



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
CUAUTITLAN**



30  
2EJ

**DISEÑO E IMPLEMENTACION DE FILTROS  
DIGITALES**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA**  
P R E S E N T A N :  
DANA MENA ALVAREZ  
RAFAEL FIDEL CAMACHO PUGA

ASESOR: ING. NICOLAS CALVA TAPIA

**FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# FALLA DE ORIGEN



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN  
UNIDAD DE LA ADMINISTRACIÓN ESCOLAR  
DEPARTAMENTO DE EXÁMENES PROFESIONALES

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS

DR. JAIME KELLER TORRES  
DIRECTOR DE LA FES-CUAUTITLÁN  
P R E S E N T E .

AT'N: Ing. Rafael Rodríguez Ceballos  
Jefe del Departamento de Exámenes  
Profesionales de la F.E.S. - C.

Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS TITULADA:

Diseño e Implementación de Filtros Digitales

que presenta la pasante: Mena Alvarez Dana  
con número de cuenta: 8414371-6 para obtener el TÍTULO de:  
Ingeniera Mecánica Electricista ; en colaboración con:  
Camacho Puqa Rafael Fidel

Considerando que dicha tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el EXÁMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO.

A T E N T A M E N T E .

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cuatitlán Izcalli, Edo. de Méx., a 27 de febrero de 1995

PRESIDENTE Ing. Antonio Herrera Mejía

VOCAL Ing. Nicolás Calva Tapia

SECRETARIO Ing. José Luis Rivera López

PRIMER SUPLENTE Ing. Blanca G. de la Peña Valencia

SEGUNDO SUPLENTE Ing. Jorge Buendía Gómez

# FALLA DE ORIGEN



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN  
UNIDAD DE LA ADMINISTRACION ESCOLAR  
DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS

DR. JAIIME KELLER TORRES  
DIRECTOR DE LA FES-CUAUTITLAN  
P R E S E N T E .

AT'N: Ing. Rafael Rodríguez Ceballos  
Jefe del Departamento de Exámenes  
Profesionales de la F.E.S. - C.

Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS TITULADA:

Diseño e Implementación de Filtros Digitales

que presenta el pasante: Camacho Puga Rafael Fidel  
con número de cuenta: 8439478-1 para obtener el TITULO de:  
Ingeniero Mecánico Electricista ; en colaboración con:  
Mena Alvarez Dana

Considerando que dicha tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO.

A T E N T A M E N T E .  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cuatitlán Izcalli, Edo. de Méx., a 27 de febrero de 1975

PRESIDENTE Ing. Antonio Herrera Meifa

VOCAL Ing. Nicolás Calva Tapia

SECRETARIO Ing. José Luis Rivera López

PRIMER SUPLENTE Ing. Blanca G. de la Peña Valencia

SEGUNDO SUPLENTE Ing. Jorge Buendía Gómez

Quiero dedicar este trabajo a la mujer más admirable, luchadora y tenaz, que me dió la vida, me dió sabiduría a través de cada paso que da en la vida, que ha armonizado el amor y la compasión creando una filosofía de vida para el éxito que me motiva y guía para seguir; muchas gracias por todo madre.

A mi padre ese ser tan místico he imprescindible en mi vida, fuerza motriz de mi carácter.

A mis hermanos, grandes espíritus que me han demostrado que todo lo que para uno vale la pena, vale la pena esforzarse hasta obtenerlo.

A mis amigos, símbolos de paciencia, tenacidad, admiración y comprensión, seres extraordinarios que me han querido sin límites.

A mis maestros, arquitectos sociales, rescatadores de valores universales, quienes han demostrado una entrega total más allá de sus intereses personales.

A el creador mil gracias, pues siempre me ha apartado de los peligros, me ha dado todo lo que he pedido y porque sin él no tendría ni sería lo que hoy soy.

Dana Mena Alvarez

**A mis padres, Rafael e Inga, incansables arquitectos humanos, fuentes de amor e  
inspiración.**

**A la Memoria de Mayo, mi abuela inmortal.**

**A todos mis hermanos, ejemplos de inteligencia y creatividad.**

**A mis verdaderos amigos.**

**A mi amada Universidad.**

**A todos mis maestros, ¡Misión Cumplida!**

**A mi asesor y amigo, Ing. Nicolás Calva Tapia, en agradecimiento a su paciencia y  
comprensión.**

**A la memoria de Vader.**

**A una mujer admirable, tenaz y valiente, que seguirá formando parte imprescindible de mi  
vida, Dana.**

**A los soñadores del Mundo...**

**Rafael Fidel Camacho Puga**

# FALLA DE ORIGEN

## DISENO E IMPLEMENTACION DE FILTROS DIGITALES.

PREFACIO.....	1
---------------	---

### CAPITULO I

#### GENERALIDADES.

1.1 Introducción.....	5
1.2 Tipos de Señales en Tiempo Discreto.....	8
1.3 El Filtro Digital Como un Sistema.....	8
1.3.1 Invariabilidad en el Tiempo.....	10
1.3.2 Causalidad.....	12
1.3.3 Linealidad.....	12
1.4 Caracterización de los Filtros Digitales.....	15
1.4.1 Filtros No Recursivos.....	15
1.4.2 Filtros Recursivos.....	16

### CAPITULO II

#### DISENO DE FILTROS DIGITALES

2.1 Introducción.....	18
2.2 Diseño de Filtros Digitales.....	18
2.3 Estabilidad.....	19
2.4 Efectos de Polos y Ceros de La Respuesta en Frecuen - cia.....	19
2.5 Correspondencia entre frecuencias analógicas y Digi - tales.....	22
2.6 Diseño de Filtros Digitales a partir de modelos ana - lógicos.....	22
2.6.1 Características de filtros analógicos.....	24
2.6.2 Diseño de Prototipos Pasa-bajas Butterworth.....	28
2.6.3 Diseño de Prototipos Pasa-bajas Chebyshev.....	35
2.6.3.1 Características Importantes De los fil-	

# FALLA DE ORIGEN

tros Chebyshev (PPB).....	41
2.6.4 Diseño de Filtros PPB Elípticos.....	48
2.6.5 Diseño de Filtros Pasa-bajas, Pasa-altas, Pasa-banda y supresor de banda.....	58
2.6.5.1 Procedimiento de Diseño de los filtros-analógicos.....	58
2.7 Diseño Directo de Filtros Digitales Pasa-bajas, Pasa-altas, Pasa-banda y Supresor de banda.....	75
2.7.1 Procedimiento Directo para el Diseño de Filtros Digitales.....	84

## CAPITULO III

### REALIZACION DE FILTROS DIGITALES

3.1 Introducción.....	99
3.2 Realización de Filtros Digitales.....	99
3.2.1 Realización Directa.....	104
3.2.2 Realización Directa Canónica.....	107
3.2.3 Realización en Cascada.....	114
3.2.4 Realización en Paralelo.....	114
3.2.5 Realización en Escalera.....	115

## CAPITULO IV

### ALGORITMOS PARA EL DISEÑO DE FILTROS DIGITALES

4.1 Introducción.....	125
4.2 Respuesta en Frecuencia, Método Gráfico.....	126
4.2.1 Obtención de la función de transferencia de un filtro Partiendo de su Respuesta en Frecuencia.....	127
4.3 Transformaciones de Frecuencias Analógicas.....	132
4.3.1 De Pasa-bajas Prototipo a Pasa-bajas.....	132
4.3.2 De Pasa-bajas Prototipo a Pasa-altas.....	133
4.3.3 De Prototipo Pasa-bajas a Filtro Pasa-banda y - y Supresor de Banda.....	138
4.4 Diseño por medio de la Transformada Z.....	149



# FALLA DE ORIGEN

4.5 Diseño por medio del Impulso Invariante y el Escalón-Invariante.....	152
4.5.1 Diseño por medio del Impulso Invariante.....	152
4.5.2 Diseño por medio del Escalón Invariante.....	162
4.6 Diseño por medio de la Transformación Bilineal.....	166
4.6.1 De Prototipo a Pasa-bajas: $HLP_p(s)$ a $HLP_p(z)$ .....	182
4.7 Transformaciones de Frecuencias Digitales.....	184

## CAPITULO V

### CARACTERÍSTICAS DE RESPUESTA DE LOS FILTROS DIGITALES

5.1 Introducción.....	188
5.2 Chebyshev Pasa-Altas.....	188
5.3 Elíptico Pasa-Banda.....	193
5.4 Chebyshev Pasa-Banda.....	197
5.5 Elíptico Pasa-Bajas.....	203
Descripción del programa.....	209
Programa de Diseño de Filtros Digitales Recursivos.....	211
Ejemplos Realizados con el Programa D.I.F.D.....	249
Apéndice A. Tablas de transformada Z.....	273
Apéndice B. Descripción General del Programa.....	274
Conclusiones.....	278
Bibliografía.....	279

## INTRODUCCION

El procesamiento digital de señales es un campo de estudio que se interesa en el tratamiento de información representada en forma digital. Muchas técnicas en este campo se deben a algoritmos numéricos desarrollados en los siglos XVII y XVIII. Uno de los aspectos más interesantes en el procesamiento de señales es su amplia variedad de aplicaciones, lo cual ha servido para crear un campo de estudio y de innovación tecnológica muy fértil.

El procesamiento de señales no está restringido a datos unidimensionales. Hay muchas aplicaciones de proceso multidimensional. El procesamiento de imágenes, el tratamiento de señales provenientes de arreglos de antenas y aplicaciones similares son tan importantes como los problemas unidimensionales.

El procesamiento digital en tiempo real es posible hoy en día, con excepción de aquellas aplicaciones que involucran anchos de banda muy grandes. El procesamiento analógico influyó los desarrollos en el procesamiento digital de señales. Era natural al principio utilizar una técnica digital para aproximar un esquema de proceso analógico dado. Con el paso del tiempo los científicos se dieron cuenta que los procesos digitales eran más flexibles y que no poseían las restricciones de las técnicas analógicas. Aún las técnicas de procesamiento tradicional, como el análisis espectral, podían implementarse con mayor exactitud y mejor resolución.

Durante las últimas dos décadas el procesamiento digital de señales ha adquirido un auge importante, debido a la creación de computadoras más pequeñas, poderosas y baratas. Esta tendencia, también se ha visto acoorada por el desarrollo de procedimientos numéricos (algoritmos) especiales para el procesamiento digital de señales. En la actualidad, se pueden encontrar sistemas de procesamiento digital, aplicados en diversas áreas, de las cuales trataremos a continuación de una forma meramente superficial.

# FALLA DE ORIGEN

## PROCESAMIENTO DE SEÑALES DE VOZ

Este tipo de procesamiento es aplicable al:

- a) Grabar y transmitir señales de voz.
- b) Ecuilizar señales de voz, para mejorar su calidad y su inteligibilidad.
- c) Generar y sintetizar formas de onda que se asemejen a la voz humana.
- d) Verificar la identidad de una persona, a partir de su voz.
- e) Distinguir palabras oídas por alguna persona y escribirlas automáticamente.
- f) Modificar la información generada por voz y transformarla en alguna forma más fácil de entender por enfermos del oído.

Una meta primordial de los sistemas de transmisión digital de voz, es reducir la cantidad de datos que necesiten enviarse, para reconstruir la forma de onda original, en el lado receptor.

El objetivo de la ecualización de voz, es el de mejorar la calidad de la voz, que se ha disminuido debido al ruido de fondo. Por ejemplo, la voz de un piloto dentro de la cabina ruidosa de alguna aeronave no podría entenderse muy bien, sin la ayuda del procesamiento de señales que suprime el ruido.

Los sistemas de síntesis de voz se utilizan para generar señales audibles que se parezcan a la voz humana. Esto se logra excitando un modelo del "habla humana", con ciertos valores en sus parámetros, para producir las señales de voz deseadas. Las aplicaciones incluyen a los modernos sistemas de respuesta automática, que nos invitan a dar nuestro número de tarjeta de crédito al momento de realizar llamadas de larga distancia, o bien hacer un depósito dentro de los siguientes tres minutos.

El propósito de los sistemas de verificación e identificación de voz, es averiguar la identidad de una persona, a partir de su voz. Esto podría utilizarse para controlar el acceso a una base

# FALLA DE ORIGEN

de datos de voz, para su uso en los bancos automatizados del futuro.

En los sistemas de reconocimiento de voz, el objetivo es obtener el equivalente escrito de las palabras pronunciadas por una persona. Esta función se necesita en los sistemas de entrada por voz a una computadora, que controlará la ayuda doméstica a personas minusválidas.

# **Capítulo 1**

## **Generalidades**

# FALLA DE ORIGEN

## GENERALIDADES.

### 1.1 INTRODUCCION.

Se le da el nombre de "filtro digital" al proceso computacional o algoritmo por medio del cual una señal muestreada (o secuencia de números) de entrada se transforma en una segunda secuencia de números que conforman la señal de salida. El algoritmo computacional puede realizar un filtrado pasabajos, pasabanda, un proceso de interpolación, o de derivación, entre otros.

El procesamiento de señales existe en casi cualquier campo de la ciencia y la ingeniería, por ejemplo: en acústica, en ingeniería biomédica, comunicaciones, sistemas de control, radar, física, sismología y telemetría.

Existen dos clases generales de señales, las continuas y las discretas (en el tiempo).

El "filtrado" es un proceso por medio del cual el espectro de frecuencia de una señal se puede modificar o manipular de acuerdo con una especificación previa: ya sea amplificando o atenuando un rango de componentes de frecuencia al tiempo que rechazan otros.

El uso de filtros es extenso. Entre otras aplicaciones, se emplean para eliminar la contaminación de señales (ruido), remover la distorsión (causada por un canal de transmisión defectuoso o por interferencias), para separar dos o más señales distintas (que hayan sido mezcladas a propósito para aprovechar al máximo un canal de comunicación), para descomponer señales en sus componentes de frecuencia, demodularlas, y/o convertirlas de discretas en el tiempo a señales continuas, etc..

Un filtro digital es un sistema que procesa señales discretas. Puede implementarse usando software o, hardware específicamente diseñado para tal fin. En cualquiera de los casos se emplea para

filtrar señales en tiempo real o señales en tiempo no real (grabadas).

Los filtros digitales implementados por software hicieron su aparición con la primera computadora digital a finales de la década de los 40's.

Más adelante en la historia de la computación digital se utilizaron muchas fórmulas clásicas de análisis numérico: para llevar a cabo la interpolación, diferenciación e integración de señales, representadas por secuencias de números (señales en tiempo discreto). Dado que todos estos procesos aplicados a una señal, implican una modificación de su espectro de frecuencias, las subrutinas o programas desarrollados para efectuar estas operaciones, eran en esencia, filtros digitales.

En los años subsiguientes se desarrollaron algoritmos y programas complejos, altamente sofisticados para realizar una gran variedad de acciones de "filtrado" para diversas aplicaciones, tales como el reconocimiento de patrones visuales, el procesamiento de electrocardiogramas y el análisis espectral.

Una señal continua en el tiempo, de banda limitada se puede transformar en una señal discreta, por medio del muestreo. De manera similar, la señal discreta resultante se puede utilizar para regenerar la señal, continua original por medio de la interpolación, y en virtud del teorema de muestreo de Nyquist. Como consecuencia; los filtros digitales implementados por hardware se pueden usar para filtrar señales en tiempo real; cosa

que en el pasado se realizaba exclusivamente con filtros analógicos.

Las principales ventajas que se obtienen con ello, son las asociadas con los sistemas digitales en general, como son:

- 1.- Las tolerancias de los componentes no son críticas.
- 2.- Los efectos del funcionamiento de los componentes y

# FALLA DE ORIGEN

Las señales ambientales indeseables, no tienen influencia en el funcionamiento del sistema.

- 3.- La exactitud es alta.
- 4.- El tamaño es pequeño.
- 5.- Sin retardos.

Una ventaja adicional importante de los filtros digitales, es la facilidad con la que los parámetros del filtro se pueden cambiar, para modificar sus características. Esta propiedad nos permite diseñar filtros "programables", muy versátiles. También, se pueden diseñar nuevos tipos de filtros, tales como los adaptativos. La principal desventaja de los filtros digitales en hardware era su alto costo. Sin embargo con el tremendo desarrollo en el campo de la integración a gran escala (Large Scale Integration), el costo de los filtros digitales en hardware, ha caído. Por esto, los filtros digitales en hardware reemplazan a los filtros analógicos, cada vez, en más aplicaciones.

El análisis de un filtro es el proceso de determinar su respuesta a una excitación definida.

El diseño, por otra parte, es el proceso de implementar una red de filtro que produzca respuestas deseadas.

Un filtro digital se puede representar por medio del siguiente diagrama a bloques:



Figura 1.1



# FALLA DE ORIGEN

Las secuencias de entrada  $x(nT)$  y de salida  $y(nT)$ , son la excitación y la respuesta del filtro, respectivamente. La respuesta está relacionada con la entrada por una regla de correspondencia, que podemos expresar por medio de la siguiente notación:

$$y(nT) = R x(nT)$$

donde  $R$  es un operador.

Como cualquier otro sistema de procesamiento de señales los filtros pueden clasificarse como invariantes en el tiempo o dependientes del tiempo, causales o no causales, lineales o no lineales.

## 1.2 TIPOS DE SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO.

Una señal continua en el tiempo se puede representar por la función  $x(t)$  cuyo dominio es el rango de números  $(t_1, t_2)$ , donde  $-\infty \leq t_1$  y  $t_2 \leq \infty$ . Similarmente una señal en tiempo discreto se puede representar por la función  $x(nT)$ , donde  $T$  es una constante y  $n$  es un entero en el rango  $(n_1, n_2)$  tal que  $-\infty \leq n_1$  y  $n_2 \leq \infty$ .

Como para una señal en tiempo continuo, se pueden identificar dos tipos de señales en tiempo discreto, a saber señales cuantizables y no cuantizables. Una señal no cuantizable es una que puede tomar cualquier valor dentro de un rango específico, mientras que una señal cuantizable puede tomar solamente un número finito de valores discretos. Por ejemplo la temperatura ambiente es una función del tiempo y es una señal no cuantizable. Sin embargo la temperatura ambiente es medida por un termómetro digital y esta es una señal cuantizable. en la figura 1.2 se ilustran varios tipos de señales.

## 1.3 EL FILTRO DIGITAL COMO UN SISTEMA.

Un filtro digital se puede representar como se mencionó

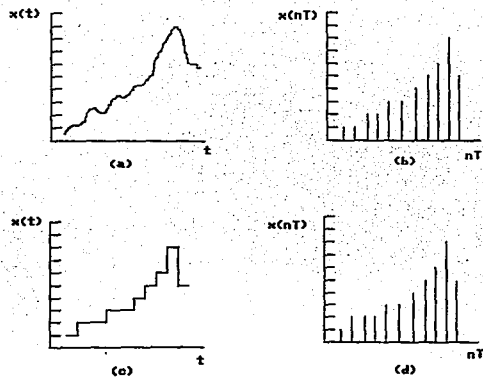


Figura 1.2 Tipos de señales: (a) continuas en el tiempo no cuantizables  
 (b) discretas en el tiempo no cuantizables. (c) continuas en el  
 tiempo y cuantizables. (d) discretas en el tiempo y cuantizables.

anteriormente por la figura 1.1, como otros sistemas de señales, los filtros digitales se pueden clasificar de tiempo invariante o tiempo dependiente, causales o no causales, lineales o no lineales.

### 1.3.1 INVARIABILIDAD EN EL TIEMPO.

Un filtro digital es "invariante en el tiempo" si sus parámetros internos no cambian con el tiempo. Esto significa que una excitación específica producirá siempre la misma respuesta independientemente del tiempo de aplicación.

Formalmente, se dice que un filtro sin excitación inicial en el cual  $x(nT) = y(nT) = 0$  para todo  $n < 0$ , es invariante en el tiempo, si y solo si:

$$R_x(nT - kT) = y(nT - kT)$$

para todas las posibles excitaciones. El comportamiento de un filtro invariante en el tiempo se ilustra en la figura 1.3 a y b.

---

**EJEMPLO 1.1** (a) Un filtro digital se caracteriza por la siguiente ecuación:

$$y(nT) = R_x(nT) = 2nT x(nT)$$

revise si el filtro es invariante en el tiempo. (b) Repetir la parte (a) si:

$$y(nT) = R_x(nT) = 12x(nT - T) + 11x(nT - 2T)$$

**SOLUCION.** (a) La respuesta a una excitación retardada es la siguiente:

$$R_x(nT - kT) = 2nT [x(nT - kT)]$$

La respuesta retardada es

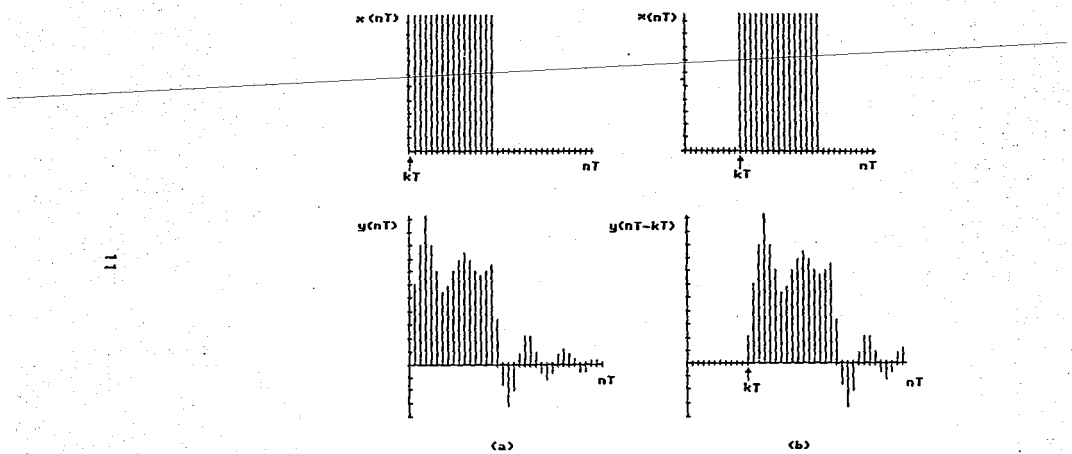


Figura 1.3 Invarianza en el tiempo; respuesta a: (a) una excitación  $x(nT)$  y (b) una excitación con retardo  $x(nT - kT)$ .

$$y(nT - kT) = 2(nT - kT)[x(nT - kT)]$$

claramente podemos ver:

$$R_x(nT - kT) = y(nT - kT)$$

y por lo tanto, el filtro depende del tiempo.

(b) En este caso

$$R_x(nT - kT) = 12x[(n - k)T - T] + 11x[(n - k)T - 2T] = y(nT - kT)$$

por lo tanto el filtro es invariante en el tiempo.

### 1.3.2 CAUSALIDAD.

Un filtro digital causal es aquel cuya respuesta en un instante específico es independiente de los valores subsiguientes de la excitación. Más específicamente, un filtro digital es causal si y solo si

$$R_{x_1}(nT) = R_{x_2}(nT) \quad \text{para } n \leq k$$

para todos los posibles pares de excitación  $x_1(nT)$  y  $x_2(nT)$  que satisfagan la condición {

$$x_1(nT) = x_2(nT) \quad \text{Para } n \leq k$$

$$x_1(nT) \neq x_2(nT) \quad \text{Para } n > k$$

Este criterio se ilustra en la figura 1.4a y b para un filtro causal.

### 1.3.3 LINEALIDAD.

Un filtro digital es lineal si y solo si satisface las siguientes condiciones:

$$R[\alpha x_1(nT) + \beta x_2(nT)] = \alpha R_{x_1}(nT) + \beta R_{x_2}(nT)$$

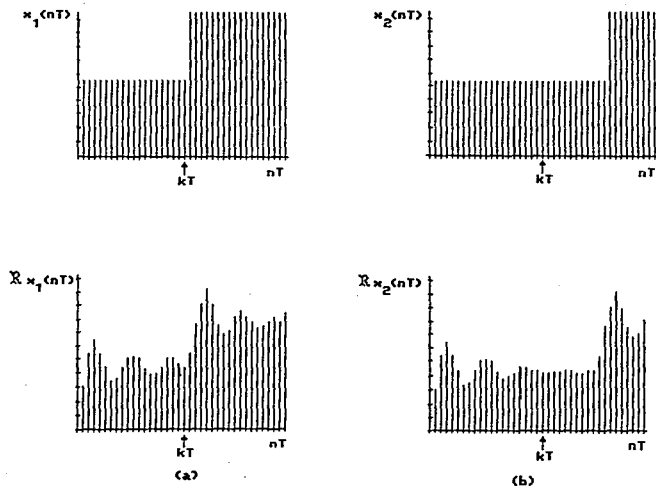


Figura 1.4 Causalidad: (a) respuesta a  $x_1(nT)$ . (b) respuesta a  $x_2(nT)$ .

para todos los posibles valores de  $\alpha$  y todas las posibles excitaciones  $x_1(nT)$  y  $x_2(nT)$ .

La respuesta de un filtro lineal a una excitación  $\alpha x_1(nT) + \beta x_2(nT)$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes arbitrarias, se puede expresar como

$$\begin{aligned}y(nT) &= R[\alpha x_1(nT) + \beta x_2(nT)] = R\alpha x_1(nT) + R\beta x_2(nT) \\ &= \alpha R x_1(nT) + \beta R x_2(nT)\end{aligned}$$

Por lo tanto, las dos condiciones de arriba se pueden combinar en una como:

$$R[\alpha x_1(nT) + \beta x_2(nT)] = \alpha R x_1(nT) + \beta R x_2(nT)$$

---

**Ejemplo 1.2** (a) La respuesta de un filtro digital es de la forma

$$y(nT) = R x(nT) = 7x^2(nT - T)$$

revise si el filtro es lineal. (b) Repita la parte (a) si

$$y(nT) = R x(nT) = (nT)^2 x(nT + 2T)$$

**Solución:** (a) Para una constante  $\alpha$  diferente a la unidad

$$R\alpha x(nT) = 7\alpha^2 x^2(nT - T)$$

mientras que:

$$\alpha R x(nT) = 7\alpha x^2(nT - T)$$

claramente podemos ver

$$R\alpha x(nT) \neq \alpha R x(nT)$$

y por lo cual el filtro no es lineal.

(b) Para este caso

$$\begin{aligned}R[\alpha x_1(nT) + \beta x_2(nT)] &= (nT)^2 [\alpha x_1(nT + 2T) + \beta x_2(nT + 2T)] \\ &= \alpha (nT)^2 x_1(nT + 2T) + \beta (nT)^2 x_2(nT + 2T) \\ &= \alpha R x_1(nT) + \beta R x_2(nT)\end{aligned}$$

Por lo tanto el filtro es lineal.

#### 1.4 CARACTERIZACION DE LOS FILTROS DIGITALES.

Los filtros analógicos se describen en términos de ecuaciones diferenciales. Los filtros digitales, por otra parte, se describen en términos de ecuaciones en diferencias. Existen dos tipos de filtros digitales, los no-recursivos y los recursivos.

##### 1.4.1 FILTROS NO RECURSIVOS.

La respuesta de un filtro no-recursivo en un instante  $nT$  es de la forma

$$y(nT) = f(\dots x(nT-T), x(nT), x(nT+T), \dots)$$

si consideramos que el filtro es lineal e invariante en el tiempo,  $y(nT)$  se puede expresar como

$$y(nT) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l x(nT - lT) \quad (1.1)$$

donde  $\alpha_l$  representa varias constantes. Ahora, si asumimos además, que el filtro es causal y, empleando el criterio de causalidad que acabamos de definir, se puede demostrar que:

$$\alpha_{-1} = \alpha_{-2} = \dots = 0$$

así que

$$y(nT) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l x(nT - lT)$$

Si además,  $x(nT) = 0$  para  $n < 0$  y  $\alpha_l = 0$  para  $l > N$ .

$$\begin{aligned} y(nT) &= \sum_{l=0}^n \alpha_l x(nT - lT) + \sum_{l=n+1}^{\infty} \alpha_l x(nT - lT) \\ &= \sum_{l=0}^N \alpha_l x(nT - lT) + \sum_{l=N+1}^{\infty} \alpha_l x(nT - lT) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l x(nT - lT) \end{aligned} \quad (1.3)$$



Por lo tanto un filtro lineal, invariante en el tiempo, causal y no-recursivo, se puede representar por una ecuación en diferencias lineal de  $N$ ésimo orden.  $N$  es el orden del filtro.

#### 1.4.2 FILTROS RECURSIVOS.

La respuesta de un filtro recursivo es una función de términos tanto de la secuencia de excitación, como de la secuencia de respuesta. En el caso de un filtro causal, lineal e invariante en el tiempo

$$y(nT) = \sum_{i=0}^N a_i x(nT - iT) - \sum_{i=1}^N b_i y(nT - iT)$$

# **Capítulo 2**

## **Diseño de**

### **Filtros Digitales**

## DISEÑO DE FILTROS DIGITALES

### 2.1 INTRODUCCION.

En el presente capítulo se mostrará el diseño a partir de sus modelos analógicos, el diseño de filtros pasa bajas, pasa-altas, etc., se realiza en dos pasos. Primero una normalización de la función de transferencia (filtros prototipos) pasa-bajas se transforma a una función de transferencia pasa-bajas, pasa-altas, etc., desnormalizada, empleando las transformaciones analógicas descritas en el capítulo 4, una vez realizado este proceso se aplica la transformación bilineal y, posteriormente se realizará una pre-deformación (prewarp), seleccionando los parámetros apropiados en el filtro analógico.

En este capítulo consideraremos con detalle los procedimientos de diseño, las fórmulas obtenidas a partir de las transformaciones analógicas para los filtros Butterworth, Chebyshev, Chebyshev inverso y elípticos, así como el uso de tablas que simplifiquen la obtención de la función de transferencia de los filtros.

### 2.2 DISEÑO DE FILTROS DIGITALES

El diseño de filtros se puede ver como el problema de "dar forma" a su respuesta en frecuencia, por medio de decidir acerca del número y la cualidad de las raíces que deberán formar a los polinomios del numerador y denominador de la función de transferencia  $H(z)$ .

A pesar de que existen otros métodos mucho más formales para el diseño de filtros, es bueno saber que se pueden diseñar filtros con características de funcionamiento aceptables por medio de un simple procedimiento gráfico.

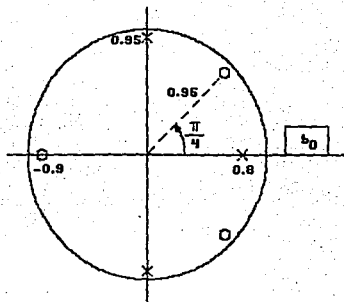
Antes de describir esta técnica de diseño, se expondrán algunos conceptos simples que nos ayudarán a comprenderlo.

### 2.3 ESTABILIDAD.

Como sólo tiene sentido hablar de respuesta en frecuencia  $H(e^{j\theta})$  para sistemas estables, debemos aclarar que para cualquier filtro estable, causal y de coeficientes reales, todos los polos de su función de respuesta en frecuencia generalizada,  $H(z)$ , deben estar dentro del círculo unitario del plano complejo " $z$ ". Los ceros pueden estar en cualquier parte del plano. Ambos, pueden ser reales o complejos, pero si son complejos deberán aparecer como pares conjugados.

### 2.4 EFECTOS DE POLOS Y CEROS EN LA RESPUESTA EN FRECUENCIA.

- a) Un polo cercano al círculo unitario produce una ganancia grande en las frecuencias próximas a la denotada por su ángulo. Por lo tanto, en la figura (2.1), el polo en 0.8 produce una ganancia relativamente grande en  $\theta = 0$  (el vector que va desde el polo al círculo unitario es relativamente corto). Naturalmente, los otros polos y ceros contribuyen a dar forma a la porción de magnitud " $M$ " de la respuesta en frecuencia, pero para  $\theta = 0$ , el polo en 0.8 "domina la situación". De manera similar, el polo en  $0.95e^{j\pi/2}$  produce ganancias más grandes en las frecuencias cercanas a  $\theta = \pi/2$ , porque el vector que va desde el polo hasta el círculo unitario es pequeño.
- b) Un cero cerca del círculo unitario produce ganancias pequeñas en frecuencias cercanas a la involucrada en su ángulo. El vector del cero en  $-0.9$  al círculo unitario es pequeño para frecuencias cercanas a  $\theta = \pi$  y por lo tanto, controla la ganancia ahí. Por supuesto, que al existir un cero exactamente sobre el círculo unitario se tendrá ganancia nula de la frecuencia en ese punto. Es un manera efectiva de eliminar frecuencias indeseables. Tener ceros fuera del círculo unitario, también podría ser deseable.



$$H(z) = b_0 \frac{(z+0.9)(z-0.95e^{j\pi/4})(z-0.95e^{-j\pi/4})}{(z+0.8)(z-0.95e^{j\pi/2})(z-0.95e^{-j\pi/2})}$$

Figura 2.1 (a) Descripción de polos y ceros.

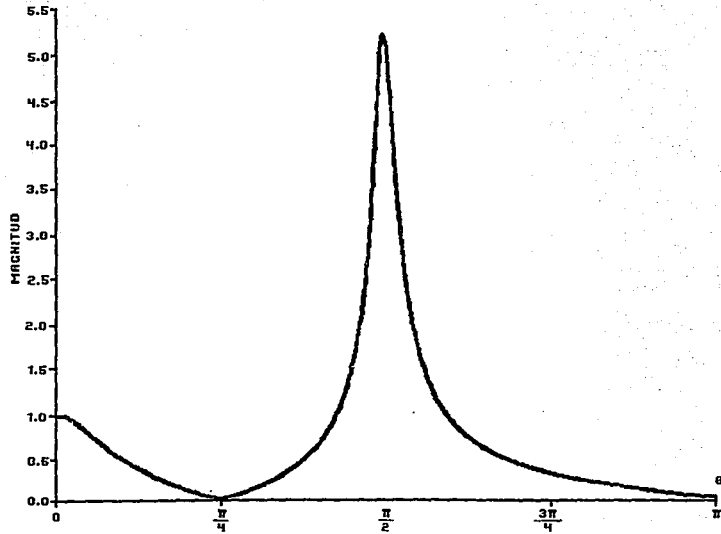


Figura 2.7 (b) Magnitud de la Respuesta en Frecuencia, M

- c) La escala de magnitud de la respuesta en frecuencia puede establecerse por medio del factor  $b_0$ . Es común manipular esta constante de tal forma que obtengamos cierta ganancia especial en una frecuencia.
- d) Finalmente. ¿Cómo podemos estimar valores pertinentes de fase a partir de un diagrama de polos y ceros?. Con excepción de los casos más simples, es difícil obtener información útil de la característica de fase, por medio de la simple inspección de estos diagramas.

## 2.5 CORRESPONDENCIA ENTRE FRECUENCIAS ANALÓGICAS Y DIGITALES.

Para procesar señales analógicas por medio de técnicas digitales, estas deberán pasar primero por un proceso de muestreo. Consideremos por ejemplo, una senoide:

$$x(t) = X_1 \cos(\omega_1 t)$$

... y su versión muestreada con un intervalo de  $T$  segundos:

$$x(nT) = X_1 \cos(\omega_1 nT)$$

... ó en términos de "f":

$$x(nT) = X_1 \cos(2\pi f_1 nT)$$

Recordando que la frecuencia de muestreo es  $f_s = \frac{1}{T}$  y que la mayor frecuencia inteligible de la señal muestreada es de  $\frac{f_s}{2}$ , podemos dibujar los círculos unitarios de la figura (2.2) con las frecuencias analógicas correspondientes.

## 2.6 DISEÑO DE FILTROS DIGITALES A PARTIR DE MODELOS ANALÓGICOS.

El diseño de filtros usando métodos gráficos, a pesar de que produce resultados aceptables, no es más que un procedimiento de

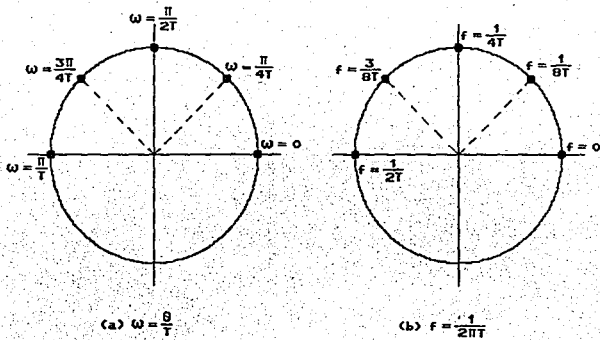


Figura 2.2: Relación entre las frecuencias analógicas y digitales



"ensayo y error". Se pueden alcanzar buenos resultados pero frecuentemente, a expensas de un gran número de términos (retardos). Ahora consideraremos un método sistemático para el diseño de filtros recursivos (IIR). Una posibilidad es utilizar la extensa literatura para el diseño de filtros analógicos y después convertir éstos a una red susceptible de implementarse digitalmente. La transición de analógico a digital es más o menos mecánica así que, el problema principal es diseñar un filtro analógico que cumpla con ciertos requerimientos como se ilustra en la figura 2.3 a y b.

Las funciones de transferencia de filtros analógicos se describen en términos de la variable compleja "s", con una función de transferencia típica como la siguiente:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K(s+1)}{s^2 + 5s + 6} \quad (2.1)$$

Donde X(s) representa la transformada de Laplace de x(t), (la entrada al filtro), y, Y(s) es la transformada de Laplace de y(t). (la salida del filtro).

Se tratarán con tres de los principales tipos de filtros, a saber: Butterworth, Chebyshev y Elípticos, con el interés especial de determinar el orden necesario para que cumplan con especificaciones previamente determinadas.

## 2.6.1 CARACTERISTICAS DE FILTROS ANALOGICOS.

Un filtro analógico se describe por la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k(s^L + b_{L-1}s^{L-1} + \dots + b_1s + b_0)}{s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.2)$$

Donde N denota el orden del filtro, k es una constante real; y el

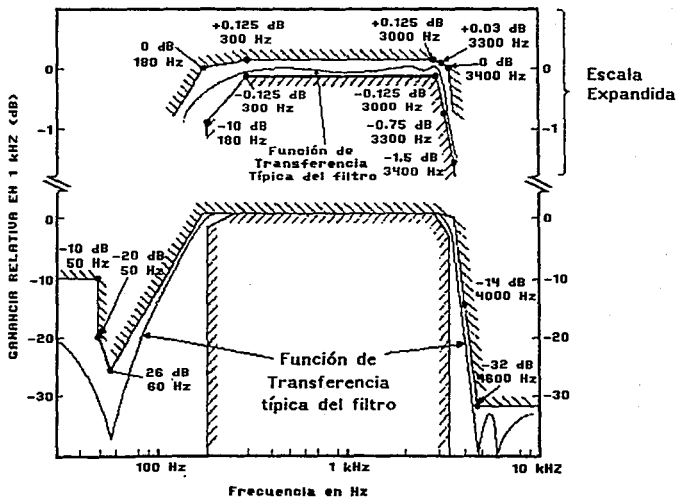


Figura 2.3 (a) Diagrama de especificaciones para un filtro transmisor



orden del numerador "L", es menor o igual al orden del denominador N.

Como en el caso de los sistemas discretos, la cuestión de estabilidad es importante cuando hablamos de filtros analógicos.

Si consideramos la respuesta al impulso unitario de un filtro de segundo orden, tenemos:

$$Y(s) = H(s)X(s) \\ = \frac{ks}{s^2 + a_1s + a_0} \cdot 1 \quad (2.3)$$

... esto es porque la transformada de Laplace del impulso unitario es la unidad.

Utilizando una expansión en fracciones parciales tenemos

$$Y(s) = \frac{ks}{(s-d_1)(s-d_2)} = \frac{C_1}{s-d_1} + \frac{C_2}{s-d_2} \quad (2.4)$$

Donde  $d_1$  y  $d_2$  son los polos de  $H(s)$ , y también los polos de  $Y(s)$  cuando la entrada es el impulso unitario. Obteniendo la transformada inversa de la salida:

$$y(t) = h(t) = C_1 e^{d_1 t} + C_2 e^{d_2 t}, \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

para asegurar que el sistema es estable la respuesta al impulso unitario deberá decaer hasta cero conforme el tiempo avanza.

Una inspección de la ecuación 2.5 nos revela que  $d_1$  y  $d_2$  deben ser reales y negativos, o bien complejos con partes reales negativas, para que la condición de estabilidad se cumpla.

Este resultado se puede extender a sistemas de orden más alto y

el resultado será el mismo: Todos los polos de la función de transferencia  $H(s)$  deberán estar a la izquierda del eje imaginario del plano complejo  $s$ .

## 2.6.2 DISEÑO DE PROTOTIPOS PASA-BAJAS BUTTERWORTH.

La aproximación a un filtro pasa-bajas ideal debida al Ing. Británico S. Butterworth se denomina "Maximalmente Plana", su característica de magnitud al cuadrado se define como sigue:

$$|HLP(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}} \quad \text{ó} \quad |HLP(j\omega)| = \frac{1}{(1 + (\omega/\omega_c)^{2N})^{1/2}} \quad (2.6)$$

donde  $N$  es el orden del filtro,  $\omega_c$  se define como la frecuencia de corte, y la respuesta en magnitud del filtro es  $1/\sqrt{2}$  veces la ganancia de corriente directa ( $\omega = 0$ ). Para una frecuencia de corte, (o frecuencia crítica), de 1, el filtro se llama "Filtro Prototipo Pasa-Bajas". Substituyendo en (2.6) obtenemos:

$$|HLP_p(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2N}} \quad \text{ó} \quad |HLP_p(j\omega)| = \frac{1}{(1 + \omega^{2N})^{1/2}} \quad (2.7)$$

como una forma general de la respuesta Butterworth de la figura (2.4), en donde se muestran las curvas para tres valores diferentes de  $N$ . Algunas observaciones que podemos hacer son las siguientes:

- 1.- Para  $\omega = 1$  la magnitud  $M = |HLP_p(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$  ó  $M^2 = |HLP_p(j\omega)|^2 = 1/2$  para todos los valores de  $N$ . Esto corresponde a  $M_{dB} = -3$  dB.
- 2.-  $|HLP_p(j\omega)| \rightarrow 0$  conforme  $\omega \rightarrow \infty$
- 3.-  $|HLP_p(j\omega)|^2 = |HLP_p(j\omega)| = 1$  para  $\omega = 0$ , independientemente del valor de  $N$ .
- 4.- Se dice que la característica de magnitud es "Maximalmente Plana" porque  $d^N/d\omega^n \Big|_{\omega=0} = 0$  para  $n = 1, 2, 3, \dots, 2N-1$ .
- 5.- Lo abrupto de la transición de la gráfica de

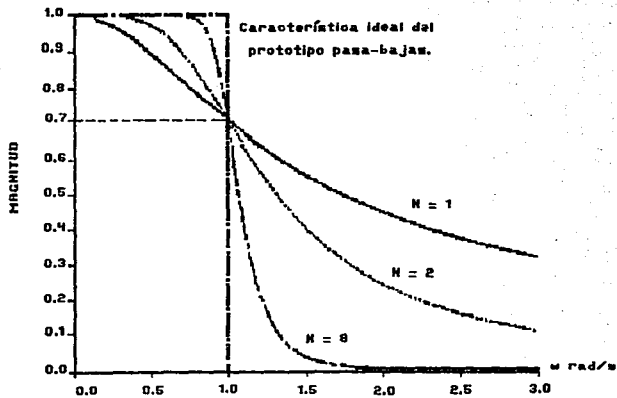


Figura 2.4 (a) Magnitud

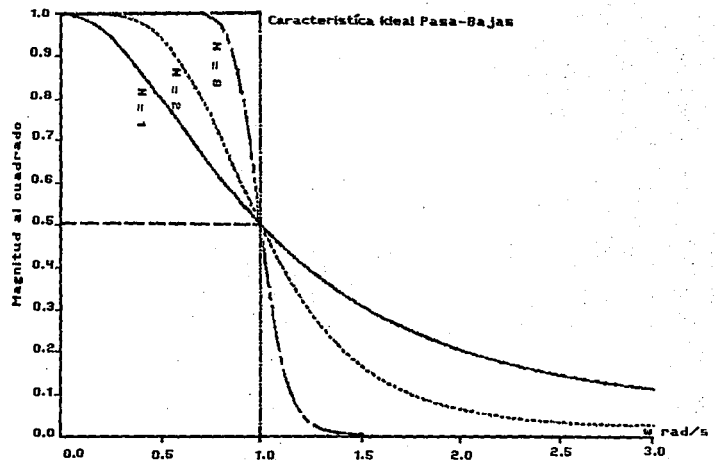


Figura 2.4 (b) Magnitud al Cuadrado

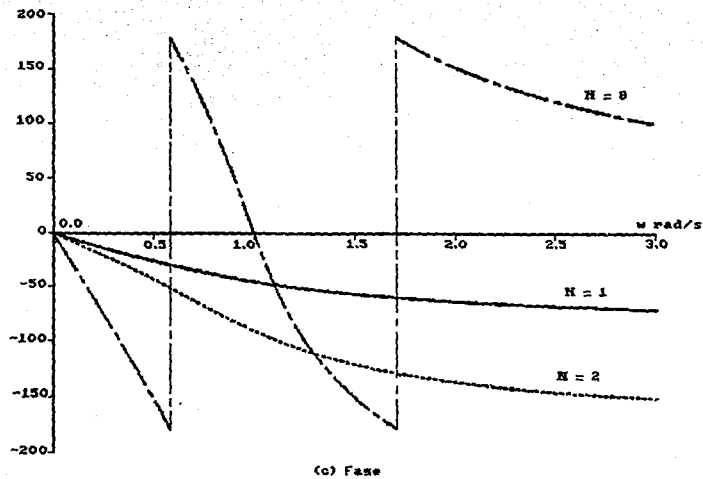


Figura 2.4 Respuesta en Frecuencia para el Filtro Prototipo  
Pasa-Bajas Butterworth para  $N = 1, 2$  y  $8$



$|H_{LP_p}(j\omega)|$  vs.  $\omega$ , está en función directa de  $N$ , y en  $\omega = 1$ ,  $d|H_{LP_p}(j\omega)| / d\omega = -0.354N$ .

6.-  $M = |H_{LP_p}(j\omega)|$ , es una función decreciente monótona de frecuencia, esto es,  $|H_{LP_p}(j\omega_2)| < |H_{LP_p}(j\omega_1)|$  para cualquier valor de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , de tal manera que  $0 \leq \omega_1 < \omega_2$ .

Para determinar los polos de un filtro prototipo pasa-bajas Butterworth empezariamos con:

$$|H_{LP_p}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2N}} \quad (2.8)$$

y después necesitamos encontrar  $H_{LP_p}(s)H_{LP_p}(-s)$  con:

$$H_{LP_p}(s)H_{LP_p}(-s) = \frac{1}{1 + \omega^{2N}} \Big|_{\omega = -js} \quad (2.9)$$

por lo tanto, para los polos de  $H_{LP_p}(s)H_{LP_p}(-s)$  tenemos:

$$1 + (-js)^{2N} = 0 \quad (2.10)$$

lo que puede escribirse como:

$$1 + (-s^2)^N = 0 \quad (2.11)$$

Para  $N$  impar tenemos:

$$1 - s^{2N} = 0, \quad s^{2N} = 1 \text{ y las raíces son } s_k = 1e^{j(k2\pi/2N)} = 1e^{jk\pi/N}$$

donde:  $k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$  (2.12)

y con  $N$  par:

$$1 + s^{2N} = 0, \quad s^{2N} = -1 \text{ y las raíces son } s_k = 1e^{j\pi + k2\pi/2N}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1.$$

La única variable de diseño para los filtros Butterworth pasa-bajas prototipo (PFB) es el orden del filtro  $N$ , por lo tanto, el diseño se reduce a una simple cuestión de determinar el mínimo valor de  $N$  (para complejidad mínima), para el cual se cumplen las especificaciones.

TABLA 2.1 COEFICIENTES PROTOTIPO BUTTERWORTH

$N$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
1	1.0000							
2	1.4141	1.0000						
3	2.0000	2.0000	1.0000					
4	2.6181	3.4142	2.6181	1.0000				
5	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361	1.0000			
6	3.8577	7.4641	9.1416	7.4641	3.8577	1.0000		
7	4.4740	10.0778	14.5918	14.5918	10.0778	4.4740	1.0000	
8	5.1258	13.1971	21.8402	25.0884	21.8402	13.1971	5.1258	1.0000

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_N s^N}$$

Para diseñar un filtro Butterworth necesitamos encontrar el orden del filtro  $N$  y utilizar la tabla 2.1 para determinar la función de transferencia  $H_{LP}(s)$  del prototipo (normalizado a  $\omega_c = 1$ ). Después se necesitará una transformación en frecuencia apropiada para encontrar una  $H_{LP}(s)$  no normalizada.

Para encontrar  $N$  comenzamos con la característica de magnitud normalizada ( $\omega_c = 1$ )

$$M = |H_{LP}(j\omega)| = \frac{1}{(1 + \omega^{2N})^{1/2}} \quad (2.13)$$

esta puede expresarse en decibeles (dB) como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} M_{dB} &= 20 \log_{10} M \\ &= 10 \log_{10} M^2 \end{aligned}$$

Para una frecuencia específica  $\omega_a$ :

$$\begin{aligned} M_{dB} &= 10 \log_{10} |H_{LP_F}(j\omega_a)|^2 \\ &= 10 \log_{10} \frac{1}{1 + \omega_a^{2N}} \\ &= 10 \log_{10} 1 - 10 \log_{10} (1 + \omega_a^{2N}) \end{aligned}$$

En  $\omega = \omega_a$ :

$$M_{dB} = -10 \log_{10} (1 + \omega_a^{2N})$$

Resolviendo para N (orden del filtro), tenemos:

$$\begin{aligned} -M_{dB}/10 &= \log_{10} (1 + \omega_a^{2N}) \\ 10^{-(M_{dB}/10)} &= 1 + \omega_a^{2N} \\ 10^{-(M_{dB}/10)} - 1 &= \omega_a^{2N} \quad (2.14) \end{aligned}$$

Obteniendo el logaritmo de la expresión anterior:

$$\log_{10} (10^{-(M_{dB}/10)} - 1) = 2N \log_{10} \omega_a$$

Por lo tanto el orden del filtro que se necesita para cumplir con cierta magnitud (M) en una frecuencia  $\omega_a$ , es:

$$N = \frac{\log_{10} (10^{-(M_{dB}/10)} - 1)}{2 \log_{10} \omega_a} \quad (2.15)$$

En general, el valor de N que resulta de (2.15) no será un entero. Si se deben cumplir varias características de diseño, todas las frecuencias a considerar, deberán involucrarse en el cálculo. El mayor valor obtenido de éstos, deberá aumentarse hasta el N inmediato superior (que será el orden del filtro a

utilizar).

### 2.6.3 DISEÑO DE PROTOTIPOS PASA-BAJAS CHEBYSHEV.

Otro tipo de filtro se basa en el uso de los polinomios Chebyshev como medio de aproximación a la respuesta en frecuencia ideal de un filtro pasa-bajas. Esta aproximación se debe a Pafnuti L. Chebyshev, quien publicó su trabajo en 1899 relacionado con sus investigaciones acerca de máquinas de vapor.

Este tipo de filtros pueden clasificarse en tres categorías: un Chebyshev con rizo en la banda de paso, un Chebyshev "inverso" con rizo en la banda suprimida y otro "elíptico", con rizo tanto en la banda de paso, como en la suprimida.

La característica de magnitud al cuadrado de un filtro (PPB) Chebyshev, está dada por:

$$|H_{LP}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\omega)} \quad (2.16)$$

donde el polinomio Chebyshev de N-ésimo orden es:

$$C_N(\omega) = \cos(N \cos^{-1} \omega), \quad 0 \leq \omega \leq 1 \quad (2.17)$$

y

$$C_N(\omega) = \cosh(N \cosh^{-1} \omega), \quad \omega > 1 \quad (2.18)$$

Podemos percatarnos de que si permitimos que  $\omega > 1$  en la ecuación 2.17 el  $\cos^{-1} \omega$  deberá ser imaginario, por tanto, es más conveniente restringir el rango de " $\omega$ ", y adoptar la ecuación (2.18) para  $\omega > 1$ . Las ecuaciones son equivalentes en el sentido de que la ecuación (2.18) se puede derivar de la (2.17); de esta forma el resultado es un sólo polinomio Chebyshev que se aplica para  $0 \leq \omega \leq \infty$ .

El parámetro  $\epsilon$  ( $0 < \epsilon < 1$ ) indica la amplitud del rizo en la banda de paso, (que tiene un rango de  $0 \leq \omega \leq 1$ , por ser un

filtro "normalizado" ó "prototipo") como se muestra en la figura (2.5). La frecuencia crítica se deriva de la ecuación (2.16) si hacemos  $|H(j\omega)|^2 = 0.5$  (frecuencia con la mitad de la magnitud en la banda de pasa), o bien:

$$\epsilon^2 C_N^2(\omega) = 1 \quad (2.19)$$

Consecuentemente, depende tanto del parámetro de rizo " $\epsilon$ " como del orden del filtro " $N$ "

Considerése por ejemplo, cuando  $N=1$ , tanto en la ecuación (2.17) como en la (2.18), el polinomio Chebyshev de primer orden es:

$$C_1(\omega) = \cos(1 \cos^{-1} \omega) = \omega \quad \dots \text{ y} \quad (2.20)$$

$$C_1(\omega) = \cosh(1 \cosh^{-1} \omega) = \omega$$

y la función de magnitud al cuadrado es:

$$|H_{LP}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \omega^2} \quad (2.21)$$

siendo la frecuencia crítica :

$$\omega_c = \frac{1}{\epsilon} \quad (2.22)$$

Como se ilustra en las ecuaciones (2.20) se puede escribir un polinomio que sea válido para toda  $\omega$  y puede determinarse una relación recursiva que nos permita el cálculo de  $C_{N+1}(\omega)$ , a partir de dos polinomios previos  $C_N(\omega)$ , y  $C_{N-1}(\omega)$ :

$$C_{N+1}(\omega) = 2\omega C_N(\omega) - C_{N-1}(\omega) \quad (2.23)$$

la cual se deriva a partir de la ecuación (2.17), iniciando con:

$$C_{N+1}(\omega) = \cos((N+1)\cos^{-1} \omega) \quad (2.24)$$

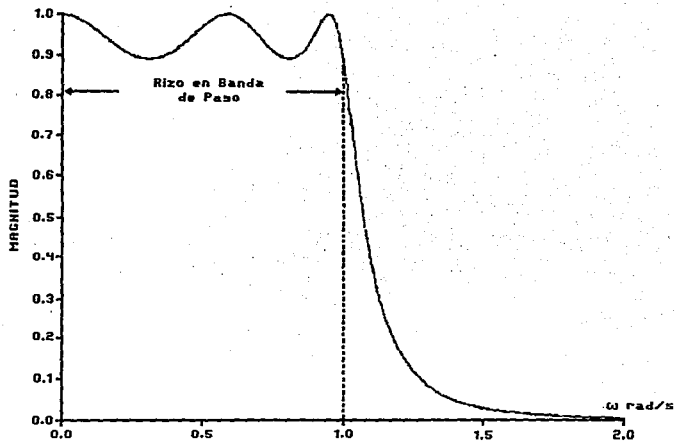


Figura 2.5 (a) Respuesta en Frecuencia pasa-bajas Prototipo

$N=5$  y  $\epsilon = 0.5089$

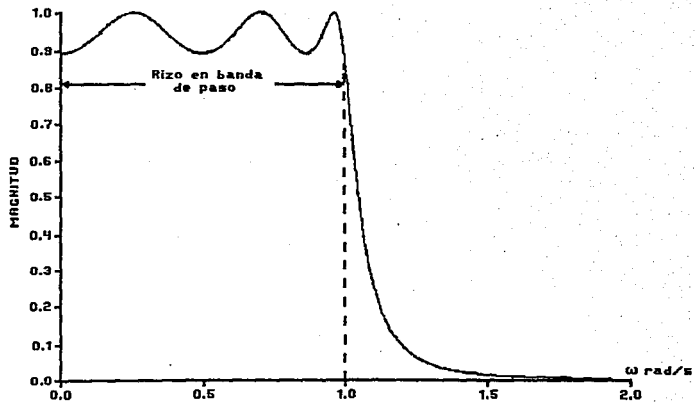


Figura 2.5 (b) Respuesta en Frecuencia del Prototipo Pasa-bajas Chebyshev  
 $N=6$  y  $\epsilon = 0.5088$

definimos  $\alpha = \cos^{-1} \omega$  lo cual nos permite escribir la ecuación (2.24) como:

$$C_{N+1}(\omega) = \cos((N+1)\alpha) \quad (2.25)$$

Aplicando la identidad  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ , obtenemos:

$$C_{N+1}(\omega) = \cos(N\alpha)\cos(\alpha) - \sin(N\alpha)\sin(\alpha) \quad (2.26)$$

De manera similar

$$\begin{aligned} C_{N-1}(\omega) &= \cos((N-1)\alpha) \\ &= \cos(N\alpha)\cos(\alpha) + \sin(N\alpha)\sin(\alpha) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sumando las ec. (2.26) y (2.27):

$$C_{N+1}(\omega) + C_{N-1}(\omega) = 2\cos(\alpha)\cos(N\alpha) \quad (2.28)$$

y sustituyendo  $\alpha = \cos^{-1} \omega$ , nos da:

$$C_{N+1}(\omega) + C_{N-1}(\omega) = 2\cos(\cos^{-1} \omega)\cos(N\cos^{-1} \omega) = 2\omega\cos(N\cos^{-1} \omega) \quad (2.29)$$

Regresando a la ecuación (2.17), donde el N'ésimo orden del polinomio Chebyshev está dado por:

$$C_N(\omega) = \cos(N \cos^{-1} \omega) \quad (2.30)$$

podemos sustituir la ecuación (2.30) en la ec. (2.29) para obtener:

$$C_{N+1}(\omega) + C_{N-1}(\omega) = 2\omega C_N(\omega) \quad (2.31)$$

ó:

$$C_{N+1}(\omega) = 2\omega C_N(\omega) - C_{N-1}(\omega) \quad (2.32)$$



la cual es la ecuación (2.23) que queríamos obtener.

Notemos que la ecuación (2.32), es una ecuación en diferencias lineal y de coeficientes constantes, en  $C_N(\omega)$ . Podemos hacer esto más obvio definiendo  $y(N+1) = C_{N+1}(\omega)$ ,  $y(N) = C_N(\omega)$ ,  $y(N-1) = C_{N-1}(\omega)$ , y  $2\omega = a$ , como se ve a continuación:

$$y(N+1) = ay(N) - y(N-1) \quad (2.33)$$

Para resolver esta ec. en diferencias de segundo orden, necesitamos dos condiciones iniciales. Haciendo  $N = 0$  y  $1$ , podemos encontrar, de la ecuación (2.17), que:

$C_0(\omega) = \cos(0\cos^{-1}\omega) = 1$  y  $C_1(\omega) = \cos(1\cos^{-1}\omega) = \omega$ . De manera alterna, partiendo de la ecuación (2.18), con  $N = 0$  y  $1$ , obtenemos:

$$C_0(\omega) = \cosh(0\cosh^{-1}\omega) = 1 \text{ y } C_1(\omega) = \cosh(1\cosh^{-1}\omega) = \omega.$$

Por lo tanto los polinomios Chebyshev para todo  $\omega \geq 0$  pueden encontrarse resolviendo la siguiente ecuación en diferencias:

$$C_{N+1}(\omega) = 2\omega C_N(\omega) - C_{N-1}(\omega) \quad (2.34)$$

con las "condiciones iniciales"  $C_0(\omega) = 1$  y  $C_1(\omega) = \omega$ .

Los resultados de la solución de esta relación recursiva para  $1 \leq N \leq 8$  se dan en la Tabla 2.2

TABLA 2.2 POLINOMIOS CHEBYSHEV

N	$C_N(\omega)$
1	$\omega$
2	$2\omega^2 - 1$
3	$4\omega^3 - 3\omega$
4	$8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$
5	$16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega$
6	$32\omega^6 - 48\omega^4 + 18\omega^2 - 1$
7	$64\omega^7 - 112\omega^5 + 56\omega^3 - 7\omega$
8	$128\omega^8 - 256\omega^6 + 160\omega^4 - 32\omega^2 + 1$

2.6.3.1 CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES DE LOS FILTROS CHEBYSHEV (CPPB).

Veamos ahora, algunas propiedades importantes de los filtros Chebyshev. Su función de magnitud es:

$$|HLP_P(j\omega)| = \frac{1}{(1 + \epsilon^2 C_N^2(\omega))^{1/2}} \quad (2.35)$$

y, con la ayuda de la figura (2.6), donde la línea continua corresponde a  $N = 5$ , y la línea punteada es para  $N = 6$ , observamos las siguientes características importantes:

1.- En  $\omega = 0$ :

$$\begin{aligned} C_N^2(\omega) \Big|_{\omega=0} &= (\cos(N\cos^{-1}\omega))^2 \Big|_{\omega=0} \\ &= (\cos(N\cos^{-1}0))^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

la cual toma los siguientes dos valores:

$$C_N^2(0) = \begin{cases} 0, & \text{para } N \text{ impar.} \\ 1, & \text{para } N \text{ par.} \end{cases} \quad (2.37)$$

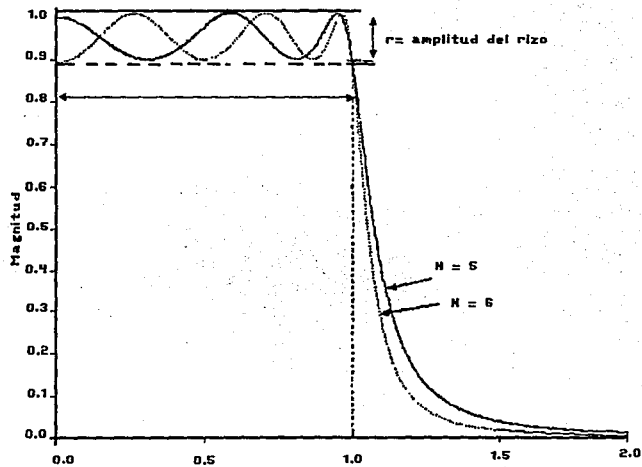


Figura 2.6 Respuesta en Frecuencia de dos Filtros Chebyshev Pasa-Bajas Prototipo con  $\epsilon = 0.5088$

Esto hace que la función de magnitud de la ec. (2.35) sea:

$$|H(j\omega)| = 1, \text{ para } N \text{ impar} \quad (2.38)$$

ó:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{(1 + \epsilon^2)^{1/2}}, \text{ para } N \text{ par} \quad (2.39)$$

2.- En  $\omega = 1$ :

$$C_N^2(\omega) \Big|_{\omega=1} = (\cos(N\cos^{-1}1))^2 = 1, \text{ para toda } N \quad (2.40)$$

lo cual resulta como:

$$|H(j1)| = \frac{1}{(1 + \epsilon^2)^{1/2}}, \text{ para toda } N \quad (2.41)$$

3.- El ancho de banda del prototipo (donde existe rizo), va desde  $\omega = 0$  hasta  $\omega = 1$ ; la frecuencia de corte (con -3 dB de magnitud es mayor que 1 dado que  $\epsilon < 1$ ). Por lo tanto de la ec. (2.41),

$|H(j1)| > 1/\sqrt{2}$ , y la frecuencia de corte dependerá tanto del orden  $N$ , como del parámetro de rizo  $\epsilon$ .

4.- Entre  $\omega = 0$  y  $\omega = 1$ , hay  $N$  puntos máximos y mínimos. Nótese que en la figura (2.6), para  $N = 5$ , existen tres máximos y dos mínimos; y para  $N = 6$ , tres máximos y tres mínimos.

5.- Para  $\omega > 1$ ,  $|H(j\omega)|$  decrece monótonicamente (como el Butterworth) y para valores grandes de  $\omega$  el polinomio Chebyshev se aproxima a  $2^{N-1}\omega^N$  y la función de magnitud:

$$|H(j\omega)| \longrightarrow 1 / (\epsilon 2^{N-1}\omega^N)$$

Esto puede ser útil cuando se determine el orden del filtro

requerido para cumplir especificaciones de diseño.

6.- Como hemos dicho, la función de transferencia se obtiene de:

$$H_{LP_p}(s) \cdot H_{LP_p}(-s) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\omega)} \Big|_{\omega = -js} \quad (2.42)$$

asignando los polos del semiplano izquierdo a  $H_{LP_p}(s)$  y los del derecho, a  $H_{LP_p}(-s)$ . Es mucho más difícil factorizar el denominador de  $H_{LP_p}(s)H_{LP_p}(-s)$ , de lo que era en el caso Butterworth, por lo que generalmente, se utilizará una computadora. La tabla (2.3) nos da los coeficientes del denominador para algunos valores del orden  $N$  y del parámetro de rizo  $\epsilon$ .

7.- La amplitud del rizo en dB está dada por:

$$r_{db} = -10 \log_{10} \frac{1}{1 + \epsilon^2} = 10 \log_{10} (1 + \epsilon^2) \quad (2.43)$$

la función de transferencia del prototipo pasa-bajas Chebyshev se basa en el rizo deseado (establecido por  $\epsilon$ ) y el orden  $N$ , que se encuentra conociendo la frecuencia con  $-3$  dB de amplitud (crítica) y/o las características de la banda suprimida. Una vez que tengamos  $|H_{LP_p}(j\omega)|$  ó  $|H_{LP_p}(j\omega)|^2$ , podremos encontrar  $H_{LP_p}(s)$ , a partir de (2.42), o por medio de una tabla, como la (2.3).

TABLA 2.3 SELECCION DE POLINOMIOS DEL DENOMINADOR DE FILTROS PROTOTIPOS CHEBYSHEV.

rizo 1/2 - dB ( $\epsilon = 0.3493$ , $e^2 = 0.1220$ )	
N	
1	$s + 2.863$
2	$s^2 + 1.425s + 1.516$
3	$s^3 + 1.243s^2 + 1.535s + 0.716$
4	$s^4 + 1.197s^3 + 1.717s^2 + 1.025s + 0.379$
5	$s^5 + 1.173s^4 + 1.937s^3 + 1.310s^2 + 0.753s + 0.179$
rizo = 1 dB ( $\epsilon = 0.5088$ , $e^2 = 0.2589$ )	
N	
1	$s + 1.965$
2	$s^2 + 1.078s + 1.103$
3	$s^3 + 0.988s^2 + 1.238s + 0.491$
4	$s^4 + 0.953s^3 + 1.454s^2 + 0.743s + 0.276$
5	$s^5 + 0.937s^4 + 1.689s^3 + 0.974s^2 + 0.581s + 0.123$
rizo = 2 dB ( $\epsilon = 0.7648$ , $e^2 = 0.5849$ )	
N	
1	$s + 2.863$
2	$s^2 + 1.425s + 1.516$
3	$s^3 + 1.243s^2 + 1.535s + 0.716$
4	$s^4 + 1.197s^3 + 1.717s^2 + 1.025s + 0.379$
5	$s^5 + 1.173s^4 + 1.937s^3 + 1.310s^2 + 0.753s + 0.179$

EJEMPLO 2.1: Este ejemplo ilustra el diseño de un prototipo pasabajas Chebyshev.

Se quiere diseñar un filtro Chebyshev FPB que cumpla las siguientes características:

- a) La amplitud del rizo máxima en la banda de paso = 1dB.  
 b) La frecuencia de corte,  $\omega \leq 1.30$  rad/s.  
 c) La atenuación en la banda soprimida deberá ser de al menos 40dB para  $\omega \geq 5$  rad/s..

Determinar la función de transferencia  $H_{fp}(s)$ , del filtro.

**Solución:** Primero necesitamos encontrar el parámetro de rizo  $\epsilon$ , que en éste caso se da en la tabla (2.3). Sin embargo, realicemos el procedimiento para ilustrar su obtención.

- Partiendo del punto No. 7 de las características de los filtros Chebyshev PPB, dadas con anterioridad, sabemos que el rizo en dB está dado por:

$$r_{db} = 10 \log_{10} (1 + \epsilon^2) \quad (2.44)$$

y para el rizo de 1 dB, tenemos:

$$1 = 10 \log_{10} (1 + \epsilon^2) \quad (2.45)$$

ó

$$0.1 = \log_{10} (1 + \epsilon^2) \quad (2.46)$$

tomando el antilogaritmo de la ecuación (2.46) resulta:

$$1.2589 = 1 + \epsilon^2 \quad (2.47)$$

de la cual:

$$\epsilon^2 = 0.2589 \text{ y } \epsilon = 0.5088 \quad (2.48)$$

lo siguiente es aplicar un procedimiento de "ensayo y error" para familiarizarnos con las ecuaciones.

Comenzando con el filtro de primer orden, cuyo polinomio Chebyshev es  $C_1(\omega) = \omega$ , obtendremos la ganancia exactamente en la frecuencia de corte (-3 dB) de  $\omega = 1.30$ . Es decir, requerimos que  $|H(j1.30)| \leq 0.707$  ó  $|H(j1.30)|^2 \leq 0.500$ . La función de

magnitud al cuadrado es :

$$\frac{1}{1 + \epsilon^2 C_0^2(\omega)} \Big|_{\omega = 1.90} = \frac{1}{1 + 0.2589 \omega^2} \Big|_{\omega = 1.90} = 0.69 \quad (2.49)$$

lo cual no es la suficiente atenuación en la frecuencia de corte (se requiere 0.500).

Ensayando ahora con  $N = 2$ , donde  $C_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$ , tenemos:

$$\frac{1}{1 + \epsilon^2 C_2^2(\omega)} \Big|_{\omega = 1.90} = \frac{1}{1 + 0.2589(2\omega^2 - 1)^2} \Big|_{\omega = 1.90} = 0.41 \quad (2.50)$$

lo cual es satisfactorio para cumplir la especificación de frecuencia de corte. Esto quiere decir, que cualquier filtro Chebyshev con  $N \geq 2$  cumplirá con el requerimiento de frecuencia de corte, porque en un orden mayor ( $N$ ), la porción de magnitud de la respuesta en frecuencia decrecerá más rápidamente para  $\omega > 1$ .

A continuación necesitaremos verificar las características en la banda suprimida (en  $\omega = 5$ ), donde la atenuación debe ser de al menos 40 dB, ésto se traduce como una "ganancia" menor o igual a -40 dB ó  $|H(j\omega)|^2 \leq 10^{-4}$ .

La función de magnitud al cuadrado es:

$$\frac{1}{1 + \epsilon^2 C_2^2(\omega)} \Big|_{\omega = 5} = \frac{1}{1 + 0.2589(2\omega^2 - 1)^2} \Big|_{\omega = 5} = 1.6 \times 10^{-9} \quad (2.51)$$

lo cual es muy grande, ya que estamos buscando  $|H(j\omega)|^2 \leq 10^{-4}$ .

Probando ahora con  $N = 3$ , verificaremos solo que la característica en la banda de paso se cumpla, porque ya sabemos que la frecuencia de corte será la misma que con  $N = 2$ . Así que



para el filtro de tercer orden tenemos:

$$\left. \frac{1}{1 + e^{2} E_{3}^{2}(\omega)} \right|_{\omega = s} = \frac{1}{1 + 0.2589(4\omega^{3} - 3\omega)^{2}} \Big|_{\omega = s} = 1.6 \times 10^{-5} \quad (2.52)$$

esto satisface el requerimiento. Podemos decir entonces, que se necesita un filtro de tercer orden; y usando un rizo de 1 dB, obtenemos la función de transferencia de la tabla (2.3):

$$HLP_{P}(s) = \frac{k}{s^{3} + 0.988s^{2} + 1.238s + 0.491} \quad (2.53)$$

El diseñador puede escoger la ganancia  $k$  como le plazca.

En este caso con un orden  $N$  impar, pondremos  $k = 0.491$  para hacer que la ganancia en corriente directa ( $\omega = 0$ ) sea igual a uno, y apegarnos a la característica en  $\omega = 0$  de la respuesta en frecuencia de la fig 2.5 (a).

#### 2.6.4 DISEÑO DE FILTROS PPB ELIPTICOS.

Un filtro elíptico tiene una respuesta con rizo tanto en la banda de paso como en la banda suprimida y la respuesta de magnitud al cuadrado de un PPB de orden  $N$  está dada por:

$$|HLP_{P}(j\omega)|^{2} = \frac{1}{1 + e^{2} E_{N}^{2}(\omega)} \quad (2.54)$$

donde  $E_{N}^{2}(\omega)$  es una función racional Chebyshev de  $\omega$ , que se determina a partir de las necesidades de rizo. Una característica de magnitud al cuadrado típica se da en la figura (2.7), donde la frecuencia límite de rizo en la banda de paso es  $\omega_{1P}$ , y la frecuencia límite de rizo en la banda suprimida es  $\omega_{2P}$ . Un filtro Chebyshev PPB, tiene una frecuencia de corte  $\omega = 1$ , mientras que

en un filtro elíptico, la frecuencia de corte se considera como la "media geométrica" de  $\omega_{1P}$  y  $\omega_{2P}$ , es decir,

$$1 = (\omega_{1P} \omega_{2P})^{1/2} \quad (2.55)$$

La constante R, llamada factor de selectividad, representa lo "abrupto" de la región de transición:

$$R = \omega_{2P} / \omega_{1P} \quad (2.56)$$

Consecuentemente un valor grande de R nos indica una banda de transición ancha, mientras que un valor pequeño indica una banda de transición angosta.

En contraste con los filtros Butterworth y Chebyshev, los cuales tienen solamente polos finitos; los filtros Elípticos también tienen ceros finitos. La función de transferencia de un filtro elíptico PPB de orden N está dada por:

$$H_{LP}(s) = \frac{H_0}{D(s)} \prod_{i=1}^r \frac{s^2 + A_{oi}}{s^2 + B_{fi}s + B_{oi}} \quad (2.57)$$

donde :

$$r = \begin{cases} \frac{N-1}{2}, & N \text{ impar} \\ \frac{N}{2}, & N \text{ par} \end{cases} \quad (2.58)$$

y:

$$D(s) = \begin{cases} s + s_0, & N \text{ impar} \\ 1, & N \text{ par} \end{cases} \quad (2.59)$$

De la ec. (2.57) notamos que la función de transferencia se especifica por medio de lo siguiente:

- 1.-  $N$ , el orden del filtro (por medio de  $r$  en la notación de producto  $\pi$ ).
- 2.-  $D(s)$ , el factor de un sólo polo (con polo en  $s = -s_0$ ) para  $N$  impar, y  $D(s) = 1$  para  $N$  par.
- 3.-  $A_{oi}$ , los coeficientes del numerador que determinan los ceros.
- 4.-  $B_{oi}$  y  $B_{ii}$ , los coeficientes del denominador que determinan los polos.

La forma de la magnitud al cuadrado de la respuesta en frecuencia mostrada en la figura (2.7) depende de tres parámetros:  $\epsilon$ ,  $A$ , y  $R = \omega_{2P} / \omega_{1P}$ .

De manera alternativa, podemos expresar a  $\epsilon$  en términos de un rizo de pasa-banda aceptable, como la ganancia:

$$M_{dB} = -10 \log_{10} (1 + \epsilon^2) = 20 \log_{10} |H(j\omega_{1P})| \quad (2.60)$$

y  $A$  en términos de una ganancia aceptable de banda suprimida, como:

$$M_{dB} = A = 20 \log_{10} |H(j\omega_{2P})| \quad (2.61)$$

y todavía consideramos a  $R = \omega_{2P} / \omega_{1P}$ . Con tres parámetros libres en vez de dos, como en el caso de los filtros Chebyshev, ó uno en los Butterworth; no es posible realizar una tabla simple para funciones de transferencia de filtros Elípticos. Una forma de salir de este dilema es restringir las ganancias de los rizados en la banda de paso y de la banda suprimida, para que estén entre un cierto conjunto de valores.

Las tablas se han generado para listar los coeficientes de los filtros con órdenes desde 2 hasta 9. El parámetro de selectividad  $R$  no será un entero, pero se puede seleccionar un valor que satisfaga las condiciones de diseño; un listado parcial de coeficientes para filtros Elípticos se observa en la tabla (2.4).

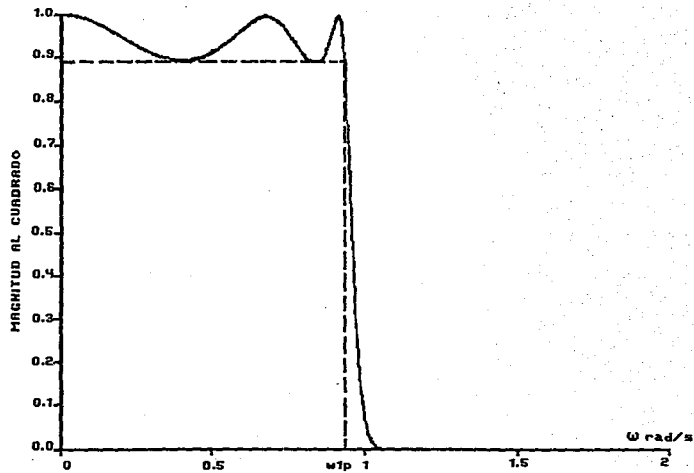


Figura 2.7 (a)

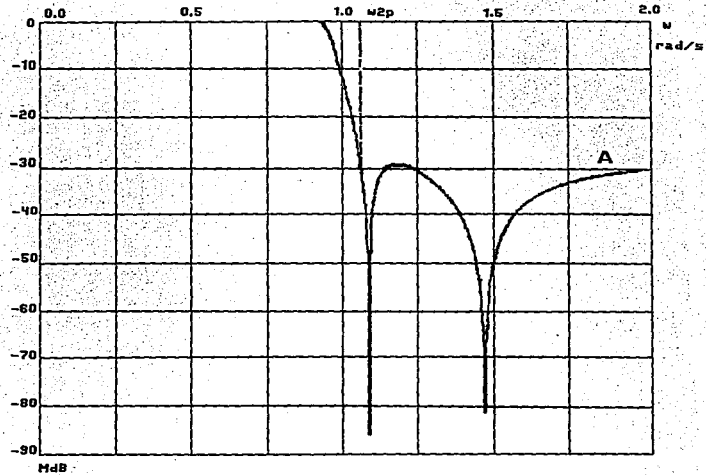


Figura 2.7 (b) Característica de magnitud al cuadrado del filtro elíptico prototipo.

TABLA (2.4) COEFICIENTES DE FILTROS ELIPTICOS.

$$HLP_r(s) = \frac{H_0}{D(s)} \prod_{i=1}^r \frac{s^2 + A_{oi}}{s^2 + B_{1i}s + B_{oi}} \quad D(s) = \begin{cases} s+s_0, & N \text{ impar} \\ 1, & N \text{ par} \end{cases}$$

Ca) rizo en la banda de paso = 0.5 dB; ganancia en la banda suprimida = -20 dB

N	i	A <sub>oi</sub>	B <sub>oi</sub>	B <sub>1i</sub>	H <sub>o</sub> /s <sub>o</sub>	R
2	1	5.33789	0.566660	0.809890	0.100220E+000	2.76261
	3	1.75640	0.808321	0.359160	0.806214E+000	1.42189
4	1	4.38105	0.611195	0.981959	0.100219E+000	1.13188
	2	1.21841	0.927132	0.196549	0.412816	0.667292
5	1	1.05070	0.887787	0.412816	0.808895E+000	1.04465
	2	1.07211	0.938640	0.049895	0.667292	0.938855
6	1	4.36790	0.611899	0.982855	0.100218E+000	1.01558
	2	1.19248	0.934830	0.156221	0.417576	0.990620
7	1	1.02486	0.990620	0.017576	0.808861E+000	1.00545
	2	1.04918	0.828092	0.419652	0.667292	0.996984
8	1	1.06401	0.976479	0.056884	0.667292	0.996984
	2	1.00870	0.996984	0.006219	0.808861E+000	1.00192
9	1	4.38611	0.611846	0.982864	0.100192E+000	1.00192
	2	1.19207	0.934928	0.156548	0.419652	0.996984
10	1	1.02218	0.991684	0.020051	0.808861E+000	1.00008
	2	1.00806	0.998827	0.002197	0.667292	0.996984
11	1	1.04927	0.828047	0.419652	0.667292	0.996984
	2	1.06390	0.976512	0.056503	0.667292	0.996984
12	1	1.00775	0.997041	0.007028	0.808861E+000	1.00008
	2	1.00108	0.999586	0.000775	0.667292	0.996984

(b) rizo en la banda de paso = 0.5 dB; ganancia en la banda suprimida = -30 dB

N	i	A <sub>0i</sub>	B <sub>0i</sub>	B <sub>1i</sub>	H <sub>0</sub> /s <sub>0</sub>	R
2	1	0.51248	0.318702	0.089007	0.310294E-001	4.80880
	1	2.40997	0.597884	0.382044	0.121878E+000	1.92822
3	1	0.40008	0.398996	0.822201	0.508922	1.32446
	2	1.47114	0.798764	0.191082	0.310297E-001	1.12912
4	1	2.14490	0.648724	0.480774	0.118807E+000	1.12912
	2	1.18132	0.907216	0.088080	0.511761	
5	1	0.38228	0.402050	0.828822	0.310296E-001	1.05994
	2	1.38680	0.826821	0.287025	0.089181	
	3	1.07474	0.958727	0.089181	0.484825	0.118701E+000
6	1	2.18439	0.650591	0.484825	0.118701E+000	1.02290
	2	1.15171	0.920785	0.108419	0.511761	
7	1	1.08168	0.981925	0.017159	0.310289E-001	1.00989
	1	0.37941	0.402154	0.829052	0.048043	
	2	1.38394	0.827819	0.288669	0.007664	
8	1	1.08301	0.964898	0.048043	0.484454	0.118688E+000
	2	1.01359	0.992137	0.007664	0.511761	
9	1	2.18409	0.650636	0.484454	0.118688E+000	1.00427
	2	1.15070	0.921256	0.109144	0.511761	
	3	1.02680	0.984652	0.021005	0.008238	
10	1	1.00586	0.996589	0.008238		

Veamos ahora, como se involucra el factor de selectividad "R". Para N = 2, rizo de banda de paso = 0.5 dB y una ganancia en la banda de paso de -20 dB, la función de transferencia del filtro es:

$$H_{LP}(s) = 0.10022 \frac{s^2 + 5.33789}{s^2 + 0.809390s + 0.566660} \quad (2.62)$$

con un factor de selectividad R = 2.76261. A partir de las ecuaciones (2.55) y (2.56), sabemos que:

$$\omega_{1P} = 1/\omega_{2P} \text{ y } R = \omega_{2P}/\omega_{1P} \quad (2.63)$$

De la solución de estas ecuaciones, obtenemos la frecuencia

límite del rizo en la banda de paso de:

$$\begin{aligned}\omega_{1P} &= 1/\sqrt{R} \\ &= 1/\sqrt{2.76261} = 0.6016 \text{ rad/s} \quad (2.64)\end{aligned}$$

y la frecuencia límite del rizo de la banda suprimida:

$$\omega_{2P} = \sqrt{R} = 1.6621 \text{ rad/s} \quad (2.65)$$

De la ec. (2.62), la magnitud de la respuesta, en la frecuencia límite del rizo de la banda de paso  $\omega_{1P} = 0.6016 \text{ rad/s}$  es:

$$\begin{aligned}|H_{LP}(j0.6016)| &= \left| 0.10022 \frac{-0.36192 + 5.33789}{-0.36192 + j0.48692 + 0.56666} \right| \\ &= 0.94415 \quad (2.66)\end{aligned}$$

ó lo que es lo mismo:

$$|H(j0.6016)|_{dB} = -0.5$$

En la frecuencia límite de la banda suprimida,  $\omega_{2P} = 1.6621$ , tenemos:

$$\begin{aligned}|H(j1.6621)| &= \left| 0.10022 \frac{-2.76257 + 5.33789}{-2.76257 + j1.34529 + 0.56666} \right| \\ &= 0.10022 \quad (2.67)\end{aligned}$$

de ahí:

$$|H(j1.6621)|_{dB} = -20$$

que es lo que se esperaba:

---

**EJEMPLO 2.2:** Este ejemplo ilustra el diseño de un filtro elíptico PPB.

Las condiciones que debe reunir el filtro que se va a diseñar son:

Rizo en la banda de paso de 0.5 dB



$$\frac{\text{frecuencia límite de rizo en banda suprimida}}{\text{frecuencia límite de rizo en banda de paso}} = 1.5625$$

**Solución:** Utilizando la tabla parcial de diseño, observamos que  $\omega_{2P}/\omega_{1P} = 1.42189$  para  $N = 3$ , es el menor orden de filtro que cumple con el factor de selectividad  $R = 1.5625$ . Usando  $N = 3$  y el dato de la ganancia en banda suprimida de  $-20$  dB, la función de transferencia resultante es:

$$H_{LP}(s) = \frac{0.306}{s + 0.667} \frac{s^2 + 1.756}{s^2 + 0.359s + 0.808} \quad (2.68)$$

En la figura (2.8) observamos una gráfica de  $H_{LP}(j\omega)$  donde podemos ver que la ganancia de banda suprimida tiende a  $-20$  dB a medida que aumenta " $\omega$ ". (El rizo en la banda de paso de  $0.5$  dB es imperceptible con la escala usada).

Con el nuevo factor de selectividad de  $1.422$  obtenemos una frecuencia límite de rizo en banda de paso, de:

$$\omega_{1P} = 1/\sqrt{R} = 0.839 \text{ rad/s} \quad (2.69)$$

y una frecuencia límite de banda suprimida de:

$$\omega_{2P} = \sqrt{R} = 1.192 \text{ rad/s} \quad (2.70)$$


---

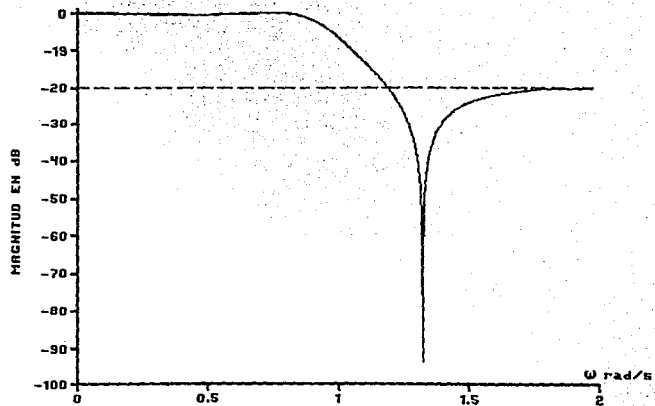


Figura 2.8 Magnitud de la Respuesta en Frecuencia en dB para el ejemplo 2.2

## 2.6.5 DISEÑO DE FILTROS PASA-BAJAS, PASA-ALTAS, PASA-BANDA Y SUPRESOR DE BANDA.

Los siguientes pasos se siguen en el diseño de filtros analógicos.

Asumimos que los especificaciones (requerimientos), para el pasa-banda y el supresor de banda, se conocen.

### 2.6.5.1 PROCEDIMIENTO DE DISEÑO DE LOS FILTROS ANALÓGICOS.

#### Paso 1

---

Traducir las especificaciones para un filtro prototipo (normalizado) pasa-bajas, donde  $\omega_{LP} = 1$  (de corte, límite de de rizo, o media geométrica), para usar la forma "w" de la transformación (tabla 2.5.). Estas nuevas especificaciones son las especificaciones del prototipo (ó especificaciones normalizadas.)

---

#### Paso 2

---

Diseñar un filtro PPB para satisfacer todas las especificaciones del prototipo, la elección de, ya sea Butterworth, Chebyshev, Elíptico, ó cualquier otra aproximación, puede definirse por las especificaciones, ó pueden basarse en la experiencia personal del diseñador. El orden del filtro N generalmente se determina por medio de nomogramas, tablas, o curvas de diseño, pero en el caso de filtros Butterworth usaremos la siguiente expresión:

$$N = \frac{\log_{10} (10^{-(MdB/10)} - 1)}{2 \cdot \log_{10} \omega_a} \quad (2.71)$$

donde  $\omega_a$  es una frecuencia, en la cual está dada una característica (a cumplir) importante del prototipo. Con N

conocida podemos usar las tablas 2.1 y 2.3 o una versión extendida de la tabla 2.4, para encontrar la función de transferencia  $H_{LP}(s)$  del prototipo pasa-bajas.

---

### Paso 3

---

Revisar el diseño por medio de una gráfica de su respuesta en frecuencia generada por computadora y cotejar con los requerimientos "normalizados".

---

### Paso 4

---

Determinar  $H_{HP}(s)$ ,  $H_{BP}(s)$ ,  $H_{BP}(s)$  ó  $H_{BS}(s)$ , partiendo de  $H_{LP}(s)$  utilizando la forma en "s" de la transformación de frecuencia apropiada (tabla 2.5).

---

### Paso 5

---

Verificar que el resultado de la transformación de frecuencia, cumpla las especificaciones originales, comparando estas con su gráfica de respuesta en frecuencia (generada por computadora).

---

**Ejemplo 2.3:** Este ejemplo ilustra el diseño de un filtro Butterworth pasa-altas.

Supóngase que se desea un filtro pasa-altas Butterworth, cuyas características son las siguientes:

La frecuencia crítica (-3dB de magnitud), es  $3 \times 10^4$  rad/seg. y la ganancia es, máximo, -26dB para  $\omega \leq 10^4$  rad/seg. Determinar la función de transferencia  $H_{HP}(s)$ , del orden N mínimo que se

requerirá para que el filtro cumpla estas características.

**Solución:** Siguiendo el procedimiento ya descrito.

**Paso 1:**

Utilizamos la relación  $\omega_{LP} = \omega_c / \omega_{HP}$  para determinar las especificaciones correspondientes al PFB. La frecuencia de corte pasa-altas de  $\omega_c = 3 \times 10^4$ , se normaliza a  $\omega_1$  en el prototipo. La frecuencia límite de banda suprimida,  $\omega = 10^4$ , se traslada a su valor correspondiente de  $\omega = 3$  en el prototipo.

**Paso 2:**

Para  $\omega_{LP} = 3$  y  $MdB = -26$ , el orden de filtro necesario

es:

$$N = \frac{\log_{10}(10^{2.6} - 1)}{2 \log_{10} 3}$$
$$= 2.72 \quad (2.72)$$

lo cual nos dice que debemos usar  $N = 3$ . De la tabla 2.1, con este dato obtenemos la función de transferencia prototipo:

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad (2.73)$$

**Paso 3:**

La porción de magnitud de la respuesta en frecuencia, se observa en la figura (2.9c) y satisface la especificación normalizada de  $MdB \leq -26$  en  $\omega_{LP} = 3$ .

**Paso 4:**

Utilizamos la forma "s" de la transformación de pasa-bajas a pasa-altas de la tabla 2.5 para determinar  $H_{HP}(s)$ . El resultado es:

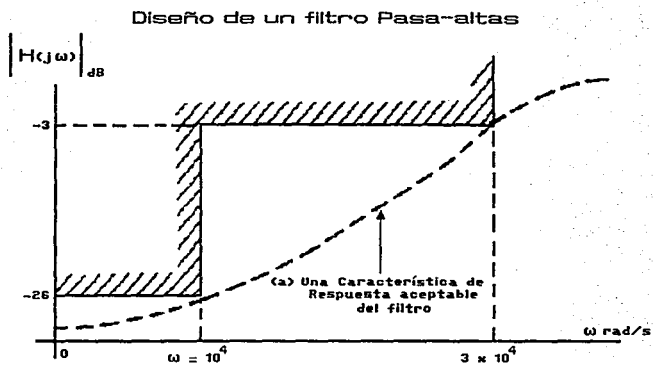


Figura 2.9 (a) Especificaciones Pasa-altas

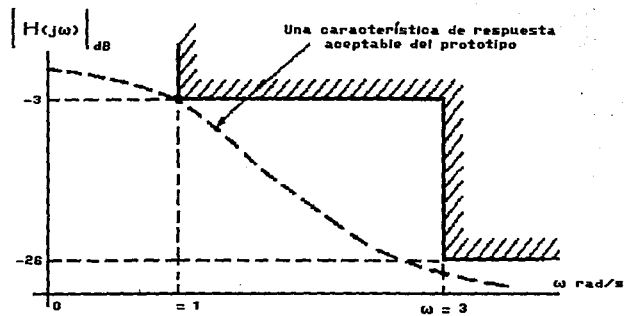
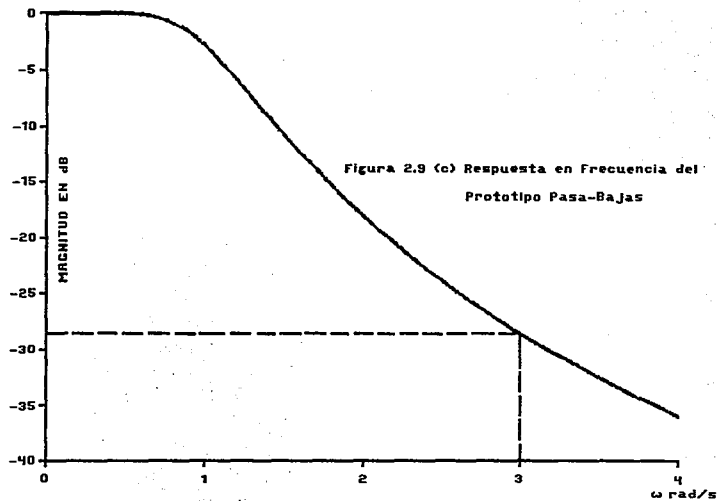


Figura 2.9 (b) Especificaciones del prototipo pasa-bajas





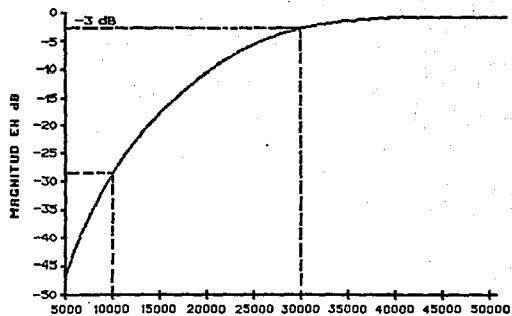


Figura 2.9 (d) Respuesta en Frecuencia Pasa-Ritas

$$H_{HP}(s) = HLP_p(s) \Big|_{s = \frac{s}{3 \times 10^4}}$$

$$= \frac{1}{\left[ \frac{3 \times 10^4}{s} \right]^2 + 2 \left[ \frac{3 \times 10^4}{s} \right] + 2 \left[ \frac{3 \times 10^4}{s} \right] + 1}$$

Paso 5:

La respuesta en frecuencia del filtro pasa-altas se observa en la figura (2.9d).

El diseño ha concluido. Lo único que queda es la digitalización del mismo, proceso que se discutirá más adelante.

**Ejemplo 2.4:** Este ejemplo muestra el diseño de un filtro pasa-banda analógico.

Se desea diseñar un filtro analógico Butterworth que cumpla con los siguientes requisitos:

Frecuencia de corte "baja" = 600 Hz.

Frecuencia de corte "alta" = 900 Hz.

Máxima atenuación = 0.2 dB en un rango de frecuencias de  $f_0 \leq f \leq 800$  Hz.

Mínima atenuación de 50 dB para  $0 \leq f \leq 200$  Hz.

Encontrar la función de transferencia para este filtro pasa-banda.

**Solución:**

1. El primer paso es trasladar las especificaciones del pasa-banda a especificaciones del PFB. Las frecuencias de interés del pasa-banda son:

$$\omega_l = 2\pi(600) = 3770 \text{ rad/s y } \omega_u = 2\pi(900) = 5655 \text{ rad/s}$$

$$\omega_o^2 = \omega_l \omega_u = 21.32 \times 10^6 \text{ rad/s}^2 \text{ ó } f_o = 735 \text{ Hz.}$$

$$B = \omega_u - \omega_l = 1885 \text{ rad/s} \quad (2.74)$$

Las frecuencias equivalentes en el prototipo están dadas por:

$$\begin{aligned} \omega_{LP} &= \frac{\omega_{BP}^2 - \omega_o^2}{B_{BP}} \\ &= \frac{\omega_{BP}^2 - 21.32 \times 10^6}{1885 \omega_{BP}} \end{aligned}$$

Lo cual puede resumirse como sigue:

$\omega_{BP}$	ESPECIF. PASA-BANDA	$\omega_{LP}$	ESPECIFICACION PPD
$2\pi \times 800$	MAXIMA ATENUACION DE 0.2 dB PARA: $f_o \leq f \leq 800 \text{ Hz}$	0.418	MAXIMA ATENUACION DE 0.2 dB PARA: $0 \leq \omega \leq 0.418 \text{ RAD/S}$
$2\pi \times 200$	MINIMA ATENUACION DE 50 dB PARA: $0 \leq f \leq 200 \text{ Hz}$	8.35	MINIMA ATENUACION DE 50 dB PARA $\omega \geq 8.35 \text{ RAD/S}$

2. Después necesitamos encontrar el orden del filtro N del prototipo Butterworth que cumpla los requerimientos. Para lo cual usaremos la ecuación:

$$N = \frac{\log_{10} (10^{-(MdB/10)} - 1)}{2 \log_{10} \omega_a} \quad (2.75)$$

a) Para  $\omega_a = 0.418$ . MdB = -0.2, es decir...

$$\frac{\log_{10} (10^{0.02} - 1)}{2 \log_{10} 0.418} = \frac{\log_{10} (0.047)}{-0.758} = \frac{-1.327}{-0.758} = 1.75 \quad (2.76)$$

... por lo tanto, esta especificación se cumple con un orden de filtro de  $N = 2$ .

b) Para  $\omega_a = 8.35$ .  $M_d = -50$ , esto es...

$$\frac{\log_{10}(10^5 - 1)}{2 \log_{10} 8.35} = \frac{5}{1.843} = 2.71 \quad (2.77)$$

...esto quiere decir que esta especificación se cumple, utilizando un filtro de orden  $N = 3$ .

Por lo tanto, necesitaremos un filtro de "tercer" orden para satisfacer ambas especificaciones.

3. De la tabla 2.1, obtenemos el prototipo Butterworth siguiente:

$$\frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad (2.78)$$

... y la correspondiente respuesta en frecuencia que cumple los requisitos "prototipo", se muestra en la figura (2.10b).

4. Para obtener la función de transferencia del filtro pasa-banda usaremos la tabla (2.5) y reemplazaremos "s" por  $(s^2 + \omega_0^2)/Bs$ , por tanto...

$$\begin{aligned} H_{BP}(s) &= H_{LP_P}(s) \Big|_{s = (s^2 + \omega_0^2)/Bs} \\ &= \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \Big|_{s = \frac{s^2 + 21.32 \times 10^6}{(1885)s}} \\ &= \frac{1}{\left[ \frac{s^2 + 21.32(10^6)}{(1885)s} \right]^3 + 2 \left[ \frac{s^2 + 21.32(10^6)}{(1885)s} \right]^2 + 2 \left[ \frac{s^2 + 21.32(10^6)}{(1885)s} \right] + 1} \\ &= \frac{ks^3}{s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2.79) \end{aligned}$$

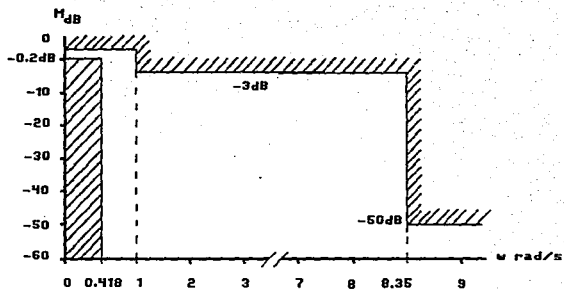


Figura 2.10 (a) Transformando las especificaciones del filtro para el ejemplo 2.4

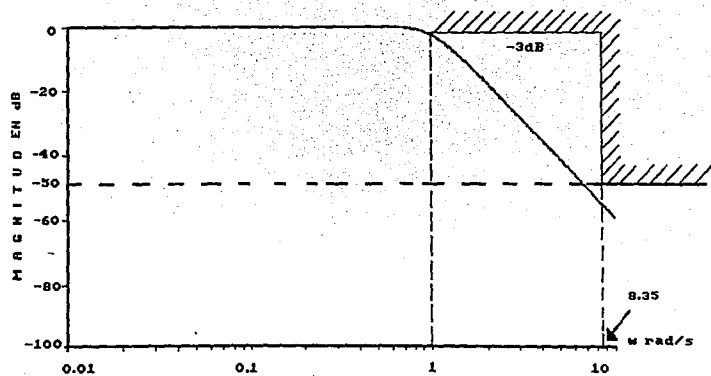


Figura 2.10 (b) Magnitud de la Respuesta en Frecuencia en dB para el Prototipo Pasa-Bajas Normalizado del Ejemplo 2.4

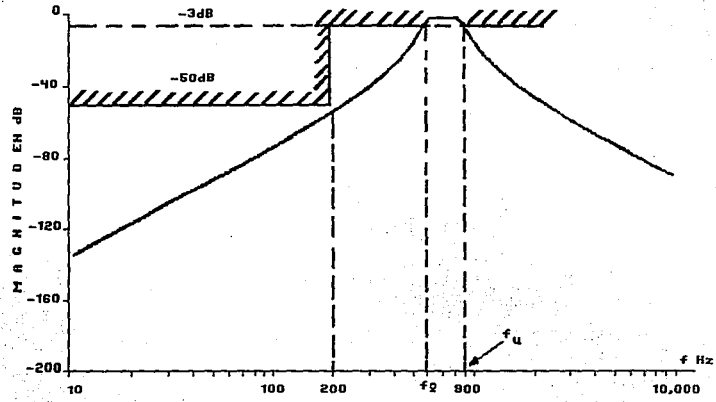


Figura 2.10 (c) Magnitud de la respuesta en frecuencia en dB para el filtro pasa-banda.

donde:

$$\begin{aligned}k &= 0.70 \times 10^0 \\ a_0 &= 9.691 \times 10^{21} & a_3 &= 1.675 \times 10^{11} \\ a_1 &= 1.713 \times 10^{18} & a_4 &= 7.106 \times 10^9 \\ a_2 &= 1.515 \times 10^{15} & a_5 &= 3.77 \times 10^8\end{aligned} \quad (2.80)$$

5. La magnitud de la respuesta en frecuencia se puede ver en la figura (2.10c), donde se observa que se cumplieron las especificaciones.

---

El mismo procedimiento se aplica también al diseño de filtros Chebyshev y elípticos, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

---

**Ejemplo 2.5:** A continuación se ejemplifica el diseño de un filtro pasa-bajas elíptico.

Determinar la función de transferencia de un filtro elíptico pasa-bajas que cumpla con lo siguiente:

Rizo en la banda de paso: 0.5 dB

Ganancia en banda suprimida: -30 dB

Frecuencia límite de rizo en banda de paso: 2 kHz

Frecuencia límite de rizo en banda suprimida: 2.5 kHz

**Solución:** Para usar la tabla (2.4) necesitamos expresar los requerimientos anteriores en términos de frecuencias "prototipo". En este caso elegimos que la frecuencia crítica sea de...

$$\begin{aligned}\omega_c &= (\omega_1 \omega_2)^{1/2} \\ &= (4\pi^2 (2) (2.5) (10^3))^1 \\ &= (2\pi) (2.236) (10^3) \\ &= 14049\end{aligned} \quad (2.81)$$



De la tabla (2.5)

$$\omega_{LP} = \frac{\omega_{LP}}{14049} \quad (2.82)$$

y la frecuencia límite de rizo en la banda de paso, que se desea, es:

$$\begin{aligned} \omega_{1P} &= \frac{2\pi(2)(10^3)}{14049} \\ &= 0.895 \end{aligned}$$

con una frecuencia límite de rizo en la banda suprimida de:

$$\begin{aligned} \omega_{2P} &= \frac{2\pi(2.5)(10^3)}{14049} \\ &= 1.118 \end{aligned}$$

la constante de diseño  $R = \omega_{2P} / \omega_{1P}$  es:

$$R = \frac{1.118}{0.895} = 1.249$$

y de la tabla (2.4), podemos observar que  $N = 5$  cumple el requerimiento de transición. Usando esta tabla y redondeando los coeficientes hasta tres cifras significativas, la función de transferencia del prototipo es:

$$\begin{aligned} H_{LP}(s) &= \frac{0.119}{(s+0.512)} \frac{s^2+2.145}{(s^2+0.481s+0.649)} \frac{s^2+1.181}{(s^2+0.088s+0.907)} \\ &= \frac{0.119(s^4+3.326s^2+2.533)}{s^5+1.081s^4+1.889s^3+1.311s^2+0.841s+0.301} \end{aligned}$$

Esta función de transferencia tiene un factor de selectividad de  $R = 1.129$ , lo que nos da nuevos valores para  $\omega_{1P} = 0.941$  y  $\omega_{2P} = 1.063$ . Dado que se desea trasladar la frecuencia de prototipo  $\omega = 1$  a la frecuencia crítica  $\omega_c = 14049$ , utilizamos a  $s/14049$  para sustituirlo en  $H_{LP}(s)$  para obtener la función de transferencia de filtro pasa-bajas que deseamos.

De esta transformación obtenemos que:

$$\omega_1 = 0.941 \times 14049 = 13220 \text{ rad/seg. o } f_1 = 2.104 \text{ kHz.}$$

y



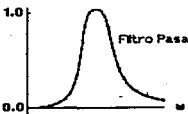
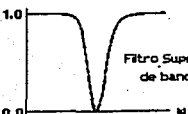
$$\omega_2 = 1.063 \times 14049 = 14934 \text{ rad/seg. o } f_2 = 2.377 \text{ kHz.}$$

de tal forma que la especificación de banda suprimida se satisface.

La función de transferencia resultante es:

$$HLP(s) = HLP_P(s) \Big|_{s=s/14049}$$

$$= \frac{1.672(10^8)(s^4 + 0.565(10^8)s^2 + 9.868(10^{16}))}{s^5 + 1.519(10^4)s^4 + 3.728(10^8)s^3 + 3.635(10^{12})s^2 + 3.276(10^{16})s + 1.047(10^{20})}$$

Tipo de Filtro.	Forma $w$ para encontrar $w_{LP}$ .	Forma $s$
 <p data-bbox="505 267 639 281">Filtro Pasa-bajas.</p>	$w_{LP} = \frac{w_{LP}}{w_0}$	$\frac{s}{w_0}$
 <p data-bbox="505 449 639 464">Filtro Pasa-altas.</p>	$w_{LP} = \frac{w_0}{w_{HP}}$	$\frac{w_0}{s}$
 <p data-bbox="505 563 639 578">Filtro Pasa-banda.</p>	$w_{LP} = \frac{w_{BP}^2 - w_0^2}{B w_{BP}}$	$\frac{s^2 + w_0^2}{Bs}$
 <p data-bbox="518 718 639 752">Filtro Supresor de banda.</p>	$w_{LP} = \frac{B w_{BS}}{-w_{BS}^2 + w_0^2}$	$\frac{Bs}{s^2 + w_0^2}$

(Para encontrar  $H(s)$  a partir de  $H(w)$  sustituya "s" en el prototipo con...

## 2.7 Diseño directo de filtros digitales pasa-bajas, pasa-altas, pasa-banda y supresores de banda.

Los filtros analógicos PPB Butterworth fueron tratados en una sección anterior, donde un filtro de  $N$ ésimo orden se caracterizaba por la función de transferencia...

$$HLP_p(s) = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + s^N} \quad (2.83)$$

las  $a$ 's en la ec. (2.83), se encuentran en la tabla 2.1.

Si aplicamos la transformación bilineal a la ecuación (2.83) para diferentes valores del orden del filtro ( $N$ ) obtenemos un conjunto de funciones de transferencia PPB para los filtros Butterworth digitales, esto es:

$$HLP_p(z) = HLP_p(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} \quad (2.84)$$

y el diseño de los filtros digitales Butterworth LP, HP, BP, ES se logra por un procedimiento similar al usado para filtros analógicos: se diseña un filtro PPB digital para que cumpla las especificaciones "trasladadas", y las func. de transferencia para los filtros desnormalizados se encuentran usando las transformaciones apropiadas de la tabla 2.6.

TABLA 2.6 TRANSFORMACIONES DE FRECUENCIAS DIGITALES

TIPO	TRANSFORMACION REEMPLAZAR "Z" EN EL PFB DIGITAL CON LA EXPRESION QUE SE LISTA ABAJO	CONSTANTES DE DISEÑO
1. PASA-BAJAS	$\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}$	$\alpha = \frac{\cos(\theta_c/2 - \theta_l'/2)}{\cos(\theta_c/2 + \theta_l'/2)}$
2. PASA-ALTAS	$\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}$	$\alpha = \frac{\cos(\theta_c/2 - \theta_l'/2)}{\cos(\theta_c/2 + \theta_l'/2)}$
3. PASA-BANDA	$z^2 - \frac{2ak}{k+1}z + \frac{k-1}{k+1}$ $1 - \frac{2ak}{k+1}z + \frac{k-1}{k+1}z^2$	$\alpha = \frac{\cos(\theta_u'/2 + \theta_l'/2)}{\cos(\theta_u'/2 - \theta_l'/2)}$  $k = \tan \frac{\theta_c}{2} \cot(\theta_u'/2 - \theta_l'/2)$
4. SUPRESOR DE BANDA	$z^2 - \frac{2\alpha}{k+1}z + \frac{1-k}{k+1}$ $1 - \frac{2\alpha}{k+1}z + \frac{1-k}{k+1}z^2$	$\alpha = \frac{\cos(\theta_u'/2 + \theta_l'/2)}{\cos(\theta_u'/2 - \theta_l'/2)}$  $k = \tan \frac{\theta_c}{2} \tan(\theta_u'/2 - \theta_l'/2)$

En la tabla 2.7 se resumen las funciones de transferencia digitales PFB Butterworth, para  $1 \leq N \leq 5$ . Una gráfica de la magnitud de la respuesta en frecuencia para cada uno de estos filtros se muestra en la fig. 2.11a, y una gráfica de la magnitud en decibeles se muestra en la figura 2.11b, para  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , y para  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  en la figura 2.11c. De la figura 2.11 y de la tabla 2.7, nos damos cuenta de lo siguiente:

- a)  $|H(e^{j\theta})| = 1$ . Esto es porque  $z = 1 + j0$  corresponde a  $s = 0$  (ver ec. (2.84)) y de la ec. 2.83

$$HLP_p(s) \Big|_{s=0} = 1 \quad (2.85)$$

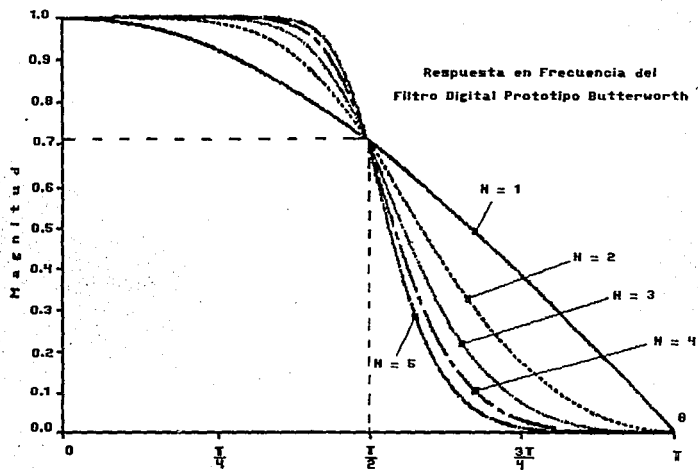
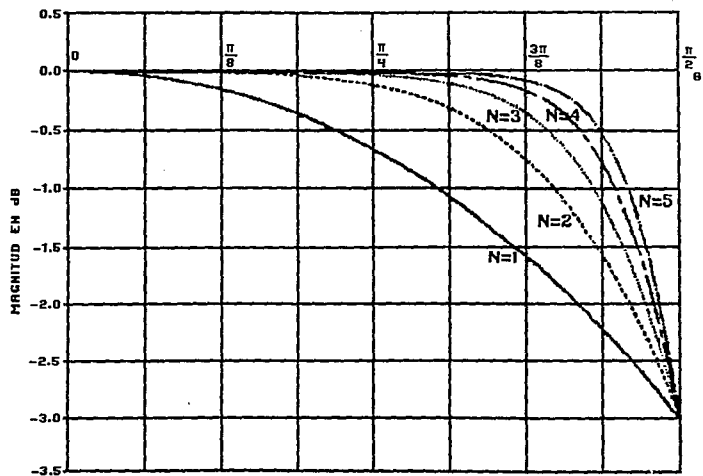


Figura 2.11 (a) Magnitud,  $0 \leq \theta \leq \pi$

Figura 2.11 (b) Magnitud en dB,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$

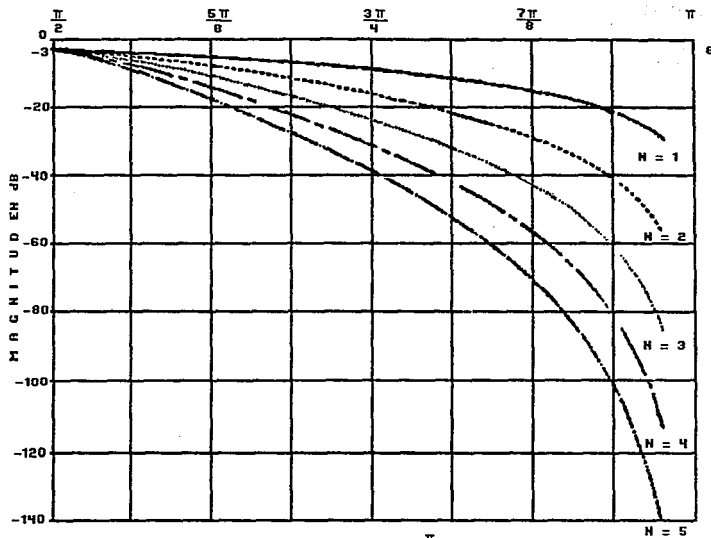


Figura 2.11 (c) Magnitud en dB,  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

ESTA TESIS  
 AN DEBE  
 SALIR DE LA  
 BIBLIOTECA



- b)  $|H(e^{j\pi/2})| = 0.707$  y  $\left. \frac{d|H(e^{j\omega})|}{d\omega} \right|_{\omega=\pi/2} = -3$ . El hecho de que la frecuencia de corte sea ahora,  $\theta_c = \pi/2$ , para el filtro digital PFB, se deriva de la relación no lineal, de analógico a digital...

$$\omega = \tan(\theta/2) \quad (2.86)$$

la cual se satisface para la frecuencia de corte analógica  $\omega = 1$ , y la correspondiente frecuencia de corte digital de  $\theta_c = \pi/2$ .

- c) Sabemos que todos los polos analógicos están en el círculo unitario y se transforman a polos digitales sobre el eje imaginario. Esto se comprueba a partir de

$$z = \frac{1+s}{1-s} \quad (2.87)$$

en la cual para  $s = 1e^{j\psi}$  (el círculo unitario en el plano  $s$ ), se convierte en

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 + 1e^{j\psi}}{1 - 1e^{j\psi}} \\ &= \frac{e^{j\psi/2} (e^{-j\psi/2} + e^{+j\psi/2})}{e^{j\psi/2} (e^{-j\psi/2} - e^{+j\psi/2})} \\ &= \frac{2 \cos(\psi/2)}{-2j \sin(\psi/2)} \\ &= j \cot(\psi/2) = \frac{j}{\tan(\psi/2)} \quad (2.88) \end{aligned}$$

Por ejemplo, los polos analógicos de segundo orden Butterworth  $s_{1,2} = 1e^{-\pm j\pi/4}$  se transforman en los polos digitales...

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= j \cot\left(\pm \frac{3\pi}{8}\right) \\ &= \pm j 0.414 \quad (2.89) \end{aligned}$$

lo cual concuerda con lo establecido en la tabla (2.7). Observamos que la parte izquierda del círculo unitario en el plano  $s$ , donde  $\pi/2 < \psi < 3\pi/2$  se mapea al eje imaginario del plano  $z$ , donde  $-1 < \text{Im}(z) < 1$ . De tal forma que se garantiza que el filtro digital resultante sea estable.

TABLA 2.7 FILTROS DIGITALES PROTOTIPO PASA-BAJAS BUTTERWORTH.

N	$H_{LP}(z)$	CEROS	POLOS
1	$\frac{0.5(z+1)}{z}$	$z = -1$	$z = 0$
2	$\frac{0.293(z+1)^2}{z^2 + 0.173}$	$z_{1,2} = -1$	$z_{1,2} = 0.414e^{\pm j\pi/2}$
3	$\frac{0.167(z+1)^3}{z(z^2+0.333)}$	$z_{1,3} = -1$	$z_1 = 0$ $z_{2,3} = 0.577e^{\pm j\pi/2}$
4	$\frac{0.094(z+1)^4}{z^4+0.486z^2+0.018}$	$z_{1,4} = -1$	$z_{1,2} = 0.201e^{\pm j\pi/2}$ $z_{3,4} = 0.667e^{\pm j\pi/2}$
5	$\frac{0.0528(z+1)^5}{z(z^4+0.633z^2+0.056)}$	$z_{1,5} = -1$	$z_{2,3} = 0.314e^{\pm j\pi/2}$ $z_{4,5} = 0.731e^{\pm j\pi/2}$

d) Hay N ceros en  $z = -1$ , lo cual ayuda a la atenuación de frecuencias altas del filtro PPB.

Poniendo ahora nuestra atención a los filtros PPB Chebyshev analógicos recordamos que los polinomios del denominador para estos tres valores del parámetro de rizo ( $\epsilon$ ) y para filtros de

cinco diferentes orgenes (N), se pueden encontrar en la tabla (2.3). Las funciones de transferencia analógicas son de la forma

$$HLP_p(s) = \frac{k}{a_0 + a_1 s + \dots + s^N} \quad (2.90)$$

donde la constante del numerador, k, se ajusta frecuentemente para satisfacer un criterio en  $|HLP_p(j\omega)|$ . Aplicando la transformación bilineal a estas funciones de transferencia, obtenemos los filtros Chebyshev PPB descritos en la tabla (2.8). La constante k en la ecuación 2.90, se ha seleccionado para dar  $|HLP_p(j\omega)| = 1$  para N impar y  $|HLP_p(j\omega)| = 1 / \sqrt{1 + \epsilon^2}$ , para N par.

Tabla 2.8 Filtros Digitales PPB Chebyshev.

$$HLP_p(z) \Big|_{z=1} = 1 \text{ para } N \text{ impar y } HLP_p(z) \Big|_{z=1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \text{ para } N \text{ par.}$$

0.5dB de rizo ( $\epsilon = 0.3493$ )

N	$HLP_p(z)$
1	$\frac{2.863(z + 1)}{3.863z + 1.863}$
2	$\frac{1.43(z + 1)^2}{3.941z^2 + 1.032z + 1.091}$
3	$\frac{0.716(z + 1)^3}{4.504z^3 - 0.570z^2 + 2.360z - 0.566}$
4	$\frac{0.358(z + 1)^4}{5.318z^4 - 2.828z^3 + 4.840z^2 - 2.14z + 0.874}$
5	$\frac{0.179(z + 1)^5}{6.351z^5 - 5.993z^4 + 9.145z^3 - 6.115z^2 + 3.367z - 1.029}$

---

1dB de rizo ( $\epsilon = 0.5088$ )

---

N	HLP <sub>p</sub> (z)
1	$\frac{1.965(z+1)}{2.965z + 0.965}$
2	$\frac{0.983(z+1)^2}{3.201z^2 + 0.206z + 1.005}$
3	$\frac{0.491(z+1)^3}{3.717z^3 - 1.277z^2 + 2.247z - 0.759}$
4	$\frac{0.246(z+1)^4}{4.426z^4 - 3.316z^3 + 4.748z^2 - 2.476z + 1.034}$
5	$\frac{0.123(z+1)^5}{5.303z^5 - 6.169z^4 + 8.936z^3 - 6.631z^2 + 3.725z - 1.235}$

---

2dB de rizo ( $\epsilon = 0.7648$ )

---

N	HLP <sub>p</sub> (z)
1	$\frac{1.308(z+1)}{2.308z + 0.308}$
2	$\frac{0.654(z+1)^2}{2.627z^2 - 0.354z + 1.019}$
3	$\frac{0.327(z+1)^3}{3.087z^3 - 1.735z^2 + 2.221z - 0.957}$
4	$\frac{0.164(z+1)^4}{3.695z^4 - 3.574z^3 + 4.724z^2 - 2.778z + 1.229}$
5	$\frac{0.082(z+1)^5}{4.441z^5 - 6.139z^4 + 8.763z^3 - 7.077z^2 + 4.104z - 1.477}$

---

Desde luego, también es posible construir tablas para funciones de transferencia de filtros digitales PPB elípticos.

Podemos, entonces, desglosar el proceso de diseño directamente en el dominio de "z", como sigue:

### 2.7.1 PROCEDIMIENTO DIRECTO PARA EL DISEÑO DE FILTROS DIGITALES.

1. A partir de ciertas especificaciones, se escoge diseñar un filtro Butterworth ó Chebyshev.
2. Las frecuencias de especificación digitales se determinan a partir de  $\theta'_i = \omega_i T$ . Tales frecuencias deben incluir a las frecuencias críticas (la frecuencia de corte para el Butterworth y la frecuencia límite de rizo para el Chebyshev).
3. Las constantes de diseño  $\alpha$  y  $k$  se determinan usando las relaciones apropiadas de la tabla (2.6). Utilizamos  $\theta'_i$  (prima) para denotar una frecuencia del filtro a diseñar, y  $\theta_i$  para la correspondiente frecuencia en el PPB. Usamos  $\theta_c = \pi/2$  en la tabla (2.6), porque esta es la frecuencia de corte del prototipo Butterworth, así como la frecuencia límite de rizo del prototipo Chebyshev.
4. Trasladar las frecuencias de especificación  $\theta'_i$  a las del prototipo  $\theta_i$ . Esto se logra reemplazando a  $z$  por  $e^{j\theta_i}$  en el prototipo, y a  $z$  por  $e^{j\theta'_i}$  para el filtro que se va a diseñar; y resolviendo para  $\theta_i$ . Para hacer esto utilizamos una relación de transformación apropiada de la tabla (2.6). Para un diseño pasa-altas, por ejemplo, tenemos

$$e^{j\theta_i} = -\frac{e^{j\theta'_i} - \alpha}{1 - \alpha e^{j\theta'_i}} \quad (2.91)$$

Con los valores de  $\theta_i$  para el prototipo, el orden del filtro se

determina por medio de las curvas de la figura (2.11) ó de la (2.12), y la función de transferencia PPB  $H_{LP}(z)$ , se encuentra usando la tabla (2.7) ó (2.8). La función de transferencia del filtro se deriva después, usando una transformación apropiada de la tabla (2.6). Para un diseño pasa-altas, por ejemplo,

$$H_{HP}(z) = H_{LP}(z) \Big|_{z = -\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}} \quad (2.92)$$

**Ejemplo 2.6:** Con este ejemplo se ilustra el diseño directo de un filtro digital pasa-bajas.

Diseñar un filtro digital pasa-bajas para una razón de muestreo de 20 kHz, que sea maximalmente plano en la banda de paso de 0 a 2 kHz (la cual deberá tener una magnitud de -3 dB). También deberá imprimir una ganancia de, máximo, -10 dB a las frecuencias mayores de 4 kHz.

**Solución:**

1. Se requiere un filtro Butterworth, debido a la característica "maximalmente plana".
- 2.- Las frecuencias de especificación son:

La frecuencia de corte (frecuencia crítica).

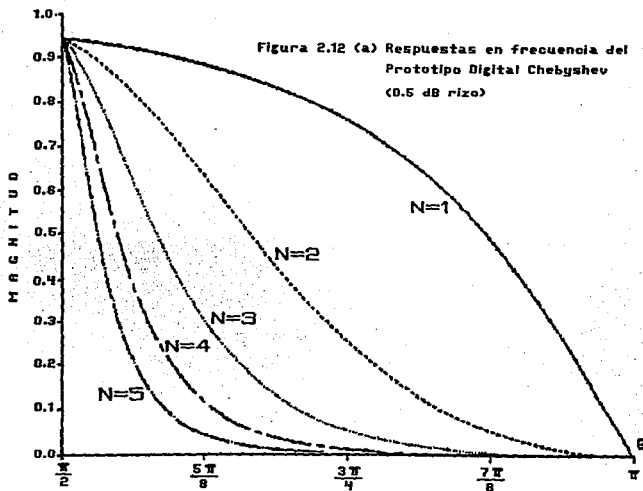
$$\theta_c' = \omega_c T = \frac{\omega_c}{f_s} = \frac{2\pi(2000)}{20000} = 0.2\pi$$

y la frecuencia límite de banda suprimida:

$$\theta_{st}' = \omega_{st} T = \frac{\omega_{st}}{f_s} = \frac{2\pi(4000)}{20000} = 0.4\pi$$

- 3.- La única constante de diseño que se necesita para un filtro pasa-bajas, es  $\alpha$ , y se calcula a partir de:

$$\alpha = \frac{\text{sen}(\theta_c/2 - \theta_{st}'/2)}{\text{sen}(\theta_c/2 + \theta_{st}'/2)} \quad (2.93)$$



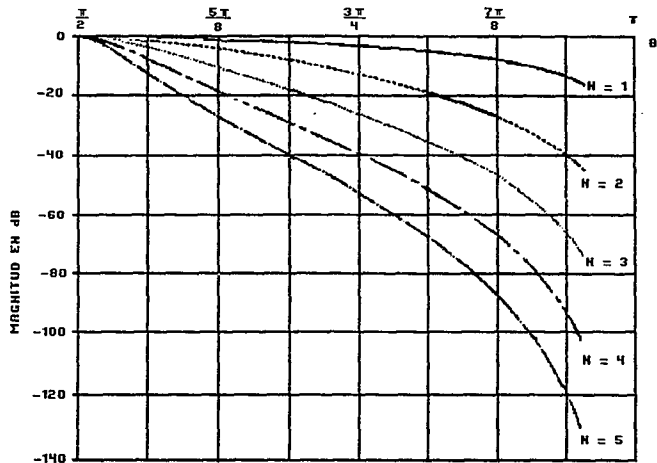
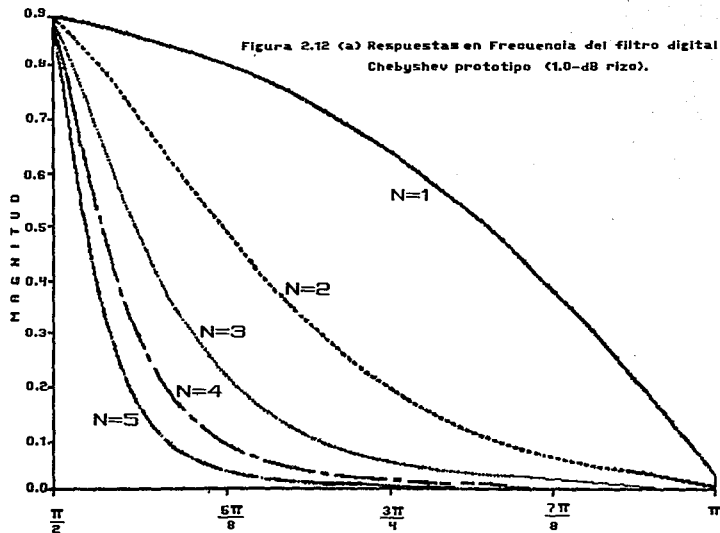


Figura 2.12 (b) Respuesta en frecuencia del prototipo Chebyshev digital (0.5-dB rizo)





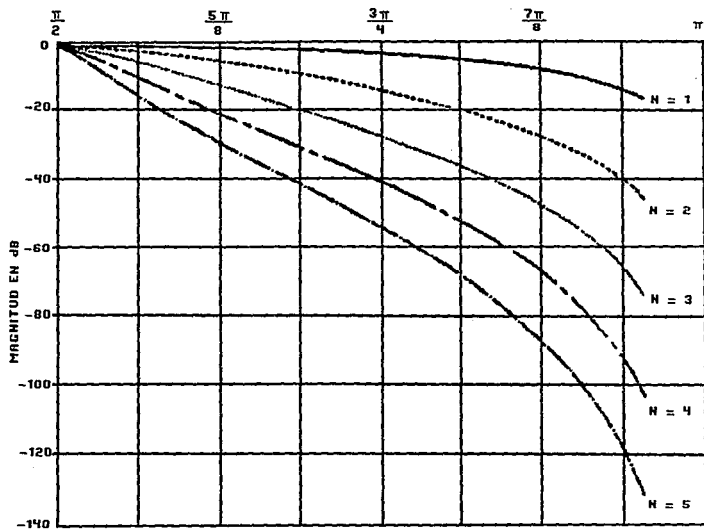


Figura 2.12 (b) Respuesta en frecuencia del prototipo Chebyshev digital (1,0-dB rizo)

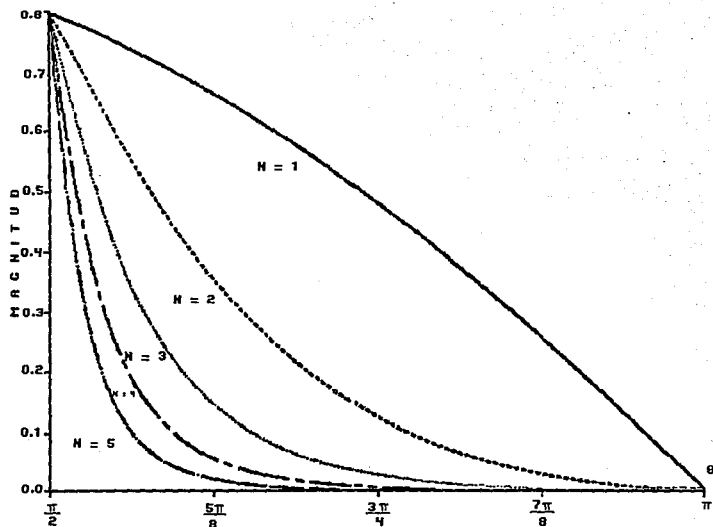


Figura 2.12 (a) Respuesta en frecuencia del prototipo Chebyshev digital (2.0-dB rizo)

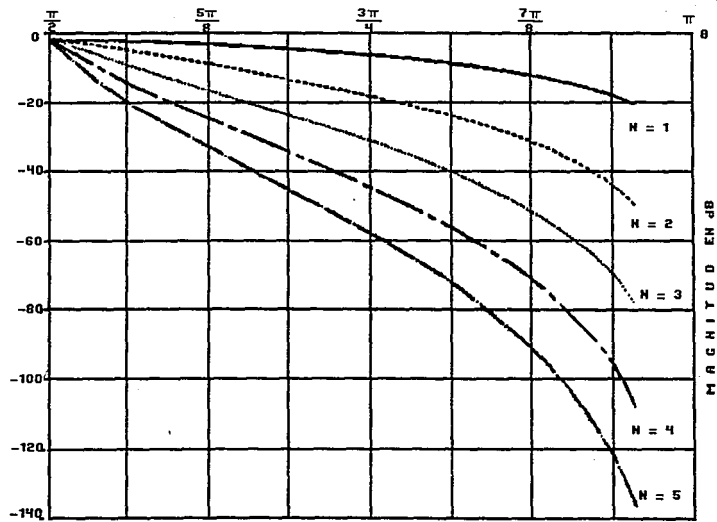


Figura 2.12 (b) Respuesta en Frecuencia del Prototipo Chebyshev Digital (2.0 dB rizo)

## FALLA DE ORIGEN EN SU TOTALIDAD

donde  $\theta_c$  representa la frecuencia crítica prototipo y  $\theta_c'$  la correspondiente frecuencia crítica en el filtro pasa-bajas. Para el PPB Butterworth digital, la frecuencia crítica es la que tiene -3 dB de magnitud, por lo cual, usaremos  $\theta_c = \pi/2$ . Esto corresponde a la frecuencia  $\theta_c' = 0.2\pi$  para el filtro que se quiere diseñar. De la ecuación (2.93)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\text{sen}(0.5\pi/2 - 0.2\pi/2)}{\text{sen}(0.5\pi/2 + 0.2\pi/2)} \\ &= \frac{\text{sen}(0.25\pi - 0.1\pi)}{\text{sen}(0.25\pi + 0.1\pi)} = \frac{\text{sen}(0.15\pi)}{\text{sen}(0.35\pi)} = \frac{0.454}{0.891} = 0.51 \end{aligned}$$

4.- Para encontrar el orden del filtro N, trasladamos la frecuencia límite de banda suprimida de  $\theta_{st}' = 0.4\pi$ , a su equivalente en el prototipo. De la tabla 2.6, la transformación del PPB a pasa-bajas (desnormalizado), es:

$$z = \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z} \quad (2.94)$$

de la cual,  $z = e^{j\theta_{st}}$  en el prototipo, y  $z = e^{j\theta_{st}'} = e^{j0.4\pi}$  en el pasa-bajas...

$$\begin{aligned} e^{j\theta_{st}} &= \frac{e^{j0.4\pi} - 0.51}{1 - 0.51e^{j0.4\pi}} \\ &= \frac{0.309 + j0.951 - 0.51}{1 - (0.158 + j0.485)} = 1e^{j2.3} \end{aligned}$$

en la que  $\theta_{st} = 2.30$  en el prototipo. En la fig. 2.11c. necesitamos encontrar el mínimo valor del orden del filtro N para el cual la ganancia sea, máximo de -10 dB, para frecuencias arriba de 2.30. Esto se satisface con un orden  $N = 2$ , con la correspondiente función de transferencia (tabla 2.7) de:

$$H_{LP}^F(z) = \frac{0.293(z+1)^2}{z^2 + 0.173}$$

El filtro pasa-bajas deseado se encuentra a partir del prototipo,

por medio del procedimiento:

$$\begin{aligned}
 HLP(z) &= HLP_s(z) \left|_{z=\frac{z-0.51}{1-0.51z}} \right. \\
 &= \frac{0.293(z+1)^2}{z^2 + 0.173} \left|_{z=\frac{z-0.51}{1-0.51z}} \right. \\
 &= \frac{0.067(z+1)^2}{z^2 - 1.145z + 0.414}
 \end{aligned}$$

La respuesta en frecuencia se da en la fig. 2.13, donde observamos que la ganancia es 0.707 en la frecuencia de corte  $\theta_c' = 0.2\pi = 0.628$ , y que es menor de 0.316 (-10 dB) en la frecuencia límite de la banda suprimida  $\theta_{sl}' = 0.4\pi = 1.257$ .

Las especificaciones se han cumplido y la función de transferencia del filtro es la misma (sin tomar en cuenta las pequeñas desviaciones en los cálculos), que se encontró en los ejemplos 4.9 y 4.11 por otros métodos.

**Ejemplo 2.7:** Este ejemplo muestra como se diseña un filtro digital pasa-banda.

Se desea diseñar un filtro digital Chebyshev, para cumplir con lo siguiente:

- a) Un rizo de 1 dB en el rango de frecuencias de 600 a 900 Hz.
- b) Una frecuencia de muestreo de 3000 Hz.
- c) Una ganancia máxima de -40 dB para el rango  $0 \leq f \leq 200$  Hz

**Solución:**

1. Convirtiendo las frecuencias analógicas a frecuencias

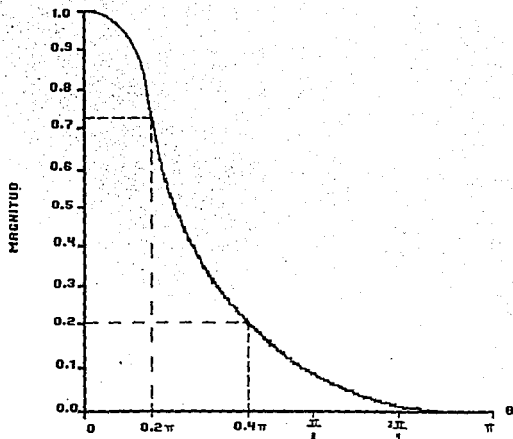


Figura 2.13 Respuesta en frecuencia para el filtro digital pasa-bajas del ejemplo 2.6

digitales, encontramos:

$$\theta_l' = 2\pi f_l / f_s = \frac{2\pi(600)}{3000} = 0.4\pi = 1.25 \text{ rad}$$

$$\theta_u' = 2\pi f_u / f_s = \frac{2\pi(900)}{3000} = 0.6\pi = 1.88 \text{ rad}$$

$$\theta_{st}' = 2\pi f_{st} / f_s = \frac{2\pi(200)}{3000} = 0.133\pi = 0.418 \text{ rad}$$

$$\theta_o' = \sqrt{\theta_e \theta_u} = \sqrt{(1.25)(1.88)} = 1.53 \text{ rad}$$

2. De la entrada no. 3 de la tabla 2.6 la constante de diseño  $\alpha$  es:

$$\alpha = \frac{\cos(\theta_u'/2 + \theta_l'/2)}{\cos(\theta_u'/2 - \theta_l'/2)}$$

donde  $\theta_u' = 0.6\pi$  y  $\theta_l' = 0.4\pi$ . Esto da:

$$\alpha = \frac{\cos(0.3\pi + 0.2\pi)}{\cos(0.3\pi - 0.2\pi)} = 0$$

La constante de diseño "k" es:

$$k = \tan \frac{\theta_c}{2} \cot(\theta_u'/2 - \theta_l'/2)$$

donde, para un PPB digital Chebyshev, usaremos la frecuencia límite de rizo en banda de paso, como frecuencia crítica  $\theta_c = \pi/2$ .

Por lo tanto:

$$k = \tan \left[ \frac{0.5 \pi}{2} \right] \cot \left[ \frac{0.6\pi}{2} - \frac{0.4\pi}{2} \right]$$

$$= 3.07$$

3. Necesitamos convertir la frecuencia límite de banda suprimida  $\theta_{st}' = 0.133\pi$  a la de su prototipo equivalente, y de la tabla 2.6, la transformación de PPB a pasa-banda,



es:

$$z = -\frac{z^2 - \frac{2\alpha k}{k+1}z + \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{2\alpha k}{k+1}z + \frac{k-1}{k+1}z^2} \quad (2.95)$$

Reemplazando "z" a la izquierda por  $e^{j\theta_{st}}$  y a la derecha por  $e^{j2\theta_{st}}$ , tenemos:

$$e^{j\theta_{st}} = -\frac{e^{j2\theta_{st}} - \frac{2\alpha k}{k+1}e^{j\theta_{st}} + \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{2\alpha k}{k+1}e^{j\theta_{st}} + \frac{k-1}{k+1}e^{j2\theta_{st}}} \quad (2.96)$$

y con los valores conocidos de  $\alpha$ ,  $k$  y  $\theta_{st}$ , tenemos

$$\begin{aligned} e^{j\theta_{st}} &= -\frac{e^{j0.888} + 0.509}{1 + 0.509e^{j0.888}} \\ &= 1e^{-j2.84} \end{aligned}$$

lo que nos da una frecuencia límite de la banda suprimida en el prototipo de  $\theta_{st} = 2.84$  rad.

En el PPB, necesitamos una ganancia, de máximo -40 dB en  $\theta_{st} = 2.84$  rad, y a partir de la fig 2.12b,  $N = 3$  es el orden de filtro que satisface esta especificación. La función de transferencia del prototipo es (según la tabla 2.8):

$$H_{LP_P}(z) = \frac{0.491(z+1)^3}{3.717z^3 - 1.277z^2 + 2.247z - 0.759} \quad (2.97)$$

Finalmente, necesitamos usar la tabla 2.6 para convertir el

prototipo a un filtro pasa-banda. Con  $\alpha = 0$  y  $k = 3.07$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 H_{BP}(z) &= HLP_p(z) \left| z = \frac{z^2 + 0.500}{1 + 0.500z^2} \right. \\
 &= \frac{0.011(z^6 - 3z^4 + 3z^2 - 1)}{z^6 + 2.135z^4 + 1.768z^2 + 0.54}
 \end{aligned}
 \tag{2.78}$$

lo cual concuerda aproximadamente con el resultado del ejemplo 4.10. Las diferencias en los coeficientes del denominador y numerador entre los dos resultados, pueden deberse al redondeo de los cálculos, y a diferencias inherentes entre los dos métodos. De cualquier modo, las curvas de respuesta en frecuencia son virtualmente idénticas para los dos sistemas.

---

# **Capítulo 3**

## **Realización de**

## **Filtros Digitales**

## REALIZACION DE FILTROS DIGITALES.

### 3.1 INTRODUCCION.

La aproximación es el proceso de generar una función de transferencia que satisfaga las especificaciones deseadas, las cuales pueden ser entre otras las amplitud, la fase y posiblemente la respuesta en el dominio del tiempo. Y la implementación es el proceso de convertir la función de transferencia en una red de filtro.

La implementación de un filtro digital puede hacerse de dos formas, por software o por hardware, en el primer caso, la implementación supone la simulación de la red de filtro por medio de una computadora. En el segundo caso, ésta implica la conversión del filtro en una pieza específica de hardware, en el presente trabajo no abarcamos la segunda opción por cuestiones de tiempo, sin embargo, para llevar a cabo la primera, en el capítulo cinco se muestra un programa para el diseño de filtros digitales.

### 3.2 REALIZACION DE FILTROS DIGITALES.

Los sistemas LIT (Lineales e Invariantes en el Tiempo) discretos, pueden describirse o modelarse por medio de ecuaciones en diferencias lineales y de coeficientes constantes. Estas ecuaciones pueden resolverse utilizando un método iterativo.

El "diagrama de sistema" es un modelo alternativo para describir un sistema LIT. Un diagrama de sistema es simplemente una forma gráfica de representar la misma información contenida en las ecuaciones en diferencias. Tales diagramas nos pueden proporcionar una visualización más útil de la estructura del sistema. Además, hay métodos gráficos que manipulan los diagramas para ayudar en el análisis de algún sistema.

Primero, definiremos los símbolos necesarios para dibujar un diagrama que represente un sistema lineal. Recordemos

la forma general de las ecuaciones en diferencias:

$$Y(n) = \sum_{k=1}^{k=N} a_k v(n-k) + \sum_{k=0}^{k=L} b_k u(n-k)$$

Podemos percatarnos de que se necesitan retardos, multiplicaciones y sumas para implementar dicha ecuación. Las siguientes figuras nos muestran dos conjuntos de símbolos usados comúnmente en el dibujo de realizaciones.

La unidad de retardo de la figura (a) se describe como  $x_2(n) = x_1(n-1)$ , lo cual significa que la salida del retardo "D" es la misma que la entrada, solo que desplazada en el tiempo, por un intervalo de muestreo.

La representación de la ganancia en la figura (b) nos indica que la salida es simplemente la entrada multiplicada por un constante real  $b_0$ .

Los bloques para representar la suma se muestran en la figura (c), donde  $x_3(n)$  es la suma de  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ . El resultado de la suma,  $x_3(n)$ , se representa por un nodo en un gráfico de flujo de señal, en contraste con los diagramas a bloques, donde la salida se representa por medio de una flecha que sale de un círculo de suma.

Normalmente estos dos conjuntos de símbolos no se mezclan y el uso de uno u otro depende de la preferencia del diseñador.

En la siguiente figura utilizamos los diagramas a bloques para representar la ecuación en diferencias general.

La parte de arriba de la figura representa los términos que involucran a la entrada mientras que la parte de abajo representa a los de la salida. Esta es la "realización" de un sistema recursivo.

Un sistema no recursivo en el cual no se necesita memoria para

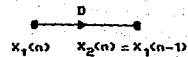
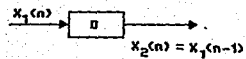


Figura (a) Unidad de Retardo.

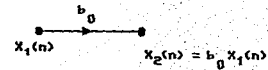
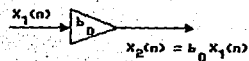


Figura (b) Ganancia

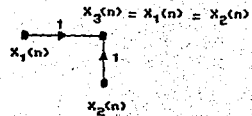
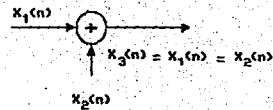
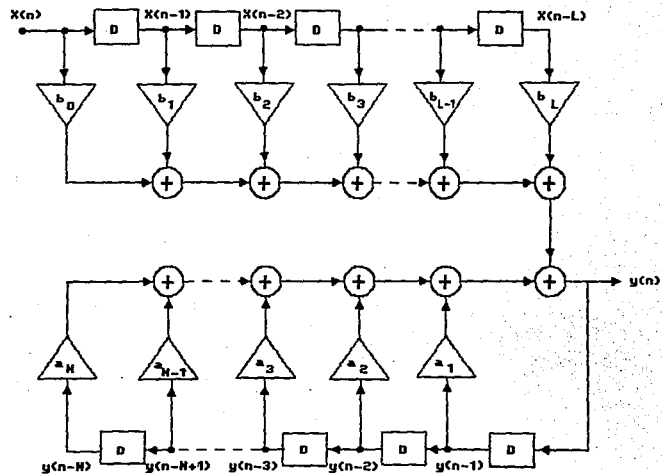


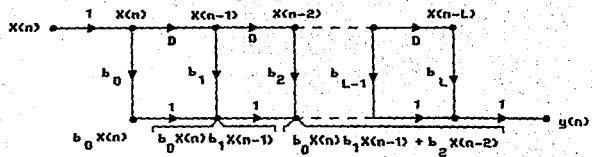
Figura (c) Sumador

Representación en  
Diagrama de Bloques

Representación gráfica en  
Diagramas de Flujo



Realización de una Ecuación en Diferencias General



$$y(n) = \sum_{k=0}^{k=L} b_k X(n-k)$$

Realización de un Sistema No Recursivo



las muestras anteriores de la salida, se puede realizar únicamente con la parte de arriba de la figura, es decir:

La realización de Filtros Digitales es el proceso de convertir la función de transferencia obtenida, en un proceso de aproximación; en una red de filtro. Los procesos de aproximación y realización se llevan a cabo considerando que los dispositivos "aritméticos" que se emplearán son de precisión infinita. En este capítulo consideraremos esta etapa del diseño.

La realización se puede llevar a cabo utilizando los siguientes métodos:

- 1.- Realización directa.
- 2.- Realización directa canónica.
- 3.- Realización en cascada.
- 4.- Realización en paralelo.
- 5.- Realización en escalera.

### 3.2.1 REALIZACION DIRECTA.

Consideremos un función de transferencia de N ésimo orden tal como:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{1+D'(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (3.1)$$

Donde

$$N(z) = \sum_{l=0}^N a_l z^{-l} \quad (3.2)$$

y

$$D^*(z) = \sum_{l=1}^N b_l z^{-l}$$

Podemos escribir

$$Y(z) = U_1(z) + U_2(z)$$

Donde:

$$\begin{aligned} U_1(z) &= N(z) X(z) \\ U_2(z) &= -D^*(z) Y(z) \end{aligned} \quad (3.3)$$

por lo tanto la realización de  $H(z)$  se puede subdividir en la realización de dos funciones de transferencia más simples,  $N(z)$  y  $-D^*(z)$  como se ilustra en la figura 3.1

Considérese la realización de  $N(z)$ . A partir de las ecuaciones 3.2 y 3.3...

$$U_1(z) = (a_0 + z^{-1}N_1(z)) X(z)$$

donde:

$$N_1(z) = \sum_{l=1}^N a_l z^{-l+1}$$

... por lo tanto  $N(z)$  se puede realizar utilizando un multiplicador con parámetro  $a_0$  en paralelo con una red caracterizada por  $z^{-1}N_1(z)$ . A su vez  $z^{-1}N_1(z)$  se puede realizar utilizando una unidad de retardo en cascada con una red caracterizada por  $N_1(z)$ . Dado que la unidad de retardo puede preceder o anteceder a la realización de  $N_1(z)$  existen dos posibilidades para representar a  $N(z)$  dadas en la figura 3.2.

El procedimiento arriba descrito puede aplicarse ahora a  $N_1(z)$ . Esto es,  $N_1(z)$  se puede expresar como:

$$N_1(z) = a_1 + z^{-1}N_2(z) \quad \text{Donde } N_2(z) = \sum_{l=2}^N a_l z^{-l+2}$$

como se hizo anteriormente se pueden obtener dos redes para  $N_1(z)$ . Es claro entonces, que hay cuatro redes para  $N(z)$ . Dos de

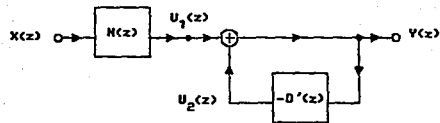


Figura 3.1 Descomposición de  $H(z)$  en dos funciones de transferencia.

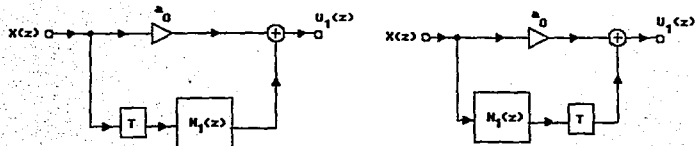


Figura 3.2 Dos realizaciones de  $H(z)$ .

estas se muestran en la figura 3.3.

Este procedimiento cíclico se puede repetir  $N$  veces, donde  $N(z)$  se reducirá a un simple multiplicador. En cada ciclo de procedimiento, hay dos posibilidades, y dado que hay  $N$  ciclos, se pueden deducir un total de  $2^N$  redes distintas para  $N(z)$ . Tres de éstas, se muestran en la figura 3.4.

$-D^*(z)$  se puede realizar exactamente de la misma forma. Las redes para  $-D^*(z)$  se pueden obtener reemplazando  $a_0, a_1, a_2, \dots$  por  $0, -b_1, -b_2, \dots$

Finalmente, la realización de  $H(z)$  se puede completar interconectando la realizaciones de  $N(z)$  y  $-D^*(z)$  de acuerdo con la figura 3.1.

---

**Ejemplo 3.1:** Realizar la función de transferencia

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

**SOLUCION:**

Las dos realizaciones de  $H(z)$  se pueden obtener de la figura 3.4a y b. Se muestran en la figura 3.5a y b

---

### 3.1.2 REALIZACION DIRECTA CANONICA.

Se dice que una red digital es canónica, si el número de unidades de retardo empleadas es igual al orden de la función de transferencia.

La ecuación 3.1 se puede expresar como :

$$Y(z) = N(z)Y'(z) \text{ Donde } Y'(z) = X(z) - D^*(z)Y'(z)$$

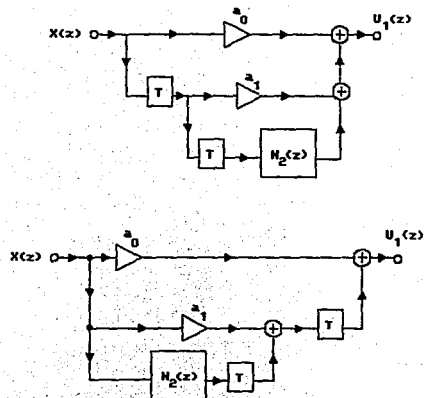


Figura 3.3 Dos de cuatro posibles realizaciones de  $H(z)$ .

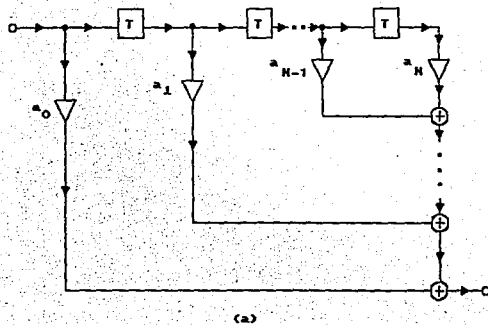


Figura 3.4 Arbol de  $2^N$  posibles realizaciones de  $M(z)$ .

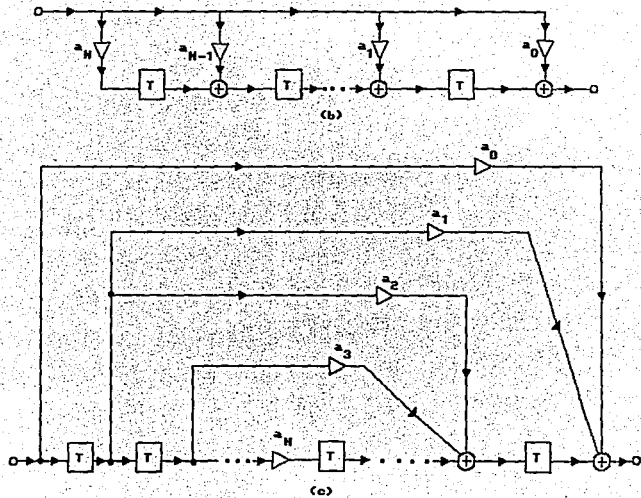


Figura 3.4 (continuación).

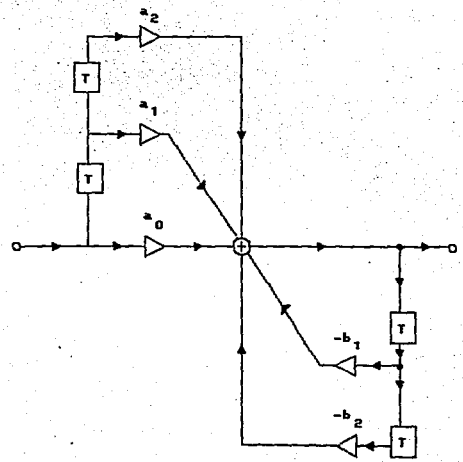


Figura 3.5 (a).



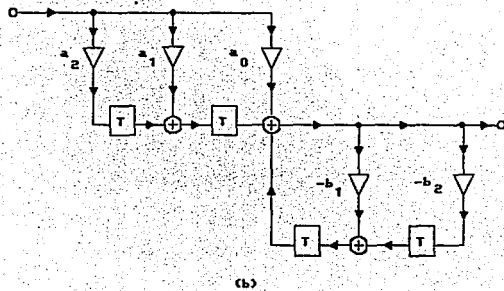


Figura 3.5. Dos realizaciones de  $H(z)$  (Ejemplo 3.1).

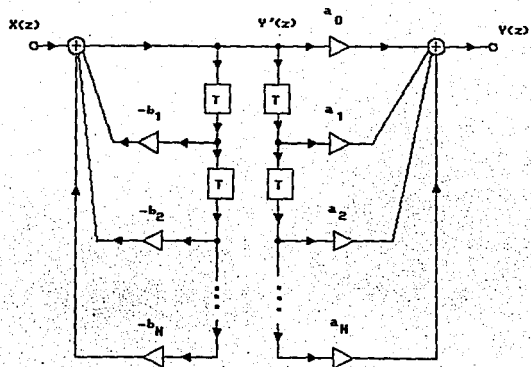


Figura 3.6 Derivación de la Realización Canónica de  $H(z)$ .

en cuyo caso  $H(z)$  se puede realizar como se muestra en la figura 3.6 utilizando la figura 3.4a para  $N(z)$  y  $-D^*(z)$ . Evidentemente, las señales en los nodos  $A'$ ,  $B'$ , ... son iguales a las señales respectivas en los nodos  $A$ ,  $B$ , ... Es por eso, que las unidades de retardo de la trayectoria  $A'B'$  se pueden eliminar, obteniéndose de esta manera una realización canónica para  $H(z)$ .

### 3.1.3 REALIZACION EN CASCADA.

La función de transferencia se puede factorizar y convertirse en un producto de funciones de transferencia de segundo orden como:

$$H(z) = \prod_{l=1}^M H_l(z)$$

Donde:

$$H_l(z) = \frac{a_{0l} + a_{1l}z^{-1} + a_{2l}z^{-2}}{1 + b_{1l}z^{-1} + b_{2l}z^{-2}}$$

Por lo tanto :

$$\begin{aligned} Y(z) &= (H_1(z)X(z)) H_2(z) \dots H_M(z) \\ &= (H_2(z)Y_1(z)) H_3(z) \dots H_M(z) \\ &= H_M(z)Y_{M-1}(z) \end{aligned}$$

Donde

$$Y_1(z) = H_1(z)X(z)$$

$$Y_i(z) = H_i(z)Y_{i-1}(z) \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, M-1$$

De esta manera,  $H(z)$  se puede realizar usando la configuración en cascada de la figura 3.7a. Las secciones individuales pueden realizarse empleando la red canónica de segundo orden de la figura 3.7b.

### 3.1.4 REALIZACION EN PARALELO.

Como una alternativa, la función de transferencia se puede

expandir en fracciones parciales como:

$$H(z) = \sum_{l=1}^M H_l(z)$$

donde:

$$H_l(z) = \frac{a_{0l} + a_{1l}z^{-1}}{1 + b_{1l}z^{-1} + b_{2l}z^{-2}}$$

En este caso:

$$Y(z) = \sum_{l=1}^M H_l(z)X(z)$$

Y así se obtiene la configuración en paralelo de la fig. 3.8.

Se puede obtener una realización en paralelo alternativa expandiendo  $\frac{H(z)}{z}$ , en fracciones parciales.

### 3.1.5 REALIZACION EN ESCALERA.

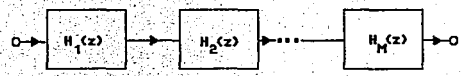
El siguiente método a considerar es el de la realización en escalera, debido a Mitra y Sherwood. Está basado en la configuración mostrada en la figura 3.9a.

Con  $N = 4$  en la fig. 3.9a, el análisis nos da el siguiente resultado:

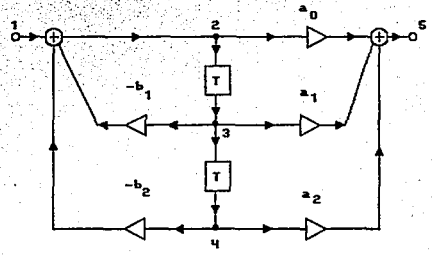
$$Y(z) = H_1(z)Y'(z) + H_2(z)X(z)$$

donde:

$$H_1(z) = \frac{N_1(z)}{D_1(z)} = \frac{m_4 m_3 m_2 z^3 + (m_4 + m_2)z}{m_4 m_3 m_2 m_1 z^4 + (m_4 m_3 + m_4 m_1 + m_2 m_1)z^2 + 1}$$



(a)



(b)

Figura 3.7 (a) Realización en cascada de  $H(z)$ :  
 (b) Sección canónica de segundo orden.

$$= \frac{1}{m_1 z + \frac{1}{m_2 z + \frac{1}{m_3 z + \frac{1}{m_4 z}}}}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{D_4(z)}$$

Y como:

$$Y'(z) = -Y(z) \dots$$

la ecuación 3.4 nos dá:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{H_2(z)}{1 + H_1(z)} \quad (3.5)$$

De igual forma, para cualquier valor de N se puede demostrar que:

$$H_1(z) = \frac{N_1(z)}{D_1(z)} = \frac{1}{m_1 z + \frac{1}{m_2 z + \frac{1}{\dots}}}$$

$$\frac{1}{m_N z}$$

$$H_2(z) = \frac{(-1)^k}{D_1(z)}$$

donde k es el mayor entero, igual o mayor a  $\frac{N}{2}$ ; esto es:

$$(-1)^k = \begin{cases} +1 & \text{para } k = 1, 4, 5, 8, 9, \dots \\ -1 & \text{para } k = 2, 3, 6, 7, \dots \end{cases}$$

Consideremos la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{(-1)^k}{D(z)} = \frac{(-1)^k}{1 + D^*(z)}$$

Donde:  $D^*(z) = \sum_{l=1}^N b_l z^l$

Podemos escribir:

$$H(z) = \frac{(-1)^k}{Od D(z) + Ev D(z)} \quad (3.6)$$

donde  $Od D(z)$  y  $Ev D(z)$  denotan la parte impar y la parte par de  $D(z)$ , respectivamente.

Comparando las ecuaciones (3.5) y (3.6) se puede identificar lo siguiente:

$$H_1(z) = \begin{cases} \frac{Od D(z)}{Ev D(z)} & \text{para } N \text{ par} \\ \frac{Ev D(z)}{Od D(z)} & \text{para } N \text{ impar} \end{cases}$$

$$H_2(z) = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{Ev D(z)} & \text{para } N \text{ par} \\ \frac{(-1)^k}{Od D(z)} & \text{para } N \text{ impar} \end{cases}$$

Ahora bien, si expresamos  $H_1(z)$  como una expansión continua e infinita de fracciones, tenemos:

$$H_1(z) = \frac{1}{c_1 z + \frac{1}{c_2 z + \frac{1}{\dots \dots \dots \frac{1}{c_N z}}}} \quad (3.7)$$

Y, por lo tanto, si:

$$m_l = c_l$$

la configuración de la fig. 3.9a es, entonces, la realización de  $H(z)$ .

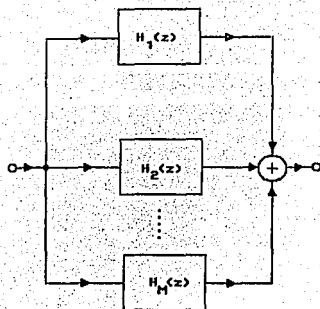


Figura 3.8 Realización en paralelo de  $H(z)$ .



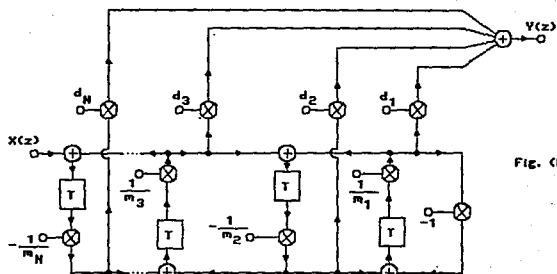
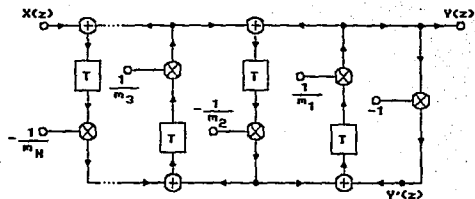


Figura 3.9 Realización en escalera de (a)  $H(z) = (-1)^K/D(z)$  y (b)  $H(z) = N(z)/D(z)$ .

Este tipo de desarrollo se puede extender a cualquier tipo de función de transferencia de la forma:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \text{donde } N(z) = \sum_{l=0}^N a_l z^l$$

modificando la configuración básica como se muestra en la figura (3.9b). Para  $N = 4$  y  $m_l = c_l$ , el análisis nos da:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{l=1}^4 d_l \eta_l(z)}{D(z)}$$

donde:

$$\begin{aligned} \eta_1(z) &= 1 \\ \eta_2(z) &= c_1 z + 1 \\ \eta_3(z) &= -(c_1 c_2 z^2 + c_2 z + 1) \\ \eta_4(z) &= -(c_1 c_2 c_3 z^3 + c_2 c_3 z^2 + (c_1 + c_3)z + 1) \end{aligned}$$

Si asumimos que:

$$N(z) = \sum_{l=1}^4 d_l \eta_l(z)$$

y después igualando coeficientes de potencias iguales de  $z$ , la ecuación matricial es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} -c_1 c_2 c_3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 c_3 & c_1 c_2 & 0 & 0 \\ -(c_1 + c_3) & -c_2 & c_1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Por medio de la solución de esta ecuación obtenemos los valores necesarios de  $d_1, d_2, \dots$

**Ejemplo 3.2:** Realizar la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{10^{-2}(-3.517 + 0.666z + 0.666z^2 - 3.51z^3)}{1 - 3.266z + 3.739z^2 - 1.53z^3}$$

usando el método de escalera.

**SOLUCIÓN:**  $H(z)$  se puede representar como:

$$\begin{aligned} H(z) &= 0.02299 + \frac{-0.0582 + 0.0817z - 0.0793z^2}{1 - 3.266z + 3.739z^2 - 1.53z^3} \\ &= 0.02299 + H'(z) \end{aligned}$$

y a partir de aquí,  $H(z)$  puede realizarse utilizando un multiplicador en paralelo con una red caracterizada por  $H'(z)$ . Como el orden de  $H'(z)$  es impar, podemos escribir:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= -\frac{3.739z^2 + 1}{1.53z^3 + 3.266z} \\ &= \frac{1}{-0.4092z + \frac{1}{-1.309z + \frac{1}{-2.856z}}} \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$m_1 = c_1 = -0.4092 \quad m_2 = c_2 = -1.309 \quad m_3 = c_3 = -2.856$$

Del análisis, obtenemos, para  $N = 3$ :

$$\begin{aligned} n_1(z) &= -1 \\ n_2(z) &= -(c_1 z + 1) \\ n_3(z) &= c_1 c_2 z^2 + c_2 z + 1 \end{aligned}$$

$d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$ , están dadas por:

$$\begin{bmatrix} c_1 c_2 & 0 & 0 \\ c_2 & -c_1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

6:

$$d_0 = \frac{a_2}{c_1 c_2} = -0.148 \quad d_2 = \frac{d_0 c_2 - a_1}{c_1} = -0.274$$

$$d_1 = d_0 - d_2 - a_0 = 0.184$$

# **Capítulo 4**

## **Algoritmos para el**

## **Diseño de Filtros**

## **Digitales**

## ALGORITMOS PARA EL DISEÑO DE FILTROS DIGITALES.

### 4.1 INTRODUCCION.

A lo largo del presente capítulo haremos una revisión general de los procedimientos involucrados en la conformación de un filtro digital.

El método gráfico para la estimación de la respuesta en frecuencia hace uso de la gráfica de polos y ceros del filtro, por lo cual se requiere haber encontrado previamente, la función de transferencia del sistema.

Más adelante se hace mención de las transformaciones de frecuencias analógicas. Para diseñar un filtro partimos de sus especificaciones, las cuales podemos transformar a especificaciones de un filtro PPB (normalizado). Posteriormente diseñamos el filtro PPB. Después, se procede a transformar éste a un filtro "no normalizado", por medio del empleo de alguna de las transformaciones de frecuencias analógicas que se podrán estudiar en este capítulo.

Más tarde, se tratará el método de la transformada "z", propio para el diseño de filtros digitales.

También, se proponen métodos alternativos para el diseño, llamados "diseño por medio del impulso invariante y el escalón invariante"

Al final del capítulo se menciona el procedimiento de la transformación bilineal y las transformaciones digitales de frecuencias.

Como se puede observar, a lo largo de este capítulo se hará un recorrido por las diferentes alternativas que tenemos para diseñar un filtro digital. Además, se proporcionan ejemplos de

diseño en los que se involucran cada uno de éstos métodos. Con la esperanza de que el lector obtenga un mayor entendimiento.

#### 4.2 RESPUESTA EN FRECUENCIA , METODO GRAFICO.

La función de transferencia:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k(s^L + b_{L-1}s^{L-1} + \dots + b_1s + b_0)}{s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (4.1)$$

se puede factorizar como:

$$H(s) = k \frac{(s-n_1)(s-n_2)\dots(s-n_L)}{(s-d_1)(s-d_2)\dots(s-d_N)} \quad (4.2)$$

Evaluando en  $s=j\omega$  para entradas senoidales, obtenemos la función de respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = k \frac{(j\omega-n_1)(j\omega-n_2)\dots(j\omega-n_L)}{(j\omega-d_1)(j\omega-d_2)\dots(j\omega-d_N)} \quad (4.3)$$

Esta ecuación se puede escribir en términos de vectoriales, como:

$$H(j\omega) = k \frac{(N_1 e^{j\alpha_1})(N_2 e^{j\alpha_2})\dots(N_L e^{j\alpha_L})}{(D_1 e^{j\beta_1})(D_2 e^{j\beta_2})\dots(D_N e^{j\beta_N})}$$

$$= \frac{k N_1 N_2 \dots N_L}{D_1 D_2 \dots D_N} e^{j(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_L - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_N)} \quad (4.4)$$

Todo esto podemos representarlo con una expresión más sencilla para la respuesta en frecuencia:

$$H(j\omega) = M e^{j\phi} \quad (4.5)$$

Las  $N$ 's,  $D$ 's,  $\alpha$ 's y  $\beta$ 's se pueden graficar en la figura (4.1)a

donde están los polos y ceros de  $H(s)$ .

El procedimiento gráfico para estimar la respuesta en frecuencia es el siguiente:

Si queremos encontrar  $H(j\omega)$  para un valor especial de  $\omega$ , debemos dibujar vectores desde todos los polos y los ceros hasta el punto  $j\omega$ .

Medir o calcular las  $N$ 's,  $D$ 's,  $\alpha$ 's y  $\beta$ 's.

Calcular  $H(j\omega) = M e^{jP}$ , donde:

$$M = \frac{k N_1 N_2 \dots N_L}{D_1 D_2 \dots D_N} \quad y$$

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_L - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N) \quad (4.6)$$

---

**Ejemplo 4.1.** Este ejemplo ilustra la evaluación gráfica de la respuesta en frecuencia.

Los polos y ceros de un filtro analógico pasa-todo se muestran en la figura 4.1(b). Usando el método gráfico para mostrar que la magnitud de  $M$  de la respuesta en frecuencia es constante para  $0 \leq \omega \leq \infty$ .

**Solución:** Refiriéndonos a la figura 4.1(c), tenemos:

$$H(j\omega) = \frac{0.5(N_1 e^{j\alpha_1})(N_2 e^{j\alpha_2})}{(D_1 e^{j\beta_1})(D_2 e^{j\beta_2})}$$

pero  $N_1 = D_1$  y  $N_2 = D_2$ . Por tanto  $|H(j\omega)| = 0.5$  para todo  $\omega$ .

---

#### 4.2.1. OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE UN FILTRO PARTIENDO DE SU RESPUESTA EN FRECUENCIA.

Supongamos que tenemos la función de respuesta en frecuencia



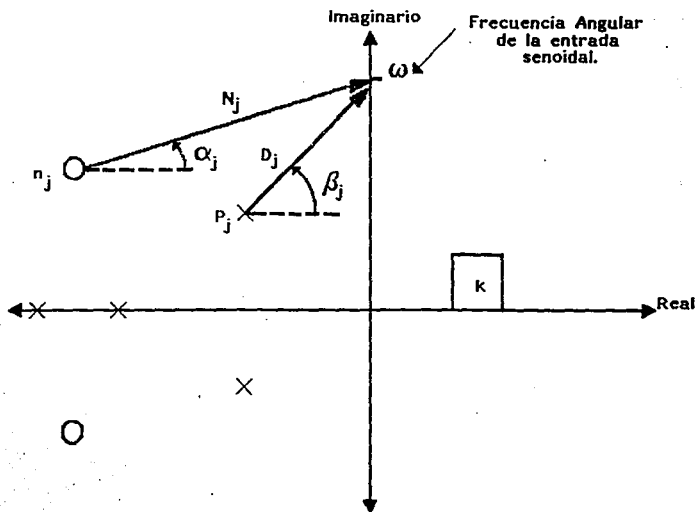


Figura 4.1 (a) Evaluación gráfica de la respuesta en frecuencia.

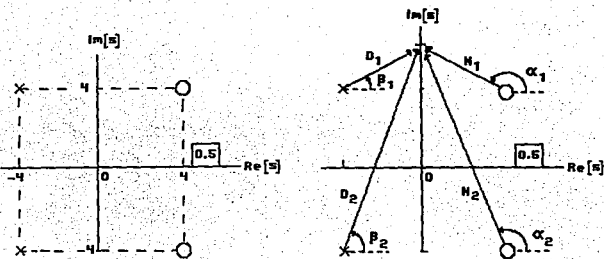


Figura 4.1

b) Polos y Ceros de  $H(s)$ 

o) Ejemplo 4.1, Evaluación de la Respuesta en Frecuencia.

$H(j\omega)$  de algún sistema, ó, como es más usual, su característica de magnitud al cuadrado  $|H(j\omega)|^2$ , ¿cómo podemos encontrar su función de transferencia  $H(s)$ ?

Dada la función de respuesta en frecuencia:

$$H(j\omega) = u + jv = re^{j\theta} \quad (4.7)$$

su complejo conjugado es:

$$H^*(j\omega) = u - jv = re^{-j\theta} \quad (4.8)$$

La característica de magnitud al cuadrado es:

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= r^2 = u^2 + v^2 \\ &= H(j\omega) * H^*(j\omega) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Pero ahora sabemos que  $H^*(j\omega) = H(-j\omega)$  y en consecuencia la ecuación (4.9) se convierte en

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) * H(-j\omega) \quad (4.10)$$

También sabemos que:

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} \quad \text{y, por lo tanto } H(-j\omega) = H(s) \Big|_{s=-j\omega} \quad (4.11)$$

Y el segundo término se puede escribir como:

$$H(-j\omega) = H(-s) \Big|_{s=j\omega} \quad (4.12)$$

Usando las ecuaciones (4.10), (4.11) y (4.12), obtenemos el siguiente resultado:

$$H(j\omega) * H(-j\omega) = |H(j\omega)|^2 = H(s) * H(-s) \Big|_{s=j\omega} \quad (4.13)$$

Recordando que el objetivo es determinar  $H(s)$  a partir de  $H(j\omega)$ , empezamos utilizando la ecuación (4.13), de la otra manera (con  $\omega = -js$ ).

$$|H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega = -js} = H(s) * H(-s) \quad (4.14)$$

Si examinamos el lado derecho de la ecuación (4.14), considerando la función de transferencia general:

$$H(s) = \frac{k(s-n_1)(s-n_2)\dots(s-n_L)}{(s-d_1)(s-d_2)\dots(s-d_N)} \quad (4.15)$$

Donde  $-d_1, -d_2, \dots, -d_N$  representan los polos y  $n_1, n_2, \dots, n_L$  son los ceros, entonces reemplazando "s" por "-s" en la ecuación (4.15) tenemos:

$$H(-s) = \frac{k(-s-n_1)(-s-n_2)\dots(-s-n_L)}{(-s-d_1)(-s-d_2)\dots(-s-d_N)} \quad (4.16)$$

Donde  $-d_1, -d_2, \dots, -d_N$  representan los polos y  $-n_1, -n_2, \dots, -n_L$  son los ceros. De tal forma que  $H(s)$  tiene todos sus polos en el semiplano izquierdo, y  $H(-s)$  tiene todos sus polos en el semiplano derecho. Algo similar ocurre con los ceros. Como consecuencia, para encontrar  $H(s)$  a partir de  $|H(j\omega)|^2$ , se procede como sigue:

- 1.- Sustituir  $-js$  por  $\omega$  en  $|H(j\omega)|^2$ , para encontrar  $H(s) * H(-s)$ .
- 2.- Factorizar la expresión  $H(s) * H(-s)$  para obtener los "2N" polos, y los "2L" ceros.
- 3.- Asignar los polos y ceros del semiplano izquierdo a  $H(s)$ .

El método más común para diseñar algún filtro digital recursivo,

es diseñar un filtro analógico y después convertirlo en un modelo

#### 4.3 TRANSFORMACIONES DE FRECUENCIAS ANALOGICAS.

Los procedimientos que se han expuesto en este capítulo han sido pensados para filtros PPB (prototipos pasa-bajas) y se han utilizado aproximaciones Butterworth, Chebyshev o Elípticas a la característica pasa-bajas ideal.

Extendamos, ahora, estos procedimientos al diseño de filtros "no prototipo" (desnormalizados) pasa-bajas, pasa-altas, pasa-banda y supresor de banda.

##### 4.3.1 De "Pasa-bajas prototipo" a "Pasa-bajas".

Considérese un filtro prototipo analógico pasa-bajas con una frecuencia crítica de  $\omega = 1$ , que tenga la siguiente función de transferencia.

$$HLP_p = \frac{D(s)}{D(s)} \quad (4.17)$$

Supóngase que se quiere diseñar un filtro analógico pasa-bajas para el cual:

$$HLP(j\omega_c) = HLP_p(j1) \quad (4.18)$$

esto es, un filtro cuya frecuencia crítica sea de  $\omega_c$  rad/s. Para realizar la transformación deseada sólo necesitamos reemplazar a "s" en el prototipo, por  $s/\omega_c$ , de forma tal, que:

$$HLP(s) = HLP_p(s) \Big|_{s \rightarrow s/\omega_c} \quad (4.19)$$

---

**Ejemplo 4.2:** Este ejemplo ilustra el diseño de un filtro pasabajas a partir de un "prototipo pasa-bajas".

En el ejemplo 2.1 se diseñó un filtro PPB Chebyshev de tercer orden, con un rizo de 1 dB, y que tenía la función de transferencia siguiente.

$$H_{LP}(s) = \frac{0.491}{s^3 + 0.988s^2 + 1.238s + 0.491} \quad (4.20)$$

En la figura (4.2) podemos observar que  $M = 0$  dB en  $\omega = 0$  rad/s, y que  $M = -1$  dB en la frec. límite de rizo  $\omega = 1$  rad/s. Determinemos, a partir de este PPB, la función de transferencia del pasa-bajas Chebyshev de tercer orden, que tenga una frec. lím. de rizo de  $\omega = 10^2$  rad/s en vez de  $\omega = 1$  rad/s.

**Solución:** Usando la ecuación 4.19 procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} H_{LP}(s) &= H_{LP_P}(s) \Big|_{s=s/10^2} \\ &= \frac{491000}{s^3 + 98.8s^2 + 12380s + 491000} \end{aligned}$$

Podemos ver que  $|H_{LP}(j0)| = 1$  y que:

$$\begin{aligned} |H_{LP}(j10^2)| &= \frac{491000}{-j10^6 - 988000 + j1238000 + 491000} \\ &= 0.891 \\ &= -1 \text{ dB} \end{aligned}$$

que era la ganancia que se requería en el límite del rizo.

---

#### 4.3.2. De "Pasa-bajas prototipo" a "Pasa-altas".

En este caso se requiere que la característica de magnitud esté invertida con respecto a la escala de frecuencias. Esto es; el comportamiento del "prototipo" en frecuencias bajas, es ahora el comportamiento del "filtro", en frecuencias altas, y vice-versa. La transformación de un PPB a un pasa-altas se realiza por medio

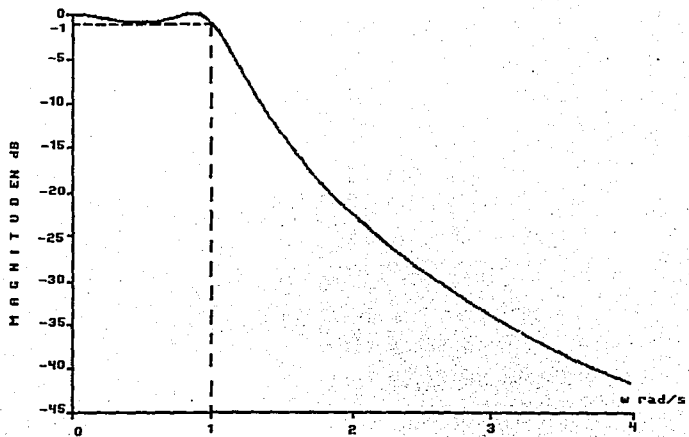


Figura 4.2 Filtro Chebyshev Pasa-Bajas del Ejemplo 4.2

de la substitución:

$$H_{HP}(s) = H_{LP_p}(s) \Big|_{s=\omega_c/s} \quad (4.21)$$

donde  $\omega_c$  es la frecuencia crítica pasa-altas.

Como sabemos, las magnitudes de la respuesta en frecuencia tanto del pasa-altas como del prototipo, tienen las siguientes características.

- $M = 1$  en  $\omega = 0$  en el prototipo, mientras que  $M \rightarrow 1$  cuando  $\omega \rightarrow \alpha$
- $M \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow \alpha$  en el prototipo, mientras que  $M = 0$  en  $\omega = 0$  en el pasa-altas.
- $M = 0.707$  en  $\omega = 1$  en el prototipo, mientras que en el pasa-altas,  $M = 0.707$  en  $\omega = \omega_c$ . (Esto es sólo para Butterworth. Si fuera Chebyshev ó Elíptico podríamos especificar la banda de paso dentro del rango  $0 \leq \omega \leq 1$  para el prototipo y dentro del intervalo  $\omega_c \leq \omega$  para el pasa altas)

---

**Ejemplo 4.3:** Este ejemplo ilustra la transformación de un prototipo pasa-bajas a un filtro pasa-altas.

De la Tabla 2.1 sabemos que la función de transferencia del prototipo Butterworth de segundo orden está dada por:

$$H_{LP_p}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (4.22)$$

empecemos con este filtro prototipo y determinemos la función de transferencia de un pasa-altas Butterworth que tenga una frecuencia crítica (-3dB) de  $10^4$  rad/seg.

**Solución:** Simplemente sustituimos "s" por  $10^4/s$  en la función de



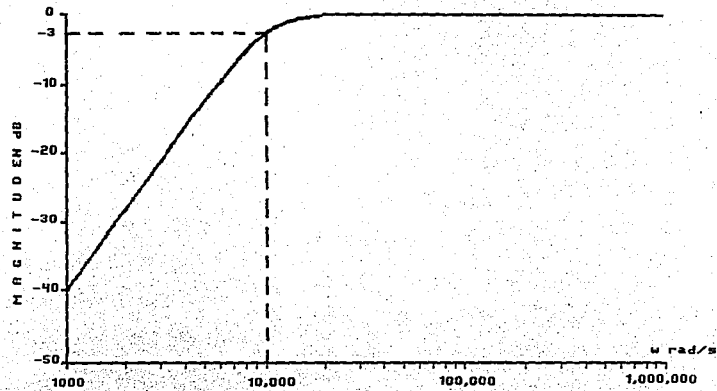


Figura 4.3 (a) Magnitud de la Respuesta en Frecuencia

en dB Para un Filtro Pasa-Altas con  $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2} (10^4) s + 10^8}$

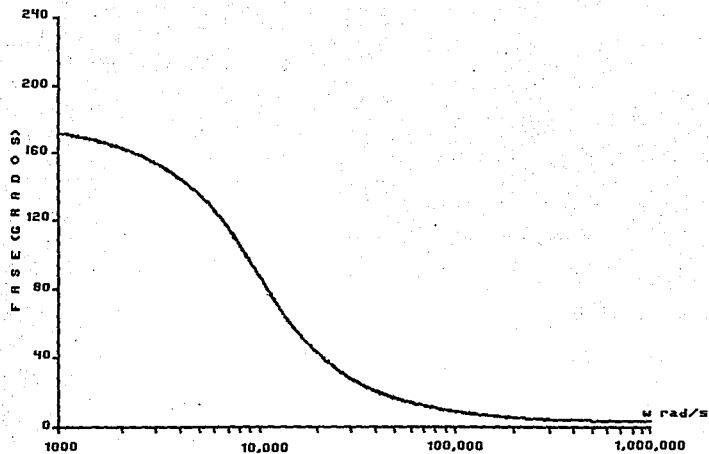


Figura 4.3 (b) Fase de la Respuesta en Frecuencia del Filtro

$$\text{Pasa-Altas con } H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}(10^4)s + 10^8}$$

transferencia del PPB, es decir:

$$H_{PPB}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \Big|_{s=10^4/s}$$

$$= \frac{1}{(10^4/s)^2 + \sqrt{2}(10^4/s) + 1} = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}(10^4)s + (10^4)^2}$$

Nota: Como hemos dicho, estos filtros deben probarse antes de proceder a su implementación. Observando lo que sucede con  $H_{PPB}(j\omega)$ , tenemos:

$$H_{PPB}(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + \sqrt{2}(10^4)j\omega + (10^4)^2}$$

que cuando se escribe en términos de magnitud y fase, es:

$$H_{PPB}(j\omega) = M e^{j\phi}$$

Vemos que  $M = 0$  en  $\omega = 0$ ,  $M \rightarrow 1$  (0 dB) cuando  $\omega \rightarrow \infty$  y  $M = 1/\sqrt{2}$  (-3dB) en  $\omega = 10^4$ , esto nos da la gráfica de magnitud en dB de la figura (4.3), la cual es de un filtro pasa-altas.

#### 4.3.3 De "Prototipo Pasa-Bajas" a Filtros "Pasa-Banda" y "Supresor de Banda"

Ahora discutiremos las características más complejas e interesantes: los filtros pasa-banda y supresor de banda. Considérense las gráficas de magnitud de la figura (4.4), que incluyen el eje negativo de frecuencias para ayudar a la explicación de las propiedades geométricas de la transformación requerida para obtener un filtro pasa-banda a partir de un PPB.

Se utilizó una característica Butterworth para generar los gráficos de la figura (4.4), pero se pudo haber usado característica Chebyshev, Elíptica ó cualquier otra. El ancho de

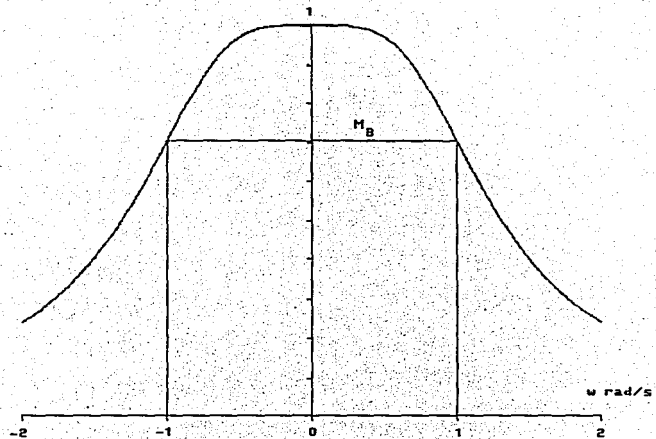


Figura 4.4 (a) Característica del Prototipo Pasa-Bajas

0h1

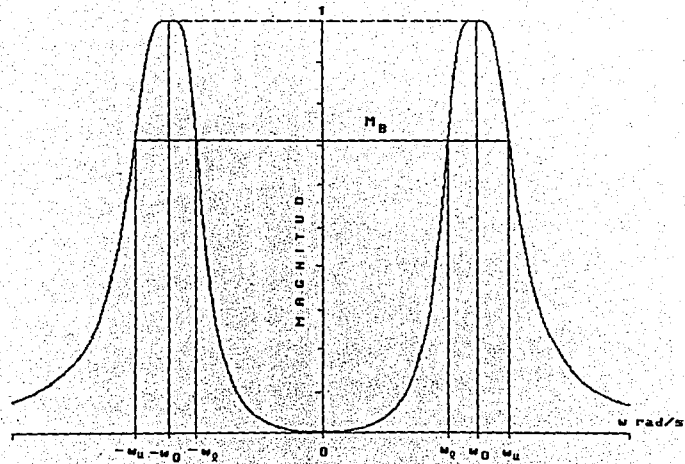


Figura 4.4 (b) Característica Pass-Banda

donde  $B =$  ancho de banda  $= \omega_u - \omega_l$  y  $\omega_0 = \omega_u \omega_l$ . Como podemos ver, la ecuación (4.23) es útil para encontrar las frecuencias normalizadas pasa-bajas, que correspondan a las frecuencias del filtro pasa-banda, cuyas características se desean encontrar. Esta transformación se conoce como "la forma  $\omega$ " (forma omega), de la transformación de frecuencias de PFB a pasa-banda. La otra

$$\omega_{LP} = \frac{B}{1} \left[ \frac{\omega_s^2 - \omega_l^2}{\omega_{sp}^2 - \omega_l^2} \right] = \frac{B}{1} \left[ \frac{\omega_s^2 - \omega_u^2}{\omega_{sp}^2 - \omega_u^2} \right] \quad (4.23)$$

en el prototipo se relaciona con la frecuencia en el pasa-banda por medio de la relación:

La relación entre  $\omega$  en el prototipo y  $\omega$  en el filtro pasabanda, no es tan simple ni tan evidente como en los casos pasabajas y pasa-altas.

$\omega \rightarrow \infty$  en el pasa-banda.

mientras que  $M = 0$  tanto en  $\omega = 0$  como cuando

(c)  $M \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow \pm \alpha$  en el prototipo, pasa-banda (en el lado positivo de las frecuencias).

al tiempo que  $M = M_s$  en  $\omega = +\omega_u$  y  $\omega = +\omega_l$  en el

(b) Hemos notado que  $M = M_s$  en  $\omega = -1$  en el prototipo, en  $\omega = +\omega_0$  en el pasa-banda.

(a)  $M = 1$  en  $\omega = 0$  en el prototipo, mientras que  $M = 1$

Haciendo comparaciones más profundas entre las dos curvas, observamos lo siguiente:

es,  $\omega_0 = (\omega_u \omega_l)^{1/2}$ .

frecuencia central  $\omega_0$  como la media geométrica de  $\omega_u$  y  $\omega_l$ . Ésto otras características deseadas. También es muy común definir una (-3dB) que, en este caso es el ancho de banda con rizo, o algunas ancho de la banda de paso se basa en las frecuencias críticas el banda de una respuesta pasa-banda se define como  $B = \omega_u - \omega_l$ ,

forma de transformación usada para encontrar la función de transferencia pasa-banda  $H_{BP}(s)$  partiendo de la del PFB.  $H_{LP_p}$ , es reemplazando "s" en el prototipo por:

$$\frac{1}{B} \left[ \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} \right] \quad (4.24)$$

Nos referimos a ella como la "forma s" de la transformación de PFB a pasa-banda. Por lo tanto la función de transferencia pasa-banda se da por:

$$H_{BP}(s) = H_{LP_p}(s) \Big|_{s = \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}} \quad (4.25)$$

Verifiquemos con algunas frecuencias en la ecuación (4.23), la validez de la forma  $\omega$  de esta transformación.

- a) Usando la ecuación (4.23), la frecuencia  $\omega = \omega_0$ , corresponde a la frecuencia prototipo de:

$$\frac{1}{B} \left[ \frac{\omega_0^2 - \omega_0^2}{\omega_0} \right] = 0 \quad (4.26)$$

- b) El límite superior de frecuencia del pasa-banda,  $\omega = \omega_U$ , corresponde a la frecuencia en el prototipo de:

$$\frac{1}{B} \left[ \frac{\omega_U^2 - \omega_U \omega_L}{\omega_U} \right] = \frac{1}{B} \left[ \frac{\omega_U(B)}{\omega_U} \right] = 1 \quad (4.27)$$

- c) La frecuencia límite superior del pasa-banda,  $\omega =$

$\omega_l$  corresponde a la frecuencia en el prototipo de:

$$\frac{1}{B} \left[ \frac{\omega_l^2 - \omega_u \omega_l}{\omega_l} \right] = \frac{1}{B} \left[ \frac{\omega_l (-B)}{\omega_l} \right] = -1 \quad (4.28)$$

d) La frecuencia del pasa-banda,  $\omega = 0$ , corresponde a la frecuencia en el prototipo de:

$$\frac{1}{B} \left[ \frac{0^2 - \omega_o^2}{0} \right] \longrightarrow -\infty \quad (4.29)$$

e) La frecuencia pasa-banda de  $\omega \longrightarrow \infty$ , corresponde a la frecuencia prototipo de:

$$\frac{1}{B} \left[ \frac{\infty^2 - \omega_o^2}{\infty} \right] \longrightarrow \infty \quad (4.30)$$

Podemos representar estas relaciones como:

$\omega_{BP}$	$\omega_{LP, P}$
$\omega_o$	0
$\omega_u$	1
$\omega_l$	-1
0	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$

Este mapeo se ilustra en la figura (4.5)



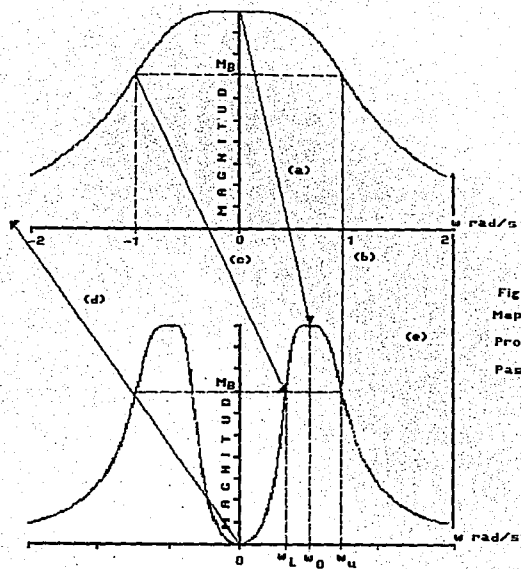


Figura 4.5  
 Mapeando el  
 Prototipo a  
 Pasa-Banda

**Ejemplo 4.4.** Este ejemplo ilustra la transformación de un filtro Chebyshev PPB a un filtro Chebyshev pasa-banda.

Comenzando con la función de transferencia (de segundo orden, un decibel de rizo ( $\epsilon = 0.5088$ )), de un prototipo Chebyshev pasa-bajas, determinar la correspondiente función de transferencia para un pasa-banda con frecuencia central de  $\omega_0 = 10^4$  rad/seg., y una banda de rizo de  $B = 10^3$  rad/seg.

**Solución:** De la tabla 2.3 la función de transferencia PPB es:

$$H_{LP_p}(s) = \frac{k}{s^2 + 1.098s + 1.103} \quad (4.31)$$

Y para  $N = 2$ , haremos  $H(j\omega) = 1 / (1 + \epsilon^2)^{1/2} = 0.891$ . Esto quiere decir, que para  $s = j\omega$

$$H_{LP_p}(j\omega) = 0.891 = k / 1.103 \quad (4.32)$$

dando  $k = 0.983$ . La función de transferencia pasa-banda se obtiene a partir de la ecuación (4.25):

$$\begin{aligned} H_{HP}(s) &= H_{LP_p}(s) \Big|_{s = \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}} \\ &= \frac{0.983}{s^2 + 1.098s + 1.103} \Big|_{s = \frac{s^2 + (10^4)^2}{10^3 s}} \\ &= \frac{0.983}{\left[ \frac{s^2 + 10^8}{10^3 s} \right] + 1.098 \left[ \frac{s^2 + 10^8}{10^3 s} \right] + 1.103} \\ &= \frac{0.983(10^6)s^2}{s^4 + 1.098(10^3)s^3 + 2.011(10^8)s^2 + 1.098(10^{11})s + 10^{10}} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Comentario: El resultado parece ser razonable para  $H_{PP}(j\omega) = 0$  en  $\omega = 0$  ( $s=j0$ ), y  $H_{PP}(j\omega) \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$  ( $s^2/s^4$ ). Para localizar el límite superior de frecuencia  $\omega_U$  que corresponde a  $\omega_{LP} = 1$ , escribimos:

$$s = \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs} \quad (4.34)$$

y substituímos  $s = j1$  en el lado izquierdo, y  $s = j\omega_U$  en el derecho, esto es:

$$j1 = \frac{(j\omega_U)^2 + 10^8}{10^8 j\omega_U} \quad (4.35)$$

Esto nos da la ecuación cuadrática

$$\omega_U^2 - 10^8 \omega_U - 10^8 = 0 \quad (4.36)$$

cuya solución positiva es:

$$\omega_U = 10512.5 \text{ rad/s} \quad (4.37)$$

de manera similar, usando  $s = -j1$  y  $s = j\omega_L$  en la ec. (4.34), obtenemos:

$$\omega_L^2 + 10^8 \omega_L - 10^8 = 0 \quad \text{ó} \quad \omega_L = 9512.5 \text{ rad/s} \quad (4.38)$$

El ancho de banda es  $B = \omega_U - \omega_L = 10512.5 - 9512.5 = 10^3 \text{ rad/s}$  como se deseaba. Además podemos notar que la media geométrica de  $\omega_U$  y  $\omega_L$  es  $\omega_0 = (\omega_U \omega_L)^{1/2} = 10^4$  como se especificó desde el principio.

---

Las cuatro substituciones que generan filtros pasa-bajas, pasa-altas, pasa-banda y supresor de banda, a partir de una función de transferencia PPB, se observan en la tabla 2.5. Como se esperaba, la transformación del PPB a un filtro pasa-banda es,

simplemente la recíproca de aquella utilizada para transformar un PPB a un pasa-banda.

Listamos a continuación, algunas frecuencias importantes del filtro y sus equivalentes para el PFB, normalizado, las cuales son simplemente una extensión de la columna " $\omega$ ", de la tabla 2.5.

a) Pasa-bajas ( $\omega_{LP}$ ) —> Prototipo pasa-bajas  
 normalizado ( $\omega_{LPp}$ )

$$\begin{array}{r|l} \omega_{LP} & \omega_{LPp} = \omega_{LP} / \omega_c \\ \hline \omega_c & 1 \\ \omega_a & \omega_a / \omega_c \\ 0 & 0 \\ \hline \text{--->=} & \text{--->=} \end{array}$$

b) Pasa-altas ( $\omega_{HP}$ ) —> Prototipo pasa-bajas  
 normalizado ( $\omega_{LPp}$ )

$$\begin{array}{r|l} \omega_{HP} & \omega_{LPp} = \omega_c / \omega_{HP} \\ \hline \omega_c & 1 \\ \omega_a & \omega_c / \omega_a \\ 0 & \text{--->=} \\ \hline \text{--->=} & 0 \end{array}$$

c) Pasa-banda ( $\omega_{BP}$ ) —> Prototipo pasa-bajas  
 normalizado ( $\omega_{LPp}$ )

$\omega_{BP}$	$\omega_{LP} = \frac{\omega_{BP}^2 - \omega_0^2}{B \omega_{BP}}$
$\omega_0$	0
+	+
$\omega_U$	1
+	+
$\omega_L$	1
$\omega_a$	$\frac{\omega_a^2 - \omega_0^2}{B \omega_a}$

d) Supresor de Banda ( $\omega_{BS}$ )  $\rightarrow$  Prototipo pasa-bajas normalizado ( $\omega_{LP}$ )

$\omega_{BP}$	$\omega_{LP} = \frac{B\omega_{BS}}{-\omega_{BS}^2 + \omega_0^2}$
$\omega_0$	$\rightarrow + \infty$
+	+
$\omega_U$	1
+	+
$\omega_L$	1
$\omega_a$	$\frac{B\omega_a}{-\omega_a^2 + \omega_0^2}$

Nota: Para el diseño de filtros pasa-bajas y pasa-altas Butterworth y Chebyshev, designaremos comúnmente, a  $\omega_c$  como la frecuencia crítica. Para los pasa-bajas y pasa-altas Elípticos,  $\omega_c$  puede ser la media geométrica de  $\omega_{1P}$  y  $\omega_{2P}$ ,  $(\omega_{1P} \omega_{2P})^{1/2}$  o bien,  $\omega_{1P}$  ó  $\omega_{2P}$ , como se desee. Para diseño de filtros elípticos pasa-banda y supresor de banda,  $\omega_U$  y  $\omega_L$  se utilizan como frecuencias críticas; mientras que las frecuencias límites de rizo se usan típicamente para diseños de filtros Chebyshev y Elípticos.

#### 4.4. DISEÑO POR MEDIO DE LA TRANSFORMADA Z.

Este procedimiento de diseño consiste en un mapeo directo de los polos y ceros de una función de transferencia  $H(s)$ , a polos y ceros de la función de transferencia  $H(z)$ , haciendo una simple sustitución.

Considérese un término que represente un polo real simple, como  $1/(s+a)$ . El desarrollo que nos lleva a la deducción de una sustitución apropiada, es el siguiente.

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at} \xrightarrow[\text{SE OBTIENE}]{\text{MUESTREANDO}} e^{-aT} \xrightarrow[\text{SE OBTIENE}]{\text{TRANSF. Z}} \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \quad (4.39)$$

y decimos que un factor de polo o cero como  $(s+a)$  se transforma a  $(1-e^{-aT}z^{-1})$ , o lo que es lo mismo, un polo/cero analógico en  $s = -a$  se mapea a un polo/cero digital en  $z = e^{-aT}$ .

**Ejemplo 4.5.** Este ejemplo ilustra el método de la transformada "z" para digitalizar una función de transferencia analógica. Usar el método de la transformada z para encontrar la función de transferencia discreta  $H(z)$ , que corresponda a:

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

con una frecuencia de muestreo de 10 Hz ( $T=0.1$ ).

**Solución:** Transformando los factores, encontramos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (s+1) & \xrightarrow{\hspace{1cm}} (1-e^{-T}z^{-1}) = (1-0.705z^{-1}) \\ (s+2) & \xrightarrow{\hspace{1cm}} (1-e^{-2T}z^{-1}) = (1-0.819z^{-1}) \\ (s+3) & \xrightarrow{\hspace{1cm}} (1-e^{-3T}z^{-1}) = (1-0.741z^{-1}) \end{aligned}$$

y la función de transferencia discreta es:

$$H(z) = \frac{1 - 0.905z^{-1}}{(1 - 0.819z^{-1})(1 - 0.741z^{-1})}$$

$$= \frac{z(z - 0.905)}{(z - 0.819)(z - 0.741)} \quad (4.40)$$

Notemos que los polos estables de  $H(s)$  en  $s = -2$  y  $s = -3$ , se transforman a polos estables de  $H(z)$  en  $z = e^{-2T} = 0.819$  y  $z = e^{-3T} = 0.741$ . Podemos ver que un polo real del semiplano izquierdo ( $a > 0$ ) corresponde a un polo dentro del círculo unitario en  $z = e^{-aT}$ . Una gráfica de la magnitud de la respuesta en frecuencia para  $H(s)$  y  $H(z)$ , se da en la figura 4.6.

**Comentario:** Cuando se comparan filtros pasa-bajas analógicos y digitales, es común ajustar sus respectivas ganancias para hacer las gráficas de las magnitudes de la respuesta en frecuencia iguales en  $\omega = \theta = 0$ , este caso...

$$H(s) \Big|_{s=j0} = 0.167 \text{ y } H(z) \Big|_{z=e^{j0}} = 2.026$$

por lo tanto la gráfica analógica se ajustó con  $1/0.167 = 6$ , y la gráfica digital con  $1/2.026 = 0.494$ , para hacerlas iguales en la frecuencia cero.

Para términos complejos, siguiendo el mismo razonamiento, nos da:

$$(s + a - jb) \xrightarrow{\text{SE TRANSFORMA}} (1 - e^{-(a-jb)T} z^{-1}) \quad (4.41)$$

y también

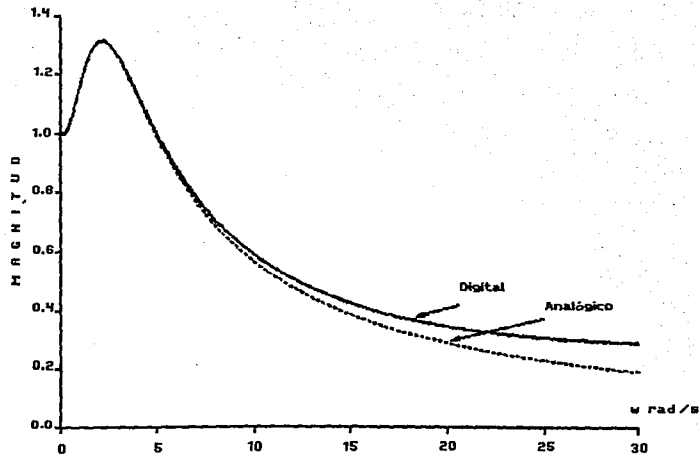


Figura 4.6 Respuestas en Frecuencia del Filtro Analógico y Digital Por Medio de la Transformada z



$$\begin{aligned}
 (s + a - jb)(s + a + jb) & \xrightarrow{\text{SE TRANSFORMA}} (1 - e^{-aT} e^{-j b T} z^{-1}) * \\
 & (1 - e^{-aT} e^{j b T} z^{-1}) \\
 & = (1 - z^{-1} e^{-aT} \cos bT + e^{2aT} z^{-2})
 \end{aligned}$$

El procedimiento de la transformada z es muy fácil de aplicar, pero adolece de que, a diferencia de otros métodos, un filtro analógico que solo tenga polos, se transformará a un filtro digital cuya función de transferencia, sólo tenga polos. En consecuencia, no hay ceros que ayuden a dar forma a la respuesta en frecuencia. E incluso, si  $H(s)$  tiene ceros, si las partes imaginarias de ellos son mayores de  $\omega_s/2$ , los ceros correspondientes en  $H(z)$ , producirán serios errores de traslape de frecuencias (Aliasing).

#### 4.5 DISEÑO POR MEDIO DEL IMPULSO INVARIANTE Y EL ESCALON INVARIANTE.

Este procedimiento de diseño se basa en la respuesta al impulso o al escalón unitario, de un filtro analógico como se representa en la figura 4.7. Sólo consideramos dos entradas diferentes, un impulso y un escalón, pero, en general, pudieron haberse usado otras entradas, tales como: exponenciales o rampas, para deducir métodos similares de diseño.

##### 4.5.1. Diseño por medio del impulso invariante.

Como el método sugiere, el procedimiento se basa en la respuesta al impulso unitario  $h(t)$ , de un filtro de "tiempo continuo" (analógico). Para una entrada impulso unitario  $x(t) = \delta(t)$ , la transformada de Laplace de la salida es:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= H(s)X(s) \\
 &= H(s)
 \end{aligned} \tag{4.42}$$



Figura 4.7

porque  $X(s) = 1$ . Definiendo la salida  $y(t)$  causada por una entrada de impulso unitario, como  $h(t)$ , tenemos

$$y(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)) \quad (4.43)$$

El método de diseño por medio del impulso invariante, consiste simplemente en hacer los valores de la respuesta al impulso  $h(nT)$  del filtro digital iguales a los valores muestreados de la respuesta impulso  $h(t)$  del filtro analógico. Esto es ...

$$h(nT) = h(t) \Big|_{t=nT} \quad (4.44)$$

y la función de transferencia discreta (digital), es ...

$$\mathcal{Z}(h(nT)) = H(z) \quad (4.45)$$

la función de transferencia digital  $H(z)$  es la transformada  $z$  de la respuesta al impulso unitario  $h(nT)$  muestreada, mientras que la función de transferencia analógica  $H(s)$  es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso unitario  $h(t)$ . Debe tenerse cuidado de no escribir  $H(z) = H(s) \Big|_{s=z}$ , porque esto es incorrecto.

**Ejemplo 4.6.** Este ejemplo ilustra la implementación digital de una función de transferencia analógica usando el método de diseño del impulso invariante.

Dado un filtro analógico pasa-bajas descrito por la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

determinar la función de transferencia digital  $H(z)$  con un diseño basado en el método del impulso invariante.

**Solución.** Primero, la respuesta al impulso unitario a partir de...

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s))$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right]$$

tomando la transformada inversa de Laplace de  $h(s)$ , obtenemos

$$h(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0 \quad (4.46)$$

la versión muestreada se obtiene sustituyendo  $t$  por  $nT$ , en la ecuación (4.46), con lo cual se tiene:

$$h(nT) = e^{-nT} - e^{-2nT}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Y, ambas,  $h(t)$  y  $h(nT)$  se muestran en la figura (4.8a), para  $T = 0.1$  seg.

La función de transferencia discreta es, entonces, la transformada  $z$  de  $h(nT)$  ó

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}\{h(nT)\} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-2T}z^{-1}} \\ &= \frac{z^{-1}(e^{-T} - e^{-2T})}{(1 - e^{-T}z^{-1})(1 - e^{-2T}z^{-1})}, \quad |z| > e^{-T} \end{aligned}$$

**Comentario.** La porción de magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro analógico y la del filtro digital (para dos periodos de muestreo diferentes,  $T = 0.1$  y  $T = 0.5$ ), se dan en la figura (4.8b).

Ahora generalicemos este procedimiento, y al mismo tiempo, demos que  $H(z)$  puede obtenerse directamente de  $H(s)$ , sin

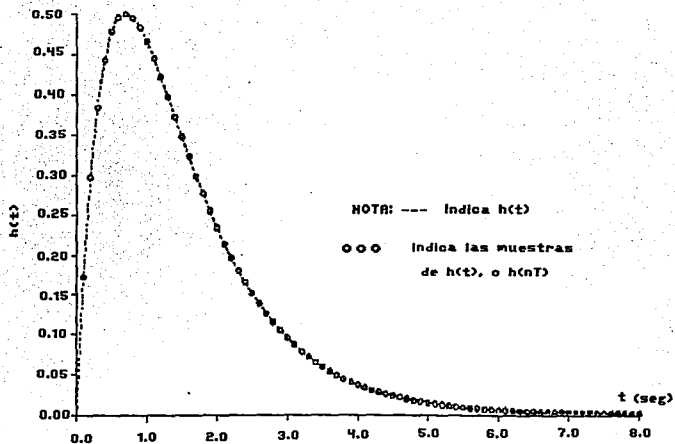


Figura 4.8 (a) Respuesta al Impulso Unitario Para el Filtro Analógico

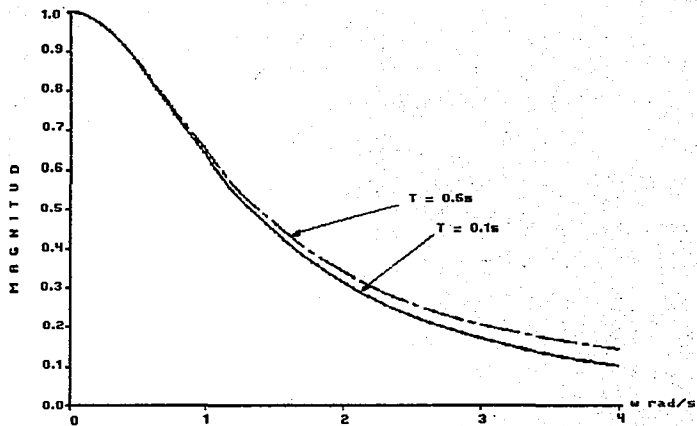


Figura 4.8 (b) Respuesta en Frecuencia Para  
Filtros Analógico y Digital :  $T = 0.5s$  y  $0.1s$

los pasos intermedios de encontrar  $h(t)$  y después  $h(nT)$ .

Considérese un filtro analógico con  $N$  polos diferentes, cuya función de transferencia en dominio de Laplace, escrita en fracciones parciales es:

$$H(s) = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{C_k}{s - \sigma_k} \quad (4.47)$$

con su correspondiente respuesta al impulso unitario

$$h(t) = \sum_{k=1}^{k=N} C_k e^{\sigma_k t} \quad (4.48)$$

si esta respuesta se muestrea cada  $T$  segundos ( $t = nT$ ) tenemos la respuesta muestreada...

$$h(nT) = \sum_{k=1}^{k=N} C_k e^{\sigma_k nT} \quad (4.49)$$

finalmente, obtenemos la transformada  $z$  de la ecuación (4.49), para encontrar la función de transferencia discreta

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h(nT)\} \\ = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{1 - e^{\sigma_k T} z^{-1}} \quad (4.50)$$

los pasos descritos anteriormente se muestran en la figura (4.9); y a partir de las ecuaciones (4.47) y (4.50) vemos que los pasos de  $h(t)$  y  $h(nT)$  se pueden omitir y  $H(z)$  puede encontrarse directamente a partir de  $H(s)$ , así...

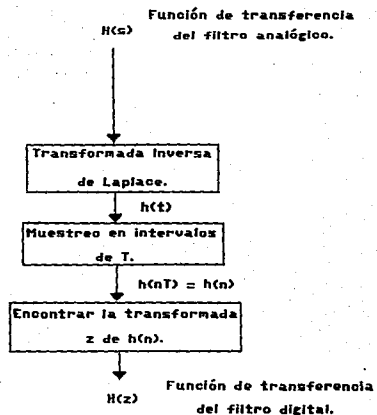


Figura 4.9 Diseño Por Medio del Impulso Invariante



$$H(s) = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{C_k}{s - d_k} \longrightarrow H(z) = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{C_k}{1 - e^{d_k} z^{-1}} \quad (4.51)$$

Por lo tanto las constantes de las fracciones parciales  $C_k$ , deben calcularse para  $H(s)$  y, después,  $H(z)$  simplemente se escribe siguiendo la ecuación (4.51). Adviértase que la sustitución hecha para los polos en la expansión en fracciones parciales es la misma que encontramos anteriormente por medio del diseño por medio de la transformada "z".

**Ejemplo 4.7:** Lo siguiente ejemplifica la aplicación directa del método de diseño del impulso invariante.

Un filtro Butterworth de tercer orden pasa-bajas tiene la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)} \quad (4.52)$$

Determinar la función de transferencia discreta  $H(z)$ , usando la ecuación (4.51).

**Solución.** La expansión en fracciones parciales es..

$$\frac{1}{(s + 1)(s + 0.5 - j0.866)(s + 0.5 + j0.866)} = \frac{C_1}{s + 1} + \frac{C_2}{s + 0.5 - j0.866} + \frac{C_2^*}{s + 0.5 + j0.866} \quad (4.53)$$

donde el álgebra usual (que es propensa a tener errores), da:

$$H(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{0.577e^{-j2.02}}{s + 0.5 - j0.866} + \frac{0.577e^{j2.02}}{s + 0.5 + j0.866} \quad (4.54)$$

los tres polos son:

$$d_1 = -1, d_2 = -0.5 + j0.866, \text{ y } d_3 = -0.5 - j0.866 \quad (4.55)$$

y de la ecuación (4.51)

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} + \frac{0.577e^{-j2.62}}{1 - e^{(-0.5 + j0.866)T}z^{-1}} + \frac{0.577e^{j2.62}}{1 - e^{(-0.5 - j0.866)T}z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} + \frac{0.577e^{-j2.62}}{1 - e^{-0.5T}e^{j0.866T}z^{-1}} + \frac{0.577e^{j2.62}}{1 - e^{-0.5T}e^{-j0.866T}z^{-1}}$$

los últimos dos términos pueden combinarse para dar:

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} + \frac{2(0.577)\cos(-2.62) - 2(0.577)e^{-0.5T}z^{-1}\cos(-2.62 - 0.866T)}{1 - 2e^{-0.5T}\cos(0.866T)z^{-1} + e^{-T}z^{-2}}$$

$$= \frac{z}{z - e^{-T}} + \frac{-z^2 - 1.154ze^{-0.5T}\cos(5\pi/6 + 0.866T)}{z^2 - 2e^{-0.5T}\cos(0.866T)z + e^{-T}} \quad (4.56)$$

En términos del intervalo de muestreo  $T$ , la función de transferencia del filtro es:

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z}{z^2 - a_1 z - a_2} \quad (4.57)$$

donde:

$$b_0 = -2e^{-0.5T}\cos(0.866T) + e^{-T} + 1.154e^{-0.5T}\cos(5\pi/6 + 0.866T)$$

$$b_1 = e^{-T} + 1.154e^{-1.5T}\cos(5\pi/6 + 0.866T)$$

$$a_1 = e^{-T} + 2e^{-0.5T} \cos(0.866T)$$

$$a_2 = -e^{-T} - 2e^{-1.5T} \cos(0.866T)$$

$$a_3 = e^{-2T}$$

**Comentario.** Las gráficas de magnitud de respuesta en frecuencia para el filtro analógico Butterworth de tercer orden, y para el filtro digital diseñado por el método del impulso invariante (con dos valores diferentes de  $T$ ), se muestran en la figura (4.10).

#### 4.5.2. Diseño por medio del escalón invariante.

Como el nombre lo dice, el procedimiento está basado en la respuesta al escalón unitario de un filtro analógico. Para una entrada escalón unitario  $x(t) = u(t)$ , la transformada de la salida  $y_s(t)$  es:

$$\begin{aligned} Y_s(s) &= H(s) X(s) \\ &= \frac{H(s)}{s} \end{aligned} \quad (4.58)$$

porque  $X(s) = 1/s$ . El método de diseño por medio del escalón invariante, consiste simplemente en definir los valores de la secuencia de respuesta al escalón unitario,  $y_s(nT)$ , del filtro digital, de tal forma que sean iguales a los valores muestreados de la respuesta (al escalón unitario),  $y_s(t)$ , del filtro analógico. Esto es,

$$y_s(nT) = y_s(t) \Big|_{t=nT} \quad (4.59)$$

y la transformada  $z$  de la secuencia de salida,  $y_s(nT)$  es:

$$\mathfrak{z}\{y_s(nT)\} = Y_s(z) \quad (4.60)$$

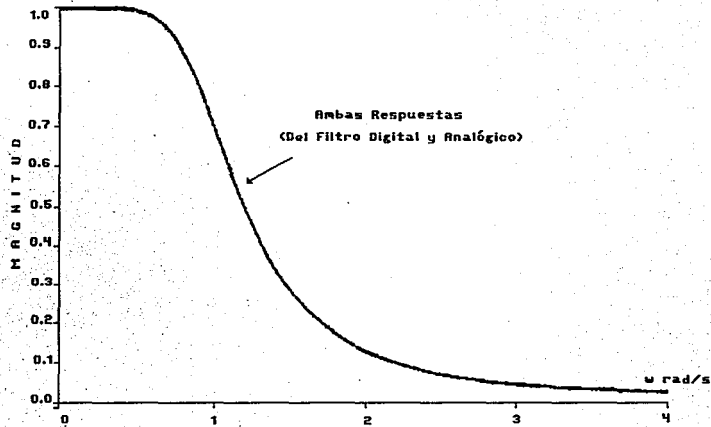


Figura 4.10 Respuestas en Frecuencia Digital y Analógica  
de los Filtros para  $T = 0.5s$  y  $T = 0.1s$

La función de transferencia digital  $H(z)$ , se calcula a partir de...

$$H(z) = \frac{Y_s(z)}{X(z)} \quad (4.61)$$

donde  $X(z) = \mathcal{Z}\{u(n)\} = 1/(1 - z^{-1})$ ,  $|z| > 1$ .

**Ejemplo 4.8:** Este ejemplo ilustra el método de diseño del escalón invariante.

Dada la función de transferencia siguiente :

$$H(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$$

Determine la función de transferencia digital  $H(z)$ , basándose en el método del escalón invariante.

**Solución:** La transformada de Laplace de la salida para una entrada escalón unitario, es:

$$\begin{aligned} Y_s(s) &= H(s) \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s(s + 1)(s + 2)} \end{aligned}$$

lo que puede escribirse en términos de fracciones parciales, como:

$$Y_s(s) = \frac{0.5}{s} - \frac{1}{s + 1} + \frac{0.5}{s + 2}$$

Con la salida dada por:

$$y_s(t) = 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

La salida muestreada es:

$$y_s(nT) = 0.5 - e^{-nT} + 0.5e^{-2nT}$$

y la transformada "z" de la salida, es:

$$Y_s(z) = \frac{0.5}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} + \frac{0.5}{1 - e^{-2T}z^{-1}} \quad |z| > 1 \quad (4.62)$$

Poniendo en la ec. (4.62) un común denominador, obtenemos:

$$Y_s(z) = \frac{z^{-1}(0.5 - e^{-T} + 0.5e^{-2T}) + z^{-2}(0.5e^{-T} - e^{-2T} + 0.5e^{-3T})}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})(1 - e^{-2T}z^{-1})} \quad (4.63)$$

que es la transformada "z" de la salida muestreada,  $y_s(nT)$ . La función de transferencia del filtro  $H(z)$ , se encuentra a partir de:

$$H(z) = \frac{Y_s(z)}{X(z)}$$

donde  $X(z)$ , es la transf. "z" de la entrada escalón, es decir:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (4.64)$$

Por lo tanto, si dividimos la ecuación (4.63) entre la ec. (4.64), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z^{-1}(0.5 - e^{-T} + 0.5e^{-2T}) + z^{-2}(0.5e^{-T} - e^{-2T} + 0.5e^{-3T})}{(1 - e^{-T}z^{-1})(1 - e^{-2T}z^{-1})} \\ &= \frac{z(0.5 - e^{-T} + 0.5e^{-2T}) + 0.5e^{-T} - e^{-2T} + 0.5e^{-3T}}{(z - e^{-T})(z - e^{-2T})} \\ &= \frac{b_0 z + b_1}{z^2 - a_1 z - a_2} \end{aligned}$$

donde:

$$b_0 = 0.5 - e^{-T} + 0.5e^{-2T}$$

$$b_1 = 0.5e^{-T} - e^{-2T} + 0.5e^{-3T}$$

$$a_1 = e^{-T} + e^{-2T}$$

$$a_2 = -e^{-3T}$$

**Comentario:** La magnitud de la respuesta en frecuencia de un filtro analógico y un filtro digital para dos diferentes intervalos de muestreo  $T = 0.1$  y  $T = 0.5$ , se muestra en la fig. 4.11.

---

#### 4.6 Diseño por medio de la Transformación Bilineal.

Este método de diseño, ampliamente usado, puede interpretarse como una transformación matemática del dominio "s", al dominio "z".

Una transformación apropiada es, reemplazar "s", en  $H(s)$  con  $(z - 1)/(z + 1)$ , para formar  $H(z)$ . Esto es...

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} \quad (4.65)$$

Esta transformación...

$$s = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (4.66)$$

puede escribirse como

$$sz + s - z + 1 = 0 \quad (4.67)$$

donde se puede observar que es lineal en "s" y lineal en "z". ó

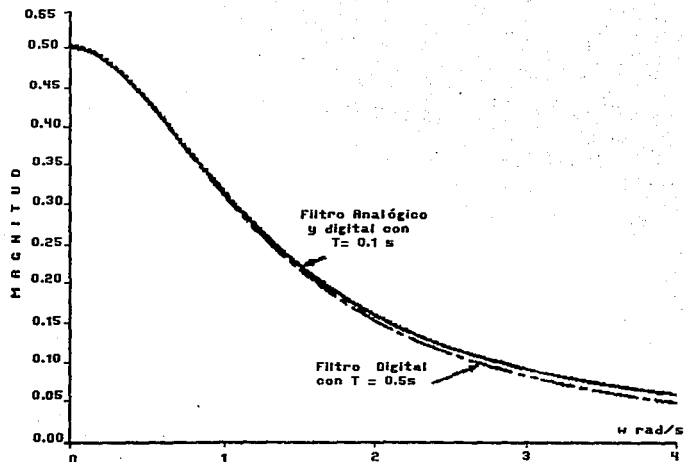


Figura 4.11 Respuesta en Frecuencia del Filtro Digital y del Filtro Analógico con  $T = 0.5$ s y  $0.1$ s



bilineal en "s" y "z". Es por esto, que se conoce como una transformación bilineal. Veamos como algunas regiones del plano "s" se transforman (mapean), al plano "z", a través de esta transformación. Para hacer esto, necesitamos una expresión para z en términos de s, así que empezaremos con

$$s = \frac{z - 1}{z + 1}$$

y obtenemos:

$$z = \frac{1 + s}{1 - s} \quad (4.68)$$

usando el valor general de  $s = \sigma + j\omega$ , nos da

$$z = \frac{1 + \sigma + j\omega}{1 - \sigma - j\omega} \quad (4.69)$$

Escribiendo z en forma exponencial, es decir:

$$z = r e^{j\psi} \quad (4.70)$$

comparando la ecuación (4.69) y (4.70)

$$r = |z| = \frac{\sqrt{(1 + \sigma)^2 + \omega^2}}{\sqrt{(1 - \sigma)^2 + \omega^2}} \quad \text{y } \psi = \arg(z)$$

$$= \tan^{-1} \left[ \frac{\omega}{1 + \sigma} \right] - \tan^{-1} \left[ \frac{-\omega}{1 - \sigma} \right]$$

$$= \tan^{-1} \left[ \frac{\omega}{1 + \sigma} \right] + \tan^{-1} \left[ \frac{\omega}{1 - \sigma} \right] \quad (4.71)$$

De la ecuación (4.71) se deduce lo siguiente:

\* Para  $\sigma > 0$ ,  $r > 1$ , la mitad derecha del plano s se mapea al exterior del círculo unitario del plano z.

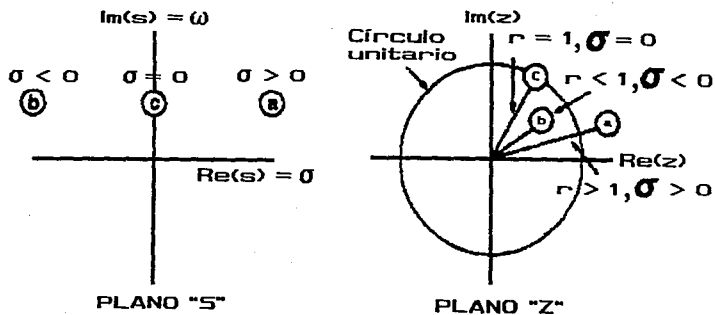


Figura 4.12 Efectos de la Transformación Bilineal

$$s = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

\* Para  $\sigma < 0$ ,  $r < 1$ , la mitad izquierda del plano  $s$  se mapea al interior del círculo unitario del plano  $z$ .

\* Para  $\sigma = 0$ ,  $r = 1$ , todo el eje imaginario de el plano  $s$  se mapea al círculo unitario del plano  $z$ .

Estas tres regiones se muestran en la figura 4.12, y es claro que esta transformación produce un filtro digital estable, a partir de un filtro analógico estable, y, que existe una relación no lineal entre las frecuencias analógicas  $\omega$ , y las frecuencias digitales  $\theta$ . Para  $s = j\omega$  (el eje imaginario) y  $z = e^{j\theta}$  (del círculo unitario), la transformación bilineal se convierte en:

$$\begin{aligned} j\omega &= \frac{e^{j\theta} - 1}{e^{j\theta} + 1} \\ &= \frac{e^{j\theta/2}(e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2})}{e^{j\theta/2}(e^{j\theta/2} + e^{-j\theta/2})} \\ &= \frac{j\operatorname{sen}(\theta/2)}{\operatorname{cos}(\theta/2)} = j\tan(\theta/2) \end{aligned} \quad (4.72)$$

por lo cual el eje imaginario del plano  $s$  está relacionado con el círculo unitario del plano  $z$ , a través de la relación ...

$$\omega = \tan(\theta/2) \quad (4.73)$$

en la figura (4.12), el rango de la frecuencia analógica  $0 \leq \omega \leq \infty$  del plano  $s$ , corresponde al rango de frecuencia digital  $0 \leq \theta \leq \pi$  del plano  $z$ . La figura (4.13) muestra la relación no lineal de la ecuación (4.73).

La transformación bilineal

$$s = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (4.74)$$

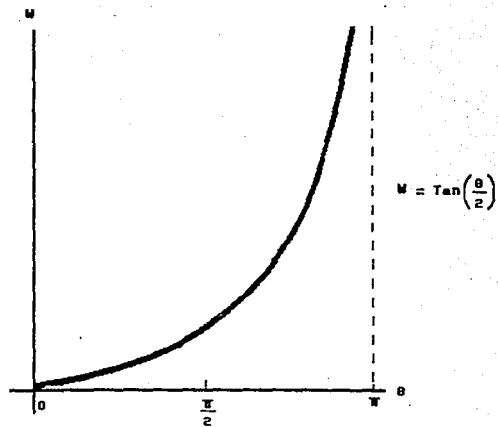


Figura 4.13 Relación no lineal entre  $w$  y  $\theta$  en la transformación bilineal

y la relación no lineal entre las frecuencias analógicas y digitales

$$\omega = \tan(\theta/2)$$

nos provee de importantes elementos para realizar el procedimiento por medio de la transformación bilineal, que a continuación detallamos:

---

---

#### PROCEDIMIENTO.

1. Dado un conjunto de frecuencias (de especificación analógica)  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  se determinan las frecuencias digitales correspondientes,  $\theta_i = \omega_i T$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ .
2. Usando la ecuación (4.73), se determina un nuevo conjunto de frecuencias analógicas.

$$\omega_i' = \tan(\theta_i/2), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.75)$$

esto se conoce como "pre-deformación". El propósito es "pre-distorsionar" la escala de frecuencias analógicas, para compensar la relación no lineal entre frecuencias analógicas y digitales.

3. Se diseña un filtro analógico con una función de transferencia  $H(s)$  basándose en las especificaciones de las frecuencias pre-deformadas  $\omega_i'$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ .
4. La función de transferencia digital se determina como

sigue:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}}$$

---

---

**Ejemplo 4.9:** A continuación se ilustra el diseño de un filtro digital pasa-bajas usando el procedimiento de la transformación bilineal.

Diseñar un filtro digital para una frecuencia de muestreo de 20KHz, que sea maximalmente plano dentro de la banda de paso de 0 a la frecuencia de corte de 2KHz (-3dB de magnitud), y que tenga una atenuación de, al menos, 10dB para las frecuencias mayores de 4000Hz.

**Solución:**

1. Se requiere de un filtro Butterworth, debido a su característica "maximalmente plana", y las especificaciones en frecuencia, para el filtro digital son:

$$\theta_1 = \omega_1 T = 2\pi(2000)/20000 = 0.2\pi$$

y

$$\theta_2 = \omega_2 T = 2\pi(4000)/20000 = 0.4\pi$$

2. Las frecuencias analógicas "pre-deformadas" son:

$$\omega_1' = \tan(\theta_1/2) = \tan(0.1\pi) = 0.325$$

$$\omega_2' = \tan(\theta_2/2) = \tan(0.2\pi) = 0.726$$

3. Para encontrar el filtro prototipo pasa-bajas, las frecuencias analógicas "pre-deformadas", necesitan

trasladarse, a las del prototipo. esto es:

$$\omega_1' = 0.325 \longrightarrow \omega = 1$$

$$\omega_2' = 0.726 \longrightarrow \omega_o = \frac{0.726}{0.325} = 2.234$$

usando la ecuación :

$$N = \frac{\log_{10} (10^{-MdB/10} - 1)}{2 \log_{10} \omega_o}$$

(donde  $\omega_o$  es una frecuencia de las especificaciones del prototipo y N se puede conocer de las tablas 2.1, 2.3 ó 2.4) para encontrar el orden del filtro, obtenemos:

$$\begin{aligned} N &= \frac{\log_{10} (10^{-MdB/10} - 1)}{2 \log_{10} \omega_o} \\ &= \frac{\log_{10} (10^1 - 1)}{2 \log_{10} 2.234} \\ &= 1.37 \text{ ó } N = 2 \end{aligned}$$

La función de transferencia del pasa-bajas es:

$$\begin{aligned} H_{LP}(s) &= H_{LP_p}(s) \Big|_{s = \frac{s}{0.325}} \\ &= \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \Big|_{s = \frac{s}{0.325}} \\ &= \frac{0.106}{s^2 + 0.460s + 0.106} \end{aligned}$$

4. La función de transferencia del filtro digital es:

$$H_d(z) = H_c(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}}$$

$$= \frac{0.068(z+1)^2}{z^2 - 1.142z + 0.413}$$

y la ecuación en diferencias que describe al filtro es:

$$y(n) = 1.142y(n-1) - 0.413y(n-2) + 0.068x(n) + 0.136x(n-1) + 0.068x(n-2)$$


---

**Ejemplo 4.10:** Este ejemplo ilustra el diseño de un filtro digital pasa-banda usando el método de la transformación bilineal.

Un filtro digital pasa-banda Chebyshev, debe cumplir las siguientes especificaciones:

- 1 dB de rizo en el rango de 600 a 900 Hz.
- b) Frecuencia de muestreo  $f_s = 3000$  Hz.
- c) Máxima ganancia de -40 dB para  $0 \leq f \leq 200$  Hz.

Usese el método de la transformación bilineal para encontrar la función de transferencia  $H(z)$  para el filtro digital.

**Solución:**

1. Usando  $\theta = 2\pi f/f_s$ , las frecuencias de especificación para el filtro digital, son las siguientes:

$$\text{Frecuencia límite inferior } \theta_l = \frac{2\pi(600)}{3000} = 0.4\pi = 1.26 \text{ rad.}$$

$$\text{Frecuencia límite superior } \theta_u = \frac{2\pi(900)}{3000} = 0.6\pi = 1.88 \text{ rad.}$$



Frecuencia central  $\theta_o = \sqrt{\theta_l \theta_u} = 0.49\pi = 1.54 \text{ rad.}$

Frecuencia de Banda suprimida (de interés)

$$\theta_{st} = \frac{2\pi(200)}{3000} = 0.133\pi = 0.418 \text{ rad.} \quad (4.76)$$

2. Usando  $\omega' = \tan(\theta/2)$  las frecuencias analógicas "pre-deformadas" en rad/s, son:

Frecuencia límite inferior  $\omega'_l = \tan(1.26/2) = 0.729 \text{ rad/s}$

Frecuencia límite superior  $\omega'_u = \tan(1.88/2) = 1.369 \text{ rad/s}$

Frecuencia central de banda  $\omega'_o = \sqrt{\omega'_l \omega'_u} = 1 \text{ rad/s}$

Frecuencia de Banda suprimida (de interés):

$$\omega'_{st} = \tan(0.418/2) = 0.212 \text{ rad/s}$$

y la banda de paso "pre-deformada" es:

$$B = \omega'_u - \omega'_l = 1.369 - 0.729 = 0.640 \text{ rad/s} \quad (4.77)$$

3. Después necesitamos convertir estas frecuencias analógicas "pre-deformadas" a las de su filtro equivalente PPB. De la tabla 10.5 tenemos:

$$\omega_{LP} = \frac{\omega_{BP}^2 - \omega_o^2}{B\omega_{BP}} = \frac{\omega_{BP}^2 - 1}{0.64\omega_{BP}} \quad (4.78)$$

y de las frecuencias "pre-deformadas" de la banda de paso, obtenemos las siguientes frecuencias PPB...

$\omega_{BP}$	$\omega_{LP}$
0.729	-1
1.369	1
1.000	0
0.212	-7.04

(4.79)

Recordando el mapeo de prototipo a pasa-bajas, de la fig. (4.5), recordamos que las frecuencias menores que  $\omega_0$  provienen del lado negativo, del prototipo. Pero la respuesta en frecuencia del prototipo es simétrica con respecto a  $\omega = 0$ , por lo cual, utilizaremos  $\omega = +7.04$ , en vez de  $\omega = -7.04$ , en nuestros cálculos de diseño.

La ganancia deseada de -40 dB se traslada a  $M = 10^{-2}$  para  $|H(j\omega)|$  ó  $10^{-4}$  para  $|H(j\omega)|^2$  y, consecuentemente la función de magnitud al cuadrado que debe satisfacerse, es:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + e^2 C_N^2(\omega)} \Big|_{\omega = 7.04} < 10^{-4} \quad (4.80)$$

donde  $e^2 = 0.2589$  para 1 dB de rizo.

Suponiendo (correctamente) que un filtro de primer orden ( $N = 1$ ) es insuficiente para satisfacer este requerimiento, empezaremos con  $N = 2$

$$\begin{aligned} |H_2(j\omega)|^2 &= \frac{1}{1 + 0.2589(2\omega^2 - 1)^2} \Big|_{\omega = 7.04} \\ &= \frac{1}{1 + 0.2589(99.12 - 1)^2} = 4.01 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (4.81)$$

lo cual es ligeramente mayor a  $10^{-4}$  por lo tanto, es evidente que  $N = 3$  será el adecuado. Para  $N = 3$ ...

$$\begin{aligned} |H_3(j\omega)|^2 &= \frac{1}{1 + 0.2589(4\omega^3 - 3\omega)^2} \Big|_{\omega = 7.04} \\ &= \frac{1}{1 + 0.2589(1395.65 - 21.12)^2} = 2.044 \times 10^{-6} \end{aligned} \quad (4.82)$$

2.3 (cont: 1 dB de rizo v  $N = 3$ ) la función de transferencia del FPB es:

$$H_{LP}(s) = \frac{0.491}{s^3 + 0.988s^2 + 1.238s + 0.491} \quad (4.83)$$

donde se ha escogido como numerador, 0.491, para hacer  $|H(j0)| = 1$ . Usando la tabla 2.5, una vez más, para determinar el filtro pasa-banda analógico a ser digitalizado, obtenemos...

$$H_{HP}(s) = H_{LP}(s) \Big|_s = \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}$$

$$= \frac{0.491}{\left[ \frac{s^2 + 1}{0.64s} \right]^3 + 0.988 \left[ \frac{s^2 + 1}{0.64s} \right]^2 + 1.238 \left[ \frac{s^2 + 1}{0.64s} \right] + 0.491}$$

$$= \frac{0.129s^3}{s^6 + 0.632s^5 + 3.507s^4 + 1.394s^3 + 3.507s^2 + 0.632s + 1} \quad (4.84)$$

La magnitud de la respuesta en frecuencia de este filtro pasa-banda,  $|H_{HP}(j\omega)|$ , está dada en la fig. 4.14 donde vemos que el rizo de 1 dB ( $M = 0.891$ ) se extiende en el rango de  $0.729 \leq \omega \leq 1.369$ , y que  $|H(j0.212)| < 10^{-2}$ .

4. Finalmente, La función de transferencia del filtro digital es:

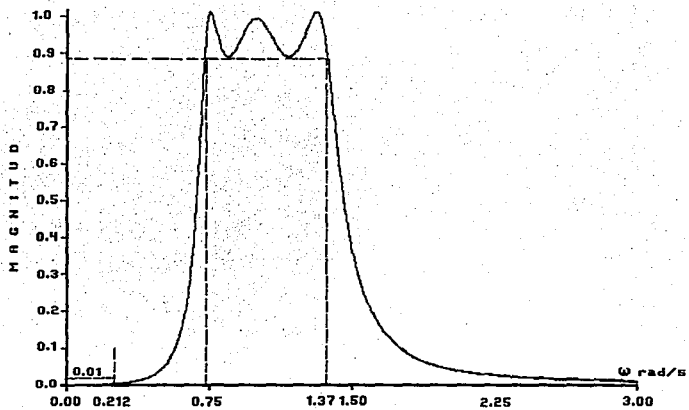


Figura 4.14 Resposta em frequência de filtro analógico del ejemplo 4.10

$$\begin{aligned}
 H_{HP}(z) &= H_{HP}(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} \\
 &= \frac{0.129 \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]^3}{\left[ \frac{z-1}{z+1} \right]^6 + 0.632 \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]^5 + 3.507 \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]^4 + 1.394 \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]^3 + 3.507 \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]^2} \\
 &\quad + 0.632 \left[ \frac{z-1}{z+1} \right] + 1 \\
 &= \frac{0.129(z+1)^3(z-1)^3}{11.672z^6 + 25.124z^4 + 20.848z^2 + 6.356} \\
 &= \frac{0.011(z^6 - 3z^4 + 3z^2 - 1)}{z^6 + 2.153z^4 + 1.786z^2 + 0.545} \quad (4.85)
 \end{aligned}$$

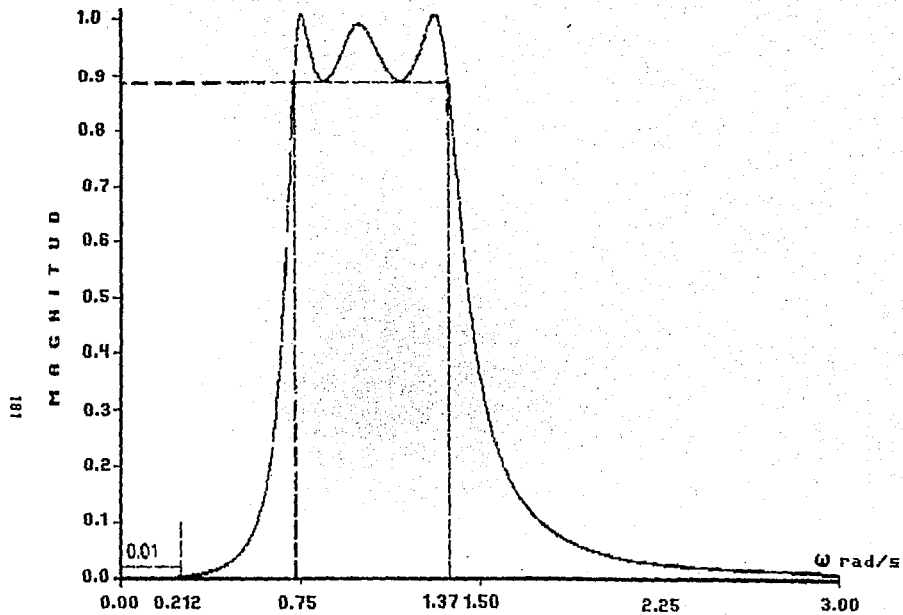
La porción de magnitud de la respuesta en frecuencia  $H(e^{j\theta})$  se observa en la figura 4.15, donde podemos percatarnos de que el rizo de 1 dB de amplitud ( $M = 0.891$ ), se encuentra entre  $\theta_l = 1.26$  rad y  $\theta_u = 1.88$  rad; y que la ganancia es menor de -40 dB ( $M = 0.01$ ) para  $\theta \leq 0.418$  rad.

Como sabemos, la función de transferencia en el dominio de "s", de la operación de integración, es:

$$H(s) = \frac{1}{s} \quad (4.86)$$

la cual, es equivalente en el dominio de "z", a la función de transferencia siguiente:

$$H(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-z} \quad (4.87)$$



La equivalencia de estas dos funciones de transferencia produce la transformación bilineal...

$$s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (4.88)$$

que difiere de la que hemos estado usando, por la constante:  $2/T$ . A continuación mostramos, que la constante  $2/T$  es innecesaria.

Usando la ec. (4.88) con  $s = j\omega$  y  $z = e^{j\theta}$ , obtenemos el mapeo del eje imaginario, como sigue...

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \left[ \frac{\theta}{2} \right] \quad (4.89)$$

en vez de:

$$\omega = \tan \left[ \frac{\theta}{2} \right] \quad (4.90)$$

Ahora supongamos que tenemos una frecuencia digital arbitraria  $\theta_a$  que requiere "pre-deformación" de la correspondiente frecuencia analógica...

$$\omega_a' = \frac{2}{T} \tan \left[ \frac{\theta_a}{2} \right] \quad (4.91)$$

El filtro analógico se diseña a partir de estas frecuencias analógicas "pre-deformadas" para obtener la función de transferencia PPB  $H_{LP}(s)$ .

#### 4.0.1 De prototipo a pasa-bajas: $H_{LP}(s)$ a $H_{LP}(z)$ .

Para este caso, reemplazamos "s" en el diseño PPB, por  $s/\omega_c'$ , donde  $\omega_c'$  es la frecuencia crítica "pre-deformada", dada por...

$$\omega_c' = \frac{2}{T} \tan (\theta_c/2).$$

(ver la ec. (4.91). La conversión analógico  $\rightarrow$  digital, realizada por medio de la transformación bilineal de la ec.

(4.88) implica la substitución de "s" por  $(2/T)(z - 1)/(z + 1)$ .  
 Poniendo éstas dos substituciones juntas, tenemos:

$$s \xrightarrow{\omega_c} \frac{s}{\omega_c} \xrightarrow{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \frac{2}{T} \frac{z-1}{\tan(\theta_c/2)} \quad (4.92)$$

y vemos que el intervalo de muestreo T, se pierde en la transformación. Usando la substitución de la ec. (4.92) en el PPB analógico  $HLP_p(s)$ , podemos llegar directamente al filtro digital pasa-bajas,  $HLP(z)$ , anorrándonos. así, el paso extra de encontrar la función de transferencia pasa-bajas analógica,  $HLP(s)$ .

**Ejemplo 4.11:** El ejemplo muestra la aplicación del método alternativo de diseño, por medio de la transformación bilineal.

En el ejemplo 4.9 digitalizamos un filtro analógico pasa-bajas  $HLP(s)$ , por medio de la transformación bilineal...

$$s = (z - 1)/(z + 1)$$

Utilizaremos, ahora, la substitución que dedujimos en los últimos párrafos, dentro de  $HLP_p(s)$ ; para encontrar  $HLP(z)$ .

**Solución:** Observando el problema 4.9 encontramos que se necesitaba un filtro de segundo orden, y el filtro digital estaba descrito por...

$$HLP(z) = HLP_p(s) \Big|_s = \frac{1}{\text{TAN} \left[ \frac{\theta_c}{2} \right]} \frac{z - 1}{z + 1}$$



$$= \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \Big|_s = \frac{1}{0.325} \frac{z-1}{z+1}$$

$$= \frac{0.067(z+1)^2}{z^2 - 1.143z + 0.413}$$

que es lo que obtuvimos la primera vez, (despreciando las pequeñas inexactitudes de los cálculos).

Los filtros pasa-altas, pasa-banda y supresores de banda digitales, pueden determinarse de una forma similar. La tabla 2.6 resume los resultados para los cuatro casos.

#### 4.7 Transformaciones de frecuencias digitales.

En la tabla (2.5) presentamos las transformaciones de frecuencia que nos permitían transformar un filtro analógico PPB, a filtros (desnormalizados) pasa-bajas, pasa-altas, pasa-banda o supresores de banda, analógicos. Estas transformaciones constituyen las bases del procedimiento de diseño, que cambiaba todas las especificaciones, a las de un filtro analógico PPB; diseñaba el filtro pasa-bajas, y después utilizando las transformaciones de frecuencia de la tabla (2.5), determinaba la función de transferencia del filtro analógico final.

TABLA 4.1 PROCEDIMIENTO ALTERNATIVO POR MEDIO DE LA TRANSFORMACION BILINEAL

Dado el prototipo pasa-bajas  $HLP_p(s)$ , el objetivo es encontrar la  $H(z)$  haciendo la sustitución apropiada

PASA-BAJAS	$HLP(z) = HLP_p(s)$	$s = \frac{1}{\tan(\theta_c/2)} \frac{z-1}{z+1}$
PASA-ALTAS	$HHP(z) = HLP_p(s)$	$s = \tan(\theta_c/2) \frac{z+1}{z-1}$
PASA-BANDA	$HBP(z) = HLP_p(s)$	$s = \frac{(\frac{z-1}{z+1})^2 + \tan^2(\theta_0/2)}{(\frac{z-1}{z+1})(\tan(\theta_u/2) - \tan(\theta_l/2))}$
SUPRESOR DE BANDA	$HBS(z) = HLP_p(s)$	$s = \frac{(\frac{z-1}{z+1})(\tan(\theta_u/2) - \tan(\theta_l/2))}{(\frac{z-1}{z+1})^2 + \tan^2(\theta_0/2)}$

Un procedimiento alternativo, es usar una de las transformaciones de analógico a digital, para convertir el PPE analógico a un PPR digital, y posteriormente utilizar una transformación de frecuencia digital apropiada para obtener el pasa-bajas, pasa-altas, pasa-banda ó supresor de banda, (digital), deseado.

Supongamos que se conoce una función de transferencia  $HLP_p(z)$ , de un filtro digital pasa-bajas que recibirá el nombre de prototipo LP digital, el cual ha sido diseñado de acuerdo con algún procedimiento previamente determinado. La transformación o mapeo que convierte a  $HLP_p(z)$ , en filtros LP, HP, BP, BS, debe preservar la estabilidad, ésto es, que con los polos de  $HLP_p(z)$

localizados dentro del círculo unitario, los polos del filtro desnormalizado deberán también caer dentro del círculo unitario.

Como consecuencia, se desea que el valor de  $HLP_p(e^{j\theta})$  para  $\theta = \theta_a$

(un valor particular de  $\theta$ ) sea el mismo que  $H_T(R)^{\theta}$ , para  $\theta = \theta_0$ , donde el sub-índice  $T$  se usa para denotar "tipo de filtro". Es decir, en una situación particular  $T$  podrá ser LF, HF, BP ó BS.

# **Capítulo 5**

## **Características de**

## **Respuesta de los**

## **Filtros Digitales**

## CARACTERISTICAS DE RESPUESTA DE LOS FILTROS DIGITALES.

### 5.1 INTRODUCCION.

En el presente capítulo se mostrarán ejemplos comunes del diseño de filtros digitales, encontrando información que los caracterice, tal como: función de transferencia, diagrama de polos y ceros, realización y diagrama del sistema a bloques. Además, se observarán sus respuestas a señales típicas.

Como el lector habrá podido notar, hasta el momento se han utilizado tablas calculadas con anterioridad. Sin embargo, la estimación de la función de transferencia de cualquier filtro, puede hacerse de manera directa utilizando las fórmulas de diseño que se aplican en estos ejemplos.

Una vez entendiendo la teoría, el proceso de diseño requiere de cálculos meramente mecánicos e iterativos, que significarían una tarea engorrosa para el diseñador; por lo cual se ha desarrollado un programa que realiza dichos cálculos, y simplifica la tarea de diseño.

Se incluye un listado del programa al final de este capítulo, así como una explicación del su funcionamiento y características.

---

#### CHEBYSHEV PASA-ALTAS

##### DATOS :

Frecuencia de muestreo ( $f_s$ ) : 1

Orden (N) : 5

Límite de la banda de paso ( $f_p$ ) : 0.3 Hz.

Magnitud del rizo en la banda de paso ( $r_1$ ) : 0.91515 dB

---

##### SOLUCION :

Debido a que el filtro a diseñar es un pasa-altas, el parámetro

$\omega_p$  para el diseño del PFB (prototipo pasa-bajas), es :

$$\omega_p = \frac{1}{2 \text{ sr} \tan(2\pi(0.3)/(2 \text{ sr}))}$$

$$\omega_p = 0.36527$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{(0.01515/10)} - 1} = 0.4843$$

$$V_o = \frac{\sinh^{-1}(1/\epsilon)}{N}$$

$$V_o = 0.2944$$

Cálculo de polos y ceros :

Considerando la función de transferencia del PFB analógico, para N impar :

$$F(s) = \frac{1}{s + \sinh(V_o)} \prod_k \frac{1}{s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_k^2)}$$

donde :

$$\sigma_k = -\sinh(V_o) \cos(k\pi/2N)$$

$$\omega_k = \cosh(V_o) \sin(k\pi/2N)$$

para  $k = 2, 4, 6, \dots, N-1$  (para N impar).

Con  $k = 2$  :

$$\sigma_k = -0.08777$$

$$\omega_k = 0.2228$$

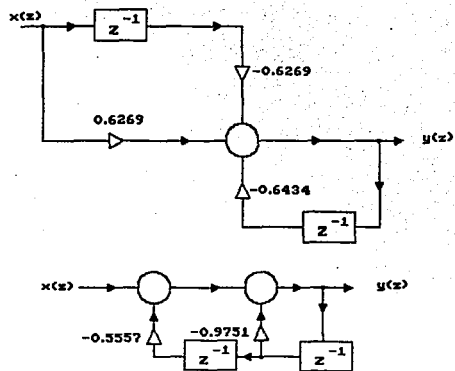
$k = 4$

$$\sigma_k = -0.033528$$

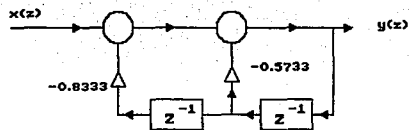
$$\omega_k = 0.3606$$

Conformando la función de transferencia, tenemos:

$$F(s) = \frac{1}{(s+0.10849)(s^2+0.17555s+0.05733)(s^2+0.06705s+0.13113)}$$



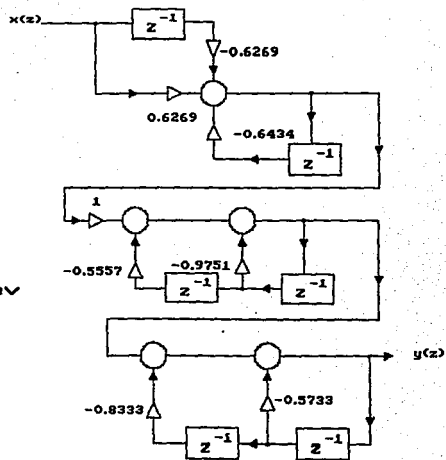
**Primera y segunda sección de la función de  
Transferencia del Filtro Chebyshev Pasa-  
Altas**



Tercera Sección de la función de  
Transferencia del Chebyshev Pasa-Altas



Acoplamiento  
 en Cascada  
 de las tres  
 secciones del  
 Filtro Chebyshev  
 Pasa-Altas.



Realizando la transformación de frecuencias, substituyendo  $s$  por  $1/s$ , obtenemos la función de transferencia del filtro pasá-altas analógico:

$$F(s) = \frac{s^2}{0.000816(s^2 + 9.217s)(s^2 + 3.0605s + 17.434)(s^2 + 0.5113s + 7.626)}$$

Realizando la transformación bilineal a esta función de transferencia, y substituyendo  $s = 2/T(z-1/z+1)$ .

$$F(z) = \frac{0.6269(z-1)}{(z + 0.6434)(z^2 + 0.9751z + 0.5557)(z^2 + 0.5733z + 0.8383)}$$

#### ELIPTICO PASA-BANDA

##### DATOS :

Frecuencia de muestreo ( $f_r$ ) : 1  
 Límite inferior de la banda ( $f_1$ ) : 0.19 Hz.  
 Límite superior de la banda ( $f_4$ ) : 0.31 Hz.  
 Frecuencia límite ( $f_2$ ) : 0.2 Hz  
 Frecuencia límite ( $f_3$ ) : 0.3 Hz  
 Magnitud del rizo en la banda de paso ( $r_1$ ) : 1 dB  
 Atenuación en la banda suprimida ( $r_2$ ) : 30 dB

##### SOLUCION:

A continuación se calculan las frecuencias de interés:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1.3592 - \omega_2 = 1.4531 \\ \omega_3 &= 2.7528 \\ \omega_4 &= 2.9429 \\ \omega_0 &= 2.0 \\ \omega_p &= 1.2997 \\ \omega_s &= 1.5837 \\ \omega_{st} &= 1.5837 \end{aligned}$$

$$\text{adem\u00e1s: } c = \sqrt{(10^{(0.1 \times 1dB)} - 1)} = 0.5088$$

$$k = \frac{1.2997}{1.5837} = 0.8207$$

$$Kc = \sqrt{(1 - (0.8207)^2)} = 0.5714$$

$$K_1 = \frac{0.5088}{\sqrt{(10^{(0.1 \times 1dB)} - 1)}} = 0.01609$$

$$K_{1c} = \sqrt{(1 - (0.01609)^2)} = 0.99987$$

$$kk = 2.038055,$$

$$kkc = 1.729693$$

$$kk1 = 1.5708$$

$$kkc = 5.5161$$

$$X_N = (2.03805 \times 5.5161 / 1.5708 / 1.729693) = 4.1377$$

$$N = \text{int}(4.1377 + 1) = 5$$

$$K_1 = 5.09565E-03, \quad K_{1c} = \sqrt{(1 - (5.09565E-2)^2)}$$

$$K_{1c} = 0.9974$$

$$KK_1 = 1.5728$$

$$V_0 = (2.038055 / 1.5708 / 5) \times \text{ARCSC}(1.9654, 0.00509565) = 0.3705$$

Calculando las funciones el\u00edpticas:

$$sn = 0.359576, \quad cn = 0.933116, \quad dn = 0.97867$$

con lo cual obtenemos la parte imaginaria del primer cero:

$$Z_i(1) = 1E25$$

$$sn = 0, \quad cn = 1, \quad dn = 1$$

$$\text{y } Z_r(1) = 0 \quad Pr(1) = -0.50081 \quad Pi(1) = 0$$

$$sn = 0.6907985, \quad cn = 0.7230473, \quad dn = 0.8237736$$

$$Zr(2) = 0 \quad Zi(2) = 2.2925 \quad Pr(2) = -0.2847 \quad Pi(2) = 0.9632$$

finalmente calculamos los últimos valores de los polos y los ceros:

$$sn = 0.9719929, \quad cn = 0.23501, \quad dn = 0.6030715$$

$$Zr(3) = 0 \quad Zi(3) = 1.6293 \quad Pr(3) = -0.06485 \quad Pi(3) = 1.29736$$

Realizando las transformación de frecuencias, tenemos:

$$P(1) = -0.250405 - j1.984263$$

$$P(2) = -0.175751 + j2.534109$$

$$P(3) = -0.04243 + j 2.751021$$

$$Z(1) = \text{FALTA}$$

$$Z(2) = -j 1.15894$$

$$Z(3) = -j 1.3449$$

Obteniendo la función de transferencia del pasa-banda analógico tenemos:

$$F(s) = \frac{(s^2 + 1.343137)(s^2 + 1.808756)}{(s^2 + 0.50081s + 4)(s^2 + 0.351502s + 6.452597)(s^2 + 0.08486s + 7.57)}$$

Realizando la transformación bilineal a esta función de transferencia, es decir  $s = 2/T(z-1/z+1)$ , tenemos:

$$F(z) = 0.02633 \frac{(z^2 - 0.9945z + 1)(z^2 - 0.7545z + 1)}{(z^2 + 0.7774)(z^2 + 0.4397z + 0.874)(z^2 + 0.608z + 0.9712)}$$

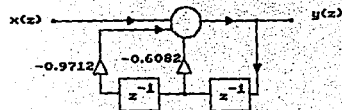
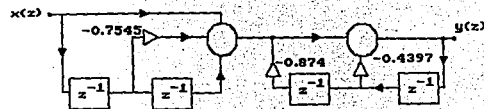
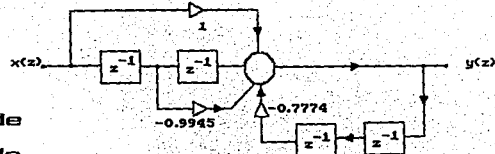
Así que encontrando los polos y los ceros de la función de transferencia anterior tenemos:

$$Z(1) = 0.49725 - j 0.8676$$

$$Z(2) = 0.37725 - j 0.9261$$

$$Z(3) = \text{En el infinito.}$$

Tres  
secciones de  
la Función de  
Transferencia  
del Filtro  
Elíptico  
Pasa-Banda



# FALLA DE ORIGEN

$$P(1) = \pm j 0.8817 \quad P(2) = -0.2198 \pm j 0.90866$$

$$P(3) = -0.3041 \pm j 0.9374$$

## CHEBYSHEV PASA-BANDA

### DATOS:

Frecuencia de muestreo (sr) : 3000

Límite inferior de la banda (f1) : 600 Hz.

Límite superior de la banda (f2) : 900 Hz.

Orden : 6

### SOLUCION:

Calculando la transformación de frecuencias, tenemos:

$$\omega_1 = 4359.2552 \quad \omega_2 = 8258.2915$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = 6000 \quad \omega_p = 3899.03632$$

$$\epsilon = 0.5088471$$

$$V_0 = \frac{\sinh^{-1}(1/\epsilon)}{N}$$

$$V_0 = 0.237995$$

Cálculo de polos y ceros :

Considerando la función de transferencia del PPB analógico, para N impar :

$$F(s) = \frac{1}{s + \sinh(V_0)} \prod_k \frac{1}{k s^2 - 2\alpha_k s + (\alpha_k^2 + \omega_k^2)}$$

onde :

$$\sigma_k = -\sinh(V_0) \cos(k\pi/2N)$$

$$\omega_k = \cosh(V_0) \operatorname{sen}(k\pi/2N)$$

para  $k = 1, 3, 5, N - 1$  (para  $N$  par).

Con  $k = 1$  :

$k = 3$

$$\sigma_k = -904.8175926$$

$$\sigma_k = -662.372449$$

$$\omega_k = 1037.859612$$

$$\omega_k = 2835.485739$$

Con  $k = 5$  :

$$\sigma_k = -242.4451$$

$$\omega_k = 3873.3455$$

Conformando la función de transferencia, tenemos:

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1809.6351s + 189584.866)(s^2 + 1324.7448s + 8478716.635)} * A$$
$$A = (s^2 + 484.890286s + 15061585.41)$$

Realizando la transformación de frecuencias tenemos:

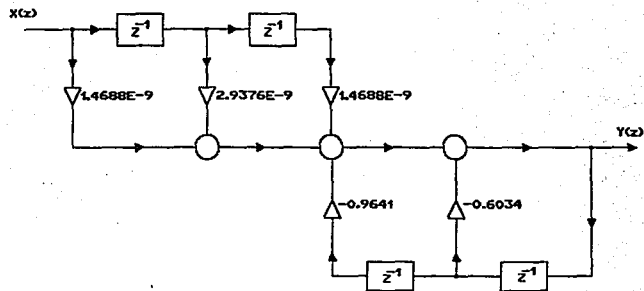
$$s_1 = -491.501 + j 6524.44$$

$$s_2 = -407.4494 + j 7574.54$$

$$s_3 = -158.4652 + j 8240.43$$

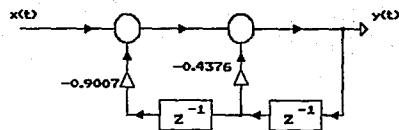
La función de transferencia analógica del filtro Pasa-Banda es:

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 983.002s + 42.80989E6)(s^2 + 814.8988s + 57.5397E6)} * A$$
$$A = (s^2 + 316.9304s + 67.9298E6)$$

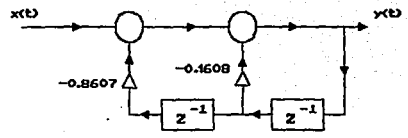


**Primera Sección de la Función de Transferencia del Filtro Chebyshev Pasa-Banda.**

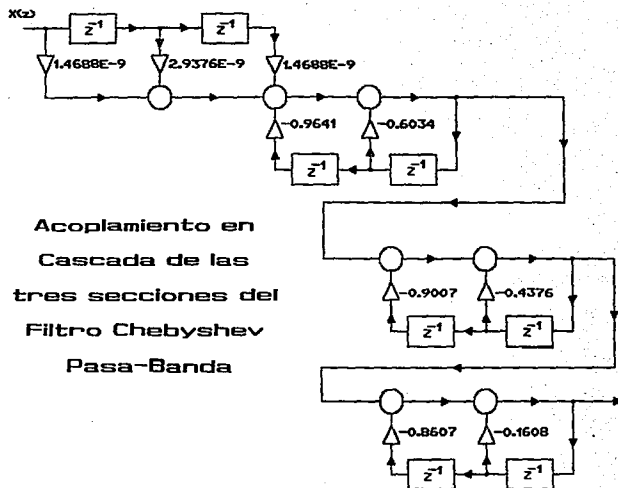




Segunda sección de la Función de Transferencia del Chebyshev Pasa-Banda



**Tercera Sección de la Función de Trans-  
ferencia del Chebyshev Pasa-Banda**



Realizando la transformación bilineal digital tenemos:

$$F(z) = \frac{1.4688E-9(z^2 + 2z + 1)}{(z^2 + 0.6034z + 0.9641)(z^2 + 0.4376z + 0.9007)(z^2 + 0.1608z + 0.8607)}$$

Encontrando las raíces de la función anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} Z_1 &= -0.3017 + j 0.9344 & Z_2 &= -0.3017 - j 0.9344 \\ Z_3 &= -0.3017 - j 0.9344 & Z_4 &= -0.2188 - j 0.9235 \\ Z_5 &= -0.0804 + j 0.9242 & Z_6 &= -0.0804 - j 0.9242 \end{aligned}$$

### ELIPTICO PASA-BAJAS

#### DATOS :

Frecuencia de muestreo ( $f_s$ ) : 1

Límite de la banda de paso ( $f_p$ ) : 0.25 Hz.

Límite de la banda suprimida ( $f_s$ ) : 0.30 Hz.

Máxima atenuación en la banda de paso ( $r_1$ ) : 0.5 dB

Mínima atenuación en la banda suprimida ( $r_2$ ) : 32 dB

#### SOLUCION:

A continuación se calculan las frecuencias de interés:

$$\omega_p = 2$$

$$\omega_s = 2.7528$$

$$\text{además: } e = \sqrt{(10^{\frac{0.5}{20}} \times 0.9999 - 1)} = 0.3493$$

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_s} = \frac{2}{2.7528} = 0.7265$$

$$Kc = \sqrt{1 - k^2} = 0.6872$$

$$K1 = \frac{e}{\sqrt{(10^{\frac{0.5}{20}} \times 0.9999 - 1)}} = 8.7768E-3$$

$$K1c = \sqrt{1 - (K1)^2} = 0.99996$$

Realizando la integral elíptica completa, encontramos las siguientes variables:

$$kk = 1.878333, \quad kkc = 1.831211, \quad kki = 1.570828$$

$$kkic = 6.122036$$

$$kN = (kk * kki / kkc) = 3.9976$$

$$N = \text{int}(3.9976 + 1) = 4$$

$$k_1 = Fk(N * kkc / kk) = 8.7456E-3, \quad K_{1c} = \sqrt{1 - (k_1)^2} = 0.99996$$

$$k_{k_1} = CEI(K_{1c}) = 1.570828$$

$$V_0 = (kk / k_{k_1} / N) * \text{ARCSC}(1/\epsilon, k_1) = 0.28647$$

Calculando las funciones elípticas :

$$sm = 0.2808247, \quad cm = 0.9597591, \quad dm = 0.981204$$

con lo cual obtenemos la parte imaginaria del primer cero:

$$Zi(1) = 1E25$$

$$sn = 0.4448, \quad cn = 0.8956, \quad dn = 0.9464^1 \text{ y } Zr(1) = 0$$

$$Pr(1) = -0.4915, \quad Pi(1) = 0.9392$$

$$sn = 0.9464112, \quad cn = 0.322964, \quad dn = 0.7261486^1$$

$$Zr(2) = 0, \quad Zi(2) = 2.9087, \quad Pr(2) = -0.13188, \quad Pi(2) = 1.9378$$

finalmente calculamos los últimos valores de los polos y los ceros:

$$sn = 0.9719929, \quad cn = 0.23501, \quad dn = 0.6030715^1$$

$$Zr(3) = 0, \quad Zi(3) = 1.6293, \quad Pr(3) = -0.06485, \quad Pi(3) = 1.29736$$

Realizando las transformación de frecuencias, tenemos:

$$P(1) = -0.250405 - j1.984263$$

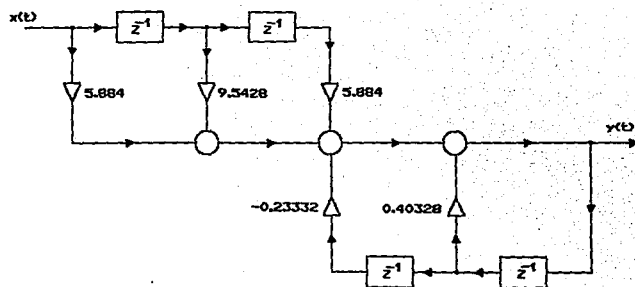
$$P(2) = -0.175751 + j2.534109$$

$$P(3) = -0.04243 + j 2.751021$$

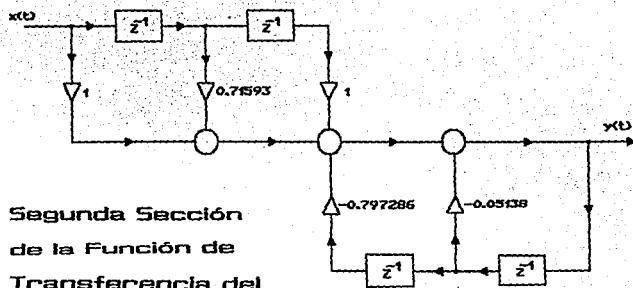
$$Z(1) = \text{FALSH}$$

$$Z(2) = -j 1.15894$$

$$Z(3) = -j 1.3449$$

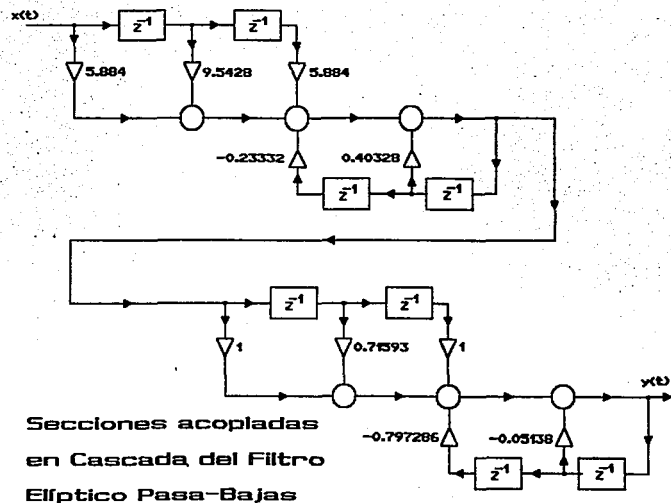


Primera Sección de la Función de Transferencia del Filtro Elíptico Pasa-Bajas



Segunda Sección  
de la Función de  
Transferencia del  
Filtro Elíptico Pasa-Bajas





**PROGRAMA  
DE DISEÑO DE FILTROS  
DIGITALES**

### **Listado del Programa**

**El código en lenguaje "C" desarrollado para el Diseño de Filtros Digitales, a partir de las especificaciones de la relación de muestreo, orden, tipo de filtro, tipo de aproximación, límites de la banda, amplitud del rizo o atenuación, entre otros, se encuentra contenido en el programa D. I. F. D. (Diseño e Implementación de Filtros Digitales), que se lista.**

```

#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <cs:\tesis\brain.h>

.....AQUI COMIENZA EL PROGRAMA CONTROL.C.....

void main()
{

    int    kk =256,
           analog_dig,
           tipo_filtro,
           n,i,j,dec,
           tipo_aproximacion,
           kod,
           apunt,
           n2;

    char imp_graf;

    float w0, w1, w2, w3, w4, wp, ws,
           r1, r2, sn, cn, dn, n2, fp, fs,
           wst;

    float sr;

    float *pr, *pi,
           *zr, *zi,
           *fm, *gm,
           *a1, *a2,
           *b1, *b2;

    et1:  menu(&analog_dig, &tipo_filtro, &tipo_aproximacion);

    pr = reserva(10);
    pi = reserva(10);
    zr = reserva(10);
    zi = reserva(10);
    a1 = reserva(20);
    a2 = reserva(20);
    b1 = reserva(20);
    b2 = reserva(20);
    fm = reserva(kk);
    gm = reserva(kk);

    textbackground(0);

    clrscr();

    if(tipo_filtro < 51)  pasbaj(tipo_filtro, tipo_aproximacion, (float *) &
    else                  pasband(tipo_filtro, tipo_aproximacion, (float *)

    if(tipo_aproximacion == 52) roots2(pr, pi, zr, zi, r1, r2, wp, ws, &n,
    else                      roots1(tipo_aproximacion, pr, pi, zr, zi, (f

        /* impresion(n2, pr, pi, zr, zi);*/

```



```

    case 'b':
    {
        apunt = 1;
        dibgrafica(kk, fm, gm, apunt);
        goto et90;
    }
    case 'c':
    {
        apunt = 2;
        dibgrafica(kk, fm, gm, apunt);
        goto et90;
    }
    case 'd':
    {
        polcer(n2, pr, pi, zr, zi);
        goto et90;
    }
    case 'e':
    {
        dibcas(n2, a1, a2, b1, b2);
        goto et90;
    }
    case 'f':
    {
        if(tipo_filtro < 51) texto_pasa_bajal(tipo_filtro, tipo_aproximacion,
        else texto_pasa_bndsp(tipo_filtro, tipo_aproximacion,
        apunt = 1;
        dibgrafica(kk, fm, gm, apunt);

        apunt = 2;
        dibgrafica(kk, fm, gm, apunt);

        polcer(n2, pr, pi, zr, zi);

        dibcas(n2, a1, a2, b1, b2);

        goto et90;
    }
    case 'g':
    {
        clrscr();
        goto et1;
    }
    default: exit(0);
}
}

```

```

/*****AQUI COMIENZA LOS MENUS*****/
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <c:\tesis\brain.h>

void menu(int *analog_dig, int *tipo_filtro, int *tipo_aproximacion)
{
    char venfil[2*53*20];

    char memo[2*43*10], memo1[2*43*10],
        a;

    int    xsup=15,
           ysup=10,
           xinf=57,
           yinf=19,
           xsupf = 10,
           ysupf = 5,
           xinff = 62,
           yinff = 24;

    textattr (WHITE + (MAGENTA<<4));

    if (!gettext(xsupf,ysupf,xinff,yinff,venfil))
        puts("error en gettext!");

    window(xsupf,ysupf,xinff,yinff);
    clrscr();
    gotoxy(8,2);
    printf("PROGRAMA DE DISEÑO DE FÍLTROS DIGITALES\n");
    gotoxy(21,4);
    printf("SELECCIONB:");
    gotoxy(12,6);
    printf("1. DISEÑO DE UN FILTRO ANALÓGICO");
    gotoxy(12,8);
    printf("2. DISEÑO DE UN FILTRO DIGITAL");
    gotoxy(21,10);
    printf("SELECCION:");

    do
    {
        gotoxy(32,10);
        *analog_dig = getche();
    } while(!(*analog_dig == 49 || *analog_dig == 50));

    if (!gettext(xsup,ysup,xinf,yinf,memo)) puts("fallo gettext!");
    textattr (WHITE + (CYAN<<4));
    window(xsup,ysup,xinf,yinf);
    clrscr();
    gotoxy(8,2);
    printf("SELECCIONA EL TIPO DE FILTRO");
    gotoxy(10,4);
    printf("1. Filtro Pasa-Bajas");
    gotoxy(10,5);

```

```

    cprintf("2. Filtro Pasa-Altas");
    gotoxy(10,6);
    cprintf("3. Filtro Pasa-Banda");
    gotoxy(10,7);
    cprintf("4. Filtro Supresor de Banda");
    gotoxy(17,9);
    cprintf("SELECCI3N:");

do
{
    gotoxy(28,9);
    *tipo_filtro = getche();
} while(!(*tipo_filtro == 49 || *tipo_filtro == 50
|| *tipo_filtro == 51 || *tipo_filtro == 52));

    if (!gettext(xsup+10,ysup+5,xinf+10,yinf+5,memol))
        puts("fallo gettext!");

    textattr (WHITE + (BLUE<<4));
    window (xsup+10,ysup+5,xinf+10,yinf+5);
    clrscr();
    gotoxy(10,2);
    cprintf("SELECCIONA LA APROXIMACION\n");
    gotoxy(10,4);
    cprintf("1. Filtro Butterworth");
    gotoxy(10,5);
    cprintf("2. Filtro Chebyshev");
    gotoxy(10,6);
    cprintf("3. Filtro Chebyshev Inverso");
    gotoxy(10,7);
    cprintf("4. Filtro El3ptico");
    gotoxy(17,9);
    cprintf("SELECCI3N:");

do
{
    gotoxy(28,9);
    *tipo_aproximacion = getche();
} while(!(*tipo_aproximacion == 49 || *tipo_aproximacion == 50
|| *tipo_aproximacion == 51 || *tipo_aproximacion == 52));

    if (!puttext(xsup+10,ysup+5,xinf+10,yinf+5,memol))
        puts("Fallo puttext!");

    if (!puttext(xsup,ysup,xinf,yinf,memo))
        puts("Fallo puttext!");

    if (!puttext(xsupf,ysupf,xinff,yinff,venfil))
        puts("error en puttext!");

    textmode (C80);
}

void pasabaj(int tipo_filtro, int tipo_aproximacion, float *sr, int *n, float
{
    /* Esta subrutina es para adquisici3n de datos de pasabajas

```



y pasa-altas con diferente tipo de aproximación \*/

```
int  xsupf = 15,
     ysupf = 7,
     xinff = 57,
     yinff = 17;

char  venfil[2*43*11],
     venfill[2*43*11];

float paso, pasos;

float  *pr, *pi, *zr, *zi;

if (tipo_filtro > 50) exit(1);
textattr(WHITE + (MAGENTA<<4));
if (!gettext(xsupf,ysupf,xinff,yinff,venfil))
    puts("error en gettext!");
window(xsupf,ysupf,xinff,yinff);
clrscr();

if (tipo_filtro == 49) {
    if (tipo_aproximacion == 49) {
        gotoxy(8,2);
        cprintf("FILTRO PASA-BAJAS BUTTERWORTH");
    }
    if (tipo_aproximacion == 50) {
        gotoxy(9,2);
        cprintf("FILTRO PASA-BAJAS CHEBYSHEV");
    }
    if (tipo_aproximacion == 51) {
        gotoxy(5,2);
        cprintf("FILTRO PASA-BAJAS CHEBYSHEV INVERSO");
    }
    if (tipo_aproximacion == 52) {
        gotoxy(9,2);
        cprintf("FILTRO PASA-BAJAS ELIPTICO");
    }
}
else
{
    if (tipo_aproximacion == 49) {
        gotoxy(8,2);
        cprintf("FILTRO PASA-ALTAS BUTTERWORTH");
    }
    if (tipo_aproximacion == 50) {
        gotoxy(9,2);
        cprintf("FILTRO PASA-ALTAS CHEBYSHEV");
    }
    if (tipo_aproximacion == 51) {
        gotoxy(5,2);
        cprintf("FILTRO PASA-ALTAS CHEBYSHEV INVERSO");
    }
}
```

```

if (tipo_aproximacion == 52) {
gotoxy(9,2);
cprintf("FILTRO PASA-ALTAS ELIPTICO");
}

gotoxy(6,4);
cprintf("TECLEA LA FRECUENCIA DE MUESTREO:");
gotoxy(20,5);
cscanf("%f", sr);
gotoxy(7,6);

if (tipo_aproximacion != 52) {
cprintf("DE QUE ORDEN ES EL FILTRO?");
gotoxy(20,7);
cscanf("%d", n);
gotoxy(7,8);
cprintf("ESCRIBE EL LIMITE DE LA BANDA");
gotoxy(5,9);
cprintf("DE PASO EN HERTZ NO NORMALIZADOS");
gotoxy(20,10);
cscanf("%f", fp);
}
else
{
cprintf("ESCRIBE EL LIMITE DE LA BANDA");
gotoxy(6,7);
cprintf("DE PASO EN HERTZ NO NORMALIZADOS");
gotoxy(20,8);
cscanf("%f", fp);
}

getch();

if (tipo_aproximacion > 49) {
if (!gettext(xsupf+10,ysupf+5,xinff+10,yinff+5,venfill))
puts("falló gettext!");

textattr(WHITE + (BLUE<<4));
xsupf=xsupf+10; ysupf=ysupf+5; xinff=xinff+10; yinff=yinff+5;
window(xsupf,ysupf,xinff,yinff);
xsupf=xsupf-10; ysupf=ysupf-5; xinff=xinff-10; yinff=yinff-5;
clrscr();

switch (tipo_aproximacion)
{
case 50:

gotoxy(6,2);
cprintf("TECLEA LA AMPLITUD DEL RIZO EN LA");
gotoxy(7,3);
cprintf("BANDA DE PASO EN db POSITIVOS");
gotoxy(20,4);
cscanf("%f", r1);
getch();
break;

case 51:

```

```

gotoxy(6,2);
cprintf("TECLEA LA AMPLITUD DEL RIZO EN LA");
gotoxy(7,3);
cprintf("BANDA SUPRIMIDA EN dB POSITIVOS");
gotoxy(20,4);
cscanf("%f", r1);
getch();
break;

default:

gotoxy(9,2);
cprintf("TECLEE EL LIMITE DE LA BANDA");
gotoxy(7,3);
cprintf("SUPRIMIDA EN Hz. NO NORMALIZADOS");
gotoxy(20,4);
cscanf("%f", fs);
gotoxy(6,5);
cprintf("TECLEA LA AMPLITUD DEL RIZO EN LA");
gotoxy(8,6);
cprintf("BANDA DE PASO EN dB POSITIVOS");
gotoxy(20,7);
cscanf("%f", r1);
gotoxy(7,8);
cprintf("TECLEE LA ATENUACION DE LA BANDA");
gotoxy(10,9);
cprintf("SUPRIMIDA EN dB POSITIVOS");
gotoxy(20,10);
cscanf("%f", r2);
}

if (!puttext(xsupf+10, ysupf+5, xinff+10, yinff+5, venfill))
    puts("falla puttext!");

if (!puttext(xsupf,ysupf,xinff,yinff,venfil))
    puts("error en puttext!");

textmode(C80);

    paso = tp*(*fp);
    pasos = tp*(*fs);

if (tipo_filtro == 49) {
    switch (tipo_aproximacion)
    {
        case 49:
            *wp = prewarp(paso, *sr);
            *r1 = 0.0;
            break;
        case 50:
            *wp = prewarp(paso, *sr);
            break;
        case 51:
            *wp = prewarp(paso, *sr);
            *ws = *wp;
    }
}

```

```

        break;
    default:
        *wp = prewarp(paso, *sr);
        *ws = prewarp(pasos, *sr);
        break;
    }
}
else
{
    switch (tipo_aproximacion)
    {
        case 49:
            *wp = prewarp(paso, *sr);
            *wp = 1/(*wp);
            *rl = 0.0;
            break;
        case 50:
            *wp = prewarp(paso, *sr);
            *wp = 1/(*wp);
            break;
        case 51:
            *wp = prewarp(paso, *sr);
            *wp = 1/(*wp);
            *ws = *wp;
            break;
        default:
            *wp = prewarp(paso, *sr);
            *wp = 1/(*wp);
            *ws = prewarp(pasos, *sr);
            *ws = 1/(*ws);
            break;
    }
}
}
}

```

```

void pasband(int tipo_filtro, int tipo_aproximacion, float *sr, int *n, float

```

```

{
    int    xsupf = 15,
          ysupf = 7,
          xinf  = 57,
          yinf  = 17;

    char  venfil[2*43*11],
          venfil[2*43*11];

    float paso,
           pasos,
           pasito,
           pasitos,
           f1,
           f4,
           f2,
           f3;
}

```

```

if (tipo_filtro < 51) exit(1);

textattr(WHITE + (CYAN<<4));

if (!gettext(xsupf,ysupf,xinff,yinff,venfil))
    puts("error en gettext!");

window(xsupf,ysupf,xinff,yinff);

clrscr();

if (tipo_filtro == 51)
{
    if (tipo_aproximacion == 49) {
        gotoxy(8,2);
        cprintf("FILTRO PASA-BANDA BUTTERNORTH");
    }
    if (tipo_aproximacion == 50) {
        gotoxy(9,2);
        cprintf("FILTRO PASA-BANDA CHEBYSHEV");
    }
    if (tipo_aproximacion == 51) {
        gotoxy(5,2);
        cprintf("FILTRO PASA-BANDA CHEBYCHEV INVERSO");
    }
    if (tipo_aproximacion == 52) {
        gotoxy(9,2);
        cprintf("FILTRO PASA-BANDA ELIPTICO");
    }
}

else
{
    if (tipo_aproximacion == 49) {
        gotoxy(8,2);
        cprintf("FILTRO SUPRESOR DE BANDA BUTTERNORTH");
    }
    if (tipo_aproximacion == 50) {
        gotoxy(9,2);
        cprintf("FILTRO SUPRESOR DE BANDA CHEBYSHEV");
    }
    if (tipo_aproximacion == 51) {
        gotoxy(2,2);
        cprintf("FILTRO SUPRESOR DE BANDA CHEBYCHEV INVERSO");
    }
    if (tipo_aproximacion == 52) {
        gotoxy(9,2);
        cprintf("FILTRO SUPRESOR DE BANDA ELIPTICO");
    }
}

gotoxy(7,4);
cprintf("TECLEE LA RELACION DE MUESTREO:");
gotoxy(20,5);
scanf("%f", &sr);
if (tipo_aproximacion < 52) {
    gotoxy(9,6);
}

```



```

if (!puttext(xsupf+10,ysupf+5,xinff+10,yinff+5,venfil))
puts("falló puttext!");

if (!puttext(xsupf,ysupf,xinff,yinff,venfil))
puts("error en puttext!");

textmode(C80);

/* AQUÍ INICIAN LAS ASIGNACIONES PERTINENTES PARA LOS DIFERENTES TIPOS
DE FILTROS */
paso = tp * f1;
pasos = tp * f2;
pasito = tp * f3;
pasitos = tp * f4;

if (tipo_filtro == 51) { /* Asignaciones para todos
los tipos de aproximación */

*w1 = prewarp(paso, *sr);
*w2 = prewarp(pasos, *sr);

if (tipo_aproximacion < 52) { /* Asignaciones para los
Butterworth,
los Chebyshev y
los Chebyshev inversos */

*w0 = sqrt((*w1)*(*w2));
*wp = ((*w2)*(*w2) - (*w0)*(*w0))/(*w2);
}

if (tipo_aproximacion == 51) { /* Asignación sólo para
Chebyshev inverso */

*ws = *wp;
}

if (tipo_aproximacion == 52) { /* Asignaciones sólo para el
filtro elíptico */

*w3 = prewarp(pasito, *sr);
*w4 = prewarp(pasitos, *sr);
*w0 = sqrt((*w3)*(*w2));
*wp = ((*w3)*(*w3) - (*w0)*(*w0))/(*w3);
*ws = ((*w4)*(*w4) - (*w0)*(*w0))/(*w4);
*wst = ((*w0)*(*w0) - (*w1)*(*w1))/(*w1);

if (*wst < *ws) *ws = *wst;
}
}

else

```

```

/* Asignaciones para todos
los tipos de aproximaci3n */
*w1 = prewarp(paso, *sr);
*w2 = prewarp(pasos, *sr);

if (tipo_aproximacion < 52) { /* Asignaciones para los
Butterworth,
los Chebyshev y
los Chebyshev inversos */
*w0 = sqrt((*w1)*(*w2));
*wp = ((*w2)*(*w2) - (*w0)*(*w0))/(*w2);
*wp = 1/(*wp);
}

if (tipo_aproximacion == 51) { /* Asignaci3n s3lo para
Chebyshev inverso */
*ws = *wp;
}

if (tipo_aproximacion == 52) { /* Asignaciones s3lo para el
filtro el3ptico */
*w3 = prewarp(pasito, *sr);
*w4 = prewarp(pasitos, *sr);
*w0 = sqrt((*w1)*(*w4));
*wp = *w1/((*w0)*(*w0) - (*w1)*(*w1));
*ws = *w2/((*w0)*(*w0) - (*w2)*(*w2));
*wst = *w3/((*w3)*(*w3) - (*w0)*(*w0));

if (*wst < *ws) *ws = *wst;
}
}

float *reserva (int num_var)
{
float *arreglo;

if ((arreglo = (float *) malloc(num_var * sizeof(float))) == NULL)
{
printf("Error al reservar espacio en memoria");
exit(1);
}
return arreglo;
}

```



.....\*AQUI COMIENZA CALC.C\*...../

```
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <c:\tesis\brain.h>
```

/\* Este archivo es un módulo del programa de diseño de filtros digitales que calcula los polos y ceros de los filtros Butterworth, Chebyshev y Chebyshev inverso. \*/

```
void roots1(int tipo_aproximacion, float *pr, float *pi, float *zr, float
```

```
{
float e,
x,
sm,
v0,
cm;
```

```
int l, j;
```

```
x=pow(10, .1*(r1));
e=sqrt(x-1);
```

```
if (tipo_aproximacion == 51) e=1/e;
```

```
l=0;
*n2=(n+1)/2;
*kod=1;
if ((n%2)==0)
```

```
{
*kod=0;
l=1;
```

```
}
sm=1;
cm=1;
```

```
if (tipo_aproximacion == 49)
```

```
{
hace(tipo_aproximacion, sm, cm, pr, pi, zr, zi, n, n2, &l, wp, ws);
```

```
}
else
```

```
{
v0=asinh(1/e)/n;
sm=sinh(v0);
cm=cosh(v0);
```

```
hace(tipo_aproximacion, sm, cm, pr, pi, zr, zi, n, n2, &l, wp, ws);
```

```
*n2 = *n2;
```

```
}
```

```
void hace(int tipo_aproximacion, float sm, float cm, float *pr, float *pi,
```

```
{
```

```
int j;
```

```

float      arg, tr, ti;

for (j=1; j<=(n2); j++) {
  arg=1.570796326794897*(j-1)/n;
  tr=sm*cos(arg);
  ti=cm*sin(arg);
  zr[j]=0.0;
  zi[j]=1e25;

  if (tipo_aproximacion == 51)
  {
    if ((i1)!=0) zi[j]=(*ws)/sin(arg);
    pr[j]=(*ws)*tr/(tr*tr+ti*ti);
    pi[j]=(*ws)*ti/(tr*tr+ti*ti);
    *l=*l+2;
  }
  else
  {
    pr[j]=(*wp)*tr;
    pi[j]=(*wp)*ti;
    *l=*l+2;
  }
}

}

double asinh(float x)
{
  float  paso,
         aseno,
         transito;

  transito = x * x + 1;
  paso = x + sqrt(transito);

  aseno = log(paso);
  return(aseno);
}

void roots2(float *pr, float *pi, float *zr, float *zi, float r1, float r
{
  int j;
  double pot, pot1, pot2, valor, modul,
         e, inverso, kc, arg, v0,
         k1, k1c, kk, kkc, kkl, kklc, k,
         dm, cm, sm,
         xn;

  pot=pow(10,0.1*r1);
  e=sqrt(pot-1);
  k = wp/ws;
  kc = sqrt(1-k*k);
  pot2=pow(10,0.1*r2);
  k1 = e/sqrt(pot2-1);
  k1c = sqrt(1-k1*k1);
  kk = cei(kc);

```

```

getch();
kkc = cei(k);
kk1 = cei(k1c);
kk1c = cei(k1);
xn = kk*kk1c/kk1/kkc;
valor=xn+1.0;
*n=valor;
modul = (*n)*kkc/kk;
k1 = fk(modul);
k1c=sqrt(1-k1*k1);
kk1=cei(k1c);
*1=0;
*n2=((*n)+1)/2;
*kod=1;
if (((*n)%2) == 0) {
    *kod = 0;
    *1 = 1;
}

inverso = 1/e;

v0 = (kk/kk1/(*n))*arcsin(inverso, k1, *1);
elp(v0, k, sn, cn, dn);
sm=*sn;
cm=*cn;
dm=*dn;
zi[1]=1e25;
for (j=1; j<=(*n2); j++) {
    arg = kk*(*1)/(*n);
    elp(arg, kc, sn, cn, dn);
    zr[j] = 0.0;
    if ((*1)!=0) zi[j] = ws/(*sn);
    pot1=pow((*dn)*sm,2.0);
    pr[j] = -wp*sm*cm*(*cn)*(*dn)/(1-pot1);
    pi[j] = wp*dm*(*sn)/(1-pot1);
    *1=*1+2;
}
}

double cei(double kc)
{
    /* INTEGRAL ELIPTICA COMPLETA */

    int j;

    double a, b, at, cei;

    a = 1.0;
    b = kc;

    for (j=1; j<=20; j++) {
        at = (a+b)/2;
        b = sqrt(a*b);
        a = at;
        if (((a-b)/a) < 1.2e-7) goto etq15;
    }

    printf("CEI incorrecto para que converja");

etq15:    cei = 1.570796326794896/a;
}

```

```

        return (cei);
    }

void elp(float x, float kc, float *sn, float *cn, float *dn)
{
    double aa[16], bb[16],
           a, b, c, d, e, at;

    int i = 1, j;
    if (x == 0) {
        *sn = 0.0;
        *cn = 1.0;
        *dn = 1.0;
    }
    else {
        i = 1;
        a = 1.0;
        b = kc;

    et4: aa[i] = a;
         bb[i] = b;
         at = (a+b)/2;
         b = sqrt(a*b);
         a = at;

         if (((a-b)/a) < 1.3e-7) goto et15;
         if (i > 15) goto et10;
         i = i+1;
         goto et4;

    et10: printf("ELP incorrecto para que converja\n");
    et15: c = a/tan(x*a);
         d = 1.0;
    et16: e = c*c/a;
         c = c*d;
         a = aa[i];
         d = (e+bb[i])/(e+a);
         i = i+1;
         if (i != 0) goto et16;
         *sn = 1/sqrt(1+c*c);
         *cn = (*sn)*c;
         *dn = d;
    }
}

double arcsc(double u, double kc, int l)
{
    double a, b, y, bt,
           valor_abs,
           regreso;

    int j;

    a = 1.0;
    b = kc;
    y = 1/u;
    l = 0;

```

```

for (j=1;j<=15;j++) {
    bt = a*b;
    a = a+b;
    b = 2.0*sqrt(bt);
    y = y-bt/y;
    if (y == 0) y = sqrt(bt)*1e-10;
    valor_abs = fabs(a-b);
    if (valor_abs < (a*1.2e-7)) {
        goto et15;
    }
    else {
        l=2*1;
        if (y < 0) l = l+1;
    }
    printf("ARCSC incorrecta para que converja\n");
    goto et16;
et15: if (y < 0) l = l+1;
et16: regreso = (atan(a/y) + 3.141592654*l)/a;
    return (regreso);
}

double fk(double u)
{
    double q,a,b,c,d,fk;
    int j;

    /* MODULO DE UNA RAZON K/Ky */

    q = exp(-3.141592654*u);
    a = 1.0;
    b = 1.0;
    c = 1.0;
    d = q;
    for(j=1;j<=15;j++) {
        a = a + 2*c*d;
        c = c*d*d;
        b = b+c;
        d = d*q;
        if (c < 1e-7) goto et15;
    }
    printf("FK INCORRECTA PARA QUE CONVERJA\n");
et15: fk = 4*sqrt(q)*(b/a)*(b/a);
    return (fk);
}

/* Subrutina de la transformaciAn bilineal digital */
void blt(float *nr, float *ni, float sr, float n2)
{
    float a, tr, ti, td;

    int j;

    a = 2*sr;
    for (j=1;j<=n2;j++) {
        tr = nr[j];

```

```

ti = ni[j];
if (fabs(ti) > 1e15 || fabs(tr) > 1e15) {
    nr[j]=-1.0;
    ni[j]=0.0;
}
else {
    td = pow((a-tr),2.0)+ti*ti;
    nr[j] = (a*a-tr*tr-ti*ti)/td;
    ni[j] = 2*a*ti/td;
}
}

void cascad(float *pr, float *pi, float *zr, float *zi, float *a1, float *a2, f
{
    int j, j0, k;

    printf("\n          ESPERA UN MOMENTO\n");
    printf("\n          POR FAVOR...\n");
    n22 = n2;
    k = 0;
    if (n22%2!=0 && tipo_filtro == 51) k=1;
    j0 = 1;
    if (kod == 0) goto et10;
    b1[1] = 1.0;
    if (tipo_filtro == 50) b1[1] = -1.0;
    b2[1] = 0;
    a1[1] = -pr[1];
    a2[1] = 0;
    j0 = 2;
et10: for (j=j0;j<=n2;j++) {
    b1[j] = -2*zr[j];
    b2[j] = zr[j]*zr[j] + zi[j]*zi[j];
    if (j == 1 && k == 1) {
        b1[j] = 0.0;
        b2[j] = -1.0;
    }
    a1[j] = -2*pr[j];
    a2[j] = pr[j]*pr[j]+pi[j]*pi[j];
    if (pi[j] == 0) {
        a1[1] = -pr[1]-pr[n2+1];
        a2[1] = pr[1]*pr[n2+1];
    }
}
}

void dfr(float *a1, float *a2, float *b1, float *b2, float *fm, int kod, floa
{
    double q,w,wdos,br,bi,

```

```

ar, ai,
brt, bit, art, ait, brs, ars,
sumaprod,

int j, i, i0; /* NO DE FRECUENCIAS A DESPLEGAR FIJO */

q = 3.141592654/kk;
for (j=1; j<=kk+1; j++){
w = q*(j-1);
wdos = 2.0*w;
br = 1.0;
bi = 0.0;
ar = 1.0;
ai = 0.0;
i0 = 1;
if (kod==0) goto et10;
br = cos(w) + b1[1];
bi = sin(w);
ar = cos(w) + a1[1];
ai = sin(w);
i0 = 2;
et10: for (i=i0; i<=n2; i++){
brt = cos(wdos) + b1[i]*cos(w) + b2[i];
bit = sin(wdos) + b1[i]*sin(w);
art = cos(wdos) + a1[i]*cos(w) + a2[i];
ait = sin(wdos) + a1[i]*sin(w);
brs = br*brt - bi*bit;
bi = br*bit + bi*brt;
br = brs;
ars = ar*art - ai*ait;
ai = ar*ait + ai*art;
ar = ars;
}
sumaprod=(br*br + bi*bi)/(ar*ar + ai*ai);
fm[j] = sqrt(sumaprod);
}

void freqxfm(float *nr, float *ni, float n2, int tipo_filtro, float w0)
{
double resta, angulo, nut,
nt;
int j;
struct complex pc, sc,
pcl, scl;

nt = 2*n2+1;
if (tipo_filtro >= S1) goto lb12;
for (j=1; j<=n2; j++) {

if (ni[j] > 1e15) goto lb7;

```

```

    pc.x = nr[j];
    pc.y = ni[j];

    sc.x = inverso(pc.x, pc.y);
    sc.y = inversol(pc.x, pc.y);

    nr[j] = -fabs(sc.x);
    ni[j] = fabs(sc.y);

    goto lb10;

lb7:      nr[j] = 0.0;
         ni[j] = 0.0;

lb10:    continue;
        }

return;

lb12:    for (j=1;j<=n2;j++) {
         if (ni[j] > 1e15) goto lb13;

         pc.x = nr[j];
         pc.y = ni[j];

         if (tipo_filtro == 52) {
            nut = pc.x;
            pc.x = inverso(pc.x, pc.y);
            pc.y = inversol(nut, pc.y);
         }
         pcl.x = cuadrado(pc.x, pc.y);
         resta = pcl.x - 4*w0*w0;
         pcl.x = resta;
         pcl.y = cuadradol(pc.x, pc.y);
         scl.x = pc.x - csqrt(pcl.x, pcl.y);
         scl.y = pc.y - csqrtl(pcl.x, pcl.y);
         angulo = atan2(scl.y, scl.x);

         sc.x = cabs(scl)/2*cos(angulo);
         sc.y = cabs(scl)/2*sin(angulo);

         nr[j] = -fabs(sc.x);
         ni[j] = fabs(sc.y);

         scl.x = pc.x + csqrt(pcl.x, pcl.y);
         scl.y = pc.y + csqrtl(pcl.x, pcl.y);

         sc.x = cabs(scl)/2*cos(angulo);
         sc.y = cabs(scl)/2*sin(angulo);

         nr[nt-j] = -fabs(sc.x);
         ni[nt-j] = fabs(sc.y);

```



```

        goto lb14;

lb13:      nr[j] = 0.0;
          nr[nt-j] = 0.0;
          ni[j] = 1e17;
          ni[nt-j] = 0.0;

          if (tipo_filtro == 52) {
            ni[j] = w0;
            ni[nt-j] = w0;
          }

lb14:      continue;
          }
          return;
        }

```

```

double inverso(double pr, double pi)
{
    struct complex z;
    double magn, angulo, modulo_inverso;

    z.x = pr;
    z.y = pi;

    magn = cabs(z);
    angulo = atan2(z.y, z.x);
    modulo_inverso = 1/magn;

    pr = modulo_inverso*cos(angulo);
    return (pr);
}

```

```

double inversol(double pr, double pi)
{
    struct complex z;
    double magn, angulo, modulo_inverso;

    z.x = pr;
    z.y = pi;

    magn = cabs(z);

    angulo = atan2(z.y, z.x);
    modulo_inverso = 1/magn;
}

```

```

    pi = modulo_inverso*sin(angulo); /*era -modulo*/
    return (pi);
}

double cuadrado(double pr, double pi)
{
    double a;
    a = pr*pr-pi*pi;
    return(a);
}

double cuadrado1(double pr, double pi)
{
    double b;
    b = 2*pr*pi;
    return(b);
}

double csqrt(double pr, double pi)
{
    double magn, raiz, angulo;
    struct complex z;

    z.x = pr; z.y = pi;

    magn = cabs(z);
    raiz = sqrt(magn);
    angulo = atan2(pi, pr)/2;
    z.x = raiz*cos(angulo);
    return (z.x);
}

double csqrt1(double pr, double pi)
{
    double magn, raiz, angulo;
    struct complex z;

    z.x = pr; z.y = pi;

    magn = cabs(z);
    raiz = sqrt(magn);
    angulo = atan2(pi, pr)/2;
    z.y = raiz*sin(angulo);
    return (z.y);
}

float prewarp (float step, float sr)
{

```

```

float tangente,
deformacion;

tangente = step/(2*sr);
deformacion = 2*sr*tan(tangente);
return (deformacion);
}

float antiprewarp(float pw, float sr)
{
float tangente, deformacion;

deformacion = pw/(2*sr);
tangente = atan(deformacion);
pw = tangente*2*sr/tp;

return (pw);
}

```

```

#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <sys\types.h>
#include <sys\stat.h>
#include <io.h>
#include <graphics.h>
#include <c:\tesis\brain.h>

```

```
void ver(int kk, float *fm)
```

```

{
    float f0,f;
    int j;
    f0 = pic/kk;
    for (j = 1; j <= (kk + 1); j++) {
        f = f0*(j-1);
        printf("t10.9f te\n", f, fm[j]);
    }
}

```

```
void dibgrafica(int kk, float *fm, float *gm, int apunt)
```

```

{
    float f0, div, divmax, divmin, f, diez, un;
    double x, y;
    unsigned int driver, mode;
    int i, j, nd, ymax, xmax, graphmode, graphdriver;
    char str[30], imp_graf;

    f0 = pic/kk;
    graphdriver=DETECT;

    for (j=1;j<=kk;j++) {
        if (apunt == 1) {
            if (fm[j] >= fm[j-1] && fm[j] > div) div = fm[j];
        }
        if (apunt == 2) {
            if (gm[j] >= gm[j-1] && gm[j] > divmax ) divmax = gm[j];
            if (gm[j] <= gm[j-1] && gm[j] < divmin ) divmin = gm[j];
        }
    }

    initgraph(&graphdriver,&graphmode, "c:\\tc\\bgi");
    ymax=getmaxy();
    xmax=getmaxx();
    setbkcolor(1);
    /* MARCO */
}

```

```

setcolor(4);
setlinestyle(0,0,3);

moveto(90,40);
lineto(xmax-30,40);
lineto(xmax-30,ymax-60);
lineto(90,ymax-60);
lineto(90,40);

/* LINEAS VERTICALES */
setcolor(14);
un= pic/10;

for(j=1;j<=9;j++) {
    setlinestyle(0,0,1);
    f = un*(j-1);
    x = (90 + un*(xmax-120)/pic) + f*(xmax-120)/pic;
    y = ymax-60;
    moveto(x,y+5);
    lineto(x,y);
    setlinestyle(1,0,1);
    lineto(x,40);
}

/* LETREROS DEL EJE HORIZONTAL*/
setttextjustify(CENTER_TEXT,TOP_TEXT);
setttextstyle(0,HORIZ_DIR,1);

for(j=1;j<=11;j++) {
    f = un*(j-1);
    sprintf(str,"%7.2f",f);
    x = (90 + un*(xmax-120)/pic) + f*(xmax-120)/pic;
    y = ymax-60;
    outtextxy((x-(10+un*(xmax-120)/pic)),y+10,str);
}

/* LINEAS HORIZONTALES */
y = ymax-(60 + ((ymax-60)-20)/10);

for(j=1;j<=9;j++) {
    setlinestyle(0,0,1);
    x = 90;
    moveto(x-5,y);
    lineto(x,y);
    setlinestyle(1,0,1);
    x = xmax-30;
    lineto(x,y);
    y = y - ((ymax-60)-20)/10;
}

setlinestyle(0,0,1);

```

```

setcolor(15);
if(apunt == 1){
    y = (ymax-60)-fm[1] * (ymax-120)/div;
}
if(apunt == 2){
    y = (ymax-60) - ((fabs(divmin)+gm[2]) * (ymax-120)/(divmax-divmin);
}

moveto(90,y);

E0= pic/kk;
if(apunt == 1) {
    for (j = 1; j<=kk+1;j++){
        f = E0*(j-1);
        x = 90 + f*(xmax-120)/pic;
        y = (ymax-60)-fm[j] * (ymax-120)/div;
        lineto(x, y);
    }
}
if (apunt == 2) {
    for (j=2;j<=kk;j++) {
        f = E0*(j-1);
        x = 90 + f*(xmax-120)/pic;
        y = (ymax-60) - ((fabs(divmin)+gm[j]) * (ymax-120)/(divmax-divmin);
        lineto(x, y);
    }
}

/* TEXTOS EN EL EJE DE LAS ORDENADAS */

setcolor(14);
y = ymax-60;
setlinestyle(0,0,1);
if (apunt == 1) {
    diez = ((ymax-100)/(ymax-120)*div)/10;
}
if (apunt == 2) {
    diez = (divmax-divmin)/10;
}

for(j=0;j<=9;j++) {
    if (apunt == 1) {
        sprintf(str,"%7.2f", j* diez);
    }
    if (apunt == 2) {
        sprintf(str,"%7.2e", divmin+j*diez);
    }

    outtextxy(50,y-4, str);

    y = y - ((ymax-60)-20)/10;
}

settextjustify(CENTER_TEXT,BOTTOM_TEXT);
setcolor(10);
settextstyle(0, HORIZ_DIR, 1);

```

```

outtextxy(xmax/2,455,"R A D I A N E S");

if (apunt == 1) {
outtextxy(xmax/2,20,"RESPUESTA EN FRECUENCIA LINEAL DEL FILTRO DIGITAL"
settextstyle(0, VERT_DIR, 1);
outtextxy(xmax/55, ymax/2,"M A G N I T U D");
}
if (apunt == 2) {
outtextxy(xmax/2,20,"RESPUESTA EN FRECUENCIA LOGARITMICA DEL FILTRO DIG
settextstyle(0, VERT_DIR, 1);
outtextxy(xmax/55, ymax/2,"M A G N I T U D");
}
settextstyle(0, HORIZ_DIR, 1);
outtextxy(xmax/2,470,"DESEAS UNA IMPRESION DE LA GRAFICA? (S/N)");

do
{
gotoxy(xmax, 460);
imp_graf=tolower(getche());
while(!(imp_graf == 's' || imp_graf == 'n'));
if(imp_graf == 's')
{
vImprimePantallaGrafica();
restorecrtmode();
}
else
{
restorecrtmode();
}
}
}

void dibcas(float n2, float *a1, float *a2, float *b1, float *b2)
{
double y;
unsigned int driver, mode;
int n22, j, xmax, graphmode, graphdriver;
char str1[30], str2[30], str3[30], str4[30], imp_graf;
graphdriver=DETECT;
initgraph(&graphdriver,&graphmode, "c:\\tc\\bgi");
n22 = n2;
xmax=getmaxx();
setbkcolor(1);
setcolor(14);
setlinestyle(0,0,0);
settextjustify(CENTER_TEXT, BOTTOM_TEXT);
outtextxy(xmax/2,460, "DESEAS UNA IMPRESION DE LAS CONFIGURACIONES? (S
setcolor(10);

```

```

outtextxy(xmax/2,50,"CONFIGURACIONES EN CASCADA DEL FILTRO DIGITAL");
outtextxy(xmax/2,80,"CADA UNA DE LA FORMA:");
setcolor(14);

outtextxy(xmax/4+95,110, "2");
outtextxy(xmax/2,120, "z + B1z + B2");
outtextxy(200,135,"F(z) =");
moveto(235,130);
lineto(410,130);
outtextxy(xmax/4+95,145, "2");
outtextxy(xmax/2,155, "z + A1z + A2");
outtextxy(xmax/2,190, "B1 + B2 + A1 + A2");

setcolor(15);

setttextjustify(RIGHT_TEXT, BOTTOM_TEXT);

for (j = 1; j <= n22; j = j+1)
{
    y = 205 + j*20;

    sprintf(str1,"%5.2e",b1[j]);
    sprintf(str2,"%5.2e",b2[j]);
    sprintf(str3,"%5.2e",a1[j]);
    sprintf(str4,"%5.2e",a2[j]);

    outtextxy(xmax/4+50,y,str1);
    outtextxy(xmax/4+150,y,str2);
    outtextxy(xmax/4+250,y,str3);
    outtextxy(xmax/4+350,y,str4);
}

do
{
    gotoxy(xmax,460);
    imp_graf = tolower(getche());
} while(!(imp_graf == 's' || imp_graf == 'n'));
if (imp_graf == 's')
{
    vimpriPantallaGrafica();
    restorecrtmode();
}
else
{
    restorecrtmode();
}
}

void vimpriPantallaGrafica()
{
    int iAux1,iAux2,iAux3;
    unsigned int uiAux4;
    FILE *FILEdibujo;

```



```

FILEdibujo = fopen("SCREEN.GRA", "wb");
for (iAux3 = 0; iAux3 <= 435; iAux3+=8)

```

```

    putc('\x1b', stdprn);
    putc('\x2a', stdprn);
    putc('\x04', stdprn);
    putc('\xd0', stdprn);
    putc('\x2', stdprn);
    uiAux4 = 0;

```

```

for (iAux2 = 0; iAux2 < 720; iAux2++)

```

```

{
    for(iAux1 = iAux3; iAux1 < iAux3 + 8; iAux1++)
        if (getpixel(iAux2, iAux1))

```

```

        {
            uiAux4 = uiAux4<<1;
            uiAux4 = uiAux4|1;

```

```

        }
        else
            uiAux4 = uiAux4<<1;
            putc(uiAux4, stdprn);
            putc(uiAux4, FILEdibujo);
            uiAux4 = 0;

```

```

            putc('\xd0', stdprn);
            putc('\x1b', stdprn);
            putc('\x4a', stdprn);
            putc('\x18', stdprn);
            putc('\x18', stdprn);

```

```

        }
    }
    fclose(FILEdibujo);

```

```

void texto_pasa_bajal(int tipo_filtro, int tipo_aproximacion, float *sr,

```

```

{
    unsigned int driver, mode;
    int ymax, xmax, graphmode, graphdriver;

```

```

    char str[30], imp_graf;

```

```

    int y;

```

```

    graphdriver=DETECT;

```

```

    initgraph(&graphdriver, &graphmode, "c:\\tc\\bgi");

```

```

    xmax=getmaxx();

```

```

    setttextjustify(CENTER_TEXT, BOTTOM_TEXT);

```

```

if (tipo_filtro == 49) {

```

```

    if (tipo_aproximacion == 49) {
        outtextxy(xmax/2, 40, "FILTRO PASA-BAJAS BUTTERWORTH");
    }

```

```

    if (tipo_aproximacion == 50) {

```

```

outtextxy(xmax/2,40, "FILTRO PASA-BAJAS CHEBYSHEV");
}
if (tipo_aproximacion == 51) {
outtextxy(xmax/2,40, "FILTRO PASA-BAJAS CHEBYSHEV INVERSO");
}
if (tipo_aproximacion == 52) {
outtextxy(xmax/2,40, "FILTRO PASA-BAJAS ELIPTICO");
}
}
else
{
if (tipo_aproximacion == 49) {
outtextxy(xmax/2,40, "FILTRO PASA-ALTAS BUTTERWORTH");
}
if (tipo_aproximacion == 50) {
outtextxy(xmax/2,40, "FILTRO PASA-ALTAS CHEBYSHEV");
}
if (tipo_aproximacion == 51) {
outtextxy(xmax/2,40, "FILTRO PASA-ALTAS CHEBYSHEV INVERSO");
}
if (tipo_aproximacion == 52) {
outtextxy(xmax/2,40, "FILTRO PASA-ALTAS ELIPTICO");
}
}
}

y = 80;

settextjustify(LEFT_TEXT,BOTTOM_TEXT);

settextstyle(0,HORIZ_DIR,1);

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "FRECUENCIA DE MUESTREO:");
sprintf(str,"%7.2f", *sr);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);

if (tipo_aproximacion != 52) {

y = y + 30;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "ORDEN DEL FILTRO:");
sprintf(str,"%d", *n);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);

y = y + 30;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "LIMITE DE LA BANDA");

y = y + 20;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "DE PASO EN HERTZ NO NORMALIZADOS.");
sprintf(str,"%f", *fp);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);
}
else
{
y = y + 30;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "LIMITE DE LA BANDA");

y = y + 20;
}
}

```

```

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "DE PASO EN HERTZ NO NORMALIZADOS.");
sprintf(str, "%f", *fp);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);
}

if (tipo_aproximacion > 49) {
switch (tipo_aproximacion)
{
case 50:
y = y + 30;
outtextxy(xmax/4 - 50, y, "AMPLITUD DEL RIZO EN LA");
y = y + 20;
outtextxy(xmax/4 - 50, y, "BANDA DE PASO EN dB POSITIVOS.");
sprintf(str, "%f", *r1);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);
break;

case 51:
y = y + 30;
outtextxy(xmax/4 - 50, y, "AMPLITUD DEL RIZO EN LA");
y = y + 20;
outtextxy(xmax/4 - 50, y, "BANDA SUPRIMIDA EN dB POSITIVOS.");
sprintf(str, "%f", *r1);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);
break;

default:
y = y + 30;
outtextxy(xmax/4 - 50, y, "LIMITE DE LA BANDA");
y = y + 20;
outtextxy(xmax/4 - 50, y, "SUPRIMIDA EN Hz. NO NORMALIZADOS.");
sprintf(str, "%f", *r1);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);
y = y + 30;
outtextxy(xmax/4 - 50, y, "AMPLITUD DEL RIZO EN LA");
y = y + 20;
outtextxy(xmax/4 - 50, y, "BANDA DE PASO EN dB POSITIVOS.");
sprintf(str, "%f", *r1);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);
y = y + 30;
}
}

```

```

        outtextxy(xmax/4 - 50, y, "ATENUACION DE LA BANDA");
        y = y + 20;
        outtextxy(xmax/4 - 50, y, "SUPRIMIDA EN dB POSITIVOS:");
        sprintf(str,"%f", *r2);
        outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);
    }
}
settextjustify(CENTER_TEXT,BOTTOM_TEXT);
outtextxy(xmax/2, 460, "DESEAS UNA IMPRESION DE LOS DATOS DEL FILTRO? (S/N):
do
{
    imp_graf = tolower (getch());
} while(!((imp_graf == 's' || imp_graf == 'n')));
if(imp_graf == 's')
{
    vImprimePantallaGrafica();
    restorecrtmode();
}
else
{
    restorecrtmode();
}
}

void texto_pasa_bndsp(int tipo_filtro, int tipo_aproximacion, float *sr, int

```

```

{
    unsigned int driver, mode;
    int ymax, xmax, graphmode, graphdriver;

    float f1, f2, f3, f4;

    int y;

    char str[30], imp_graf;

    graphdriver=DETECT;

    initgraph(&graphdriver,&graphmode, "c:\\tc\\bgi");

    xmax=getmaxx();

    /*setbkcolor(1);
    settextjustify(LEFT_TEXT,TOP_TEXT);

    settextstyle(0,HORIZ_DIR,1);
    setcolor(10);*/

    if (tipo_filtro == 51)
    {
        if (tipo_aproximacion == 49) {
            outtextxy(xmax/4, 40, "FILTRO PASA-BANDA BUTTERWORTH");
        }
    }
}

```

```

if (tipo_aproximacion == 50) {
outtextxy(xmax/4, 40, "FILTRO PASA-BANDA CHEBYSHEV");
if (tipo_aproximacion == 51) {
outtextxy(xmax/4, 40, "FILTRO PASA-BANDA CHEBYSHEV INVERSO");
if (tipo_aproximacion == 52) {
outtextxy(xmax/4, 40, "FILTRO PASA-BANDA ELIPTICO");
}
}
else
{
if (tipo_aproximacion == 49) {
outtextxy(xmax/4, 40, "FILTRO SUPRESOR DE BANDA BUTTERWORTH");
if (tipo_aproximacion == 50) {
outtextxy(xmax/4, 40, "FILTRO SUPRESOR DE BANDA CHEBYSHEV");
if (tipo_aproximacion == 51) {
outtextxy(xmax/4, 40, "FILTRO SUPRESOR DE BANDA CHEBYCHEV INVERSO");
if (tipo_aproximacion == 52) {
outtextxy(xmax/4, 40, "FILTRO SUPRESOR DE BANDA ELIPTICO");
}
}
}
}
}

y = 80;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "RELACION DE MUESTREO:");
sprintf(str, "%f", *sr);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);
if (tipo_aproximacion < 52) {

y = y + 30;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "ORDEN DEL FILTRO:");
sprintf(str, "%d", *n);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);
}

y = y + 30;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "LIMITE INFERIOR DE LA");

y = y + 20;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "BANDA EN HERTZ");
f1 = antiprewarp(*wl, *sr);
sprintf(str, "%f", f1);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);

y = y + 30;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "LIMITE SUPERIOR DE LA");

y = y + 20;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "BANDA EN HERTZ");

```

```

if (tipo_aproximacion == 52){
if (tipo_filtro >= 51){
f4 = antiprewarp(*w4, *sr);
sprintf(str,"%f", f4);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);
}
}
else{
f2 = antiprewarp(*w2, *sr);
sprintf(str,"%f", f2);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);
}
}

if (tipo_aproximacion > 49) {
y = y + 30;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "ATENUACION EN LA BANDA");
y = y + 20;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "SUPRIMIDA EN dB POSITIVOS");
if (tipo_filtro == 51 && tipo_aproximacion == 52){
sprintf(str,"%f", *r2);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);}
else{
sprintf(str,"%f", *r1);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);}

if (tipo_aproximacion == 52) {
y = y + 30;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "AMPLITUD DEL RIZO EN ");
y = y + 20;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "LA BANDA DE PASO EN dB POSITIVOS");
sprintf(str,"%f", *r1);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);

y = y + 30;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "FRECUENCIAS LIMITES:");
y = y + 20;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "          F2:");
f2 = antiprewarp(*w2, *sr);
sprintf(str,"%f", f2);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);

y = y + 20;

outtextxy(xmax/4 - 50, y, "          F3:");
f3 = antiprewarp(*w3, *sr);
sprintf(str,"%f", f3);
outtextxy(xmax/2 + 100, y, str);
}
}

```

```

}
settextjustify(CENTER_TEXT,BOTTOM_TEXT);
outtextxy(xmax/2, 460, "DESEAS UNA IMPRESION DE LOS DATOS DEL FILTRO?");
do
{
    imp_graf = tolower (getch());
} while(!(imp_graf == 's' || imp_graf == 'n'));
if(imp_graf == 's')
{
    vImprimePantallaGrafica();
    restorecrtmode();
}
else
{
    restorecrtmode();
}
}

void polcer(int n2, float *pr, float *pi, float *xr, float *zi)
{
    float yc[10], xc[10], yp[10], xp[10];
    unsigned int driver, mode;
    int i, j, ymax, xmax, graphmode, graphdriver;
    double x, y;

    char str[30], str1[30], str2[30], imp_graf;

    graphdriver=DETECT;
    initgraph(&graphdriver, &graphmode, "c:\\tc\\bgi");

    ymax=getmaxy();
    xmax=getmaxx();

    setbkcolor(1);

    setlinestyle(0,0,3);

    setcolor(14);
    settextjustify(RIGHT_TEXT,BOTTOM_TEXT);
    settextstyle(0,HORIZ_DIR,1);

    circle(xmax/3,ymax/2,150);

    /* EJES */

    settextjustify(CENTER_TEXT,TOP_TEXT);
    outtextxy(xmax/3,40,"IMAGINARIO");
    outtextxy(2.1*xmax/3,(ymax/2),"REAL");
    setcolor(10);
    setlinestyle(0,0,1);
    moveto(20,ymax/2);
    lineto(xmax-220,ymax/2);
    for (i= 60; i<=xmax-260; i+=38){
        line(i,235,i,242);
    }
}

```

```

moveto(xmax/3,50);
lineto(xmax/3,ymax-50);
for (i= 50; i<=ymax-50; i+=38){
line(210,i,217,i);
}

setcolor(4);
setlinestyle(0,0,3);

for (i=1; i<=n2; i++) {
circle((xmax/3+zr[i]*150), (ymax/2+zi[i]*150), 10);
circle((xmax/3+zr[i]*150), (ymax/2-zi[i]*150), 10);
}

setcolor(15);

for (i=1; i<=n2; i++) {
moveto((xmax/3+pr[i]*150)-5), ((ymax/2+pi[i]*150)-5);
lineto((xmax/3+pr[i]*150)+5), ((ymax/2+pi[i]*150)+5);
moveto((xmax/3+pr[i]*150)-5), ((ymax/2+pi[i]*150)+5);
lineto((xmax/3+pr[i]*150)+5), ((ymax/2+pi[i]*150)-5);

moveto((xmax/3+pr[i]*150)-5), ((ymax/2-pi[i]*150)-5);
lineto((xmax/3+pr[i]*150)+5), ((ymax/2-pi[i]*150)+5);
moveto((xmax/3+pr[i]*150)-5), ((ymax/2-pi[i]*150)+5);
lineto((xmax/3+pr[i]*150)+5), ((ymax/2-pi[i]*150)-5);
}

settextjustify(RIGHT_TEXT,BOTTOM_TEXT);

for (i=1; i<=n2; i++) {
sprintf(str1,"%7.2e",zr[i]);
sprintf(str2,"%7.2e",zi[i]);

outtextxy(2.2*xmax/3, (50+i*15), str1);
outtextxy(2.7*xmax/3, (50+i*15), str2);
}

for (i=1; i<=n2; i++) {
sprintf(str1,"%7.2e",pr[i]);
sprintf(str2,"%7.2e",pi[i]);

outtextxy(2.2*xmax/3, (ymax/2+50+i*15), str1);
outtextxy(2.7*xmax/3, (ymax/2+50+i*15), str2);
}

settextjustify(CENTER_TEXT, TOP_TEXT);

outtextxy(2.3*xmax/3, 23, "CEROS");
outtextxy(2.0*xmax/3, 40, "REAL");
outtextxy(2.5*xmax/3, 40, "IMAG.");
outtextxy(2.3*xmax/3, (ymax/2+23), "POLOS");
outtextxy(2.0*xmax/3, (ymax/2+40), "REAL");
outtextxy(2.5*xmax/3, (ymax/2+40), "IMAG.");

```



```

setcolor(10);
outtextxy(xmax/3,20,"LOCALIZACION DE PÓLOS Y CEROS DE H(z)");
outtextxy(xmax/3,460,"¿DESEAS UNA IMPRESION DE LA GRAFICA? (S/N):");

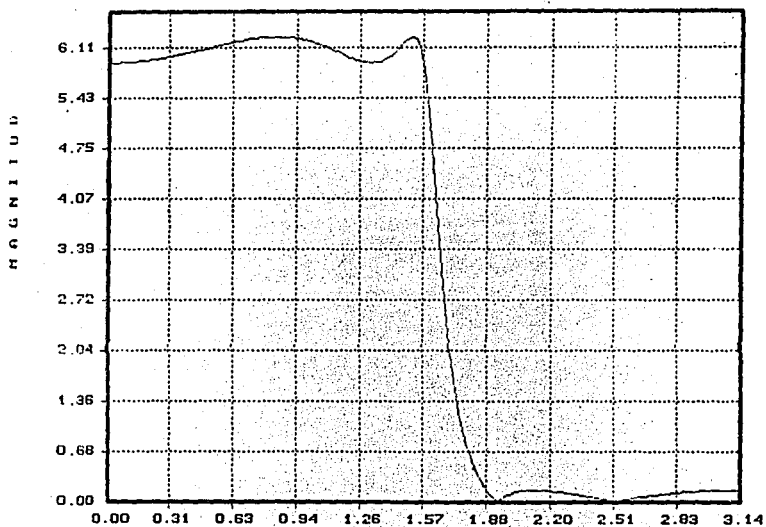
do
{ gotoxy(xmax/1, 460);
  imp_graf=tolower(getche());
  } while(!(imp_graf == 's' || imp_graf == 'n'));
  if(imp_graf == 's')
  {
    vImprimePantallaGrafica();
    restorecrtmode();
  }
  else
  {
    restorecrtmode();
  }
}

```

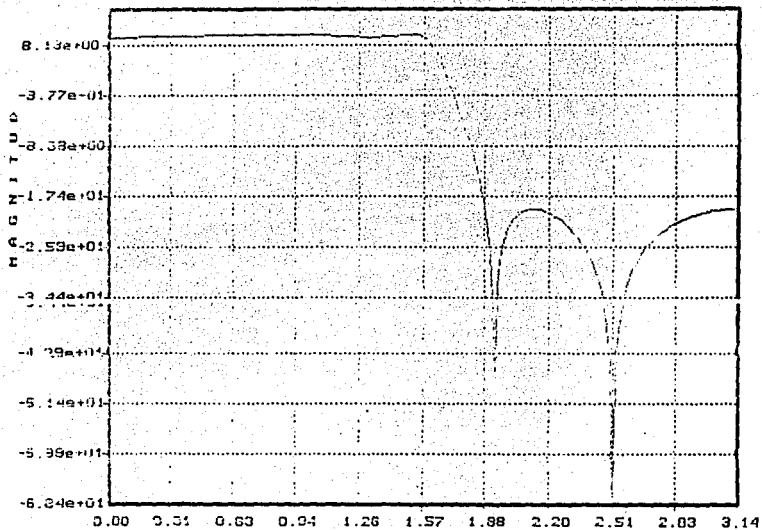
FILTRO PASA-BAJAS ELIPTICO

FRECUENCIA DE MUESTREO:	1.00
LIMITE DE LA BANDA DE PASO EN HERTZ NO NORMALIZADOS:	0.250000
LIMITE DE LA BANDA SUPRIMIDA EN Hz. NO NORMALIZADOS:	0.300000
AMPLITUD DEL RIZO EN LA BANDA DE PASO EN dB POSITIVOS:	0.500000
ATENUACION DE LA BANDA SUPRIMIDA EN dB POSITIVOS:	32.000000

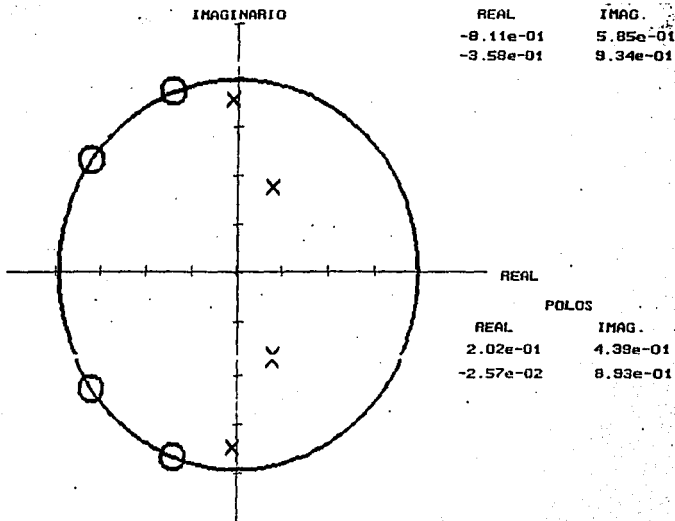
RESPUESTA EN FRECUENCIA LINEAL DEL FILTRO DIGITAL



RESPUESTA EN FRECUENCIA LOGARITMICA DEL FILTRO DIGITAL



LOCALIZACION DE POLOS Y CEROS DE  $H(z)$



CONFIGURACIONES EN CASCADA DEL FILTRO DIGITAL

CADA UNA DE LA FORMA:

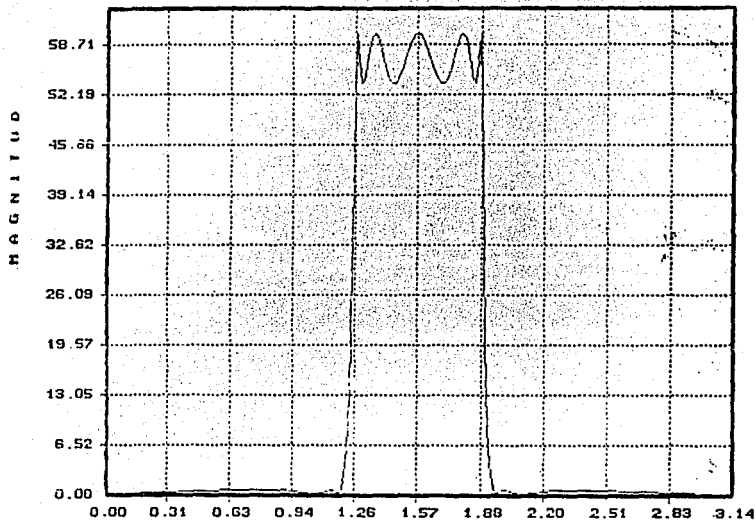
$$F(z) = \frac{z^2 + B_1z + B_2}{z^2 + A_1z + A_2}$$

B1	B2	A1	A2
1.62e+00	1.00e+00	-4.03e-01	2.33e-01
7.16e-01	1.00e+00	5.14e-02	7.97e-01

FILTRO PASA-BANDA ELIPTICO

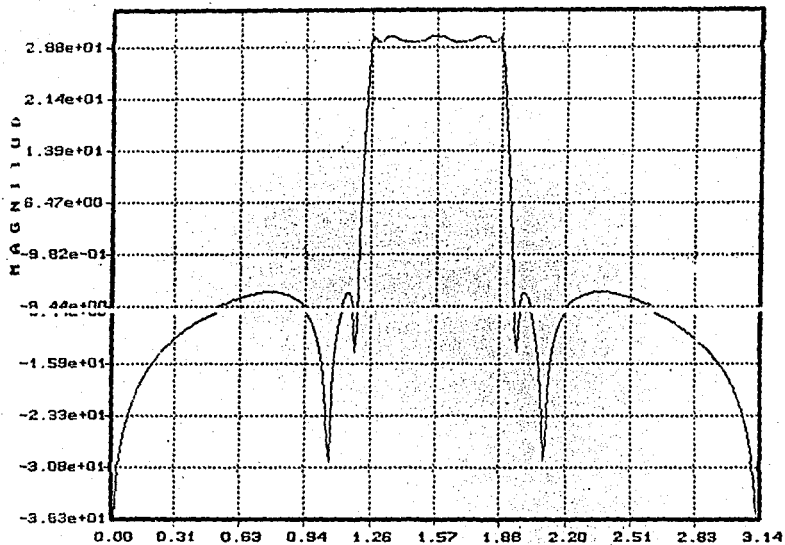
RELACION DE MUESTREO:	1.000000
LIMITE INFERIOR DE LA BANDA EN HERTZ	0.190000
LIMITE SUPERIOR DE LA BANDA EN HERTZ	0.310000
ATENUACION EN LA BANDA SUPRIMIDA EN dB POSITIVOS	30.000000
AMPLITUD DEL RIZO EN LA BANDA DE PASO EN dB POSITIVOS	1.000000
FRECUENCIAS LIMITES:	
F2:	0.200000
F3:	0.300000

RESPUESTA EN FRECUENCIA LINEAL DEL FILTRO DIGITAL





RESPUESTA EN FRECUENCIA LOGARITMICA DEL FILTRO DIGITAL



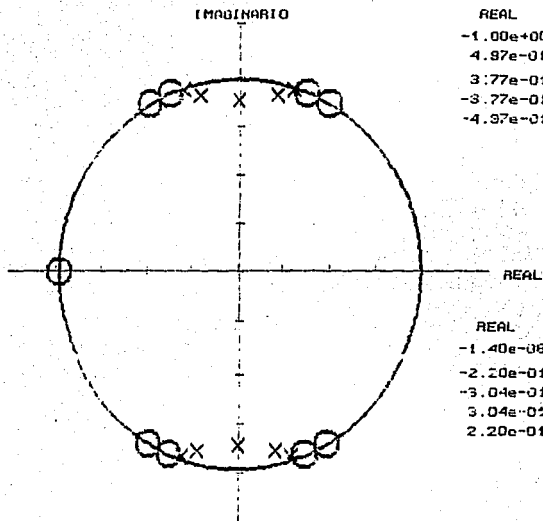
CONFIGURACIONES EN CASCADA DEL FILTRO DIGITAL

CADA UNA DE LA FORMA:

$$F(z) = \frac{z^2 + B_1z + B_2}{z^2 + A_1z + A_2}$$

B1	B2	A1	A2
0.00e+00	-1.00e+00	2.80e-08	7.77e-01
-9.95e-01	1.00e+00	4.40e-01	8.74e-01
-7.54e-01	1.00e+00	6.08e-01	9.71e-01
7.54e-01	1.00e+00	-6.08e-01	9.71e-01
9.95e-01	1.00e+00	-4.40e-01	8.74e-01

LOCALIZACION DE POLOS Y CEROS DE  $H(z)$



CEROS

REAL	IMAG.
-1.00e+00	0.00e+00
-4.87e-01	8.68e-01
3.77e-01	9.26e-01
-3.77e-01	9.26e-01
-4.87e-01	8.68e-01

POLOS

REAL	IMAG.
-1.40e-08	8.82e-01
-2.20e-01	9.09e-01
-3.04e-01	9.37e-01
3.04e-01	9.37e-01
2.20e-01	9.09e-01

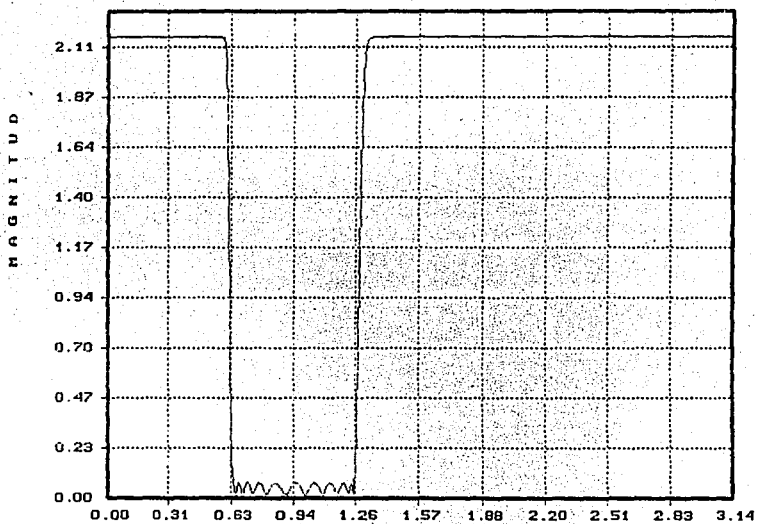
CONFIGURACIONES EN CASCA DA DEL FILTRO DIGITAL

CADA UNA DE LA FORMA:

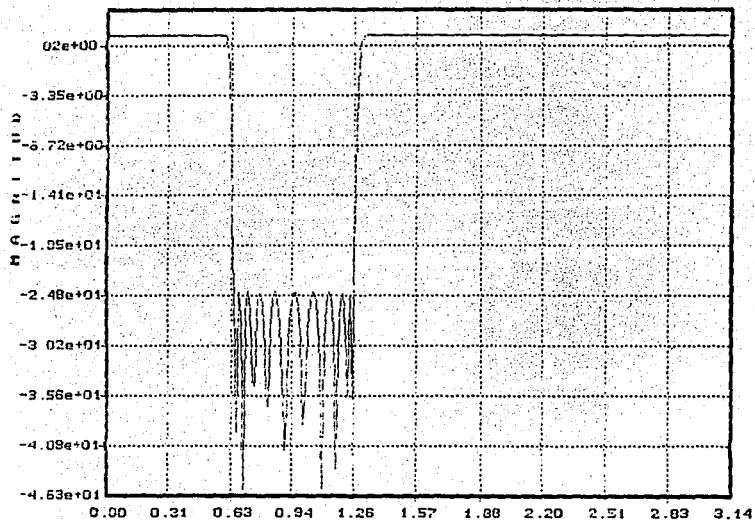
$$F(z) = \frac{z^2 + B_1z + B_2}{z^2 + A_1z + A_2}$$

B1	B2	A1	A2
-2.00e+00	1.00e+00	1.61e-01	8.61e-01
2.00e+00	1.00e+00	4.38e-01	9.01e-01
2.00e+00	1.00e+00	6.03e-01	9.64e-01
-2.00e+00	1.00e+00	-6.03e-01	9.64e-01
-2.00e+00	1.00e+00	-4.38e-01	9.01e-01
-2.00e+00	1.00e+00	-1.61e-01	8.61e-01

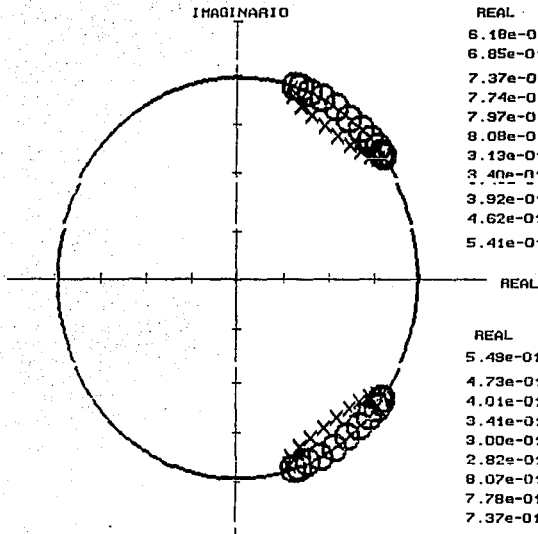
RESPUESTA EN FRECUENCIA LINEAL DEL FILTRO DIGITAL



RESPUESTA EN FRECUENCIA LOGARITMICA DEL FILTRO DIGITAL



LOCALIZACION DE POLOS Y CEROS DE  $H(z)$



CEROS

REAL	IMAG.
6.18e-01	7.86e-01
6.85e-01	7.29e-01
7.37e-01	6.76e-01
7.74e-01	6.34e-01
7.97e-01	6.04e-01
8.08e-01	5.90e-01
8.13e-01	9.50e-01
8.40e-01	8.40e-01
8.92e-01	9.20e-01
4.62e-01	8.87e-01
5.41e-01	8.41e-01

POLOS

REAL	IMAG.
5.49e-01	6.90e-01
4.73e-01	7.41e-01
4.01e-01	7.34e-01
3.41e-01	8.46e-01
3.00e-01	8.95e-01
2.82e-01	9.39e-01
8.07e-01	5.70e-01
7.78e-01	5.70e-01
7.37e-01	5.83e-01
6.85e-01	6.09e-01

CONFIGURACIONES EN CASCADA DEL FILTRO DIGITAL

CADA UNA DE LA FORMA:

$$F(z) = \frac{z^2 + B1z + B2}{z^2 + A1z + A2}$$

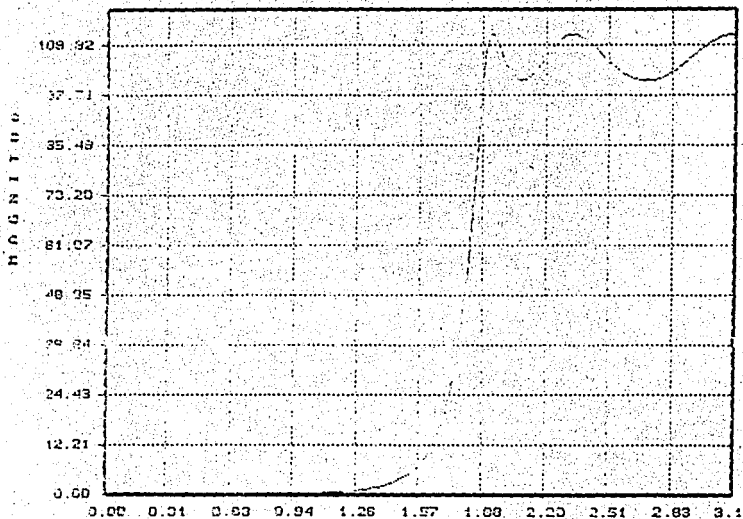
B1	B2	A1	A2
-1.24e+00	1.00e+00	-1.10e+00	7.77e-01
-1.37e+00	1.00e+00	-9.47e-01	7.72e-01
-1.47e+00	1.00e+00	-8.03e-01	7.91e-01
-1.55e+00	1.00e+00	-6.82e-01	8.32e-01
-1.59e+00	1.00e+00	-5.99e-01	8.90e-01
-1.62e+00	1.00e+00	-5.64e-01	9.61e-01
-6.25e-01	1.00e+00	-1.61e+00	9.76e-01
-6.80e-01	1.00e+00	-1.56e+00	9.30e-01
-7.84e-01	1.00e+00	-1.47e+00	8.84e-01
-9.25e-01	1.00e+00	-1.37e+00	8.40e-01
-1.08e+00	1.00e+00	-1.24e+00	8.02e-01



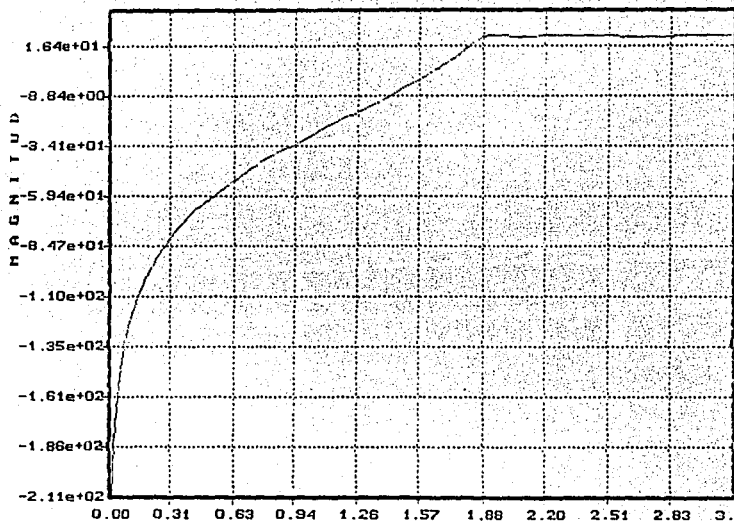
FILTRO PASA-ALTAS CHEBYSHEV

FRECUENCIA DE MUESTREO:	1.00
ORDEN DEL FILTRO:	5
LIMITE DE LA BANDA DE PASO EN HERTZ NO NORMALIZADOS:	0.300000
AMPLITUD DEL RIZO EN LA BANDA DE PASO EN dB POSITIVOS:	0.915150

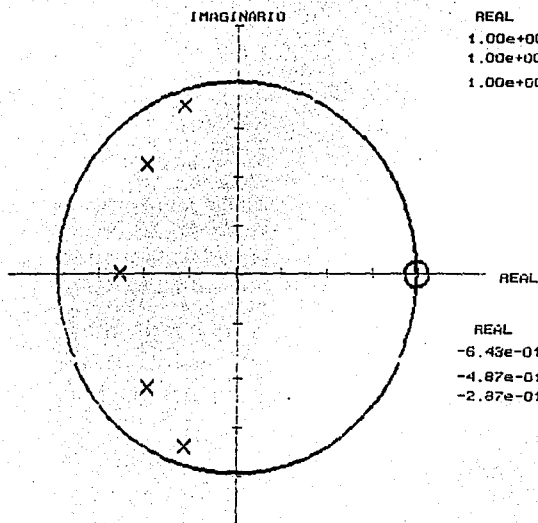
RESPUESTA EN FRECUENCIA LINEAL DEL FILTRO DIGITAL



RESPUESTA EN FRECUENCIA LOGARITMICA DEL FILTRO DIGITAL



LOCALIZACION DE POLOS Y CEROS DE H(z)



CEROS

REAL	IMAG.
1.00e+00	0.00e+00
1.00e+00	0.00e+00
1.00e+00	0.00e+00

POLOS

REAL	IMAG.
-6.43e-01	3.59e-01
-4.87e-01	5.64e-01
-2.87e-01	8.70e-01

CONFIGURACIONES EN CASCADA DEL FILTRO DIGITAL

CADA UNA DE LA FORMA:

$$F(z) = \frac{z^2 + B_1z + B_2}{z^2 + A_1z + A_2}$$

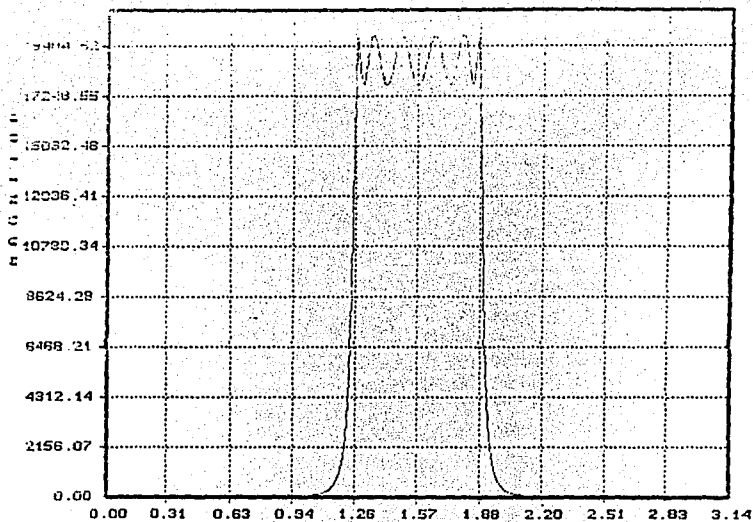
B1	B2	A1	A2
-1.00e+00	0.00e+00	6.43e-01	0.00e+00
-2.00e+00	1.00e+00	9.75e-01	5.56e-01
-2.00e+00	1.00e+00	5.73e-01	8.38e-01

FILTRO PASA-BANDA CHEBYSHEV

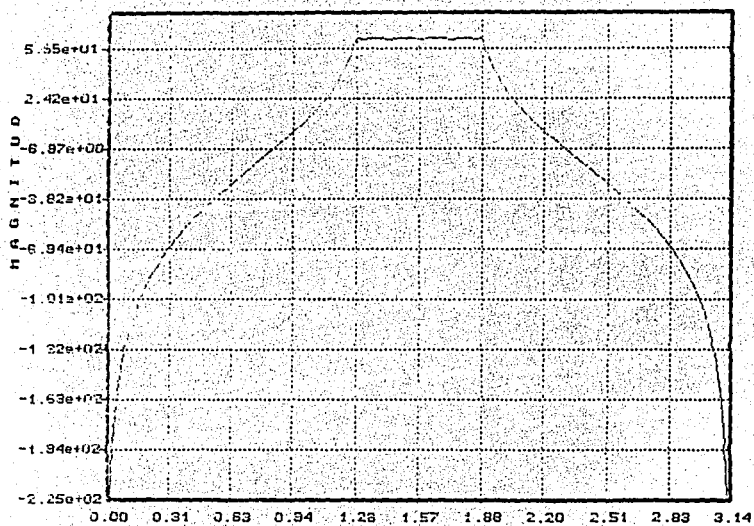
RELACION DE MUESTREO:	3000.000000
ORDEN DEL FILTRO:	12
LIMITE INFERIOR DE LA BANDA EN HERTZ	600.000000
LIMITE SUPERIOR DE LA BANDA EN HERTZ	899.999939
ATENUACION EN LA BANDA SUPRIMIDA EN dB POSITIVOS	1.000000

# FALLA DE ORIGEN

RESPUESTA EN FRECUENCIA LINEAL DEL FILTRO DIGITAL

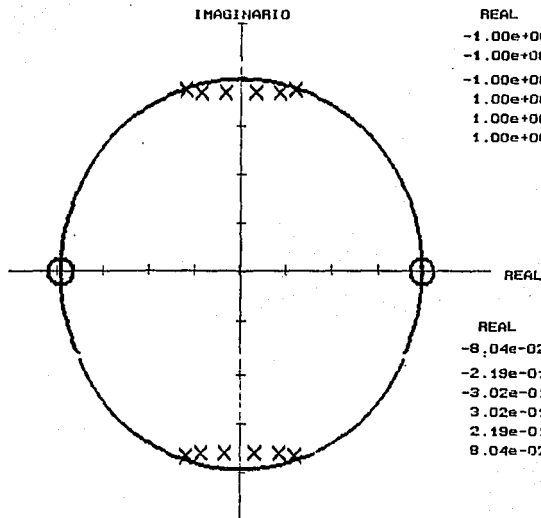


RESPUESTA EN FRECUENCIA LOGARITMICA DEL FILTRO DIGITAL





LOCALIZACION DE POLOS Y CEROS DE H(z)



CEROS

REAL	IMAG.
-1.00e+00	0.00e+00
-1.00e+00	0.00e+00
-1.00e+00	0.00e+00
1.00e+00	0.00e+00
1.00e+00	0.00e+00
1.00e+00	0.00e+00

POLOS

REAL	IMAG.
-8.04e-02	9.24e-01
-2.19e-01	9.23e-01
-3.02e-01	9.34e-01
3.02e-01	9.34e-01
2.19e-01	9.23e-01
8.04e-02	9.24e-01

APENDICE

TABLA DE TRANSFORMADAS Z

$f(nT)$	$F(z)$
$\delta(nT)$	1
$u(nT)$	$\frac{z}{z-1}$
$u(nT-T)K$	$\frac{k}{z-1}$
$u(nT)Kw^n$	$\frac{Kz}{z-w}$
$u(nT-T)Kw^{n-1}$	$\frac{K}{z-w}$
$u(nT)e^{-anT}$	$\frac{K}{z-e^{-aT}}$
$r(nT)$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$u(nT) \sin \omega nT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$u(nT) \cos \omega nT$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

APENDICE B  
DESCRIPCION MODULAR DEL PROGRAMA

El código, en lenguaje "C", desarrollado para el diseño de filtros digitales, a partir de las especificaciones de relación de muestreo, orden, tipo de filtro, tipo de aproximación, límites de la banda, amplitud del rizo o atenuación, entre otros, se encuentra contenido en el programa D.I.F.D. (Diseño e Implementación de Filtros Digitales), que se lista en el apéndice A; a continuación se presenta una descripción modular de este programa.

La figura A.1. muestra, en un cuadro, el código en "C" del programa, que servirá para explicar su funcionamiento básico; en la parte izquierda se observa una numeración por renglones que será utilizada para hacer referencia a partes específicas de este.

Es conveniente iniciar describiendo las variables que intervienen en el programa principal, después se hace una breve descripción del funcionamiento del programa.

La siguiente figura muestra el programa principal de D.I.F.D. (Tomado del código original en lenguaje "C" del programa CONTROL.C).

```

menu(analog_dig, &tipo_filtro, &tipo_aproximación);
dr = reserva(10); pi = reserva(10); zr = reserva(10);
zi = reserva(10); a1 = reserva(10); a2 = reserva(10);
bi = reserva(10); b2 = reserva(10); fm = reserva(10);

if(tipo_filtro < 51) pasband(tipo_filtro, tipo_aproximación,
(float *) &sr, &n, (float *)&r1, (float *) &r2, (float *) &wp,
(float *) &ws);
else
    pasband(tipo_filtro, tipo_aproximación,
(float *) &sr, &n, (float *) &r1, (float *) &r2, (float *) &wp,
(float *) &ws, (float *) &w0, (float *) &w1, (float *) &w2, (float *) &w3,
(float *) &w4, (float *) &wst);

if(tipo_aproximación == 52) roots2(dr, pi, zr, zi, r1, r2, wp,
ws, &n, (float *) &n2, &kod, (float *) &n, (float *) &n, (float *) &n, &l);
else
    roots1(tipo_aproximación, dr, pi, zr,
zi, (float *) &r1, n, &n2, &kod, &n22, &w0, &ws);
if(tipo_filtro == 49) goto et65;
    freqxfm(dr, pi, n2, tipo_filtro, w0);
    freqxfm(zr, zi, n2, tipo_filtro, w0);
if(tipo_filtro == 50) goto et65;
    n2 = n;
    n = 2*n;
    kod = 0;
et65:    if(analog_dig == 49) goto et80;
        blt(dr, pi, sr, n2);
        blt(zr, zi, sr, n2);
        impresion(n2, dr, pi, zr, zi);
et80:    cascad(dr, pi, zr, zi, a1, a2, b1, b2, n22, kod,
tipo_filtro, n2);
if(analog_dig == 50) orf(a1, a2, b1, b2, fm, kod, n2, kk);
if(analog_dig == 49) afr ();
ver(kk, fm); archiva(kk, fm);
valores(fm, kk, Color);
grafica(kk, fm);

```

# FALLA DE ORIGEN

TABLA A.1. DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES UTILIZADAS EN EL PROGRAMA PRINCIPAL.

NOMBRE	CLASE	OBJETIVO	TIPO
control_tipo	variable de control	Indica si el filtro es analógico o digital	int
tipo_filtro	variable de control	Indica si el filtro es FS, FA, PBand.o SB	int
tipo_ordenación	variable de control	Indica si el filtro es Butter, Cheoy, ICheby ó Elíptico.	int
r	parámetros	Valor de la relación de muestreo.	float
n	parámetros	Indica el orden del filtro.	int
r1	parámetros	Valor de la amplitud del rizo en la banda de paso ó atenuación en la banda suprimida en db positivos.	float
r2	parámetros	Valor de la atenuación en la banda suprimida en db positivos.	float
wd	parámetros	Es el valor del límite en la banda de paso en el filtro prototipo.	float
ws	parámetros	Es el valor del límite en la banda suprimida en el filtro prototipo.	float

# FALLA DE ORIGEN

	parámetros	Es el módulo de la constante del filtro pasa-banda en la transformación de frecuencias.	float
w1, w4	parámetros	Son valores de los límites en la banda sustraida en el filtro pasa bajas.	floats
w2, w3	parámetros	Son valores de los límites en la banda de paso en el filtro pasa bajas en la transformación de frecuencias.	floats
wst	parámetros		
pr	parámetros	Es el valor real de los polos.	float
pi	parámetros	Es el valor imaginario de los polos.	float
cr	parámetros	Es el valor real de los ceros.	float
ci	parámetros	Es el valor imaginario de los ceros.	float
sn	parámetros	En las funciones elípticas se emplea una función llamada Función Elíptica Jacobiana, esta puede verse como la generación de funciones trigonométricas e hipérbólicas, la integral elíptica de primera	float

# FALLA DE ORIGEN

clase se define como:

$$u(\phi, k) = \int_0^{\phi} \frac{dy}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(y)}}$$

el seno trigonométrico de la inversa de esta función se define como el seno elíptico Jacobiano de  $u$ , con módulo  $k$ , y se denota como  $\text{sn}(u, k)$ , y  $\text{sn}(u, k) = \tan(\phi(u, k))$ .

cn	parámetros	Es otra función elíptica que es float mucho más obvia de generalizar que $\text{sn}$ , $\text{cn}(u, k) = \cos(\phi(u, k))$ .	
dn	parámetros	$\text{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)}$ .	float
kk	variable	Es el número de frecuencias a desplegar.	int
fm	variable	Es la respuesta en frecuencia de salida del filtro.	float
ai	parámetro		float

## BIBLIOGRAFIA

- T. W. PARRIS and C.S. BURRUS.  
Digital Filter Design.  
John Wiley & Sons, Inc.  
+++++.Edición.  
1987.

- Richard A. Roberts and Clifford T. MULLIS.  
Digital Processing.  
Addison-Wesley Publishing Company.  
  
1987.

Alan V. Oppenheim.  
Applications of Digital Signal Processing.  
Prentice Hall  
  
1987

Eduard Kamen.  
Introduction to Signals and Systems.  
Macmillan Publishing Company.  
  
1987.

Antoniou, Andreas.  
Digital Filters.  
Mc. Graw-Hill.  
  
1979.

L. R. Rabiner and R. W. Schafer.  
Digital Processing of Speech Signals  
Prentice Hall.  
  
1978.



Robert O. Strum & Donal E. Kirk.  
First Principles of Discrete Systems and Digital  
Signal Processing.  
Addison Wesley.

1989.

Daniels Richard W.  
Approximation Methods for Electronic Filter Design.

Hamming R. W.  
Digital Filters.  
Prentice Hall.

Lam H.  
Analog and Digital Filters: Design and Realization.  
Prentice Hall.