14+10i & -3+2i \\ 3-2i & & 3-2i & 15-10i & 3-2i \\ \hline & 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}$$

La ecuación queda $x^2 + 5x + 1 = 0$, si la resolvemos:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Finalmente las soluciones de la ecuación:

$x^4 - x^3 - 16x^2 + 59x + 13 = 0$

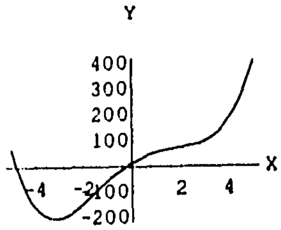
son:

$x_1 = 3 + 2i$

$x_2 = 3 - 2i$

$x_3 = -0.20871215$

$x_4 = -4.79128784$



Entonces podemos expresar $f(x)$ como producto de factores lineales:

$$f(x) = (x - (3+2i))(x - (3-2i))(x + 0.20871215)(x + 4.79128784)$$

De los enunciados anteriores podemos concluir que toda ecuación racional entera de grado impar con coeficientes reales admite por lo menos una raíz real; pues las raíces complejas siempre vienen por pares.

Teorema de raíces irracionales

Si la ecuación entera y racional $f(x) = 0$ de coeficientes racionales tiene una raíz de la forma $a + \sqrt{b}$, siendo $a, b \in Q$, y $\sqrt{b} \in I$, entonces $a - \sqrt{b}$ es también raíz de la ecuación.

Ejemplo:

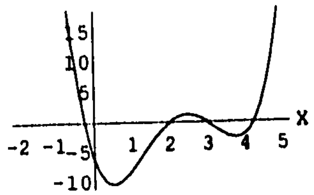
Resolver la ecuación $x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 19x - 6 = 0$ sabiendo que $2 + \sqrt{5}$ es una raíz.

$$\begin{array}{r|ccccc}
 & 1 & -9 & 25 & -19 & -6 \\
2+\sqrt{5} & & 2+\sqrt{5} & -9-5\sqrt{5} & 7+6\sqrt{5} & 6 \\
\hline
 & 1 & -7+\sqrt{5} & 16-5\sqrt{5} & -12+6\sqrt{5} & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & -7+\sqrt{5} & 16-5\sqrt{5} & -12+6\sqrt{5} \\
2-\sqrt{5} & & 2-\sqrt{5} & -10+5\sqrt{5} & 12-6\sqrt{5} \\
\hline
 & 1 & -5 & 6 & 0
\end{array}$$

Como la ecuación resultante es de segundo grado, podemos aplicar la fórmula y las raíces de la ecuación $x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 19x - 6 = 0$ son :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2+\sqrt{5} \\
x_2 &= 2-\sqrt{5} \\
x_3 &= 2 \\
x_4 &= 3
\end{aligned}$$

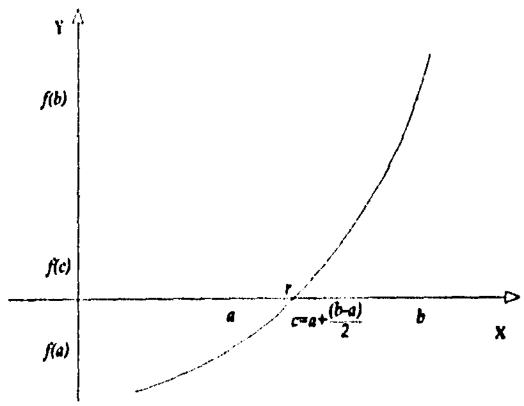


Como bien los llamaron los griegos, los números irracionales son inconmensurables porque no se pueden medir, i.e., tienen un número infinito de decimales, es por esto que nunca podremos encontrar una raíz irracional exacta ($f(x)$ sea exactamente 0), lo más que podemos hacer es aproximarnos tanto como nos lo permita el lápiz, la paciencia o la calculadora.

Existen muchos métodos para encontrar raíces irracionales, pero todos tienen la misma base fundamental: ir acotando la raíz (cercándola) hasta que tengamos la aproximación deseada.

Método gráfico. Consiste en graficar la función (hecho bastante complicado por el extenso número de valuaciones) y fijarse en las raíces.

Método de mitades. Sólo sirve para encontrar raíces de multiplicidad impar, i.e., que cruzen el eje X. Comenzamos por detectar dos valores a y b para los cuales la función presente cambio de signo y luego buscamos la abcisa que está a la mitad del intervalo $[a, b]$, y así obtenemos $c = a + \frac{b-a}{2}$; calculamos $f(c)$ y procedemos a determinar los nuevos valores de a y b, dependiendo de en cuál valor se obtenga el cambio de signo para f.



El proceso continúa hasta obtener la aproximación deseada para la raíz.

Este es un método en el que se tienen que hacer muchas valuaciones para obtener una buena aproximación, pero es fácil de programar en cualquier lenguaje de computadora y ésta será la que se encargue de las valuaciones.

Ejemplo:

Obtener las soluciones de la siguiente ecuación :

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 9 = 0$$

Lo que nos conviene hacer primero es aplicar la regla de los signos de Descartes para darnos una idea de la distribución de las 3 raíces:

$r(+)$	3	1
$r(-)$	0	0
$r(complejas)$	0	2
$grado \rightarrow$	3	3

Como la función no tiene raíces negativas, busquemos si tiene raíces racionales positivas:

$\frac{C}{D} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 5 & -9 \\ 1 & & 1 & -2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 5 & -9 \\ 3 & & 3 & 0 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & 6 \end{array}$$

Entre 1 y 3 encontramos un cambio de signo y esto quiere decir que en el intervalo $(1, 3)$ hay una raíz irracional. No podría ser racional porque no hay valores en el conjunto $\frac{C}{D}$ que estén en el intervalo $(1, 3)$.

Aplicamos el método de mitades:

		f	
a	1	-6	
b	3	6	1ª aproximación → 2
c	$1 + \frac{(3-1)}{2} = \boxed{2}$	-3	

		f	
a	2	-3	
b	3	6	2ª aproximación → 2.5
c	$2 + \frac{(3-2)}{2} = \boxed{2.5}$	0.375	

Después de 7 aproximaciones obtenemos $c = 2.45312$ y $f(c) = -0.0253716$, el valor de c sería nuestra aproximación para la raíz y el valor de $f(c)$ en valor absoluto es nuestro error, puesto que es la distancia que tenemos de separación con el eje X.

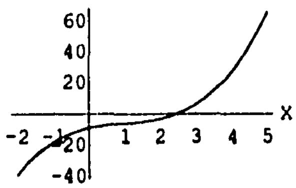
Una vez obtenida la raíz, podemos utilizar división sintética para bajar el grado de la ecuación de 3, a grado 2 y poder aplicar la fórmula para ecuaciones de segundo grado:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 5 & -9 \\ \underline{1]} & & 2.45312 & -1.3415 & 8.974 \\ \hline & 1 & -0.54688 & 3.658 & -0.025 \end{array}$$

↪ se toma como 0

obtenemos $x^2 - 0.54688x + 3.658 = 0$; y resolviendo esta ecuación de 2do. grado las soluciones de la ecuación $x^3 - 3x^2 + 5x - 9 = 0$ son:

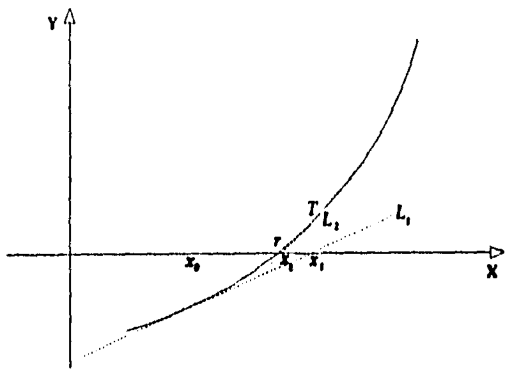
$$\begin{aligned} x_1 &= 2.45312 \\ x_2 &= 0.27344 + 1.8929942i \\ x_3 &= 0.27344 - 1.8929942i \end{aligned}$$



No debemos olvidar que los datos anteriores están calculados con un error de 0.025.

Método de Newton-Raphson

Este método permite aproximarse muy rápido a cualquier raíz sea cual sea su multiplicidad, pero tiene un defecto con el que hay que tener cuidado: si no comenzamos el proceso en un valor cercano a la raíz entonces los valores que comienza a devolver son al azar y no se aproximarán a la raíz.



x_0 valor arbitrario de abscisa (valor inicial)
L_1 tangente a $f(x)$ en (x_0, y_0)
x_1 valor abcisa donde L_1 corta al eje X
T punto de $f(x)$ de abscisa x_1
x_2 valor de abscisa donde L_2 corta al eje X
r raíz de $f(x)$

Con x_0 se obtiene x_1 , con x_1 se obtiene x_2 y así sucesivamente, de modo que con x_i se obtiene x_{i+1}.
Recordemos que la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente a cualquier punto de la función entonces, la pendiente de L_i es igual a la derivada de $f(x)$ en x_i , i.e.,$m_{L_i} = f'(x)$
Sabemos que L_i pasa por $(x, f(x))$ y por $(x_{i+1}, 0)$ entonces podemos calcular la pendiente L_i como

$$m_{L_i} = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} = f'(x_i) \qquad \Rightarrow \qquad x_i - x_{i+1} = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \Rightarrow$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

A esta fórmula se le conoce como de Newton.

Ejemplo:

Encontrar la raíz irracional de la ecuación del ejemplo anterior utilizando el método de Newton-Raphson.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 9 = 0 \qquad$ y $\qquad f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Como ya habíamos determinado que esta ecuación tiene una raíz irracional entre 1 y 3 podemos tomar como valor de inicio a cualquiera de estos dos números:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{-6}{2} = 4$$

$$x_2 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{27}{29} = 3.06897$$

$$x_3 = 2.59771$$

$$x_4 = 2.46581$$

$$x_5 = 2.45621 \qquad \text{y} \qquad f(2.45621) = 0.000404165$$

Observemos que después de 6 iteraciones del método, obtuvimos un error de 0.000404165, por lo que podemos considerar que nuestra aproximación a la raíz es buena.

5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Una expresión de la forma:

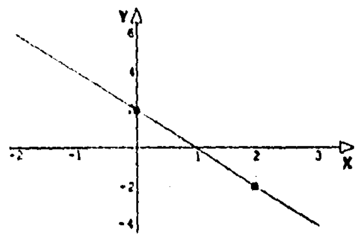
$$ax + by = c$$

es una ecuación lineal donde x y y son variables y a, b y c son **constantes reales.** Gráficamente una ecuación lineal con dos variables representa **un línea recta.**

Ejemplo:

$4x + 2y = 4$

x	y
0	2
2	-2



Del mismo modo, la ecuación lineal con tres variables x, y y z **es una** ecuación de la forma

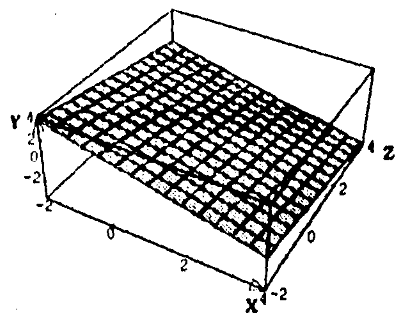
$$ax + by + cz = d$$

que gráficamente representa un plano en el espacio (es decir en un **sistema** coordenado xyz).

Ejemplo:

$3x + 2y + 4z = 6$

x	y	z
0	0	1.5
0	3	0
2	0	0



En una ecuación lineal pueden presentarse más de tres **variables, pero ya** no podemos materializar la representación gráfica de la ecuación, **ya que cada** variable que se agrega a la ecuación añade una dimensión más a la gráfica, y como vivimos en la tercera dimensión (sistema coordenado xyz) no somos capaces de visualizar directamente cómo se ven las cosas en otras dimensiones.

Una ecuación lineal en n variables $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, donde n es cualquier número entero positivo, es una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = c$$

donde $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ y c son constantes reales asociadas a la respectiva variable independiente.

5.1 Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables.

Al aplicar ecuaciones lineales para resolver un problema, surge la necesidad de satisfacer simultáneamente más de una condición.

Ejemplo:

El propietario de una tienda de electrodomésticos desea hacerse publicidad lanzando una gran oferta de equipos de sonido de dos tipos. Cada equipo del primer tipo le cuesta $n\$650$ y ocupa un espacio de 60 *cms.*, y cada equipo del segundo tipo le cuesta $n\$800$ y ocupa 90 *cms.* Si el propietario cuenta con un espacio de 36 *mts.* y planea gastar exactamente $n\$35,500$, ¿cuántos equipos de cada tipo debe comprar haciendo uso completo del capital y del espacio?
x · número de equipos que cuestan $n\$650$
y · número de equipos que cuestan $n\$800$

si queremos satisfacer que se haga uso completo del capital
$650x + 800y = 35,500$

si queremos satisfacer que se haga uso completo del espacio
$60x + 90y = 3,600$
pero si queremos que las dos ecuaciones se cumplan simultáneamente debemos encontrar una solución que satisfaga las dos ecuaciones. De este modo, nos encontramos con un sistema de ecuaciones.

$$650x + 800y = 35,500 \quad ...._1$$

$$60x + 90y = 3,600 \quad ...._2$$

Existen varios métodos para encontrar la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales.

Método de substitución

i) Despejar una variable de alguna de las ecuaciones

ii) Susbstituir la expresión obtenida en i) en una de las ecuaciones que quedaron sin despejarse

iii) Resolver la ecuación de una sola variable que quedó en el paso ii)

iv) Substituir la solución de iii) en la expresión que se obtuvo en i)

Apliquemos pues este método para resolver el sistema de ecuaciones lineales que nos quedó en el ejemplo anterior:

i) despejamos x de la ecuación 1 : $x = \frac{35,500-800y}{650}$

ii) Substituimos la expresión anterior en la ecuación 2:

$$60 \cdot \left(\frac{35,500-800y}{650}\right) + 90y = 3,600$$

iii) Resolvemos la ecuación anterior

$$\frac{2,130,000}{650} - \frac{48,000}{650}y + 90y = 3,600$$
$$10,500y = 650 \cdot \left(3,600 - \frac{2,130,000}{650}\right)$$
$$y = \frac{210,000}{10,500} = 20$$

iv) Sustituimos y en la expresión obtenida en i)

$$x = \frac{35,500-800\cdot(20)}{650} = 30$$

Por lo tanto se necesitan comprar 30 equipos de los que cuestan $n\$650$ y 20 de lo que cuestan $n\$800$.

Método de eliminación (o suma y resta).

Se reemplaza una de las ecuaciones del sistema $f = 0$ por $k \cdot g + f = 0$, donde $g = 0$ es cualquier otra ecuación del sistema y k es un número real.

Resolvamos otra vez el sistema del ejemplo anterior para ilustrar este método:

$$650x + 800y - 35,500 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots f$$
$$60x + 90y - 3,600 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots g$$

Con el fin de eliminar la variable x de la ecuación f, multiplicaremos la ecuación g por $-\frac{650}{60}$, la ecuación no se altera porque multiplicaremos ambos lados de la igualdad.

$$60 \cdot \left(-\tfrac{650}{60}\right) x + 90 \cdot \left(-\tfrac{650}{60}\right) y - 3,600 \cdot \left(-\tfrac{650}{60}\right) = 0 \cdot \left(-\tfrac{650}{60}\right)$$

$$\underbrace{-650x - 975y + 39,000 = 0}_{g\cdot\left(-\frac{650}{60}\right)=0}$$

Ahora sumaremos $g \cdot \left(-\frac{650}{60}\right) + f$

$$\begin{array}{rrrr} -650x & -975y & +39,000 & = 0 \\ 650x & +800y & -35,500 & = 0 \\ \hline 0x & -175y & +3,500 & = 0 \end{array}$$

$$y = \tfrac{-3,500}{-175} = 20$$

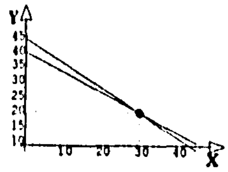
Sólo nos falta substituir y en cualquiera de las ecuaciones f ó g

$$60x + 90(20) - 3,600 = 0 \Rightarrow x = \tfrac{1,800}{60} = 30$$

Método gráfico

Se grafican ambas rectas y el punto de intersección representa la solución del sistema.

Utilicemos este método para resolver nuevamente el ejemplo anterior:



Gráficamente es muy claro imaginarnos que cuando tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables sólo existen tres posiblidades en la solución del sistema:

1. las dos líneas son idénticas (sus ecuaciones tienen coeficientes proporcionales).
   Entonces el sistema tiene un infinito número de soluciones, pues cada punto del sistema satisface las dos ecuaciones.

2. las líneas son paralelas (sus pendientes son iguales no así sus ordenadas al origen).
   Entonces el sistema no tiene solución, ya que dos líneas paralelas no tienen ningún punto en común.

3. las líneas se intersectan en un solo punto.
   Entonces el sistema tiene exactamente una solución.

5.2 Sistemas de ecuaciones lineales en más de dos variables

En general, un sistema de m ecuaciones con n incógnitas tiene la siguiente forma:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m \end{cases}$$

donde los subíndices de cada coeficiente indican lo siguiente:

$a_{i,j}$

el número está en la ecuación i	el número multiplica a la variable j

donde i puede tomar cualquier valor entre 1 y m, ya que tenemos m ecuaciones y j puede tomar valores entre 1 y n, ya que tenemos n variables.

Si todos los términos independientes $a_1, a_2, ..., a_m$ de las ecuaciones son nulos (0), entonces se dice que el sistema es homogéneo.

Cuando hablamos de sistemas de ecuaciones lineales, se entiende inmediatamente que lo que se busca es una solución que satisfaga simultáneamente a todas las ecuaciones del sistema, por ello para denotar que ciertas ecuaciones forman un sistema utilizaremos una llave del lado izquierdo de las ecuaciones, como en *.

Para resolver estos sistemas de ecuaciones es válido utilizar los métodos que utilizamos para resolver los sistemas en dos variables, excepto el método gráfico, pues como ya se mencionó anteriormente no podemos realizar una gráfica en más de tres dimensiones, y aún la de tres dimensiones nos cuesta trabajo puesto que no estamos familiarizados con algún implemento tridimensional (así como el cuaderno o el pizarrón que son muy útiles para realizar gráficas en el plano) que sirva para realizar gráficas de tres dimensiones, de modo que por lo general lo que estamos acostumbrados a ver es la proyección en el plano de la gráfica, aunque las visualizaciones logradas en ciertas computadoras son excelentes.

Encontremos ahora la solución del siguiente sistema en tres variables, utilizando el método de substitución:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 & \ldots\ldots\ldots\ldots_1 \\ 3x + 2y + 2z = 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots_2 \\ 5x + 4y + 3z = 4 & \ldots\ldots\ldots\ldots_3 \end{cases}$$

i) despejamos x de 1 $\quad x = \frac{10-y+2z}{2}$

ii) substitumos en 2 y en 3

$$\begin{cases} 3 \cdot \left(\frac{10-y+2z}{2}\right) + 2y + 2z = 1 \\ 5 \cdot \left(\frac{10-y+2z}{2}\right) + 4y + 3z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 15 - \frac{3}{2}y + 3z + 2y + 2z = 1 \\ 25 - \frac{5}{2}y + 5z + 4y + 3z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}y + 5z = -14 \\ \frac{3}{2}y + 8z = -21 \end{cases}$$

Para resolver el sistema que resultó de ii) volvemos a aplicar el método de substitución

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + 5z = -14 \\ \frac{3}{2}y + 8z = -21 \end{cases}$$

Despejamos z de la segunda ecuación

$z = \frac{-21-\frac{3}{2}y}{8}$

Substitumos en la primera ecuación

$\frac{1}{2}y + 5 \cdot \left(\frac{-21-\frac{3}{2}y}{8}\right) = -14$

$\frac{1}{2}y - \frac{105}{8} - \frac{15}{16}y = -14 \Rightarrow$

$-\frac{7}{16}y = -\frac{7}{8} \Rightarrow y = 2$

Ahora substitumos y en $z = \frac{-21-\frac{3}{2}y}{8}$ y obtenemos $z = -3$.

Con los valores $y = 2$ y $z = -3$ substitumos en la ecuación 1:

$2x + 2 - 2 \cdot (-3) = 10$

$x = \frac{10-8}{2} = 1$

Finalmente el punto solución del sistema es $(1, 2, -3)$.

Si intentamos con el método de eliminación (sumas y restas) el resultado que obtendremos debe ser el mismo

$$
\begin{aligned}
2x + y - 2z &= 10 \quad \dots\dots\dots \ \boxed{1}\\
3x + 2y + 2z &= 1 \quad \dots\dots\dots \ \boxed{2}\\
5x + 4y + 3z &= 4 \quad \dots\dots\dots \ \boxed{3}
\end{aligned}
$$

Multiplicamos $\boxed{1}$ por $-\frac{3}{2}$ y lo sumamos a $\boxed{2}$

$$
\begin{array}{rrrcr}
2x & +y & -2z & = & 10\\
 & \frac{1}{2}y & +5z & = & -14\\
5x & +4y & +3z & = & 4
\end{array}
$$

Multiplicamos $\boxed{1}$ por $-\frac{5}{2}$ y lo sumamos a $\boxed{3}$

$$
\begin{array}{rrrcr}
2x & +y & -2z & = & 10\\
 & \frac{1}{2}y & +5z & = & -14\\
 & \frac{3}{2}y & +8z & = & -21
\end{array}
$$

Ahora multiplicamos la segunda ecuación por -3 y la sumamos a la tercera

$$
\begin{array}{rrrcr}
2x & +y & -2z & = & 10\\
 & \frac{1}{2}y & +5z & = & -14\\
 & & -7z & = & 21
\end{array}
$$

entonces $z = -\frac{21}{7} = -3$

substituimos z en la segunda ecuación

$\frac{1}{2}y + 5 \cdot (-3) = -14 \Rightarrow y = 2$

substituimos ahora los valores de $y = 2$ y $z = -3$ en la primera ecuación y obtenemos

$2x + 2 - 2(-3) = 10 \Rightarrow x = 1$

Para comprobar que el punto $(1, 2, -3)$ sea efectivamente una solución basta con sustituir en cada una de las ecuaciones

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2(1) & + & (2) & - & 2(-3) & = & 10\\
3(1) & + & 2(2) & + & 2(-3) & = & 1\\
5(1) & + & 4(2) & + & 3(-3) & = & 4
\end{array}
$$

Si queremos resolver un sistema de ecuaciones lineales necesitamos que el número de variables sea igual al número de ecuaciones. En algunas ocasiones sucede que un problema tiene menos ecuaciones que incógnitas (variables) y lo que corresponde entonces es "fabricar" otra ecuación.

Un ejemplo interesante se plantea para conocer la cantidad efectiva de los tres tipos de alimentos (glúcidos, lípidos y proteínas) que se están combustionando en el interior del cuerpo de una persona.

Obviamente es imposible "introducirse" al interior de los tejidos para efectuar determinaciones químicas. Por lo tanto, será forzoso basarse en las entradas y salidas de substancias que son fijadas o liberadas al quemar cada tipo de alimento.

Entonces, se mide el Oxígeno que se consume por unidad de tiempo y también el Anhídrido Carbónico que se produce por unidad de tiempo, ambas determinaciones se efectan sobre el aire respirado.

Se plantea entonces el siguiente sistema:

al inhalar

$$O_2(consumido) = k_{og}(glúcidos) + k_{ol}(lípidos) + k_{op}(proteinas)$$
$$CO_2(producido) = k_{CO_2g}(glúcidos) + k_{CO_2l}(lípidos) + k_{CO_2p}(proteinas)$$

al exhalar

Los coeficientes k son constantes conocidas, por ejemplo k_{ol} se refiere a la constante de Oxígeno consumido para proteínas.

Como existen 3 incógnitas necesitamos tener una tercera ecuación en la que aparezcan las tres variables independientes. Esa tercera ecuación nos es proporcionada por la tasa de eliminación a través de la orina y de la materia fecal.

$$N(eliminado) = k_{N_g}(glúcidos) + k_{Nl}(lípidos) + k_{N_p}(proteínas)$$

Los coeficientes k_{N_g} y k_{Nl} valen 0, pero se arma la ecuación de este modo para obtener una tercera ecuación y así resolver el sistema.

A mediados del siglo XIX, los matemáticos se dieron cuenta de que los resultados que se obtenían eran los mismos si en lugar de trabajar con las ecuaciones, se trabajaba únicamente con los coeficientes y fué así como introdujeron el álgebra de matrices.

5.3 Álgebra de Matrices

Una matriz es un arreglo de valores dispuestos en renglones y columnas .

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 8 & 6 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 7 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Utilizaremos letras mayúsculas para denotar las matrices y letras minúsculas para denotar los elementos, los cuales llevarán dos subíndices para indicar al número de renglón y al número de columna que pertenecen. Se acostumbra encerrar el arreglo entre corchetes [ ] o bien entre paréntesis ( ).

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \quad\downarrow \\ \text{columna 2} \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{renglón 1} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Con esta notación de subíndices podemos también escribir la matriz A como (a_{ij}) para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, donde i es el número de renglón y j el número de columna.

Si tenemos por ejemplo la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} \text{ el elemento } d_{13} = 4 \text{ y } d_{32} = 7$$

El orden o tamaño de una matriz expresa el número de renglones y el número de columnas que la forman, y se indica así:

$m \times n$, donde m es el número de renglones
y n el número de columnas

Ejemplo:

$$\text{orden de } \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 8 & 6 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 7 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ es } 3 \times 7$$

5.3.1 Diferentes tipos de matrices

Cuando el número de renglones (m) es diferente al número de columnas (n), decimos que tenemos una **matriz rectangular** de orden $m \times n$. Si $m = n$

entonces decimos que tenemos una **matriz cuadrada** de orden n (es decir una matriz de n renglones y n columnas).

La **diagonal principal** de una matriz cuadrada , está formada por los elementos de la forma a_{ij} donde $i = j$. Por ejemplo la diagonal principal de la matriz D es:

$$\begin{array}{ccccccc} d_{11} & & & & 1 & & \\ & d_{22} & & & & 2 & \\ & & d_{33} & & & & 6 \end{array}$$

Una matriz cuadrada en la que todos los elementos que no están en la diagonal principal son cero, recibe el nombre de **matriz diagonal**.Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Llamamos **matriz triangular superior** a una matriz cuadrada en la que todos los elementos que están abajo de la diagonal valen 0; y llamamos **matriz triangular inferior** a una matriz cuadrada en la que todos los elementos que están arriba de la diagonal superior valen cero.

Ejemplos:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular inferior

Una **matriz nula** o matriz cero, denotada por 0, es una matriz en la que todos los elementos valen 0.

Ejemplo:

$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz nula de orden 3×5

La **matriz identidad** es una matriz cuadrada que tiene unos en la diagonal principal y todos los demás elementos son cero. Esta matriz se denota con la letra I.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Matriz idéntica de orden 3}$$

La **matriz transpuesta** de la matriz A, denotada por A , es la matriz que se obtiene al convertir los renglones de A en las columnas de A . Claro es que para realizar este cambio, la matriz A debe ser cuadrada.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & -4 & 3 \\ 12 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 11 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 12 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & 6 \\ 6 & -4 & 4 & 7 \\ 9 & 3 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

5.3.2 Igualdad entre Matrices

Una matriz A es igual a otra matriz B si el orden de A es igual al orden de B y además cada elemento de A es igual a su correspondiente en B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{o1} & b_{o2} & \cdots & b_{op} \end{pmatrix}$$

Orden de $A = m \times n$, orden de $B = o \times p$

$A = B \Leftrightarrow m = o \text{ , } n = p \text{ y } a_{ij} = b_{ij} \;\; \forall\, i, j$

5.3.3 Operaciones con matrices

Adición (suma) y Sustracción (resta) de matrices

Dos matrices A y B del mismo tamaño (orden) pueden sumarse (o restarse), sumando sus elementos correspondientes.

si $A = a_{ij}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ $\quad j = 1, 2, \ldots, n$
y $B = b_{ij}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ $\quad j = 1, 2, \ldots, n$

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 12 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma

1. **Conmutatividad** $A + B = B + A$
   Demostración
   $P.D.$ $A + B = B + A$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} =$$

utilizando la propiedad conmutativa para la suma de dos números reales

$$= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} & \cdots & b_{1n} + a_{1n} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} & \cdots & b_{2n} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} + a_{m1} & b_{m2} + a_{m2} & \cdots & b_{mn} + a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = B + A$$

2. **Asociatividad**
   $A + (B + C) = (A + B) + C.$

Esta propiedad se demuestra de forma semejante a la demostración anterior.

3. **Existencia del idéntico**
   La matriz Nula, mencionada anteriormente, es el elemento idéntico relativo a la suma, es decir
   $A + 0 = A$

4. **Existencia del inverso.**
   El inverso aditivo $-A$ de la matriz A es tal que $A + (-A) = 0$ donde $-A = -a_{ij}$.
   Es claro que la resta $A - B$ de dos matrices, es igual a la suma $A + (-B)$

Producto de un escalar por una matriz

Sea c un escalar, es decir un número real, esto es $c \in R$ y A una matriz de orden $m \times n$ entonces
$c \cdot A = (c\, a_{ij})$

Ejemplo:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 2 & 0 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Si f y g son números reales y A, B dos matrices de orden $m \times n$, entonces

$$fgA = f(gA)$$
$$(f + g)A = fA + gA$$
$$f(A + B) = fA + fB$$

Multiplicación de matrices

En ningún momento debemos olvidar que el estudio del álgebra de matrices sirve para aplicarse a los sistemas de ecuaciones lineles; y la multiplicación de matrices es una operación muy importante en la representación de un sistema de ecuaciones lineales, aunque su definición resulta un poco extraña.

Para poder multiplicar dos matrices A y B, es necesario que el número de columnas de A sea igual al número de renglones de B, esto es, si el orden de A es $m \times n$ y el orden de B es $o \times p$, entonces n deber ser igual a o para que se puedan multiplicar; y el orden de la matriz resultante es $m \times p$.

$A_{m \times n}$ $B_{o \times p}$

deben ser iguales

orden de la resultante

Para obtener el elemento ij de la multiplicación tenemos que sumar la multiplicación de cada elemento de renglón i de la matriz A, multiplicado por cada elemento de la columna j de la matriz B.

$$Multiplicación_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1j} & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2j} & b_{2p} \\ & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nj} & b_{np} \end{pmatrix} = \qquad /n = o/$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{kp} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo para obtener el elemento 1,3 de la multiplicación, debemos multiplicar el primer renglón de la matriz A por cada uno de los elementos de la columna 3 de la matriz B y sumar cada multiplicación.

Ejemplo: Realizar la siguiente multiplicación

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 7 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{orden } 4\times3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{orden } 3\times2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2+0+15 & 3+0+20 \\ -2-4+9 & -3+20+12 \\ 14+2-9 & 21-10-12 \\ 2-4+6 & 3+20+8 \end{pmatrix}}_{\text{orden } 4\times2} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 3 & 29 \\ 7 & -1 \\ 4 & 31 \end{pmatrix}$$

La multiplicación de dos matrices no es conmutativa, para demostarlo basta con mostrar un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 25 & 18 & 16 \\ 45 & 38 & 30 \\ 34 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 31 & 56 & 86 \\ 4 & 12 & 22 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la multiplicación

1. **Asociatividad.** Si A, B y C son matrices de orden $m \times n$, $n \times p$ y $p \times q$ respectivamente, entonces $A(BC) = (AB)C$

2. **Distributividad.** Si A y D son matrices de orden $m \times n$, y B y C son matrices de orden $n \times p$ entonces
$A(B+C) = AB + AC$
$(A+D)B = AB + DB$

3. **Existencia del idéntico** (sólo cuando la matriz es cuadrada) . El idéntico para el producto es precisamente la matriz identidad que se definió anteriormente. Veamos lo que sucede cuando multiplicamos por ejemplo, una matriz R de orden 3 por la matriz identidad I_3

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} r_{11}+0+0 & 0+r_{12}+0 & 0+0+r_{13} \\ r_{21}+0+0 & 0+r_{22}+0 & 0+0+r_{23} \\ r_{31}+0+0 & 0+r_{32}+0 & 0+0+r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}.$$

En general si A es una matriz de orden n, e I es de orden n se cumple que

$$AI = IA = A$$

4. **Existencia del inverso.** sólo para algunas matrices cuadradas. Llamaremos al inverso multiplicativo de una matriz A , matriz inversa y lo denotaremos como A^{-1} .
Cuando multiplicamos una matriz por su matriz inversa, obtenemos el neutro multiplicativo:

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

No todas las matrices cuadradas tienen la "suerte" de tener inversa; las matrices que no tienen inversa se llaman **matrices singulares.** Si la matriz inversa existe, entonces esta es única.
A lo largo de este texto estudiaremos dos formas diferentes para hallar la inversa de una matriz, pero primero comenzaremos revisando la justificación de estos métodos y para ello no debemos apartarnos de nuestro objetivo : los sistemas de ecuaciones lineales.

5.4 Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 4y - 12z &= 1 \\ x - y &= 3 \\ -2x + 3y + 5z &= -1 \end{cases}$$

La representación matricial de este sistema es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{orden\ 3\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{orden\ 3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{orden\ 3\times 1}$$

Si realizamos la multiplicación obtenemos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5x + 4y - 12z \\ x - y \\ -2x + 3y + 5z \end{pmatrix}}_{orden\ 3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{orden\ 3\times 1}$$

y sabemos que dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y además son iguales elemento a elemento, entonces

$$\begin{aligned} 5x + 4y - 12z &= 1 \\ x - y &= 3 \\ -2x + 3y + 5z &= -1 \end{aligned}$$

La matriz que representa los coeficientes de las variables se llama **matriz de coeficientes** y se acostumbra denotar por A, la matriz que representa las incógnitas (variables) se llama **vector de variables** y se denota con X. Finalmente, la matriz que contiene los términos independientes se denota con B. De tal forma que nos podemos encontrar con algo como:

$$A_{18}.X_{18\times 1} = B_{18\times 1}$$

a simple vista parece algo muy sencillo, pero en realidad se refiere a un sistema de ¡18 ecuaciones con 18 variables!.

Otra forma de representar un sistema de ecuaciones lineales es utilizando la **matriz aumentada,** que consiste en escribir la matriz de coeficientes seguida de los términos independientes.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 4 & -12 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

La matriz aumentada tiene la ventaja de que se trabaja igual que si se estuviera trabajando con las ecuaciones, pero sin escribir las variables. Dicho de otro modo cada renglón de la matriz aumentada, representa una ecuación.

Si consideramos el sistema escrito de la forma $AX = B$, la matriz aumentada puede escribirse como $A \vdots B$.

5.4.1 Operaciones elementales en las matrices

Es claro que intercambiar dos ecuaciones de lugar en un sistema no afecta la solución del sistema.

Ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 5x+4y-12z & = & 1 \\ x-y & = & 3 \\ -2x+3y+5z & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}\text{intercambiamos el} \\ \text{renglón 2 por el 3}\end{array} \quad \left\{\begin{array}{rcr} 5x+4y-12z & = & 1 \\ -2x+3y+5z & = & -1 \\ x-y & = & 3 \end{array}\right.$$

Una ecuación se puede multiplicar o dividir por una constante diferente de cero, sin que se afecte la ecuación.

Ejemplo:

$$5x+4y-12z=1 \qquad \text{es equivalente a} \qquad -5x-4y+12z=-1$$

La solución de un sistema tampoco se altera si sumamos o restamos a una ecuación otra ecuación del sistema multiplicada por una constante diferente de cero, esto debido a que las variables siguen conservando la misma relación entre ecuaciones.

Ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 5x+4y-12z & = & 1 \\ x-y & = & 3 \\ -2x+3y+5z & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}\text{multiplicamos la} \\ 2^{\underline{a}} \text{ ecuación por 2} \\ \text{y la sumamos a la } 3^{\underline{a}}\end{array} \quad \left\{\begin{array}{rcr} 5x+4y-12z & = & 1 \\ x-y & = & 3 \\ y+5z & = & 5 \end{array}\right.$$

Mediante un número finito de estas operaciones elementales puede obtenerse un sistema equivalente a partir de otro; y dos sistemas equivalentes tienen la misma solución. La equivalencia se denota por el símbolo $\sim$.

Aprovechando la representación matricial de los sistemas de ecuaciones lineales, podemos encontrar una matriz equivalente a aquella que representa el sistema; esta matriz equivalente puede ser más fácil de resolver que la matriz original.

TEOREMA

Dada la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, cada una de las siguientes operaciones transforma la matriz en una matriz equivalente

i) Intercambiar dos renglones

ii) Multiplicar un renglón por una constante diferente de 0

iii) Multiplicar un renglón por una constante y sumarlo a otro renglón, reemplazando este último por el resultado obtenido

5.4.2 Determinantes

Antes de comenzar a estudiar métodos que nos permitan resolver sistemas de ecuaciones lineales, debemos estudiar cómo calcular el "determinante" de una matriz. El determinante es importante porque además de utilizarse en algunos métodos para resolver sistemas de ecuaciones nos puede indicar si el sistema tiene solución o no.

El determinante de una matriz cuadrada A es un valor asociado a dicha matriz que denotaremos como $|A|$. Debemos de tener mucho cuidado en no confundir esta notación con el valor absoluto.

Si el orden de una matriz A es 1, $\Rightarrow A = (a_{11})$ y el determinante de A es $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

Si A es una matriz de orden 2, entonces A tiene la forma $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y el determinante de A está definido como :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

<u>Ejemplo:</u>

Hallar el determinante de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 3\cdot 5 = -16$$

Estudiaremos un método para encontrar determinantes de cualquier orden mayor a 2, pero en el caso particular de los determinantes de orden 3, existe un método llamado **Regla de Sarrus** que en ocasiones resulta más práctico.

La Regla de Sarrus se puede aplicar de dos formas:

Escribimos la matriz y

a) repetimos a la derecha de la matriz las dos primeras columnas

b) repetimos abajo de la matriz los dos primeros renglones

y se efectuán los productos de las diagonales que pasan por tres elementos conservando el signo de las diagonales que salen a la derecha y cambiándoselo a las diagonales que salen a la izquierda, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{ccc} \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| & = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} & \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Ejemplo:

Encontrar el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right| = 1 + 0 + 6 - 3 - 0 - (-4) = 8 \\ \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \end{array}$$

Desofortunadamente esta regla no funciona para encontrar determinantes más grandes de orden 3, así que estudiaremos un método que sirve para encontrar determinantes de orden mayor o igual a 3.

Método de menores para determinantes de orden mayor a 2.

Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces el **menor** M_{ij} de un elemento a_{ij} de A, es la submatriz que se obtiene al eliminar el renglón i y la columna j de la matriz A. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Ahora definiremos el concepto de cofactor, que es también necesario en el método de menores para hallar el valor de un determinante.

El **cofactor** C_{ij}, de un elemento a_{ij} está definido por $c_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$

Dicho de otro modo el cofactor de un elemento a_{ij}, es el determinante del menor con un signo + ó - dependiendo de i y de j.

$(-1)^{i+j}$ da como resultado 1 ó -1 dependiendo de i y de j. La finalidad de $(-1)^{i+j}$ es alternar signos tomando como inicio el signo + que llevará el cofactor del elemento 1, 1.

Ejemplo:

Sea la matriz R_4

$$R = \begin{pmatrix} \overset{+}{r_{11}} & \overset{-}{r_{12}} & \overset{+}{r_{13}} & \overset{-}{r_{14}} \\ \overset{-}{r_{21}} & \overset{+}{r_{22}} & \overset{-}{r_{23}} & \overset{+}{r_{24}} \\ \overset{+}{r_{31}} & \overset{-}{r_{32}} & \overset{+}{r_{33}} & \overset{-}{r_{34}} \\ \overset{-}{r_{41}} & \overset{+}{r_{42}} & \overset{-}{r_{43}} & \overset{+}{r_{44}} \end{pmatrix}$$

Si A es una matriz cuadrada de orden $n > 1$, entonces el determinante de A ($|A|$), es igual a la suma de los elementos de un renglón o columna(puede ser cualquiera) , cada uno multiplicado por su respectivo cofactor. Es decir que si seleccionamos el primer renglón de A para calcular el determianate, la fórmula sería:

$$|A| = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13} + \dots + a_{1n} \cdot C_{1n}$$

si lo escribimos en términos de los menores:

$$|A| = +a_{11} \cdot |M_{11}| - a_{12} \cdot |M_{12}| + \dots + (-1)^{1+n}\, a_{1n} \cdot |M_{1n}|$$

En este caso tomamos el renglón 1, pero se puede tomar cualquier columna o renglón.

Antes de decidir qué renglón o columna escogeremos para calcular el determinante, debemos revisar todos los renglones y columnas para encontrar el más fácil de multiplicar. Por ejemplo si la columna 3 de una cierta matriz tiene un cero y las demás columnas no tienen ceros, nos conviene tomar la columna 3, puesto que en la posición donde el elemento vale 0 no tenemos que calcular el cofactor.

Ejemplo:

Encontrar el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En este caso lo más conveniente es tomar el renglón 3 o la columna 2.

Tomemos el renglón 3 $\Rightarrow$

$$|A| = 3 \cdot C_{31} + 0 \cdot C_{32} + 1 \cdot C_{33} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^{3+1} |M_{31}| + (-1)^{3+3} \cdot |M_{33}| =$$

$$3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot (2 - 1) + (1 - (-4)) = 3 + 5 = 8$$

Cuando tenemos que calcular un determinante de orden 4, el problema se complica, pues los menores serán de orden 3 y entonces tendremos que calcular determinantes de orden 3. Claro que los determinantes de orden 3 se pueden calcular utilizando la regla de Sarrus. Pero si la matriz es de orden 5 o de orden más grande entonces sí tendremos que realizar una cantidad importante de operaciones.

TEOREMA

Si dos renglones (o columnas) de una matriz cuadrada A son idénticos, entonces el $|A| = 0$

Es evidente que si dos renglones (o columnas) de una matriz son idénticos, entonces el sistema de ecuaciones que está representado por la matriz no tendrá solución, puesto que dos de las ecuaciones son iguales y nos faltaría entonces una ecuación.

Matriz inversa

En la sección correspondiente al álgebra de matrices afirmamos que para algunas matrices cuadradas es posible hallar una matriz llamada inversa que al multiplicarse con la matriz original nos da como resultado la matriz identidad. Una matriz cuyo determinanate es igual a 0 no tiene inversa y se le llama **matriz singular**.

Estudiaremos 2 formas distintas de obtener la matriz inversa, la primera de ellas consiste en escribir del lado derecho de una matriz A de orden n, la matriz identidad de orden n y por medio de operaciones elementales que se efectuarán en ambas matrices transformamos A en la matriz identidad, la matriz que quede del lado derecho será la inversa de A.

Ejemplo: Encontrar la inversa de $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Utilizaremos la notación r_i para referirnos al i-ésimo renglón y poder indicar la operación que se realizó en cada paso.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} (r_1 \cdot -2) + r_2 \\ (r_1 \cdot -3) + r_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \; (r_2 \div 5) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 6 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} (r_2 \cdot 2) + r_1 \\ (r_2 \cdot -6) + r_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \; r_3 \cdot \frac{5}{8} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{6}{8} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} (r_3 \cdot -\frac{1}{5}) + r_1 \\ (r_3 \cdot \frac{3}{5}) + r_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{6}{8} & \frac{5}{8} \end{array}}_{\textit{matriz inversa}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{6}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Para comprobar que C^{-1} sea efectivamente la matriz inversa de C basta con multiplicar $C^{-1} \cdot C$.

La otra forma de calcular la matriz inversa es valiéndonos de la matriz adjunta. La **matriz adjunta** de una matriz cuadrada A, denotada por $adj\ A$, es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores, esta última se obtiene susbstituyendo los elementos de A por sus respectivos cofactores.

Si A es una matriz de orden n entonces:

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}$$

Ejemplo:

Encontrar la matriz inversa de la matriz C del ejemplo anterior, utilizando la matriz adjunta.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |C| = 8$$

$$C \text{ de cofactores}= \begin{pmatrix} +|M_{11}| & -|M_{12}| & +|M_{13}| \\ -|M_{21}| & +|M_{22}| & -|M_{23}| \\ +|M_{31}| & -|M_{32}| & +|M_{33}| \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 2 & -2 & -6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$adj\ A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 2 & -2 & -6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Contamos ya, con todos los elementos necesarios para estudiar cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales; en este texto estudiaremos tres métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales:

- Método de Gauss
- Regla de Cramer
- Método de la matriz inversa

5.5 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

5.5.1 Método de Gauss

Si revisamos por un momento el método de eliminación (suma y resta) estudiado anteriormente para resolver sistemas de dos ecuaciones, este método sirve en realidad para resolver un sistema de ecuaciones tan grande como se desee.

Consiste en ir eliminando de cada ecuación una variable, hasta que la última ecuación tenga una sola variable, se resuelve esta última ecuación y los resultados de las variable se van sustituyendo hacia atrás. Pensemos que por cada variable que se elimina queda un cero ocupando el lugar del coeficiente de la variable y de este modo la matriz se ve como una matriz escalonada, es decir, el primer elemento distinto de cero, en cada renglón, está en una columna posterior (derecha) al primer elemento distinto de 0 del renglón anterior. Una matriz escalonada es por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fue Karl Gauss (1777 - 1850) quien desarrolló esta idea y por eso el método lleva su nombre, aunque también se le conoce como eliminacin gaussiana. En otros capítulos estudiaremos otras ideas del genial Gauss.

En resumen, para resolver un sistema por eliminación gaussiana:

1. Se escribe el sistema en forma de matriz aumentada
2. Transformar la matriz aumentada en una matriz equivalente escalonada
3. Substituir el valor de cada variable en una ecuación antes (arriba) de donde fue obtenido el valor de dicha variable

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + y + z + w & = & 2 \\ 2x - 3y + z - w & = & -1 \\ x - y + 2z + 3w & = & 5 \\ 3x + 2y - z + w & = & 6 \end{array} \right. \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

transformamos la matriz aumentada en una matriz escalonada:

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \begin{array}{c} (r_1 \cdot -2) + r_2 \\ (r_1 \cdot -1) + r_3 \\ (r_1 \cdot -3) + r_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Para formar la matriz escalonada es claro que tenemos que transformar en 1 el valor que está en la posición (2, 1) , pero esto implica dividir entre 5 y entonces tendrímaos que trabajar con quintos y las operaciones se complican, busquemos pues otra camino:

$$
r_2 \longleftrightarrow r_4 \quad \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & -1 & -4 & -2 & 0 \\
0 & -2 & 1 & 2 & 3 \\
0 & -5 & -1 & -3 & -5
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\begin{array}{l}(r_2 \cdot -2) + r_3 \\ (r_2 \cdot -5) + r_4\end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & -1 & -4 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 9 & 6 & 3 \\
0 & 0 & 19 & 7 & -5
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \quad (r_3 \cdot -\tfrac{19}{9}) + r_4 \quad \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & -1 & -4 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 9 & 6 & 3 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{17}{3} & -\frac{34}{3}
\end{array}\right)
$$

Esta matriz escalonada representa al sistema equivalente :

$$
\left\{\begin{array}{rcl}
x + y + z + w & = & 2 \\
-y - 4z - 2w & = & 0 \\
9z + 6w & = & 3 \\
-\frac{17}{3}w & = & -\frac{34}{3}
\end{array}\right.
$$

Encontramos el valor de w y comenzamos la sustitución hacia atrás:

$$
\begin{array}{rcccrcl}
 & & & & w & = & 2 \\
9z + 6(2) & = & 3 & \Rightarrow & z & = & -1 \\
-y - 4(-1) - 2(2) & = & 0 & \Rightarrow & y & = & 0 \\
x + 0 - \ \ 1 + \ \ 2 & = & 2 & \Rightarrow & x & = & 1
\end{array}
$$

Finalmente la solución del sistema es: $(1, 0, -1, 2)$

Cuando cada elemento de un renglón es un múltiplo constante de otro renglón, por ejemplo:

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 4 & 2 & -1 \\
2 & 8 & 4 & -2
\end{array}
$$

al tratar de obtener una matriz escalonada, un renglón completo se vuelve 0. Esto es porque el sistema es singular y no tiene solución.

Si el sistema tiene solución, cuando obtenemos la matriz escalonada, esta resulta ser una matriz triangular superior.

5.5.2 Regla de Cramer

Si D es la matriz de coeficientes asociada a un sistema de n ecuaciones lineales y $|D| \neq 0$, entonces el sistema tiene una solución única dada por:

$$x_1 = \frac{|D_{x1}|}{|D|}\ ,\ x_2 = \frac{|D_{x2}|}{|D|}\ ,\ x_3 = \frac{|D_{x3}|}{|D|}\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = \frac{|D_{xn}|}{|D|}$$

donde D_{xi} es la matriz que se obtiene al reemplazar los coeficientes de x_i por los términos independientes.

<u>Ejemplo:</u>

Resolver el siguiente sistema utilizando la Regla de Cramer:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z &= 1 \\ 2x + 4y - z &= -2 \\ 3x - 2y + 4z &= 3 \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad |D| = 24$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{24} = \frac{40}{24} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{24} = -\frac{40}{24}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{24} = -\frac{32}{24}$$

Entonces el vector solución es: $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

5.5.3 Método de la matriz inversa

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones lineales que está representado en la siguiente forma:

$$\underbrace{A}_{\text{matriz de coeficientes}} \cdot X = B$$

ahora multiplicaremos a ambos lados de la igualdad por A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

pero $A^{-1} \cdot A$ es igual a la matriz identidad, entonces

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

sabemos que la identidad es el neutro multiplicativo por lo que

$$X = A^{-1} \cdot B$$

y esto quiere decir que la solución del sistema se obtiene al multiplicar la matriz inversa de la matriz de coeficientes por el vector de términos independientes. Claro que en ocasiones es difícil encontrar la matriz inversa.

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones del ejemplo anterior utilizando la matriz inversa.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z &= 1 \\ 2x + 4y - z &= -2 \\ 3x - 2y + 4z &= 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

aplicando cualquiera de los métodos ya estudiados obtenemos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ -\frac{11}{24} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ -\frac{11}{24} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} + \frac{2}{6} + \frac{3}{4} \\ -\frac{11}{24} - \frac{10}{12} - \frac{3}{8} \\ -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{12} \\ -\frac{30}{24} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

6. DESIGUALDADES

Una desigualdad es una expresión algebraica que relaciona dos cantidades reales.

6.1 Tricotomía

Cuando tenemos dos cantidades reales existen 3 formas de relacionarlas entre sí, estas tres posibilidades forman la llamada "ley de la Tricotomía".

Sabemos que los números reales sólo pueden ser positivos, negativos o cero , por lo que la diferencia entre dos números reales sólo puede ser positiva, negativa o cero. de tal forma que establecemos la siguiente relación:

a > b (a mayor que b) , si la diferencia $a - b$ es positiva

a < b (a menor que b) , si la diferencia $a - b$ es negativa

a = b (a igual que b) , si la diferencia $a - b$ es igual a cero.

Reparemos en que la igualdad (ecuación) es un caso particular de la desigualdad.

Las desigualdades son más "tolerantes" que las ecuaciones porque el conjunto de soluciones para aquellas es más amplio que para estas últimas . Así, por ejemplo. si queremos describir matemáticamente el objetivo para la producción de una empresa, necesitamos utilizar una desigualdad que relacione la producción P con cierto valor límite de rentabilidad r, por encima del cual una situación productiva resultara aceptable:

$$P - I \geq r$$

donde I correspondería al número de unidades producidas cuyo valor se necesita utilizar para pagar impuestos fijos, mientras que r correspondería al número de unidades que es preciso como mínimo para cubrir otros gastos generales fijos de la empresa.

6.2 Desigualdades estrictas y no estrictas

Llamaremos desigualdades estrictas a aquellas que no contemplen la posibilidad de la igualdad, por ejemplo:

$$x < 5$$

es una desigualdad estricta ya que todos los valores que tome la variable x deberán ser estrictamente menores que 5, esto es, no puede tomar valores mayores o iguales a 5.

Las desigualdades no estrictas son aquellas en las que se permite la igualdad con el valor límite, por ejemplo :

$$x \geq 7$$

en este caso todos los valores que tome la variable x deberán ser mayores ó iguales que 7, es decir que se permite la igualdad con el valor límite 7.

Una situación frecuente en que es preciso distinguir entre ambas, se presenta cuando vamos a clasificar un conjunto de datos . Por ejemplo si tenemos la siguiente lista de puntajes de un examen y solammente vamos a formar cuatro clases (NA, S, B, MB) se puede ver que según la desigualdad que satisfagan los datos quedarían ubicados en su correspondiente clase:

Calificación	Clase
$0 \leq c_i < 6$	NA
$6 \leq c_i < 7.3$	S
$7.3 \leq c_i < 8.7$	B
$8.7 \leq c_i \leq 10$	MB

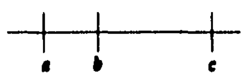
Nombre	Calificación	Clase
Fernando	9.7	MB
Isabel	8.7	MB
Joel	7.2	S
Daniel	4	NA
Clara	6.8	S

6.3 Propiedades de las desigualdades

Para enunciar propiedades para las desiguladades, consideremos que tenemos cuatro cantidades reales a, b, c y d

1. **Transitiva**

   (a) Si $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$



(b) Si $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$

Demostraremos la propiedad transitiva a)

Si $a < b$ y $b < c$ P. D. que $a < c$

<u>Demostración:</u>

*Sabemos que si $a < b \Rightarrow a - b < 0$ y que si $b < c \Rightarrow b - c < 0$, **ahora, como** $a - b$ y $b - c$ son dos números negativos, **su suma también es negativa y** tenemos que $(a - b) + (b - c) < 0$ **utilizando la propiedad asociativa de** los números reales $a + (-b + b) - c < 0 \Rightarrow a - c < 0$ **y esto es que** $a < c$.$\square$*

2. **Aditiva**

   (a) Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c$

   (b) Si $a > b \Rightarrow a + c > b + c \quad \forall c$

   (c) Si $a > b$ y $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

   (d) Si $a < b$ y $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

3. **Multiplicativa**

   (a) Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

   (b) Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

   (c) Si $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

   (d) Si $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

   Esto quiere decir que las desigualdades "cambian de sentido" cuando las multiplicamos (y cuando dividimos) por un número negativo, por ejemplo:
   $5 < 7$, pero si multiplicamos por -1 en ambos lados de la desigualdad $-5 > -7$

Demostraremos la propiedad 3 (a) a manera de ejemplo:

Si $a < b$ y $c > 0$ P.D. que $ac < bc$

<u>Demostración:</u>

Si $a < b \Rightarrow a - b < 0$, como $a - b$ es un número negativo y c un número positivo, el producto de ambos será negativo $(a - b)\,c < 0 \Rightarrow ac - bc < 0 \Rightarrow ac < bc.\square.$

4. **Potencias**

   (a) $a < b \quad \Rightarrow \quad a^n < b^n; \quad \forall n > 0\,,\, a > 0 \quad y \quad b > 0$

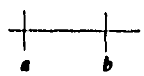
   (b) $a > b \quad \Rightarrow \quad a^n > b^n; \quad \forall n > 0\,,\, a > 0 \quad y \quad b > 0$

6.4 Intervalos en la recta numérica

En este texto resolveremos desigualdades basándonos en un razonamiento gráfico y para ello necesitamos aprender a describir zonas gráficas. Estudiaremos entonces, cómo describir un segmento en la recta numérica(una dimensión) o lo que es lo mismo, a describir gráficamente un subconjunto del conjunto de los números reales.

6.4.1 Intervalos finitos

Supongamos que tenemos la desigualdad $a < b$, entonces a está a la izquierda que b en la recta numérica:

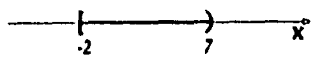


a y b son los extremos izquierdo y derecho respectivamente del segmento $\overline{ab}$. Diremos que el intervalo que va de a a b está cerrado o abierto por la izquierda si contiene o no contiene al extremo izquierdo a, y lo mismo sucede con el extremo derecho b.

Así, consideremos por ejemplo, una desigualdad cuyas soluciones son elementos del siguiente conjunto:

Conjunto Solución $= \{x \mid -2 \leq x < 7\}$

Este conjunto solución corresponde a un intervalo de la recta númerica que va de -2 cerrado a 7 abierto, ya que el número -2 está incluido en el intervalo y el 7 no lo está. Denotaremos los extremos cerrados utilizando corchetes [], mientras que los extremos abiertos los denotaremos con paréntesis () . De modo que el intervalo antes mencionado quedaría denotado como:
$[-2, 7)$



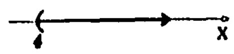
6.4.2 Intervalos infinitos

Consideremos la desigualdad $x > 4$, el conjunto solución sería $\{x \mid x > 4\}$, es decir que la solución son todos los números reales mayores que 4, por lo que el intervalo quedaría definido de 4 a infinito. Como ya sabemos, el infinito no se puede alcanzar, por lo que los intervalos que tienen como extremo al inifinito siempre son abiertos, así el intervalo sería:

$$(4, \infty)$$

abierto abierto

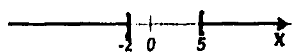
Gráficamente sería imposible colocar un paréntesis sobre el infinito, ya que esto equivaldría a representar que el infinito se puede alcanzar, por lo que únicamente marcaremos el extremo que podamos alcanzar y a partir de allí utilizaremos una flecha para indicar que el intervalo continúa hasta infinito o hasta menos infinito según sea el caso.



A veces ocurre que incorrectamente escribimos un intervalo solución como por ejemplo:

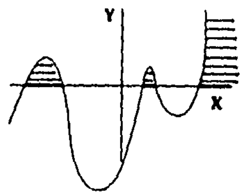
$$[5, \infty) \cup (-\infty, -2]$$

debemos siempre escribir primero el intervalo que esté más a la izquierda en la recta numérica.



6.5 Resolución de desigualdades

En el capítulo de ecuaciones estudiamos que cada variable que agregamos a una expresión algebraica significa una dimensión más al momento de representarla gráficamente, y también vimos que las soluciones válidas de una ecuación corresponden a la proyección de la función sobre el eje x. En forma análoga, los métodos que utilizaremos para resolver desigualdades se basan principalmente en un razonamiento gráfico, pero el conjunto de soluciones corresponderá a la proyección de todo un sector del plano sobre el eje de la abcisas.



Al igual que en el caso de las ecuaciones existirán desigualdades de más de una dimensión, pero solamente podemos visualizar mediante representación gráfica hasta tres variables (gráfica tridimensional o de visión estereoscópica para funciones de dos variables) .

Resolver una desigualdad quiere decir encontrar el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable para que la desigualdad se torne verdadera. La forma de encontrar estos valores es muy similar a la que utilizamos para resolver ecuaciones, pero en el caso de las desigualdades podemos hallar a veces "atajos" muy ingeniosos.

6.5.1 Desigualdades absolutas y condicionales

Al resolver desigualdades nos encontramos con que algunas de ellas siempre son verdaderas, es decir, se cumplen para todos los valores que tomen las variables, por ejemplo:

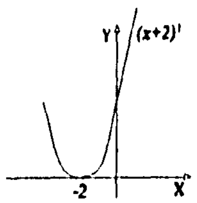
$$x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

se puede factorizar y queda como:

$$(x + 2)^2 \geq 0$$

y ya que cualquier número elevado al cuadrado siempre devuelve un valor positivo la desigualdad es cierta para cualquier número real que tome la variable x. A este tipo de desigualdades se les llama **absolutas**.

La anterior desigualdad podría haber correspondido a la descripción de la productividad de una fábrica en que la variable x correspondiese a la producción (número de unidades producidas) , y la variable y correspondiese a los ingresos por venta (la relación parabólica indica el aumento de eficiencia) $x^2 + 4x + 4 = y$, y esta igualdad estaría describiendo el balance.



Para el empresario implicaría ganancia todos los puntos por encima de dicha curva.

Claro está que las desigualdades más comunes no son las absolutas sino las condicionales, que son las que condicionan los valores que puede tomar la variable, por ejemplo:

$$w \leq 7$$

en este caso la variable w está condicionada a tomar valores menores ó iguales a 7.

A las desigualdades condicionales también se les llama **inecuaciones.**

6.5.2 El caso de una desigualdad lineal con una variable

Este tipo de desigualdades son las más sencillas de resolver, pues sólo tenemos que agrupar términos semejantes y despejar, es decir agrupamos todos los términos que contengan a la variable de un lado de la desigualdad y del otro lado los términos que no contengan a la variable , finalmente despejamos la variable.

A propósito de esto, debemos recordar de tener mucho cuidado cuando multipliquemos o dividamos la desigualdad por algún valor, ya que si este es negativo la desigualdad cambia de sentido según lo estudiamos en las propiedades para las desigualdades.

Ejemplo:

Una compañía que produce comida "rápida" tiene experiencia de vender en un estadio deportivo y en una sala de conciertos de rock, en el estadio tuvo que pagar 1 por derechos de instalación y vendió cada unidad a 0.0004, en la sala de conciertos tuvo que pagar 8 y cada unidad la vendió a 0.0007, habiendo ganado más en este último lugar se desea saber por encima de cuántas unidades debería vender para que le conviniese instalarse en la sala de conciertos si coincidieran los dos tipos de espectáculos y se pudiesen estimar las ventas. (sabiendo el número de entradas vendidas)

$$0.0007x - 8 \geq 0.0004x - 1 \quad \Rightarrow \quad 0.0007x - 0.0004x \geq -1 + 8 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0.0003x \geq 7$

para despejar x, debemos dividir ambos lados de la desigualdad entre 0.0003, y como este es un valor positivo la desigualdad no cambia de sentido, así

$$x \geq \frac{7}{0.0003}$$

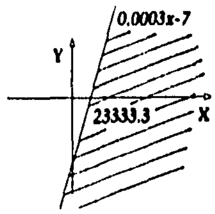
Escribamos ahora el conjunto solución

$$C.S. = \left\{x \mid x \geq \frac{7}{0.0003}\right\}$$

el intervalo solución

$$[23333.3, \infty)$$

y finalmente la solución descrita gráficamente



Ejemplo:

Resolver la desiguladad $\frac{1}{2}x + 3 > 7x$

$\frac{1}{2}x - 7x > -3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{-13}{2}x > -3$

ahora debemos dividir ambos lados de las desigualdad entre $\frac{-13}{2}$, y como se trata de un valor negativo, la desigualdad cambia de sentido

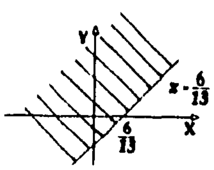
$$x < \frac{6}{13}$$

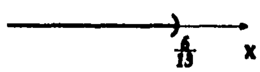
o bien $y = x - \frac{6}{13} < 0$

$C.S. = \left\{x \mid x < \frac{6}{13}\right\}$

Intervalo solución $\left(-\infty, \frac{6}{13}\right)$

Gráfica:





6.5.3 El caso de una desiguladad no lineal con una variable

En el capítulo correspondiente a ecuaciones vimos que para resolverlas lo primero es despejar todos los términos de un lado de la igualdad y tratar de escribir la ecuación como produco de factores lineales o polinomios irreducibles (por ejemplo $x^2 + 4$).

Para resolver una desigualdad hacemos exactamente lo mismo y luego analizamos el comportamiento de dichos factores. En realidad una desigualdad no lineal , por ejemplo de grado 2 , se puede tratar como 2 desigualdades simultáneas de grado 1, una desigualdad de tercer grado se puede tratar como tres desigualdades simultáneas de grado 1 y así sucesivamente.

Ejemplo:

$\underbrace{x^2 + 2x - 3} \leq 0$

se puede factorizar como $(x-1)(x+3)$, entonces la desigualdad quedaría :

$(x-1)(x+3) \leq 0$

Ahora bien, si tenemos dos números a y b cuyo producto es negativo, quiere decir el signo de a es diferente al signo de b. Así:

Si $ab \leq 0 \quad \Rightarrow \quad a \leq 0$ y $b \geq 0$ (dos desigualdades simultáneas)
ó
$a \geq 0$ y $b \leq 0$

Análogamente, si el producto de a y b fuera positivo, esto querría decir que a y b son del mismo signo. Así:

Si $ab \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \geq 0$ y $b \geq 0$
ó
$a \geq 0$ y $b \geq 0$

Regresemos entonces, a nuestro problema:

$$(x-1)(x+3) \leq 0$$

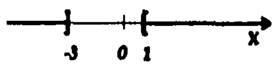
Como el producto de los factores lineales es negativo quiere decir que debemos analizar las dos siguientes posibilidades:

$x - 1 \geq 0$ y $x + 3 \leq 0 \qquad x \geq 1$ y $x \leq -3$ ---$_1$
ó $\qquad \Rightarrow \qquad$ ó

$x - 1 \leq 0$ y $x + 3 \geq 0$ $\qquad\qquad$ $x \leq 1$ y $x \geq -3$ --- 2

Recordemos que la desigualdad $x \geq 1$ tiene como solución a un conjunto de números al igual que la desigualdad $x \leq -3$ y que estamos exigiendo que las dos desigualdades se cumplan a la vez, entonces lo que estamos buscando es la intersección de los dos conjuntos solución. En ocasiones se dificulta encontrar esta intersección y es por esto que nos auxiliaremos de la recta númerica

caso 1



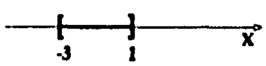
Es claro que la intersección es vacía ($\emptyset$)
caso 2

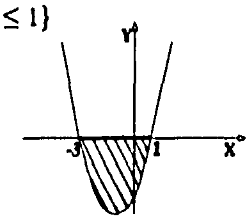
el intervalo solución sería $[-3, 1]$

Originalmente habíamos dicho que cualquiera de las dos posibilidades (1 ó 2) hacía verdadera la desigualdad. Esto quiere decir que la solución final será la unión de los valores que cumplen el caso 1 con los valores que cumplen el caso 2. Entonces:

$$\begin{array}{ccc} \text{caso 1} & \text{ó} & \text{caso 2} \\ \emptyset & \cup & [-3,1] = [-3,1] \end{array}$$

Finalmente:
el conjunto solución sería : $\quad C.S. = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\}$
el intervalo solución $\;[-3, 1]$
y la gráfica solución



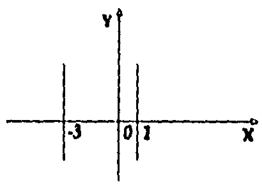


También podemos resolver las desigualdades analizando cómo se comportan los factores en los posibles intervalos solución. Como ya sabemos la raíces de una ecuación son los valores de x que igualan la ecuación a cero, y cada vez que esto sucede los valores que están a la izquierda o la derecha de la raíz hacen que la ecuación se haga posivitiva o negativa y que esto no vuelva a cambiar hasta la siguiente raíz, así que los posibles intervalos solución serían todos los intervalos que se forman con las raíces.

Tenemos la desigualdad escrita ya como producto de factores irreducibles

$$(x - 1)(x + 3) \leq 0$$

las raíces serían 1 y -3, veamos ahora gráficamente los intervalos que se forman



los posibles intervalos solución serían: $(-\infty, -3]$, $[-3, 1]$, $[1, \infty)$

Ahora procedemos a analizar el signo de cada factor en cada intervalo y después multiplicaremos los signos para ver el signo que tomaría el producto de los factores en cada intervalo

Intervalo	$(x-1)$	$(x+3)$	Producto
$(-\infty, -3]$	$-$	$-$	$+$
$[-3, 1]$	$-$	$+$	$-$
$[1, \infty)$	$+$	$+$	$+$

Como se nos pide tomar los valores que hacen que la función tome valores menores que 0, tomaremos como solución aquellos intervalos en los que el signo del producto sea negativo, en este caso : $[-3, 1]$.

Si tuviéramos que resolver una desigualdad donde la variable tiene grado mayor o igual a 3, hacemos exactamente lo mismo, el único incoveniente sería que hay que analizar un número mucho mayor de combinaciones de signos.

Existen funciones que no se pueden expresar como un simple producto de factores lineales, como por ejemplo:

$x^{5} + a < b \qquad a, b \in R$

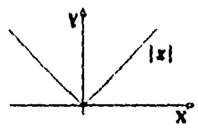
En este texto no estudiaremos este tipo de procesos no lineales, pero la única forma de resolver desigualdades como la anterior, es auxiliándonos de la derivada.

En ocasiones podemos encontrarnos con desiguladades en la que aparezca valor absoluto, recordemos entonces el valor absoluto de un número real x es la distancia desde el origen de una línea coordenada al punto x, es decir que está definido como:

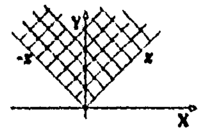
$$|x| = \left\{ \begin{array}{c} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{array} \right\}$$

por ejemplo $|-5| = --5 = 5$

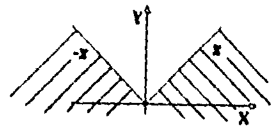
Si observamos la gráfica de la función $f(x) = |x|$



y deseamos obtener los valores que cumplan con la desigualdad $|x| < y$ tenemos que intersectar el conjunto solución de $x > -y$ para $x < 0$, con el conjunto solución de $x < y$, para $x > 0$.



en cambio si debemos obtener las soluciones de la desigualdad $|x| > y$ tenemos que tomar la unión de los conjuntos soluciones de las desiguladades $x > y$, $x < -y$



Propiedades para el valor absoluto

1. $|a| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a < b$
2. $|a| > b \quad \Leftrightarrow \quad a > b \quad$ ó $\quad a < -b$

En el caso particular de las desigualdades de segundo grado, a veces se facilita expresar la desigualdad como un factor elevado al cuadrado, por ejemplo:

$$5x^2 + 24x - 1 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + \frac{24}{5}x - \frac{1}{5} \geq 0$$

completando el trinomio cuadrado perfecto obtenemos:

$$x^2 + \frac{24}{5}x + \left(\frac{12}{5}\right)^2 \geq \frac{1}{5} + \left(\frac{12}{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{12}{5}\right)^2 \geq \frac{149}{25}$$

Para resolver esta desigualdad podemos aplicar raíz cuadrada a ambos miembros de la desigualdad

$$\sqrt{\left(x + \frac{12}{5}\right)^2} \geq \sqrt{\frac{149}{25}} \quad \Rightarrow \quad \left|x + \frac{12}{5}\right| \geq \frac{\sqrt{149}}{5}$$

entonces aplicamos la propiedad 2

$x + \frac{12}{5} \geq \frac{\sqrt{149}}{5}$ **ó** $x + \frac{12}{5} \leq -\frac{\sqrt{149}}{5}$

$x \geq 0.041131$ **ó** $x \leq -4.84131$

C.S.= $\{x \mid x \geq 0.041131 \quad$ ó $\quad x \leq -4.84131\}$
Intervalo solución $(-\infty, -4.8413] \cup [0.04131, \infty)$
Gráfica

A veces no es fácil distinguir una desigualdad absoluta, por ejemplo:

$$3x^2 + 2x + 4 > 0$$

aplicamos la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado, con el fin de obtener las raíces del polinomio

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-44}}{6}$$

a primera vista podríamos pensar que la solución no está en el conjunto de los números reales, sin embargo esta es una desigualdad absoluta y para probarlo basta con que sustituyamos cualquier valor real en la desigualdad por ejemplo el valor -2

$3(-2)^2 + 2(-2) + 4 > 0$
$12 - 4 + 4 > 0$

Si obtenemos un resultado que parezca no tener solución en el conjunto de los reales, debemos siempre probar cualquier valor en la desigualdad para comprobar si esta se cumple, si efectivamente la desigualdad se cumple entonces la solución son todos los reales.

6.5.4 Desigualdades fraccionarias

Cuando la variable aparece en el denominador de una desigualdad, decimos que esta es fraccionaria. Por ejemplo:

$$\frac{2}{5} \leq \frac{1}{2\varphi - 1}$$

Si en lugar del signo de desigualdad tuvieramos uno de igualdad, el problema se reduciría a multplicar por $2\varphi - 1$ a ambos lados de la igualdad, pero teniendo el signo de desigualdad tenemos un problema: no sabemos cuando la variable φ toma valores negativos y cuando positivos; y esto es muy importante ya que si la variable φ toma valores negativos, al multiplicar por $2\varphi - 1$ la desigualdad , ésta se altera. La solución está en multiplicar ambos lados de la desigualdad por el cuadrado del denominador, es este caso por $(2\varphi - 1)^2$, de este modo estamos garantizando que multiplicamos por un número positivo. Así:

$$\frac{2}{5} \cdot (2\varphi - 1)^2 \leq \frac{1}{2\varphi - 1} \cdot (2\varphi - 1)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} \cdot (2\varphi - 1)^2 \leq 2\varphi - 1$$

$$8\varphi^2 - 8\varphi + 2 \leq 10\varphi - 5 \quad \Rightarrow \quad 8\varphi^2 - 18\varphi + 7 \leq 0$$

Factorizamos la desigualdad en factores irreducibles:

$$\left(\varphi - \tfrac{1}{2}\right)\left(\varphi - \tfrac{7}{4}\right) \leq 0$$

Ahora analizamos las posibilidades:

$$\varphi - \tfrac{1}{2} \leq 0 \quad \text{y} \quad \varphi - \tfrac{7}{4} \geq 0 \text{ ......(1)}$$

ó

$$\varphi - \tfrac{1}{2} \geq 0 \quad \text{y} \quad \varphi - \tfrac{7}{4} \leq 0 \text{ ......(2)}$$

1 ________

2 ________

$C.S. = \left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{4}\right\}$

Intervalo Solución $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right]$

Gráfica

Ejemplo:

Resolver la siguiente desigualdad $\frac{x}{x-1} < \frac{x+1}{x-2}$

Si tratáramos de resolverla multiplicando por los cuadrados de los denominadores nos quedaría una desigualdad de sexto grado y tendríamos que recurrir a los métodos estudiados en teoría de ecuaciones ¡resultaría muy complicado!, mejor actuemos así:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x-2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-2x-x^2+1}{(x-1)(x-2)} < 0$$

$$\frac{-2x+1}{(x-1)(x-2)} < 0$$

Consideremos las soluciones de cada factor lineal, es decir $-2x + 1 = 0, x - 1 = 0$ y $x - 2 = 0$, luego:

$$x = \tfrac{1}{2}, 1, 2$$

esto quiere decir que los intervalos que debemos analizar son:

$$\left(-\infty, \tfrac{1}{2}\right), \left(\tfrac{1}{2}, 1\right), (1,2), (2,\infty)$$

ahora analicemos cómo se comporta cada factor lineal en en cada uno de los intervalos

Intervalo	$-2x+1$	$x-1$	$x-2$	$\frac{-2x+1}{(x-1)(x-2)}$
$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	+	−	−	+
$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	−	−	−	−
$(1,2)$	−	+	−	+
$(2,\infty)$	−	+	+	−

Finalmente: $C.S. = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2,\infty)$

6.6 Sistemas de desigualdades de dos variables

Cuando tenemos que trabajar con varias desigualdades a la vez nos referimos a ellas como a un **sistema de desigualdades**; la solución de este será la solución que sea común a todas ellas.

De forma similar a los sistemas de ecuaciones, la solución de un sistema de desigualdades de dos variables es un conjunto de puntos ordenados (x, y) que hacen verdadero el sistema.

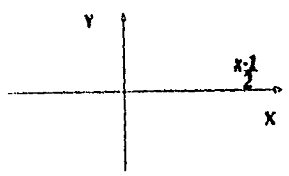
Ejemplo:

Encontrar el conjunto solución y la gráfica de la siguiente desigualdad:

$$x - 2y - 1 > 0$$

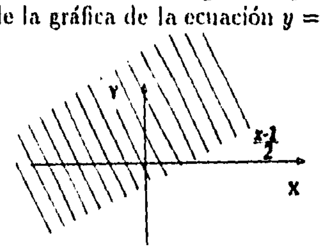
$C.S. = \left\{(x, y) \mid y > \frac{x-1}{2}\right\}$

La gráfica de la ecuación $y = \frac{x-1}{2}$ corresponde a una línea recta, donde a cada abscisa a le corresponde una ordenada $\frac{a-1}{2}$

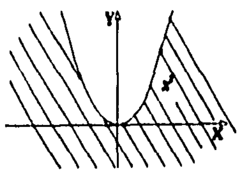


Los puntos (a, b) que satisfacen la desigualdad son aquellos que cumplen con $b > \frac{a-1}{2}$, es decir los puntos que están arriba de el punto $\left(a, \frac{a-1}{2}\right)$. Utilizaremos líneas punteadas para las desigualdades estrictas ya que los puntos que están en la recta no están incluidos en el conjunto solución de la desigualdad y líneas contínuas para las desigualdades no estrictas.

Análogamente la gráfica de la desigualdad $y < f(x)$ es el conjunto de puntos que están abajo de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$



Ejemplo:
$y - x^2 \leq 0 \qquad y \leq x^2$

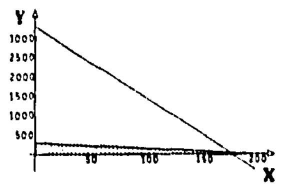


Ejemplo:

Un accionista planea invertir \$30,000 en dos inversiones A y B. La acción A está valuada actualmente en \$165 y paga un dividendo de \$6 por acción y la acción B está valuada en \$90 y paga \$ 5 por acción. Si el accionista requiere que la inversión le pague más de \$1,400 en dividendos, hacer un bosquejo de la gráfica de la región solución

$$165x + 90y \leq 30,000$$
$$6x + 5y > 1,400$$

Es claro que en este caso sólo tiene importancia la región para la cual $x \geq 0$ y $y \geq 0$ entonces



6.6.1 Programación lineal (enfoque geométrico)

La programación lineal es una técnica matemática que se utiliza para resolver problemas que involucren optimizaciones. Por ejemplo se utiliza para encontrar la cantidad óptima de producción que debe tener una empresa para minimizar sus costos o bien para maximizar sus ganancias.

Ejemplo:

Una fábrica de golosinas produce dos tipos de palanquetas: "cacahuatosas" y "chocolatosas". El tipo "cacahuatosas" contiene miel, cacahuates y chocolate en proporción 10:70:20 y el tipo "chocolatosas" contiene estos tres ingredientes en proporción 5:40:55 . Cada semana la empresa puede confiar en un suministro de 2.8 kilos de miel , 20 kilos de cacahuate (pelado) y 20 kilos de chocolate. La planta de producción puede elaborar a lo más 40 kilos de palanquetas. Si la empresa obtiene una ganancia de $100 por kilo de palanquetas del tipo "cacahuatosas" y $200 por cada kilo del tipo "chocolatosas". ¿Qué cantidades deberá de producir de cada tipo para obtener la máxima ganancia?

En casi todos los problemas de este tipo lo más conveninete es resumir la información en una tabla:

	Miel	Cacahuate	Chocolate
"cacahuatosas"	1.5	13.5	7.5
"chocolatosas"	3	3	4
suministro	9	32	20

Denotaremos con x al número de kilos de palanquetas "cacahuatosas" que se producen a la semana y con y al número de kilos de palanquetas "chocolatosas".
Contamos con 2.8 kilos de miel a la semana por lo que la cantidad utilizada en producir x y y no debe exeder a 2.8, esto es:

$$0.1x + 0.05y \leq 2.8$$

también sabemos que la cantidad de cacahuates que se utilizen para elaborar x y y es a lo más 20, entonces:

$$0.7x + 0.4y \leq 20$$

lo mismo sucede con el chocolate:

$$0.2x + 0.55y \leq 20$$

como la fábrica puede producir a lo más 40 kilos entonces:

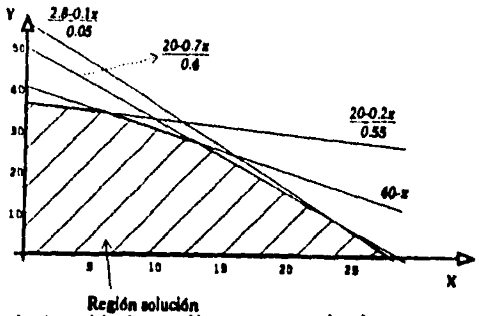
$$x + y \leq 40$$

Es claro que x y y deben ser mayores o iguales que 0, ya que denotan la producción de palanquetas en número de kilos:

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0$$

Entonces, el sistema de desigualdades quedaría como:

$$\begin{aligned} 0.1x + 0.05y &\leq 2.8 \\ 0.7x + 0.4y &\leq 20 \\ 0.2x + 0.55y &\leq 20 \\ x + y &\leq 40 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$



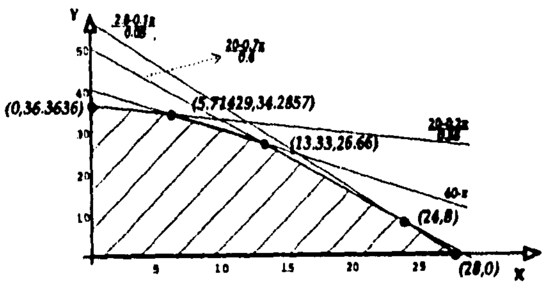
En programación lineal las desigualdades se llaman **restricciones** para las variables y la función lineal que debe ser optimizada (minimizada o maximizada) se llama **función objetivo.** Una forma de obtener el óptimo es sustituir todos los puntos extremos de la región solución en la función objetivo y observar dónde toma su valor óptimo.

En este caso la función objetivo sería:

$$Utilidad = 100x + 200y$$

$100x$ corresponde a la ganancia que se obtendrá al vender x kilos de palanquetas "cacahuatosas" y $200y$ a la ganancia de vender y kilos de palanquetas "chocolatosas".

Buscamos los puntos extremos de la región solución, i.e., los puntos donde se intersectan las líneas:



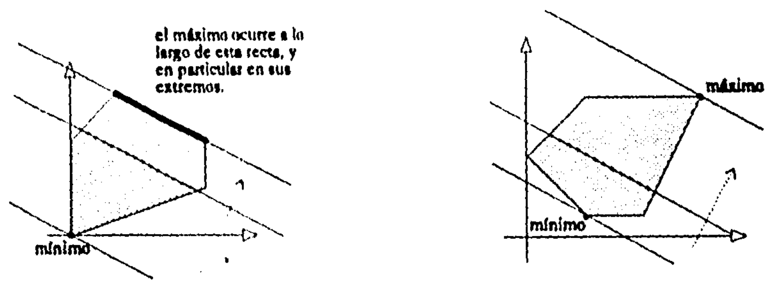
Procedamos a encontrar el punto en el que la función objetivo se optimiza (en este caso, se maximiza) sustituyendo los puntos extremos de la región solución en la función objetivo

Punto	$Utilidad = 100x + 200y$
(0, 36.3636)	\$7,272
(5.71429, 34.2857)	\$7,428.57
(13.3333, 26.6667)	\$6,666.66
(24, 8)	\$4,000
(28, 0)	\$2,800

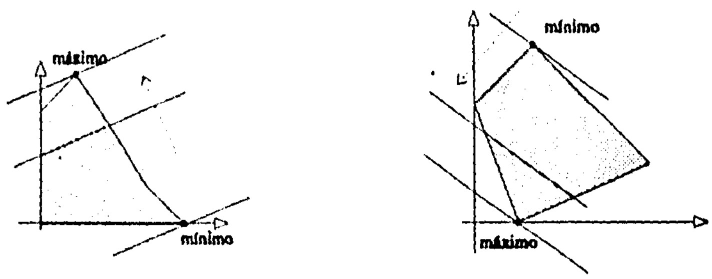
La máxima ganancia ($7,428.57) se obtiene al producir 5.71429 kilos de palanquetas del tipo "cacahuatosas" y 34.2857 kilos de palanquetas "chocolatosas".

Hacer una tabla como la anterior puede ser algo tedioso, en cambio existe una forma geométrica, mucho más agradable, de resolver el problema , se trata de obtener el ángulo que forma la función objetivo con la horizontal y la graficarla abajo o arriba de la región solución, dependiendo de si se va a minimizar o maximizar:

cuando la función objetivo tiene
pendiente negativa (crece hacia la derecha) :



cuando la función objetivo tiene
pendiente positiva (crece hacia la izquierda) :



Siempre que trabajamos con sistemas de desigualdades lineales de dos variables la función objetivo tiene la forma:

$$ax + by = k$$

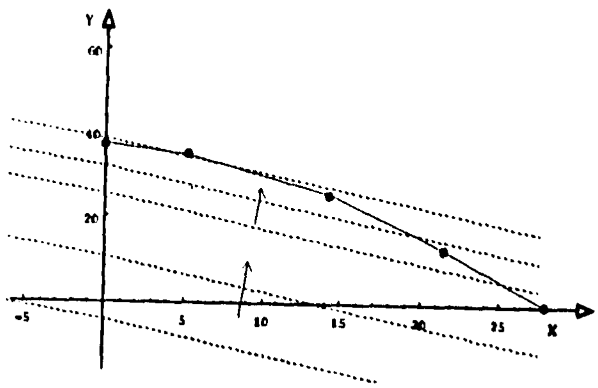
pero observemos que el valor de k no afecta la pendiente que será $-\frac{a}{b}$, esto significa que al alterar el valor de k, lo único que cambia es la ordenada al origen de la recta. Por lo que si se nos dificulta el uso del transportador para trazar la recta, podemos darle a k algún valor (por ejemplo 0) para graficar la función objetivo y con el auxilio de un par de escuadras ir trazando las rectas paralelas.

Ejemplo:

Obtener la ganacia máxima del ejemplo anterior, utilizando el método gráfico.
Obtenemos la pendiente de la función objetivo y calculamos el ángulo que esta forma con la horizontal:

$$y = \frac{-100}{200}x + \frac{utilidad}{200}$$

$$\text{Arctan}\left(\frac{-100}{200}\right) = -26.565011° = 153.4349° \cong 153.43°$$



De la gráfica anterior podemos observar que la función objetivo se maximiza en el punto (5.71429, 34.2857), entonces:

ganancia máxima = 5.71429($100) + 34.2857($200) = $7,428.57

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Sean $P_1, P_2, P_3, \ldots$ una secuencia de proposiciones. Supongamos que

a) P_1 es verdadera

b) Para cualquier k, si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera

Entonces todas las proposiciones $P_1, P_2, P_3, \ldots$ son verdaderas.

En una demostración por inducción matemática es necesario que se satisfagan las dos condiciones a) y b). Usualmente a la demostración de a) se la llama base de la inducción y a la suposición de que P_k es cierta se le llama **hipótesis de inducción.**

El principio de inducción matemática se basa en la propiedad de los números naturales de que todo número natural k tiene un sucesor $k+1$ y que todo natural k puede ser alcanzado mediante un número finito de pasos, a partir del 1.

Ejemplo:

Demostrar la siguiente proposición A : " $a^{2n} - b^{2n}$ es divisible por $a+b$, siendo n un número natural cualquiera".

Demostración:

a) *Por demostrar que A_1 es cierta.*
$a^{2\cdot 1} - b^{2\cdot 1} = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ *como $(a+b)$ aparece como factor de $a^2 - b^2$, $\Rightarrow$ A_1 es verdadera.*

b) *i)Suponemos que A_k es verdadera , es decir, suponemos que es cierto que $a^{2k} - b^{2k}$ se puede factorizar en la forma $(a+b)(z+w)$, donde z y w son dos expresiones. Esto es la hipótesis de inducción.*

ii)Por demostrar que A_{k+1} es verdadera, es decir, debemos demostrar que $a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)}$ se puede factorizar en la forma $(a+b)(x+y)$ Para poder factorizar $(a+b)$ de la expresión $a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)}$ es necesario utilizar un pequeño "truco" que consiste en sumar a la expresión un cero "disfrazado" de $a^2b^{2k} - a^2b^{2k}$. Estos pequeños "trucos" son precisamente lo más difícil de encontrar cuando estamos efectuando una demostración.

$a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)} = a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)} + a^2b^{2k} - a^2b^{2k}$ *cambiamos de orden los términos y obtenemos:*

$$a^{2(k+1)} - a^2b^{2k} + a^2b^{2k} - b^{2(k+1)} = a^{2k}\cdot a^2 - a^2b^{2k} + a^2b^{2k} - b^{2k}\cdot b^2 =$$
$$a^2 \underbrace{\left(a^{2k} - b^{2k}\right)}_{\text{hipótesis de inducción}} + b^{2k}(a^2 - b^2) \qquad (1)$$

pero sabemos por la hipótesis de inducción que $a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)}$ *se puede factorizar en la forma* $(a+b)(z+w)$ *entonces escribimos la expresión (1) en la forma:*

$a^2(a+b)(z+w) + b^{2k}(a-b)(a+b)$
factorizamos $(a+b)$ *y obtenemos*

$$(a+b)\underbrace{\left[a^2(z+w) + b^{2k}(a-b)\right]}_{(x+y)} = (a+b)(x+y)$$

por lo tanto concluimos que la proposición A_n *es verdadera para todos los* n naturales. □

En el capítulo 3 (Números complejos) dejamos pendiente la demostración de un teorema que nos indicaba cómo elevar un número complejo a una potencia positiva y entera:

Teorema de Moivre

Sea $z \in C \Rightarrow z^n = (rcis\theta)^n = r^n cis\, n\cdot\theta \qquad \forall n \in Z^+$

Notemos que en esta proposición los valores para n comienzan desde el 0.
Demostración:

a) *Por demostrar que la proposición es cierta para* $n = 0$
$z^0 = 1$ *y* $z^0 = r^0 cis\, 0\cdot\theta = cis\, 0^\circ = \cos 0^\circ + i\, sen\, 0^\circ = 1 + 0 = 1$
por lo tanto la proposición es cierta para $n = 0$

b) *i) Suponemos cierto que* $z^k = r^k cis\, k\cdot\theta$

ii) Por demostar que $z^{k+1} = r^{k+1} cis\,(k+1)\cdot\theta$
$z^{k+1} = z^k \cdot z$
pero por hipótesis de inducción sabemos que $z^k = r^k cis\, k\cdot\theta$ *entonces*

$$z^{k+1} = \left(r^k cisk\cdot\theta\right)\cdot z = \left(r^k cisk\cdot\theta\right)\cdot(rcis\theta)$$

y multiplicar dos números complejos en su forma polar es equivalente a sumar sus ángulos y multiplicar sus magnitudes, así:

$z^{k+1} = \left(r^k cis k \cdot \theta\right) \cdot (r cis \theta) = r^{k+1} cis\left((k \cdot \theta) + \theta\right) =$
$r^{k+1}\, cis\, (k+1) \cdot \theta$
por lo tanto la proposición es cierta. □

7.2 Sucesiones

Intuitivamente todos tenemos la idea de lo que es una sucesión, se trata de "cosas" que van "apareciendo en un cierto orden" . Por ejemplo los abogados utilizan comunmente la frase "los hechos se fueron sucediendo ...", para referirse a ciertos hechos que ocurrieron en un cierto orden de aparición; también hemos formado parte de una sucesión cuando estamos formados en una fila. Matemáticamente podemos definir lo que es una sucesión más formalmente.

Una sucesión infinita es una función que tiene como dominio el conjunto de los números naturales y por contradominio los números reales, o bien cualquier conjunto , incluso no numérico, por ejemplo:

> Consideremos un grupo de personas esperando en el banco para pagar sus impuestos, resulta más cómodo para todos que se repartan fichas con números; y así cuando una caja queda disponible se llama a la persona que tiene el siguiente número de ficha. Estas personas no lo saben, pero en realidad el número por el que serán llamadas es un número natural, puesto que sirve para contar el número de personas. En este caso el dominio es el conjunto de los números naturales y el rango (contra-dominio) es el conjunto de personas:
>
> $$\begin{array}{ccl} 1 & \longrightarrow & \text{Salomón Pérez} \\ 2 & \longrightarrow & \text{Hermida Juárez} \\ 3 & \longrightarrow & \text{Sara García} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

En este texto estudiaremos únicamente **sucesiones infinitas** cuyo rango (contradominio) es el conjunto de los números reales.

$$f : N \rightarrow R$$

Es importante darnos cuenta de que las sucesiones son funciones de un tipo diferente a las que conocíamos, puesto que no son funciones contínuas, como lo son por ejemplo los polinomios.

Si f es una sucesión infinita, entonces a cada número natural n le corresponde un real $f(n)$.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & f(1) \\ 2 & \longmapsto & f(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \longmapsto & f(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

De forma que podemos escribir del siguiente modo los números en el rango (contradominio) de la función:

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n), \underset{\substack{\downarrow \\ \text{indican que la sucesión no termina}}}{\ldots}$$

A $f(1)$ se le llama primer término de sucesión, a $f(2)$ se le llama segundo término de la sucesión, etc. En general $f(n)$ es el n- ésimo término de la sucesión. En lugar de escribir la sucesión como lo hicimos anteriormente, se acostumbra escribirla así:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

donde a_n representa a $f(n)$.

Las sucesiones infinitas se definen a veces dando una fórmula para obtener el n-ésimo término.

Ejemplo:

Dada la fórmula de $a_n = \frac{1}{n}$, obtener los cuatro primeros términos de la sucesión

$a_1 = \frac{1}{1} = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad a_4 = \frac{1}{4}$

la sucesión quedaría como

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

Cuando tenemos una fórmula como $a_n = 5$, decimos que la sucesión es constante, ya que $a_1 = 5$, $a_2 = 5$, etc.

No siempre es posible hallar una expresión (fórmula) para describir el n-ésimo término de una sucesión, tomemos por ejemplo uno de los problemas más antiguos de los que se conoce; y el cual por cierto sigue aún sin resolverse, a pesar de los intentos hechos por los matemáticos: encontrar una fórmula que sirva para generar (obtener) números primos. Un número primo es aquel que sólo es divisible por dos números distintos, él mismo y la unidad (observemos que el primer número primo es el dos).

Tomemos la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ donde a_n es el n-ésimo número primo positivo

$$2, 3, 5, 7, 11, \ldots$$

Es claro que no resulta fácil hallar una fórmula para definir a_n. El primer intento conocido, que haya resultado fructífero, no es una fórmula, sino un método llamado criba de Eratóstenes. Una criba es una coladera como la que usan los buscadores de oro en los ríos. Ertóstenes fué un matemático de Cirenaica, educado al pricipio en Alejandría y más tarde en la escuela de Platón. Fué el encargado de dirigir la biblioteca de Alejandría hasta el fin de sus días. Eratóstenes era uno de los más grandes sabios de su tiempo y además era poeta, orador, filósofo y un gran atleta.

Eratóstenes presentó al rey Ptolomeo III de Egipto, una tabla de números primos hechos sobre una plancha metálica en la que los números no primos estaban marcados con un pequeño agujero, el procedimiento para seleccionar los números consistía en hacer un agujero primero en los múltiplos de del 2 luego del 3 y así sucesivamente, finalmente sólo quedaban en la tabla los números primos. Por esto se le dió el nombre de Criba de Eratóstenes al proceso de que se servía el gran sabio para formar su tabla.

<u>Ejemplo:</u>

Listar los cinco primeros términos de la sucesión infinita cuyo n-ésimo término es $a_n = \frac{2n+5}{n+1}$

$\frac{7}{2}, \frac{9}{3}, \frac{11}{4}, \frac{13}{5}, \frac{15}{6}, \ldots, \frac{2n+5}{n+1}, \ldots$

Aquellas sucesiones que cuentan con una fórmula para obtener el n-ésimo término, pero esta fórmula está determinada por uno o varios de los términos anteriores de la sucesiones, se llaman **sucesiones recurrentes** o decimos que la fórmula es recursiva.

La recursividad es un proceso que necesita recurrir a sí mismo en niveles anteriores. Consideremos por ejemplo:

El proceso de elevar un número b a la potencia k, consiste en multiplicar k veces el número b por sí mismo.

$b^k = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{k \text{ veces}}$ $\qquad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

ahora describamos este proceso recursivamente

$$
\begin{aligned}
b^k &= b^{k-1} \cdot b \\
b^{k-1} &= b^{k-2} \cdot b \\
\vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\
b^1 &= b
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
3^4 &= 3^3 \cdot 3 \\
3^3 &= 3^2 \cdot 3 \\
3^2 &= 3^1 \cdot 3 \\
3^1 &= 3
\end{aligned}
$$

Siempre que definamos una sucesión recursiva, tenemos que considerar que el proceso debe tener un tope inferior, es decir, un valor para el cual se termine el proceso recursivo. Esto es muy importante cuando utilizamos una computadora para hallar un valor en un proceso recursivo, puesto que la memoria de la computadora tiene que guardar cada nivel de recursividad, de no definir un tope para el proceso, la memoria de la computadora se llena.

Observemos que en el capítulo anterior, utilizamos un proceso recursivo al definir el método de menores para el cálculo de un determinante; ya que para hallar el valor del determinante de una matriz de orden n, es necesario calcular antes el determinante de una matriz de orden $n-1$.

Ejemplo:

Consideremos
$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ donde $u_1 = 1$ y $u_2 = 1$
entonces
$u_4 = u_3 + u_2$
$u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$
ahora substituimos hacia atrás (nivel más arriba de recursividad)
$u_4 = 2 + 1 = 3$
Calculando los primeros 8 términos de la sucesión
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

Esta sucesión es conocida como la sucesión de Fibonacci, en honor del matemático italiano Leonardo de Pisa (mejor conocido como Fibonacci); y describe la cantidad de descendientes de una pareja de conejos en un cierto número de meses, bajo la condición de que al primer mes de nacidos no pueden tener descendencia, pero a partir del segundo mes dejan prole en forma de una pareja cada mes.

u_4 representa el número de parejas de conejos después de 4 meses

$u_1 = 1$ el primer mes empezamos con 1 pareja de conejos
$u_2 = 1$ la pareja se puede reproducir a partir del segundo mes
$u_3 = 2$ la pareja que había más la nueva pareja que nació

Esta sucesión tiene particularidades muy especiales:

Cuando dividimos u_n entre u_{n-1} obtenemos una aproximación al número dorado, cuanto más grande sea n, mejor será la aproximación. El número dorado es una constante con la cual podemos llevar a cabo divisiones de figuras geométricas . Supongamos que tenemos un segmento de recta que mide 1 de longitud, como muestra la figura:

d es el punto dorado tal que la proporción que guarda todo el segmento con respecto a d es exactamente la misma que la proporción que guarda d con $1-d$, esto es:

$\frac{1}{d} = \frac{d}{1-d} \Rightarrow 1 - d = d^2 \Rightarrow d^2 + d - 1$, aplicamos la fórmula de segundo grado y obtenemos:

$d_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sólo tomamos la parte positiva ya que buscamos una proporción $\Rightarrow d = 0.618$

el resultado de d es un número irracional por lo que no podremos obtener su valor exacto, sino aproximaciones a él y como decíamos anteriormente una forma de hacerlo es utilizando la sucesión de Fibonacci. Esta misma idea puede ser translada a rectángulos e inclusive a triángulos, los griegos utilizaron rectángulos dorados para construir el Partenón.

Esta sucesión está también relacionada con los coeficientes del Binomio de Newton, que será uno de nuestros siguientes temas a estudiar.

7.3 Notación sumatoria

Más adelante estudiaremos algunos problemas en los que será necesario calcular la suma de los n primeros términos de una sucesión. Digamos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Con el fin de no tener que escribir tantos términos utilizaremos la siguiente notación

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

esto se lee como " la suma desde que i vale 1 hasta n de a_i ". A la variable i se le llama el contador o índice y toma todos los valores enteros que hay entre el número que está junto a la i y el número que aparece arriba de la letra griega sigma ($\sum$), a los a_i se les llama términos de la sumatoria, de manera que cada índice se substituye en el término a_i y sucesivamente se van sumado.

Ejemplo:

La suma de los números del 1 al 100 se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100$$

Ejemplo:

Obtener el resultado de la siguiente suma

$$\sum_{j=3}^{7} \frac{j}{(j+1)} = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} = \frac{3457}{840} = 4.11547619$$

Ejemplo:

Podemos escribir un polinomio entero y racional utilizando notación de suma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

TEOREMA DE SUMAS

a) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

b) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

c) $\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$

Para demostrar este teorema de una manera formal debemos usar el principio de inducción matemática, sin embargo nos contentaremos con mostrar que estas propiedades son ciertas usando solamente propiedades conocidas de los números reales.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) = (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n) =$$

$$= \underbrace{a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_n + b_n}_{\text{propiedad asociativa de la suma}} =$$

$$= \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n}_{\text{propiedad conmutativa de la suma}} =$$

$$= \underbrace{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}_{\text{propiedad asociativa de la suma}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

De forma análoga podemos convencernos de la validez de los incisos b) y c).

7.4 Series

Una serie infinita es la suma de todos los términos a_i de una sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ y se denota como

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Consideremos la serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$, el resultado que se obtiene al sumar los primeros 3 términos es 0.875, pero si consideramos la suma de los seis primeros términos, el resultado es 0.984375, si consideramos los primeros 7 la suma es 0.9921875, etc.. Los resultados que se obtienen se van aproximando a 1 y los términos que vamos sumando adicionalmente, se van haciendo cada vez más pequeños, de tal forma que aún sumando un número muy grande de términos, la suma no rebasa el 1. Cuando una serie presenta un comportamiento semejante a este, decimos que la serie converge.

Algunas veces es imposible determinar si conforme se agregan más términos, la serie se acerca a un determinado valor. En estos casos decimos que la serie es divergente.

La series se presentan en muchos procesos matemáticos como lo son por ejemplo el cálculo del número π y el cálculo del número e. El cálculo del número π, que tanto preocupó a los griegos se puede aproximar tanto como se desee usando la serie

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \ldots$$

No podemos obtener el valor exacto ya que por ser un número irracional tiene infinito número de cifras decimales, pero nos podemos acercar a su valor exacto mediante la suma cada vez más grande de sumandos.

Cuando tomamos sólo una parte de la serie, decimos que tenemos una **suma parcial**.

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{\text{suma parcial}} + a_5 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

esta suma la denotaremos por S_4, que significa que estamos sumando los primeros 4 elementos de la serie. Del mismo modo podemos denotar S_5, S_6, etc.

7.5 Progresiones aritméticas

Decimos que los términos de una sucesión están en progresión aritmética, si cada término de la sucesión se puede obtener a partir de sumar una constante al término anterior

$$a_n = a_{n-1} + d$$

y a d se le llama por razones obvias $d = a_n - a_{n-1}$ la **diferencia** de la progresión aritmética.

Ejemplo:

$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots$

Por cierto que esto del término anterior lo relacionamos inmediatamente con las *sucesiones recurrentes* (recordar el ejemplo de los conejos), y es que de hecho las progresiones aritméticas son un caso particular de las sucesiones recurrentes.

De modo que en general, una progresión aritmética se puede expresar como

$$a_1\ ,\ a_1 + d\ ,\ (a_1 + d) + d\ ,\ ((a_1 + d) + d) + d\ ,\ \ldots$$

Es claro que el 2º término es $a_1 + d$, el 3º es $a_1 + 2d$, el 4º es $a_1 + 3d$, etc.

Tratemos de encontrar una fórmula que describa el n-ésimo término de una progresión aritmética sin ser una fórmula recursiva como la fórmula $a_n = a_{n-1} + d$

$$\underbrace{a_1}_{1^{\underline{o}}}, \underbrace{a_1+d}_{2^{\underline{o}}}, \underbrace{a_1+2d}_{3^{\underline{o}}}, \underbrace{a_1+3d}_{4^{\underline{o}}}, \underbrace{a_1+4d}_{5^{\underline{o}}}, \ldots, \underbrace{a_1+(n-1)d}_{n-\acute{e}simo}, \ldots$$

número de término

Si $d > 0$ decimos que la progresión es creciente (ya que los términos se hacen cada vez más grandes) y si $d < 0$ decimos que la progresión es decreciente (los términos se hacen cada vez más pequeños).

El problema de progresiones más antiguo que se conoce, es el de la repartición de pan, registrado en el papiro egipcio de Rind. Este papiro fue escrito 2000 años antes de nuestra era y en realidad se trata de una copia de otra obra matemática aún más antigua [6]. El problema dice así:

> "Entre cinco personas se repartieron cien medidas de trigo, de tal suerte que la segunda recibió más que la primera tanto como le correspondió a la tercera más que a la segunda, a la cuarta más que a la tercera y a la quinta más que a la cuarta. Además, las dos primeras obtuvieron siete veces menos que las tres restantes. ¿Cuánto correspondió a cada uno? "

La respuesta la podemos obtener a través de las sumas de la sucesión de lo recibido por las 5 personas, pero primero introduzcamos una notación adecuada.

Supongamos que t es la cantidad de trigo que le tocó a la primera persona y que d es la diferencia común , entonces

$$\underbrace{t}_{1^{\underline{a}}}, \underbrace{t+d}_{2^{\underline{a}}}, \underbrace{t+2d}_{3^{\underline{a}}}, \underbrace{t+3d}_{4^{\underline{a}}}, \underbrace{t+4d}_{5^{\underline{a}}}$$

número de persona

sabemos que originalmente haba cien medidas de trigo

$t + (t + d) + (t + 2d) + (t + 3d) + (t + 4d) = 100$

$5t + 10d = 100$

y también sabemos que las dos primeras personas obtuvieron siete veces menos que las tres restantes

$7(t + (t + d)) = (t + 2d) + (t + 3d) + (t + 4d)$

$7(2t + d) = 3t + 9d$

$11t - 2d = 0$

tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} 5t + 10d = 100 \\ 11t - 2d = 0 \end{cases}$$

Si lo resolvemos, resulta que $t = 1\frac{2}{3}$ y $d = 9\frac{1}{6}$
Así que el trigo fué repartido en la siguiente forma:

$$1\frac{2}{3} \quad , \quad 10\frac{5}{6} \quad , \quad 20 \quad , \quad 29\frac{1}{6} \quad , \quad 38\frac{1}{3}$$

7.5.1 Suma parcial de una progresión aritmética

Hubo una vez un maestro que desesperado ante el comportamiento de sus alumnos de primaria, les ordenó que sumaran los números del 1 al 100, i. e. les pidió la suma parcial de los primeros cien términos (S_{100}) de la sucesión aritmética en la que
$a = 1$ y $d = 1$.

Apenas empezaba a gozar de las horas que tendría de silencio, cuando uno de sus alumnos, Karl Gauss, contestó correctamente el resultado de la suma.

Gauss había escrito los números del 1 al 100 2 veces, una vez en orden ascendente y otra en orden descendente; y se dió cuenta de que la suma era siempre igual.

$$\left.\begin{array}{ccccc} 1 & + & 100 & = & 101 \\ 2 & + & 99 & = & 101 \\ 3 & + & 98 & = & 101 \\ 4 & + & 97 & = & 101 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 99 & + & 2 & = & 101 \\ 100 & + & 1 & = & 101 \end{array}\right\} \quad 100 \text{ veces}$$

Visto de este modo, el resultado era fácil de obtener, el 101 se repetía 100 veces, entonces 100·101, pero los números habían sido tomados dos veces en lugar de una sola vez, esto se resolvía dividiendo entre 2. Finalmente

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

El método que utilizó Gauss para hallar la suma, sirve para encontrar la suma de los n-primeros términos de cualquier progresión aritmética.

$$\begin{array}{rlllll} & S_n = & a_1 & +(a_1 + d) & + \dots & +(a_1 + (n-1)d) \\ + & S_n = & (a_1 + (n-1)d) & +(a_1 + (n-2)d) & + \dots & +a_1 \\ \hline & 2S_n = & 2a_1 + (n-1)d & +2a_1 + (n-1)d & + \dots & +2a_1 + (n-1)d \end{array}$$

$$2S_n = n(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \tfrac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{\text{n-ésimo término}}\right) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Volvemos al procedimiento de Gauss, la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es igual a la suma del primer término más el último, multiplicada por el número de términos que se tomen en la suma, finalmente dividimos entre dos.

Ahora bien, hemos encontrado una fórmula para hallar el valor de la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética, pero no hemos demostrado que esta sea cierta. Para demostrar su certeza debemos usar el principio de inducción matemática, ya que se trata de una fórmula que depende de los números naturales.

Proposición

La suma parcial de los n-primeros términos de una progresión aritmética es $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Demostración:

i) *P. D. que la proposición es verdadera cuando* $n = 1$

$S_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = \frac{2a_1}{2} = a_1$, *que en efecto la suma parcial 1 está formada sólo por el primer sumando*
por lo tanto la prosición es cierta para $n = 1$.

ii) *Hipótesis de inducción:*

Suponemos cierto que la proposición se cumple para $n = k$, *es decir, suponemos cierto que*
$S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k)$.

iii) *P.D. que la proposición es cierta para* $n = k + 1$

$$S_{k+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_k}_{S_k} + a_{k+1} =$$

por hipótesis de inducción sabemos que $S_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k)$. *entonces, substituyendo esto en la expresión anterior tendremos:*

$$S_{k+1} = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) + a_{k+1} = \frac{k(a_1 + a_k) + 2a_{k+1}}{2}$$

también sabemos que $a_{k+1} = a_1 + (k + 1 - 1)d = a_1 + kd$, *puesto que se trata de una progresión aritmética entonces*

$$S_{k+1} = \frac{k(a_1+a_k)+2(a_1+kd)}{2} = \frac{ka_1+ka_k+a_1+a_1+kd+kd}{2} = \frac{k(a_1+a_k+d)+(a_1+a_1+kd)}{2} = *$$

*recordemos que la forma de escribir recursivamente el **término** a_{k+1} es $a_k + d$ y también $a_1 + kd = a_{k+1}$*

$$* = \frac{k(a_1+a_{k+1})+(a_1+a_{k+1})}{2} = \frac{(a_1+a_{k+1})(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(a_1+a_{k+1})}{2}$$

luego por el Principio de Inducción Matemática si la fórmula es cierta para $n = 1$, por hipótesis es cierta para $n = k$ y también resulta ser cierta para el siguiente $n = k + 1$, entonces será cierta para todos los números naturales n. Esto significa que para todo número natural n se cumple:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \;\square$$

7.6 Progresiones geométricas

Decimos que los términos de una sucesión están en progresión geométrica, si cada término de la sucesión se puede obtener a partir de multiplicar una constante (común a todos los términos) al término anterior

$$a_n = a_{n-1} \cdot r, \qquad \text{donde} \qquad r \in R$$

Al igual que las progresiones aritméticas, las progresiones geométricas son un caso particular de las sucesiones recurrentes, ya que es posible obtener cualquier elemento simplemente multiplicando por la razón (r) el elemento anterior; y este anterior a su vez se obtiene de multiplicar su anterior término por r y así sucesivamente hasta llegar al primer término que no está definido en función de otro término y hay que darlo como condición inicial conocida.

De modo que una progresión geométrica se puede expresar como

$$a_1 \,,\; a_1 \cdot r \,,\; (a \cdot r) \cdot r \,,\; ((a \cdot r) \cdot r) \cdot r \,,\; \ldots$$

si multiplicamos ahora las razones, la progresión se ve así:

$$\underbrace{a_1}_{1^{\circ}} \,,\; \underbrace{a_1 r}_{2^{\circ}} \,,\; \underbrace{a_1 r^2}_{3^{\circ}} \,,\; \underbrace{a_1 r^3}_{4^{\circ}} \,,\; \underbrace{a_1 r^4}_{5^{\circ}} \,,\; \ldots$$

número de término

En general, es claro que el n-ésimo término de una progresión geométrica está dado por

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Ejemplo:

1, 2, 4, 8, 16, 32, ...
$a_4 = a_3 r \Rightarrow 8 = 4 \cdot 2$
sabemos que se trata de una progresión geométrica puesto que
$\frac{2}{1} = 2 = \frac{4}{2} = 2 = \frac{8}{4} = 2$ etc., que es la llamada razón de la progresión geométrica $\left(r = \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$

En ocasiones es necesario obtener la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}$$

Cuando $r = 1$ notemos la sucesión se convierte en una sucesión constante

$$a_1 \, , \; a_1(1) \, , \; a_1(1)^2 \, , \; a_1(1)^3 \, , \; \ldots$$

entonces la suma parcial S_n

$$S = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1}_{n \text{ veces}} = n a_1$$

Obsérvese que al hacerse n muy grande la sucesión tiende intuitivamente a algo muy grande.

Ahora, hallaremos una fórmula que obtenga el resultado de la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica, cuando la razón es diferente de 1 ($r = 1$), para esto tendremos que utilizar un artificio, multiplicarermos S_n por r

$$S_n r = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

ahora vamos a restar $S_n r$ a S_n

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & S_n = & a_1 & +a_1 r & +a_1 r^2 & +\ldots & +a_1 r^{n-2} & +a_1 r^{n-1} & \\ - & S_n r = & & +a_1 r & +a_1 r^2 & +a_1 r^3 & +\ldots & +a_1 r^{n-1} & +a_1 r^n \\ \hline & S_n - S_n r = & a_1 & & & & & & -a_1 r^n \end{array}$$

$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n) \Rightarrow$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

Claramente $r \neq 1$, de lo contrario el denominador toma el valor de cero, lo cual no es válido.

Dado que la fórmula obtenida depende del número natural n, entonces es necesario utilizar el principio de inducción matemática para demostrar que la fórmula que hemos obtenido es cierta.

P.D. Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ es una progresión geométrica, entonces

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad , \text{con } r \neq 1$$

<u>Demostración:</u>

i) *P.D. que la proposición es cierta para $n = 1$*

$S_1 = a_1$ por definición de suma parcial, mientras que por la fórmula también $S_1 = \frac{a_1(1-r)}{1-r} = a_1$, lo cual comprueba la fórmula para $n = 1$.

ii) *Suponemos cierto que la proposición se cumple para $n = k$, i.e., suponemos que*

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = \frac{a_1(1-r^k)}{1-r} \longrightarrow \textit{Hipótesis de inducción}$$

iii) *P. D. que la proposición se cumple para $n = k+1$, i.e., por demostrar que*

$$S_{k+1} = \frac{a_1(1-r^{k+1})}{1-r}$$

$$S_{k+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k}_{\frac{a_1(1-r^k)}{1-r} \text{ según la hipótesis de inducción}} + a_{k+1} = \frac{a_1(1-r^k)}{1-r} + a_{k+1} =$$

$$= \frac{a_1(1-r^k) + a_{k+1}(1-r)}{1-r}$$

como se trata de una progresión geométrica $a_{k+1} = a_1 r^k$

$$= \frac{a_1(1-r^k) + a_1 r^k(1-r)}{1-r} = \frac{a_1((1-r^k) + r^k - r^{k+1})}{1-r} = \frac{a_1(1-r^k + r^k - r^{k+1})}{1-r} =$$

$= \frac{a_1(1-r^{k+1})}{1-r}$ *que sería la forma que toma la fórmula para $n = k+1$*
y eso era lo que queríamos demostrar
por lo tanto concluimos que la proposición es verdadera para toda $n \in N$ $\square$

Otro antiguo problema de progresiones geométricas (probablemente de hace 2000 años) es el de la recompensa que pidió Lahur Sessa, por haber inventado el juego del ajedrez, al triste rey Iadava de la provincia de Taligana en la India.

El rey Iadava se sintió tan maravillado ante el juego, que había conseguido aliviar sus angustias que ofreció a Sessa cualquier recompensa que este deseara. Sessa pidió su recompensa en granos de trigo; un grano de trigo por la primera casilla del tablero del ajedrez, dos por la segunda, cuatro para la tercera, ocho para la cuarta, y así doblando sucesivamente hasta la sexagésima casilla del tablero.

Inicialmente tanto el rey como sus súbditos rieron de tan ridícula petición, pero después de largas horas en que los algebristas trataron de calcular la cantidad total de trigo, se dieron cuenta que sembrados todos los campos de la India, no darían en dos mil siglos la cantidad de trigo necesaria para pagar la recompensa. Sessa declaró públicamente que liberaba al rey de su obligación.

Veamos la progresión

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

se pide doblar la cantidad de trigo de la casilla anterior, entonces resulta claro que se trata de una progresión geométrica con razón $r = 2$ y $a_1 = 1$, entonces la recompensa se traduce en $S_{64} = \frac{(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64} - 1$ que da como resultado un número gigantesco ¡con 20 cifras!, helo aquí:

$$2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615$$

Consideremos ahora, una progresión geométrica, cuya razón en valor absoluto es menor que 1, i. e. $|r| < 1$, o bien $-1 < r < 1$

$$a_1 \, , \, a_1 r \, , \, a_1 r^2 \, , \, a_1 r^3 \, , \, \ldots$$

es claro que como $|r| < 1$ entonces los términos van siendo cada vez más pequeños, visualicemos esto con un ejemplo:

$a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ la progresión queda como:

$1, 1 \cdot \frac{1}{2}, 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2, 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3, 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4, \ldots$

y si seguimos obteniendo términos, éstos serán cada vez más pequeños, ya que el denominador es cada vez más grande.

Lo anterior nos induce a pensar que si los términos que vamos agregando a la progresión se hacen cada vez más pequeños, entonces la suma de los términos debe ser convergente.

Como ya sabemos $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$, y considerando que $|r| < 1$ podemos calcular fácilmente

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a_1(1 - 0)}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r},$$

ya que es claro que si $|r| < 1$, entonces $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$, recordemos el ejemplo de cuando la razón es $\frac{1}{2}$.

Ejemplo:

Un cuadrado mide 4 cm. por lado y su área es de 16 cm . Si se construye una serie de cuadrados cuyos vértices sean los puntos medios de los lados del cuadro anterior, ¿cuánto será la suma de las áreas de todos los cuadrados?

$$\underbrace{4\cdot 4}_{\text{1º cuadro}} , \underbrace{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}_{\text{2º cuadro}} , \underbrace{2\cdot 2}_{\text{3º cuadro}} , \underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}_{\text{4º cuadro}} ,$$

entonces $a_1 = 16, a_2 = 8, a_3 = 4, a_4 = 2$,etc. y $r = \frac{1}{2}$, por lo que la suma total de áreas es igual a $S_\infty = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = 32$

7.7 Interpolación

Interpolar quiere decir encontrar valores intermedios entre dos o más valores (polos). Supongamos que en el mes de enero en un cierto hospital, nacieron 25 niños y en el mes de marzo nacieron 29. Si alguien nos preguntara que si sabemos cuántos niños nacieron en ese hospital en el mes de febrero, probablemente contestaríamos 27. Para dar esta respuesta lo que hicimos fue interpolar un valor entre 25 y 29. Hay distintas formas de interpolar según el número de datos que nos dan, inclusive se pueden utilizar rectas o polinomios para interpolar.

Por ejemplo para interpolar linealmente entre dos puntos lo que hacemos es unirlos por medio de una línea recta, obtenemos la ecuación de dicha línea y entonces podemos tener el valor que toma la función para cualquier punto intermedio

En esta sección estudiaremos cómo interpolar utilizando progresiones.

7.7.1 Interpolación de medios aritméticos

Los términos que están entre dos términos de una progresión aritmética se llaman **medias aritméticas** entre los términos dados.

Ejemplo:

Interpolar tres medios aritméticos entre 2 y 22

$2, \_\_, \_\_, \_\_, 22$

como nos piden medios aritméticos, sabemos que lo que se pide es que los tres términos que buscamos, formen una progresión aritmética considerando también los dos términos que nos dieron
$2, 2+d, 2+2d, 2+3d, 22$
pero sabemos que $22 = 2 + 4d$, entonces
$d = \frac{20}{4} = 5$ la progresión queda como :

$$2, 7, 12, 17, 22$$

7.7.2 Interpolación de medios geométricos

Los términos que están entre dos términos de una progresión geométrica se llaman **medias geométricas** entre los términos dados.

Ejemplo:

Insertar el número dado de medios geométricos reales y escribir la progresión finita resultante.

a) dos entre 1 y 27
$1 , \_\_ , \_\_ , 27 \Rightarrow 1, 1 \cdot r, 1 \cdot r^2, 1 \cdot r^3$
pero sabemos que $1 \cdot r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$
finalmente la progresión queda como
$1, 3, 9, 27$

b) dos entre m^2 y m^{14}
$m^2 , \_\_ , \_\_ , m^{14} \Rightarrow m^2 , m^2 \cdot r , m^2 \cdot r^2 , m^2 \cdot r^3$
pero sabemos que $m^2 \cdot r^3 = m^{14} \Rightarrow r = \sqrt[3]{m^{12}} = m^4$ finalmente la progresión queda como m^2, m^6, m^{10}, m^{14}

8. ANÁLISIS COMBINATORIO

8.1 Técnicas de conteo

El estudio del análisis combinatorio consiste en contar los elementos que pertenecen a un conjunto. En particualr nos van a interesar los conjuntos que contienen a todos los resultados posibles de un experimento. Por ejemplo contar el número de intentos que tendríamos que hacer para abrir una caja fuerte cuya "combinación" no conocemos. Para ayudarnos a resolver este tipo de problemas no existe una fórmula general por lo que se hace necesario aplicar diferentes técnicas de conteo según el tipo de problema; aunque existen problemas cuya única forma de resolver es contando uno por uno los elementos del conjunto.

Dichas técnicas de conteo son:

- Listar todos los resultados

  Ejemplo:

  Listar todos los posibles resultados que obtenemos al lanzar dos monedas

  $\{(águila, sol), (águila, águila), (sol, sol), (sol, águila)\}$

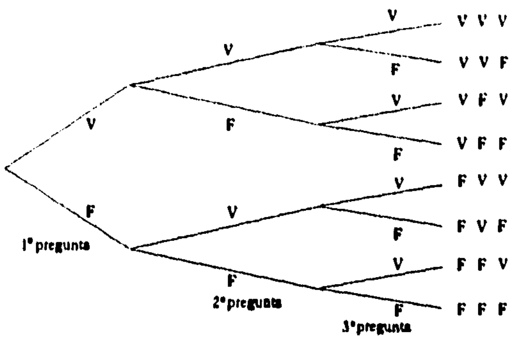
  En total tenemos 4 resultados posibles, claro está que elaborar una lista así no sería posible si el conjunto de resultados fuera mucho mayor.

- Diagramas de árbol
  Esto se hace gráficamente y es por ello que es un método incoveniente cuando se tiene un número muy grande de resultados.

  Ejemplo:

  Un estudiante presenta un examen de tres preguntas del tipo verdadero-falso. Dibujaremos un diagrama de árbol para las tres preguntas del examen con el fin de contar las opciones posibles de respuestas.

  Como el estudiante tiene dos opciones para cada pregunta verdadero-falso, el árbol presenta dos ramas para cada pregunta.



El número de posibles resultados es 8.

- Fórmulas matemáticas
  - Principio de multiplicación.
  - Permutaciones
  - Combinaciones

8.2 Principio fundamental del análisis combinatorio

Si para efectuar un experimento se necesita realizar una primera operación de n_1 maneras diferentes y continuando el procedimiento podemos realizar una segunda operación de n_2 maneras diferentes y luego una tercera operación de n_3 maneras diferentes, y así sucesivamente, entonces el número de maneras en que pueden realizarse tales operaciones será el producto $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$

Ejemplo:

¿Cuántas placas diferentes para automóviles particulares podría haber en la Ciudad de México?

Dichas placas se componen de 3 números y 3 letras. El conjunto de números se compone de 10 dígitos del 0 al 9 y el conjunto de letras excluyendo a la ñ consta de 26 letras. Entonces para formar las placas tenemos que el primer dígito puede aparecer de 10 maneras distintas, lo mismo para el segundo y tercer dígito, mientras que cada una de las letras pueden aparecer de 26 formas distintas, el esquema queda descrito así:

$$\underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\quad \underline{26}\ \underline{26}\ \underline{26}$$

Es claro que el número de posibilidades en cada lugar para la placa se multiplica, por ejemplo si tenemos una placa que comienza con

$$987\quad BF\_$$

la última letra podría ser de 26 formas diferentes por lo que habría 26 placas distintas que tengan este comienzo.

Así, el total de posibles placas en la Ciudad de México sería de

$$10\cdot 10\cdot 10\cdot 26\cdot 26\cdot 26 = 17{,}576{,}000$$

A problemas como este se les llama **ordenaciones con repetición**, ya que disponemos los elementos de un conjunto de una manera ordenada. Decimos ordenada ya que tomamos en cuenta el orden en el que aparecen los elementos del conjunto, considerando el ejemplo anterior, es diferente la placa

$$425\quad HJF \quad \text{que la placa} \quad 452\quad HJF.$$

Sin embargo nuestro cálculo para el número de placas de automóviles en la Ciudad de México, tiene todavía algunos problemas, como es el que las placas con números o letras repetidas están reservadas para vehíchulos oficiales o diplomáticos.

Entonces para escoger el primer dígito del número podemos escoger entre 10 elementos distintos: $\underline{10}$, en cambio para escoger el segundo dígito ya sólo tenemos 9 elementos para escoger puesto que uno de los 10 dígitos que teníamos al principio se quedó en el primer lugar y ese dígito no se puede repetir, entonces el número de tres cifras se formaría :

$$\underline{10}\ \underline{9}\ \underline{8}\qquad \text{y las letras}\qquad \underline{26}\ \underline{25}\ \underline{24}$$

Por lo que el total de placas sería : $10\cdot 9\cdot 8\cdot 26\cdot 25\cdot 24 = 11{,}232{,}000$

A este tipo de ordenaciones sin repetición se les conoce como **permutaciones**.

8.3 Factorial

El factorial de cualquier número natural n denotado por $n!$, es igual al producto de todos los números naturales desde el 1 hasta n

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

por ejemplo

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Calcular el factorial de un número es un proceso recursivo, veámoslo con un ejemplo

$6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!}$

pero

$5! = 5 \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{4!}$

y así sucesivamente hasta llegar a $1!$ que por definición es igual a 1. También por definición se toma $0! = 1$.

Su fórmula recurrente, si tomamos a $f(n) = n!$, será :

$$f(n) = n \cdot f(n-1)$$

8.4 Permutaciones

8.4.1 Fórmula para el número de permutaciones de n objetos tomados de n en n

Supongamos que vamos a acomodar 5 personas en una banca, es decir, tenemos 5 elementos y los vamos a acomodar en grupos de 5

el total de maneras diferentes de hacerlo según el principio de la multiplicación sería:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

esto es lo mismo que 5! (cinco factorial).

Así el número de permutaciones de n elementos tomados de n en n (denotadas por P_n) es igual a n!.

$$P_n = n!$$

8.4.2 Fórmula para el número de permutaciones de n objetos tomados de r en r

Usaremos la notación $_nP_r$ para referirnos al número de diferentes permutaciones que se pueden formar a partir de un conjunto con n elementos tomados de r en r. Es evidente que $r \leq n$ puesto que tomaremos los n elementos de un conjunto para formar grupos de r elementos.

Supongamos que en una escuela la generación más adulta que consta de 98 estudiantes, desea escoger un presidente, un tesorero y un secretario de la generación. ¿De cuántas formas se podrían seleccionar?.

Lo primero que debemos distinguir para resolver este problema es que debemos tomar en cuenta el orden en que serán seleccionados los estudiantes ya que no es lo mismo ser tesorero que presidente. También observemos que los elementos seleccionados no se pueden repetir ya que la persona que sea seleccionada para ser tesorero, por ejemplo no puede ser también secretario. Finalmente notamos que no todos los estudiantes serán seleccionados, de los 98 estudiantes, sólo se escogerán 3.

98	97	96
presidente	tesorero	secretario

Entonces el número de permutaciones diferentes sería de 98·97·96 = 912,576

En general las permutaciones de n elementos tomados de r en r vienen dadas por

$$_nP_r = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}_{r \text{ factores}}$$

En el caso de los 98 estudiantes el problema se resolvería:

$$_{98}P_3 = 98 \cdot (98-1) \cdot (98-2) = 98 \cdot 97 \cdot 96 = 912,576$$

También podemos expresar la fórmula para $_nP_r$ usando la notación factorial.

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-r+1) \cdot (n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-r+1)$$

Así:

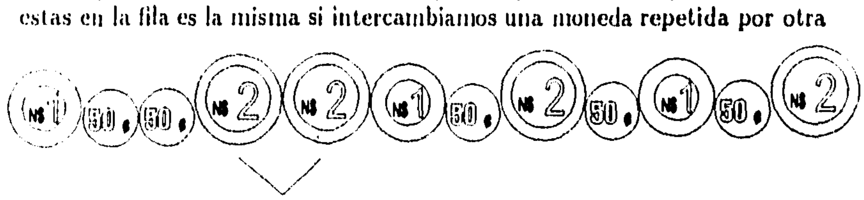
$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

8.4.3 Casos especiales de las permutaciones

Permutaciones en conjuntos con elementos repetidos

Hasta el momento hemos estudiado permutaciones sobre conjuntos que contienen elementos diferentes, pero en ocasiones nos encontramos con conjuntos, donde existen elementos repetidos y queremos calcular el total de formas de acomodar los elementos del conjunto.

Por ejemplo, pensemos en un conjunto que contiene 5 monedas de \$.50, 3 monedas de \$1 y 4 de \$2; en total tenemos 12 monedas ¿de cántas formas distintas las podríamos acomodar en línea recta?. Si las 12 monedas fueran diferentes entre sí, entonces el total de formas en que se podrían acomodar sería de 12!, pero en realidad hay monedas repetidas y la forma en que se acomoden estas en la fila es la misma si intercambiamos una moneda repetida por otra



Si las monedas de \$.50 fueran diferentes tendrían 5! formas de acomodarse entre sí, de igual modo sucedería con las monedas de \$1 que tendrían 3! maneras de acomodarse y las de \$2 tendrían 4!. Recordemos ahora que las posibilidades de acomodo se multiplican, por lo que si queremos eliminar las maneras en que se acomodan los elementos iguales, lo que tenemos que hacer es dividir el total entre las posibilidades de los elementos iguales. Así el total de formas diferentes en que se pueden colocar las monedas serían:

$$ \frac{12!}{5!\cdot 3!\cdot 4!} = 27,770 $$

Este caso especial para las permutaciones no se presenta necesariamente si el conjunto cuenta con elementos repetidos, puede suceder que por alguna razón nos convenga tomar ciertos elementos del conjunto como si fueran iguales.

Consideremos el conjunto de todas nuestras cintas musicales, y supongamos que las queremos acomodar en un estante. El total de posibles formas de hacerlo sería:

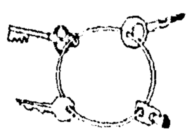
$$ P_n = n! \qquad , \text{ donde n es el número de cintas} $$

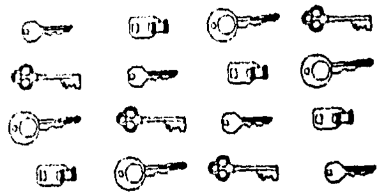
Pero lo más cómodo para localizar nuestras cintas sería que las clasificaramos de acuerdo al tipo de música que contiene cada cinta. Es evidente que no tendremos cintas repetidas pero sin embargo lo que nos interesa es que todas las cintas de rock pesado, por ejemplo, estén juntas y **no nos interesa el orden que estas guarden entre sí.** De modo que consideremos que si tenemos por ejemplo, en total 15 cintas de las cuales 3 son de rock pesado, 6 de new age y 6 de jazz, entonces el total de formas en que podemos acomodar nuestras cintas cintas musicales tomando en cuenta sólo el tipo de música sería :

$$\frac{15!}{3!6!6!} = 420,420$$

Permutaciones circulares

Si deseamos acomodar los n elementos de un conjunto en forma circular debemos tomar en cuenta que existen n formas en las que si los elementos estuvieran en una fila la disposición sería diferente, pero circularmente es la misma. Veámoslo auxiliándonos del dibujo de un llavero circular con 4 llaves distintas :





De modo que el número de maneras en que se pueden colocar n elementos diferentes en una circunferencia es igual a $(n-1)!$

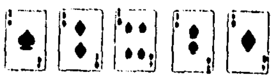
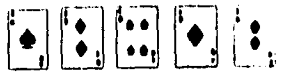
8.5 Combinaciones

Las permutaciones de n elementos tomados de r en r consideran que una vez que han sido seleccionados los r elementos del conjunto, estos pueden formar acomodos diferentes cambiando el orden de los elementos , en cambio **en las combinaciones lo único que importa son los elementos seleccionados sin tomar en cuenta el orden en que estos se presenten.**

Dicho de otro modo :

Una combinación de r elementos del conjunto S de n elementos ($n \geq r$), es un subconjunto de S que contiene r elementos distintos, sin importar el orden en que se escogen.

Si estamos jugando al pókar, por ejemplo, lo que nos interesa es la jugada que nos sale y no nos sirve de nada el orden en que salen las cartas, es decir para los fines del juego es exactamente lo mismo la jugada

 que la jugada 

Es claro que similarmente al proceso de permutaciones en conjuntos con elementos repetidos lo que debemos hacer para obtener el número de combinaciones de n elementos tomados de r en r, es dividir las permutaciones entre r! que sería el número de posibles acomodos que tendrían los r elementos una vez que han sido seleccionados del conjunto de n elementos.

Volviendo al ejemplo de las cartas en el juego de pókar una vez que se seleccionaron las 5 cartas del total de las 52 con que cuenta una baraja debemos eliminar de las permutaciones el número de posibles acomodos de las 5 cartas seleccionadas entre sí, esto sería :

$$\frac{{}_{52}P_5}{5!} = \frac{\frac{52!}{(52-5)!}}{5!} = \frac{\frac{52!}{47!}}{5!} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{5!} = 2,598,960$$

En general el número de combinaciones de n elementos tomados de r en r, denotado por ${}_nC_r$ o bien por $\binom{n}{r}$ es igual a

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \qquad (1)$$

Ejemplo:

¿De cuántas formas se pueden seleccionar tres representantes de una generación de 72 alumnos?

Claramente en este caso no importa el orden de las tres personas seleccionadas, entonces el resultado es:

$$ {}_{72}C_3 = \frac{72!}{(72-3)!\cdot 3!} = \frac{72!}{69!3!} = \frac{72\cdot 71\cdot 70}{3\cdot 2\cdot 1} = 59,640$$

Cuando $r = n$ el número de posibles combinaciones sería 1, ya que sólo hay un subconjunto que contiene a todos los elementos del conjunto (impropio) :

$$ {}_nC_n = \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

También es importante notar que ${}_nC_0 = 1$, ya que si consideramos a las combinaciones como subconjuntos, entonces el número de subconjuntos que no contiene ningún elemento (vacío) es 1.

9. EL TEOREMA DEL BINOMIO DE NEWTON

9.1 Fórmula binomial

En algunos procesos matemáticos se hace necesario elevar a una cierta potencia n dos expresiones matemáticas a y b que se están sumando algebraicamente $(a+b)^n$. El teorema del binomio de Newton nos proporciona una fórmula para expandir $(a+b)^n$. Para ayudarnos a entender cómo se obtiene dicha fórmula, calcularemos explícitamente $(a+b)^n$ cuando n (la potencia) es un entero positivo :

$$\begin{array}{rcccl}(a+b)^1 & = & a+b & = & a+b \\ (a+b)^2 & = & (a+b)(a+b) & = & a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 & = & (a+b)^2(a+b) & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a+b)^4 & = & (a+b)^3(a+b) & = & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\ (a+b)^5 & = & (a+b)^4(a+b) & = & a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\end{array} \quad ..(1)$$

A partir de las expansiones anteriores observemos que en el desarrollo de $(a+b)^n$:

- el número de términos es uno más que el exponente del binomio,
- el exponente de a es n en el primer término y decrece de uno en uno hasta llegar a 0 en el último término,
- el exponente de b es 0 en el primer término y aumenta de uno en uno hasta llegar a n en el último término,
- todos los términos contienen un producto de la forma a^ib^j donde $i+j=n$,
- después del primer término, el producto del coeficiente del término anterior por el exponente de a y después dividido entre el número de término nos da como resultado el coeficiente del término siguiente.

Es claro que el producto a^ib^j en el r-ésimo término deberá tomar los exponentes:

$$a^{n-(r-1)}b^{r-1}$$

por ejemplo

para $r = 1$(primer término) $\rightarrow a^{n-(1-1)}b^{1-1} = a^n b^0 \quad = a^n$

para $r = 2$(segundo término) $\rightarrow a^{n-(2-1)}b^{2-1} = a^{n-1}b^1 \quad = a^{n-1}b$

para $r = 3$(tercer término) $\rightarrow a^{n-(3-1)}b^{3-1} \quad = a^{n-2}b^2$

Del análisis (1) también podemos escribir los coeficientes para cada término

3(tercer término) $\frac{n(n-1)}{2}$

4(cuarto término) $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}$

5(quinto término) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2}$

entonces el r-ésimo término tendrá el coeficiente

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-2))}{(r-1)(r-2)\ldots 2}$$

Pero el denominador es $(r-1)!$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-2))}{(r-1)!}$$

Entonces llegamos a que la fórmula que buscabamos es la siguiente:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b^1 + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \\ + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-2))}{(r-1)!}a^{n-(r-1)}b^{r-1} + \ldots + \\ + nab^{n-1} + b^n$$

Para los más exigentes podemos ofrecer una demostración rigurosa de este teorema al final del capítulo.

A esta fórmula se le conoce como teorema del binomio de Newton y funciona para cualquier número racional (números positivos, negativos y fraccionarios). Cuando se trate de exponentes negativos o fraccionarios el desarrollo es ilimitado, aunque puede suceder que la serie sea convergente hacia algún valor.

Ejemplo:

Desarrollar $(z+3w)^5$

$(z+2w)^5 =$

$z^5(2w)^0 + 5z^4(2w) + \frac{5\cdot 4}{2!}z^3(2w)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}z^2(2w)^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!}z(2w)^4 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5!}z^0(2w)^5 =$

$= z^5 + 10z^4w + 40z^3w^2 + 80z^2w^3 + 80zw^4 + 32w^5$

o también es posible desarrollarlo en la siguiente forma:

$$(z + 2w)^5 =$$
$$z^5 + 5z^4(2w) + \underbrace{10}_{\frac{5\cdot 4}{2}} z^3(2w)^2 + \underbrace{10}_{\frac{10\cdot 3}{3}} z^2(2w)^3 + \underbrace{5}_{\frac{10\cdot 2}{4}} z(2w)^4 + (2w)^5$$

<u>Ejemplo:</u>

Obtener los cuatro primeros términos en el desarrollo de $(x - y)^{\frac{1}{2}}$.

$$(x - y)^{\frac{1}{2}} =$$
$$x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}(-y) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^{\left(\frac{1}{2}-2\right)}(-y)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^{\left(\frac{1}{2}-3\right)}(-y)^3 +$$
$$\ldots =$$

$$= x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y - \tfrac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}y^2 - \tfrac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}y^3 + \ldots$$

De acuerdo a lo estudiado en el capítulo anterior, correspondiente a análisis combinatorio, observemos que la fórmula para el coeficiente binomial del r-ésimo término:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-2))}{(r-1)!}$$

corresponde a las combinaciones de n tomadas de $r-1$ en $r-1$: ${}_nC_{r-1}$, que usualmente se denota como el número combinatorio $\binom{n}{r-1}$. Esto quiere decir que podemos volver a enunciar el teorema del binomio de Newton en la siguiente forma:

$$(a+b)^n =$$
$$= \binom{n}{0}a^{n-0}b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^3 + \ldots + \binom{n}{r-1}a^{n-(r-1)}b^{(r-1)} + \ldots +$$
$$+ \binom{n}{n}a^{n-n}b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

y la fórmula para el r-ésimo término es

$$\binom{n}{r-1}a^{n-(r-1)}b^{r-1}$$

En el capítulo correspondiente a teoría de conjuntos, sección 2.3, dejamos pendiente la justificación de la afirmación de que el número de subconjuntos que tiene cualquier conjunto es igual a 2 elevado a la cardinalidad de dicho conjunto; y éste es el punto donde podemos explicarnos el por qué, utilizando nuestros conocimientos de análisis combinatorio y del teorema del binomo de Newton.

Si tenemos un conjunto A, el número de subconjuntos con 0 elementos (vacío) sería $\binom{n}{0}$, el número de subconjuntos con 1 elemento $\binom{n}{1}$, con 2 elementos $\binom{n}{2}$ y así sucesivamente hasta llegar a que el número de subconjuntos con n elementos es $\binom{n}{n}$. Entonces el total de subconjutnos del conjunto A es:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Si "disfrazamos" un poco esta suma sin alterar el resultado, tenemos

$$\binom{n}{0}1^{n-0}1^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}1^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}1^2 + \ldots + \binom{n}{n}1^{n-n}1^n$$

Y esto es precisamente el desarrollo binomial de $(1+1)^n = 2^n$.

9.2 Triángulo de Pascal

A partir del cálculo que realizamos en (1) podemos construir un arreglo triangular, llamado triángulo de Pascal, con números que representan los coeficientes del binomio.

$$\begin{array}{l|ccccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
n=1 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
n=2 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
n=3 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
n=4 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
n=5 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
n=6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
n=7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Cada número puede obtenerse a partir de sumar los dos números que están a la izquierda y derecha del renglón anterior, por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc}
1 & & 1 \\
\searrow & & \swarrow \\
& 2 &
\end{array}$$

En el triángulo de Pascal es muy claro observar que los coeficientes binomiales son simétricos a una línea vertical a través del centro, esto quiere decir que cuando tenemos un exponente n par basta con obtener los coeficientes hasta el térmnio $\frac{n}{2}$, ya que a partir de este término los coeficientes se repiten; en caso de que n sea impar basta con obtener los coeficientes hasta el término $\frac{n+1}{2}$.

Las aplicaciones que tiene el teorema del binomio son muchas, principalmente en probabilidad y estadística, sin embargo parece increíble que la simetría que existe en el caracol Nautilus pueda tener algo que ver con los coeficientes binomiales.

En el capítulo correspondiente a sucesiones y series, estudiamos los números de Fibonacci, arreglemos ahora los coeficientes binomiales en la siguiente forma:

$$
\begin{array}{lllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}
$$

La suma de los números que se encuentran sobre cada una de las líneas diagonales, es un número de Fibonacci

$$
\begin{array}{lllllllll}
 & & 1 \\
 & \swarrow & 1 & 1 \\
1 & \swarrow & 1 & 2 & 1 \\
1 & \swarrow & 1 & 3 & 3 & 1 \\
2 & \swarrow & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
3 & \swarrow & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
5 & \swarrow & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
8 & \swarrow \\
13
\end{array}
$$

9.3 Demostración de la Fórmula del Binomio de Newton para exponentes enteros y positivos

Por inducción en n se puede demostrar que para todos los números naturales n y para todos los números reales (incluso complejos) a y b diferentes de 0:

$$(1) \qquad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

<u>Demostración:</u>

i) *Para $n = 1$ la fórmula* (1) *se transforma en:*

$$(a+b)^1=\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}a^{1-i}b^i$$
pero
$$(a+b)^1=a+b;$$
$$\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}a^{1-i}b^i=\binom{1}{0}a^{1-0}b^0+\binom{1}{1}a^{1-1}b^1=a+b$$

ii) *Supongamos que para cierto número natural $n>1$ es verdadera la fórmula* (1).

iii) *Demostremos que entonces es válida la fórmula* (1) *para* $n+1$:

$$(a+b)^{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^{(n+1)-i}b^i$$

En efecto:

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n \overset{\text{Hip. de inducción}}{=} (a+b)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$
$$=a\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i+b\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n+1-i}b^i+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^{i+1}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n+1-i}b^i+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k$$
$$=a^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^{n+1-i}b^i+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k+b^{n+1}$$
$$=a^{n+1}+\sum_{i=0}^{n}\left[\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right]a^{n+1-i}b^i+b^{n+1}$$
$$=a^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}a^{(n+1)-i}b^i+b^{n+1}$$
$$=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^{(n+1)-i}b^i$$

En la penúltima igualdad se usó la idea de que cada número del triángulo de Pascal puede obtenerse a partir de la suma de los números que están a la izquierda y derecha del renglón anterior.

De lo obtenido, por el Principio de Inducción, se sigue que la fórmula (1) *es cierta para todos los números naturales n.* □

10. PROBABILIDAD

10.1 Experimento aleatorio, ensayos, sucesos y espacio muestral

Todos los días y a cada instante nos enfrentamos con situaciones prácticas en que nos resulta imposible predecir con exactitud cuál será el resultado de una observación en particular. Por ejemplo: si será hombre o mujer la próxima persona que haga una llamada telefónica a nuestra casa; o si será par o impar el primer dígito de la placa del próximo automóvil que pase frente a nosotros.

A escala más general resulta imposible predecir con exactitud el valor de un indicador bursátil o la proporción de compradores de un producto dado.

Aunque habitualmente nos intriga más el hecho de que ningún doctor en Física sea capaz de predecir con exactitud de qué lado caerá una moneda lanzada al aire.

También es imposible predecir con exactitud cuál será el sexo de un hijo, porque el espermatozoide fecundador puede portar el cromosoma sexual 'X' ó 'Y' y cientos de miles de cromosomas se aproximan al óvulo, pero uno solo de estos (al azar) efectuará la fecundación.

De modo que un **experimento aleatorio** es una acción bien definida en cuanto a sus posibles resultados, pero totalmente impredecible en cuanto a cuál de estos resultados ocurrirá en una ejecución dada. Llamaremos **ensayo** a una realización individual aislada del experimento aleatorio. A su vez se denomina **suceso** a cada uno de los resultados posibles del experimento.

Así, por ejemplo, la inspección de contaminación de automóviles sorteados constituye un experimento aleatorio, la inspección de un sólo automóvil, constituye un ensayo del experimento aleatorio "inspeccionar automóviles sorteados", y las calificaciones de "no contamina", "regresar después de afinación" y "rechazado por completo", constituirián sucesos posibles asociados a la realización del ensayo (inspección de un automóvil).

En la vida cotiana distinguimos entre sucesos seguros (ciertos o programados), o eventuales (cuando pueden o no ocurrir). Por esto debe evitarse la actual costumbre de usar el término "evento" para referirse a algo programado.

En el capítulo 2, afirmamos que el desarrollo de la teoría de conjuntos había facilitado el estudio de diversas áreas de la matemática, la teoría de la probabilidad es una de ellas.

El **espacio muestral S** de un experimento es el conjunto de de todos los resultados posibles del experimento, es decir, todos los diferentes sucesos que pueden ocurrir al realizar el experimento. En muchos casos no es posible conocer todo el espacio muestral.

Ejemplo:

El experimento aleatorio de lanzar un dado al aire, tiene un espacio muestral que contiene 6 sucesos posibles (los 6 lados del dado)

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ejemplo:

En cambio, la proporción del total de televidentes que a determinada hora están mirando un cierto canal es una cantidad que permanece indefinida a menos que se estudiase la totalidad de los televidentes. El experimento aleatorio consiste en llamar por teléfono o tocar en cada puerta y preguntar qué canales se están viendo. El espacio muestral está constituido por todos los canales, pero como existen posibilidad de estar captando canales por antena parabólica o viendo grabaciones, solamente están bien definidos algunos de los sucesos posibles (canales nacionales).

$$S = \{x \mid x \text{ es un canal de televisión}\}$$

Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral. Es decir, es un subconjunto del conjunto que contiene todos los posibles resultados de un experimento. De modo que el espacio muestral puede considerarse también como integrado por subconjuntos, por ejemplo para el caso del dado, el espacio muestral puede reducirse a los sucesos "par" o "impar"

$$S = \{(x \text{ par}), (x \text{ impar})\}$$

o a tres subconjuntos arbitrariamente definidos:

$$S = \{(x < 2), (2 \leq x < 4), (4 \leq x \leq 6)\}$$

Utilizaremos letras mayúsculas para referirnos a los eventos, por ejemplo, si consideramos que

A :concebir un varón

B :concebir una mujer

y esto se representa de manera compacta

$$S = \{A, B\}$$

Antes de finalizar, es importante señalar que la palabra **estocástico** (de origen griego) se utiliza en la literatura científica como sinónimo de aleatorio (al azar).

10.2 Frecuencia relativa de cierto resultado

Siendo impredecible el sexo resultante de una fecundación en particular, es evidente que si se consideran cientos de miles de nacimientos, la proporción de hombres y mujeres exhibe un valor aproximadamente igual en distintas épocas y regiones. Por esto, afirmamos, que existe "regularidad estadística" en el fenómeno aleatorio de la determinación del sexo de los hijos.

De la misma manera, verificamos que lanzando miles de veces la misma moneda al aire, ambas caras ocurren aproximadamente el mismo número de veces. No podríamos predecir el resultado de un lanzamiento en particular, pero observamos "regularidad estadística" considerando un gran número de repeticiones (ensayos o lanzamientos) del experimento (lanzar la moneda).

Para resumir lo observado, utilizamos la frecuencia relativa (Fr) que es el cociente entre el número de veces (r) en que ocurrió el resultado considerado (una cara o un sexo) entre el número total (n) de ensayos (o repeticiones del experimento)

$$Fr = \frac{r}{n}$$

Si el mismo resultado ocurriese siempre, tendríamos certeza y la frecuencia valdría 1. De la misma manera, a un resultado imposible le correspondería la frecuencia relativa 0.

Ejemplo:

Si se lanzó 10 veces un dado y en tres de éstas, salió la cara '5', podemos expresar lo sucedido de manera compacta utilizando la siguiente notación:
J : salió la cara '5'
$J = \{x = 5\}$
$Fr(J) = \frac{3}{10} = 0.3$

Además de esta frecuencia relativa principal, hay otras tres frecuencias relativas que resultan obvias y que también resumen lo ocurrido:

- como es prácticamente imposible que el dado quede sostenido sobre uno de sus vértices o aristas, es prácticamente seguro que el resultado del lanzamiento será una cara del dado, de modo que la frecuencia relativa de que no se vea ninguna cara sería 0.

  H : ninguna cara
  $H = \emptyset$

  la frecuencia relativa de H resultó ser de 0 veces en 10 lanzamnientos

  $$Fr(H) = \frac{0}{10}$$

- Ahora, si sólo nos fijamos en que salga cara sin importarnos cuál

$$R: \text{salga cara}$$
$$R = \{1,2,3,4,5,6\}$$

la frecuencia relativa de R resultó ser de 10 veces en 10 lanzamientos

$$Fr(R) = \frac{10}{10} = 1$$

- Y finalmente, la frecuencia complementaria de que salga cualquier cara que no sea la 5

$$J: \text{que salga } 5$$
$$\overline{J}: \text{que la cara sea diferente de } 5$$
$$Fr(\overline{J}) = 1 - Fr(J) = \frac{7}{10}$$

10.2.1 Estabilización de la frecuenecia relativa cuando se repite un experimento gran número de veces.

Si estudiamos la frecuencia relativa Fr de ocurrencia de una de las caras de una moneda y vamos repitiendo muchas veces su lanzamiento, la "regularidad estadística" de que hablábamos antes, ahora aparecerá como una tendencia en el valor de la frecuencia relativa. Observemos la figura 10.1.

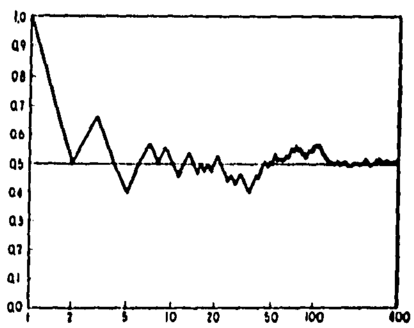


Fig. 10.1 Frecuencia relativa de una cara en una serie de tiradas con una moneda. En el eje de las abscisas se utilizó escala logarítmica.[22]

Al hacer series de cinco lanzamientos la cara considerada de la moneda puede presentarse las cinco veces ($Fr = 1$) o ninguna vez ($Fr = 0$) , pero ocurren con más frecuencia los resultados 2 en 5 ($Fr = 0.4$) y 3 en 5 ($Fr = 0.6$).

Al considerar series de 20 lanzamientos, se constata que la ocurrencia de 20 en 20 ($Fr = 1$) ó de 0 en 20($Fr = 0$) se ha tornado mucho más excepcional que cuando se consideraban series de 5 ensayos por vez .

Sin embargo los resultados que se observan más a menudo son los de alrededor de 10 en 20, es decir la mitad de las veces (Fr cercana a 0.5) se presenta la cara considerada.

Si el experimento se prolongase para abarcar cientos de miles de lanzamientos (muchos científicos se ocuparon realmente de hacerlo en el pasado), el resultado seguiría exhibiendo la misma tendencia: aproximadamente en la mitad de las veces se presentaría la cara considerada.

La constatación generalizada de estos comportamientos conduce a aceptarlos como una característica natural, intrínseca, del Universo físico que habitamos .

Aceptamos que es imposible predecir el resultado de un ensayo aislado del experimento aleatorio, pero confiamos en que si el mismo experimento se repitiese gran número de veces, la frecuencia relativa de uno de sus resultados posibles tendería a un valor bien definido.

Por lo tanto debe quedar entendido que la "regularidad estadística" y la tendencia "a la larga" de la frecuencia relativa de un resultado del experimento es una propiedad empírica como lo es la caída de los cuerpos hacia el suelo; y así como resultaría absurdo decir que los cuerpos se caen porque existe la ley matemática de Newton, también lo sería decir que la regularidad estadística se debe a que existe una ley.

En el campo de la Física y la Química, un ejemplo de comportamiento aleatorio nos es proporcionado por los átomos de elementos radiactivos (radioisótopos). De entre cierta cantidad del elemento, una proporción de los átomos son inestables, por lo que tarde o temprano se van a desintegrar. Pero es totalmente impredecible cuándo. De modo que al estudiarlo, se registran desintegraciones separadas por intervalos irregulares y totalmente al azar.

10.3 La probabilidad de un resultado es su frecuencia relativa esperada "a la larga"

Observando la figura 10.1 vemos que la banda en que se presentan los valores de la frecuencia relativa de un resultado es cada vez más estrecha a medida que se considera mayor número de repeticiones y estamos en condiciones de teorizar en el sentido de que si se repitiese un número indefinidamente grande de veces, la banda se reduciría a un único valor y entonces tendría sentido asignarle un significado preciso al mismo. De aquí surje el formalismo de la probabilidad P de un resultado de un experimento aleatorio:

$$P = \lim_{n \to \infty} Fr$$

pero debe tenerse presente que esto representa una idealización, la frecuencia con que se presentaría el resultado en caso de repetirse un gran número de veces el experimento.

A la luz de lo anterior, será un absurdo (en el que se incurre con frecuencia) el hablar de probabilidad al considerar un ensayo aislado del experimento. Por ejemplo, es absurdo afirmar que "existe una probabilidad de 0.5 de que sea varón el próximo hijo de un pareja dada", ya que solamente es válido afirmar que "cuando se consideran cientos de miles de nacimientos, la mitad de ellos son varones".

En lenguaje científico se distingue entre confianza y probabilidad.

Para enfatizar esta distinción fundamental en Estadística se habla de *probabilidad* para referirse a la regularidad estadística y de *confianza* para referirse al ensayo aislado, a pesar de que en el lenguaje cotidiano se mal utilizan como sinónimos. (en inglés científico también existe la diferencia conceptual entre "confidence" y "probability").

Regresenado al ejemplo de la radiactividad, para cualquier muestra de material radiactivo se comprueba que es aleatorio el intervalo entre desintegraciones, pero que al considerar gran número de estas aparece regularidad. Esto permite expresar la "actividad" como el número de desintegraciones que ocurren por unidad de tiempo (un Curie corresponde a 10^{10} desintegraciones por segundo).

10.3.1 La definición "a priori" de la probabilidad para el caso de experimentos aleatorios totalmente especificados en sus resultados posibles.

Si se conocen todos y cada uno de los resultados posibles del experimento y además confiamos en que ellos se presenten con la misma frecuencia relativa, podemos enunciar la familiar definición de la probabilidad "a priori"como el cociente de el número de casos favorables entre el número de casos posibles.

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Pero debe quedar claro que esta estimación "a priori" de la probabilidad solamente se tornará cierta y adquirirá sentido real, cuando el experimento se haya repetido gran número de veces y el límite de la frecuencia relativa efectivamente coincida con lo previsto.

Claramente esta forma de definir probabilidad sólo es válida cuando no existe preferencia alguna para la ocurrencia de cada uno de los "casos" posibles.

En un juego de azar, como la ruleta, se calcula para cada número una misma probabilidad ($\frac{1}{36}$) suponiendo que su construcción sea perfectamente simétrica; pero si no lo fuese, la frecuencia relativa observada al cabo de muchos miles de lanzamientos, sería mayor que $\frac{1}{36}$ para ciertos números y menor que $\frac{1}{36}$ para otros.

10.4 La probabilidad de diferentes resultados de un mismo experimento aleatorio. Axiomas de la probabilidad

En la Matemática moderna, existe tendencia a la axiomatización y desde este punto de vista la probabilidad se concibe como una cantidad numérica asociada a un suceso y que se supone posee ciertas propiedades básicas, expresadas por medio de axiomas, es decir, proposiciones fundamentales que se expresan y aceptan sin demostración. Sin embargo, la descripción empírica antes vista de la regularidad del comportamiento de los experimentos aleatorios nos ofrece una aproximación más amigable a las propiedades básicas.

A continuación estudiaremos las tres propiedades fundamentales de la probabilidad, sin olvidar que también es posible considerarlas como axiomas.

1. **La probabilidad de un evento A es siempre un número no negativo o cero.**

   Habíamos visto que $Fr(A) = \frac{r}{n}$ y si efectivamente se realizan n repeticiones, es evidente que el número de ocurrencias *(r)* del evento 'A' puede ser a lo más igual a n (si ocurrió en todos los ensayos) y al menos igual a 0 (si no ocurrió ninguna vez).

   Para grandes valores de n (muchas repeticiones), Fr será un valor aproximado a la corrrespondiente probabilidad $P(A)$, y es natural exigir que $P(A)$ satisfaga la misma desigualdad

$$0 \leq P(A) \leq 1 \text{ para toda } A \subset S$$

2. **La probabilidad de un evento cierto es siempre igual a 1.**

   Si el evento considerado incluye a todos los sucesos posibles (espacio muestral) de un experimento, es claro que tal evento ocurrirá en todos los ensayos (repeticiones del experiemnto) y entonces $r = n$ y por lo tanto $Fr = 1$. Escribimos pues

$$P(S) = 1$$

3. **La probabilidad de eventos mutuamente excluyentes es igual a la suma de sus respectivas probabilidades.**

   Si el experimento se repite n veces (ensayos) y el evento 'A' se presenta r_A veces, el evento 'B' ocurre r_B veces y además el evento A no tiene sucesos comunes con el evento B, entonces es evidente que el evento compuesto 'A ó B ' $(A \cup B)$ ocurre $r_{A \cup B} = r_A + r_B$, dividiendo esta igualdad entre n tenemos $Fr(A \cup B) = Fr(A) + Fr(B)$.

Por lo tanto es natural que la probabilidad cumpla la misma ecuación

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Generalizando tenemos que :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ...$$

$$\text{donde } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para toda } i \neq j$$

Ejemplo:

En el caso del dado, la probabilidad del suceso compuesto de que salga 'cara múltiplo de 3', es la suma de los dos resultados individuales que cumplen esta condición (caras '3' y '6'),

A :que salga 3 $\qquad A = \{3\}$

B :que salga 6 $\qquad B = \{6\}$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

como los eventos A y B no tienen sucesos en común, podemos afirmar que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

numéricamente

$P(A) = \frac{1}{6}$ $\qquad P(B) = \frac{1}{6}$ $\qquad P(A) + P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$A \cup B = \{3, 6\}$ $\qquad P(A \cup B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

La probabilidad de que dos eventos A y B ocurran al mismo tiempo se denota como $P(A \cap B)$. Para calcularla es necesario contar únicamente los resultados en los que se cumpla el evento A *y* el evento B.

Ejemplo:

Supongamos que entramos a una venta de 5000 libros usados que están desordenados, de los cuales 2000 tratan de Química, pero solamente 800 incluyen el tema de Cristalografía (otros libros tratan este tema, pero son de física), la probabilidad de libros tomados al azar sean de Química y traten de Cristalografía, viene dada por cociente $\frac{800}{5000}$.

10.4.1 Algunos teoremas sobre probabilidad

En conjuntos utilizamos la notación $\overline{A}$ para referirnos al conjunto complemento del conjunto A, en probabilidad el conjunto A es un evento, por lo que si se nos pide calcular la probabilidad de $\overline{A}$, tendremos que calcular la probabilidad de que no ocurra el evento A.

TEOREMA 1

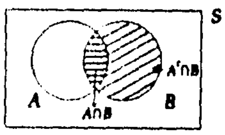
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, donde $\overline{A}$ es el complemento de A con respecto a S.

<u>Demostración:</u> *Sabemos que $A \cup \overline{A} = S$ de modo que $P(A \cup \overline{A}) = P(S)$, pero sabemos que $P(S) = 1$ por el axioma 2, entonces $P(A \cup \overline{A}) = 1$. Como $A \cap \overline{A} = \emptyset$ podemos aplicar el axioma 3 y entonces $P(A \cup \overline{A}) = P(A)+ P(\overline{A})$. En consecuencia $P(A)+ P(\overline{A}) = 1$ y por lo tanto $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$* $\square$.

TEOREMA 2

$$P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B)$$

<u>Demostración:</u> *Auxiliémonos de la figura para observar que:*



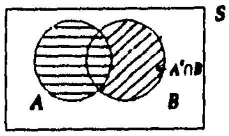
$$B = \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)$$

Entonces $P(B) = P\left(\left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)\right)$. Pero $\left(\overline{A} \cap B\right) \cap (A \cap B) = \emptyset$ por lo que aplicamos el axioma 3 y $P\left(\left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)\right) = P\left(\overline{A} \cap B\right) + P(A \cap B)$ finalmente $P(B) = P\left(\overline{A} \cap B\right) + P(A \cap B)$ $\square$.

TEOREMA 3

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración: *Observemos que* $A \cup B = A \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ *(ver figura)*:



entonces $P(A \cup B) = P\left(A \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right)$ *Como* $A \cap \overline{A} \cap B = \emptyset$ *(eventos mutuamente excluyentes) por el axioma 3:*
$P\left(A \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) = P(A) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$ *y aplicando el teorema 2:*
$P(A) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *y por lo tanto concluimos que*
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ □.

10.5 Probabilidad de un evento condicionado a la ocurrencia de otro evento

Se llama **probabilidad condicional** a la probabilidad de un resultado cuando su ocurrencia está a la vez condicionada a que antes o a la vez ocurra también otro resultado dentro del mismo experimento.

La presentación de una enfermedad llamada Hemofilia proporciona un ejemplo de probabilidad condicionada, ya que para que el nacimiento implique riesgos de enfermedad antes debió cumplirse la condición de que hubiese nacido un varón.

Para referirse a este tipo de probabilidad se utiliza la notación :

$$P(\text{Hemofilia}/\text{varón})$$

El valor numérico de esta probabilidad viene dado por el cociente de la probablidad conjunta del evento "Hemofilia y varón" entre la probabilidad del evento "varón".

Si de la secuencia total de n repeticiones de un experimento aleatorio, consideramos la subsecuencia de r_A veces en que ocurrió el evento A, podemos hallar algunas veces en que también ocurrió otro suceso no excluyente B esto se indica: $r_{A \cap B}$.

La razón $\frac{r_{A\cap B}}{r_A}$ indica el número de veces que ocurrió B condicionado al hecho de que se haya presentado A. Y en forma análoga lo contrario.

Para las frecuencias relativas se tendrá: $Fr(B/A) = \frac{\frac{r_{A\cap B}}{n}}{\frac{r_A}{n}}$ y cuando n sea grande se aproximarán a la probabilidad

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

10.6 Asociación de experimentos aleatorios con y sin condicionamiento recíproco.

Cuando se consideran dos experimentos aleatorios, es fundamental establecer si las probabilidades de los eventos asociados a los mismos, son o no afectadas por el resultado del otro experimento.

Si consideramos familias con dos hijos, el sexo del primero no condiciona el sexo del otro, de la misma manera, el resultado del lanzamiento de una moneda no resulta condicionado por el resultado que hayan dado sus lanzamientos previos.

Por el contrario, si de una misma esfera estamos extrayendo bolillas (como en los sorteos) y no se reponen las bolillas, es evidente que va aumentando la proporción de los que no tuvieron suerte, y por lo tanto cambia su probabilidad de ocurrencia.

Consideraremos por separado ambos casos en los dos numerales siguientes

10.6.1 La probabilidad de coincidencia de dos sucesos aleatorios independientes es igual al producto de sus probabilidaddes individuales.

Consideremos la probabilidad "a priori" de que en familias que tengan dos hijos ambos sean varones. Vimos ya que el sexo de cada uno de ellos se determina en forma independiente en cada fecundación, ya que al óvulo se acercan millones de espermatozoides la mitad aproximadamente portadores del cromosoma "X" y la mitad portadores del "Y" , pero solamente uno de todos ellos (al azar) fecunda.

El espacio muestral consta de cuatro sucesos posibles:

Primer hijo	Segundo Hijo
mujer	mujer
mujer	hombre
hombre	mujer
hombre	hombre

El resultado que nos interesa ("hombre,hombre") es uno de entre cuatro: por lo tanto:

$$P(hombre, hombre) = \frac{1}{4}$$

Pero también vemos que dicho resultado es el producto de multiplicar entre sí las probabilidades de que naciese varón el primer hijo y varón el segundo.

En forma más estricta, el criterio de independencia puede enunciarse de la siguiente manera:

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{y también} \quad P(B/A) = P(B)$$

es decir, que la probabilidad condicional del suceso es igual a su probabilidad incondicional.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

de aquí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Enfatizamos que este resultado sólo es válido si los eventos son independientes.

Ejemplo:

Supongamos que los números presentados en la siguiente tabla dan las probabilidades de que un individuo seleccionado al azar caiga en una de las categorías "fumador " o "no fumador"

	Contrae Cancer	No contrae cancer
Fumador	0.50	0.20
No Fumador	0.10	0.20

Si F es el evento de un individuo seleccionado al azar fume , y C es el evento de que el individuo contraiga cáncer, tenemos que:

$P(F \cap C) = 0.50,\quad P\left(F \cap \overline{C}\right) = 0.20,\quad P\left(\overline{F} \cap C\right) = 0.10,$

$P\left(\overline{F} \cap \overline{C}\right) = 0.20$

y como (ver teorema 2)

$P(F) = P(F \cap C) + P\left(F \cap \overline{C}\right) = 0.7$

$P(C) = P(F \cap C) + P\left(\overline{F} \cap C\right) = 0.6$

vemos entonces que

$P(F \cap C) = 0.5 \neq (0.7)(0.6) = P(F) + P(C)$

de modo que F y C no son eventos independientes.

10.6.2 La probabilidad de coincidencia de dos eventos encadenados entre sí por un condicionamiento probabilístico.

En una bola hay 10 bolillas de las cuales 8 son rojas y 2 negras. La probabilidad de sacar bola roja en un primer sorteo es de $\frac{8}{10} = 0.8$, pero si no se repone a la esfera la bolilla extraída, antes de un segundo sorteo, entonces la probabilidad de sacar "roja" será menor si previamente salió roja.

$$P(roja, roja) = \frac{7}{9} = 0.78$$

por el contrario, si el primer sorteo hubiese dado negra, entonces:

$$P(roja, negra) = \frac{8}{9} = 0.89$$

10.7 La construcción de modelos probabilísticos para representar situaciones de la vida cotidiana, y la utilidad práctica de tales modelos.

En un control de calidad correspondiente a la producción de televisores, de entre 5 de éstos inspeccionados al azar se hallan 3 defectuosos, pero el fabricante de la maquinaria aseguraba que la misma produciría, a lo más, un 10% de defectos. Para decidir si este resultado podría ser debido exclusivamente al azar, (siendo cierto el nivel supuesto de 10%), nos vemos necesitados a construir un modelo probabilístico para saber con qué frecuencia podrían ocurrir resultados como el hallado (3 en 5) si la probabilidad de ocurrencia de televisores defectuosos efectivamente fuese 0.10.

Admitiendo que la ocurrencia de defectos en un televisor no resultase afectada por la calidad de los televisores producidos antes, entonces estaríamos considerando la ocurrencia del evento compuesto : "3 defectuosos y 2 bien" . De acuerdo a lo visto anteriormente tendremos que:

D : televisor defectuoso
B : televisor bueno
$P(D, D, D, B, B) = P(D) \cdot P(D) \cdot P(D) \cdot P(B) \cdot P(B)$
$P(D, D, D, B, B) = [P(D)]^3 \cdot [P(B)]^2$

Pero la secuencia "D, D, D, B, B" es solamente una de las 10 secuencias posibles que satisfacen la condición "3 defectuosos y 2 buenos", ya que lo que nos interesa es el total de defectuosos ocurridos en la muestra y no su orden de presentación.

De acuerdo a lo visto en el capítulo correspondiente a Análisis Combinatorio, el cálculo anterior corresponde al *número de combinaciones* de 5 elementos con 3 repeticiones:

$_5C_3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$

De modo que el modelo probabilístico completo quedaría escrito :

$$P(3D \quad y \quad 2B) = {}_5C_3 \cdot [P(D)]^3 \cdot [P(B)]^2$$

que con nuestros datos será

$$P(3D \text{ y } 2B) = 10 \cdot (0.10)^3 \cdot (0.9)^2 = 10 \cdot 0.001 \cdot 0.81 = 0.008$$

Se concluye que un resultado como el hallado ocurre por azar solamente 8 de cada mil veces, por lo que resulta **inverosimil** suponer que el proceso productivo únicamente produzca 10 %. de televisores defectuosos.

Obviamente, la Estadística no permite descartar la posibilidad de que se hubiese presentado en nuestro caso uno de esos resultados excepcionales (que ocurrirían solamente 8 de cada mil veces), pero sí podemos tener **confianza** en que a nosotros nos haya sucedido uno de los resultados que ocurren con muchísima más frecuencia (920 de cada mil veces).

Con rigor científico, afirmamos, con nivel de **confianza** del $1 - 0.008 = 0.992 (99.2\%)$ que es inverosimil la hipótesis de que el proceso productivo genere 10 % de televisores defectuosos.

En Ciencia se considera **inverosimil** a un resultado que puede ocurrir solamente 5 de cada 100 veces o menos. En el Capítulo siguiente se justificará este criterio unánime internacional.

Para finalizar, repararemos en que hemos usado el término de **confianza** y no de **probabilidad** para referirinos a nuestra conclusión estadística, ya que únicamente se efectuó una vez el experimento aleatorio de tomar 5 televisores al azar. Aunque sí efectuamos el cálculo de PROBABILIDAD para arribar a la DECISION ESTADISTICA, a la cual le otorgamos un valor de CONFIANZA.

10.8 La aplicación de modelos probabilísticos para describir e interpretar fenómenos en ciencias naturales.

Para que ocurra una reacción química es preciso que las moléculas involucradas se encuentren entre sí en el espacio y el tiempo y que lo hagan además en la posición adecuada para que ciertos detalles estructurales embonen correctamente con los complementarios de las recíprocas, y tal requerimiento geométrico va a determinar una Probabilidad de choque efectivo.

La ocurrencia de encuentros efectivos determina el número de reacciones que ocurran por unidad de tiempo, y esto se manifestará como "velocidad" de la reacción ($-\frac{dN}{dt}$).

El número (N) de moléculas de un reactivo disminuye durante el curso de la reacción, y como cada vez quedan menos, la reacción se va enlenteciendo, toda vez que la probailidad de choque efectivo (K) no cambie $-\frac{dN}{dt} = K \cdot N$

Esto explica la "cinética de primer orden" que es una característica general de muchísimos procesos físico-químicos, cuya expresión integral es $N = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ donde N_0 es el número de moléculas existentes al inicio del tiempo considerado.

Las leyes de Mendel nos ofrecen un ejemplo de interés histórico acerca de la utilización del modelo probabilístico como criterio. Si en una población existe por ejemplo, un gen con frecuencia relativa esperada (probabilidad) de $\frac{1}{3}$ y los individuos de esa población se cruzan entre sí al azar, las frecuencias relativas para muestras de 5 individuos cada una :

sí sí sí sí sí :$P(si)P(si)P(si)P(si)P(si) = P(si)^5$
sí sí sí no sí:$P(si)P(si)P(si)P(no)P(si) = P(si)^4 \cdot P(no)$

Como las frecuencias obervadas en gran número de apareamientos de 5 coincidieron razonablemente con las predicción teórica, se concluyó que la ley resultaba una buena predicción.

Pero, para terminar este capítulo advertiremos la diferencia entre las leyes de tipo "determinístico" y aquellas (como la de Mendel) que tratan de regularidades estadísticas.

La Ley de la Gravedad de Newton es una ley determinística, en el sentido de que nos dice con qué fuerza es atraído un objeto de cierta masa en cierto lugar del planeta y a cierta altura respecto al suelo.

Pero esta distinción debemos "tomarla con pinzas" porque al intentar comprobar experimentalemte el cálculo aparecen errores de medición que son impredecibles en el ensayo individual, aunque regulares "a la larga".

11. ESTADÍSTICA

11.1 La descripción como un paso previo a toda predicción.

En todas las actividades humanas resulta imprescindible describir de manera numérica y compacta la información acerca de realidades particulares . Pero sin embargo, en la inmensa mayoría de los casos el estudio interesa porque se desea aproximarse a conocer una realidad más general.

Así, por ejemplo, un estudio de mercado considera a un grupo más o menos amplio de posibles consumidores, pero lo que justifica llevarlo a cabo no es conocer las preferencias de ese grupo, sino utilizar ese concocimiento para estimar cuál será la prefencia en un amplio sector de la sociedad, o en la sociedad toda.

El término "estadística" deriva de la descripción de las cosas y asuntos de un Estado con fines de gobierno. Aún a este nivel, resulta evidente que dicha descripción se hace con fines de predecir qué pasaría en años sucesivos si se aplicase la misma política.

11.2 Población estadística o universo.

Todos los habitantes de una ciudad constituyen una población civil; si hacemos abstracción de los individuos y consideramos únicamente el ingreso mensual de cada uno de ellos, ahora tenemos una población de datos de ingreso mensual en el sentido estadístico.

Por un lado, hicimos una definición del origen que tendrán los datos (todos los individuos que viven en una ciudad) y por el otro aislamos el dato que nos interesa (ingreso mensual) de las restantes variables de cada individuo.

De esta manera la población real queda representada, con fines estadísticos, por una población de datos individuales, y por una lista de condiciones paramétricas que especifican de qué tipo de individuos está formada la población real.

11.3 Variables estadísticas

Las variables estadísticas son variables aleatorias y es preciso distinguir entre las que provienen de mediciones y las que se originan en calificaciones.

El hecho cotidiano de que no encontremos dos personas exactamente iguales sirve para comprender que el estudio de un grupo tomado al azar genere un grupo de datos aleatorios.

En otro orden de cosas, sucede en ciencias, que al medir muchas veces un mismo ente, ocurre que los resultados varian entre sí, y hablamos de que han ocurrido "errores de medida" de monto aleatorio, debido a la acción de un gran número de factores que no podemos controlar o que nos son por completo desconocidos.

Cuando medimos la estatura de cada individuo adulto, el resultado es una variable (longitud) que puede adoptar un valor de entre un amplio conjunto de valores posibles comprendidos en un cierto rango (entre 1 y 2 metros); dado que la cinta métrica tiene apreciación de un centímetro, hay por lo menos cien valores posibles para la variable dentro del rango posible.

Si se sustituye la cinta métrica por una regla milimetrada, la apreciación es diez veces mayor (mil valores posibles) dentro del rango. Utilizando un aparato óptico de presición (catetómetro), podríamos tener una apreciación de 0.1 mm., y entonces habrían 10,000 valores posibles.

Sucesivamente, la apreciación de la medida podría aumentarse, y también aumentaría el número de valores posibles, hasta hacerse indefinidamente grande cuando el intervalo de apreciación fuese indefinidamente pequeño. Esta es la característica de una **variable contínua.**

Como es totalmente imprevisible a priori la estatura que tendrá un individuo dado (ya que están siendo tomados al azar), estamos en presencia de una variable aleatoria con muchos valores posibles, con tantos como el modelo de los números reales en el intervalo correspondiente; a este tipo de variables se les llaman **variables aleatorias contínuas** o **medidas reales**..

Por el contrario el sexo de personas tomadas al azar de una población, es una variable también aleatoria pero que únicamente puede tener dos valores (hombre o mujer), entonces decimos que es una **variable discreta** o **atributo**, en este caso de opción binaria.

Además vemos que la variable discreta no admite como tal una escala, ya que carecería de sentido ordenarla.

11.4 Parámetros poblacionales y estadísticos muestrales.

Cuando se considera la totalidad de una población se puede conocer (por medio de un censo) la proporción de cada uno de los subconjuntos que la forman; a estas cantidades verdaderas se les denomina **valores paramétricos**. Así, por ejemplo, existe el promedio de estatura de los hombres de 25 años que habitan en el Distrito Federal, aunque sea indeterminable a los fines prácticos.

En la inmensa mayoría de la situaciones, no podemos estudiar a toda la población y entonces estudiamos una **muestra** de la misma, y confiamos en que los subconjuntos de que la población consta se hallen proporcionalmente representados en la muestra.

Las cantidades calculadas a partir de los datos que forman una muestra, se llaman **valores estadísticos muestrales.**

Un propósito central de la Estadística consiste en estimar el valor de los parámetros de una población a partir de los valores estadísticos de una muestra tomada al azar de la población.

11.5 Ordenamiento de los datos.

11.5.1 Clases. Intervalo y marca de clase.

La lista de valores individuales permite identificar un valor máximo y uno mínimo, y se denomina **rango** al intervalo que separa ambas cantidades.

El ordenamiento del conjunto de datos se efectúa distribuyéndolos entre clases diferentes, inscritas dentro del rango.

Para asignar cada dato individual a la clase que le corresponda es preciso considerar **intervalos de clase** excluyentes entre sí, pero que cubran todo el rango sin dejar huecos. Así mismo es preciso adoptar un criterio para asignación de aquellos valores individuales que sean iguales a un límite entre clases contiguas.

$$x_{\text{lim\_inf}} \leq x_i < x_{\text{lim\_sup}}$$

<u>Ejemplo:</u>

En la muestra constituida por un grupo de la escuela, las calificaciones correspondientes a matamáticas, pudieron abarcar el rango de 0 a 10. Definiendo 5 clases para asignar cada calificación a una de las clases, podríamos adoptar el criterio siguiente:

$$
\begin{array}{lcccc}
NA & \longrightarrow & 0 \leq calif_i < 6 & \longrightarrow & [0,6) \\
S & \longrightarrow & 6 \leq calif_i < 7.4 & \longrightarrow & [6,7.4) \\
B & \longrightarrow & 7.5 \leq calif_i < 8.7 & \longrightarrow & [7.5,8.7) \\
MB & \longrightarrow & 8.7 \leq calif_i \leq 10 & \longrightarrow & [8.7,10]
\end{array}
$$

esto es, que un dato individual de valor 8 ($x_i = 8$) se asigna a la clase "7.5-8.7".

Nombre	Examen	Calificación
Adriana	6.5	S
Marco	8.7	B
Maricarmen	5.8	NA
Fidel	6.7	S
Carlos	7.5	B
Alberto	8.5	B
Enriqueta	9.2	MB
Pilar	8.8	MB

11.5.2 Frecuencia absoluta y relativa de la clase.

La cantidad de datos individuales que pertenecen a una clase dada, constituye la **frecuencia absoluta** o efectivo de la clase. Como puede observarse en los datos del ejemplo, unas clases tienen frecuencia absoluta mucho mayor que las otras.

Al agrupar los datos en clases, en realidad estamos condensando la información, y un paso más adelante consiste en suponer que todos los valores individuales pertenencientes a una clase dada son iguales entre sí, y a su vez iguales al valor central del intervalo de clase, también llamado **marca de clase.**

Para que esta forma de condensar la información resulte justificada, es necesario que el rango incluya muchas clases. En Estadística aplicada muy rara vez se consideran menos de 7 u 8 clases.

Con el propósito de estandarizar las descripciones estadísticas, en lugar de manejar la frecuencia absoluta de cada una de las clases, se considera su correspondiente **frecuencia relativa** (Fr) , resultante de dividir la frecuencia absoluta entre el número total de datos (n):

$$Fr = \frac{Fa}{n}$$

Obviamente, la suma de las frecuencias relativas de todas las clases vale 1. para cualquier conjunto de datos individuales considerado.

11.6 La distribución de las frecuencias relativas de los diferentes resultados de un experimento aleatorio.

La tabla de las clases y sus respectivas frecuencias relativas correspondiente a una muestra o al total de una población de datos individuales se llama **distribución de frecuencias** para la variable en la muestra o población consideradas.

La característica más común de las distribuciones de frecuencias en la vida real consiste en presentar uno o más máximos de Fr. Es decir, los datos individuales correspondientes a ciertas clases se presentan mayor número de veces. Mientras que los valores extremadamente altos o bajos son muy poco frecuentes.

Excepcionalmente, podemos encontrar una distribución de frecuencia uniforme, en que todas las clases presentan la misma frecuencia relativa. Por ejemplo, la distribución de edades individuales en una población biológica estacionaria (que no crece ni disminuye) exhibirá la misma proporción de individuos jóvenes que de viejos.

11.6.1 Tendencias dentro de una distribución experimental de frecuencias relativas.

Si clasificamos por ejemplo, los datos de estatura individual de los alumnos de quince años varones del colegio, vemos que ciertas medidas se presentan con más frecuencia que otras.

El valor más frecuente constituye una **moda** (el largo de las las faldas mas usadas por las mujeres de una población, por ejemplo, es "lo que está de moda").

Sin embargo, la moda puede no estar bien definida y además la distribución de las frecuencias en torno suyo no ser simétrica. Por esto, para caracterizar la tendencia de una manera más general, se utiliza el **promedio** que se indica (y se lee: "x barra"):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

La idea subyacente al calcular el promedio consiste en determinar cuál sería la estatura individual si todos los individuos fuesen idénticos y en conjunto totalizasen una misma longitud. Lo que resultaría algo análogo a determinar un individuo "ideal" que representase a todo el conjunto de individuos estudiados.

Otra manera (menos usada) de resumir una distribución es la mediana, que es el valor situado en la mitad del rango.

Si la distribución es simétrica, concidirán la moda, la media y la mediana.

Cuando en un conjunto de datos ciertos valores se repiten muchas veces conviene agruparlos en clases y efectuar el cálculo de manera abreviada, que se conoce como de **datos agrupados**

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot Fa}{n}$$

donde k es el número de intervalos de clase y m_i es la marca de clase del intervalo.

Muchas calculadoras tienen una tecla especial para introducir el valor y el número de veces que se repite, con lo cual se evita la necesidad de teclear al dato muchas veces.

El valor que se encuentra en la mitad de la distribución de los datos ordenados, se conoce como **mediana**. Cuando se tiene un número de datos de orden par se toma como mediana el valor promedio de los dos valores que están al centro de la distribución.

11.7 Dispersión de los datos individuales en una distribución

La mayor parte de los datos individuales difieren en un cierto monto del promedio correspondiente al colectivo; se dice que cada individuo posee un **desvío individual** :

$$|x_i - \overline{x}|$$

Lo tomamos en valor absoluto porque lo interesante es el tamaño del desvío.

Así como existe una tendencia de los datos, es obvio que también existe una tendencia en los desvíos individuales, y que esta tendencia ha de estar cercana al valor 0, lo cual no se explica que no se utilice este promedio de desvíos individuales para caracterizar la desviación media de los datos.

Para datos no agrupados:

$$dm = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

y para datos agrupados:

$$dm = \frac{\sum_{i=1}^{nm} m_i \cdot Fa_i}{n}$$

nm es el número de marcas de clase.

Los desvíos cuadráticos $(x_i - \bar{x})^2$ en cambio, presentarán una propiedad fundamental:

> la de que su suma se hace mínima cuando el valor de referencia corresponde al promedio.

Para observar esta propiedad, supongamos un grupo de 9 alumnos y calculemos el desvío cuadrático de la altura de cada uno de ellos respecto a un valor de referencia constituído por el más alto, por el más bajo y por el promedio.

Nombre	Estatura(X)	$\lvert x - x_{alto} \rvert$	$\lvert x - x_{bajo} \rvert$	$\lvert x - \bar{x} \rvert$	$(x - \bar{x})^2$
Enrique	1,92	0	0,2	0,1	0,01
Javier	1,8	0,12	0,08	0,02	0,0004
Santiago	1,78	0,14	0,06	0,04	0,0016
Jorge	1,72	0,2	0	0,1	0,01
Salvador	1,81	0,11	0,09	0,01	0,0001
Felipe	1,83	0,09	0,11	0,01	0,0001
Alejandro	1,88	0,04	0,16	0,06	0,0036
Rodrigo	1,74	0,18	0,02	0,08	0,0064
Hugo	1,9	0,02	0,18	0,08	0,0064
Totales	16,38			0,5	0,0386
	$\bar{x} = \frac{16,38}{9} = 1,8$			$dm = \frac{0,5}{9} = 0,055$	$\frac{0,0386}{9} = 0,00428$

El promedio de los desviós cuadráticos se denomina varianza, y constituye una medida de la variación (dispersión) de los datos.

$$\frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Sin embargo, presenta el incoveniente práctico de tener dimensión distinta a la de los datos originales, (porque se elevaron al cuadrado los desvíos) . Si deseamos indicar el parecido (la dispersión) entre las estaturas de un grupo de estudiantes, resulta confuso el expresarla en centímetros cuadrados (por ejemplo).

Por esta razón se utiliza de manera universal la raíz cuadrada de la varianza que se conoce con el nombre de desvío típico o desviación estándar y se indica con la letra S para una muestra y σ sigma para una población:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Por último, se denomina **coeficiente de variación** a la relación porcentuada entre el desvío estándar y el promedio:

$$CV = \frac{s}{(\bar{x})} 100$$

En las poblaciones biológicas es excepcional que el coeficiente de variación sea inferior al 1% pero también es raro que exceda del 20% si las condiciones para incluir individuos han sido bien definidas.

Los métodos físico-químicos de medición se calibran repitiendo gran número de veces la determinación del valor de un estándar invariable. y calculando luego, el coeficiente de variación. En términos generales, un método aceptable es áquel cuyo coeficiente de variación es del 0.1% o menos.

11.7.1 El histograma: una construcción gráfica en que el área del rectángulo asociado a cada clase representa la frecuencia relativa con que se presentan datos individuales pertenecientes a la clase.

La representación de la distribución de frecuencias mediante un gráfico cartesiano de la frecuencia relativa (Fr) no resulta adecuada para las consideraciones habituales, y por esto se utiliza el área de un rectángulo para indicar la Fr con que ocurren datos pertenecientes a esa clase.

Para satisfacer esta condición, la altura y el área de cada rectángulo se calcula:

$$\text{área} = (\text{base}) \cdot (\text{altura}(Fr)) = \text{marca de clase} \cdot Fr$$
$$\text{altura} = \frac{Fr \text{ (de la clase)}}{\text{intervalo de clase}}$$

Esta variable se denomina **densidad de frecuencia relativa.**

Todos los histogramas deben tener la misma área total porque corresponde al 100% distribuido de manera distinta. El nombre densidad es tomado de la mecánica y hace referencia al hecho de que la masa unitaria está distribuida sobre el eje de la variable. A su vez el promedio corresponde al centro de gravedad de la distribución.

Generalmente se conoce como histograma de frecuencias al gráfico de barras y como polígono de frecuencias al grafico de líneas.

Ejemplo:

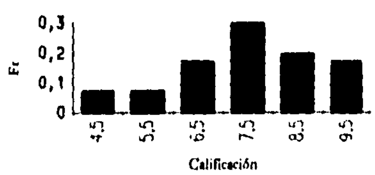
Consideremos las calificaciones de la materia de matemáticas de un grupo de 40 estudiantes del quinto grado de bachillerato:
4.3 , 5 , 6.9 , 6.5 , 10 , 6 , 9.8 , 9.4 , 9.5 , 7.2 ,
5.5 , 6.5 , 4 , 8.4 , 9.6 , 8.5 , 8.6 , 7.7 , 7.8 , 7.1 ,
7.1 , 6.8 , 7 , 8.3 , 7.4 , 9.9 , 6.7 , 7.6 , 7.2 , 8.2 ,
7.8 , 9.4 , 7.4 , 8 , 8.1 , 5.7 , 8.2 , 8.8 , 8 , 6.2
Ordenar y agrupar los datos en clases que midan a lo más 1 , elaborar una tabla de distribución, obtener la media, mediana, moda,desviación media, desviación estándar y coeficiente de variación. Elaborar un histograma de frecuencias relativas y un polígono de frecuencias relativas.

Clase	Marca clase m_i	Frecuencia absoluta Fa	Frecuencia relativa Fr	Fr acumulada	$Fa \cdot m_i$	Desviaciones $\lvert m_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert m_i - \bar{x} \rvert \cdot Fa$	$(m_i - \bar{x})^2 \cdot Fa$
$4 < x_i \le 5$	4,5	3	0,075	0,075	13,5	3	9	27
$5 < x_i \le 6$	5,5	3	0,075	0,15	16,5	2	6	12
$6 < x_i \le 7$	6,5	7	0,175	0,325	45,5	1	7	7
$7 < x_i \le 8$	7,5	12	0,3	0,625	90	0	0	0
$8 < x_i \le 9$	8,5	8	0,2	0,825	68	1	8	8
$9 < x_i \le 10$	9,5	7	0,175	1	66,5	2	14	28
Total		40	1		300 $\bar{x} = \frac{300}{40} = 7.5$		44 $dm = \frac{44}{40} = 1.1$	82 $\sigma^2 = \frac{82}{40} = 2.05$ $\sigma = \sqrt{2.05} = 1.4317$

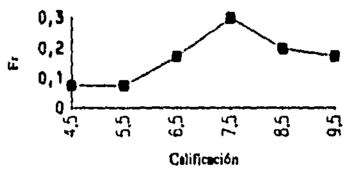
Moda=7.5

Mediana $= \frac{6.5 + 7.5}{2} = 7$ $\qquad C.V. = 19.0904\%$

Histograma de frecuencias relativas



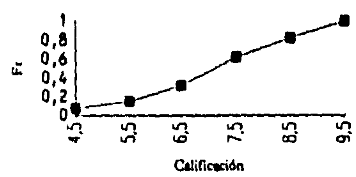
Polígono de frecuencias relativas



11.7.2 El polígono de frecuencia relativa acumulada expresa la función de probabilidad correspondiente al experimento que genera la distribución.

En lugar de considerar la proporción de alumnos cuya calificación los ubica en determinada clase (ver ejemplo anterior) , podemos considerar la proporción acumulada de alumnos cuya calificación está por debajo de cierto límite. Entonces, esta frecuencia relativa irá acumulando la frecuencia relativa de las clases (ver figura) y se llamará **frecuencia relativa acumulada (Fr_{ac})**.

Frecuencia relativa acumulada



Al ir desplazando hacia arriba el valor límite considerado, es obvio que cada vez será mayor la proporción de estudiantes que quedan por debajo del límite, hasta alcanzar la totalidad ($Fr_{ac} = 1$)cuando se considere un límite superior a la calificación del estudiante más aplicado.

La representación gráfica de la frecuencia relativa acumulada exhibe un escalón para cada una de las clases consideradas y va desde el nivel 0 al nivel 1, esta gráfica expresa en realidad la probabilidad de encontrar estudiantes con una calificación inferior al límite considerado al tomarlos al azar.

De modo que la altura de la función en cada punto corresponde a la probabilidad $P(x \leq \text{límite considerado})$

11.7.3 Lo que sucede cuando existe gran cantidad de resultados posibles para el experimento que genera la distribución de frecuencias relativas.

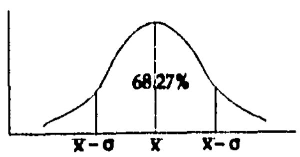
Si en lugar de considerar únicamente los 40 datos individuales expuestos, se considerasen 400 datos por ejemplo, al haber 10 veces más individuos se podrían formar tres o cuatro clases en lugar de cada una de las clases previas sin que influyesen demasiado las irregularidades.

A su vez, al existir mayor número de clases la diferencia entre los respectivos rectángulos del histograma se haría mucho menor, si todavía creciese más el número total de individuos, de nuevo habría más clases con intervalos más estrechos y más parecidas entre sí.

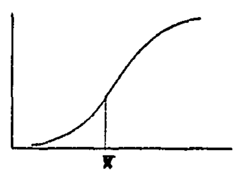
El perfil del histograma se suaviza cada vez más, hasta aproximarse a una curva.

Otro tanto sucede con la poligonal de frecuencias relativas acumuladas.

En la inmensa mayoría de los casos, observaríamos que esa forma límite del histograma corresponde a una campana (curva normal) con su eje de simetría ubicado a nivel del promedio y con sus puntos de inflexión subtendiendo un área del 68% total.



A su vez, la forma límite para la curva de frecuencia relativa acumulada es una sigmoide con su punto de inflexión ubicado a nivel del promedio y que se aproxima asintóticamente al valor 0 y al valor 1 por sus extremos.



11.7.4 Los modelos probabilísticos proporcionan curvas que se ajustan a las distribuciones de frecuencia relativas observados cotidianamente

A partir de las dos supociones que se explican a continuación , se construye un modelo matemático que consiste en una ecuación que genera la curva normal.

Dichas suposiciones son:

- que un valor de separación es igualmnete probable hacia ambos lados del promedio
- que la probabilidad de de valores es proporcional a su cercanía del promedio.

La ecuación del modelo indica la densidad de frecuencia realtiva para un valor x, una vez conocido el promedio y el desvío estándar para la distribución

.

$$DFR_i = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \left[\frac{x - \bar{x}}{2s}\right]^2$$

Puede verse que únicamente figuran los parámetros s (desviación estándar y x (promedio)

11.7.5 Empleo del modelo probabilístico para predecir lo que sucedería si se pudiese observar a toda una población o repertir el experimento infinito número de veces.

Sabemos que el interés mayor es conocer a toda la población, pero esto es algo imposible en casi todas las situaciones prácticas. De modo que el conocimiento científico se construye mediante **estimaciones** de los parámetros poblacionales a partir de los estadísticos muestrales, y admitiendo el cumplimiento de regularidades estadísticas universales, entre las cuales la más importante es una cuya expresión conceptual se enuncia como **teorema del límite central.**

Según este teorema, si se sacan de una misma población miles y miles de muestras de igual tamaño, los promedios muestrales se distribuyen en torno al promedio poblacional verdadero según una distribución normal.

Cuando hemos estudiado, por ejemplo, una muestra integrada por 70 individuos, nos preguntamos cuál será el valor verdadero del promedio poblacional que corresponda a la población, integrada por cientos de miles de individuos. Para responder a esta interrogante nos basamos en que de acuerdo al teorema, si se sacasen muchísimas muestras de 70 individuos cada una de la misma población, los promedios hallados en cada una de las muestras se distribuirían en forma normal en torno al verdadero valor poblacional . Luego, podemos decidir cuáles valores hipotéticos acerca del valor poblacional serían compatibles con el resultado observado en nuestra única muestra de 70 indivduos.

12. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

El álgebra es el estudio de las operaciones, pero el ágebra moderna o contemporánea no se limita al estudio de las operaciones con números, sino que investiga operaciones con elementos de conjuntos de naturaleza mucho más general, como podrían serlo las propiedades simétricas de los cuerpos geométricos por ejemplo.

A lo largo de este texto hemos estudiado cómo efectuar distintos tipos de operaciones entre números, matrices, números complejos y polinomios , pero ahora estudiaremos cómo se comportan las operaciones, particularmente las llamadas "operaciones binarias".

Cuando tenemos un conjunto en el que podemos realizar una o varias "operaciones binarias" formamos un sistema algebraico que cuenta con una cierta estructura dependiendo de las propiedades de las operaciones definidas para dicho conjunto.

Podemos encontrarnos con conjuntos de naturaleza completamente diferente e inclusive con operaciones distintas, pero que tienen el mismo comportamiento algebraico y esto querrá decir que los sistemas tienen la misma "estructura algebraica".

12.1 Operaciones binarias y sus propiedades

El primer contacto que tuvimos con el álgebra fué precisamente una operación binaria: la suma.

Una **operación binaria o ley de la composición** en un conjunto es una regla que asigna a cada par (de aquí el término binaria) ordenado de elementos del conjunto algún otro elemento también dentro del conjunto.

Para establecer una relación entre dos conjuntos cualesquiera A y B debemos contar con una función de A en B por medio de la cual a cada elemento del conjunto A le asociemos un **único** elemento de B.

$$f : \underbrace{A}_{\text{dominio}} \longrightarrow \underbrace{B}_{\text{codominio}}$$

Así, por ejemplo si $A = \{\triangle, \diamond\}$ y $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ entonces $f : A \longrightarrow B$ puede estar dada por la asociación:

$$\triangle \longmapsto \alpha$$
$$\diamond \longmapsto \beta$$

el subconjunto $\{\alpha, \beta\}$ de B, se llama imagen de f ; el elemento γ no es imagen de ningún elemento de A bajo f.

Utilizaremos la siguiente notación para denotar las imágenes de los elementos de A bajo f :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ \triangle &\longmapsto f(\triangle) = \alpha \\ \diamond &\longmapsto f(\diamond) = \beta \end{aligned}$$

Ahora consideremos el producto cartesiano de un conjunto A que se denota $A \times A$ y que consiste en todas las parejas ordenadas de elementos de A, es decir:

$$A \times A = \{(a;b) \mid a, b \in A\}$$

<u>DEFINICIÓN:</u>

Sea S un conjunto no vacío.

Una operación binaria o ley de la composición en S es una función f : $S \times S \longrightarrow S$ donde $(x,y) \longmapsto f(x,y)$.

Podemos denotar a la función utilizando cualquier símbolo, por ejemplo $f, \rho, \Upsilon, \odot, \oplus, \times, \div, *$,etc, y por conveniencia denotaremos $f(x,y)$ como xfy. Si la operación binaria f la denotamos como $+$ (suma) entonces $(1,2) \longmapsto +(1,2) = 1+2 = 3$ o bien podemos denotarla como $\cdot$(multiplicación) y entonces $(3,4) \longmapsto \cdot(3,4) = 3 \cdot 4 = 12$.

<u>Ejemplo:</u>

El profesor de matemáticas de una escuela establece que la calificación bimestral se obtiene considerando que el promedio de exámenes parciales cuenta el 70% de la calificación y el promedio de tareas cuenta el 30% .¿Constituye esta manera de obtener el promedio bimestral una operación binaria?

Denotaremos la calificación bimestral como C_b, el promedio de exámenes como P_e y el promedio de tareas como P_t entonces:

$$C_b = P_e \cdot 0.7 + P_t \cdot 0.3$$

esta regla está definida sobre el conjunto:

$$D = \{x \mid x \in R, 0 \leq x \leq 10\}$$

es claro que el valor de C_b está también dentro del conjunto D, puesto que el valor de P_r está en D y al multiplicarse por 0.7 siempre tomará un valor entre 1 y 7, análogamente P_t tomará valores entre 1 y 3 que al sumarse nunca tomarán valores menores que 0 ni mayores que 10. Concluimos entonces, que esta forma de calcular el promedio si constituye una operación binaria.

Otros ejemplos de operaciones binarias son la suma en los naturales, el producto en los enteros, el valor mínimo entre dos valores, la división en los reales, etc.

12.1.1 Propiedades de una operación binaria

Sea $*$ una operación binaria definida en un conjunto S:

- **Cerradura**
  Sea T un subconjunto de S. Se dice que T es cerrado bajo la operación $*$ si $\forall a, b \in T$; $\quad a * b \in T$.
  Por ejemplo, si consideramos la divisón en los reales, el subconjunto de los enteros no es cerrado bajo la división:
  $2, 3 \in Z$; $\quad \frac{2}{3} \notin Z$, i.e., $\quad \div : Z \times Z \to R$

  En cambio el conjunto de los enteros es cerrado bajo las operaciones suma, resta y multiplicación.

- **Elemento idéntico**
  Un elemento $\iota \in S$ es un elemento idéntico para la operación $*$, si para todo $a \in S$, ι satisface que

  $$a * \iota = \iota * a = a$$

- **Elementos inversos**

  Para todo $a \in S$ existe un elemento al que llamaremos inverso y denotaremos como a^{-1}, también dentro de S, tal que $a^{-1} * a = a * a^{-1} = \iota$.

- **Asociatividad**

  Para cualesquiera tres elementos $a, b, c \in S$ decimos que $*$ es asociativa si

  $$a * (b * c) = (a * b) * c$$

- **Conmutatividad**

Decimos que la operación $*$ es conmutativa si

$$\forall a, b \in S; \quad a * b = b * a$$

Ejemplo:

Sea $W = \{w \mid w = 2n, \forall n \in N\}$ y la operación binaria definida por:

$a \otimes b = 3a + 2b + 2,\ \forall a, b \in W$

a) ¿Es W cerrado bajo $\otimes$?
Si a y b son elementos de W, entonces tienen la forma $a = 2x$ y $b = 2y$, así:
$a \otimes b = 2x \otimes 2y = 3(2x) + 2(2y) + 2 = 6x + 4y + 2 = 2(3x + 2y + 1)$
el resultado $2(3x + 2y + 1)$ tiene la forma $2n$ por lo que concluímos que está dentro del conjunto W y entonces éste es cerrado bajo $\otimes$.

b) ¿Es $\otimes$ una operación conmutativa?
$a \otimes b = 3a + 2b + 2$ y $b \otimes a = 3b + 2a + 2$, entonces $a \otimes b \neq b \otimes a$ y por lo tanto la operación no es conmutativa.

12.2 Estructura de grupo

Los grupos son las estructuras algebraicas más simples.

Decimos que un conjunto no vacío de elementos G forma un grupo, si en G está definida una operación binaria $\odot$ (denotaremos esto como $(G, \odot)$) tal que:

i) G es cerrado bajo $\odot$,esto es , $\forall a, b \in G; a \odot b \in G$.

ii) La operación es asociativa.

iii) Existe el elemento identidad

iv) Cada elemento de G tiene un inverso.

Ejemplo:

Sea $G = \{1, -1\}$ y tomemos la multiplicación usual en los reales ¿Tiene el sistema $(G, \cdot)$ estructura de grupo?

es claro que G es cerrado bajo la multiplicación, ya que:

$$\begin{aligned} 1\cdot 1 &= 1 \\ 1\cdot -1 &= -1 \\ -1\cdot 1 &= -1 \\ -1\cdot -1 &= 1 \end{aligned}$$

observemos que todos los posibles resultados están en G.

evidentemente la operación es asociativa, el elemento identidad sería 1 porque cualquiera de los dos elementos que tiene el conjunto quedaría igual a sí mismo si lo multiplicamos por 1 y finalmente los elementos inversos

$$\begin{aligned} 1\cdot \boxed{1} &= 1 \\ -1\cdot \boxed{-1} &= 1 \end{aligned}$$

Concluimos entonces que G sí es un grupo.

Ejemplo:

Sea el sistema $(Z,\cdot)$, resulta que el conjunto de los números enteros Z respecto del producto $\cdot$ no forma un grupo, no obstante que se cumplen las condiciones i),ii) y iii) de la definición, pero la iv) no se cumple, ya que, en general, para casi cualquier número entero su inverso no es entero y para el 0 ni siquiera existe.

Decimos que G es un **grupo abeliano o conmutativo** si en G está definida una operación binaria $*$ y para cualesquiera $a,b \in G$ se tiene: $a * b = b * a$.

Ejemplo:

Sea K el conjunto de matrices cuadradas de orden 2 de la forma:
$K = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x,y \in Z \right\}$
y la siguiente operación binaria :
$A \diamond B = A + B^t$, donde $A, B \in K$ y B^t significa la matriz traspuesta de la matriz B.
Determinar si K forma un grupo abeliano respecto de $\diamond$, o bien, determinar si $(K,\diamond)$ tiene estructura de grupo.

1. Primero debemos probar que K es cerrado bajo $\diamond$ y para ello tomamos dos elementos de K :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$A \circ B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

esta última matriz es un elemento de K, por lo que el conjunto K es cerrado bajo $\circ$.

2. Comprobemos que la operación sea asociativa, es decir que :
$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C, \quad \forall \; A, B, C \in K$, entonces si

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & y_3 \end{pmatrix}$$

$$A \circ (B \circ C) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & y_3 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + (x_2 + x_3) & 0 \\ 0 & y_1 + (y_2 + y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & 0 \\ 0 & y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + x_3 & 0 \\ 0 & (y_1 + y_2) + y_3 \end{pmatrix} = (A \circ B) \circ C$$

3. Ahora debemos buscar si existe el elemento idéntico, es decir

$$\iota = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \quad d_1, d_2 \in Z$$

ι es tal que $A \circ \iota = \iota \circ A = A \qquad \forall A \in K$

$$A \circ \iota = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + d_1 & 0 \\ 0 & y_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

como ι es el idéntico

$$\begin{pmatrix} x_1 + d_1 & 0 \\ 0 & y_1 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 + d_1 = x_1 \\ y_1 + d_2 = y_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \end{matrix}$$

por lo tanto existe un elemento idéntico y éste es:
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Existencia del elemento inverso.
Un elemento inverso debe de cumplir con $A \circ A^{-1} = \iota, \qquad \forall A \in K$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$A \circ A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 & 0 \\ 0 & y_1 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + v_1 = 0 \\ y_1 + v_2 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$v_1 = -x_1$
$v_2 = -y_1$

Así, el inverso es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -x_1 & 0 \\ 0 & -y_1 \end{pmatrix}.$$

Hemos demostrado hasta el momento que K es un grupo, **ahora sólo nos falta verificar si se cumple la propiedad conmutativa para K forme un** grupo abeliano, entonces debemos probar que:

$$\forall A, B \in Z, \qquad A \diamond B = B \diamond A$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$A \diamond B = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_1 & 0 \\ 0 & y_2 + y_1 \end{pmatrix} = B \diamond A$$

Por lo tanto concluímos que K con la operación $\diamond$ **toma la estructura de** un grupo abeliano.

12.2.1 Propiedades fundamentales para grupos

Si G es un grupo con una operación binaria $*$, entonces:

a) el elemento identidad (neutro) es único

Demostración:

Si el elemento idéntico es ι y $a \in G$, se tiene que $a * \iota = \iota * a = a$, ahora supongamos que existe otro elemento idéntico ι' y hacemos $a = \iota$, tendríamos que $\iota' * \iota = \iota * \iota' = \iota'$, pero como ι es idéntico para $*$, entonces $\iota * \iota' = \iota * \iota' = \iota$, en consecuencia $\iota' = \iota$ y por lo tanto ι es único. □

b) todo $a \in G$ tiene un inverso único en G

Demostración:

Si a^{-1} es el inverso de a y ι es el idéntico, tenemos que:
$a * a^{-1} = a^{-1} * a = \iota$, supongamos que existiera otro inverso dentotado por a_1^{-1}, tendrímos que $a * a_1^{-1} = a_1^{-1} * a = \iota$ aplicamos $*$ con a^{-1} en ambos lados de la igualdad anterior y:
$a^{-1} * \left(a * a_1^{-1}\right) = a^{-1} * \iota$, como G es un grupo cumple la propiedad asociativa y entonces:

$$\underbrace{\left(a^{-1} * a\right)}_{\iota} * a_1^{-1} = a^{-1} * \iota \Rightarrow \iota * a_1^{-1} = a^{-1} * \iota \Rightarrow \iota * a_1^{-1} = \iota * a^{-1}$$

y esta igualdad sólo puede satisfacerse si $a_1^{-1} = a^{-1}$, por lo tanto a^{-1} es único. □

c) **para todo** $a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$

d) **para** $a, b \in G, (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

Cuando tenemos un sistema $(G, *)$ con estructura de grupo, es posible que algunos subconjuntos de G, con la operación $*$, también tengan estructura de grupo y entonces decimos que son **subgrupos** de G. Más formalmente podemos definir un subgrupo en la siguiente forma:

<u>DEFINICIÓN:</u>
Sea $(G, *)$ un grupo y sea $S \subset G$, se dice que S es un subgrupo de G para la operación $*$, si $(S, *)$ es un grupo.

Además de la estructura de grupo, están las estructuras de anillo y de campo, que son más completas que las de grupo y se refieren a un conjunto y dos operaciones binarias definidas para el mismo. Aunque no profundizaremos en el estudio de estas estructuras, vamos a dar una breve explicación de este concepto.

Sea G un conjunto no vacío en el cual se definen dos operaciones binarias $(*, \bowtie)$, entonces G es un **anillo** si es un grupo abeliano para $*$ y además cumple con las propiedades de asociatividad para $\bowtie$ y distributividad de $\bowtie$ sobre $*$. Ejemplos de anillo son: el conjunto de los números enteros con la adición y la multiplicación, las matrices cuadradas de orden n con la adición y la multiplicación, los polinomios con la adicón y la multiplicación.

Un **campo** o cuerpo G es un conjunto en el cual se definen dos operaciones binarias $(*, \bowtie)$ de modo que $(G, *)$ y $(G, \bowtie)$ tienen estructura de grupo abeliano y se cumple la propiedad distributiva de $\bowtie$ sobre $*$ por la izquierda y por la derecha, esto es:

$\forall a, b, c \in G$

$a \bowtie (b * c) = (a \bowtie b) * (a \bowtie c)$ y

$(b * c) \bowtie a = (b \bowtie a) * (c \bowtie a)$

Como ejemplos de campo están el conjunto de los números reales con la suma y multiplicación, el conjunto de los complejos con la suma y multiplicación, el conjunto $\{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in Q\}$ con las operaciones de suma y multiplicación.

12.3 Homomorfismos

El concepto de homomorfismo es una idea central dentro del álgebra moderna. El término homomorfismo viene el griego "homos" - mismo y "morphe" - forma y en este caso nos referimos a estructuras algebraicas que presentan la una forma muy parecida entre sí. La idea central de homomorfismo consiste en una aplicación de un sistema algebraico a un sistema algebraico análogo que mantiene la estructura.

DEFINICIÓN:

Sean S y T grupos con operaciones binarias denotadas por $*$ y Δ respectivamente. Sea $f : S \to T$ una aplicación tal que

$$f(s_1 * s_2) = f(s_1) \Delta f(s_2) \qquad s_1, s_2 \in S$$

entonces decimos que f es un **homomorfismo**.

Si tenemos dos elementos en S (s_1, s_2) y con ellos efctuamos la operación $*$ y después le aplicamos la función f, el resultado de ésta será igual a aplicar la función a s_1 y a s_2 $(f(s_1) f(s_2))$ y luego efectuar la operación Δ entre ambas.

Ejemplo:

Consideremos el grupo que forma el conjunto de los números reales R con la operación adición, el grupo que forma el conjunto de los reales positivos R^+ con la operación multiplicación y la función $f : R^+ \to R$ definida por $f(x) = \log x$ (x es positiva puesto que el dominio de la función es R^+). Probar que f es un homomorfismo.

Primero tomamos dos elementos dentro del conjunto R^+ : x y y, efectuamos entre éstos la operación multiplicación $x \cdot y$ y aplicamos la función f :

$$f(x \cdot y) = \log x \cdot y$$

pero sabemos el el logaritmo de un producto es igual a la suma de sus logaritmos, entonces:

$$f(x \cdot y) = \log x \cdot y = \log x + \log y = f(x) + f(y)$$

por lo tanto f sí es un homomorfismo.

Ejemplo:

Sean el grupo $(R, +)$, el grupo $(R - \{0\}, \cdot)$ y la función $\phi : R \to R - \{0\}$ definida por $\phi(a) = 2^a$. Determinar si f es un homomorfismo.
$x, y \in R$, $x + y \Rightarrow f(x + y) = 2^{x+y}$ aplicamos las leyes de los exponentes y así:

$$f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y)$$

concluímos entonces que f es un homomorfismo.

12.3.1 Isomorfismos

Si tenemos una función f que es un homomorfismo y además f es biyectiva, se dice que la función f es un **isomorfismo.**

Recordemos que para que una función g sea biyectiva tiene que cumplir con las dos siguientes propiedades:

- g es sobre (suprayectiva), es decir todos los elementos del contradominio son imagen de la función g.
- g es uno a uno (inyectiva), a cada elemento del contradominio le corresponde uno y sólo un elemento del dominio.

Ejemplo:

Sea el conjunto M de matrices diagonales de orden 2 con elementos reales y el conjunto R^2 de las parejas ordenadas de números reales, ambos conjuntos con la operación suma. Definimos una función $g{:}M \rightarrow R^2$ con la regla

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) \rightarrow (a,b) \qquad (a,b \in R)$$

Determinar si g constituye un isomorfismo.
Comenzamos por tomar dos elementos dentro del dominio,

$$x_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x_2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

y los operamos con la suma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

ahora aplicamos la función g

$$g\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix}\right) = (a+c, b+d)$$

por otro lado

$$\begin{aligned} g(x_1) + g(x_2) = g\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) &= \\ = (a,b) + (c,d) \quad = \quad (a+c, b+d) \end{aligned}$$

entonces

$$g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$$

En este punto podemos afirmar que g constituye un homomorfismo, ahora debemos verificar si g es biyectiva.
Claramente la función es sobre, ya que a todas las parejas ordenadas les corresponde una matriz diagonal de orden 2, es decir no existe ningún elemento en el contradominio que no sea imagen de g y además la función es inyectiva (uno a uno), cada pareja ordenada del contradomnio corresponde a una sola matriz en el dominio.
Por lo tanto concluimos que g es un isomorfismo.

Ejemplo:

Consideremos los grupos $(Z, +)$ y $(W, \cdot)$ donde $W = \{1, -1, i, -i\}$ y la función
$f : Z \rightarrow W$ definida por $f(w) = i^w$. ¿Es f un isomorfismo?
Probemos primero si se trata de un homomorfismo:
tomamos x y y dentro del conjunto de los enteros y operamos mediante la suma $x + y$, ahora aplicamos la función f, así:

$$f(x + y) = i^{x+y} = i^x \cdot i^y = f(x) \cdot f(y)$$

sabemos entonces ya, que f sí es un homomorfismo.

La función f es sobre puesto que todos los elementos del contradominio son imagen de f, siempre que elevemos la unidad imaginaria i a alguna potencia entera, tendremos como resultado alguno de los cuatro elementos del conjunto W; pero f no es inyectiva (uno a uno) puesto que los elementos del contradominio son imagen de la función aplicada a diferentes elementos del dominio, por ejemplo

$$f(1) = i^1 = i \quad \text{y} \quad f(5) = i^5 = i$$

Aunque podríamos afirmar que la función no es inyectiva simplemente observando que un conjunto (Z) es infinito y el otro no (W), por lo que resultaría imposible que a cada elemento del contradominio le corresponda uno y sólo uno del dominio.
Por lo tanto f no es isomorfismo.

Bibliografía

[1] Haaser, N. B., LaSalle, J. P., y Sullivan, J. A. *Análisis Matemático.* Trillas, México D. F.,1983. Vol. 2

[2] Vilenkin, N. Y., *Método de aproximaciones sucesivas.* MIR, Moscú, 1978.

[3] Swokowski, Earl W. *Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry.* Prindle, Weber & Schmidt. Massachusetts,1981.

[4] Davis, Lee W., *Elements of Calculus for Technical Students.*Canfield Press, San Francisco, 1971.

[5] Cárdenas, H...et al, Lluis, E., Raggi, F. y Tomás, F. *Álgebra Superior.* México D. F. , 1983.

[6] Perelman, Y. I., *Aritmética Recreativa.* Ediciones de Cultura Popular, México D.F. , 1978.

[7] Lucas, C. W., y James, R. T. *Matemáticas aplicadas.* Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, México D. F. , 1974. Tomo 4.

[8] Kúrosch, A.G. *Ecuaciones Algebraicas de grados arbitrarios.* MIR, Moscú, 1976.

[9] Herstein, I.N. *Álgebra Moderna: grupos, anillos, campos, teoría de Galois.*Trillas, México D. F. , 1990.

[10] Friedberg, S.H., Insel A. J. , y Spence, L. E. *Álgebra Lineal.* Publicaciones Cultural, S.A., México D. F., 1982.

[11] Yamane, T. *Estadística.* Harla,México D. F., 1973.

[12] Martínez Sánchez, J. *Conjuntos.* Anuies, México D. F., 1973.

[13] Wallace, D. A. R. *Grupos.* Limusa, México D. F., 1978.

[14] Lipschutz, S. *Álgebra lineal.* McGraw Hill, México D.F., 1985.(Serie de compendios Schaum)

[15] Spiegel M. R. *Probabilidad y Estadística.* McGraw Hill, México D. F., 1989. (Serie de compendios Schaum)

[16] Godínez, H. F. ... et al *Álgebra Lineal.* Facultad de Ingeniería UNAM. México D. F. , 1982. (Cuaderno de trabajo)

[17] Lluis, E. ¿Sabemos sumar?.p. 8-18. Matemáticas y ... algo más. CCH, México D. F.

[18] Batschelet, E. *Introduction to Mathematics for Life Scientists.* Springer-Verlag, New York, 1974.

[19] Dolciani, M. P. ... et al *Álgebra moderna y Trigonometría.* Publicaciones Cultural S. A., México D. F. , 1978. Libro 2

[20] Willerding M. F. *Conceptos Matemáticos un enfoque histórico.* C. E. C. S. A. , México D. F. , 1979.

[21] Fomín, S.V. *Sistemas de numeración.* MIR, Moscú, 1975.

[22] Cramér, H. *Elementos de la Teoría de Probabilidades y algunas de sus aplicaciones.* Aguilar, Madrid, 1970.

[23] Solodóvnikov, A. S. *Sistemas de desigualdades lineales.* MIR, Moscú, 1980.

[24] Korovkin, P. P. *Desigualdades.* MIR, Moscú, 1976.

[25] Aleksandrov, A. D. et al *La matemática: su contenido, métodos y significado 2.* Alianza Editorial, Madrid, 1974.

[26] Wentworth J., y Smith ,D. E., *Elementos de Álgebra.* Porrúa, México D. F. , 1976.

[27] Vorobyov , N. N. *Los Números de Fibonacci.* Limusa, México D. F. , 1973.(Temas Matemáticos)

[28] Huntley, H. E. *The Divine Proportion A Study in Mathematical Beauty.* Dover Publications, Inc. , New York, 1970.

[29] Solar E., y Speziale, L. *Apuntes de Álgebra Lineal.* Facultad de Ingeniería, UNAM, México D. F.

[30] Burden, R. L., y Faires, J. D. *Análisis Numérico.* Grupo Editorial Iberoamérica, México D. F. ,1985.

[31] Lara, M. *Antología de matemáticas II.* UNAM, México D. F. , 1971. (Lecturas Universitarias)

[32] Piskunov, N. *Cálculo Diferencial e Integral.* Montaner y Simón S. A. , Barcelona, 1978.

[33] Arya, J., y Lardner R., *Matemáticas aplicadas a la administración y economía.* Prentice Hall, México D. F. ,1987.

[34] Perry, W. L. *Álgebra Lineal con aplicaciones.* McGraw Hill, México D. F., 1990.

[35] Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas, México D. F., 1979. (Serie de Matemáticas)

[36] Perelman, Y. *Álgebra Recreativa.* Ediciones Quinto Sol, México D. F. , 1983.

[37] Markushévich, A. I. *Sucesiones recurrentes.* MIR, Moscú, 1974.

[38] Lidski, V. ... et al *Problemas de Matemáticas Elementales.* MIR, Moscú, 1978.

[39] Gnedenko, B. V. *The Theory of Probability.* Chelsea Publishing Company, New York, 1968.

[40] Larson, H. J. *Introducción a la Teoría de Probabilidades e Inferencia Estadística.* Limusa, México D. F. , 1985.

[41] Johnson, D. A. *Explorando la Matemática.* McGraw Hill, México D. F., 1970. Tomo I.

[42] Flores, M. A., y Fautsh, E. L. *Temas Selectos de Matemáticas.* Progreso, México D. F. , 1991.

[43] Polya, G. *Matemáticas y razonamiento plausible.* Tecnos S. A. , Madrid, 1966.

[44] Courant, R. , y Robbins, H. *¿Qué es la matemática?.* Aguilar, Madrid, 1979.

[45] Sominskii, I. S. *El método de la inducción matemática.* Limusa, México D. F. , 1976.

[46] Spiegel, M. R. Álgebra Superior, McGraw Hill, México D. F. , 1987.(Serie de compendios Schaum)

[47] Beaumont, R. A., y Pierce, R. S. *The Algebraic foundations of Mathematics.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York , 1963.

[48] Fraleigh, J. B. *Álgebra abstracta: primer curso.* Sistemas Técnicos de edición, México D. F. .1988.

[49] Tahan, M. *El hombre que calculaba.* Noriega Editores, México D.F., 1992.

[50] Kasner, E. , y Newman, J. Matemáticas e imaginación. Compañía Editorial Continental, México . 1972.