4

2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NÚCLEOS EN LA CERRADURA TRANSITIVA DE UNA DIGRÁFICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMATICA

P R E S E N T A

MA. FIDELA ANAYA TORRES

MÉXICO, D. F. 1995

FALLA DE ORIGEN

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron la pasante(s) ANAYA TORRES MA. FIDELA

con número de cuenta 8652230-8 con el Título:
"NUCLEOS EN LA CERRADURA TRANSITIVA DE UNA DIGRAFICA"

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de MATEMATICO

GRADO	**NOMBRE(S)**	**APELLIDOS COMPLETOS**	**FIRMA**
DRA.	HORTENSIA	GALEANA SANCHEZ	H. Galeana
Director de Tesis			
DR.	HUGO ALBERTO	RINCON MEJIA	Hugo A. Rincón M.
MAT.	LAURA	PASTRANA RAMIREZ	Laura Pastrana R.
M. en C.	PATRICIA	CORTES FLORES	[illegible]
Suplente			
M. en C.	VIRGINIA	ABRIN BATULE	Virginia Abrín Batule
Suplente			

A MIS PADRES POR TODO
EL APOYO QUE SIEMPRE
ME HAN BRINDADO. **GRACIAS**

A HORTENSIA Y LAURA POR
SU AYUDA EN LA REALIZACION
DEL PRESENTE TRABAJO.

A GERARDO CON CARIÑO

CONTENIDO

INTRODUCCION

El núcleo de una digráfica (gráfica orientada) es un conjunto de vértices independiente y absorbente al mismo tiempo.

El concepto de núcleo fué considerado primero por J. Von Neumann (1936) en Teoría de Juegos bajo el nombre de "Solución de un juego de cooperación entre n personas", posteriormente C. Berge observo que dicho concepto era de utilidad en otros contextos y propuso llamarlo "núcleo de una digráfica". ¿Cúando una digráfica posee núcleo?, esta y otras preguntas han motivado la búsqueda de condiciones suficientes para que una digráfica posea núcleo.

En la primera parte del presente trabajo, Sands, Sauer y Woodrow prueban que si una digráfica 2-coloreada no contiene trayectorias monocromáticas exteriores infinitas, entonces la digráfica tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Ellos también plantearon el siguiente problema: Sea T un torneo 3-coloreado y el cual no contiene C_3 tricolores. Entonces ¿ T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas?.

En la segunda parte Shen Minggang dá una aproximación al problema y finaliza concluyendo que si se tienen torneos m-coloreados con $m \geq 5$ entonces su aproximación al problema no puede ser mejorada.

La cerradura transitiva por colores de una digráfica D m-coloreada, denotada por C(D) es la digráfica que cumple:

i) $V(C(D)) = V(D)$.

ii) $F(C(D)) = F(D) \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{uv$ con color i / existe una *uv*-trayectoria dirigida monocromática de color *i* contenida en D }.

En la última parte se obtienen algunas condiciones suficientes las cuales implican que la cerradura transitiva de una digráfica tiene núcleo, en particular trabajaremos con torneos. Una de las condiciones es (*i*) Todo ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es un ciclo dirigido casi-monocromático.

También se verá que la condición del Teorema de Shen Minggang (que no contenga C_3 ni T_3) no implica la condición (*i*) y que la condición (*i*) no implica la condición de Shen Minggang.

CONCEPTOS PRELIMINARES

DIGRAFICAS

Una *digráfica* D consiste de un conjunto finito no vacío de objetos llamados *vértices*, junto con un conjunto de pares ordenados de distintos vértices. Si D es una digráfica denotaremos por V(D) o simplemente V al conjunto de vértices y F(D) o F denotará al conjunto de pares ordenados, a los cuales llamaremos *aristas o flechas*.

Si $f = (x,y) \in F(D)$ diremos que f es incidente desde x e incidente hacia y. Además diremos que x es adyacente hacia y y y es adyacente desde x.

Un *camino (dirigido)* es una sucesión de vértices $(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ tal que $(x_i,x_{i+1}) \in F(D)$ para $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$. Si $x_1 = x_n$ el camino se llamará *camino cerrado*.

Un *ciclo (dirigido)* es un camino cerrado no trivial con todos los vértices distintos (excepto el primero y el último). Un *ciclo dirigido hamiltoniano* de una digráfica D es un ciclo dirigido que incluye todos los vértices de D.

Una *trayectoria (dirigida)* es un camino en el cual todos los vértices son distintos, la trayectoria $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ se dice que conecta a x_1 con x_n y la denotamos como x_1x_n-trayectoria.

Una *trayectoria exterior infinita* es una sucesión infinita $x_1,x_2,\ldots$ de vértices distintos de una digráfica D tal que $(x_i,x_{i+1}) \in F(D)$.

Una digráfica D es *completa* si, para cualesquiera dos vértices distintos u y v de D, al menos una de las flechas (u,v), (v,u) está en D.

Una digráfica D es *fuertemente conexa* si para cualesquiera dos vértices x,y de D existe una xy - trayectoria dirigida y una yx - trayectoria dirigida. A cada parte fuertemente conexa de D se le llama *componente fuertemente conexa.*

Una digráfica D es *hamiltoniana* si contiene un ciclo dirigido hamiltoniano.

Una digráfica H es *subdigráfica* de una digráfica D si:

i) $V(H) \subseteq V(D)$.

ii) $F(H) \subseteq F(D)$.

Una digráfica H es *subdigráfica inducida* de D si:

i) $V(H) \subseteq V(D)$.

ii) Si $u,v \in V(H)$ son tales que $(u,v) \in F(D)$, entonces $(u,v) \in F(H)$.

Si $H \subseteq V(D)$, $D[H]$ denota la subdigráfica de D inducida por H.

Una *subdigráfica generadora* de D es una subdigráfica de D cuyo conjunto de vértices es $V(D)$.

Sea D una digráfica:

i) Una flecha $(u,v) \in F(D)$ es *asimétrica* si $(v,u) \notin F(D)$.

ii) Una flecha $(u,v) \in F(D)$ es *simétrica* si $(v,u) \in F(D)$.

iii) *La parte asimétrica* de D, denotada por Asim(D), es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son las flechas asimétricas de D.

iv) *La parte simétrica* de D, denotada por Sim(D), es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son las flechas simétricas de D.

v) D es una *digráfica asimétrica* si Asim(D) = D

Un *Torneo* es una digráfica completa asimétrica.

Una digráfica D es *transitiva*, si (x,y), $(y,z) \in F(D)$ entonces $(x,z) \in F(D)$.

NUCLEOS EN DIGRAFICAS

Sea D una digráfica y $S \subseteq V(D)$.

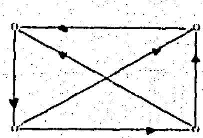
i) S es *independiente* si $\forall\ x,y \in S$ $(x,y) \notin F(D)$ y $(y,x) \notin F(D)$.

ii) S es *absorbente* si $\forall\ x \in (V(D) - S)$ $\exists\ y \in S$ tal que $(x,y) \in F(D)$.

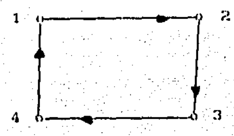
iii) S es un *núcleo* de D si S es independiente y absorbente.

Notemos que no toda digráfica posee núcleo y si una digráfica tiene núcleo no necesariamente éste es único.

Ejemplos:



Digráfica sin núcleo

D 

$S = \{1,3\}$ es núcleo de D.

$S_1 = \{2,4\}$ es otro núcleo de D.

Digráfica con 2 núcleos

Un *seminúcleo* de una digráfica D es un conjunto $S \subseteq V(D)$ tal que:

i) S es independiente.

ii) Si existe una Sz - flecha con $z \in (V(D) - S)$, entonces existe una zS - flecha en D.

Surgen dos preguntas apartir de la definición de seminúcleo:

1) ¿Todo núcleo es seminúcleo?

2) ¿Todo seminúcleo es núcleo?

Una digráfica D se llama:

i) Núcleo Perfecta **(NP)** cuando D y toda subdigráfica inducida de D tiene un núcleo.

ii) Núcleo Imperfecta Crítica **(NIC)** si D no tiene núcleo pero toda subdigráfica inducida estrictamente contenida en D tiene núcleo.

DIGRAFICAS COLOREADAS

Una digráfica D es m-coloreada si las flechas de D son coloreadas com m colores.

Una *trayectoria monocromática dirigida* de D es una trayectoria dirigida en la que todas sus flechas tienen asignado el mismo color.

Sea D una digráfica m-coloreada y $S \subseteq V(D)$.

i) S es *independiente por trayectorias monocromáticas* si para cualesquiera dos vértices $x, y \in S$ no existe una xy-trayectoria monocromática dirigida ni una yx-trayectoria monocromática dirigida.

ii) S es *absorbente por trayectorias monocromáticas* si $\forall\ x \in (V(D) - S)$, existe una trayectoria monocromática dirigida de x a un vértice de S.

iii) S es *núcleo por trayectorias monocromáticas* de D si S es independiente y absorbente por trayectorias monocromáticas.

C A P I T U L O I

TRAYECTORIAS MONOCROMATICAS EN UNA DIGRAFICA, CON RESPECTO A LA COLORACION DE ARISTAS

(B. Sands, N. Sauer y R. Woodrow, 1982) [1]

Sea D una digráfica cuyas aristas están coloreadas con dos colores. Una trayectoria monocromática dirigida de D es una trayectoria dirigida en la que todas sus aristas tienen asignado el mismo color. Probaremos que si D no contiene trayectorias monocromáticas exteriores infinitas, entonces existe un conjunto S de vértices de D independiente por trayectorias monocromáticas tal que para todo vértice x fuera de S, existe una trayectoria monocromática dirigida de x a un vértice de S, es decir, S es Núcleo por trayectorias monocromáticas de D.

Un caso especial del resultado anterior es que: Si las aristas de un torneo finito son coloreadas con dos colores, entonces existe un vértice v de T tal que para todo vértice x de T - $\{v\}$ existe una trayectoria monocromática de x a v. Es decir, $\{v\}$ es núcleo por trayectorias monocromáticas de T, una prueba directa de éste resultado está dada por R. B. Reid en [2].

Si las aristas de un torneo no son coloreadas o todas estan pintadas con el mismo color se llega a un resultado que dice: " Todo torneo finito T contiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de T existe una trayectoria dirigida de longitud a lo más dos de x a v.

Si en el caso especial se usan más de dos colores, el resultado es falso; pero si el torneo es transitivo el resultado sigue siendo verdadero, no importando cuantos colores sean usados.

El siguiente teorema es el resultado principal de nuestro capítulo.

Teorema: Sea D una digráfica cuyas aristas están coloreadas con dos colores y tal que D no contiene trayectorias monocromáticas exteriores infinitas. Entonces existe un conjunto S de vértices de D independiente por trayectorias monocromáticas tal que S es núcleo por trayectorias monocromáticas de D.

Demostración:

Para la demostración del Teorema se dará un orden entre los conjuntos independientes de vértices de D, después encontraremos un elemento maximal de dichos conjuntos, el elemento maximal encontrado es el conjunto que necesitamos para la demostración.

Supongamos que los dos colores con los que está coloreada la digráfica D son azul y rojo.

Tomemos S un conjunto de vértices de D independiente por trayectorias monocromáticas.

Notación: Sean x, y vértices de D.

$x \longrightarrow^{roja} y$ significa que existe una trayectoria dirigida de x a y con todas las aristas rojas. Si S es un conjunto de vértices independientes de D y $x \in V(D)$, $x \longrightarrow^{roja} S$ ($S \longrightarrow^{roja} x$) significa que $x \longrightarrow^{roja} \delta$ ($\delta \longrightarrow^{roja} x$) para algún $\delta \in S$.

Similarmente se define $x \xrightarrow{\text{azul}} y$ y $x \xrightarrow{\text{mono}} y$, éste significa que hay una trayectoria monocromática de x a y.

Definición: Sean S, T conjuntos independientes de vértices de D, $S \leq T$ si $\forall \triangle \in S \ \exists \ \ell \in T$ de manera que $\triangle = \ell$ o $\triangle \xrightarrow{\text{azul}} \ell$ y $\ell \not\xrightarrow{\text{azul}} \triangle$. En particular $S \subseteq T \Rightarrow S \leq T$.

Resultado: La colección de todos los conjuntos de vértices independientes de D están parcialmente ordenados por la relación $\leq$.

Demostración: Por demostrar:

1. $S \leq S'$ y $S' \leq S'' \Rightarrow S \leq S''$
2. $S \leq S'$ y $S' \leq S \Rightarrow S = S'$
3. $S \leq S \ \forall \ S$ en la colección de todos los conjuntos independientes de D.

1. Supongamos que $S \leq S'$ y $S' \leq S''$, por demostrar $S \leq S''$, es decir, p.d. $\forall \triangle \in S \ \exists \ \triangle'' \in S''$ tal que $\triangle = \triangle''$ o $\triangle \xrightarrow{\text{azul}} \triangle''$ y $\triangle'' \not\xrightarrow{\text{azul}} \triangle$.

Como $S \leq S' \Rightarrow \forall \triangle \in S \ \exists \ \triangle' \in S'$ tal que $\triangle = \triangle'$ o $\triangle \xrightarrow{\text{azul}} \triangle'$ y $\triangle' \not\xrightarrow{\text{azul}} \triangle$. $S' \leq S'' \Rightarrow \forall \triangle' \in S' \ \exists \ \triangle'' \in S''$ tal que $\triangle' = \triangle''$ o $\triangle' \xrightarrow{\text{azul}} \triangle''$ y $\triangle'' \not\xrightarrow{\text{azul}} \triangle'$.
Tomemos $\triangle \in S$, para dicha $\triangle$ existe $\triangle' \in S'$ tal que $\triangle = \triangle'$ o $\triangle \xrightarrow{\text{azul}} \triangle'$ y $\triangle' \not\xrightarrow{\text{azul}} \triangle$.

i) Si $\triangle = \triangle'$, por hipotesis $\exists \ \triangle'' \in S''$ tal que $\triangle' = \triangle''$ o $\triangle' \xrightarrow{\text{azul}} \triangle''$ y $\triangle'' \not\xrightarrow{\text{azul}} \triangle'$.

a) Si $\triangle' = \triangle''$ entonces $\triangle = \triangle''$.

b) Si $\delta' \xrightarrow{azul} \delta''$ y $\delta'' \not\xrightarrow{azul} \delta'$, entonces $\delta \xrightarrow{azul} \delta''$ y $\delta'' \not\xrightarrow{azul} \delta$ (ya que $\delta = \delta'$).

$\therefore$ Si $\delta = \delta' \Rightarrow \delta = \delta''$ ó $\delta \xrightarrow{azul} \delta''$ y $\delta'' \not\xrightarrow{azul} \delta$ p.a. $\delta'' \in S''$.

ii) Si $\delta \xrightarrow{azul} \delta'$ y $\delta' \not\xrightarrow{azul} \delta$ (tenemos 2 casos)

a) Si $\delta' = \delta''$, entonces $\delta \xrightarrow{azul} \delta''$ y $\delta'' \not\xrightarrow{azul} \delta$ p.a. $\delta'' \in S''$.

b) Si $\delta' \xrightarrow{azul} \delta''$ y $\delta'' \not\xrightarrow{azul} \delta'$, entonces $\delta \xrightarrow{azul} \delta' \xrightarrow{azul} \delta''$.

$\therefore$ $\delta \xrightarrow{azul} \delta''$ p.a. $\delta'' \in S''$ y $\delta'' \not\xrightarrow{azul} \delta$.

Supongamos $\delta'' \xrightarrow{azul} \delta$, como $\delta \xrightarrow{azul} \delta'$ tenemos $\delta'' \xrightarrow{azul} \delta'$ ∇_{0} (Ya que $\delta'' \not\xrightarrow{azul} \delta'$).

$\therefore$ $S \leq S''$.

2. Supongamos $S \leq S'$ y $S' \leq S$, por demostrar $S = S'$, es decir, p.d. $\forall\, \delta \in S\ \exists\, \delta' \in S'$ tal que $\delta = \delta'$.

Como $S \leq S' \Rightarrow \forall\, \delta \in S\ \exists\, \delta' \in S'$ tal que $\delta = \delta'$ o $\delta \xrightarrow{azul} \delta'$ y $\delta' \not\xrightarrow{azul} \delta$. $S' \leq S \Rightarrow \forall\, \delta' \in S'\ \exists\, \delta_0 \in S$ tal que $\delta' = \delta_0$ o $\delta' \xrightarrow{azul} \delta_0$ y $\delta_0 \not\xrightarrow{azul} \delta'$.

Tomemos $\delta \in S$, para dicha $\delta\ \exists\, \delta' \in S'$ tal que $\delta = \delta'$ o $\delta \xrightarrow{azul} \delta'$ y $\delta' \not\xrightarrow{azul} \delta$.

i) Si $\delta = \delta'$, entonces $\delta \in S'$.

ii) Si $\delta \xrightarrow{azul} \delta'$ y $\delta' \not\xrightarrow{azul} \delta$, por hipotesis para $\delta'\ \exists\, \delta_0 \in S$ tal que $\delta' = \delta_0$ o $\delta' \xrightarrow{azul} \delta_0$ y $\delta_0 \not\xrightarrow{azul} \delta'$.

a) Si $\delta' = \delta_0$, entonces $\delta \xrightarrow{azul} \delta_0$ ∇_{0} (Ya que S es independiente).

b) Si $s' \xrightarrow{azul} s_u$ y $s_u \not\xrightarrow{azul} s'$ tenemos $s \xrightarrow{azul} s_u$ $\forall_u$ (Ya que S es independiente).

$\therefore$ $s = s'$ y $s \in S'$ $\forall$ $s \in S$.

Análogamente $s' \in S$ $\forall$ $s' \in S'$.

$\therefore$ $S = S'$

3. $\forall$ $s \in S$ $\exists$ $s' \in S$ tal que $s = s'$

$\therefore$ $S \leq S$.

$\therefore$ La colección de todos los conjuntos de vértices independientes de D están parcialmente ordenados.

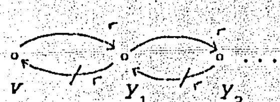
Definición: Definimos $\mathcal{L}$ como la familia de todos los conjuntos S no vacíos de vértices independientes de D tales que si $S \xrightarrow{roja} y$ entonces $y \xrightarrow{mono} S$ $\forall$ $y \in V(D)$.

$\mathcal{L} = \{S \subseteq V(D),\ S \text{ indep. } /\ \text{si } \exists\ S \xrightarrow{roja} y \text{ entonces } y \xrightarrow{mono} S,\ \forall\ y \in V(D) - S\}$.

Tenemos que $\mathcal{L}$ es no vacía, ya que existe un vértice v tal que si $v \xrightarrow{roja} y$ entonces $y \xrightarrow{roja} v$ $\forall$ y, y por lo tanto $\{v\} \in \mathcal{L}$.

Demostración por reducción al absurdo:

Supongamos $\forall$ $v \in V(D)$ $\exists$ y tal que $v \xrightarrow{roja} y$, $y \not\xrightarrow{roja} v$



Se crea una trayectoria monocromática exterior infinita $\forall_u$

$\therefore$ existe y_n para el cual $y_n \xrightarrow{roja} v$

$\therefore$ $\mathcal{L} \neq \varnothing$.

Para la demostración del teorema se usará el hecho de que

$(\mathcal{L},\leq)$ tiene elementos maximales, cuya demostración se presenta a continuación.

Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $(\mathcal{L},\leq)$ arbitraria y definamos al conjunto S^{∞} como sigue:

$$S^{\infty}=\{s \in \cup\, \mathcal{C} \;/\; \exists\, S \in \mathcal{C} \text{ de modo que } s \in T,\ \forall\, T \in \mathcal{C} \text{ y } S \leq T\}$$

Tenemos que S^{∞} consta de los vértices de D que pertenecen a todo elemento de $\mathcal{C}$, apartir de un cierto S.

Queremos demostrar que S^{∞} es cota superior de $\mathcal{C}$.

1º Veremos que $S^{\infty} \neq \emptyset$ y $S \leq S^{\infty}$.

Sea $S \in \mathcal{C}$ arbitrario y $s \in S$, si $s \notin S^{\infty}$, entonces existe $S_1 \in \mathcal{C}$ tal que $S_1 \geq S$ y $s \notin S_1$.

Como $S \leq S_1$, para s existe un s_1 tal que $s = s_1$ o $s \xrightarrow{azul} s_1$ y $s_1 \not\xrightarrow{azul} s$ (Por def. $\leq$).

$s \neq s_1$ (Ya que $s \notin S_1$ y $s_1 \in S_1$).

$\therefore\ s \xrightarrow{azul} s_1$ y $s_1 \not\xrightarrow{azul} s$. Ahora tomemos a s_1, si $s_1 \notin S^{\infty}$ tenemos que existe $S_2 \in \mathcal{C}$ tal que $S_2 \geq S_1$ y $s_1 \notin S_2$.

Como $S_1 \leq S_2$, para s_1 existe un s_2 tal que $s_1 = s_2$ o $s_1 \xrightarrow{azul} s_2$ y $s_2 \not\xrightarrow{azul} s_1$ (pero $s_1 \neq s_2$), de lo anterior podemos deducir que $s \xrightarrow{azul} s_2$ y $s_2 \not\xrightarrow{azul} s$. (Si $s_2 \xrightarrow{azul} s$ y ya que $s_1 \xrightarrow{azul} s_2$ se tiene $s_1 \xrightarrow{azul} s$ ∇ ya que $S \leq S_1$).

Si $s_2 \notin S^{\infty}$, aplicamos el procedimiento anterior, pero la suseción $s \xrightarrow{azul} s_1 \xrightarrow{azul} s_2 \longrightarrow \ldots$ por hipótesis no puede ser infinita, así es que en determinado momento se repite algún s_i o el procedimiento termina. Si se repite un s_i entonces habría un camino de regreso ∇_{o}. Por lo que existe un $s_n \in S^{\infty}$ tal que $s \xrightarrow{azul} s_n$ y $s_n \not\xrightarrow{azul} s$.

$\therefore \quad S^{\infty} \neq \emptyset$

Como s era arbitrario, dada $s \in S \; \exists \; s_n \in S^{\infty}$ tal que $s \xrightarrow{azul} s_n$ y $s_n \not\xrightarrow{azul} s$ o si $s \in S^{\infty}$, $s = s_n$.

$\therefore \quad S^{\infty} \geq S$. Como S era también arbitrario $S^{\infty} \geq S$, $\forall\, S \in \mathcal{C}$.

Ahora demostraremos que S^{∞} es independiente por trayectorias monocromáticas.

Sean $s, t \in S^{\infty}$, por demostrar $s \not\longrightarrow t$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $S, T \in \mathcal{C}$ son tales que $s \in S$, $t \in T$ y $S \leq T \Rightarrow s \in T$ por definición de S^{∞} y por lo tanto $s \not\xrightarrow{mono} t$ ya que T es independiente.

$\therefore \quad S^{\infty}$ es independiente por trayectorias monocromáticas.

Por último demostraremos que $S^{\infty} \in \mathcal{L}$. Por demostrar que si $S^{\infty} \xrightarrow{roja} y$ entonces $y \xrightarrow{mono} S^{\infty}$ $\forall\, y \in D$.

Supongamos $S^{\infty} \xrightarrow{roja} y$ y sea s una de las $s \in S^{\infty}$ tal que $s \xrightarrow{roja} y$. Como $s \in S^{\infty}$, existe $S \in \mathcal{C}$ tal que $s \in S$. Como $S \in \mathcal{L}$, si $S \xrightarrow{roja} y$ entonces $y \xrightarrow{mono} S$ $\forall\, y \in D$.

Supongamos $y \xrightarrow{mono} t$, $t \in S$, entonces $y \xrightarrow{roja} t$ o $y \xrightarrow{azul} t$.

i) Si $y \xrightarrow{roja} t$, entonces $s \xrightarrow{roja} t$ ∇_{o} (Ya que S es independiente).

$\therefore\ y \xrightarrow{}^{azul} t,\ t \in S.$

El vértice $t \in S$, pero no necesariamente $t \in S^{\infty}$; supongamos que $t \notin S^{\infty}$, como $S \leq S^{\infty}$ entonces para t existe $t^{\infty} \in S^{\infty}$ tal que $t = t^{\infty}$ o $t \longrightarrow^{azul} t^{\infty}$ y $t^{\infty} \not\longrightarrow^{azul} t$. Pero como $t \notin S^{\infty}$, entonces $t \neq t^{\infty}$.

$\therefore\ t \longrightarrow^{azul} t^{\infty}$ y $t^{\infty} \not\longrightarrow^{azul} t$, de aquí se sigue que $y \longrightarrow^{azul} t^{\infty}$, $t^{\infty} \in S^{\infty}$.

Se concluye que si $S^{\infty} \longrightarrow^{roja} y$ entonces $y \longrightarrow^{mono} S^{\infty}$, $\forall\ y \in V(D)$.

$\therefore\ S^{\infty} \in \mathcal{L}$.

Por lo tanto se tiene que toda cadena en $\mathcal{L}$ tiene una cota superior en $\mathcal{L}$ y entonces por el Lema de Zorn $(\mathcal{L},\leq)$ contiene elementos maximales.

Demostración del Teorema:

Sea S un elemento maximal de $(\mathcal{L},\leq)$, por ser S elemento de $\mathcal{L}$ se tiene que S es independiente. Supongamos que existe al menos un vértice $y \notin S$ tal que $y \not\longrightarrow^{mono} S$.

Sea $X = \{y \;/\; y \not\longrightarrow^{mono} S,\ y \notin S\}$ y sea $x \in X$ de modo que si $x \longrightarrow^{roja} y$ entonces $y \longrightarrow^{roja} x$, $\forall\ y \in X$.

En X existe un elemento x tal que si $x \longrightarrow^{roja} y$ entonces $y \longrightarrow^{roja} x$, $\forall\ y \in X$. Si suponemos que ninguna $x \in X$ cumple esta condición se llegaría a formar una trayectoria monocromática exterior infinita, lo que nos llevaría a una contradicción.

Así, sea $x \notin S$ tal que $x \not\xrightarrow{\text{mono}} S$ y tal que si $x \xrightarrow{\text{roja}} y$ entonces $y \xrightarrow{\text{roja}} x$, $\forall\, y \in X$.

La demostración del teorema consiste de encontrar un vértice $y \notin S$, $y \in X$ tal que $x \xrightarrow{\text{roja}} y$ pero $y \not\xrightarrow{\text{roja}} x$.

Observación: Como $S \in \mathcal{L}$ y $x \not\xrightarrow{\text{mono}} S$ entonces $S \not\xrightarrow{\text{roja}} x$.

Sea $T = \{ t \in S \mid t \not\xrightarrow{\text{azul}} x \}$

Si $T \neq S$, entonces $S - T \xrightarrow{\text{azul}} x$, $\forall\, s \in S - T$.
Afirmación: $T \cup \{x\}$ es independiente y $T \cup \{x\} > S$.

Como estamos suponiendo que $x \not\xrightarrow{\text{mono}} S$, en particular estamos suponiendo $x \not\xrightarrow{\text{mono}} T$. Por otro lado como $S \not\xrightarrow{\text{roja}} x$, en particular tenemos que $T \not\xrightarrow{\text{roja}} x$, además elejimos a T de manera que $T \not\xrightarrow{\text{azul}} x$. Por lo tanto como $x \not\xrightarrow{\text{mono}} T$ y $T \not\xrightarrow{\text{mono}} x$ y además T es independiente entonces $T \cup \{x\}$ es independiente.

Por demostrar: $S < T \cup \{x\}$.

i) Si $s \in T$, existe $t \in T$ tal que $s = t$.
ii) Si $s \in S - T$ existe x tal que $s \xrightarrow{\text{azul}} x$ y $x \not\xrightarrow{\text{azul}} s$.
(Si $x \xrightarrow{\text{azul}} s$ entonces $x \xrightarrow{\text{mono}} S$ ∇)

Como $x \not\xrightarrow{\text{mono}} S$ entonces $x \not\xrightarrow{\text{azul}} s$ $\forall\, s \in S$.
$\therefore$ $S < T \cup \{x\}$.

Ya que S es maximal, entonces existe $y \in V(D)$ tal que $(T \cup \{x\} \xrightarrow{\text{roja}} y)$ y $(y \xrightarrow{\text{mono}} T \cup \{x\})$ ...(*)

Obsérvese que $y \notin S$.

Supongamos que $y \in S$ entonces $T \cup \{x\} \xrightarrow{\text{roja}} S$, pero $T \not\xrightarrow{\text{roja}} S$ ya que $T \subseteq S$ y S es independiente y además $x \not\xrightarrow{\text{mono}} S$, en particular $x \not\xrightarrow{\text{roja}} S$.

$\therefore \ y \notin S$.

Ahora analizaremos $T \cup \{x\} \xrightarrow{\text{roja}} y$ para demostrar que $x \xrightarrow{\text{roja}} y$.

Tenemos que $T \cup \{x\} \xrightarrow{\text{roja}} y$ para algún $y \in V(D)$. Supongamos que $T \xrightarrow{\text{roja}} y$, entonces $S \xrightarrow{\text{roja}} y$, como $S \in \mathcal{L}$ si $S \xrightarrow{\text{roja}} y$ entonces $y \xrightarrow{\text{mono}} S$ pero por (*) $y \not\xrightarrow{\text{mono}} T$.

$\therefore \ y \xrightarrow{\text{mono}} S - T$.

i) Si $y \xrightarrow{\text{roja}} S - T$ y como estamos suponiendo $T \xrightarrow{\text{roja}} y$ entonces $T \xrightarrow{\text{roja}} S - T$ $\underset{o}{\nabla}$ (Ya que S es independiente).

$\therefore \ y \not\xrightarrow{\text{roja}} S - T$.

ii) Si $y \xrightarrow{\text{azul}} S - T$ y como sabemos que $S - T \xrightarrow{\text{azul}} x$ entonces $y \xrightarrow{\text{azul}} x$, pero por (*) $y \not\xrightarrow{\text{mono}} T \cup \{x\}$ llegamos a una $\underset{o}{\nabla}$.

$\therefore \ y \not\xrightarrow{\text{azul}} S - T$.

De *i*) y *ii*) tenemos $y \not\xrightarrow{\text{mono}} S - T$

$\therefore \ T \not\xrightarrow{\text{roja}} y$ $\qquad\qquad \therefore \ x \xrightarrow{\text{roja}} y$ ...(**)

Ahora demostraremos $y \not\xrightarrow{\text{mono}} S$. (es decir, $y \in X$).

i) Supongamos que $y \xrightarrow{\text{roja}} S$, como $x \xrightarrow{\text{roja}} y$ tenemos que $x \xrightarrow{\text{roja}} S$ $\underset{o}{\nabla}$ (Ya que habíamos supuesto que $x \not\xrightarrow{\text{mono}} S$).

$\therefore \ y \not\xrightarrow{\text{roja}} S$.

ii) Supongamos que $y \longrightarrow^{azul} S$ y teníamos por (*) que $y \not\longrightarrow^{azul} T$, por lo que si $y \longrightarrow^{azul} S$ entonces $y \longrightarrow^{azul} S - T$ pero $S - T \longrightarrow^{azul} x$. Por lo tanto $y \longrightarrow^{azul} x$, pero por (*) $y \not\longrightarrow^{mono} x$.

$\therefore \; y \not\longrightarrow^{azul} S$

$\therefore \; y \not\longrightarrow^{mono} S$ ... (***) $\qquad \therefore \; y \in X$.

Tenemos $y \not\longrightarrow^{mono} S$, $y \notin S$ y además $x \longrightarrow^{roja} y$, pero por (*) $y \not\longrightarrow^{mono} x$. ∇

$\therefore$ S satisface las condiciones del teorema.

■

El siguiente corolario es un caso especial del teorema anterior.

Corolario 1: Sea T un torneo finito cuyas flechas están coloreadas con dos colores. Entonces T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración:
Como T es un torneo finito, se tiene que T no contiene trayectorias monocromáticas exteriores infinitas y por el teorema anterior existe un conjunto independiente S de vértices de T tal que S es núcleo por trayectorias monocromáticas de T.
Como T es un torneo se tiene que S consta de un sólo vértice.

■

A continuación se presenta una prueba directa del corolario 1 presentada por K. B. Reid en [2].

Demostración: Por inducción / $|V(T)| = n$

1) Para $n = 1$ y $n = 2$ es claro
2) Supongamos que el resultado es válido para un torneo de orden menor que n, donde $n > 2$.
3) Por demostrar que se cumple para todo torneo 2-coloreado de orden n.

Sea w cualquier vértice de una 2-coloración de las flechas de un n-torneo T. Por la hipótesis de inducción existe un vértice v en $T - w$ tal que para cualquier otro vértice x en $T - w$, existe una trayectoria monocromática de x a v.

Como T es un torneo, entonces $(w,v) \in F(T)$ o $(v,w) \in F(T)$.

i) Si $(w,v) \in F(T)$ ya acabamos.
ii) Sup. $(v,w) \in F(T)$ y sin pérdida de generalidad supongamos que la flecha (v,w) es de color 1.

Para cualquier vértice x en T definimos:

$V_i(x) = \{y \,/\, y \in V(T)$ y T contiene una trayectoria de y a x, en la cual cada flecha es de color i$\}$, donde $i = 1,2$.

Por la elección de v, $V(T) = V_1(v) \cup V_2(v) \cup \{v,w\}$.

Definimos:

$B = \{y \,/\, y \in V_2(v) - V_1(v)$ y o $(y,w) \in F(T)$ es de color 2 o $(w,y) \in F(T)\}$.

Si $B = \emptyset$, entonces w es alcanzado por cualquier otro vértice vía una trayectoria en la cual cada flecha es de color 1, así que el resultado se cumple para T.

Supongamos que $B \neq \emptyset$. Nótese que si $y \in B$ entonces $(y,w) \in F(T)$ es de color 2 o $(w,y) \in F(T)$; si $(w,y) \in F(T)$ sin perdida de generalidad supongamos que la flecha (w,y) es de color 1 (en el otro caso, existe una trayectoria de w a v de color 2 con flecha inicial (w,y), así que el vértice v satisface las condiciones del corolario).

Por la hipótesis de inducción el subtorneo de T con vértices el conjunto B contiene un vértice v_0 el cual es alcanzado por cualquier otro vértice en B vía una trayectoria monocromática incluyendo solo vértices en B.

Notación:

$O_T(x) = \{y \in V(T) \ / \ (x,y) \in F(T)\}$

$I_T(x) = \{y \in V(T) \ / \ (y,x) \in F(T)\}$

Si $v_0 \in V_2(v) \cap O_T(w)$, puesto que (w,v_0) y (v,w) son de color 1, se sigue que:

$$V_1(v) \cup \{v,w\} \subseteq V_1(v_0)$$

Por la definición de B se tiene:

Cada flecha que va desde $V_2(v) - B$ a w es de color 1, si $v_0 \in V_2(v) \cap O_T(w)$, entonces:

$$V_2(v) - B \subseteq V_1(v_0)$$

Por las anteriores tres observaciones, si $v_0 \in V_2(v) \cap O_T(w)$, entonces:

$(B - \{v_0\}) \cup (V_1(v) \cup \{w, v\}) \cup (V_2(v) - B) \subseteq V_1(v_0) \cup V_2(v_0)$,
o
$V(T) - \{v_0\} \subseteq V_1(v_0) \cup V_2(v_0)$,

Así que v_0 satisface las condiciones del corolario.

Ahora supongamos $v_0 \notin V_2(v) \cap O_T(w)$, es decir, supongamos $v_0 \in V_2(v) \cap I_T(w)$.

Si algún vértice $x_0 \in V_2(v) \cap O_T(w)$ (de aquí en B) puede alcanzar a v_0 vía una trayectoria donde cada flecha es de color 1, entonces:

$$V_1(v) \cup \{v, w\} \cup (V_2(v) - B) \subseteq V_1(x_0)$$

así que,
$V_1(v) \cup \{v, w\} \cup (V_2(v) - B) \subseteq V_1(v_0)$

Entonces por la elección de v_0 en B,

$V(T) - \{v_0\} \subseteq V_1(v_0) \cup V_2(v_0)$

Así que v_0 satisface las condiciones del corolario.Supongamos que no existe tal x_0;

supongamos que:
$$V_2(v) \cap O_T(w) \subseteq V_2(v_0)$$

Ya que la flecha (v_0, w) es de color 2, $V_2(v_0) \subseteq V_2(w) - \{w\}$, así que $V_2(v) \cap O_T(w) \subseteq V_2(w) - \{w\}$. Como la flecha (v, w) es de color 1, $V_1(v) \cup \{v\} \subseteq V_1(w)$. Y
$(V(T) - \{w\}) - (V_2(v) \cap O_T(w)) \cup (V_1(v) \cup \{v\}) \subseteq I_T(w)$.

Así,

$V(T) - \{w\} \subseteq V_1(w) \cup V_2(w)$,

y w satisface las condiciones del corolario.

■

Si las aristas del torneo no son coloreadas (o todas están pintadas con el mismo color), entonces llegamos a un resultado que es bien conocido y que dice:

Resultado: Todo torneo finito T contiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice $x \in T$ existe una trayectoria dirigida de longitud a lo más dos de x a v.

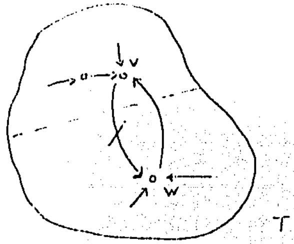
Demostración: Por inducción / $|V(T)| = n$

1) Para n = 1 y n = 2 es claro.
2) Supongamos que el resultado es válido para todo torneo de orden menor que n.
3) Por demostrar que se cumple para todo torneo T de orden n.

Sea w cualquier vértice de T,

$N^-(w) = \{y \in F(T) \ / \ (y,w) \in F(T)\}$

Por la hipótesis de inducción existe un vértice $v \in T - (\{w\} \cup N^-(w))$ tal que para cualquier otro vértice x de $T - (\{w\} \cup N^-(w))$ existe una trayectoria de longitud a lo más dos de x a v.



Como T es un torneo, entonces $(v,w) \in F(T)$ o $(w,v) \in F(T)$.

i) Si $(w,v) \in F(T)$ ya acabamos.

ii) Si $(v,w) \in F(T)$, entonces $v \in N^-(w)$ $\underset{\shortparallel}{\nabla}$ (Ya que $v \in T - (\{w\} \cup N^-(w))$)

$\therefore$ el vértice v satisface las condiciones del corolario.

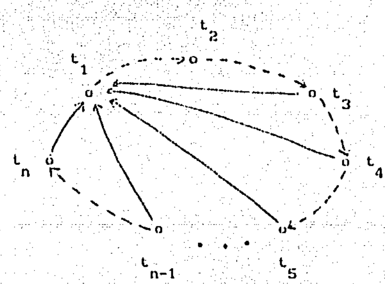
■

Por otra parte tal límite en la longitud de las trayectorias anteriores, no se puede dar en el corolario 1. Por ejemplo:

Consideremos un torneo T con vértices $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ y cuyas flechas son coloreadas como sigue:

(t_i, t_{i+1}) con color rojo para $1 \le i \le n - 1$

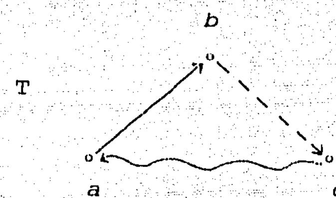
(t_j, t_i) con color azul para $j > i + 1$



De acuerdo a como se ha hecho la coloración de las flechas de T, se observa en la fig. que t_n es el único vértice que satisface la conclusión del corolario 1; además la única trayectoria monocromática dirigida de t_1 a t_n pasa por todos los otros vértices del torneo.

Ahora, si usamos más de dos colores el corolario es falso. A continuación presentamos un contraejemplo:

Sea T un torneo con tres vértices $\{a, b, c\}$ y con las siguientes flechas: (a,b), (b,c) y (c,a), todas pintadas de un color diferente (en el siguiente capítulo llamaremos a éste torneo " C_3 ").



Apartir de éste contraejemplo, podemos construir una gran cantidad, solo basta con agregar vértices al torneo T de tal manera que las flechas de los nuevos vértices vayan hacia a, b y c.

Ahora consideremos el siguiente torneo:

Sea T' un torneo con $V(T') = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}$ y con la siguiente coloración:

(a_1,a_2), (b_1,b_2), (c_1,c_2) con color rojo

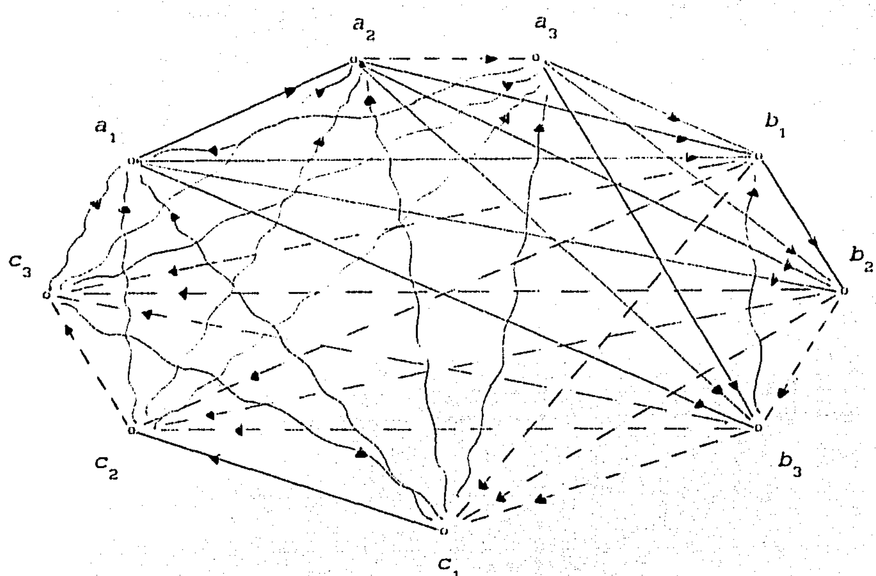
(a_2,a_3), (b_2,b_3), (c_2,c_3) con color azul

(a_3, a_1), (b_3, b_1), (c_3, c_1) con color verde

(a_i, b_j) con color rojo $\forall\ i, j$

(b_i, c_j) con color azul $\forall\ i, j$

(c_i, a_j) con color verde $\forall\ i, j$



T' no tiene ningún vértice que absorba a los demás.

T' es un torneo cuyas flechas están coloreadas con tres colores y en el cual no hay una pareja de vértices que satisfaga la conclusión de el corolario. Más precisamente, no existe un conjunto S que contenga exactamente dos vértices tal que para cualquier otro vértice v de T', exista una trayectoria monocromática de v a un vértice de S.

Por ejemplo, sea $S = \{a_1, b_2\}$

Tenemos que: hay una tray. monocromática de a_2 a b_2

" " " " " a_3 a b_2

" " " " " b_1 a b_2

" " " " " c_1 a a_1

" " " " " c_2 a a_1

" " " " " c_3 a a_1

Pero, no existe una trayectoria monocromática de b_3 hacia a_1 o hacia b_2 por lo tanto S no funciona. Y lo mismo pasará para cualquier conjunto S que tomemos.

La siguiente pregunta (que formuló Erdös) aún sigue abierta.

Problema: Para cada η, habrá un (mínimo) entero positivo $f(\eta)$ de modo que todo torneo finito cuyas flechas están coloreadas con η colores contenga un conjunto S de $f(\eta)$ vértices con la propiedad que para cualquier vértice v fuera de S, exista una trayectoria monocromática de v a un vértice de S? En particular, es $f(3) = 3$?

En el caso del corolario 1, tenemos que $f(2) = 1$

Ahora, bajo ciertas circunstancias el corolario puede aún ser valedero para torneos cuyas aristas están coloreádas con tres colores. Por ejemplo, si el torneo es transitivo (es decir aciclico), el corolario es verdadero, no importando cuantos colores son usados (como se verá en el siguiente capítulo). El siguiente teorema nos da un ejemplo menos trivial.

Teorema 2: Sea T un torneo cuyas flechas son coloreadas con 3 colores y cuyos vértices son distribuidos en distintos bloques tal que:

i) Dos vértices en diferente bloque están siempre conectados por una flecha roja.

ii) Dos vértices en el mismo bloque están siempre conectados por una flecha azul o verde.

Entonces T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración: Sean B_1, B_2, B_3, ... , B_n los bloques de T. Primero definiremos un orden parcial en T que consiste simplemente de un orden lineal en cada bloque. El orden en cada bloque B_i esta determinado como sigue: Las flechas de B_i son 2-coloreadas (por *ii*), así que por el corolario 1 existe un vértice en B_i, llamemoslo v_1, tal que para cualquier otro vértice $x \in B_i$ hay una trayectoria monocromática de x a v_1 ($x \xrightarrow{mono} v_1$). Ahora, tenemos que $B_i - \{v_1\}$ sigue siendo un torneo cuyas flechas son 2-coloreadas, así que por el corolario 1 existe un vértice en $B_i - \{v_1\}$, llamemoslo v_2, tal que $x \xrightarrow{mono} v_2$ para todo $x \in B_i - \{v_1, v_2\}$. Como vamos a definir un orden lineal en B_i, hagamos $v_2 < v_1$. Si continuamos con éste proceso, estamos construyendo un orden lineal en cada B_i tal que si v y w son vértices de B_i con $v < w$, entonces existe una trayectoria monocromática en B_i de v a w.

Para x y v vértices de T vamos a escribir $x \xrightarrow{m} v$ si:

i) x y v están en diferentes bloques de T y $x \xrightarrow{roja} v$,

ii) x y v están en el mismo bloque de T y $x < v$, *iii)* x y v están en el mismo bloque de T, $v < x$ y $x \xrightarrow{roja} v$. (e.d. $x \xrightarrow{roja} v$ por una trayectoria exterior a B_1).

Nota: Si $x \xrightarrow{m} v$ entonces $x \xrightarrow{mono} v$, pero el inverso no necesariamente es verdadero.

Para cada vértice v de T, definimos:
$N(v)$ = Número de vértices $x \in T$, para el cual $x \xrightarrow{m} v$.

Escojamos un vértice v para el cual $N(v)$ sea tan grande como sea posible, supongamos sin pérdida de generalidad que $v \in B_1$. Demostraremos que v satisface las condiciones del Teorema.

Si suponemos que v no satisface las condiciones del Teorema, entonces existe un vértice w tal que $w \xrightarrow{mono} v$.

i) Si $w \notin B_1$, entonces $v \xrightarrow{roja} w$
(vía una simple flecha) y además
$x \xrightarrow{roja} w$, $\forall\ x \in V(T)$ tal que
$x \xrightarrow{roja} v$.

Por lo anterior y ya que $N(w) \le N(v)$ por la elección de v, debe existir un $v' \in B_1$ tal que $v' < v$ $(v' \xrightarrow{m} v)$ y $v' \xrightarrow{roja} w$.

Podemos escoger v' de modo que $v'' \xrightarrow{roja} w$ $\forall$ $v'' \in B_1$ que satisfaga $v' < v'' < v$. Como $v' \xrightarrow{roja} w$ entonces $w \xrightarrow{roja} v'$. Pero ahora $v \xrightarrow{roja} v'$ y $x \xrightarrow{roja} v'$, $\forall$ $x \in V(T)$ tal que: $x \xrightarrow{roja} v$.

También para toda $v'' \in B_1$ que satisface $v' < v'' < v$ tenemos $v'' \xrightarrow{} {}^{roja} w$; además $w \xrightarrow{} {}^{roja} v'$, así pues se tiene $v'' \xrightarrow{} {}^{roja} v'$. De aquí se sigue que $N(v') > N(v)$ ∇ (Por la elección de v).

$\therefore$ $w \xrightarrow{} {}^{mono} v$ $\forall$ $w \notin B_1$.

ii) Sup. $w \in B_1$ con $v \neq w$

Como $w \xrightarrow{} {}^{mono} v$, entonces $v < w$ (así $v \xrightarrow{} {}^{m} w$).

Tenemos que $\forall$ $x \notin B_1$, se tiene $x \xrightarrow{} {}^{roja} v$ y además como $w \xrightarrow{} {}^{roja} v$, $w \xrightarrow{} {}^{roja} x$ (si $w \xrightarrow{} {}^{roja} x$, $w \xrightarrow{} {}^{roja} v$ ∇). Por lo tanto $x \xrightarrow{} {}^{roja} w$ $\forall$ $x \notin B_1$. Ya que $N(w) < N(v)$ por la elección de v, debe existir un vértice $u \in B_1$ tal que $u \xrightarrow{} {}^{m} v$ $(u < v)$ y $u \xrightarrow{} {}^{m} w$, de aquí se sigue que $w < u$ y además $u \xrightarrow{} {}^{roja} v$. Si $u \xrightarrow{} {}^{roja} v$ existe una uv-trayectoria roja que no tiene flechas en B_1, entonces debe existir un vértice $x \notin B_1$ tal que $u \xrightarrow{} {}^{roja} x$. Pero como $x \xrightarrow{} {}^{roja} w$ $\forall$ $x \notin B_1$, entonces se tiene $u \xrightarrow{} {}^{roja} w$ ∇ (Ya que $u \xrightarrow{} {}^{m} w$).

$\therefore$ v es el vértice que satisface las condiciones del Teorema.

■

Hay que notar que ningún torneo de la clase descrita en el Teorema 2 puede contener ciclos de orden 3 cuyas flechas sean coloreadas con 3 colores distintos (C_3).

Sands, Sauer y Woodrow plantearon el siguiente problema:

Problema: Sea T un torneo cuyas flechas son coloreadas con 3 colores y el cual no contiene C_3. Entonces ¿T tiene un vértice v tal que para todo vértice x de $T - \{v\}$ existe una trayectoria monocromática de x a v?

En el siguiente capítulo Shen Minggang dá una aproximación al problema.

C A P I T U L O   I I

TRAYECTORIAS MONOCROMATICAS EN TORNEOS m-COLOREADOS

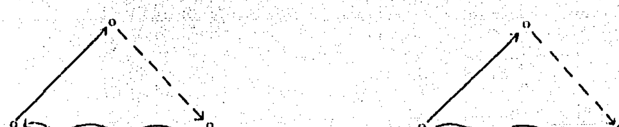
(Shen Minggang) [3]

Llamaremos al torneo T un torneo m-coloreado si las aristas de T son coloreadas con m colores. En éste capítulo probaremos que si T es un torneo m-coloreado el cual no contiene torneos de orden 3 cuyos arcos son coloreados con 3 colores distintos, entonces existe un vértice v de T tal que para todo vértice x de T - $\{v\}$ hay una trayectoria monocromática de x a v.

Denotaremos por:

T_3 al torneo transitivo de orden 3 cuyos arcos son coloreados con 3 colores distintos.

C_3 al ciclo de longitud 3 cuyos arcos son coloreados con 3 colores distintos.



C_3 T_3

En [1] Sands, Sauer y Woodrow probarón que todo torneo T 2-coloreado tiene un vértice v tal que para todo vértice x de

$T - \{v\}$ existe una trayectoria monocromática de x a v.

Ellos también plantearón el siguiente problema:

Problema: Sea T un torneo 3-coloreado que no contiene C_3. ¿T tiene un vértice v tal que para todo vértice x de $T - \{v\}$ existe una trayectoria monocromática de x a v?

Si en el problema permitimos que T no contenga T_3 ni C_3, la respuesta es si.

El siguiente Teorema es el resultado principal del capítulo.

Teorema: Sea T un torneo m-coloreado que no contiene T_3 ni C_3. Entonces existe un vértice v de T tal que para todo vértice x de $T - \{v\}$ hay una trayectoria monocromática de x a v.

Demostración: Por inducción / $|V(T)| = n$.

1) Para $n = 1$ y $n = 2$ es claro.
2) Supongamos que el resultado es verdadero para todo torneo m-coloreado de orden menor que n.
3) Por demostrar que se cumple para todo torneo m-coloreado de orden n.

Sea T un torneo m-coloreado de orden n.
Definamos $f: V(T) \longrightarrow V(T)$ de manera que para cada vértice v de T hay un vértice, llamado $f(v)$ de T tal que para cada vértice x de $T - \{v\}$ hay una trayectoria monocromática de x a $f(v)$.

i) Si para algún v hay una trayectoria monocromática de v a $f(v)$, entonces ya acabamos, porque hay un vértice $f(v)$ de T tal que para cualquier otro vértice x de T hay una trayectoria monocromática de x a $f(v)$.

ii) Si hay $f(u) = f(v)$, $u \neq v$, entonces también ya acabamos, porque tenemos que para v hay un $f(v)$ de T tal que para todo $u \in T - \{v\}$ hay una trayectoria monocromática de u a $f(v)$ y también para u hay un $f(u)$ de T tal que para cualquier otro vértice v de $T - \{u\}$ hay una trayectoria monocromática de v a $f(u)$, pero como $f(u) = f(v)$ y para u ya había una trayectoria monocromática de u a $f(v)$ entonces hemos encontrado un $f(v)$ de T tal que para cualquier otro vértice x de T hay una trayectoria monocromática de x a $f(v)$.

Ahora supongamos que no se cumple *i*) y *ii*), es decir supongamos que no hay trayectoria monocromática de v a $f(v)$ y además que f es biyectiva.

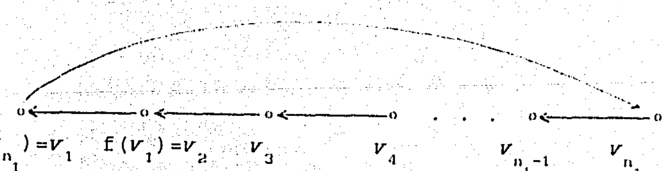
Como estamos suponiendo que f es biyección, vamos a reetiquetar los vértices de T de modo que para v_i buscamos su $f(v_i) = v_{i+1}$. Tenemos que por la reetiquetación $f(v_i) = v_{i+1}$, los vértices de T son repartidos en ciclos:

$(v_1, v_2, \ldots, v_{n_1}), (v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \ldots, v_{n_2}), \ldots$

donde:

$$f(v_1) = v_2,\ f(v_2) = v_3, \ldots, f(v_{n_1}) = v_1,$$

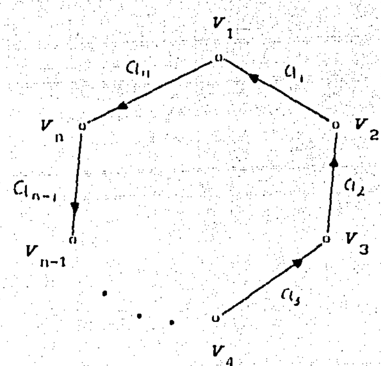
$$f(v_{n_1+1}) = v_{n_1+2},\ f(v_{n_1+2}) = f(v_{n_1+3}, \ldots, f(v_{n_2}) = v_{n_1+1}$$



Tenemos dos casos:

i) Si hay más de un ciclo, entonces por la hipótesis de inducción hay un vértice $v \in \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_1}\}$ tal que para cualquier otro vértice $x \in \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_1}\}$ hay una trayectoria monocromática de x a v $\underset{0}{\nabla}$ Ya que $v = f(w)$ para algún $w \in \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_1}\}$.

ii) supongamos que hay justamente un ciclo $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Ya que no hay trayectoria monocromática de v_i a v_{i+1}, esto nos implica que en el ciclo los arcos son de la forma (v_2, v_1), $(v_3, v_2), \ldots, (v_n, v_{n-1})$, (v_1, v_n).



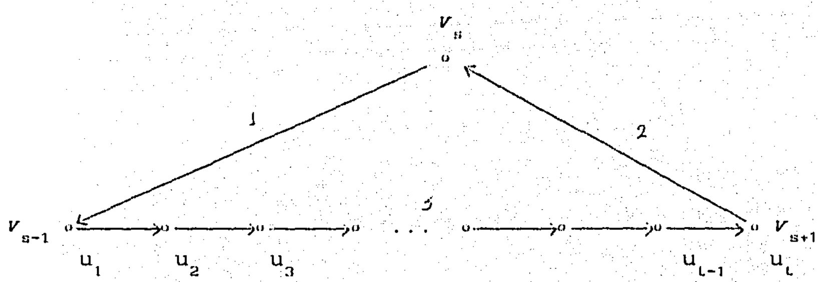
Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ la coloración respectiva de cada arco. Si $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1}$ entonces v_n lo podemos extender a v_1 vía una trayectoria monocromática $v_n\ v_{n-1} \ldots\ v_1$ con color a_1 $\underset{0}{\nabla}$ ya que habíamos supuesto que no había trayectoria monocromática de v a $f(v)$. Por lo tanto $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ no pueden ser iguales, entonces deben existir a_{s-1} y a_s tal que $a_{s-1} \neq a_s$. Sin pérdida de generalidad supongamos que a a_{s-1}

le damos el color 1 y a a_s le damos el color 2. Tenemos que hay una trayectoria monocromática de v_{s-1} a v_{s+1} con determinado color b. Es facil ver que $b \neq 1$ y $b \neq 2$.

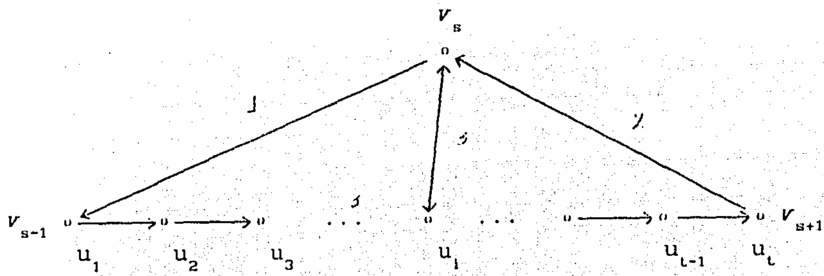
i) Si $b = 1$ entonces v_s lo podemos extender a v_{s+1} vía una trayectoria monocromática de color 1. ∇_o

ii) Si $b = 2$ entonces v_{s-1} lo podemos extender a v_s vía una trayectoria monocromática con color 2. ∇_o

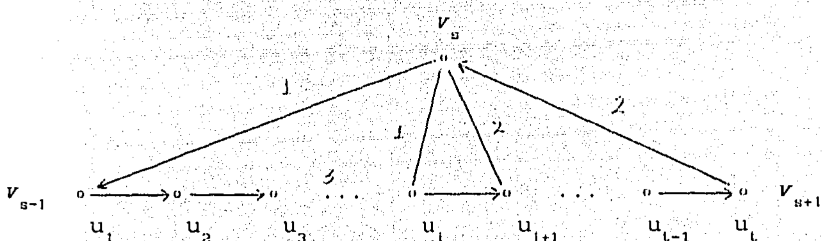
Así que podemos suponer que a b le damos el color 3. Sea $u_1, u_2, \ldots, u_t$ la trayectoria monocromática más corta de v_{s-1} a v_{s+1} con color 3. Aquí $u_1 = v_{s-1}$, $u_t = v_{s+1}$.



Ahora analicemos el color de el arco entre v_s y u_i, para $1 < i < t$. Esté no puede ser 3; supongamos que si puede ser el color 3, entonces hay una trayectoria monocromática de v_s a v_{s+1} o hay una trayectoria monocromática de v_{s-1} a v_s y estó contradice nuestra suposición.



Es facil ver que hay aristas (v_s,u_l) y (v_s,u_{l+1}) con colores distintos, porque las aristas (v_s,u_1) y (v_s,u_t) son coloreadas por distinto color.



Así v_s u_l u_{l+1} es un triángulo con tres colores distintos. Estó contradice la condición dada en el Teorema.

■

Podemos obtener del Teorema anterior dos corolarios:

Corolario 1.- Sea T un torneo 2-coloreado, entonces existe un vértice v de T tal que para todo vértice x de T - $\{v\}$ hay una trayectoria monocromática de x a v.

Demostración: El hecho de que el torneo T sea 2-coloreado nos garantiza que en T no hay T_3 ni C_3 y por el teorema el resultado es verdadero.

En [2] K. B. Reid dá una demostración directa del corolario 1.

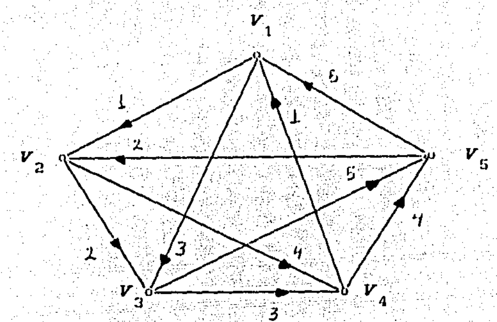
Corolario 2.- Supongamos que T, H_1, H_2, ... y H_n, donde T $=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ son torneos m-coloreados que no contienen triángulos 3-coloreados. Sea T′ el torneo formado por el reemplazamiento de cada vértice v_i de T con H_i y pidiendo que todas las aristas entre H_i y H_j sean del mismo color, como las aristas entre v_i y v_j pero con direcciones arbitrarias. Entonces T′ contiene un vértice v tal que para todo vértice x de T′- $\{v\}$ existe una trayectoria monocromática de x a v.

Demostración: Es claro que para cualesquiera tres vértices v_i, v_j, $v_k \in$ T , el triángulo $v_i v_j v_k$ no puede ser un triángulo 3-coloreado, entonces en T′ al sustituir cada v_i, v_j, v_k por su respectivo H_i, H_j, H_k y hacer las uniones entre H_i, H_j, H_k , vamos a seguir teniendo que para cualesquiera tres vértices u_i, u_j y $u_k \in$ T′ el triángulo $u_i u_j u_k$ no puede ser un triángulo 3-coloreado. Así que por el Teorema el resultado es verdadero.

■

Si en el Teorema sólo pedimos que T no contenga C_3 el resultado falla.

Por ejemplo, sea G_5 el torneo 5-coloreado, de orden 5, y que no contiene C_3. Tenemos que G_5 no contiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de G_5 hay una trayectoria monocromática de x a v. En efecto, v_{i+1} no puede extenderse a v_i vía una trayectoria monocromática.



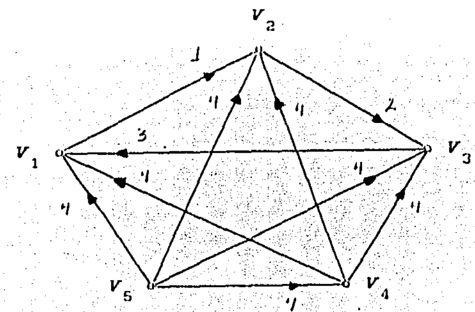
Similarmente si en el Teorema sólo pedimos que T no contenga T_3 el resultado falla.

Por ejemplo: Sea D_n un torneo 4-coloreado con vértices v_1, v_2, ... , v_n tal que las aristas (v_1,v_2), (v_2,v_3) y (v_3,v_1) son coloreadas con color 1, 2 y 3 respectivamente, y todas las otras aristas son coloreadas con color 4 y dirección como (v_i,v_j), si $i > j$.

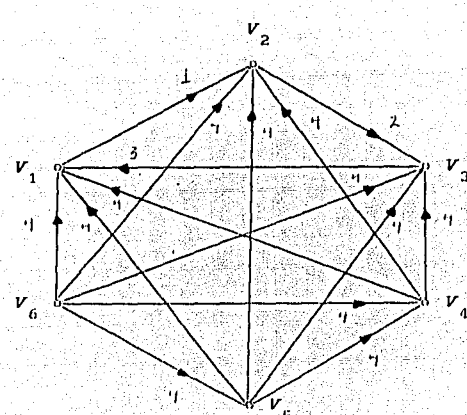
D_n es un torneo 4-coloreado que no contiene T_3, pero D_n no contiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de D_n hay una trayectoria monocromática de x a v.

Ejemplos:

D_5



D_6



Así si $m \geq 5$, la condición en el Teorema " que no contenga T_3 ni C_3 " , no puede ser mejorada. Pero para los casos $m = 3$ y $m = 4$, todavía no se tiene fundado ningún contraejemplo. Debido a eso el problema mencionado al principio es todavía una pregunta abierta.

C A P I T U L O   I I I

TRAYECTORIAS MONOCROMATICAS Y CICLOS MONOCROMATICOS EN TORNEOS COLOREADOS POR ARISTAS

(Hortensia Galeana Sánchez, 1993)[4]

Llamaremos al torneo T un *torneo m-coloreado* si las flechas de T son coloreadas con m colores. En éste capítulo se obtienen algunas condiciones las cuales implican que la cerradura de T (C(T)) tiene un núcleo; en particular la siguiente: (*i*) Todo ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es un ciclo dirigido casi-monocromático.

En [1], Sands, Sauer y Woodrow probáron que todo torneo T 2-coloreado tiene un vértice v tal que para todo vértice x de T - $\{v\}$ existe una trayectoria monocromática dirigida de x a v (e.d. $\{v\}$ es un núcleo de C(T)). Ellos también plantearon el siguiente problema: Sea T un torneo 3-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 es un ciclo casi-monocromático. ¿C(T) tiene un núcleo?

También se verá que la condición de Shen Minggang (que no contenga C_3 ni T_3) no implica la condición (*i*) y que la condición (*i*) no implica la condición de Shen Minggang.

DEFINICIONES:

Definición 1.- Sea D una digráfica m-coloreada (e.d. que sus flechas sean coloreadas con m colores), *la cerradura* *transitiva* por colores de D, denotada por C(D) es la digráfica definida como sigue:

i) $V(C(D)) = V(D)$.

ii) $F(C(D)) = F(D) \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{uv$ con color i / existe una uv-trayectoria dirigida monocromática de color i contenida en D $\}$.

Nótese que para cualquier digráfica D, $C(C(D)) \cong C(D)$.

Definición 2.- Sea D una digráfica m-coloreada. Un ciclo dirigido (o una trayectoria dirigida) es llamado *monocromático* si todas sus flechas son coloreadas con el mismo color. Un ciclo dirigido es llamado un *ciclo casi-monocromático* si con a lo más una excepción todas sus flechas son del mismo color.

Definición 3.- Sea D una digráfica m-coloreada y $C_n = (0, 1, \ldots, n-1, 0)$ un ciclo dirigido de D. Diremos que C_n es C(D)-monocromático si existe un conjunto $\{ f_i = (i, i+1) \in F(C(D))$ / $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ notación modulo n$\}$ de flechas coloreadas del mismo color.

En nuestro capítulo haremos uso del siguiente resultado:

Teorema 1: [5]. Una digráfica completa D es NP si y sólo si todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica.

Demostración: Por contradicción.

⇒] D es núcleo perfecta

Supongamos que la conclusión es falsa, entonces existe en D un ciclo dirigido asimétrico γ.

$\gamma = (z_0, z_1, \ldots, z_n = z_0)$

Tenemos que: $(z_i, z_{i+1}) \in Asym(D)$ $\forall\ i = 0, \ldots, n-1$

Sea $D' = D[V(\gamma)]$ subdigráfica inducida.

Como D es completa, **NP** y además como D' es subdigráfica inducida de D entonces D' es completa y tiene núcleo

$\Rightarrow \exists\ z_i \in V(D')$ tal que $\{z_i\}$ es núcleo de D'.

Sabemos que $(z_i, z_{i+1}) \in \gamma$.

Como $\{z_i\}$ es núcleo de D' entonces $\forall\ v \in (V(D) - \{z_i\})$ se tiene $(v, z_i) \in F(D')$, en particular tomemos $v = z_{i+1}$, de aquí se sigue que $(z_{i+1}, z_i) \in F(D')$ ∇_0 (Ya que $D' = [V(\gamma)]$ γ es asimétrico).

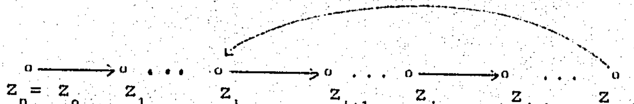
$\therefore$ Si D es completa y NP $\Rightarrow$ todo ciclo dirigido de D tiene al menos una flecha simétrica.

$\Leftarrow$] Cada ciclo dirigido de D tiene al menos una flecha simétrica. Por demostrar qoe D es NP.

Supongamos que D no es NP entonces $\exists\ D[D']$ que no tiene núcleo.

Sea $z_0 \in V(D')$, z_0 no es núcleo de D' $\Rightarrow \exists\ z_1 \in V(D')$ que no es absorbido y como D' es completa $\Rightarrow (z_0, z_1) \in Asim(D') \in F(D') \subseteq F(D)$.

Como z_1 tampoco es núcleo $\Rightarrow \exists\ z_2 \in V(D')$ que no es absorbido por $z_1 \Rightarrow (z_1, z_2) \in Asim(D') \in F(D') \subseteq F(D)$ (Ya que D' es completa y $D[D']$) y así sucesivamente.



De esta manera se forma un ciclo dirigido asimétrico en D, $\alpha = (z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}, z_n = z_i)$ ∇ (Ya que D no contiene ciclos dirigidos asimétricos.

$\therefore$ D es NP.

■

Los siguientes resultados fueron demostrados por la Dra. Hortensia Galeana Sánchez.

Teorema 2: Sea T un torneo m-coloreado. Si cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 contenido en T es un ciclo casi-monocromático entonces C(T) es una digráfica NP.

Demostración: Por contradicción.

Supongamos que C(T) no es una digráfica NP, como T es completa entonces C(T) también es una digráfica completa, de la negación del Teorema 2 se sigue que: existe un ciclo dirigido contenido en Asim(C(T)).

Sea $\gamma = (z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}, z_m = z_0)$ un ciclo dirigido de mínima longitud contenido en Asim(C(T)).

Afirmaciones:

a) $\gamma \subseteq T$

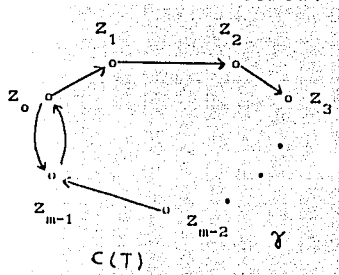
De la definición de γ se sigue que $\gamma \subseteq$ Asim(C(T)) y ya que T es un torneo con $V(T) = V(C(T))$ se sigue que $\gamma \subseteq T$.

b) $\text{long}(\gamma) \geq 5$

Por contradicción, supongamos que $\text{long}(\gamma) \leq 4$.

Como $\gamma \subseteq T$ se tiene por hipótesis que γ es un ciclo casi-monocromático, sin pérdida de generalidad supongamos que las flechas:

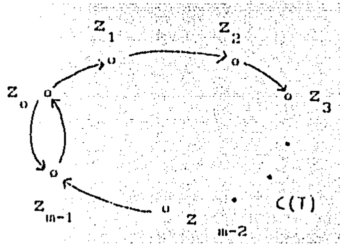
$\{(z_i, z_{i+1}) \in F(\gamma) \ / \ i \in \{0,1,2,\ldots,m-2\}\}$ son coloreadas con el mismo color.



De esta manera $(z_o, z_1, \ldots, z_{m-1})$ es una trayectoria dirigida monocromática $\Rightarrow$ $(z_o, z_{m-1}) \in F(C(T))$ $\underset{o}{\nabla}$ (Ya que $(z_{m-1}, z_o) \in F(\gamma) \subseteq Asim(C(T))$.

c) γ no es monocromático.

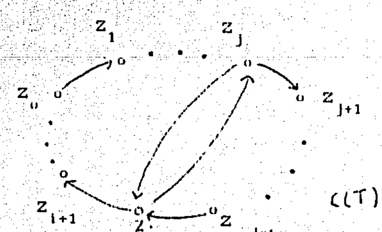
Por contradicción, supongamos que γ es un ciclo dirigido monocromático.



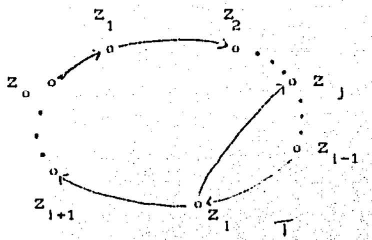
Entonces $(z_0, z_1, \ldots, z_{m-1})$ es una trayectoria dirigida monocromática $\Rightarrow$ $(z_0, z_{m-1}) \in F(C(T))$ $\underset{o}{\nabla}$ (Ya que $(z_{m-1}, z_0) \in F(\gamma) \subseteq Asim(C(T)))$.

d) Para cualquier $z_i, z_j \in V(\gamma)$ tal que $j \notin \{i-1, i+1\}$ es válido que $\{(z_i, z_j), (z_j, z_i)\} \subseteq F(C(T))$.

Sean $z_i, z_j \in V(\gamma)$ tal que: $j \notin \{i-1, i+1\}$. Como $\gamma \subseteq T$ se tiene que: $\{z_i, z_j\} \subseteq V(T)$, de aquí se sigue que al menos una de las dos flechas (z_i, z_j) o (z_j, z_i) esta en T.



Sin pérdida de generalidad supongamos que $(z_i, z_j) \in F(T)$.

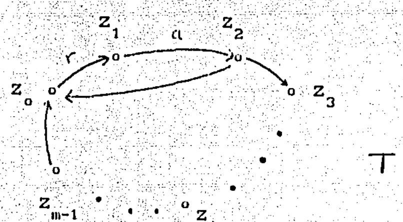


Se forma un ciclo dirigido: $\gamma' = (z_i, z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{i-1}, z_i)$ (notación modulo m) de longitud menor que γ. Por definición de γ se tiene que $\gamma' \not\subseteq$ Asim(C(T)). Entonces $(z_i, z_j) \in F(C(T))$.

Como γ no es monocromático, existen dos flechas consecutivas de γ con diferente color asignado. Supongamos que la flecha (z_0, z_1) es de color rojo y la flecha (z_1, z_2) es de color azul.

e) $(z_2, z_0) \notin F(T)$.

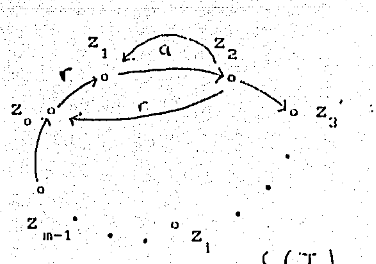
Por contradicción. Supongamos que $(z_2, z_0) \in F(T)$, entonces se forma $C_3 = (z_0, z_1, z_2, z_0)$ que es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T.



Por la hipótesis del Teorema se tiene que al menos uno de los dos siguientes casos es válido:

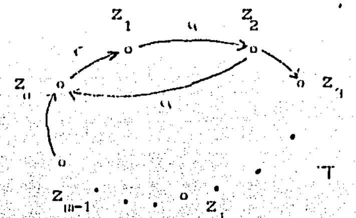
i) (z_2, z_0) es rojo, o

ii) (z_2, z_0) es azul.



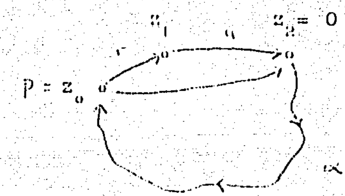
i) Si (z_2, z_0) es roja entonces (z_2, z_0, z_1) es una trayectoria monocromática dirigida $\Rightarrow (z_2, z_1) \in F(C(T))$ $\underset{o}{\nabla}$ (ya que $\gamma \subseteq$ Asim(C(T))).

ii) Si (z_2, z_0) es azul entonces (z_1, z_2, z_0) es una trayectoria monocromática dirigida $\Rightarrow$ $(z_1, z_0) \in F(C(T))$ $\underset{0}{\nabla}$ (ya que $\gamma \leq$ Asim$(C(T))$.



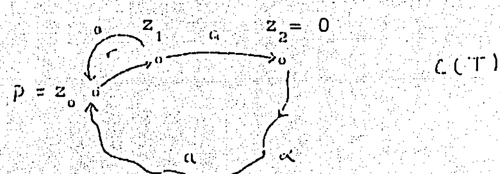
$\therefore$ $(z_2, z_0) \notin F(T)$, sin embargo por (d) $(z_2, z_0) \in F(C(T))$. Entonces debe existir una trayectoria monocromática dirigida de longitud al menos dos desde z_2 a z_0 contenida en T.

Sea $\alpha = (z_2 = 0, 1, 2, \ldots, p = z_0)$ dicha trayectoria $(p > 2)$.



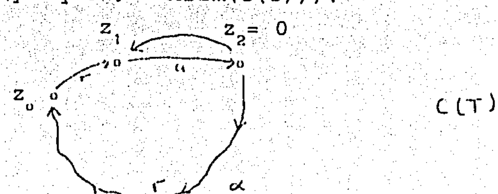
f) α no es azul.

Por contradicción, supongamos que α es azul entonces $(z_1, z_2) \cup \alpha$ es una trayectoria monocromática dirigida $\Rightarrow$ $(z_1, z_0) \in F(C(T))$ $\underset{0}{\nabla}$ (ya que $\gamma \leq$ Asim$(C(T))$.



g) α no es roja.

Por contradicción, supongamos que α es roja entonces $(z_0, z_1) \cup \alpha$ es una trayectoria monocromática dirigida $\Rightarrow$ $(z_2, z_1) \in F(C(T))$ $\underset{0}{\nabla}$ (ya que $\gamma \leq$ Asim$(C(T))$).



Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que α es negra.

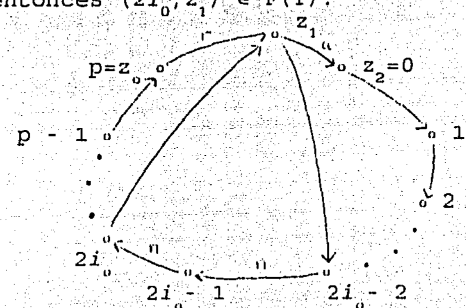
h) Para cada $i \geq 0$ tal que $2i < p$, $(z_1, 2i) \in F(T)$.

Por contradicción, supongamos $\exists\ i \geq 0$ tal que $2i < p$ y $(z_1, 2i) \notin F(T)$.

Sea $2i_0 = \text{mín}\ \{2i \ /\ (z_1, 2i) \notin F(T)\}$, $(0 \leq 2i < p)$.

Como $0 = z_2$ y $(z_1, z_2) \in F(T)$ entonces se sigue que $2i_0 > 0$ y además $2i_0 - 2 \geq 0$.

Como $2i_0 = \text{mín}\ \{2i \ /\ (z_1, 2i) \notin F(T)\}$, entonces $(z_1, 2i_0 - 2) \in F(T)$. Tenemos que $(z_1, 2i_0) \notin F(T)$ pero como T es torneo entonces $(2i_0, z_1) \in F(T)$.



α es negra

Por las anteriores afirmaciones tenemos que:

$C_4 = (z_1, 2i_0 - 2, 2i_0 - 1, 2i_0 z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 con dos flechas negras: $(2i_0 - 2,\ 2i_0 - 1)$ y $(2i_0 - 1,\ 2i_0$. Por la hipótesis del Teorema tenemos que C_4 es un ciclo casi-monocromático $\Rightarrow$ al menos uno de los siguientes dos casos es válido:

i) $(z_1, 2i_0 - 2)$ es negra, o

ii) $(2i_0, z_1)$ es negra.

i) Si $(z_1, 2i_0 - 2)$ es negra entonces

$(z_1, 2i_0 - 2) \cup (2i_0 - 2, 2i_0 - 1, 2i_0, \ldots, p = z_0)$

es una trayectoria monocromática dirigida $\Rightarrow$

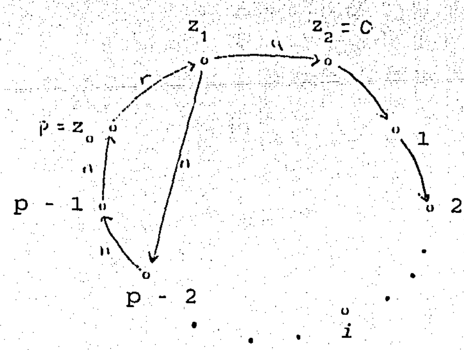
$(z_1, z_0) \in F(C(T))$ $\underset{0}{\nabla}$ (ya que $\gamma \subseteq \mathrm{Asim}(C(T))$.

ii) Si $(2i_0, z_1)$ es negra entonces
$(z_2 = 0,1,\ldots,2i_0) \cup (2i_0, z_1)$ es una
trayectoria monocromática dirigida $\Rightarrow$
$(z_2, z_1) \in F(C(T))$. $\underset{0}{\nabla}$ (ya que $\gamma \subseteq \mathrm{Asim}(C(T))$.
$\therefore$ Para cada $i \geq 0$ tal que $2i < p$, $(z_1, 2i) \in F(T)$.

Para concluir la demostración del Teorema se analizan los siguientes dos casos posibles:

Casi 1: Si p es par.

Si p es par entonces $p - 2$ es también par y como $p \geq 2$ tenemos que $p - 2 \geq 0$. Por la afirmación (h) se tiene que $(z_1, p - 2) \in F(T)$, con esta flecha se forma: $C_4 = (z_1, p - 2, p - 1, p, z_1)$ que es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en T con al menos dos flechas negras: $(p - 2, p - 1)$ y $(p - 1, p)$. Por la hipótesis del Teorema se tiene que C_4 es un ciclo casi-monocromático $\Rightarrow$ $(z_1, p - 2)$ es negra o $(p, z_1) = (z_0, z_1)$ es negra, pero anteriormente habíamos supuesto que la flecha (z_0, z_1) era roja, de aquí se sigue que $(z_1, p - 2)$ es negra.



Y por consecuencia se tiene que $(z_1, p-2, p-1, p = z_0)$ es una trayectoria monocromática dirigida $\Rightarrow$ $(z_1, z_0) \in F(C(T))$ $\underset{0}{\nabla}$ (ya que $\gamma \subseteq Asim(C(T))$).

$\therefore$ p no es par

Caso 2: p es impar.

Primero se probaran las siguientes proposiciones:

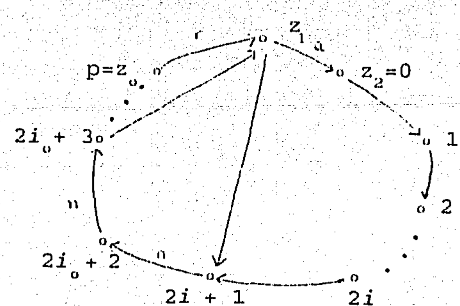
i) Si p es impar entonces para cada $i \geq 0$ tal que $1 \leq 2i + 1 \leq p$, $(2i + 1, z_1) \in F(T)$.

Por contradicción, supongamos que $\exists\ i \geq 0$ tal que $1 \leq 2i + 1 \leq p$ y $(2i + 1, z_1) \notin F(T)$.

Sea $2i_0 + 1 = \text{máx}\ \{2i + 1 \ / \ (2i + 1, z_1) \notin F(T),\ (1 \leq 2i + 1 \leq p)\}$.

Como $(p, z_1) = (z_0, z_1) \in F(T)$ se sigue que $2i + 1 < p$.

Ya que $2i + 1 = \text{máx}\ \{2i + 1 \ / \ (2i + 1, z_1) \notin F(T)\}$ entonces $(2i_0 + 3, z_1) \in F(T)$ y $(2i_0 + 1, z_1) \notin F(T)$, pero como T es torneo $(z_1, 2i_0 + 1) \in F(T)$.



Se forma $C_4 = (z_1, 2i_0+1, 2i_0+2, 2i_0+3, z_1)$ que por las anteriores afirmaciones C_4 es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en T con dos flechas negras: $(2i_0+1, 2i_0+2)$ y $(2i_0+2, 2i_0+3)$. Por la hipotesis del Teorema se tiene que C_4 es un ciclo casi-monocromático, de aquí se sigue que al menos una de las flechas: $(z_1, 2i_0+1)$ o $(2i_0+3, z_1)$ es negra.

Si $(z_1, 2i_0+1)$ es negra entonces $(z_1, 2i_0+1) \cup (2i_0+1, 2i_0+2, \ldots, p = z_0)$ es una trayectoria dirigida monocromática $\Rightarrow$ $(z_2, z_1) \in F(C(T))$ ∇_0 (ya que $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$.

Si $(2i_0+3, z_1)$ es negra entonces $(z_2 = 0, 1, \ldots, 2i_0+3) \cup (2i_0+3, z_1)$ es una trayectoria dirigida monocromática $\Rightarrow$ $(z_2, z_1) \in F(C(T))$ ∇_0 (ya que $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$.

j) Si p es impar entonces $(1, z_1) \in F(T)$ es azul.

Por la afirmación (i) se tiene que $(1, z_1) \in F(T)$. entonces $C_3 = (z_1, z_2 = 0, 1, z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T. Como la flecha (z_1, z_2) es azul, la flecha $(0,1)$ es negra, ahora por hipótesis C_3 es un ciclo casi-monocromático, de aquí se sigue que la flecha $(1, z_1)$ es azul o la flecha $(1, z_1)$ es negra.

Si la flecha $(1, z_1)$ es negra, entonces $(0, 1, z_1)$ es una trayectoria dirigida monocromática $\Rightarrow$ $(0, z_1) \in F(C(T))$ ∇_0 (ya que $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$.

$\therefore$ $(1, z_1)$ es azul.

k) Si p es impar entonces $(z_1, p-1) \in F(T)$ es roja.

Como p es impar, entonces $p-1$ es par y por (h) se tiene $(z_1, p-1) \in F(T)$. Entonces $C_3 = (z_1, p-1, p, z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T. Como $(z_0, z_1) = (p, z_1)$

es roja, $(p - 1, p)$ es negra y por la hipótesis del Teorema C_3 es un ciclo casi-monocromático, entonces la flecha $(z_1, p - 1)$ es negra. Si la flecha $(z_1, p - 1)$ es negra entonces $(z_1, p - 1, p)$ es una trayectoria dirigida monocromática $\Rightarrow$ $(z_1, p) \in F(C(T))$ $\underset{0}{\nabla}$ (ya que $\gamma \subseteq Asim(C(T))$.

$\therefore$ $(z_1, p - 1)$ es roja.

Para concluir la demostración del Teorema 3 se consideran los siguientes dos casos posibles.

Caso 2.a $(1, p) \in F(T)$.

En este caso $C_4 = (p = z_0, z_1, z_2 = 0, 1, p)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en T cuyas flechas son coloreadas con al menos tres colores: (z_0, z_1) es roja, (z_1, z_2) es azul y $(0, 1)$ es negra. $\underset{0}{\nabla}$ (ya que C_4 es casi-monocromático).

Caso 2.b $(p, 1) \in F(T)$.

En este caso $C_4 = (1, z_1, p - 1, p, 1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en T cuyas flechas son coloreadas con almenos tres colores: por (j) tenemos que $(1, z_1)$ es azul, por (k) tenemos que $(z_1, p - 1)$ es roja y $(p - 1, p)$ es negra. $\underset{0}{\nabla}$ (ya que C_4 es casi-monocromático).

■

Teorema 3: Sea T un torneo m-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T es un ciclo monocromático. Entonces C(T) es una digráfica NP.

Demostración:

Basta con demostrar que cada ciclo dirigido de longitud 4 contenido en T es un ciclo casi-monocromático.

Sea $C_4 = (0,1,2,3,0)$ un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en T, y supongamos que C_4 es no monocromático. Supongamos sin pérdida de generalidad que las flechas (0,1) y (1,2) tienen asignado diferentes colores; digamos (0,1) es roja y (1,2) es azul.

Afirmación: Las flechas (2,3) y (3,0) son coloreadas con el mismo color.

Por contradicción, supongamos que las flechas (2,3) y (3,0) tienen asignado diferentes colores.

Como T es un torneo entonces $(0,2) \in F(T)$ o $(2,0) \in F(T)$. Si $(0,2) \in F(T)$ entonces el ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T, $C_3 = (2,3,0,2)$ es no monocromático. ∇

Si $(2,0) \in F(T)$ entonces el ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T, $C_3 = (2,0,1,2)$ es no monocromático. ∇

$\therefore$ Las flechas (2,3) y (3,0) son coloreadas con el mismo color.

Afirmación: Las flechas (2,3) y (3,0) son ambas coloreadas en rojo o ambas son coloreadas en azul.

Por contradicción, supongamos que las flechas (2,3) y (3,0) las cuales tienen el mismo color no son rojas ni azules, digamos que ellas son de color negro.

Como T es torneo entonces $(1,3) \in F(T)$ o $(3,1) \in F(T)$. Si

$(1,3) \in F(T)$ entonces $C_3 = (1,3,0,1)$ es un triángulo dirigido no monocromático. ∇_0

Si $(3,1) \in F(T)$ entonces $C_3 = (3,1,2,3)$ es un triángulo dirigido no monocromático. ∇_0

$\therefore$ Las flechas $(2,3)$ y $(3,0)$ son ambas rojas o ambas azules. En cualquiera de los dos casos C_4 es claramente un ciclo casi-monocromático. Y por el Teorema 3 tenemos que $C(T)$ es una digráfica NP.

Una ligera generalización del Teorema 4 es el siguiente resultado:

Teorema 4: Sea T un torneo m-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T es $C(T)$-monocromático. Entonces $C(T)$ es una digráfica NP.

Demostración:

Como T es completa entonces $C(T)$ tambiên es completa y por el Teorema 2, basta con probar que $C(T)$ no contiene ciclos dirigidos asimétricos.

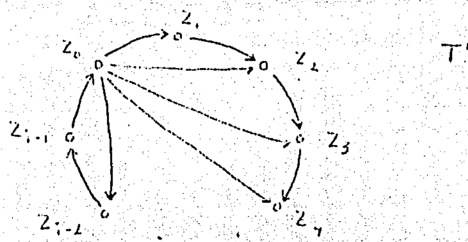
Por contradicción, supongamos que en $C(T)$ existe un ciclo dirigido $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C} \subseteq \mathrm{Asim}(C(T))$.

Como $\mathrm{Asim}(C(T)) \subseteq \mathrm{Asim}(T) = T$ entonces se sigue que $\mathbb{C} \subseteq T$. Sea $\mathbb{C} = (z_0, z_1, \ldots, z_{i-1})$ y sea $T' = T[V(\mathbb{C})]$, por la construcción de T' se tiene que $\mathbb{C}$ es un ciclo hamiltoniano de T'.

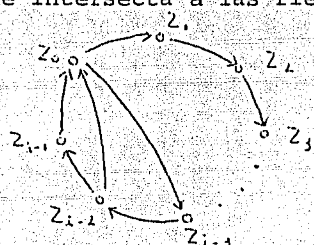
Afirmación: $\exists$ un C_3 contenido en T' tal que $|F(C_3) \cap F(\mathbb{C})| \geq 1$.

Como T' es un torneo entonces $(z_0, z_i) \in F(T')$ o $(z_i, z_0) \in F(T')$, para toda $i = 2,3,\ldots,i - 2$.

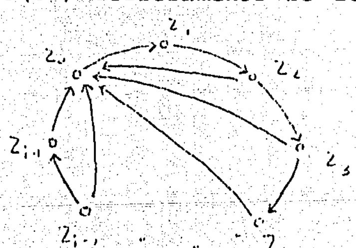
i) Si $(z_0, z_i) \in F(T')$, para toda $i = 2, 3, \ldots, i - 2$. entonces al final se forma un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T', llamemoslo $C_3 = (z_0 z_{i-2}, z_{i-1} z_0)$ tal que $|F(C_3) \cap F(\mathbb{C})| \geq i$.



ii) Si no se tiene la flecha (z_0, z_{i-2}) se debe de tener la flecha (z_{i-2}, z_0) (por ser T' torneo) y se forma otro $C_3 = (z_0, z_{i-3}, z_{i-2}, z_0)$ que intersecta a las flechas de $\mathbb{C}$.



iii) Si $(z_i, z_0) \in F(T')$ forsozamente se forma un C_3 tal que $|F(C_3) \cap F(\mathbb{C})| \geq 1$.



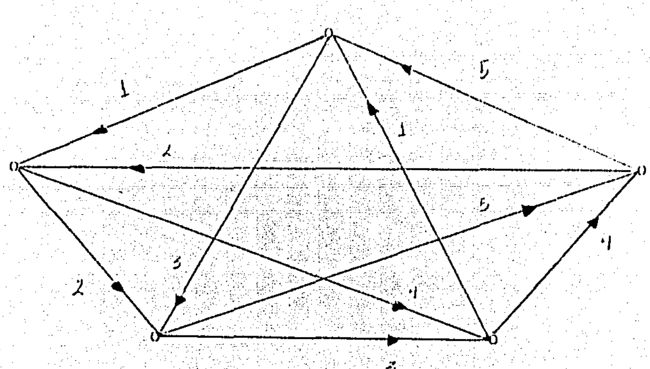
Por la hipótesis del Teorema se tiene que C_3 es $C(T)$-monocromático entonces $C_3 \subseteq Sim(C(T))$ y $F(\mathbb{C}) \cap F(Sim(C(T))) \neq \emptyset$. $\underset{o}{\nabla}$ (Ya que $\mathbb{C} \subseteq Asim(C(T))$.

■

Si nos preguntamos sólo que cada triángulo dirigido contenido en T sea un ciclo casi-monocromático en el Teorema 2, el resultado no se cumle.

Por ejemplo, el torneo G_5 obtenido por Shen Minggang en [3] es un torneo 5-coloreado, de orden 5, cada triángulo dirigido contenido en G_5 es un ciclo casi-monocromático. Pero G_5 no contiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de G_5 hay una trayectoria monocromática de x a v.

Ejemplo 1



G_5

La figura 1 muestra que la condición de Shen Minggang (que no contenga C_3 ni T_3) no implica la condición del teorema 2 y la figura 2 muestra que la hipótesis del teorema 2 no implica la condición de Shen Minggang. Si $m \geq 5$, la condición del teorema 2 "cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es un ciclo casi-monocromático", no puede ser mejorada.

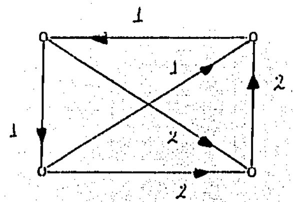


Fig. 1

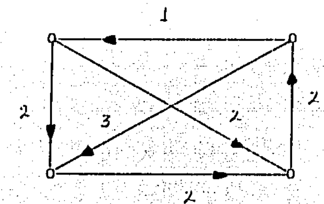


Fig.2

CONCLUSIONES

Dentro del problema de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas coloreadas por aristas, Sands, Sauer y Woodrow propusieron la siguiente conjetura:

CONJETURA: Sea T es un torneo 3-coloreado el cual no contiene C_3. ¿ Existirá un vértice v de T tal que para todo vértice x de T - $\{v\}$ hay una trayectoria monocormática de x a v?

La mejor aproximación que se ha dado del problema anterior es la siguiente: Sea T un torneo m-coloreado el cual no contiene C_3 ni T_3.Entonces existe un vértice v de T tal que para todo vértice x de T - $\{v\}$ hay una trayectoria monocromática de x a v.

En el capítulo 2 se dio un ejemplo de un torneo 5-coloreado que no contiene C_3 y un ejemplo de un torneo 4-coloreado que no contiene T_3, en ambos casos no se cumple la conclusión de la conjetura.

Se llego a la conclusión de que si m ≥ 5, la condición " el cual no contenga C_3 ni T_3" no puede ser mejorada. Pero para los casos m = 3,4, no se ha encontrado ningún contraejemplo, debido a esto la conjetura mencionada anteriormente es todavía una pregunta abierta.

Si trabajamos con la cerradura de una digráfica coloreada por aristas, la conjetura se traduce en lo siguiente: Sea T un torneo 3-coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 es un ciclo casi-monocromático. ¿Tendrá C(T) núcleo?

El proposito del trabajo fue encontrar condiciones para las cuales la cerradura de un torneo T (C(T)) tenga núcleo (Más aún que C(T) sea NP); en particular una de ellas es que: Todo ciclo de longitud a lo más 4 sea un ciclo casi-monocromático. Si sólo se pide que todo ciclo dirigido de longitud 3 sea un ciclo casi-monocromático, la conclusión del Teorema 2 del capítulo 3 no se cumple (Ver ejemplo 1).

Si $m \geq 5$, la condición del Teorema 2 (Cap. 3) " Todo ciclo de longitud a lo más 4 sea un ciclo casi-monocromático", no puede ser mejorada.

REFERENCIAS

[1] B. Sands, N. Sauer y R. Woodrow, On Monochromatic Paths in Edge-Coloured Digraphs, Journal of Combinatorial Theory, Series B 33, 271-275 (1982).

[2] K. B. Reid, Monochromatic reachability, complementary cycles, and single are reversals in tournaments, in "Proceedings, Graph Theory, Singapore, 1983", pp. 11-21, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1073, Spring-Verlag, Berlin (1984).

[3] Shen Minggang, On Monochromatic Paths in m-Coloured Tournaments, Journal of Combinatorial Theory, Series B 45, 108-111 (1988).

[4] Hortensia Galeana Sánchez, On Monochromatic Paths and Monochromatic Cycles Edge Coloured Tournament, Instituto de Matemáticas, Publicaciones Preliminares (1993).