

5
2EJ



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"TRANSMISION Y ABSORCION DE ONDAS
ELECTROMAGNETICAS EN PLASMAS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A
GERARDO ANGUIANO OROZCO



ASESORES ININ -- DR. ENRIQUE CAMPS CARVAJAL
UNAM -- DR. JOSE JULIO EMILIO HERRERA VELAZQUEZ

MEXICO, D. F.,

1995

FALLA DE ORIGEN



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE

Jefe de la División de Estudios Profesionales

Facultad de Ciencias

Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) Gerardo Anguiano Orozco

con número de cuenta 6403002-7 con el Título: "Transmisión y Absorción de Ondas Electromagnéticas en Plasmas".

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Físico

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
	DR. ENRIQUE EDGAR CAMPS CARVAJAL		
Director de Tesis	DR. JOSE JULIO EMILIO HERRERA VELAZQUEZ		
	DR. JULIO JAVIER MARTINELL BENITO		
	DR. JOSE FRANCISCO VALDEZ GALICIA		
Suplente	DRA. TATIANA KIRILLOVNA SOBOLEVA		
Suplente			

A la memoria de mi Madre

A mi Padre
por su constante estímulo y apoyo.

A mis hijas Lima y Andrea
por su cariño.

A mi esposa
por su apoyo y comprensión

Agradezco al Dr. Enrique Camps C.
Por su valiosa dirección
en la elaboración de este trabajo de tesis

Agradezco al Dr. José Julio Emilio Herrera V.
por su valiosa asesoría en el desarrollo de de este trabajo de tesis

Por su colaboración en la revisión de esta tesis agradezco a los sinodales:

Dr. Julio Javier Martinell Benito.

Dr. José Francisco Valdés Galicia.

Dra. Tatiana Kirillovna Soboleva.

Índice General

Introducción	1
1 Electrodinámica Lineal	6
1.1 Tensor de la Constante Dieléctrica	8
1.2 Ecuación de Dispersión	11
1.3 Ondas Electromagnéticas en un Medio Isótropo	13
1.4 Modelo del Plasma Frío (Modelo de una partícula)	14
1.5 Ondas Longitudinales y Transversales	16
1.6 Tensor Dieléctrico de un Plasma Magnetizado.	19
1.7 Propagación de Ondas en la Dirección Perpendicular al Campo Magnético.	22
2 Propagación de ondas electromagnéticas en un plasma magnetizado	24
2.1 Ecuaciones Fundamentales	25
2.1.1 Componentes de la Ecuación de Onda	25
2.1.2 Incidencia Normal	27
2.2 Modo Ordinario $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$	28
2.3 Onda Extraordinaria a Incidencia normal $\vec{E} \perp \vec{B}_0$, en un Plasma Heterogéneo	33
3 Absorción de Energía	48

4	Desarrollo Experimental	56
4.1	Descripción experimental	56
4.2	Método experimental	59
4.3	Resultados de las mediciones con sondas	60
4.3.1	Cálculo de los puntos críticos, del parámetro s_o y de la eficiencia de transformación	61
	Conclusiones	68
A	Solución de la ecuación de Airy	71
B	Solución de la ecuación de Whittaker	77
C	Componentes de la velocidad electrónica	80
D	Programa de Cómputo para el Diagnóstico de Plasmas con Sondas Eléctricas	83
E	Multipurpose Microwave Plasma Source	84
	Referencias	85

Índice de Figuras

1.1	Relación de dispersión para las ondas transversales.	17
1.2	Variación de la velocidad de fase	18
2.1	Geometría de la onda ordinaria.	29
2.2	Conducta lineal de la constante dieléctrica la cual da origen a la función de Airy.	31
2.3	Función de onda para un perfil de la densidad lineal.	32
2.4	Factor de amplificación vs s_0	34
2.5	Geometría para la onda extraordinaria, incidencia normal.	35
2.6	Constante dieléctrica para la onda extraordinaria, incidencia normal. . . .	35
2.7	Fuerzas ejercidas por una onda electromagnética sobre un electrón. . . .	41
2.8	Perfiles de densidad correspondientes a $\epsilon = 1 + x_0/x$, y cuatro valores de ω_c/ω ; 1 = .001, 2 = .2, 3 = .5 y 4 = .8	42
2.9	Distorsión del contorno I para la continuación analítica de $s > 0$ a $s < 0$, . . .	43
2.10	Contorno de integración para $s \approx 0$	45
3.1	Coefficiente de absorción.	54
4.1	Diagrama de la fuente de plasma	57

4.2	Vistas transversal y longitudinal de la estructura de los campos en modo H_{11} en la guía de onda (E). La vista longitudinal corresponde a un ángulo $A = 90^\circ$ (ver Nikolsli)	58
4.3	Perfil de densidad para una presión de 7×10^{-4} mbar y $B_o = 438.4$ Gauss, error $\pm 25\%$	62
4.4	Perfil de densidad para una presión de 8×10^{-4} mbar y $B_o = 438.4$ Gauss, error $\pm 25\%$	62
4.5	Perfil de densidad para una presión 2×10^{-3} mbar y $B_o = 438.4$ Gauss, error $\pm 25\%$	63
4.6	Perfil de densidad para una presión 6×10^{-4} mbar y $B_o = 477.9$ Gauss, error $\pm 25\%$	63
4.7	Perfil de densidad para una presión 7×10^{-4} mbar y $B_o = 477.9$ Gauss, error $\pm 25\%$	64
4.8	Perfil de densidad para una presión 8×10^{-4} mbar y $B_o = 477.9$ Gauss, error $\pm 25\%$	64
A.1	Contornos de integración.	75
B.1	Contornos de integración para la onda extraordinaria, incidencia normal.	79

Índice de Tablas

4.1	Valores calculados de x_o y s_o , $B_o = 438.4$ Gauss.	66
4.2	Valores calculados de x_o y s_o , $B_o = 477.9$ Gauss.	66
4.3	Eficiencia de Transformación, $B_o = 438.4$ Gauss.	66
4.4	Eficiencia de Transformación, $B_o = 477.9$ Gauss.	67

Introducción

En el trabajo de esta tesis se estudian los fenómenos de amplificación y absorción de una onda electromagnética plana que incide sobre un plasma frío no homogéneo, caracterizado por un gradiente de densidad $\nabla n_o(x)$ en la dirección del eje x . El plasma se encuentra sumergido en un campo magnético externo B_o , que es paralelo al eje z , de modo que la onda incide perpendicularmente a dicho campo.

En los últimos años ha habido un creciente interés en el desarrollo de las aplicaciones del plasma frío en una gran diversidad de campos, como por ejemplo en el proceso de materiales, que incluye el depósito de películas delgadas, polimerización, síntesis de polvos puros y ultrafinos que han impulsado el diseño y la construcción de diferentes dispositivos para la creación de plasma, destacándose entre ellos los plasmas generados con ondas de ultra alta frecuencia. Inmersos en esta tendencia de estímulo a las aplicaciones del plasma, se diseñó y construyó una fuente de plasma por microondas tipo ECR (Resonancia Ciclotrónica Electrónica) en el departamento de física del Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares (ININ), la cual se encuentra en funcionamiento actualmente. Asociados a este dispositivo se han realizado algunos sistemas de cómputo para la determinación de los diversos parámetros del plasma, y se han realizado varios experimentos por el grupo de física que trabaja con esa fuente.

El tema de esta tesis se origina precisamente en las necesidades que se tienen de caracterizar el plasma de esta fuente, y se encuentra enmarcado en los estudios que se están realizando a través del proyecto IB236 que se realiza con la fuente de plasma. El trabajo teórico realizado en la tesis sienta las bases para conocer y entender el comportamiento de las ondas electromagnéticas que se propagan a través de un plasma, en particular los fenómenos que ocurren en el punto de corte que corresponde a una reflexión y en el punto de que pudieran ser utilizados con el

objeto de optimizar el gasto de energía en la formación del plasma. Así mismo, los resultados obtenidos nos permitirán en un futuro próximo poder plantear y realizar más trabajos sobre la física de esta fuente de plasmas.

Al estudiar el plasma nos enfrentamos con una serie de conceptos nuevos que se alejan de la visión cotidiana y práctica que tenemos acerca del medio que nos rodea. Por ejemplo, el hecho de que los tubos de neón que iluminan ahora algunos hogares y bibliotecas públicas, puedan tener temperaturas del orden de los 20,000 grados centígrados es algo que nos cuesta trabajo aceptar fácilmente, ya que normalmente asociamos la temperatura alta con la emisión de calor, sin embargo esta relación depende de las propiedades del medio o cuerpo de que se trate. A continuación pasamos a dar una definición del plasma, así como algunas de sus propiedades de mayor interés para el trabajo que estamos desarrollando.

El plasma es un gas ionizado que tiene las siguientes características.

- Cada una de las especies atómicas o moleculares que constituyen el plasma puede tener una temperatura diferente de acuerdo a su distribución de velocidades.
- La energía potencial de una partícula debida a su vecina más cercana es mucho menor que su energía cinética (lo mismo se aplica a plasmas densos).
- Es cuasineutro; lo que significa que el plasma es un gas neutro considerado de manera global, pero que sin embargo a dimensiones menores que sus dimensiones características, de tiempo y espacio, puede tener una carga. La escala temporal del plasma se caracteriza por la frecuencia plásmica ω_p que representa la frecuencia de oscilación local, propia del plasma cuando se produce una separación de cargas. La dimensión espacial la constituye el radio de Debye, que representa el radio a partir del cual una partícula cargada dentro del plasma, ya no deja sentir su energía potencial sobre las otras partículas, debido a que la nube de carga de signo contrario que se forma alrededor de la partícula, apantalla, o neutraliza su carga.

Cuando penetra una onda electromagnética en un plasma, se pueden presentar varios fenómenos, que dependen de la frecuencia de la onda, y de los parámetros del plasma. Para un valor dado de la densidad del plasma n igual a la cantidad de partículas ionizadas por unidad de volumen es proporcional al cuadrado de ω_p . Si

la frecuencia ω de la onda electromagnética es menor que ω_p el plasma será opaco y la onda será reflejada, y si $\omega > \omega_p$ el plasma será transparente, y la onda atravesará libremente el plasma. Si el valor de la longitud de onda electromagnética es del orden del tamaño del plasma, la onda podrá interactuar con él, pudiéndose presentar, dependiendo de los valores del índice de refracción, una reflexión, o una absorción, a través de un fenómeno de transformación lineal de la onda electromagnética a una onda electrostática.

Este fenómeno de transformación lineal, ha sido objeto de muchos estudios[2], ya que se puede usar para aumentar la temperatura del plasma, con una eficiencia en la deposición de energía de la onda electromagnética que puede llegar hasta el cincuenta por ciento [2, pp. 584].

La absorción de energía también se puede usar para aumentar la densidad de un plasma, por medio del aumento del número de las partículas ionizadas. Por este motivo nos interesa el estudio de las regiones del plasma donde se puede encontrar una alta absorción. Otro ejemplo es el de un plasma frío inmerso en un campo magnético, en el cual tanto la densidad del plasma, como el campo magnético, pueden ser inhomogéneos en estas circunstancias el índice de refracción de las ondas del plasma puede tender a infinito. En las singularidades la velocidad de fase de la onda que se propaga dentro del plasma tiende a cero, y la onda puede ser absorbida antes de que pueda penetrar una cierta distancia, al igual que en el caso no magnetizado estos dos valores infinitos del índice de refracción se pueden localizar, para cada plasma en particular, examinando la relación de dispersión. En el caso de un plasma uniforme en un campo magnético homogéneo los infinitos aparecen en los puntos singulares del tensor dieléctrico con la frecuencia del híbrido superior $\omega_h^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2$, donde ω_c , es la frecuencia ciclotrónica de los electrones y, ω_p , es la frecuencia plásmica.

El índice de refracción para una onda que se propaga dentro del plasma es función de la densidad del plasma, y cuando esta es función de la posición, el valor local del índice de refracción será también una función de la posición.

Así pues, cuando una onda excitada dentro del plasma se propaga a través de regiones heterogéneas, tendrá una resonancia al acercarse a una zona de densidad en la cual los parámetros son apropiados para un índice de refracción que tiende a infinito. Bajo ciertas condiciones esta onda será absorbida por el plasma en la singularidad, y la energía de la onda será transferida al plasma. Si la onda en vez de acercarse a una región con índice de refracción ∞ , se acerca a una de índice de

refracción cero, la onda será reflejada en esta región.

Dependiendo de los parámetros la absorción toma lugar, en una capa de plasma que puede ser muy delgada, o puede ser de un ancho significativo. El ancho de la región de absorción puede ser muy pequeña comparada con la distancia sobre la cual los parámetros cambian significativamente, inclusive puede ser pequeña cuando se compara con el recíproco del número de onda en este punto. En términos generales entre más débil es el proceso de amortiguamiento, más delgada será la capa de absorción; debido a que al no existir un proceso de amortiguamiento significativo la onda no será absorbida por el medio y, al llegar a la singularidad del tensor dieléctrico, con toda su energía, esta será totalmente absorbida en este punto donde el índice de refracción se hace infinito, absorbiéndose en una región muy estrecha alrededor del punto singular.

Se observa que cuando una onda electrostática se aproxima a la región de resonancia la amplitud de la onda tiende a infinito, de manera que inclusive un proceso de amortiguamiento débil, actuando sobre el movimiento de los electrones, es decir de la onda electrostática, producirá la absorción de la energía de la onda.

Esta tesis esta organizada de la siguiente manera: En la introducción se presenta el marco teórico general, en donde se da la definición de plasma, se hace una revisión general de sus parámetros básicos; En el *capítulo 1* se da una descripción general de la electrodinámica lineal donde se ven las ecuaciones de una serie de problemas sin referirse a ningún modelo en particular, en donde se supone que la relación entre la corriente inducida y la intensidad del campo eléctrico es lineal; así mismo se revisan las características de las ondas en un plasma isótropo; en el *capítulo 2* se presentan las ecuaciones fundamentales del comportamiento de las ondas electromagnéticas a incidencia normal sobre un plasma; se presenta el comportamiento de las ondas electromagnéticas a incidencia normal en el modo ordinario, $E^{\parallel} \parallel \vec{B}_0$ así como el factor de amplificación de la onda de plasma en el punto de resonancia; se estudian las ondas electromagnéticas que penetran en el plasma a incidencia normal en el modo extraordinario. En el *capítulo 3* se estudia la absorción de energía de una onda extraordinaria por el plasma; en el *capítulo 4* se describe la máquina de plasma diseñada y construida en el ININ; y se presentan los resultados experimentales obtenidos, comparándolos con del modelo teórico desarrollado en la presente tesis. En el apéndice A se muestra la solución de la ecuación de Airy; En el *apéndice B* se muestra la solución de la ecuación de Whittaker; en el *apéndice C* se deducen

las componentes v_x , v_y y v_z , de la velocidad de los electrones; en el *apéndice D*, se reproduce un artículo donde describimos el programa sonda que se usa para el cálculo de la densidad y temperatura del plasma; en el *apéndice E* describimos la fuente de plasma.

Capítulo 1

Electrodinámica Lineal

Una amplia gama de problemas pueden ser analizados en el contexto de la electrodinámica clásica sin hacer referencia a un modelo concreto del medio, y realizando suposiciones generales sobre las ecuaciones materiales. La más simple de estas suposiciones consiste en que la relación entre la corriente inducida (o inducción) y la intensidad del campo eléctrico es lineal. Las ecuaciones materiales más sencillas son:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (1.1)$$

donde \vec{J} denota la densidad de corriente inducida por la acción de los campos, o se denomina coeficiente de conductividad eléctrica (o conductividad), ϵ es la constante dieléctrica¹. Las funciones σ y ϵ se pueden suponer constantes, y de las relaciones (1.1) se deduce que los vectores \vec{J} y \vec{D} son paralelos a \vec{E} . Esto significa que el medio que se estudia no tiene ninguna dirección preferencial, ligada con su estructura. Este tipo de medios, cuyas propiedades no dependen de la dirección en que se analicen, se denominan isótropos.

Una forma un poco más compleja tiene la ecuación material en los medios anisótropos, cuyas propiedades varían de forma diferente al movernos en diferentes direcciones. En un medio anisótropo, la dirección de la corriente inducida por el campo (y el vector de inducción) no coinciden forzosamente con la del campo \vec{E} . En este caso, la relación entre los vectores \vec{j} (ó D) y \vec{E} se expresa a través de

¹frecuentemente se usan los conceptos de constante dieléctrica y permitividad como sinónimos; pero en realidad la constante dieléctrica K se define como $K = \epsilon/\epsilon_0$, donde ϵ y ϵ_0 son la permitividad en el medio y en el vacío respectivamente.

$$j_i = \sigma_{ij} E_j(\vec{r}, t), \quad D_i = \epsilon_{ij} E_j(\vec{r}, t), \quad (1.2)$$

donde σ_{ij} y ϵ_{ij} son los correspondientes tensores de la conductividad y permitividad eléctrica. Un resultado de las relaciones (1.2) consiste en que las direcciones de los vectores \vec{j} y \vec{D} en general no coinciden con la del vector \vec{E} . Por ejemplo, la componente E_x puede inducir una corriente no sólo en la dirección ox , sino también en las direcciones oy y oz .

El siguiente paso en la generalización de la ecuación material, es la consideración del retardo en el tiempo de la reacción del medio a la acción del campo. Obviamente, una variación instantánea del campo en el tiempo, no puede estar ligada al surgimiento instantáneo de una corriente o una inducción. La inercia de las cargas que forman la corriente, provoca que ésta no alcance a variar al mismo tiempo que el campo. Esta inercia puede ser considerada, introduciendo una relación integral entre el campo y la corriente (o la inducción)

$$j_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \sigma_{ij}(t - t', \vec{r}) E_j(t', \vec{r}), \quad (1.3)$$

$$D_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \epsilon_{ij}(t - t', \vec{r}) E_j(t', \vec{r}).$$

Este retardo de las propiedades del medio se denomina dispersión temporal (o de frecuencia). El límite inferior en las expresiones (1.3) se escoge a partir del principio de causalidad, o sea, la contribución en la corriente la proporcionan únicamente los tiempos que preceden al considerado. La dependencia en $t - t'$ del núcleo de las relaciones (1.3) es resultado de la invariabilidad de las propiedades del medio con el tiempo (medio estacionario).

Finalmente es posible también incluir la no localidad de las propiedades del medio, cuando el valor de la corriente (o de la inducción) depende del campo, no sólo en el punto dado, sino también de su valor en otros puntos. Esta propiedad se denomina dispersión espacial y las correspondientes ecuaciones materiales tienen la forma

$$j_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \sigma_{ij}(t - t', \vec{r} - \vec{r}') E_j(t', \vec{r}'),$$

(1.4)

$$D_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int dr' \epsilon_{ij}(t-t', \vec{r}-\vec{r}') E_j(t', \vec{r}').$$

La dependencia en $\vec{r} - \vec{r}'$ en los núcleos de las relaciones integrales (1.4), se relaciona con la independencia de las propiedades del medio en función de las coordenadas (medio homogéneo). En este caso, la contribución de los puntos vecinos al valor de la corriente (o de la inducción) en el punto dado, depende sólo de su distancia al mismo y no de la posición de este punto.

Para recuperar expresiones en las que no se toma en cuenta la dispersión, en las expresiones generales (1.4) es necesario colocar

$$\sigma_{ij}(t-t', \vec{r}-\vec{r}') = \sigma \delta_{ij} \delta(t-t') \delta(\vec{r}-\vec{r}'),$$

(1.5)

$$\epsilon_{ij}(t-t', \vec{r}-\vec{r}') = \epsilon \delta_{ij} \delta(t-t') \delta(\vec{r}-\vec{r}').$$

1.1 Tensor de la Constante Dieléctrica

En esta sección se analiza la ecuación (1.4) para el caso en que \vec{E} es el campo de una onda plana monocromática. Nos detendremos brevemente en las formas de escritura de este tipo de campo.

La forma más evidente de escritura a través de funciones armónicas es

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi),$$

(1.6)

donde \vec{E}_0 es la amplitud de la onda, ϕ es la fase inicial, \vec{k} es el vector de onda y ω la frecuencia de las oscilaciones. El argumento de la función en la fórmula (1.6) se denomina fase. La superficie de fase constante en el espacio determina el frente de onda. En el caso dado esta superficie es un plano (onda plana). Si la dirección del vector \vec{E}_0 es la misma en todo el espacio, se dice que la onda tiene polarización lineal.

La fórmula (1.6) se escribe en una forma más compacta utilizando la relación

$$\cos\psi = R_e e^{i\psi},$$

entonces

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = R_e \vec{E}_o \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi).$$

Introducimos la amplitud compleja $\vec{E}(\omega, \vec{k}) = \vec{E}_o e^{i\phi}$. Considerando que de las magnitudes complejas siempre tomaremos la parte real para interpretar una magnitud física, podemos omitir, sólo en la escritura (estará siempre presente en forma implícita) el símbolo R_e , el campo de la onda se puede escribir en la forma

$$\vec{E} = \vec{E}(\omega, \vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}. \quad (1.7)$$

Esta forma de escritura es la más usual y al utilizarla es necesario recordar, que la amplitud es compleja y contiene información acerca de la fase inicial de la onda (acerca de la fase que tenía la onda en el momento $t = 0$ en el punto $r = 0$).

Sustituyendo el campo (1.7) en la expresión para la inducción (1.4), e introduciendo las nuevas variables de integración $r = t - t'$, $\rho = r - r'$, se obtiene

$$D_i(\vec{r}, t) = E_j(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}).$$

donde

$$\epsilon_{ij} = \int_0^\infty dt' \int d\rho \epsilon_{ij}(r, \rho) e^{i\omega r - i\vec{k}\vec{\rho}}. \quad (1.8)$$

La expresión (1.8) es el tensor de la función dieléctrica. Si se define la amplitud compleja del vector de inducción eléctrica como $\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$, entonces la relación entre las amplitudes del campo eléctrico y la inducción resulta bastante sencilla

$$D_i(\omega, \vec{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k}). \quad (1.9)$$

En un medio isótropo al despreciar la dispersión espacial se tiene

$$\epsilon_{ij} = \epsilon(\omega)\delta_{ij}.$$

Utilizando esta expresión se obtiene

$$\vec{D}(\omega, \vec{k}) = \epsilon(\omega)\vec{E}(\omega, \vec{k}).$$

Si la magnitud $\epsilon(\omega)$ fuera real, entonces la fase inicial del vector de inducción coincidiría con la fase inicial del vector de intensidad del campo eléctrico. La existencia de una parte imaginaria en la magnitud $\epsilon(\omega)$ es debida a que las fases iniciales de estos vectores no coinciden. Así pues, la parte imaginaria en la constante dieléctrica determina el desplazamiento de fase entre los vectores de intensidad de campo eléctrico y de inducción.

En forma análoga, de la primera ecuación material (1.3) se obtiene la relación

$$j_i(\omega, \vec{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \vec{k})E_j(\omega, \vec{k}), \quad (1.10)$$

donde $\sigma_{ij}(\omega, \vec{k})$ es el tensor de conductividad eléctrica.

Entre los tensores ϵ_{ij} y σ_{ij} existe una relación sencilla, que se puede deducir de la siguiente definición para el vector de inducción eléctrica [15, p. 16]

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' j'(\vec{r}, t').$$

Si en esta fórmula se sustituye el campo eléctrico (1.6) y se utilizan las relaciones (1.9) y (1.10) se obtiene

$$\epsilon_{ij}(\omega, k) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}. \quad (1.11)$$

Al deducir esta relación se supuso que el campo de la onda cuando $t \rightarrow -\infty$ es igual a cero $\vec{D}_o = 0$.

1.2 Ecuación de Dispersión

En esta sección se analizan las ecuaciones del campo electromagnético en la forma

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \vec{B} = +\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_o. \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_o. \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.15)$$

Estas ecuaciones describirán aquellos campos que pueden existir en un medio sin ser sostenidos por fuentes externas cuando $\vec{j}_o = 0$ y $\rho_o = 0$. Cualquier campo puede ser representado mediante un conjunto de ondas (desarrollo de Fourier). Dentro de los límites de la electrodinámica lineal estas ondas se propagan sin interferir unas con otras (principio de superposición) y por ello, el campo puede estudiarse como una sola onda.

De las ecuaciones (1.12), y (1.13) se obtiene

$$[\nabla \times [\nabla \times \vec{E}]] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} = 0 \quad (1.16)$$

Veamos lo que se puede deducir de la ecuación (1.16), si la intensidad del campo eléctrico se representa mediante una onda monocromática plana, $\vec{E} = \vec{E}_o e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$, y la inducción se relaciona con el campo mediante la relación (1.9). Desarrollando los operadores en la ecuación (1.16) se obtiene

$$[\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{E}_o]] + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{D}_o = 0$$

transformamos esta relación utilizando la fórmula

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

de modo que obtenemos

$$k_i(\vec{k} \cdot \vec{E}_o) - E_{oi}k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})E_{oj} = 0$$

Transformando esta expresión de modo que E_{oj} sea factor común

$$\left[(k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \right] E_{oj} = 0 \quad (1.17)$$

La fórmula (1.17) corresponde a una forma abreviada de escritura de un sistema de ecuaciones algebraicas homogéneas lineales para la amplitud compleja E_o . La solución de este sistema de ecuaciones será no trivial si el determinante de los coeficientes es igual a cero, o sea,

$$\left\| \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \right\| = 0 \quad (1.18)$$

Conociendo una expresión concreta del tensor ϵ_{ij} y calculando el determinante (1.18) se obtiene una ecuación que relaciona la frecuencia de onda ω con el vector de onda \vec{k} . Esta ecuación se llama ecuación de dispersión. La solución de la ecuación $\omega(\vec{k})$ es la ley de la dispersión de la onda o relación de dispersión. Si se tienen varias soluciones de la ecuación de dispersión se dice que se tienen varias ramificaciones de las ondas.

Así pues, en cualquier medio pueden existir ondas, que no son sostenidas por fuentes externas, y que comúnmente se denominan "ondas propias" (o modos propios). En la propagación libre de las ondas las variaciones de sus campos en el espacio y el tiempo ocurren independientemente, y se relacionan entre sí mediante la relación de dispersión.

La ecuación de dispersión se puede escribir como

$$\check{D}_i(\omega, \vec{k}) = (\vec{k} \cdot \vec{E})^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} E_i \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j = 0. \quad (1.19)$$

1.3 Ondas Electromagnéticas en un Medio Isótropo

El conocimiento del tensor de la constante dieléctrica compleja es necesario para poder estudiar las ondas que existen o pueden existir en un plasma. En los medios isótropos el tensor dieléctrico tiene una expresión más sencilla, que nos permite sacar bastantes conclusiones sin tener que dar una expresión específica para el tensor ϵ_{ij} . Si consideramos un medio sin dispersión espacial, el tensor dieléctrico no es función del número de onda k . Entonces podemos escribir el tensor en la forma $\epsilon_{ij} = \epsilon(\omega)$, donde $\epsilon(\omega)$ es un escalar complejo, que incluye un posible factor de amortiguamiento.

Si existe dispersión espacial, entonces el tensor dieléctrico será también función del vector de onda y podrá escribirse como

$$\epsilon_{ij}(\omega, k) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon^l(\omega, k), \quad (1.20)$$

donde ϵ^{tr} y ϵ^l son la constante dieléctrica transversal y longitudinal respectivamente. Cuando no hay dispersión espacial las dos constantes son iguales entre sí y

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} \epsilon^{tr}(\omega) = \delta_{ij} \epsilon^l(\omega). \quad (1.21)$$

Sustituyendo la ecuación (1.20) en la ecuación de dispersión (1.19)

se obtiene

$$\left(\epsilon^{tr} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{(\vec{k} \vec{e})^2}{k^2} \right) + \left(\frac{(\vec{k} \vec{e})^2}{k^2} \right) \epsilon^l = 0. \quad (1.22)$$

En esta tesis se trata con ondas electromagnéticas transversales y ondas electrostáticas longitudinales, por lo que es importante preguntarse cómo serán las relaciones de dispersión para estos dos tipos de ondas.

Para las ondas transversales, en un medio isótropo, el vector de polarización es perpendicular al vector de onda y, por lo tanto $(\vec{k} \cdot \vec{e}) = 0$ y de la fórmula anterior se tiene

$$\epsilon^{tr}(\omega, k) = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}. \quad (1.23)$$

Para las ondas longitudinales se tiene que $\vec{E} \parallel \vec{k}$ por lo tanto $\vec{B} = (c/\omega)[\vec{k} \times \vec{E}] = 0$ y no existirá campo magnético. Como $\nabla \times \vec{E} = 0$, entonces el análisis vectorial indica que se puede escribir el vector de intensidad del campo eléctrico como el gradiente de un potencial, es decir $\vec{E} = \nabla\phi$. La ecuación de dispersión para estas ondas se deduce de la ecuación $\nabla \cdot \vec{D} = 0$.

Tomando la divergencia se tiene $\vec{k} \cdot \vec{D} = k_i \epsilon_{ij} E_{oj} = \epsilon^l E_o = 0$. Como nos interesa el caso en que la amplitud de la onda es diferente de cero, se sigue $\epsilon^l = 0$

1.4 Modelo del Plasma Frío (Modelo de una partícula)

Para aplicar este modelo se harán varias suposiciones con el fin de obtener una ecuación diferencial fácil de resolver. a) Consideremos que los iones permanecen fijos, ya que su masa es mucho mayor que la de los electrones, b) despreciamos el efecto del campo magnético de la onda, ya que la fuerza que ejerce sobre los electrones es muy pequeña. La ecuación de movimiento de los electrones es:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.24)$$

Si se considera que la intensidad de los campos eléctrico y magnético son del mismo orden de magnitud, y que la velocidad de los electrones es mucho menor que la velocidad de la luz, entonces se puede despreciar el segundo término del lado derecho de la ecuación (1.24) y escribir la ecuación de movimiento para una partícula interactuando con una onda plana como

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e\vec{E}e^{-\omega t + i\vec{k}\vec{r}}.$$

Esta ecuación se resuelve empleando la teoría de perturbaciones, se supone $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1$, donde \vec{r}_0 es la posición del electrón en ausencia del campo \vec{r}_1 es el desplazamiento del electrón según el campo. Si el campo varía lentamente en el espacio

y el desplazamiento del electrón desde su posición de reposo es pequeño, entonces cuando se calcula \vec{r}' se puede tomar el valor del campo en el punto \vec{r}_0 . Con estas consideraciones se obtiene para el movimiento del centro de guía

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = i \frac{e\vec{E}}{m\omega} e^{i(\vec{k}\vec{r}_0 - \omega t)} = iV_E e^{i(\vec{k}\vec{r}_0 - \omega t)}, \\ \vec{r}' &= -\frac{e\vec{E}}{m\omega^2} e^{i(\vec{k}\vec{r}_0 - \omega t)} = -\vec{r}^2_E e^{i(\vec{k}\vec{r}_0 - \omega t)}.\end{aligned}$$

Este modelo es válido sólo si se cumple la desigualdad

$$V_E \ll \omega/k = V_{(\phi)}, \quad (1.25)$$

donde V_E es la velocidad promedio de los electrones, y $V_{(\phi)}$ es la velocidad de fase de la onda electromagnética, ver [15]. Esta desigualdad significa que la velocidad de fase debe ser mucho mayor que la velocidad de los electrones debida a la acción del campo \vec{E} . Considerando que la masa de los iones es mucho mayor que la de los electrones la densidad de corriente que surge en el campo de la onda esta dada por

$$\vec{j} = en_e \vec{V} = i \frac{e^2 \vec{E} n_e}{m\omega} e^{i(\vec{k}\vec{r}_0 - \omega t)} = i \frac{e^2 n_e}{m\omega} \vec{E}(\vec{r}, t).$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (1.10) vemos que en este modelo el tensor de la conductividad eléctrica es

$$\sigma_{ij} = i \frac{e^2 n_e}{m\omega} \delta_{ij}, \quad (1.26)$$

Si se conoce el tensor σ_{ij} , entonces con la ayuda de la ecuación (1.11) se encuentra la constante dieléctrica

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij},$$

donde

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 n_e}{m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (1.27)$$

donde hicimos la sustitución $\omega_p^2 = 4\pi n_e e^2/m$.

De la ecuación (1.27) se puede encontrar la constante dieléctrica longitudinal y transversal. Comparando la ecuación anterior con la ecuación (1.20), se obtiene

$$\epsilon^T(\omega) = \epsilon^L(\omega) = \epsilon, \quad (1.28)$$

De manera que en el modelo de partícula los dos tensores son iguales.

Si se considera la existencia de choques entre los electrones y los iones, habrá que introducir un término disipativo obteniendo la ecuación de movimiento

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = e\vec{E} - m\nu\vec{V}, \quad (1.29)$$

donde ν representa la frecuencia de los choques.

Sustituyendo en la ecuación (1.29) el campo eléctrico de una onda plana, evaluada en el punto \vec{r}_0 se obtiene

$$\vec{V} = i \frac{e\vec{E}}{m(\omega + i\nu)},$$

de aquí podemos conocer la densidad corriente $j = en_e\vec{v}$ y posteriormente el tensor de conductividad eléctrica $\sigma_{ij} = i(e^2 n_e/m(\omega + i\nu))\delta_{ij}$. Usando la ecuación (3.6) se obtiene

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad (1.30)$$

de modo que los términos disipativos convierten el tensor ϵ en una cantidad compleja.

1.5 Ondas Longitudinales y Transversales

De las ecuaciones (1.18), (1.27) y (1.28) se obtiene la relación de dispersión para las ondas transversales

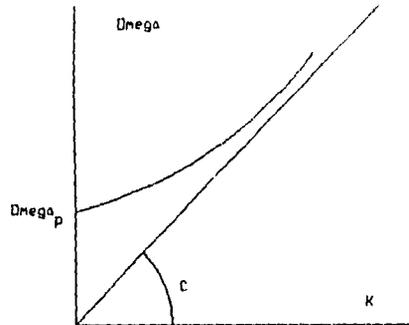


Figura 1.1: Relación de dispersión para las ondas transversales.

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2, \quad (1.31)$$

En la figura (1.1) se ve la gráfica de $\omega(k)$. De la figura se encuentra, que con el aumento de la longitud de onda, la frecuencia de la onda tiende al valor constante ω_p ; y con la disminución de la longitud de onda la presencia del plasma tiene cada vez una menor influencia sobre su propagación. La onda se propaga como si estuviera en el vacío y la ley de dispersión (1.31) se reduce a $\omega \approx kc$. En general la velocidad de fase se define como

$$V_{(\phi)} = \frac{\omega}{k}, \quad (1.32)$$

por lo que para el caso de las ondas transversales, se tiene por

$$V_{(\phi)}(k) = \frac{\sqrt{k^2 c^2 + \omega_p^2}}{k}. \quad (1.33)$$

En la figura (1.2) se muestra la gráfica de la velocidad de fase $V_{\phi}(k)$. Se observa que para todos los valores de la longitud de onda, la velocidad de fase es mayor que

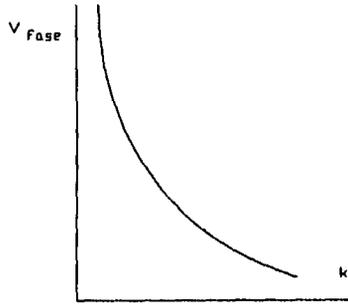


Figura 1.2: Variación de la velocidad de fase

la velocidad de la luz y en el límite $k \rightarrow 0$, $V_\phi \rightarrow \infty$, mientras que para $\omega_p \rightarrow 0$, $V_{(\phi)} \rightarrow c$.

Para la velocidad de grupo se obtiene

$$V_{(g)}(k) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k^2}{\sqrt{k^2 c^2 + \omega_p^2}} \quad (1.34)$$

Para las ondas longitudinales, por otra parte, se obtiene en la aproximación no colisional que la relación de dispersión es

$$\omega^2 = \omega_p^2 \quad (1.35)$$

Obsérvese que esta relación no depende de k por lo que su velocidad de grupo es cero, y por lo tanto en este caso no hay transporte de energía.

1.6 Tensor Dieléctrico de un Plasma Magnetizado.

Para la deducción del tensor de la constante dieléctrica de un plasma frío, que se encuentra en un campo magnético externo (plasma magnetizado o magnetonactivo) es necesario resolver la ecuación de movimiento del electrón

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}_0,$$

donde \vec{B}_0 es el vector de inducción del campo magnético externo. En este análisis no se tomará en cuenta la disipación. Se introduce un sistema coordenado con el eje OZ en la dirección del campo magnético. Escribimos las ecuaciones de movimiento por coordenadas

$$\begin{aligned} m \frac{dV_x}{dt} &= eE_x + \frac{e}{c} V_y B_0, \\ m \frac{dV_y}{dt} &= eE_y - \frac{e}{c} V_x B_0, \\ m \frac{dV_z}{dt} &= eE_z. \end{aligned}$$

Igual que en la sección (1.4) consideramos que el campo eléctrico varía de forma exponencial $\vec{E} \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$, donde r es la coordenada inicial del electrón (por comodidad se quitó el subíndice 0).

De las ecuaciones de movimiento se puede ver, que en la dirección del campo magnético, el movimiento de la partícula se determina por la misma ecuación que cuando no existe dicho campo. Por lo anterior tenemos

$$V_z = i \frac{eE_z}{m\omega}.$$

Para hallar V_x y V_y , se introduce una nueva variable $V_{\pm} = V_x \pm iV_y$. Las ecuaciones para estas variables se deducen de las ecuaciones de movimiento del electrón originales, para lo cual multiplicamos la ecuación para V_y por i y lo sumamos (restamos) con la ecuación para V_x , finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dV_+}{dt} &= \frac{e}{m}(E_x + iE_y) - i\omega_c V_+, \\ \frac{dV_-}{dt} &= \frac{e}{m}(E_x - iE_y) + i\omega_c V_-, \end{aligned}$$

donde $\omega_c = eB_0/mc$ es la frecuencia ciclotrónica del electrón. La solución de estas ecuaciones se busca en la forma $V_{\pm} = W_{\pm}e^{\pm i\omega_c t}$, donde W_{\pm} es la nueva variable. Después de sustituir en la ecuación obtenemos

$$\frac{dW_{\pm}}{dt} = \frac{e}{m}(E_x \pm iE_y)e^{\pm i\omega_c t}.$$

Como resultado encontramos primero W_{\pm} y posteriormente V_{\pm} .

$$W_{\pm} = i \frac{e}{m\omega \mp \omega_c t} e^{\pm i\omega_c t}.$$

Las componentes buscadas de la velocidad del electrón V_x y V_y se expresan a través de V_{\pm} y son

$$\begin{aligned}V_x &= \frac{1}{2}(V_+ + V_-) = \frac{ie(\omega E_x + i\omega_c E_y)}{m(\omega^2 - \omega_c^2)}, \\ V_y &= \frac{V_+ - V_-}{2i} = \frac{e}{m(\omega^2 - \omega_c^2)}.\end{aligned}$$

Si son conocidas todas las componentes de la velocidad del electrón, entonces es posible calcular las componentes de la densidad de corriente ($\vec{j} = eN_e\vec{v}$)

$$\begin{aligned}j_x &= eN_e V_x = \frac{ie^2 N_e}{m(\omega^2 - \omega_c^2)}(\omega E_x + i\omega_c E_y), \\ j_y &= eN_e V_y = \frac{e^2 N_e}{m(\omega^2 - \omega_c^2)}(\omega_c E_x + i\omega E_y), \\ j_z &= eN_e V_z = \frac{ie^2 N_e}{m\omega} E_z.\end{aligned}$$

Comparando las expresiones obtenidas para la densidad de corriente con la definición (1.27), podemos obtener una expresión para el tensor de electroconductividad de un plasma magnetizado:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{ie^2 N_e \omega}{m(\omega^2 - \omega_p^2)}, & -\frac{e^2 N_e \omega_c}{m(\omega^2 - \omega_p^2)}, & 0 \\ \frac{e^2 N_e \omega_c}{m(\omega^2 - \omega_p^2)}, & \frac{\omega \omega_c^2 N_e}{m(\omega^2 - \omega_p^2)}, & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ie^2 N_e}{m\omega} \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Si no hay campo magnético ($\omega_c = 0$), entonces el tensor (1.36) tiene únicamente la diagonal diferente de cero. Este tensor se puede escribir en la forma $\sigma_{ij} = (ie^2 N_e / m\omega) \delta_{ij}$, que coincide con la fórmula (1.26).

El tensor de la constante dieléctrica se expresa a través del tensor de electroconductividad mediante la fórmula (1.11) y para un plasma magnetizado frío tiene la siguiente forma:

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

donde se introdujo la siguiente notación

$$\epsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}, \quad (1.38)$$

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (1.39)$$

$$g = -\frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}. \quad (1.40)$$

A diferencia del caso de un plasma isótropo, el tensor de la constante dieléctrica en presencia de un campo magnético (1.6) es complejo, aun cuando se desprecien las colisiones. Sin embargo, este hecho no está relacionado con el amortiguamiento de las ondas. Para convencerse de esto, se calcula la parte antihermitiana de este tensor (ϵ_{ij}^A), la cual determina la pérdida de energía de la onda. Utilizando la ecuación (1.6) y la definición

$$\epsilon_{ij}^A = \frac{1}{2}(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*),$$

es fácil comprobar que $\epsilon_{ij}^A = 0$. Así pues, el tensor (1.6) es hermitiano.

Es necesario señalar que, en presencia de un campo magnético se tiene una limitante más sobre la aplicación del modelo de plasma frío. Debido al movimiento térmico, en el plano perpendicular al campo magnético, los electrones se mueven en círculos. El radio medio de estos círculos es $\rho_e = V_{Te}/\omega_{ce}$ (radio de Larmor), donde V_{Te} es la velocidad térmica de los electrones. Es posible despreciar este movimiento, si la magnitud ρ_e es pequeña en comparación con la escala de variación del campo eléctrico en el plano donde se mueve el electrón.

1.7 Propagación de Ondas en la Dirección Perpendicular al Campo Magnético.

Se analizará el caso cuando $k_x \neq 0$, $k_y = k_z = 0$. Tomando en cuenta esto en el tensor (1.17) junto con la ecuación general de dispersión nos permite obtener

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_{\perp} - c^2 k^2 / \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} - c^2 k^2 / \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Se define el cociente entre la velocidad de la luz y la velocidad de fase de la onda como Índice de refracción $N \equiv ck/\omega = c/V_{\phi}$. Resolviendo este determinante se obtiene la ecuación de dispersión

$$(\epsilon_{\parallel} - N^2)[\epsilon_{\perp}(\epsilon_{\perp} - N^2) - g^2] = 0, \quad (1.41)$$

la igualdad a cero del primer multiplicando proporciona la relación de dispersión para las ondas transversales, obtenida previamente para el caso de un plasma isótropo

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \equiv N^2 \equiv \epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

En este caso se describe la propagación de ondas polarizadas linealmente cuyo campo eléctrico está dirigido a lo largo del campo magnético externo, por lo que éste último no influye sobre el movimiento oscilatorio de los electrones. Este tipo de ondas se denominan ordinarias.

La igualdad a cero del segundo factor de (1.41) permite encontrar la dispersión para las ondas que se denominan extraordinarias

$$N^2 = \frac{\epsilon_{\perp}^2 - g^2}{\epsilon_{\perp}} = \frac{(1 - \omega_p^2/(\omega^2 - \omega_c^2))^2 - \omega_p^4 \omega_c^2 / (\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2)^2)}{1 - \omega_p^2/(\omega^2 - \omega_p^2)}$$

Esta ecuación la podemos escribir eliminando los términos comunes como

$$N^2 = \epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 \omega^2 - \omega_h^2} \quad (1.42)$$

Capítulo 2

Propagación de ondas electromagnéticas en un plasma magnetizado

Los conceptos básicos en la teoría de plasma son el de modelo, y el de estado de equilibrio. Un modelo es un conjunto de ecuaciones que pueden describir la evolución en el tiempo y en el espacio del comportamiento del plasma, así como la respuesta a una perturbación ejercida por un agente externo. El conjunto de ecuaciones que constituye un modelo debe de ser completo (el número de ecuaciones independientes debe de ser igual al número de variables desconocidas)[16]. El trabajo de esta tesis está basado en la aproximación de plasma frío, consistente en un modelo de multifluido, cuando en éste la temperatura se hace cero.

Este modelo da una descripción más limitada del sistema, que la de otros como el cinético o estadístico, descrito por medio de la ecuación de Vlasov. La información obtenida por el modelo de plasma basado en parámetros macroscópicos, como la densidad de carga electrónica, la velocidad promedio de los electrones, etc. nos puede dar una explicación bastante adecuada para entender los fenómenos que se presentan en el plasma.

El otro concepto básico es el de equilibrio. Por equilibrio se puede entender un estado estacionario ($\partial/\partial t = 0$) en el cual los parámetros macroscópicos del plasma no son función del tiempo. No confundir esta definición de equilibrio con el de equilibrio termodinámico¹.

¹Para que exista equilibrio termodinámico es necesario que el sistema se encuentre en equilibrio

En este capítulo se deducen las ecuaciones fundamentales que describen el comportamiento general de una onda electromagnética que incide sobre un plasma frío ($T=0$) en presencia de un campo magnético constante externo; se dan las ecuaciones de onda tanto para el modo ordinario, como para el modo extraordinario.

2.1 Ecuaciones Fundamentales

2.1.1 Componentes de la Ecuación de Onda

Considérese una onda electromagnética plana $E = E_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ propagándose en un plasma heterogéneo, con un gradiente de densidad ∇n_0 en la dirección x , con un campo magnético \vec{B}_0 uniforme y paralelo al eje z . En el sistema de unidades (e.s.u) las leyes de Faraday y Ampere se pueden escribir

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{i\omega \vec{B}}{c}, \quad (2.1)$$

$$c^2 \nabla \times \vec{B} = -4\pi n_0 e \vec{v} - i\omega \vec{E}. \quad (2.2)$$

Combinando estas dos ecuaciones se obtiene la ecuación de onda

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = -\frac{4\pi i\omega e n_0(x)}{c^2} \vec{v}, \quad (2.3)$$

donde se ha despreciado el movimiento de los iones, ya que la masa de los iones es mucho mayor que la de los electrones y por lo tanto su movimiento es mucho menor que el de los electrones; la velocidad \vec{v} de los electrones está dada por

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m} (\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0) - \nu \vec{v}. \quad (2.4)$$

A continuación se obtendrán las tres componentes de la ecuación vectorial para el caso en que no haya colisiones entre partículas, $\nu = 0$.

térmico, equilibrio mecánico y equilibrio químico al mismo tiempo, y que las variables macroscópicas no dependan del tiempo; esta última condición es la única que consideramos en nuestro trabajo para el estado de equilibrio

Componente x de la Ecuación de Onda

La componente x de la ecuación vectorial (2.3) se puede escribir como

$$[\nabla(\nabla \cdot \vec{E})]_x - [\nabla^2 \vec{E}]_x - \frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\frac{4\pi i \omega e n_0}{c^2} v_x, \quad (2.5)$$

donde $[\nabla(\nabla \cdot \vec{E})]_x$ y $[\nabla^2 \vec{E}]_x$ denotan la componente x de esas expresiones vectoriales. Se sustituye $[\nabla^2 \vec{E}]_x$ por su desarrollo $-(\vec{k} \cdot \vec{k})E_x$, donde \vec{k} es el vector de onda. De la ecuación (2.4) se obtiene el siguiente valor de v_x

$$v_x = \frac{e}{\omega m} \left(\frac{E_x}{i} - \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \right),$$

cuyo valor se deduce en el anexo (C) ecuación (C.7), Así pues, se obtiene

$$\begin{aligned} [\nabla(\nabla \cdot \vec{E})]_x + (\vec{k} \cdot \vec{k})E_x - \frac{\omega^2}{c^2} E_x &= \\ &= -\frac{4\pi i \omega e n_0}{c^2} \frac{e}{\omega m} \left(\frac{E_x}{i} - \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \right), \\ &= -\frac{\omega_p^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_c^2) c^2} E_x + i \frac{\omega_p^2 \omega_c \omega^2}{c^2 \omega (\omega^2 - \omega_c^2)} E_y. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Posteriormente se usa la notación

$$\kappa^2(x) = k_0^2 \omega_p^2 / \omega^2 - \omega_c^2, \quad (2.7)$$

donde $k_0 = \omega/c$, para escribir la ecuación (2.6) de la siguiente forma:

$$[\nabla(\nabla \cdot \vec{E})]_x + (\vec{k} \cdot \vec{k})E_x - \frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\kappa^2 E_x + i \kappa^2 \frac{\omega_c}{\omega} E_y, \quad (2.8)$$

usando la igualdad

$$[\nabla(\nabla \cdot \vec{E})]_x = i k_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + i k_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + i k_z \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2.9)$$

en la ecuación (2.8) se obtiene

$$i \left(k_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + k_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + (\vec{k} \cdot \vec{k} - k_o^2 + \kappa^2) E_x - i \kappa^2 \frac{\omega_c}{\omega} E_y = 0, \quad (2.10)$$

Ahora se usa la igualdad

$$i k_x \frac{\partial E_x}{\partial x} = -k_x^2 E_x,$$

la cual se obtiene directamente de una de las ecuaciones del arreglo. Simplificando la ecuación (2.10) se obtiene finalmente para la componente x de la ecuación de onda

$$(k_y^2 + k_z^2 - k_o^2 + \kappa^2) E_x + i k_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + i k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} - i \frac{\omega_c}{\omega} \kappa^2 E_y = 0. \quad (2.11)$$

Del mismo modo que obtuvimos la componente x se obtienen las componentes y y z de la ecuación de onda; las cuales se escriben como:

componente y de la ecuación de onda

$$i k_y \frac{\partial E_x}{\partial x} + i \frac{\omega_c}{\omega} \kappa^2 E_x - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k_z^2 - k_o^2 + \kappa^2) E_y = 0. \quad (2.12)$$

componente z de la ecuación de onda

$$i k_z \frac{\partial E_x}{\partial x} - k_y k_z E_y - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \left(k_y^2 - k_o^2 + \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) E_z = 0. \quad (2.13)$$

2.1.2 Incidencia Normal

En el caso de incidencia normal las componentes k_y y k_z son iguales a cero, sustituyendo estos valores en la ecuación

(2.13), se obtiene

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k_o^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) E_z = 0. \quad (2.14)$$

Esta es la ecuación de onda para el modo ordinario .

Sustituyendo los valores de k_y y k_z por cero en las ecuaciones (2.12) y (2.11), usando la ecuación (2.7), estas se transforman en

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + k_o^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 \omega^2 - \omega_h^2} \right) E_y = 0. \quad (2.15)$$

$$\frac{iE_x}{E_y} = \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2}. \quad (2.16)$$

respectivamente; donde ω_h se define como la frecuencia híbrida superior, $\omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$. El término entre paréntesis de la ecuación (2.15) es la constante dieléctrica para el modo extraordinario, como se demostró en el capítulo 1.

Las ecuaciones (2.15) y (2.16) son las ecuaciones para el modo extraordinario .

2.2 Modo Ordinario $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$

En este capítulo se estudia la penetración de una onda electromagnética en un plasma magnetizado; la onda incide normalmente sobre el plasma con el campo eléctrico paralelo al campo magnético externo, este tipo de incidencia se conoce como modo ordinario. Se resuelve la ecuación de onda y se calcula el factor de amplificación de la onda en el punto de corte.

Incidencia perpendicular. La geometría es mostrada en la (fig. 2.1) En la aproximación lineal y, con $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$, el movimiento ciclotrónico de los electrones no afecta a la onda y la ecuación de onda (2.14), será la misma que para un plasma no magnetizado. La solución de la ecuación (2.14) es expresada en términos de funciones conocidas, si la densidad, y por lo tanto, la función dieléctrica

$$\epsilon(x) = 1 - \frac{\omega_p^2(x)}{\omega^2}, \quad (2.17)$$

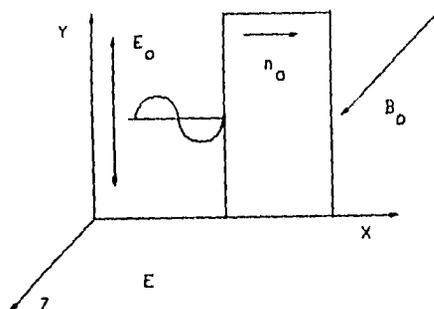


Figura 2.1: Geometría de la onda ordinaria.

son funciones simples de x . Si n_o es lineal y $\epsilon = (1 - x/x_o)$ (fig. 2.2), la ecuación (2.14) se transforma en la ecuación de Airy con el cambio de variables $\zeta \equiv (k_o^2/x_o)^{1/3}(x_o - x)$.

sustituyendo el valor de ϵ en la ecuación (2.14) se obtiene

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k_o^2 \left(1 - \frac{x}{x_o}\right) E_z = 0.$$

De la nueva variable ζ , despejando $(1 - \frac{x}{x_o})$ se encuentra

$$\left(1 - \frac{x}{x_o}\right) = \frac{\zeta}{x_o} \left(\frac{k_o^2}{x_o}\right)^{-1/3},$$

de donde

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \zeta \left(\frac{k_o^2}{x_o}\right)^{2/3} E_z = 0.$$

Reacomodando términos se puede escribir

$$\left(\frac{k_o^2}{x_o}\right)^{-2/3} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \zeta E_s = 0.$$

Tomando la diferencial de ζ ,

$$d\zeta = \left(\frac{k_o^2}{x_o}\right)^{1/3} (-dx),$$

y considerandola como un operador [27, p. 20] se obtiene, elevando al cuadrado

$$d\zeta^2 = \left(\frac{k_o^2}{x_o}\right)^{2/3} dx^2.$$

Sustituyendo dx^2 en la última ecuación diferencial, se obtiene

$$\left(\frac{k_o^2}{x_o}\right)^{-2/3} \left(\frac{k_o^2}{x_o}\right)^{2/3} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \zeta^2} + \zeta E_z = 0,$$

la cual nos da la ecuación de Airy.

$$\frac{d^2 E}{d\zeta^2} + \zeta E = 0. \quad (2.18)$$

Dos de los principales métodos de obtención de soluciones de esta ecuación diferencial ordinaria son: desarrollo de la solución por medio de una serie de potencias alrededor de un punto dado, y la expresión de la solución por medio de una integral de contorno [13, p. 21]. El primer método da una descripción completa de la solución en el punto seleccionado, pero extraer información alrededor de otros puntos viene a ser cada vez más difícil cuando se aproxima al límite de convergencia. La información dada por la solución por medio de una integral de contorno requiere una mayor interpretación, pero por distorsiones adecuadas de los contornos de integración es frecuentemente posible aislar la solución particular buscada. Este método permite también derivar soluciones cerca de los puntos singulares, donde el método por desarrollo en serie no puede ser aplicado (para una solución de la ecuación de Airy vea el apéndice A).

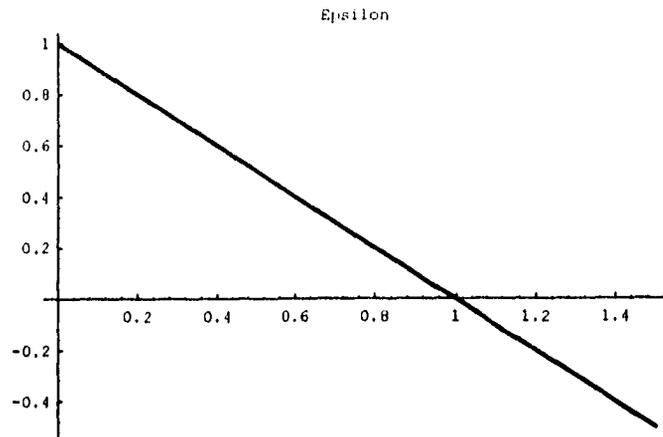


Figura 2.2: Conducta lineal de la constante dieléctrica la cual da origen a la función de Airy.

La función de Airy es

$$E(\zeta) = \frac{3}{4}A \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}x^3 - \zeta x\right) dx \propto Ai(-\zeta), \quad (2.19)$$

cuya gráfica se muestra en la (fig. 2.3). De esta gráfica se observa que la onda se va amplificandose conforme se acerca al punto $\zeta = 0$, punto alrededor del cual obtiene su máximo valor. Estos valores se encuentran tabulados en la referencia [1]. Se observa que en $x = -1.01879297$ y $A_i(r_1) = 0.53565666$, (A_i denota el valor de la función de Airy en el i -ésimo cero de la función), $|E_m/A|^2$ tiene el valor

$$\begin{aligned} \left| \frac{E(\zeta)}{A} \right|^2 &= 9 * A_i^2(-\zeta) = 9 * (0.53565666)^2, \\ &= 9 * 0.2869, \\ &= 2.58. \end{aligned}$$

La distancia entre la frontera del plasma y el punto de corte (ver fig. 2.2) es

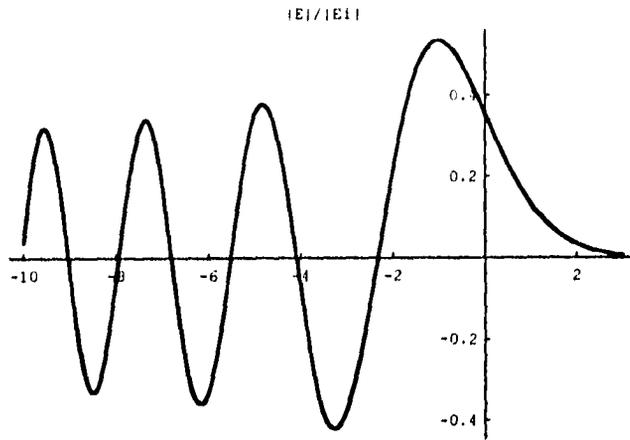


Figura 2.3: Función de onda para un perfil de la densidad lineal.

$$\zeta_o = x_o \cdot \left(\frac{k_o^2}{x_o} \right)^{1/3} = (k_o x_o)^{2/3}. \quad (2.20)$$

Si ζ_o es lo suficientemente grande, se puede emplear el desarrollo asintótico de la ecuación (2.18) en la frontera

$$\left| \frac{\dot{E}}{A} \right|^2 \approx \frac{9}{\pi} \zeta^{-1/2} = \frac{9}{\pi} (k_o x_o)^{-1/3}.$$

Como se ha despreciado la disipación, este pico máximo resulta de interferencia constructiva de la onda incidente con la onda reflejada de la misma amplitud, por lo tanto la onda reflejada tiene amplitud

$$|E_i/A|^2 = (9/4\pi)(k_o x_o)^{1/3}. \quad (2.21)$$

Dividiendo la ecuación (2.20) entre la amplitud de la onda incidente dada por la ecuación (2.21) se encuentra el factor de amplificación (ver figura (2.4)).

$$\left| \frac{E_m}{E_i} \right|^2 = \left| \frac{E(\zeta)}{A} \right|^2 / \left| \frac{E_i(\zeta)}{A} \right|^2 = \frac{2.58}{(9/4\pi)(k_o x_o)^{-1/3}} = 3.602 s_o^{1/3} = 3.602 (k_o x_o)^{1/3} \quad (2.22)$$

Chen [2, p. 569] da un valor de 3.74 el cual difiere ligeramente del valor obtenido por nosotros (3.602), consideramos que el valor dado por Chen tiene un error numérico.

Como se ve de la ecuación (2.22) la amplificación que sufre la onda depende del parámetro $s_o = k_o x_o$ que es específico para cada máquina y cada régimen de trabajo. Por lo tanto es necesario tomar en cuenta estos cálculos al realizar el diseño de una máquina nueva, para que tenga las características deseadas.

El factor de amplificación que encontramos para el caso analizado fue de 3.602; en términos generales este factor de amplificación puede variar entre 10 y 100 [2, p. 569] en una gran variedad de casos. En los experimentos de laboratorio con ondas de alta frecuencia (región de microondas) este factor normalmente tiene un valor de 5, (ver [2, p. 569])

De los resultados obtenidos se ve que una onda electromagnética en el modo ordinario, dentro de un plasma magnetizado, se comporta como si no existiera el campo magnético externo, por lo tanto este tipo de ondas se puede usar para sondear un plasma magnetizado.

2.3 Onda Extraordinaria a Incidencia normal $\vec{E} \perp \vec{B}_o$, en un Plasma Heterogéneo

Se estudia la absorción de una onda electromagnética plana que incide sobre un plasma frío y heterogéneo. El plasma se encuentra sumergido en un campo magnético externo constante B_o , el cual es paralelo al eje z . El vector de onda \vec{k} y el vector del campo eléctrico \vec{E} de la onda electromagnética son perpendiculares al campo magnético externo, esta geometría se conoce como modo extraordinario; se resuelve la ecuación de onda obteniendo la solución para todo el plano complejo por medio de una funcionalidad integral, a partir de esta solución se obtiene el coeficiente de absorción (CA).

Para la onda extraordinaria a incidencia normal ver (Fig. 2.5), se tiene $k \parallel \hat{x}$ y \vec{E}

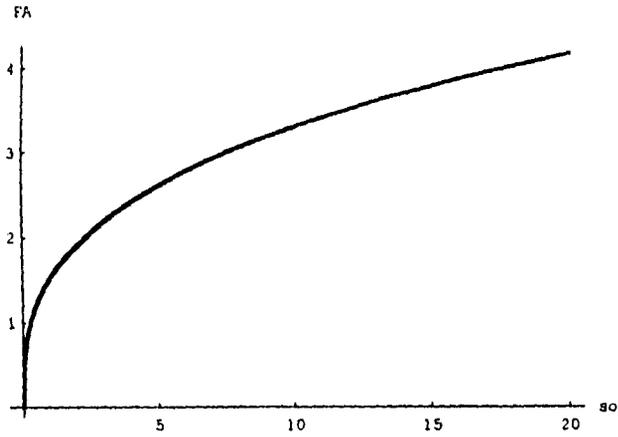


Figura 2.4: Factor de amplificación vs s_0 .

\perp a \vec{B}_0 . Para esta geometría se ocurriría considerar un campo eléctrico paralelo al eje y , sin embargo es más conveniente considerar que el vector del campo eléctrico \vec{E} tiene componentes E_x y E_y y, por lo tanto $\vec{E} = \hat{i}E_x + \hat{j}E_y$. Las ecuaciones adecuadas para resolver este problema son las ecuaciones (2.15) y (2.16). Para este caso la constante dieléctrica está dada por (1.42)

$$\epsilon_x \equiv 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 \omega^2 - \omega_h^2} = \frac{k^2}{k_0^2}, \quad (2.23)$$

usando esta relación la ecuación (2.15) se puede escribir como

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + k_0^2 \epsilon_x E_y = 0. \quad (2.24)$$

La conducta de ϵ_x es mostrada en la (Fig. 2.6) Cuando la onda se propaga hacia las regiones donde crece ω_p , primero encuentra regiones de corte donde $\epsilon_x = 0$ y luego la resonancia en el híbrido superior ($\epsilon_x = \infty$).

Para $\epsilon_x = 0$, de la ecuación (2.23) se obtiene

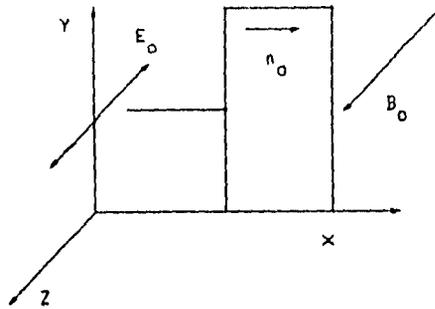


Figura 2.5: Geometría para la onda extraordinaria, incidencia normal.

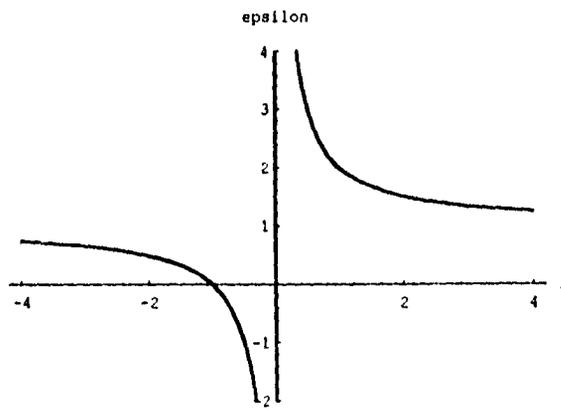


Figura 2.6: Constante dieléctrica para la onda extraordinaria, incidencia normal.

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\omega_p^2 \omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 \omega^2 - \omega_h^2}, \\
&= \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_h^2)/(\omega^2 - \omega_p^2)}, \\
&= \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2)/(\omega^2 - \omega_p^2)}, \\
&= \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \omega_c^2/(\omega^2 - \omega_p^2)},
\end{aligned}$$

de donde

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Reordenando términos,

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{\omega_c^2}{\omega^2 - \omega_p^2} = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \omega_p^2/\omega^2},$$

multiplicando ambos lados de la ecuación por $1 - \omega_p^2/\omega^2$ se obtiene

$$\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2 = \frac{\omega_c^2}{\omega^2}.$$

Por lo tanto

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \pm \frac{\omega_c}{\omega},$$

considerando sólo el término con el signo (+), ya que la solución con el signo (-) corresponde a una onda que no se puede transmitir en estas condiciones. Entonces se encuentra que la frecuencia de corte ω_{p1} esta dada por

$$\frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_c}{\omega}. \quad (2.25)$$

De esta ecuación se ve que la frecuencia de corte es función de la frecuencia ω de la onda electromagnética incidente, y del campo magnético externo ($\omega_c \propto B_o$) por lo tanto en general tendremos un punto de corte diferente para cada valor diferente de ω , para un valor dado de B_o , sin embargo en nuestro caso contamos tan sólo con un magnetrón de frecuencia fija, por lo que tendremos para cada valor de ω_c un sólo punto de corte.

Observando la ecuación (2.23) es claro que una condición suficiente y necesaria para que $\epsilon_x = \infty$ es que $\omega = \omega_h$; recordando la definición de la frecuencia híbrida superior, $\omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega^2$ dividiendo entre ω^2 ambos términos de la ecuación, se obtiene

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_c^2}{\omega^2},$$

denotando la frecuencia ω_p en la resonancia como ω_{p2} , se tiene

$$\frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}. \quad (2.26)$$

Dividiendo la ecuación (2.26) por la ecuación (2.25), se obtiene

$$\frac{\omega_{p2}^2}{\omega_{p1}^2} = \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) / \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega}\right) = \frac{(1 - \omega_c/\omega)(1 + \omega_c/\omega)}{(1 - \omega_c/\omega)} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.27)$$

Eliminando los términos comunes en el numerador y el denominador y despejando n_2 se obtiene la densidad en el punto de la resonancia en términos de la densidad crítica.

$$n_2 = \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega}\right) n_1. \quad (2.28)$$

En el híbrido superior los electrones en la onda plana tienen órbitas circulares. Sin embargo como ahora existe una componente E_x que está creciendo conforme $\omega \rightarrow \omega_h$ y la fuerza de Lorentz² $\{F = q(\vec{E} + 1/c\vec{v} \times \vec{B}_o) + 1/c\vec{v} \times \vec{B}_o\}$, deforma las trayectorias alrededor de \vec{B}_o , las cuales normalmente serían circulares, a trayectorias elípticas, con el eje mayor paralelo a \vec{E}_x .

²En algunos libros se refieren como la fuerza de Lorentz al término $q(\vec{E} + 1/c\vec{v} \times \vec{B}_o)$, mientras que en otros se refieren a la fuerza magnética $1/c\vec{v} \times \vec{B}_o$.

Para demostrar esto se obtendrá una expresión para la relación $|v_x/v_y|$. De la ecuación (C.7) se obtiene

$$v_x = -\xi \left(iE_x + \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right),$$

donde

$$\xi = \frac{e}{\omega m} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{-1},$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} v_x &= -\xi \left(\frac{\omega_c}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} + \frac{\omega_c}{\omega} \right) E_y, \\ &= -\xi \frac{\omega_c}{\omega} \left(\frac{\omega_p^2 + \omega^2 - \omega_h^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \right) E_y, \\ &= -\xi \frac{\omega_c}{\omega} \left(\frac{\omega_p^2 + \omega^2 - \omega_c^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \right) E_y, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$v_x = -\xi \frac{\omega_c}{\omega} \left(\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \right) E_y. \quad (2.29)$$

De la ecuación (C.8) se tiene, por otra parte

$$\begin{aligned} v_y &= \xi \left(\frac{E_y}{i} + \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right), \\ &= \xi \left(\frac{1}{i} + \frac{\omega_c E_x}{\omega E_y} \right) E_y, \\ &= \xi \left(-i + \frac{\omega_c}{\omega} \left(-i \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \right) \right) E_y, \\ &= -i\xi \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \right) E_y, \\ &= -i\xi \left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \right) E_y, \end{aligned}$$

$$= -i\xi \left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) \left(\frac{\omega^4 - \omega^2\omega_c^2 - \omega^2\omega_p^2 + \omega_c^2\omega_p^2}{\omega_c^2(\omega^2 - \omega_h^2)} \right) E_y,$$

factorizando se puede reescribir

$$v_y = -i\xi \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \frac{(\omega^2 - \omega_c^2)(\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega_c^2(\omega^2 - \omega_h^2)} E_y, \quad (2.30)$$

dividiendo v_x por v_y se obtiene

$$\frac{v_x}{v_y} = \left\{ -\xi \frac{\omega_c}{\omega} \left(\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \right) E_y \right\} / \left\{ -i\xi \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \frac{(\omega^2 - \omega_c^2)(\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega_c^2(\omega^2 - \omega_h^2)} E_y \right\},$$

eliminando ξ

$$\frac{v_x}{v_y} = -i \frac{\omega}{\omega_c} \frac{\omega_c^2}{\omega^2 - \omega_p^2}. \quad (2.31)$$

Como ya se dijo con anterioridad, en la condición de resonancia $\omega^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2 = \omega_h^2$, por lo tanto

$$\omega^2 - \omega_p^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2 - \omega_p^2 = \omega_c^2,$$

de modo que

$$\frac{v_x}{v_y} = -i \frac{\omega}{\omega_c}, \quad (2.32)$$

y por lo tanto

$$\left| \frac{v_x}{v_y} \right| = \left| \frac{\omega}{\omega_c} \right| > 1,$$

lo que significa que las órbitas de los electrones son elípticas con el eje mayor paralelo a E_x .

Cuando el campo magnético tiende a cero, ω_c tiende a cero en la ecuación (2.3), y se recupera la oscilación del plasma. Cuando la densidad del plasma tiende a cero,

ω_p tiende a cero, y se tiene simplemente el giro alrededor del campo magnético, (giro de Larmor), puesto que las fuerzas electrostáticas se desvanecen con la densidad.

La existencia del híbrido superior ha sido verificada experimentalmente [3, p. 105] con la transmisión de ondas electromagnéticas de alta frecuencia a través de un campo magnético. Cuando la densidad del plasma es variada, la transmisión de la onda a través del plasma pasa por un mínimo en la densidad donde se hace $\omega = \omega_h$. Esto se debe a que las oscilaciones del híbrido superior son excitadas, y la energía de la onda es absorbida

Cuando una onda viaja a través del plasma, en la hoja de corte existe primero una reflexión, después se presenta una región de evanescencia, y finalmente una región de resonancia con la frecuencia de oscilación natural del plasma, $\omega = \omega_h$ en este caso, dividiendo las expresiones para ω_{p2}^2 y ω_{p1}^2 , se encuentra

$$\frac{\omega_{p2}^2}{\omega_{p1}^2} = 1 + \frac{\omega_c}{\omega} = \frac{n_2}{n_1} \approx 1 + \frac{\delta x}{\Lambda}, \quad (2.33)$$

donde la razón de las densidades n_2/n_1 es expresada en términos de la longitud de la escala de densidad Λ . Por lo tanto,

$$\delta x = \frac{\omega_c}{\omega} \Lambda. \quad (2.34)$$

Si $\lambda \ll \Lambda$ la onda no puede penetrar a través del plasma hasta el punto de la resonancia híbrida a menos que el campo magnético \vec{B}_0 sea extremadamente débil; la región de no propagación, de espesor δx , entre la hoja de corte y la hoja de resonancia será de muchas longitudes de onda.

El mecanismo físico [2, pp. 576] para el pico en la resonancia es la amplificación de la componente electrostática (E_x) de \vec{E} , la cual excita las oscilaciones del híbrido superior limitadas en amplitud sólo por la existencia de choques (que en nuestro modelo no existen) o la existencia de efectos no lineales. En este caso, la fuerza de Lorentz hace que los electrones se muevan en la dirección del crecimiento de la densidad n_0 , y de aquí el desarrollo y amplificación de la componente E_x dentro del plasma, ver (Fig. 2.7).

Por medio de una selección adecuada del perfil de densidad, se puede reducir la ecuación de onda a una ecuación de Whittaker y hacer uso de las propiedades

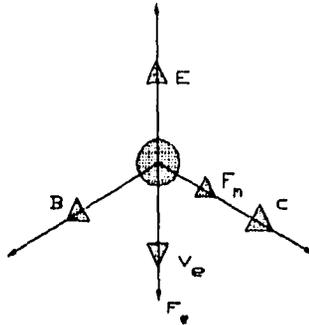


Figura 2.7: Fuerzas ejercidas por una onda electromagnética sobre un electrón.

asintóticas de las funciones de Whittaker. La ausencia de derivadas de ω_p en ϵ_x nos permite resolver esta ecuación con cierta facilidad. Para resolver este problema se reemplaza la ecuación (2.23), por una función simple y adecuada para ϵ_x , que contenga un cero y un ∞ , y que puede tener la siguiente forma [2, p. 577]

$$\epsilon_x = 1 + \frac{x_0}{x}. \quad (2.35)$$

Para ver que esta forma de la función dieléctrica constituye un perfil de densidad razonable igualamos las ecuaciones (2.23) y (2.35) factorizando el término ω_p^2/ω^2 , y usando ω_c^2/ω^2 como parámetro obtenemos una ecuación cuadrática para la densidad

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = -\left(\frac{1-x}{2x}\right) + \sqrt{\frac{(1-x)^2 - 4x(\omega_c^2/\omega^2 - 1)}{4x^2}}, \quad (2.36)$$

la gráfica de esta función se muestra en la (Fig. 2.8). La gráfica muestra una variación suave y continua de la densidad en función de x/x_0 , la x es la coordenada del eje x .

Si en la función dieléctrica 2.35 se toma $x = -x_0$ se tiene $\epsilon = 0$, entonces en

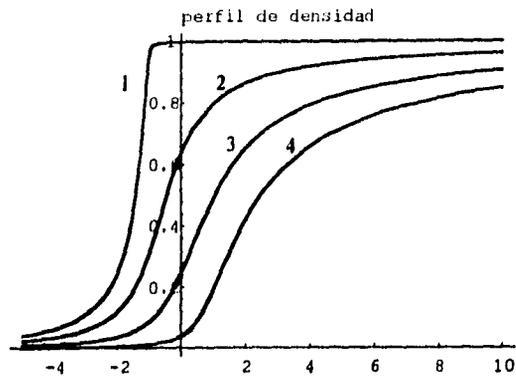


Figura 2.8: Perfiles de densidad correspondientes a $\epsilon = 1 + x_0/x$, y cuatro valores de ω_c/ω ; 1 = .001, 2 = .2, 3 = .5 y 4 = .8

este punto se tiene una reflexión de la onda; y como en $x = 0$, $\epsilon = \infty$, entonces se presenta la resonancia de la onda.

La ecuación (2.24) se puede transformar con el cambio de variable [3, p. 577] $s \equiv k_0 x$ y $s_0 \equiv k_0 x_0$, $k_0 = \omega/c$; sustituyendo este cambio de variable en la expresión $\epsilon = 1 + x_0/x$ obtenemos

$$\epsilon = 1 + (s_0/k_0)/(s/k_0) = 1 + \frac{s_0}{s},$$

tomando la diferencial de la nueva variable $s = k_0 x$ y despejando dx , se obtiene

$$dx = \frac{ds}{k_0},$$

elevando al cuadrado [27, p. 20],

$$dx^2 = \frac{ds^2}{k_0^2},$$

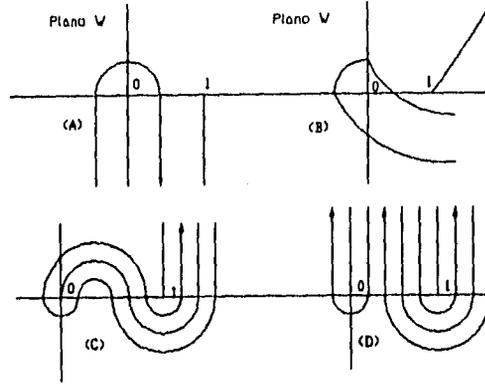


Figura 2.9: Distorsión del contorno I para la continuación analítica de $s > 0$ a $s < 0$.

sustituyendo la nueva expresión obtenida para ϵ y considerando dx^2 como un operador [27, p. 20] y sustituyendo en la ecuación (2.24), se llega a

$$k_o^2 \frac{d^2 E_y}{ds^2} + k_o^2 \left(1 + \frac{s_o}{s}\right) E_y = 0,$$

$$\frac{d^2 E_y}{ds^2} + \left(1 + \frac{s_o}{s}\right) E_y = 0. \quad (2.37)$$

Esta ecuación se puede volver a transformar con el siguiente cambio de variables $\xi \equiv 2is$, $\chi = -is_o/2$, y $m = \pm 1/2$ en la ecuación de Whittaker.

$$\frac{d^2 E_y}{d\xi^2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{\chi}{\xi}\right) E_y = 0, \quad (2.38)$$

donde $m = -1/2$.

La solución original que Whittaker dio a esta ecuación fue en forma de una solución integral ver [5, p. 339]

$$W_{k,m}(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z} z^k}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m)} \int_0^\infty t^{-k-\frac{1}{2}+m} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m} e^{-t} dt.$$

La cual es válida cuando $m + 1/2 - k$ es un entero positiva y $W_{k,m}(z)$ ³ es definida para todos los valores k y m y todos los valores de z excepto valores reales negativos.

La ecuación de Whittaker con el cambio de variables $k = +is_0/2$, $m = 1/2$, $t = 2isw$, $z = -2is$, se transforma en

$$W_{k,m}(s) = Ase^{is} \int \exp -i \left(2ws - \frac{1}{2}s_0 \ln \left(\frac{w-1}{w} \right) \right) dw, \quad (2.39)$$

para la solución de la ecuación ver apéndice B

Arreglando los términos obtenemos finalmente para la región I una solución de la forma

$$E_I = \frac{iA}{2} e^{is} (2s)^{is_0/2} e^{\pi s_0/4} (1 - e^{\pi s_0}) \Gamma \left(1 - \frac{is_0}{2} \right),$$

donde E_I denota la solución de E_y en la región I.

para $s > 0$ (alrededor de $w = 0$).

Con el cambio de variable $s = -s$ obtenemos la solución para $\vec{E}_{III}(y)$, y tomando el complejo conjugado de la solución de \vec{E}_I .

$$E_{III}(s) \rightarrow \frac{iA}{2} e^{is} (-2s)^{is_0/2} e^{-\frac{\pi s_0}{4}} (e^{\pi s_0} - 1) \Gamma \left(1 - \frac{1}{2} is_0 \right).$$

Para $s > 0$ (alrededor de $w = 1$), haciendo el cambio de variable $w = w + 1$ en la ecuación (2.39) se encuentra

$$\begin{aligned} \vec{E}_y &= Ase^{is} \int e^{-i2s(w+1)} \left(\frac{w+1-1}{w+1} \right)^{is_0/2} dw, \\ &= Ase^{is} \int e^{-i2s(w+1)} \left(\frac{w}{w+1} \right)^{is_0/2} dw, \\ &= -i \frac{A}{2} e^{-is} e^{\pi s_0/4} \int e^{-z} z^{is_0/2} \left(e^{-i\pi/2} z + 2se^{i2\pi} \right)^{-is_0/2} dz. \end{aligned}$$

³ $W_{k,m}(z)$ representa la solución de la ecuación en la notación original de Whittaker, en nuestro caso esta solución la representamos por E_y , de acuerdo a la notación usada en la ecuación (2.38)

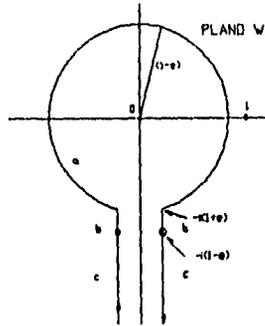


Figura 2.10: Contorno de integración para $s \approx 0$.

El término entre paréntesis se puede desarrollar en serie de potencias como

$$(e^{-i\pi/2} z + 2se^{i2\pi})^{-is_0/2} = (2s)^{-is_0/2} + \dots \quad (2.40)$$

Tomando sólo el primer término (siguiendo a Weyl [4, p. 1418]), del desarrollo de potencias se llega a

$$\vec{E}_{II}(s) = -i \frac{A}{2} e^{-is} e^{\pi s_0/4} (2s)^{-is_0/2} \int e^{-z} \zeta^{is_0/2} dz.$$

Usando la definición integral de la función gama se puede escribir

$$\vec{E}_{II}(s) = i \frac{A}{2} e^{-is} e^{\pi s_0/4} (2s)^{-is_0/2} (1 - e^{\pi s_0}) \Gamma\left(1 + i \frac{s_0}{2}\right).$$

La solución para el intervalo IV se obtiene con el complejo conjugado de la solución de \vec{E}_{II} . Las cuatro soluciones son finalmente:

para $s > 0$

$$E_I(s) \rightarrow \frac{iA}{2} e^{is} (2s)^{is_0/2} e^{\pi s_0/4} (1 - e^{-\pi s_0}) \Gamma\left(1 - \frac{1}{2} i s_0\right). \quad (2.41)$$

$$E_{II}(s) \rightarrow \frac{-iA}{2} e^{-is} (2s)^{-is_0/2} e^{\pi s_0/4} (1 - e^{-\pi s_0}) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}is_0\right). \quad (2.42)$$

para $s < 0$

$$E_{III}(s) \rightarrow \frac{iA}{2} e^{is} (-2s)^{is_0/2} e^{-\frac{\pi s_0}{4}} (e^{\pi s_0} - 1) \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}is_0\right). \quad (2.43)$$

$$E_{IV}(s) \rightarrow \frac{-iA}{2} e^{-is} (-2s)^{is_0/2} e^{-\pi s_0/4} (e^{-\pi s_0} - 1) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}is_0\right). \quad (2.44)$$

Donde E_I , E_{II} , E_{III} y E_{IV} representan los valores de E_y , evaluados a lo largo de los contornos de integración I, II, III, IV respectivamente (vea apéndice (B) figura (B.1))

Las soluciones E_I y E_{III} representan de este modo ondas que se mueven a la derecha, y E_{II} y E_{IV} ondas que se mueven a la izquierda de la hoja de resonancia respectivamente.

Para las condiciones de frontera se selecciona $E_I(s)$ es decir una onda transmitida moviéndose a la derecha, para $s > 0$. Así, para $s > 0$ se tiene el contorno I.

Para continuar analíticamente a la región $s < 0$, estamos restringidos a la mitad inferior del plano en s . Así pues se debe rotar el contorno en el sentido contrario a las manecillas del reloj. El contorno es continuamente distorsionado como se muestra en la figura (2.9), y se observa que E_I viene a ser, después de la continuación analítica a $s < 0$,

$$E_I \rightarrow E_{IV}(1 - e^{-\pi s_0}) + E_{III}. \quad (2.45)$$

Los términos sobre el lado derecho representan las ondas reflejadas e incidente respectivamente.

El coeficiente de transmisión esta dado por

$$T = \frac{E_I}{E_{III}} = e^{-\pi s_0/2}, \quad (2.46)$$

y el coeficiente de reflexión es la razón de los dos términos de la ecuación 2.45.

$$R = \frac{E_{IV}}{E_{III}} = 1 - e^{-\pi s_0}. \quad (2.47)$$

$|T|$ y $|R|$ tiene los mismos valores dados por Budden, y su suma es menor que uno.

$$|R|^2 + |T|^2 \neq 1.$$

Este déficit de energía representa la energía absorbida por el plasma en la frecuencia híbrida superior del plasma.

Para calcular el campo E_I cerca de $s = 0$, se distorsiona el contorno (a) de la Fig. (B.1) al contorno mostrado por la figura (2.10), el cual tiene tres partes. La contribución de la parte **b** del contorno está acotada por $\epsilon s M$, donde M es un número fijo. La parte circular **a** da una contribución acotada por $s N$, donde N es una constante. La parte **c** del contorno encuentra, para $\epsilon \rightarrow 0$,

$$E_I(0) = -\frac{iA}{2}(e^{-\pi s_0} - 1). \quad (2.48)$$

Así, $E_V(0)$ tiene un valor finito en el punto de resonancia. Dividiendo por el factor de normalización la onda incidente E_{III} , ecuación (2.43) se encuentra

$$|E_V(0)| = \frac{Ae^{-3\pi s_0/4}}{|\Gamma(1 - \frac{1}{2}is_0)|}. \quad (2.49)$$

Capítulo 3

Absorción de Energía

El fenómeno de transformación lineal puede ser un mecanismo importante para elevar la temperatura de un plasma no colisional, la absorción como se verá se efectúa en los puntos de discontinuidad de la función dieléctrica. El flujo de energía para una onda plana esta dada por el vector de Poynting, ver [20, p. 150], que representa el flujo de energía dentro de una onda plana.

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (3.1)$$

tomando la divergencia de \vec{S} , se obtiene

$$\nabla \cdot \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot \vec{E} \times \vec{B}. \quad (3.2)$$

Usando la ecuación

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\nabla \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\nabla \times \vec{b}) \cdot \vec{a}, \quad (3.3)$$

del cálculo diferencial se puede reescribir

$$\nabla \cdot \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [B \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B}].$$

para transformar la ecuación (3.2). Antes de efectuar los productos hay que considerar la parte real de cada vector complejo, [20, p. 154]; por otro lado el valor

instantaneo de la divergencia es de poca utilidad dada la alta frecuencia de las ondas. Por lo mismo se tomará el valor promedio del flujo de energía en un periodo de tiempo; tomando las consideraciones anteriores, se obtiene

$$\overline{\nabla \cdot \vec{S}} = \frac{c}{4\pi} \left[\overline{\Re\{\vec{B}\} \cdot \Re\{\nabla \times \vec{E}\}} - \overline{\Re\{\vec{E}\} \cdot \Re\{\nabla \times \vec{B}\}} \right],$$

donde la raya indica promedio con respecto al tiempo. Para obtener el promedio se usa el teorema, ver [20, p. 155],

$$\overline{\Re\vec{A} \Re\vec{B}} = \frac{1}{2} \Re\{\vec{A} \vec{B}^*\}.$$

El promedio con respecto al tiempo de la divergencia de \vec{S} es

$$\overline{\nabla \cdot \vec{S}} = \frac{c}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \Re\{\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E}^*\} - \frac{1}{2} \Re\{\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B}^*\} \right].$$

Haciendo la sustitución

$$\vec{B} = -\frac{ic}{\omega} [\nabla \times \vec{E}],$$

en la ecuación anterior, se obtiene

$$\overline{\nabla \cdot \vec{S}} = -\frac{c^2}{8\pi\omega} \left[\Re\{i\nabla \times \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{E}^*\} - \Re\{-i\vec{E} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{E}^*)]\} \right].$$

Del primer término del lado derecho de la ecuación anterior se obtiene

$$\nabla \times \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{E}^* = |\nabla \times \vec{E}|^2$$

y del segundo término de la misma ecuación se obtiene

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}^* = \nabla \times \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \vec{E}_x^* & \vec{E}_y^* & 0 \end{vmatrix} = \nabla \times \hat{k} \left(\frac{\partial \vec{E}_y^*}{\partial x} - \frac{\partial \vec{E}_x^*}{\partial y} \right).$$

Para el campo eléctrico \vec{E} tenemos

$$\frac{\partial \vec{E}_x^*}{\partial y} = -ik_y \vec{E}_x = 0,$$

ya que para una onda electromagnética a incidencia normal sobre el plasma se tiene, como ya se dijo, $k_y = 0$, por lo tanto el $\nabla \times \nabla \times \vec{E}^*$ se puede escribir como

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}^* = \nabla \times \left(\hat{k} \frac{\partial \vec{E}_y^*}{\partial x} \right),$$

y

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}^* = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial E_y^*}{\partial x} \end{vmatrix} = \hat{i} \frac{\partial^2 \vec{E}_y^*}{\partial x y} - \hat{j} \frac{\partial^2 \vec{E}_y^*}{\partial x^2} = -\hat{j} \frac{\partial^2 \vec{E}_y^*}{\partial x^2},$$

la ecuación anterior se redujo a un término ya que $\partial \vec{E}_y^* / \partial y \propto k_y$, y $k_y = 0$.

El promedio de la divergencia se puede escribir como

$$\begin{aligned} \overline{\nabla \cdot \vec{S}} &= -\frac{c^2}{8\pi\omega} \left[\Re \left\{ i |\nabla \times \vec{E}|^2 \right\} - \Re \left\{ -(-i) E_y \frac{\partial^2 E_y^*}{\partial x^2} \right\} \right], \\ &= -\frac{c^2}{8\pi\omega} \Re \left\{ -i E_y \frac{\partial^2 E_y^*}{\partial x^2} \right\}, \\ &= -\frac{c^2}{16\pi\omega} \left\{ -i E_y \frac{\partial^2 E_y^*}{\partial x^2} + i E_y^* \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \right\}, \\ \overline{\nabla \cdot \vec{S}} &= -i \frac{c^2}{16\pi\omega} \left\{ E_y^* \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - cc \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La parte real del término cuadrático del valor absoluto del rotacional de \vec{E} multiplicado por i es igual a cero, ya que es imaginario.

De la ecuación (2.24) obtenemos

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} = -k_{\sigma}^2 \epsilon_x E_y. \quad (3.5)$$

De donde

$$\overline{\nabla \cdot \vec{S}} = i \frac{c^2}{16\pi\omega} \left\{ (E_y^*(k_o^2 \epsilon_x E_y)) - cc \right\}, \quad (3.6)$$

$$\overline{\nabla \cdot \vec{S}} = i \frac{c^2}{16\pi\omega} \left\{ k_o^2 \epsilon_x |E_y|^2 - cc \right\}. \quad (3.7)$$

La constante dieléctrica ϵ_x se puede escribir como

$$\epsilon_x = 1 + \frac{x_o}{x} = \lim_{\nu \rightarrow 0} 1 + \frac{x_o}{x} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{x_o}{x - i\nu} = \lim_{\nu \rightarrow 0} x_o \frac{x + i\nu}{x^2 + \nu^2}, \quad (3.8)$$

donde consideramos que cuando $x \rightarrow 0$ $x_o/x \gg 1$ y por lo tanto $1 + x_o/x = x_o/x$; ν es una variable arbitraria, reacomodando términos de la ecuación (3.8), se obtiene

$$\epsilon_x = \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \frac{x x_o}{x^2 + \nu^2} + i \frac{\nu x_o}{x^2 + \nu^2} \right\},$$

pero [28, pp. 53-80]

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \nu^2} = \mathcal{P} \frac{1}{x},$$

y [28, pp. 53-80]

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\nu}{x^2 + \nu^2} = \pi \delta(x),$$

por lo tanto

$$\epsilon_x = \mathcal{P} \frac{x_o}{x} + i x_o \pi \delta(x), \quad (3.9)$$

donde \mathcal{P} representa el valor principal de Cauchy. El primer término del lado derecho de la ecuación (3.9) es real y por lo mismo es la parte Hermitiana, mientras que el segundo término ($i x_o \pi \delta(x)$) es la parte anti Hermitiana de la ecuación, entonces podemos escribir

$$\epsilon_x = \epsilon_x^h + i x_o \pi \delta(x),$$

donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac.

Como la parte hermitiana ϵ_x^h no contribuye a la absorción de energía [8, pp. 49]; entonces para este cálculo podemos escribir la constante dieléctrica como

$$\epsilon_x = ix_o\pi\delta(x),$$

y el complejo conjugado se escribe como

$$cc = -ix_o\pi\delta(x)|E_y|^2,$$

sustituyendo estos dos términos en la ecuación (3.7) se obtiene

$$\overline{\nabla \cdot \vec{S}} = \frac{ic^2}{8\pi\omega} x_o i\pi\delta(x)|E_y(x)|^2. \quad (3.10)$$

Integrando la ecuación 3.10 en todo el espacio obtenemos la energía absorbida por el plasma

$$\overline{\Delta P} = -\frac{c^2 k_o^2 x_o}{8\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |E_y(x)|^2 \delta(x) dx, \quad (3.11)$$

de las propiedades de la función $\delta(x)$ de Dirac [29, p. 29]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0),$$

para toda función $f(x)$ continua en $x = 0$; entonces la energía absorbida se puede escribir como

$$\overline{\Delta P} = -\frac{c^2 k_o^2 x_o}{8\omega} |E_y(0)|^2. \quad (3.12)$$

Sustituyendo el valor de $E_y(0)$ de la ecuación (2.49), se encuentra

$$\overline{\Delta P} = -\frac{c^2 k_o^2 x_o}{8\omega} \frac{A^2 e^{-3\pi s_o/2}}{|\Gamma(1 - \frac{1}{2}is_o)|^2},$$

usando la expresión [10, pp. 937]

$$\Gamma(1 + ix)\Gamma(1 - ix) = \frac{\pi x}{\operatorname{sh} x \pi},$$

la energía absorbida se puede escribir como

$$\overline{\Delta P} = -\frac{c^2 A^2 x_0}{8\pi} (e^{-\pi s_0} - e^{-2\pi s_0}). \quad (3.13)$$

El coeficiente de absorción se define como

$$A_o = \frac{P_{abs}}{P_{inc}} = \frac{P - Pr - Pt}{P} = 1 - |R|^2 - |T|^2. \quad (3.14)$$

El factor

$$CT = e^{-\pi s_0} - e^{-2\pi s_0}, \quad (3.15)$$

de la ecuación (3.13) es en este caso el coeficiente de transformación de la onda electromagnética en una onda plásmica, ya que por las condiciones experimentales que tenemos se cumple

$$A_o = CT$$

La variación del coeficiente de transformación lineal con respecto al parámetro s_0 se muestra en la figura (3.1). Es claro que el coeficiente de absorción pasa por un valor máximo que es función del parámetro s_0 el cual es específico para cada régimen de trabajo.

El valor máximo del coeficiente de transformación lineal lo encontramos por el método de la primera derivada, derivando CT se obtiene

$$\frac{d CT}{ds_0} = \exp^{-\pi s_0} - \exp^{-2\pi s_0},$$

igualando a cero y despejando s_0 se obtiene el punto extremo

$$s_0 = -\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{2},$$

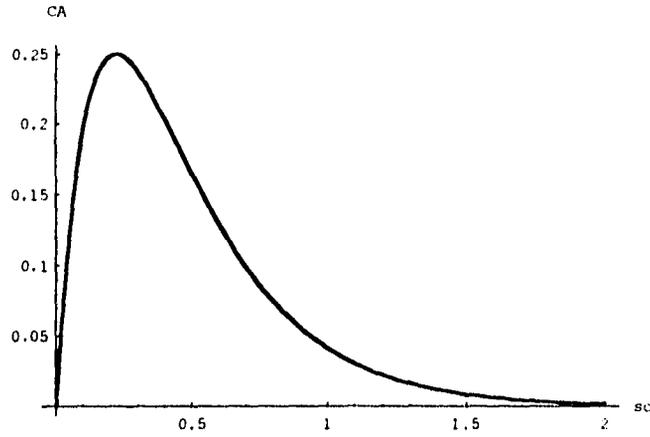


Figura 3.1: Coeficiente de absorción.

el cual representa un máximo para la función considerada; sustituyendo este valor en la expresión para el coeficiente de transformación lineal se obtiene el valor

$$CT_{\text{máx}} = .25. \quad (3.16)$$

En el modelo que se ha presentado en este trabajo no se tomaron en cuenta los choques entre partículas como un medio de absorción de la energía de la onda, esto es válido para plasmas de presiones bajas, en los cuales se pueden despreciar los choques entre partículas, que son de interés en este trabajo.

Al no existir choques, la absorción de energía se debe a la conversión (transformación) de una onda electromagnética rápida en una onda electrostática lenta, la transformación de onda toma lugar en la vecindad del plasma donde ϵ_x tiende a infinito, donde el valor de la densidad satisface la condición para una resonancia del híbrido superior [14, 17, p. 878, p. 421]

El coeficiente de transformación se puede escribir como

$$CA = e^{-\pi s_0} - e^{-2\pi s_0} = [1 - |R|^2] - |T|^2$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.13), se obtiene

$$\overline{\Delta P} = -\frac{c^2 A^2 x_0}{8\pi} (1 - |R|^2 - |T|^2), \quad (3.17)$$

donde el primer término representa la energía de la onda que penetra el plasma \overline{P}_{in} , y el segundo la energía de la onda transmitida \overline{P}_{out} , por lo tanto

$$\overline{\Delta P} = -(\overline{\Delta P}_{in} - \overline{\Delta P}_{out})$$

De este modo la absorción en la resonancia debida a la singularidad en la constante dieléctrica se debe a la diferencia en $|R|^2 + |T|^2 \neq 1$.

Capítulo 4

Desarrollo Experimental

En este capítulo se contempla utilizar la teoría desarrollada anteriormente, para el cálculo del coeficiente de transformación en una fuente de plasma generado mediante una descarga de microondas. Los objetivos aquí son: 1) la determinación de la cantidad de energía que puede ser transformada en oscilaciones plásmicas que permitiría realizar un cálculo posterior mediante el cual la posibilidad de generar fenómenos paramétricos sería establecida; 2) De acuerdo a los resultados teóricos, determinar experimentalmente el régimen de mayor transformación lineal y establecer su influencia sobre la formación del plasma

Aunque de antemano el modelo teórico sólo se aproxima a la realidad del experimento, resulta de interés práctico la comparación, ya que son muy escasos en la literatura estos trabajos en relación a las descargas de microondas.

4.1 Descripción experimental

Para aplicar el modelo teórico desarrollado en los capítulos anteriores necesitamos verificar, que en nuestro experimento se reproduce la geometría usada en el desarrollo del modelo teórico, y que básicamente consiste en tener un campo magnético externo constante \vec{B}_0 paralelo al eje z , un perfil de concentración que se asemeje al utilizado en el modelo teórico (ver figura 2.8) que contenga los puntos críticos y de resonancia y una onda electromagnética con polarización, tal que el vector del campo eléctrico sea perpendicular al campo magnético externo oscilando a lo largo del eje y y con un vector de onda dirigido a lo largo del eje x , perpendicular también a \vec{B}_0 .

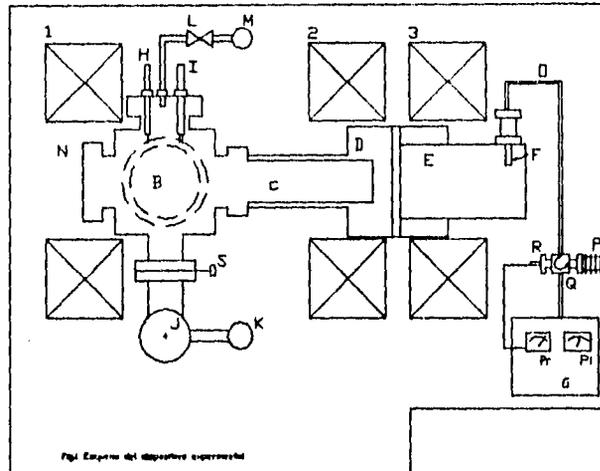


Figura 4.1: Diagrama de la fuente de plasma

Para poder darnos cuenta de que estas condiciones están dadas en el experimento revisemos brevemente el esquema del dispositivo experimental (ver figura 4.1). La fuente de plasma por microondas consta de tres partes principales: 1) Sistema de Campo Magnético externo, 2) Sistema de Microondas y 3) Sistema de Vacío; aquí revisaremos los incisos 1) y 2). El Campo Magnético externo a lo largo del dispositivo (eje z) se forma mediante tres solenoides (1, 2 y en la figura 4.1) de 400 vueltas de alambre de cobre calibre 6 alimentados de dos fuentes de corriente directa, que permiten variar el valor de \vec{B}_0 en magnitud al variar la corriente que circula por los solenoides. En la dirección perpendicular a \vec{B}_0 , existe una ligera variación del mismo (ver figura 5 en la referencia [30]), sin embargo en los límites ocupados por el plasma, la variación del campo es despreciable. A lo largo del dispositivo las variaciones, de campo son mayores, pero como las mediciones de densidad se realizaron en la dirección perpendicular al campo magnético, se puede considerar que las mismas se harán en un campo prácticamente constante.

El sistema de microondas consiste de un generador tipo magnetrón de frecuencia fija ($\omega = 2\pi f = 15.39 \times 10^9$ rad/seg.) y potencia variable de 0 a 500 watts como máximo, El generador se encuentra equipado con un diodo detector que permite medir la potencia incidente y un acoplador direccional que se utiliza para determinar la

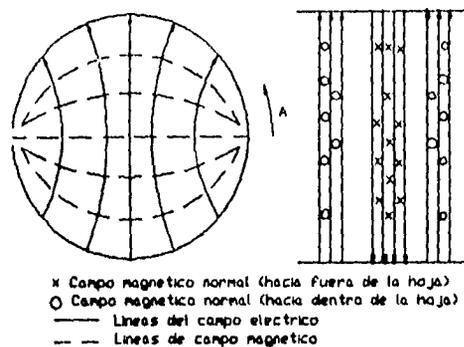


Figura 4.2: Vistas transversal y longitudinal de la estructura de los campos en modo TE_{11} en la guía de onda (E). La vista longitudinal corresponde a un ángulo $A = 90^\circ$ (ver Nikolski)

potencia reflejada (R en la figura 4.1). Así mismo, se cuenta con un circulador y una carga pasiva (Q y P en la figura 4.1) que evitan que grandes cantidades de energía reflejada incidan sobre el magnetrón, eliminando así la posibilidad de deterioro del magnetrón.

El campo magnético de alta frecuencia es introducido a la guía de onda circular (E, en la figura 4.1) mediante un cable coaxial y una antena (O y F en la figura 4.1) la guía de onda (E) tiene dimensiones tales que en ella se excita una onda viajera del tipo TE_{11} (ver figura 4.2), la altura del resonador se ajusta con el objeto de excitar el modo TE_{111} en su interior, en la que el campo eléctrico oscila en la dirección y perpendicular a \vec{B}_0 . La guía de onda esta unida mecánicamente (logrando un buen contacto eléctrico) con el resonador (D, en la figura 4.1), cuyo diámetro es igual a 14 cm y una altura (distancia entre paredes) de 7.13 cm; permitiendo así la formación de la onda estacionaria del modo TE_{111} .

En nuestro caso la onda electromagnética que se usa para encender el plasma se usa también como la onda que incide sobre el plasma magnetizado. Dejando de lado los procesos físicos que tienen lugar durante el encendido del plasma, que por otro

lado son de naturaleza compleja y no completamente conocidos, consideraremos para el propósito del experimento, que el plasma ya se encuentra formado y que como se puede observar experimentalmente consiste en una columna cilíndrica de unos 6 cm de diámetro, sumergido en el campo magnético externo \vec{B}_0 . Una vez formada la columna de plasma con concentración superior a la crítica, el campo eléctrico es desplazado hacia las paredes del resonador ocasionando así la formación de un campo estacionario en el espacio entre la capa de concentración crítica y las paredes del resonador. Esta onda estacionaria es formada por dos ondas viajeras en sentidos contrarios y de propagación perpendicular a \vec{B}_0 (a lo largo del eje x) una de las cuales (la que penetra el plasma) cumple las funciones de la onda que irradia al plasma en el modelo teórico.

En cuanto a la concentración del plasma es claro que los perfiles de densidad obtenidos experimentalmente y que se observan en las figuras (4.3 - 4.8), son similares a los perfiles teóricos mostrados en la figura (2.8) principalmente en la región inicial de los perfiles de densidad, por lo anterior consideramos que en nuestra fuente de plasma, de manera implícita, están dadas las condiciones bajo las cuales fue desarrollado el modelo teórico.

4.2 Método experimental

Se determinarán experimentalmente los perfiles de densidad (a lo largo del radio del plasma) para dos valores del campo magnético externo B_0 y seis presiones de trabajo diferentes. La densidad se mide a través de la característica tensión-corriente de una sonda unitaria eléctrica de Langmuir (ver fig.2 apéndice D), la cual es interpretada mediante el modelo de la teoría iónica implementado en el programa sonda [22]. El programa sonda entre otros parámetros, determina la densidad del plasma; una vez realizadas las mediciones y obtenidos todos los valores de la densidad se hacen seis gráficas que muestran los perfiles de densidad del plasma a lo largo de su radio; de estas gráficas se obtienen los valores del parámetro s_0 , el cual nos sirve para calcular el coeficiente de transformación lineal, que es el objetivo final de la parte experimental. El método utilizada para la determinación del coeficiente de transformación involucra valores altos de incertidumbre, básicamente introducidos por la sonda eléctrica. sin embargo, los resultados obtenidos en este estudio son suficientes para determinar aquellos regímenes de trabajo en los que se tiene una mayor transformación lineal.

La eficiencia de transformación se calcula a través del parámetro $s_0 = k_0 x_0$, donde x_0 es la distancia entre el punto de corte y el punto de resonancia en el plasma. Este parámetro se obtiene de las gráficas del perfil de densidad del plasma tomado a lo largo de la sección transversal del mismo. En la gráfica de este perfil se marcan las posiciones del punto del valor de densidad crítica, (el cual es fijo para todos los regímenes de trabajo) y del valor de la densidad en el punto de resonancia (el cual se calcula para cada régimen); se trazan dos rectas verticales a través de estos dos valores que intersecten el eje x , las intersecciones de cada recta con el eje x representan la posición de los puntos de corte y el punto de resonancia en el plasma respectivamente; la diferencia entre estos dos puntos es x_0 , este valor se sustituye en la expresión para s_0 y usando la ecuación (3.15) y multiplicando por 100, se obtiene la eficiencia de transformación en tanto por ciento. Los anexos D, E se reproducen con la intención de que sirvan para tener una descripción más detallada de algunos aspectos mencionados en este trabajo. En el primer anexo se explica en una forma más detallada la teoría asociada a la interpretación de la característica tensión-corriente y del programa de cómputo que se usa para el cálculo de la densidad del plasma. En el segundo se espera que el lector encuentre una descripción detallada de la fuente de plasma utilizada en la parte experimental.

4.3 Resultados de las mediciones con sondas

Perfiles Experimentales de densidad

El cálculo de la densidad del plasma se efectúa por medio de un programa de cómputo [22], reproducido en el apéndice (D)

A continuación se muestran seis perfiles de densidad medidos experimentalmente para tres regímenes de trabajo, para dos valores del campo magnético externo a partir los cuales se calculan los coeficientes de transformación lineal correspondientes (ver figuras 4.3 - 4.8).

4.3.1 Cálculo de los puntos críticos, del parámetro s_0 y de la eficiencia de transformación

Campo Magnético de Trabajo

El cálculo del campo magnético B_0 en el cual se encuentra sumergido el plasma se hace por medio de un programa de cómputo descrito en [21]. Para obtener el valor del campo es necesario introducir en el programa los siguientes valores de los parámetros experimentales bajo los cuales se realizaron las mediciones de la primera serie

Corriente de las bobinas

$$C_r(1) = C_r(2) = 16 \text{ amperes}, C_r(3) = 22 \text{ amperes.}$$

Distancia entre las Bobinas

$$z(1) = 0 \text{ cm}, z(2) = 39.4 \text{ cm}, z(3) = 54.8 \text{ cm.}$$

El programa campo nos da el valor para el campo magnético externo

$$B_0 = 438.4 \text{ Gauss.}$$

Usando el mismo programa encontramos para la segunda serie de medidas un campo magnético externo $B_0 = 477.9 \text{ Gauss}$.

Densidad en el punto de resonancia

La densidad en el punto de resonancia se obtiene a partir de la ecuación (2.28)

$$n_2 = \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega}\right) n_1,$$

donde $n_1 = 7.47 \times 10^{10} \text{ cm}^{-1}$ es la densidad crítica. Por lo tanto para calcular la densidad en el punto de resonancia es necesario y suficiente calcular la fracción ω_c/ω como $\omega_c \propto B$

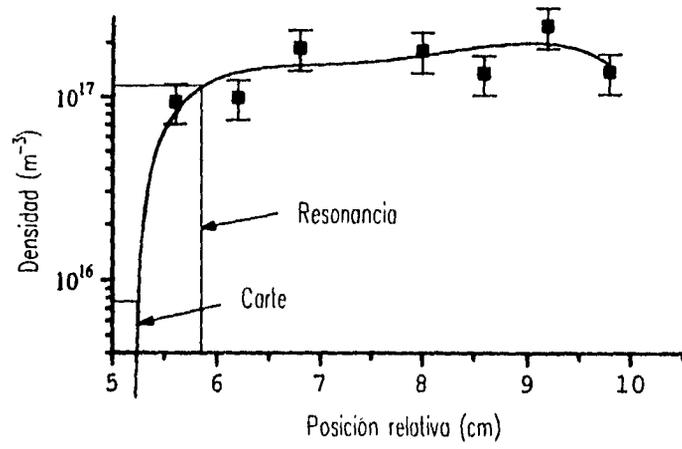


Figura 4.3: Perfil de densidade para uma pressão de 7×10^{-4} mbar e $B_0 = 438.4$ Gauss, error $\pm 25\%$

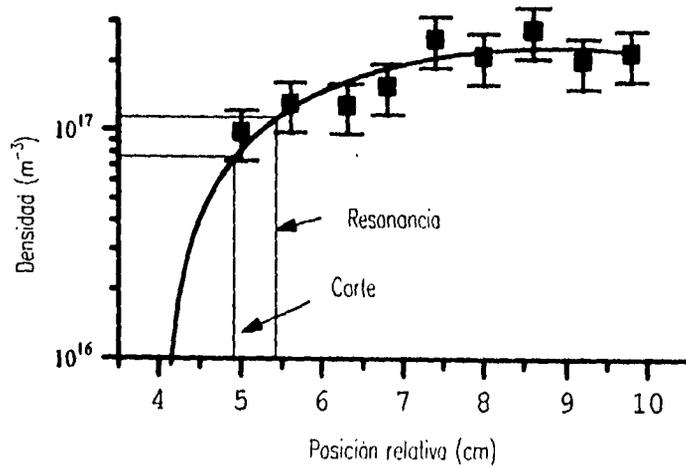


Figura 4.4: Perfil de densidade para uma pressão de 8×10^{-4} mbar e $B_0 = 438.4$ Gauss, error $\pm 25\%$

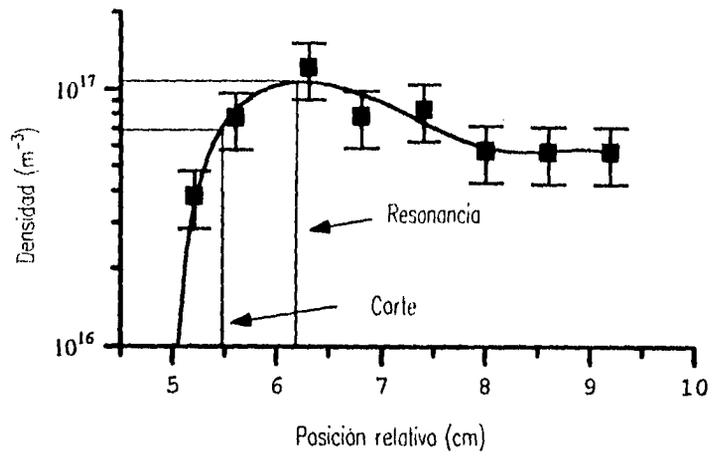


Figura 4.5: Perfil de densidad para una presión 2×10^{-3} mbar y $B_0 = 438.4$ Gauss, error $\pm 25\%$

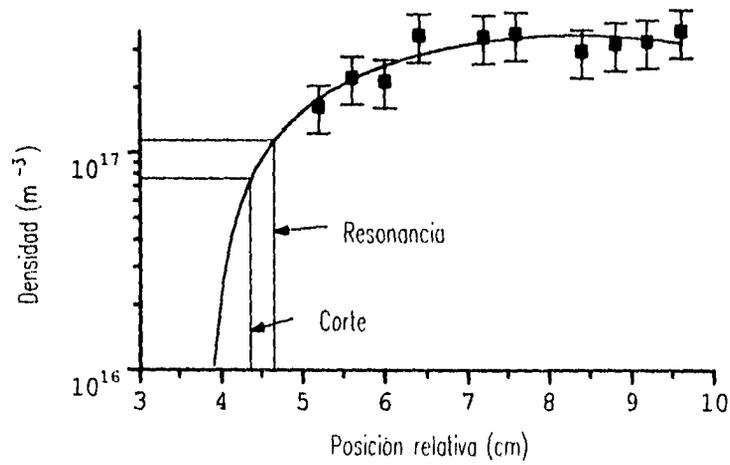


Figura 4.6: Perfil de densidad para una presión 6×10^{-4} mbar y $B_0 = 477.9$ Gauss, error $\pm 25\%$

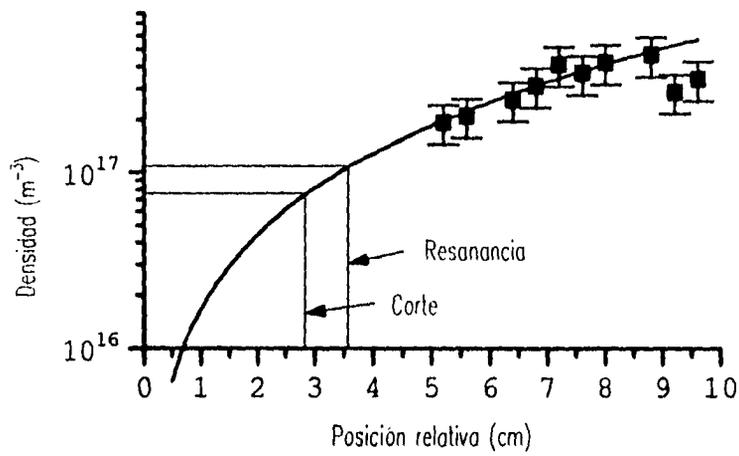


Figura 4.7: Perfil de densidade para uma pressão 7×10^{-4} mbar y $B_0 = 477.9$ Gauss, error $\pm 25\%$

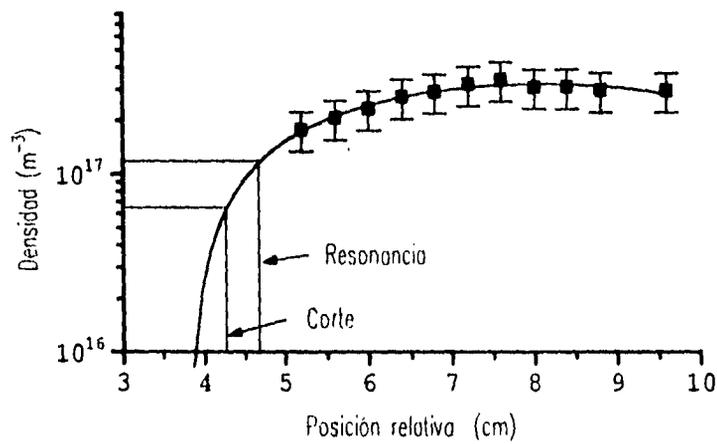


Figura 4.8: Perfil de densidade para uma pressão 8×10^{-4} mbar y $B_0 = 477.9$ Gauss, error $\pm 25\%$

esto implica que para cualesquiera dos valores del campo B_1 y B_2 se tiene

$$B_1/B_2 = \omega_c(1)/\omega_c(2),$$

de donde

$$\omega_c(1) = \frac{B_1}{B_2} \omega_c(2). \quad (4.1)$$

En nuestra máquina cuando $B_2 = 875$ Gauss $\Rightarrow \omega_c(2) = \omega$, es decir se cumple la condición de resonancia ciclotrónica. En la primera serie de medidas tenemos un campo magnético externo $\vec{B}_0 = 438.4$ Gauss; denotando este campo como B_1 obtenemos de la ecuación (4.1)

$$\omega_c(1) = 0.5 \omega_c(2) = 0.5\omega.$$

Finalmente la densidad de resonancia es

$$n_2 = \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega}\right) n_1 = 1.5 \times n_1 = 1.5 \times 7.4 \times 10^{10} = 11.1 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}.$$

Del mismo modo para la segunda serie de medidas realizadas con un campo magnético externo $\vec{B}_0 = 477.9$ Gauss se encuentra $n_2 = 11.44 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.

Cálculo de x_0

Una vez calculados los valores de la densidad del plasma en el punto de corte, (que es fijo para nuestro experimento), el cual está dado por $n_c = m\omega^2/4\pi e^2$, donde e y m son la carga y masa del electrón, $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia del generador de microondas (ver apéndice (F)). Como tenemos un magnetrón con frecuencia fija, de la fórmula para n_c es evidente que el punto de corte es único, y en el punto de resonancia, para cada una de las dos series de medidas; en cada una de las gráficas de densidad contra distancia, bajamos dos líneas paralelas al eje de la densidad desde estos dos valores hasta su intersección con el eje de las distancias, la distancia entre estas dos rectas es x_0 ,

Cálculo de s_0

El parámetro s_0 , se calcula de la ecuación

Presión de trabajo (mbar)	x_o cm	s_o (cm^{-1})
7×10^{-4}	.61	.3
8×10^{-4}	.5	.25
2×10^{-3}	.7	.35

Tabla 4.1: Valores calculados de x_o y s_o , $B_o = 438.4$ Gauss.

Presión de Trabajo (mbar)	x_o cm	s_o (cm^{-1})
6×10^{-4}	.28	.14
7×10^{-4}	.7	.35
8×10^{-4}	.43	.22

Tabla 4.2: Valores calculados de x_o y s_o , $B_o = 477.9$ Gauss.

$$s_o = k_o x_o,$$

donde $k_o = \frac{\omega}{c} = .5$ 1/cm

Los valores de x_o s_o se muestran en las tablas (4.1 y 4.2).

Del valor de los parámetros calculados y de la ecuación (3.15) se obtienen los valores para la eficiencia de transformación (ET), los cuales se muestran en las tablas (4.3 y 4.4).

Estos resultados muestran que los regímenes de trabajo con una mayor densidad

Presión de Trabajo (mbar)	Densidad máxima (m^{-3})	ET (%)
7×10^{-4}	2.46×10^{17}	23.8
8×10^{-4}	2.75×10^{17}	24.8
2×10^{-3}	1.21×10^{17}	22.2

Tabla 4.3: Eficiencia de Transformación, $B_o = 438.4$ Gauss.

Conclusiones

De los resultados teóricos más importantes del trabajo de tesis podemos destacar lo siguiente

- *La condición para la existencia de una transformación de onda es que existan dos puntos, uno donde $\epsilon = 0$ (punto de corte), y otro donde $\epsilon = \infty$ (punto de resonancia), ya que en estas condiciones la onda electromagnética no se puede transmitir a través del plasma ya que sufre una amortiguación exponencial, en el punto de corte conforme se transmite en el plasma y, es sólo debido al efecto de penetración (pelicular) que la onda puede penetrar una pequeña distancia en el plasma y, sólo por medio de una transformación en una onda electrostática es que podría continuar su transmisión a través del mismo; si el punto de resonancia está muy lejos del punto de corte entonces la onda será completamente reflejada y no existirá la transformación de onda.*
- *Se muestra que la absorción de la energía de la onda electrostática ocurre en el punto de resonancia de acuerdo a la ecuación*

$$\overline{\Delta P} = -\frac{c^2 k_0^2 x_0}{8\omega} |E_y(0)|^2,$$

donde se observa que esta ecuación está evaluada en el punto $s = 0$ que es en donde ocurre la resonancia.

- *Se muestra que entre el punto de corte y el punto de resonancia, la onda electrostática sufre una amplificación continua conforme nos acercamos al híbrido superior hasta llegar a un máximo en el punto de resonancia como se ve en la ecuación*

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_h} \frac{E_x}{E_y} = \infty.$$

Este mismo límite nos dice que la componente E_y va disminuyendo su magnitud hasta que en el punto de resonancia se hace cero; simultáneamente la

Presión de trabajo (mbar)	Densidad máxima (m^{-3})	ET (%)
6×10^{-4}	3.63×10^{17}	23.9
7×10^{-4}	4.65×10^{17}	22.2
8×10^{-4}	3.73×10^{17}	25

Tabla 4.4: Eficiencia de Transformación, $B_0 = 477.9$ Gauss.

del plasma les corresponde una mayor transformación lineal; lo cual nos indica que el fenómeno de transformación lineal juega un papel en la formación del plasma que puede ser importante en los casos en que el coeficiente de transformación tenga un valor grande. El determinar los regímenes con los coeficientes de transformación lineal con el valor más grande posible nos permite generar un plasma más denso con un gasto menor de energía. De los resultados obtenidos se observa que la eficiencia de transformación corresponde en todas las presiones de trabajo consideradas, prácticamente al valor máximo que prevee el modelo teórico que es del 25%.

componente E_x va aumentando su tamaño, lo que significa que la onda electromagnética que penetra el plasma se va transformando en una onda electrostática conforme se acerca al punto de resonancia; es claro entonces que la transformación de la onda se realiza alrededor del punto de resonancia.

- Se obtiene una expresión para el cálculo del coeficiente de transformación lineal

$$CA = e^{-\pi s_0} - e^{-2\pi s_0} = [1 - |R|^2] - |T|^2$$

Se encuentra que el valor máximo del mismo es del 25% de la energía incidente sobre el plasma (ver ecuación 3.16).

- Se obtienen los coeficientes de la transformación lineal de onda para las condiciones de trabajo de nuestra máquina

Resultados experimentales:

En la parte experimental se realizaron una serie de experimentos para calcular algunos de los parámetros experimentales del plasma generado en nuestra máquina.

Se realizaron dos series de mediciones para determinar los parámetros del plasma en diferentes regímenes de trabajo de la máquina generadora de plasma, a través de los cuales se determinaron la eficiencia de transformación lineal de una onda electromagnética para los regímenes (presiones) de trabajo seleccionados.

Los valores obtenidos se muestran en las tablas (4.3 y 4.4). De estos valores se ve que a una densidad mayor del plasma le corresponde una eficiencia de transformación lineal mayor; lo cual significa que la energía absorbida por el plasma está siendo utilizada para aumentar su densidad.

Este resultado es de gran utilidad ya que servirá para encontrar las condiciones de trabajo en las cuales se obtiene un plasma más denso, lo cual es importante, ya que en diversas aplicaciones tecnológicas los procesos de interés se realizan mejor en la presencia de un plasma de mayor densidad.

De los resultados experimentales obtenidos se pueden hacer algunas conclusiones de carácter general sobre el comportamiento de la máquina.

1. Se determinó que a regímenes de trabajo diferentes les corresponden diferentes valores del parámetro s_0 , lo que implica que cada régimen tiene un valor diferente de la función dieléctrica, ya que $\epsilon_x = 1 + x_0/x = 1 + s_0/s$.

2. *En nuestra máquina en base a los resultados tanto teóricos como experimentales se puede cambiar la eficiencia de transformación lineal de tres maneras*

(a) Cambiando la presión de trabajo del gas.

(b) Cambiando el valor del campo magnético externo.

(c) Cambiando la frecuencia de la onda electromagnética que incide sobre el plasma. (por el momento en nuestro caso se cuenta solamente con un magnetrón de frecuencia constante)

3. *El fenómeno de transformación lineal permite formar plasmas más densos al conseguir que la energía que transporta la onda electromagnética sea absorbida por el plasma y, aumentar por medio de esta energía absorbida, el número de átomos y/o moléculas ionizados, obteniéndose por lo tanto un plasma de mayor densidad, que en el caso en que no existiera este fenómeno.*

En cuanto a la validéz del modelo usado, podemos decir que éste explica en forma cualitativa el comportamiento de nuestra máquina de un modo adecuado, aunque dado que hicimos varias simplificaciones para poder obtener un modelo que pudiera ser resuelto fácilmente, es natural considerar que desde el punto de vista cuantitativo se presenten diferencias debido a la existencia de una temperatura diferente de cero, a que la simetría del experimento es cilíndrica, y el plasma en la máquina es acotado, mientras que nosotros consideramos un plasma semi-infinito.

Sería conveniente el hacer más adelante un trabajo sobre la transformación lineal de ondas con un modelo más realista, en el cual consideraríamos una temperatura del plasma diferente de cero y una simetría cilíndrica. Trabajo que no fue posible realizar en el presente trabajo de tesis por cuestiones de tiempo.

Apéndice A

Solución de la ecuación de Airy

Se busca una solución de la forma [13, p. 20]

$$w(z) = \int_C e^{zt} f(t) dt. \quad (\text{A.1})$$

para la ecuación de Airy

$$w'' + zw = 0.$$

tal que $f(t)$ debe de satisfacer la relación

$$\Delta_C e^{zt} \Phi(z, t) + \int_C e^{zt} \left[\sum_{r=0}^m (-1)^r \frac{d^r}{dt^r} \{p_r(t) f(t)\} \Delta_C e^{zt} \Phi(z, t) \right] dt = 0, \quad (\text{A.2})$$

donde [13, pp. 22]

$$\Phi(z, t) = \sum_{r=1}^m \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s z^{r-s-1} \frac{d^s}{dt^s} \{p_r(t) f(t)\}. \quad (\text{A.3})$$

La función $f(t)$ se selecciona de modo que satisfaga la ecuación diferencial

$$\sum_{r=0}^m (-1)^r \frac{d^r}{dt^r} \{p_r f(t)\} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Una vez fijada $f(t)$ el contorno C de integración se selecciona de modo que

$$\Delta_C e^{zt} \Phi(z, t) = 0,$$

donde Δ_C representa el cambio en valor de la función al variar desde un extremo al otro del contorno de integración.

Una ecuación diferencial lineal del tipo Laplace tiene la forma

$$\sum_{k=0}^n (a_s + b_k z) \frac{d^{n-k} w}{dz^{n-k}} = 0, \quad (\text{A.5})$$

donde los coeficientes son funciones lineales de z ; se observa que la ecuación de Airy, es de este tipo.

En este caso los únicos valores de $p_r(t)$ diferentes de cero son respectivamente

$$p_0(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^{n-k},$$

y

$$p_1(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^{n-k}.$$

La ecuación (A.3) se reduce a

$$\frac{d}{dt} \{p_1(t)f(t)\} - p_0 f(t) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Si se define

$$g(t) = p_1(t)f(t), \quad (\text{A.7})$$

derivando con respecto al tiempo la expresión de $g(t)$ se obtiene

$$\frac{d}{dt} \log g(t) = \frac{p_0(t)}{p_1(t)}. \quad (\text{A.8})$$

Despejando $g(t)$ se encuentra

$$\frac{g(t)}{g(t_0)} = \exp \left[\int_{t_0}^t \frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)} d\tau \right], \quad (\text{A.9})$$

y la condición sobre el contorno de integración se reduce a

$$\Delta_C e^{2t} g(t) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Esta condición se cumple si se elige para C un contorno cerrado dentro del cual $g(t)$ es una función monovaluada. También se cumple la condición si $e^{2t}g(t)$ se anula en ambos extremos del contorno. De este modo se puede seleccionar como un punto extremo del contorno un punto finito si $g(t)$ se anula en dicho punto; o se puede seleccionar el infinito como un punto extremo, si se propone una dirección de aproximación a infinito para el contorno a lo largo del cual $e^{2t}g(t)$ tiende uniformemente a cero.

Para aplicar el método antes descrito para resolver la ecuación diferencial de Airy, se reescribe la ecuación de Airy como

$$w'' + zw = 0.$$

Entonces

$$P_0 = t^2,$$

y

$$P_1 = 1.$$

Introduciendo estos dos valores en la expresión para $y(t)$ se obtiene

$$\begin{aligned} g(t) &= \exp \left[\int \frac{P_0}{P_1} dt \right], \\ &= \exp \int_0^t t^2 dt, \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{3} t^3 \right\}, \end{aligned}$$

por lo que una solución de la ecuación es

$$\omega(t) = \int_C e^{zt} \exp\left(\frac{1}{3}t^3\right) = \int_C \exp\left(zt + \frac{1}{3}t^3\right),$$

suponiendo que $\Delta_C \exp\left(zt + \frac{1}{3}t^3\right) = 0$.

Cuando $t \rightarrow \infty$ el término dominante será $\exp\left(\frac{1}{3}t^3\right)$ y por lo tanto se deberá seleccionar una dirección de acercamiento a ∞ sobre la cual

$$\Re(t^3) < 0.$$

si $t = re^{i3\theta}$ entonces

$$\Re(t^3) < 0 \longrightarrow \cos(3\theta) < 0,$$

y por lo tanto se requiere que el argumento de t satisfaga

$$\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi < \arg(t^3) < \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi,$$

sacando la raíz cúbica de la ecuación anterior y multiplicando por $1 = 2/2$ en la desigualdad anterior, obtenemos

$$\frac{(4k+1)}{6}\pi < \arg(t) < \frac{(4k+3)}{6}\pi,$$

para $k = -1, 0, 1$ se obtiene

$$k = 0; \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6} < \arg(t) < \frac{3}{6}\pi = \frac{\pi}{3} = 90^\circ,$$

$$k = 1; \quad 150^\circ = \frac{5}{6}\pi < \arg(t) < \frac{7}{6}\pi = 210^\circ.$$

$$k = -1; \quad -90^\circ = -\frac{3}{6}\pi < \arg(t) < -\frac{\pi}{6} = -60^\circ,$$

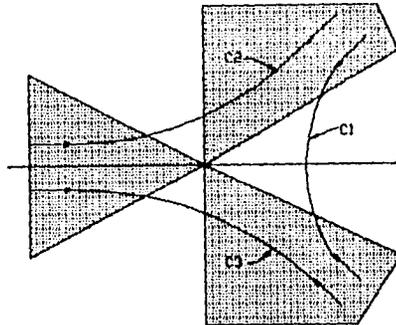


Figura A.1: Contornos de integración.

entonces $C1$, $C2$ y $C3$ son tres contornos, ver (fig. A.1) de integración, de los cuales sólo dos soluciones son linealmente independientes, y por lo tanto existe una relación entre las soluciones, por lo tanto se puede escribir

$$w_2(z) = w_3(z) + w_1(z).$$

Las soluciones convencionales son

$$\frac{1}{2\pi i} w_1(z) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \{w_2(z) + w_3(z)\}.$$

Se puede distorsionar $C1$ continuamente en el eje imaginario y entonces

$$t = v + iu \rightarrow iu \Rightarrow zt + \frac{1}{3}t^3 = i \left(zu - \frac{u^3}{3} \right),$$

y

$$\exp \left(zt + \frac{1}{3}t^3 \right) \Rightarrow \exp i \left(zu - \frac{u^3}{3} \right).$$

$$= \cos\left(zu - \frac{u^3}{3}\right) + i \sin\left(zu - \frac{u^3}{3}\right).$$

Tomando la parte real se encuentra finalmente la solución de la ecuación de Airy

$$w_1(z) = 2i \int_0^\infty \cos\left(xu - \frac{u^3}{3}\right) du, \quad (\text{A.11})$$

que es la solución buscada.

De forma semejante se obtiene

$$w_2(z) + w_3(z) = -2 \int_0^\infty \exp\left(-zu + \frac{u^3}{3}\right) du + 2 \int_0^\infty \sin\left(zu - \frac{u^3}{3}\right) du.$$

En este trabajo se empleará únicamente la solución dada por $w_1(z)$.

Apéndice B

Solución de la ecuación de Whittaker

Para E_y finita cuando $s \rightarrow \infty$, los contornos de integración mostrados en la (Fig. B.1) nos permiten obtener una solución a la ecuación (2.39). La contribución principal para E_y cuando $s \rightarrow \infty$ viene de la región $\text{Im } w \approx 0$. La conducta asintótica para E_y se puede calcular sustituyendo [2, pp. 578] $w = \exp(-i\pi)/(2sz)$, $w - 1 = \exp(-i\pi)$, donde z es una variable de integración real y las fuses de w , $w - 1$ son determinados por la estructura de corte mostrada en la (Fig. B.1)[2, pp. 578]

para $s > 0$ (alrededor de $w = 0$)

Al sustituir estas nuevas variables en la ecuación (2.39), y denotando $W_{k,m}(s)$ por E_y , ésta se transforma en

$$\begin{aligned} E_y &= A s e^{is} \int e^{-i(2s e^{-i\pi/2})z} z / 2s \left(\frac{e^{-i\pi}}{(e^{-i\pi/2}z)/z} \right)^{is_0/2} e^{-i\pi/2} dz, \\ &= \frac{-iA}{2} e^{is} (2s)^{is_0/2} e^{\pi s_0/4} \int e^{-z} z^{-is_0/2} dz, \end{aligned}$$

esta integral se resuelve usando la definición integral de la función Gamma.

$$\Gamma(1-z) = \frac{1}{e^{-2\pi iz} - 1} \int e^{-\zeta} \zeta^{-z} d\zeta,$$

$$E_y = \frac{-iA}{2} e^{is} (2s)^{is_0/2} (e^{\pi s_0} - 1) \Gamma\left(1 - \frac{is_0}{2}\right) e^{\pi s_0/4}.$$

Los cambios de variable utilizados permiten obtener una ecuación de más fácil manejo en comparación con la expresión (2.39) que se tenía antes.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

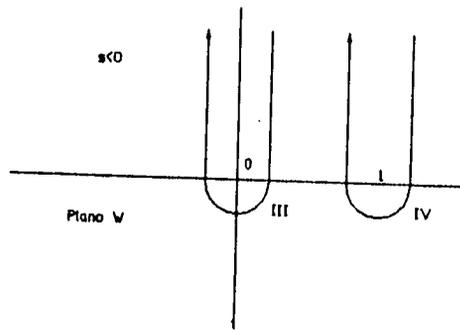
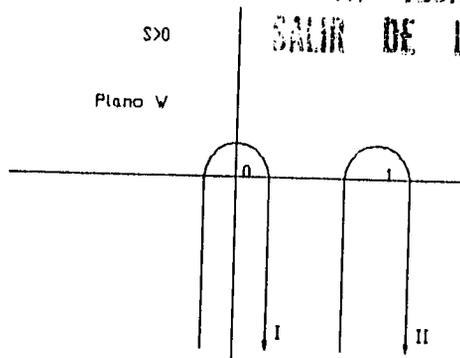


Figura B.1: Contornos de integración para la onda extraordinaria, incidencia normal.

Apéndice C

Componentes de la velocidad electrónica

Obtención de las componentes v_x, v_y, v_z , de la velocidad de los electrones. De la ecuación (2.4) se obtiene desarrollando el producto cruz en la ecuación

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0),$$

donde $\vec{B} \parallel z$, la expresión

$$\vec{v} \times \vec{B}_0 = v_y B_0 \hat{i} - v_x B_0 \hat{j},$$

separando las tres componentes de la velocidad se obtiene

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{e}{m}(E_x + v_y B_0), \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{e}{m}(E_y + v_x B_0), \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{e}{m}E_z. \quad (\text{C.3})$$

Suponemos que las velocidades están dadas por expresiones de la forma

$$\begin{aligned}
 v_x &= v_x e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\
 v_y &= \dots \\
 v_z &= \dots
 \end{aligned}$$

sustituyendo el desarrollo de $\partial v_y / \partial t$ en (C.2) obtenemos

$$-i\omega v_y = -\frac{e}{m} E_y + \frac{e}{m} B_0 v_x = -\frac{e}{m} E_y + \omega_c v_x,$$

donde $\omega_c = eB_0/m$.

despejando v_y

$$v_y = \frac{e}{i\omega m} E_y - \frac{\omega_c}{i\omega} v_x. \quad (C.4)$$

de (C.1) se obtiene de igual manera

$$\begin{aligned}
 -i\omega v_x &= -\frac{e}{m} (E_x + v_y B_0), \\
 &= -\frac{e}{m} E_x - e \frac{B_0}{m} v_y, \\
 &= -\frac{e}{m} E_x - \omega_c v_y.
 \end{aligned}$$

despejando v_x . Obtenemos

$$v_x = \frac{e}{i\omega m} E_x + \frac{\omega_c}{i\omega} v_y. \quad (C.5)$$

De la ecuación (C.3) se obtiene de igual modo

$$-i\omega v_z = -\frac{e}{m} E_z.$$

Despejando v_z de la ecuación anterior obtenemos

$$v_z = \frac{e}{i\omega m} E_z. \quad (C.6)$$

sustituyendo la expresión obtenida para v_y en la expresión de v_x obtenemos

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{e}{i\omega m} E_x + \frac{\omega_c}{i\omega} \left(\frac{e}{i\omega m} E_y - \frac{\omega_c}{i\omega} v_x \right), \\ &= \frac{e}{i\omega m} E_x + \frac{\omega_c e}{(i\omega)^2 m} E_y - \frac{\omega_c^2}{i^2 \omega^2} v_x, \\ &= \frac{e}{i\omega m} E_x - \frac{\omega_c e}{\omega^2 m} E_y + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} v_x. \end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes de v_x obtenemos

$$\begin{aligned} v_x \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) &= \frac{e}{i\omega m} E_x - \frac{\omega_c e}{\omega^2} \frac{E_y}{m}, \\ v_x &= \frac{e}{\omega m} \left(\frac{E_x}{i} - \frac{\omega_c E_y}{\omega} \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Sustituyendo la ecuación (C.5) en la ecuación (C.4) obtenemos

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{e}{i\omega m} E_y - \frac{\omega_c}{i\omega} \left(\frac{e}{i\omega m} E_x + \frac{\omega_c}{i\omega} v_y \right), \\ v_y &= \frac{e}{i\omega m} E_y - \frac{\omega_c}{i\omega} \cdot \frac{e}{i\omega m} E_x + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} v_y. \end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes de v_y obtenemos finalmente

$$v_y = \frac{e}{\omega m} \left(\frac{E_y}{i} + \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1} \quad (\text{C.8})$$

Apéndice D

Programa de Cómputo para el Diagnóstico de Plasmas con Sondas Eléctricas

TESIS SIN PAGINACION

COMPLETA LA INFORMACION

Programa de cómputo para el diagnóstico de plasmas con sondas eléctricas

ENRIQUE CAMPS, RICARDO ONDARZA Y GERARDO ANGUIANO

*Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares
Apartado postal 18-1027, 11801 México, D.F., México*

Recibido el 27 de enero de 1992; aceptado el 8 de junio de 1992

RESUMEN. Para el diagnóstico de plasmas mediante sondas eléctricas, unitarias o dobles, se propone un programa de cómputo, mediante el cual el proceso de interpretación de la característica I-V se simplifica significativamente. Los cálculos se realizan con base en la teoría iónica, lo que permite aplicar el programa a un mayor número de casos experimentales, incluyendo el de un plasma magnetizado débilmente. El programa funciona a través de un sistema de menús, facilitando así el acceso al mismo.

ABSTRACT. A computer program for the unitary and doble probe plasma diagnostic is proposed, remarkably simplifying the characteristic I-V interpretation process. The calculations are performed using the ionic theory, which permits to apply the program to a vast number of experimental cases, including those with weakly magnetized plasmas. This program implements a user interface that enables its easy access.

PACS: 52.70.Ds

1. INTRODUCCIÓN

El diagnóstico básico por sondas eléctricas ha sido y continúa siendo uno de los métodos más utilizados para la determinación de los parámetros del plasma. Aunque su principal campo de aplicación se encuentra en dispositivos en los que se realizan descargas de resplandor o de radiofrecuencia de tipo capacitivo o inductivo, las sondas son usadas ampliamente en dispositivos destinados a la producción de plasma denso y caliente, como son los tokamaks o algunas máquinas espejo con el fin de caracterizar el plasma de la periferia. Las razones, por las que este tipo de diagnóstico es usado preferencialmente en descargas generadoras de plasma frío, se debe a la sencillez y al bajo costo de implementación del método, así como a sus posibilidades para realizar mediciones locales. Sin embargo, la sencillez de aplicación del método contrasta con su interpretación teórica bastante complicada, la cual debe ser realizada en función del tipo de plasma que se estudia [1].

El objetivo de este trabajo es extraer de la literatura existente que se ha escrito sobre sondas eléctricas, aquellos conceptos que puedan ser aplicados en la mayoría de los casos y concentrarlos en un programa de cómputo que permita realizar la interpretación de la característica tensión-corriente (CTC) en forma cómoda y rápida.

Para poder calcular los parámetros del plasma (T_e , n , V_p , temperatura electrónica, concentración y potencial del plasma) es necesario tener un modelo teórico de la característica

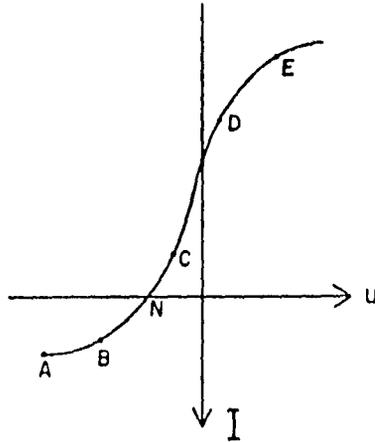


FIGURA 1.

tensión-corriente (CTC) y compararlo con la característica obtenida experimentalmente. En muchos casos el modelo teórico se aplica a la parte electrónica de la característica (sección CE de la Fig. 1), esto se debe a la sencillez de la teoría en esta parte. Sin embargo, hay una serie de casos experimentales en los que no es posible obtener la saturación electrónica en la característica; por ejemplo, cuando se trabaja con descargas de grandes densidades de corriente, descargas en campos magnéticos o descargas inducidas sin electrodos. En estos casos es necesario utilizar la parte iónica de la característica (parte AC Fig. 1), lo que permite realizar mediciones con corrientes más pequeñas, además esta parte es posible obtenerla prácticamente en cualquier experimento. Por otro lado, el campo magnético influye menos sobre esta parte, ya que la corriente está determinada por los iones y los electrones rápidos. La parte iónica de la CTC puede ser utilizada también en los casos cuando sí se obtiene la parte de saturación electrónica, por lo que, para nuestros propósitos, resulta una teoría más general.

La teoría de la parte iónica de la característica fue propuesta por primera vez por Langmuir y Mott-Smith [2]. Esta teoría sufrió con el tiempo una serie de modificaciones, en particular hechas por Bohm y en su forma actual se utilizará en este trabajo para el cálculo de los parámetros del plasma, tomando en cuenta que el plasma deberá ser isótropo, o al menos estar seguros de que los iones no están magnetizados; en otras palabras, el radio de Larmor de los iones debe ser mayor que las dimensiones características del dispositivo contenedor del plasma. Si esto se cumple, entonces decimos que se tiene un plasma magnetizado débilmente.

Debido a que las propiedades del plasma pueden ser alteradas por la presencia de la sonda, es necesario garantizar que las longitudes de recorrido libre de los iones y de los electrones sean lo suficientemente grandes para que las colisiones no afecten el movimiento de las partículas en la parte perturbada, esto limita la aplicación de la teoría a presiones de trabajo menores que 10^{-1} torr. El plasma, además, se considera compuesto de electrones

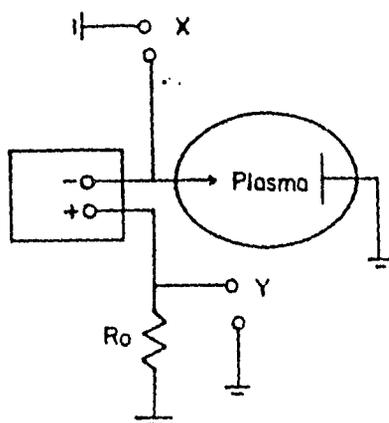


FIGURA 2.

y iones de un sólo tipo. Finalmente, sólo resta mencionar que la teoría utilizada en este trabajo es válida únicamente para el caso de sondas de tipo cilíndrico.

2. SONDA UNITARIA

El esquema eléctrico para la obtención de la característica se muestra en la Fig. 2, donde X y Y representan las correspondientes entradas del graficador. La carga R_0 se escoge en función de las mediciones que se deseen hacer. Para realizar mediciones de corriente debe cumplirse que $R_0 \ll R$, donde R es la impedancia del plasma. La impedancia del plasma puede ser calculada [3] tomando en cuenta que en el punto flotante la corriente total tendrá una variación del orden de I_i (corriente de saturación iónica). Si el voltaje tiene una variación del orden kT_e/e , entonces la impedancia efectiva se puede calcular de la siguiente relación:

$$R = \frac{T_e}{I_i}$$

donde

$$I_i = enSv_i = en\sqrt{\frac{kT_e}{M}}S,$$

T_e es la temperatura electrónica del plasma en eV, M es la masa del ión, e el valor de la carga elemental, S el área de la sonda y n la concentración del plasma.

2.1. Interpretación de la característica

Considerando que la función de distribución electrónica no varía a lo largo de la trayectoria de las partículas, en el espacio de velocidades y de posiciones, se tiene que ésta depende solamente de la energía. Por otra parte, la función de distribución en la superficie de la sonda no depende de la variación del potencial entre la sonda y el plasma no perturbado, sino tan sólo del potencial de la sonda. Bajo estas consideraciones, la parte electrónica del plasma no perturbado presenta una distribución maxwelliana,

$$f_0(\epsilon) = \left(\frac{m}{2\pi kT_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\epsilon}{kT_e}\right),$$

que introducida en la expresión para la densidad de corriente

$$j_e = \frac{2\pi en}{m^2} \int_{eV}^{\infty} (\epsilon - eV) f_0(\epsilon) d\epsilon, \quad (1)$$

se obtiene

$$j_e = \frac{nev_e}{4} \exp\left(-\frac{eV}{kT_e}\right), \quad (2)$$

donde

$$v_e = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m}},$$

siendo ϵ y m la energía y la masa del electrón.

2.2. Temperatura electrónica

Como se mencionó anteriormente, la parte AC (Fig. 1) de la CTC de la sonda, generalmente es fácil de obtener en cualquier experimento. Para obtener información acerca de la temperatura electrónica a partir de esta zona, es necesario eliminar la influencia de la corriente iónica sobre la corriente total de la sonda. Para esto se diferencia (gráficamente) la corriente total respecto del potencial y se supone que la variación de la corriente total respecto del potencial de la sonda está determinada por la variación de la corriente electrónica (u-potencial de la sonda)

$$\frac{di}{du} \approx -\frac{di_e}{du}.$$

Esta suposición se hace con base en que la corriente iónica es mucho más lenta que la electrónica. Una vez hecho esto, se construye una gráfica de $\ln(di_e/du)$ vs. u que para el caso de una distribución maxwelliana será una recta de cuya pendiente se obtendrá la temperatura electrónica ($T_e = \cot \theta = 1/m$, donde m es la pendiente $[T_e] - eV$; esto puede ser obtenido derivando (2) respecto de u). El método descrito para calcular T_e tendrá que

ser usado siempre y cuando no pueda obtenerse la corriente electrónica de saturación en la CTC.

2.3. Potencial del plasma

Para la determinación de la concentración es necesario determinar previamente no sólo la temperatura, sino el potencial del plasma también. Este potencial puede determinarse a partir del potencial flotante (que se obtiene de la CTC directamente, punto N Fig. 1) mediante los siguientes razonamientos. En el punto flotante la condición de balance de corriente implica que $j_i = j_e$, y de (2) se tiene

$$nv_i = \frac{nv_e}{4} \exp\left(-e\frac{(V_c - V_f)}{kT_e}\right), \quad (3)$$

donde V_c es el potencial en la frontera de la capa de carga espacial, que rodea a la sonda, V_f es el potencial flotante, v_i es la velocidad de Bohm definida como $\frac{1}{2}\sqrt{kT_e/M}$. Como el potencial en la parte intermedia entre la capa y la parte no perturbada del plasma es aproximadamente $kT_e/2e$, el potencial del plasma (V_p) será entonces $V_p = V_c + kT_e/2e$. Utilizando esta relación y (3) se obtiene

$$V_p = V_f + \frac{kT_e}{2e} + \frac{kT_e}{e} \ln\left(\sqrt{\frac{2M}{\pi m}}\right), \quad (4)$$

que proporciona una relación para V_p a través de V_f , que facilita las mediciones, ya que no es necesario medir grandes corrientes electrónicas para determinar V_p .

2.4. Concentración del plasma

Para el caso de una sonda con potencial negativo, el papel de la superficie recolectora de iones lo juega no la sonda misma, sino una superficie de radio mayor (radio limitante), a la que una vez que entra el ión, este cae directamente a la sonda. A la superficie de carga espacial los iones caen casi radialmente. El potencial en la superficie de esta capa (V_c) es del orden de kT_e , de modo que esta capa comienza donde la concentración electrónica empieza a disminuir en forma significativa.

Para obtener una expresión general de la corriente iónica se determina la dependencia del radio limitante de la sonda en función de la velocidad inicial del ión que cae a la sonda, que está condicionada a su vez al tipo de dependencia que tenga el potencial en los alrededores de la sonda. Para determinar la concentración del plasma se considera que los iones, lejos de la sonda tienen la misma energía de movimiento (en el caso cilíndrico, perpendicular al eje de la sonda). Para lo cual se sustituye la distribución real de los iones en el plasma por una en la que todos tienen la misma energía ϵ_0 ,

$$F_0(v_0) = \frac{M}{2\pi} \delta\left(\frac{Mv_0^2}{2} - \epsilon_0\right).$$

El análisis de la distribución del potencial en la región cuasineutral muestra que el potencial del cilindro limitante es del orden de la energía de los electrones. De la condición de cuasineutralidad dentro del radio limitante es posible obtener en forma aproximada la frontera de la capa de carga espacial x_c . Para distancias menores que x_c no se cumple la condición de cuasineutralidad, y para el caso cilíndrico esta capa se encuentra localizada cerca del radio limitante. En la región entre la capa de carga superficial y la superficie de la sonda, el potencial crece rápidamente y la concentración de los electrones decae más rápido que la de los iones. La densidad de carga tiene un máximo a una cierta distancia r_p del centro de la sonda, a esta región se le denomina región de reflexión y constituye el radio efectivo de la sonda. Para determinar esta cantidad se utiliza la ecuación de Langmuir para un condensador cilíndrico. Finalmente, la expresión para la corriente iónica tiene la forma [4]

$$i_p = 2\pi e r_p n \sqrt{\frac{2kT_e}{M}} \alpha(\theta) l_a, \quad (5)$$

donde r_p es el radio de la capa iónica, l_a es la longitud de la parte activa de la sonda y θ es una variable relacionada con la energía de los iones. Si se considera que $T_e \gg T_i$, entonces $\theta \ll 1$ y $\alpha \sim 0.37$.

Para determinar r_p se aplica la ley de los "3/2" de Langmuir

$$i_p = \frac{2\sqrt{2}}{9} l_a \sqrt{\frac{e}{M}} \frac{(V_s)^{3/2}}{a\beta^2(\frac{r_p}{a})},$$

donde V_s es el potencial de la sonda respecto de la capa de carga espacial y a es el radio de la sonda. Debido a que el potencial de la sonda respecto del electrodo de referencia es $V = V_p + V_s$ [5] se tiene entonces

$$i_p = \frac{2\sqrt{2}}{9} l_a \sqrt{\frac{e}{M}} \frac{|V - V_p|^{3/2}}{a\beta^2(\frac{r_p}{a})}, \quad (6)$$

donde

$$\beta^2 = (k_1\gamma - k_2\gamma^2 + k_3\gamma^3 - \dots)^2 \quad (7)$$

y

$$\gamma = \ln \frac{r_p}{a},$$

donde V es el voltaje en el cual se mide el valor de la corriente de saturación i_p , y los k_i 's son coeficientes constantes.

Una vez calculada la temperatura, de la Ec. (4) se calcula el potencial del plasma. Para calcular la concentración del plasma, es necesario previamente determinar el radio de la capa iónica. Esto último se obtiene a partir de la Ec. (6), donde se determina el valor de

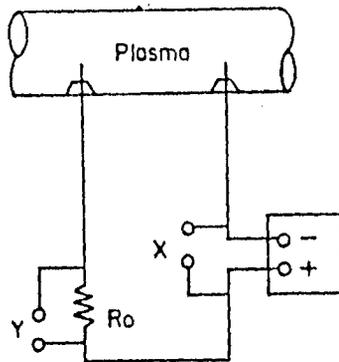


FIGURA 3.

β^2 , una vez hallado este valor se encuentra su correspondiente argumento [esto es, el valor de $\ln(r_p/a)$] para lo cual se resuelve la ecuación

$$\beta^2 - (k_1\gamma - k_2\gamma^2 + k_3\gamma^3 - \dots)^2 = 0,$$

lo que se realiza en el programa con el método de la secante, haciendo uso de 14 coeficientes k_i , tomados de la Ref. [6]. Finalmente, se calcula la densidad del plasma mediante la Ec. (5).

3. SONDA DOBLE

En los casos cuando en el plasma no se tiene un electrodo de referencia, o sea, con un potencial fijo, no es posible utilizar el método de la sonda unitaria para determinar sus parámetros. En estos casos se introducen al plasma dos electrodos iguales y se mide la corriente en el circuito de la sonda en función de la diferencia de potencial entre los electrodos. En la Fig. 3 se muestra una posible forma de conexión de la sonda y en la Fig. 4 una característica típica [7].

Un caso típico donde es necesario utilizar el método de la sonda doble son las descargas de radiofrecuencia inducidas. En la Fig. 4 se muestra el caso de una sonda simétrica, cuando el plasma puede ser considerado homogéneo en la región entre las sondas.

3.1. Temperatura electrónica

Aunque el método de la sonda doble permite reducir al mínimo las perturbaciones que existan en el plasma, tiene por otro lado el defecto de no poder determinar la temperatura del grupo principal de los electrones, debido a que en la sonda se agrupan únicamente los electrones más rápidos, que son los de la cola de la distribución energética.

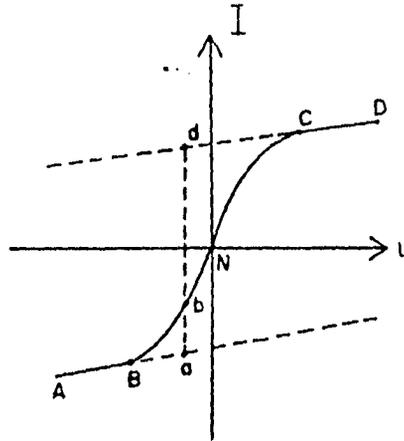


FIGURA 4.

Para poder determinar la temperatura se debe tener un modelo teórico de la parte BC (Fig. 4) de la característica. Como las corrientes que fluyen por las sondas son iguales, entonces

$$I = i'_p - i'_e = i''_e - i''_p, \tag{8}$$

donde se considera que los electrones en la parte no perturbada del plasma tienen una distribución maxwelliana,

$$i'_e = i'_0 e^{-eV'/kT_e}, \quad i''_e = i''_0 e^{-eV''/kT_e},$$

donde V' y V'' son los potenciales del plasma respecto de la primera y segunda sondas, i'_p e i''_p son las corrientes iónicas respectivamente, I es la corriente total.

Para el potencial de la sonda se tiene

$$u = V' - V'', \tag{9}$$

utilizando las Ecs. (8) y (9) y tomando en cuenta que $i'_0 = i''_0$ (sondas con áreas iguales) se obtiene

$$\ln \left(\frac{i'_p + i''_p}{i'_e} - 1 \right) = \frac{e}{kT_e} u. \tag{10}$$

La Ec. (10) permite determinar la temperatura del plasma, para lo cual puede utilizarse un método aproximado de extrapolación lineal de las corrientes de saturación (líneas punteadas en Fig. 4). La Ec. (10) en términos de la notación de la Fig. 4 toma la forma

$$\ln \left(\frac{\bar{b}d}{\bar{a}b} \right) = \frac{e}{kT_e} u. \tag{11}$$

El gráfico de $\ln(\bar{b}d/\bar{a}b)$ vs. u es una recta de cuya pendiente se obtiene la temperatura electrónica.

3.2. Potencial del plasma

Debido a que de la característica de la sonda doble no se puede determinar el valor del potencial flotante, no es posible utilizar el método descrito en la Sec. 2.3. Para obtener una expresión aproximada del potencial del plasma, se toma en cuenta que en el punto N' (Fig. 4) $i_e = i_p$ y de las Ecs. (2) y (5) se obtiene

$$\frac{eV_p}{kT_e} = \ln \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{a}{r_p} \frac{1}{\alpha(\theta)} \right]. \quad (12)$$

3.3. Concentración del plasma

Cuando ya se han determinado T_e y V_p es posible calcular la concentración del plasma utilizando el método descrito en la Sec. 2.4. Esto es debido a que cuando la diferencia de potencial (u) entre las sondas es grande, la corriente que fluye por la sonda más negativa es prácticamente iónica y coincide con la parte iónica de la sonda unitaria.

Los métodos descritos anteriormente para la interpretación de la característica tensión-corriente fueron utilizados para determinar los parámetros del plasma generado por un dispositivo tipo ECR [8], en donde se compararon con algunas mediciones hechas por diagnóstico de microondas. La comparación mostró una buena correlación de los métodos.

4. INTERFASE DE USUARIO

En la actualidad se reconoce la importancia que tiene el desarrollo de una interfase de usuario amigable y bien diseñada, de modo que el sistema de menús lleve de una manera directa a través de la secuencia correcta de las opciones que se presentan.

Es por esto que se pensó en desarrollar un sistema de menús para presentar los programas `sond.exe` y `sondob.exe` para realizar la interpretación de la característica de una sonda. Los menús fueron desarrollados en lenguaje C ya que presenta buenas características para el desarrollo de los mismos.

Para implementar el sistema se pensó en realizar una serie de módulos para ejecutar todas las tareas necesarias, ya que de este modo el sistema se puede ampliar fácilmente incorporando nuevos módulos ejecutables u otros más eficientes. Esto nos permite una mejor administración de la memoria y un buen grado de mantenibilidad del sistema. Para la implementación de los menús se usaron rutinas con acceso directo a la memoria de video con el fin de obtener un despliegue instantáneo en pantalla, por este motivo el sistema es compatible con máquinas tipo IBM compatibles y sistema operativo Dos.

Las rutinas de C detectan en forma automática la tarjeta instalada en la computadora empleando la máxima resolución posible donde es necesario. En algunas secciones del

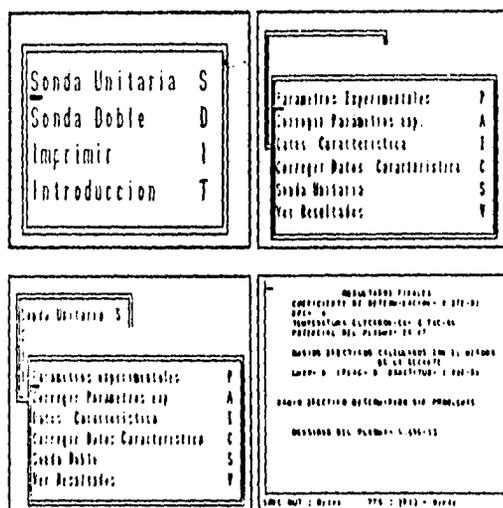


FIGURA 5. Las ventanas muestran las opciones del programa. La cuarta pantalla muestra un ejemplo de una corrida realizada con la opción sonda unitaria.

programa se emplearon simultáneamente rutinas de acceso directo a la memoria de video, acceso a los registros y funciones propias de C, encontrándose un buen acoplamiento en la ejecución de las mismas. Esta combinación de rutinas ahorra trabajo en el momento de la codificación.

La Fig. 5 muestra las opciones del menú principal (en la opción "Introducción" se describen algunos casos experimentales, para los cuales son aplicables los métodos de diagnóstico descritos aquí), para la sonda unitaria, para la sonda doble y la salida de una corrida del programa sonda unitaria, para el caso de un experimento realizado en el dispositivo descrito en [8]. La selección de las opciones se puede realizar de dos maneras; oprimiendo la tecla de la letra que se encuentra a la derecha de la opción o colocando el cursor sobre la opción deseada con las teclas de flecha y oprimiendo la tecla "Enter".

5. CONCLUSIONES

El plasma frío anisótropo tiene en la actualidad una gran variedad de aplicaciones, por lo que su uso se hace cada vez más común. Por lo mismo, es indispensable tener a la mano un sistema de diagnóstico sencillo y confiable, como son las sondas eléctricas. El programa propuesto en este trabajo viene a complementar el método, ya que éste permite con menor posibilidad de error y tiempo realizar la interpretación de las mediciones realizadas.

Las limitaciones propias de la teoría usada aquí, no le quitan generalidad al método, ya que en muchos de los dispositivos generadores de plasma frío, se tiene el tipo de plasma que puede ser diagnosticado con el método propuesto.

REFERENCIAS

1. B.E. Cherrington, *Plasma Chem. and Plasma Processing* 2, No. 2 (1982).
2. J. Langmuir and H. Mott-Smith, *Phys. Rev.* 28 (1926) 727.
3. F.F. Chen, *Research Report, Nagoya University IPPJ-750* (Nov. 1985).
4. Yu M. Kagan and V.I. Perel, *Sov. Phys. Uspekhi*, (May-June, 1964) 767.
5. W. Lochte-Holtgreven, *Plasma Diagnostics*, North-Holland Publishing Co. Amsterdam (1968).
6. J. Langmuir and K.P. Blodget, *Phys. Rev.* 22 (1923) 347.
7. F.F. Chen, *Plasma Diagnostic Techniques*, Academic Press (1965).
8. A.A. Balmashnov, K.S. Golovanivsky and E. Camps, *International Conference on Plasma Physics*, T.2. Kiev, USSR April 6-12 (1987).

Apéndice E

Multipurpose Microwave Plasma Source

Multipurpose microwave plasma source

ENRIQUE CAMPS, OSCAR OLEA, GERARDO ANGUIANO,
RICARDO ONDARZA AND CÉSAR R. GUTIÉRREZ

Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares

Gerencia de Investigación Básica, Apartado postal 18-1027, 11801 México, D.F., México

Recibido el 13 de marzo de 1992; aceptado el 15 de diciembre de 1992

ABSTRACT. Electron cyclotron resonance (ECR) plasma devices have an important place among the electrodeless cold plasma sources, due to their potential applications in industry. Many different devices of this type are now under research around the world. This paper deals with the design description of a microwave ECR plasma source, in which an overdense plasma will be generated, making use of the plasma eigen modes to induce wave conversion.

RESUMEN. Dentro de las fuentes de plasma frío sin electrodos, los dispositivos generadores de plasma mediante resonancia ciclotrónica de los electrones ocupan un lugar importante, debido a sus posibilidades potenciales de aplicación en la industria. Existe una gran variedad de dispositivos de este tipo que se encuentran en estudio actualmente. En el presente trabajo se hace la descripción del diseño de una de estas fuentes de plasma. En este dispositivo, haciendo uso de los modos propios del plasma para inducir transformación de ondas, se creará un plasma supercrítico.

PACS: 52.50.Dg; 52.35.-g

1. INTRODUCTION

Potential applications of plasma in materials processing [1], which include from thin film deposition, plasma polymerization and microcircuit fabrication to welding, tool hardening, synthesis of pure and ultrafine powders has led to a sharp raise of interest in developing different kind of plasma producing devices. Otherwise, there are many interesting physical phenomena, like linear and nonlinear wave conversion [2], isotope separation [3], that could be object of research in these type of devices.

Commercially available devices are based on low frequency (rf) parallel plate reactors and dc plasma sources of the Kaufman type. Many other applications requiring high film deposition velocities, operation with chemically active gases or high beam currents need the development of devices different from the commercially available ones. Some of those problems can be solved by the use of microwave discharges which actually are in their research stage. The frequencies usually used in this technology cover the range from 300 MHz to 10 GHz. This paper describes the design of such a device, which actually is under construction. In this device, in order to generate the discharge will be used a cylindrical cavity working in single mode excitation. This cavity is situated in an external static magnetic field, used for ignition and confinement of the plasma. The working parameters of the magnetic field will allow the generation of overdense plasma.

The organization of the paper is as follows: in Sect. 2 the main points under which the design was made are discussed. In Sect. 3 the description of the design is given.

2. OVERDENSE PLASMA

During the last years many different microwave plasma or ion sources have been proposed to solve specific problems [4]. An attempt to make a classification of these devices by the way the plasma is created and in dependence on the type of created plasma is given in Ref. [5]. Following this classification the design we are going to describe finds its place among the overdense plasma sources. The principal difference of this machine is that the working regime is not the resonance, but lower values of the magnetic field. Experimentally we have shown the possibility of overdense plasma generation in these regimes [6]. The purposes and the ways for creating such plasmas are the most different. As we previously determined [7], with microwave overdense plasma it is possible to produce some material treatments faster than with underdense plasma.

The overdense plasma is going to be generated in our device by making use of the eigenmodes of a magnetized plasma. The creation of microwave overdense plasma, when the density may greatly exceed its critical value ($n > n_{cr} = m\omega^2/4\pi e^2$, where e and m are the electron charge and mass, $\omega = 2\pi f$ is the pump frequency) under the condition $\omega_c > \omega$ ($\omega_c = eB/mc$ is the electron cyclotron frequency in the magnetic field B), when the plasma can be penetrated by electromagnetic waves is well known. However, overdense plasma can be maintained at $\omega_c < \omega$. In this case the pump electromagnetic wave can not propagate, and the mechanism of energy transfer to the plasma can be related only to a linear wave conversion near the boundary (in other words, as we will use the frequency $f = 2.45$ GHz, then the upper hybrid eigenmode is excited).

An important feature in the linear wave conversion theory, is the problem related to the effectiveness of the conversion. By this we understand, how much of the electromagnetic energy is transferred to the plasma waves. According to some theoretical calculations [2], the effectiveness of the conversion depends on the parameter l , which determines the density scale length at the point where the conversion takes place, it depends also on the coefficient, characterizing the deepness of penetration of the field into the plasma. The influence of these parameters is determined by the characteristic dimensions of the plasma (L).

Let us suppose that we have an external static magnetic field along the z axis, a gradient of plasma density on the x axis and an electric field of the electromagnetic wave oscillates along the y axis, then the dielectric constant can be written as

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2 - \omega_c^2}{\omega^2 \omega^2 - \omega_h^2},$$

where ω_p is the plasma frequency ($\omega_p^2 = 4\pi e^2 n/m$) and $\omega_h^2 = \omega^2 + \omega_c^2$ is the upper hybrid frequency. The cutoff ($\epsilon = 0$) is reached when

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_c}{\omega}. \quad (1)$$

As the wave propagates into the region of increasing density it will find the resonance at ($\epsilon = \infty$)

$$\frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}, \quad (2)$$

which describes the upper hybrid resonance.

Dividing (2) by (1) we get

$$\frac{\omega_{p2}^2}{\omega_{p1}^2} = 1 + \frac{\omega_c}{\omega} = \frac{n_2}{n_1} \approx 1 + \frac{\Delta x}{l}, \quad (3)$$

where Δx is the distance between the cutoff and the resonance layer, and is directly related to the parameter L . From (3) we have

$$\Delta x = \frac{\omega_c}{\omega} l. \quad (4)$$

If $\lambda \ll L$ the wave cannot reach the resonance point, because Δx will be many wavelengths thick, and the wave conversion effectiveness is determined only by the grade of penetration of the wave into the plasma. Eq. (4) shows that in this case Δx can be diminished by reducing B , nevertheless a big reduction of B can affect the confinement of plasma. A formal analysis [2] shows that the more proper conditions for conversion are reached when L is comparable with λ . It is shown in that work that for these conditions a reduction of B will improve the effectiveness of conversion.

Under the influence of a strong electromagnetic field, when the plasma particles obey the relation

$$V_E \leq V_{Te}, \quad (5)$$

(where $V_E = eE/m\omega$, E , m are respectively the electric field intensity and the electron mass, V_{Te} is the electron thermal speed) plasma parameters begin to vary with time, and this makes possible the development of parametric instabilities, which are non-linear effects. In this case, the dielectric constant of the plasma (the reaction of the medium) cannot be more considered proportional to the intensity of the strong electromagnetic field, the dependence turns more complex. The coupling of external strong fields in the plasma can lead to the excitation of plasma oscillations and to the nonlinear interaction of the plasma waves with the external field. The nonlinear processes can be essential even with small values of electric field (easy to obtain in an experiment), it depends on the conditions of interaction (*e.g.* when there exist resonances).

Parametric decay is related to a certain threshold value of the electric field, these values are different for different parametric processes. The threshold values for the case of a homogeneous magnetized plasma are given in Ref. [8]. When the frequency of the external field is near to the plasma frequency of electrons, the parametric instabilities can appear with threshold values of the electric field E considerably lower [9]. In these conditions a parametric decay will take place if relation (5) holds.

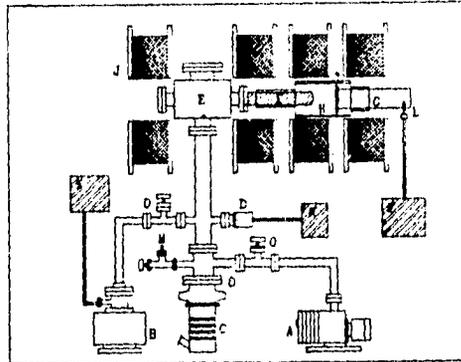


FIGURE 1.

Taking into account the considerations about linear and nonlinear wave conversion we have done, we can establish, in our case some important criteria necessary for the design of the device we are constructing.

1. The plasma will be ignited at the ECR. As the frequency of the magnetron generator is fixed and equal to 2.45 GHz, then the magnetic system of the device will have to be able to create a static external field of 850 gauss, at the region where the plasma will be generated.
2. The magnetic system has to be made in such a way that the value of the magnetic field can be easily reduced, in order to improve the conversion effectiveness. In accordance to the effectiveness criteria of linear conversion, the device will form a cylindrical plasma whose diameter will be approximately $\lambda/2$. This value is also conditioned by constructing limitations.
3. A cylindrical cavity of high quality factor (Q) must be constructed, in which the plasma will be created. In this cavity, the electric field of the external wave will be increased (in the resonance) in order to reach the value given by (5), and the parametric decay can take place. As we will see later, if $Q = 800$, then the value of electric field in the resonant cavity is approximately 700 V/cm for a power of 100 W, which is enough to satisfy relation (5).
4. Cleaness requirements during some material treatments or thin film deposition, establish the vacuum criteria. The design of the device is made under the condition that the maximum value of the basic vacuum will have to be 10^{-7} torr. The values of the working pressure will be in the range between 10^{-4} to 10^{-3} torr.

3. DESIGN DESCRIPTION

The device will consist of three main parts: the vacuum system, the external magnetic field system and the microwave system. In Fig. 1 a scheme of the device is shown.

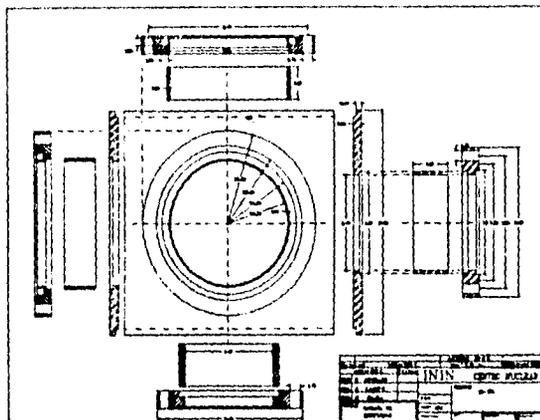


FIGURE 2. Reaction chamber.

3.1. Vacuum system

The vacuum system includes the equipment for displacement of residual gases, the reaction chamber (E in Fig. 1) and the pyrex glass tube (I in Fig. 1), which will contain the gas to be ionized. The reaction chamber will be made of a stainless steel non-magnetic 15 cm i.d. cylinder of 15 cm in length. The chamber will have six accesses, four of them can be closed by quartz or pyrex windows, supporting the vacuum with viton o-rings. The fifth access will be connected to the vacuum equipment and the sixth will be used to connect the glass tube container of the gas, here a 304 stainless steel to 7740 pyrex tube will be used. In these two cases the connection to the chamber will be carried out through copper o-rings. The details of construction of the reaction chamber are shown in Fig. 2.

The vacuum equipment that will be used consists of:

1. A mechanical vacuum pump Balzers DUO 060 A (A in Fig. 1) with a capacity of 60 m³/h. This pump will be used for a first step vacuum.
2. A PLS 063 H Balzers diffusion pump system. This pump will be used for the maintenance of the working pressure (C in Fig. 1).
3. An Ionic vacuum pump *Maglon Andar* MI-75 with capacity of 70 l/s, which will be used for the evacuation of residual gases and formation of the basic vacuum (B in Fig. 1).

Manual locks (O in Fig. 1) will be used to keep working the vacuum equipment while the chamber is opened. The input gas will be introduced into the discharge region through a needle valve, at the first stage situated as shown in Fig. 1 (M in Fig. 1). A different feeding gas system, connected directly to one of the accesses of the reaction chamber is now under design.

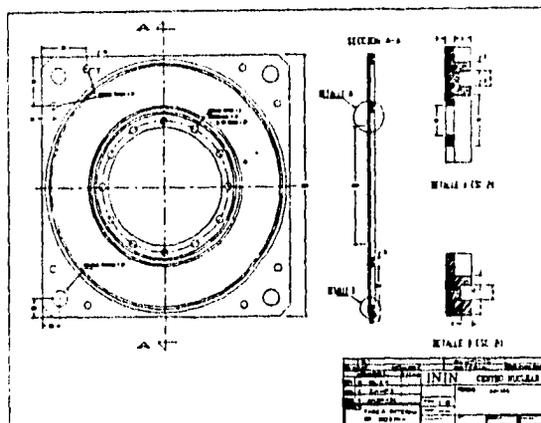


FIGURE 3. Internal wall of solenoid.

The pressure measurements will be done by means of the standard Pirani Cold Cathode Vacuumeter PKG 020 Balzers, which allows measurements in the range 10^2 – 5×10^{-8} mbar.

3.2. Magnetic field system

The external magnetic field system will be made up of four 16 cm i.d. and 8.8 cm wide solenoids (J, in Fig. 1), with 400 turns of AWG-6 copper wire, covered by aminadel (special thermal covering). The copper wire is rolled in an aluminum square shape holder, whose walls are water cooled, here we have to point out that the solenoids will work mainly in continuous regime. The construction details of the aluminum holder are shown in Fig. 3.

The coils were designed using a computer program specially written for this purpose. This program allows to change coil parameters (i.e. internal diameter, total number of turns, which is divided into number of layers and number of turns per layer, wire diameter, distance among solenoids and the value of current) and calculate the magnetic field intensity in the region within the internal diameter of the coils. In this program each solenoid is simulated by a collection of spires of different diameter. The program has been described in detail earlier [10].

The magnetic field values obtained from the program were compared with some experimental measurements, for this purpose a small 5.8 cm i.d. coil with 88 turns of AWG-6 copper wire distributed in 4 layers was constructed. The field measurements were performed with a BELL 620 Gaussmeter. The results of this comparison are displayed in Fig. 4 and it shows that the difference between theoretical and experimental cases do not overcome 10%. In this figure the zero value in the horizontal axis corresponds to the center of the test coil, NC is the number of layers, NV is the number of turns in each layer and RI the internal radius.

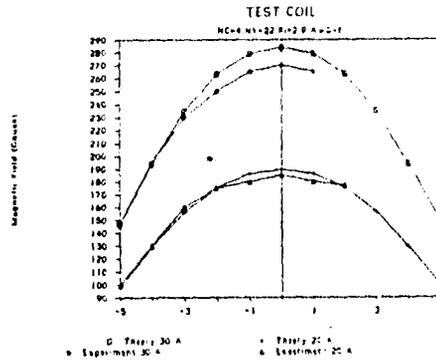


FIGURE 4. Comparison of results.

Fig. 5 shows the profile of the field along the device, obtained with the program, the displayed values correspond to the central part of the solenoid. In this figure it is possible to see that the value of the field at the region where the resonant cavity is going to be located (≈ 40 cm, the central part of the resonator) reaches the resonant value of 850 gauss, at which the discharge will be ignited. In this figure, CR denotes the value of the current, measured in amperes, and the Z's define the position of the center of each solenoid, the rest of the notation is the same as in Fig. 4. The radial variation of the field at this region is shown in Fig. 6. The horizontal axis of this figure denotes different positions within the internal diameter of the solenoids, the zero corresponds to the center. The different curves correspond to different positions along the device. This figure shows that the region that will be occupied by the plasma (the plasma diameter will be approximately 6 cm) is a region of almost homogeneous field.

3.3. Microwave system

This system will consist of a microwave (magnetron) generator, a waveguide and a resonant cavity.

A Raytheon PG10x1 of fixed frequency ($f = 2.45$ GHz) and variable power output (≤ 100 W in CW) will be used. The high frequency field will be transported into the resonant cavity through a 8.5 cm i.d. brass cylindrical waveguide (G in Fig. 1, C in Fig. 7). In this guide an H_{11} electromagnetic mode will be excited, which is the basic one for this kind of guides.

The critical wavelength is determined from the relation [11]

$$\lambda_c = \frac{\pi D}{j'_{mn}}, \tag{6}$$

where D is the internal diameter of the guide and j'_{mn} is the n -th root of the derivative of the Bessel function $J_m(x)$. Accordingly to these values ($j'_{11} = 1.84$) we get $\lambda_c = 14.5$ cm.

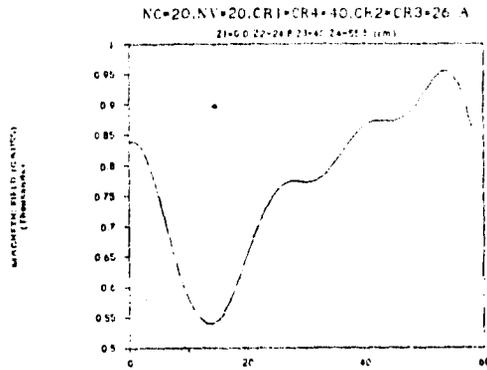


FIGURE 5. Distance along the device (cm).

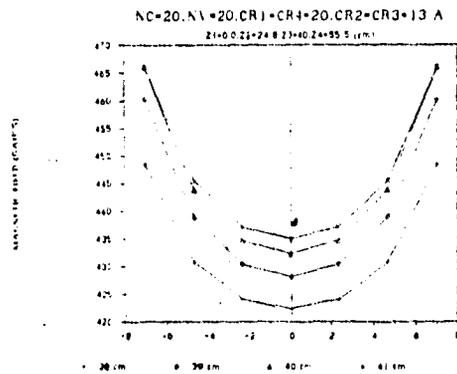


FIGURE 6. Magnetic field radial variation.

The wavelength of the pump frequency is $\lambda = 12.24$ cm then $\lambda < \lambda_c$ and the wave of type H_{11} will propagate along the waveguide.

A brass 14 cm i.d. cylindrical TE_{111} cavity will be used (H in Fig. 1, B in Fig.7). This cavity was designed to have a variable height h (h is the distance between the walls of the resonator) in order to provide the tuning required. The resonant value of the height was determined from the following relation [11]:

$$h = \frac{\lambda S}{\sqrt{4 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \left(\frac{j'_{mn}}{\pi}\right)^2}}$$

where a is the resonator radius and S is the number of halfwavelengths in the resonator. In our case $a = 7$ cm, $S = 1$ and $j'_{11} = 1.84$. Then we get

$$h = 7.13 \text{ cm.}$$

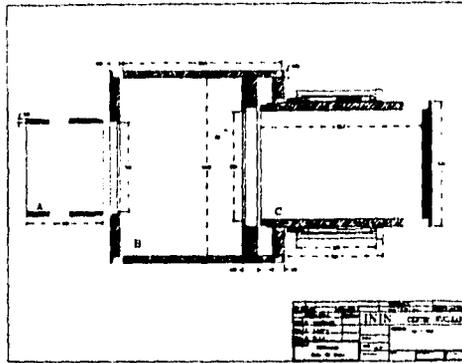


FIGURE 7. Resonant cavity's details.

It is possible to find the electric field intensity in the resonator tuned to the generator's frequency, using the expressions which determine the field distribution in the TE_{111} resonator [12]:

$$E_{\phi} = E_0 J_1' \left(1.84 \frac{r}{a} \right) \cos \phi \operatorname{sen} \pi \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right),$$

$$E_r = E_0 \frac{J_1 \left(1.84 \frac{r}{a} \right)}{1.84 \frac{r}{a}} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \pi \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right),$$

$$E_z = 0,$$

where $E_{\phi,r,z}$ are the components of the electric field in cylindrical coordinates, E_0 is the maximum value of the field and J_1 is the first order Bessel function. Accordingly to the definition of the electromagnetic wave power absorbed in the resonant cavity we have

$$P = \frac{\omega}{Q} \int_v W dv,$$

where v is the volume of the resonator, Q is the quality factor of the resonator, ω is the wave frequency, $W = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$ is the electromagnetic wave energy density ($\epsilon = 10^7 / 4\pi c^2$ [Farad/m], $\mu = 4\pi \times 10^7$ [Henry/m], and c is the light speed), using these values we can get an expression for the density of the electric field energy, which takes the form

$$W_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{QP}{0.238 \pi a^2 h \omega}. \tag{7}$$

When we suppose that all the output energy of the generator is introduced into the resonator (i.e. when $P = 100$ W.), it is possible to obtain from (7) the value of E_0 , if $Q = 800$ (this is a value commonly obtained in experiments, the theoretical value is

11800, the difference is caused by the holes on the walls of the resonator and the glass tube, which contains the gas) then

$$E_0 = 676 \text{ V/cm.}$$

This value allows an easy ignition of the discharge. On the other hand, relation (5) is satisfied, indeed $V_{Te} = 18.4 \times 10^5 \text{ m/s}$ (here we supposed an electron temperature equal to 20 eV, which is a characteristic value of temperature for this type of devices, see e.g. Ref. [6]) and $V_E = 7.64 \times 10^5 \text{ m/s}$. With these expected values parametric processes are possible.

The resonant cavity will have, in the opposite side to the input waveguide, another guide working in the cutoff regime, i.e. its diameter is such that $\lambda > \lambda_c$. The object of this second guide is to supply an access to the resonant cavity, which will be used to introduce the glass tube containing the gas for ionization (I in Fig. 1, A in Fig. 7). The guide works in the cutoff regime in order to avoid the escape of electromagnetic energy from the cavity.

The components of the electromagnetic field vary as

$$E = E_0 e^{-\alpha z} e^{i\omega t}, \quad H = H_0 e^{-\alpha z} e^{i\omega t},$$

where the decay constant is given by

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2}.$$

The relation between the input and output magnitudes of the electric field in the guide is

$$|E_{\text{out}}| = |E_{\text{in}}| e^{-\alpha l},$$

where l is the waveguide length. The decrease in the magnitude of the electric field is defined by

$$L = 20 \log \frac{|E_{\text{in}}|}{|E_{\text{out}}|} = 20 \log e^{\alpha l} \simeq 8.7 \alpha l \text{ [db]},$$

in our case $D = 7 \text{ cm}$ and $l = 12 \text{ cm}$, then from (6) we have

$$\lambda_c = 1.71D = 11.97,$$

as $\lambda = 12.24 \text{ cm}$ then $\lambda > \lambda_c$. Finally we get

$$L = 8.7 \alpha l = 8.7 \frac{2\pi}{\lambda_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_0}\right)^2} \cdot l,$$

and $L = 11.83$, the last means that the decrease of the signal in power will be of 15-fold.

4. CONCLUSIONS

The main point while making the design of the plasma source, was to have enough versatility in order to make possible the arrangement of different experiments, particularly those related to deposition of different kind of thin films, and the study of overdense plasma formation, in which we are interested. However these kind of devices do not limit their possibilities to those experiments, and can be useful in many other applications.

Some of the results that can be obtained in this device, can have industrial applications, but it is necessary to point out that the present design is an experimental one, and industrial applications will need industrial designs, which would consider some economical improvements, that are still possible.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to thank Ing. Roberto Andrade and Pedro Alonso Jiménez for many helpful discussions and invaluable technical support during the construction of the device.

REFERENCES

1. J.L. Shohet, *Phys Fluids B* 2, 6 (1990) 1474.
2. V.E. Golant, A.D. Pilia, *Sov. Phys. Uspekhy* 104, 3 (1971) 413.
3. J.M., Dawson et. al., *Phys Rev. Lett.* 37 (1976) 1547.
4. Int. Conf. on Ion Sources. Berkeley, July 10-14, 1989.
5. M. Dahimene, J.A. Asmussen, *J. Vac. Sci. Technol. B*, 4, 1 (1986) 126.
6. A.A. Balmashnov, K.S. Golovanivsky, E. Camps, International Conference on Plasma Physics, T.2 Kiev, USSR April 6-12 (1987).
7. A.A. Balmashnov, K.S. Golovanivsky, E. Camps et. al., *Sov. Phys. Doklady*, 297, 3 (1987) 580.
8. I.R. Gekker, Interacción de campos electromagnéticos fuertes con el plasma. Moscú, Atomizdat, 1978.
9. N.E. Andrieev, A. Yu. Kiri, V.P. Sillin, *Sov. Phys. JETP* 57, 3 (1969) 1024.
10. E. Camps, A. Muñoz, Research Report, IBA-DF-90-03, May 1990.
11. J. Meinke, F.M. Gundlaj, *Radiotechnical Handbook*. Moscow, Gozenergoizdat (1960).
12. M.A. Heald, C.B. Wharton, *Plasma Diagnostics with Microwaves*. John Wiley & Sons Inc. (1968).

Bibliografía

- [1] Abramowitz M. and Stegun. *Hand book of Mathematical Functions with formulas, Graphs and Mathematical Tablas*. Dover Publications, Inc., Washington, D. C; 1964.
- [2] B. White and F. F. Chen. *Amplification and absorption de electromagnetics waves in overdense plasmas*, volume 16 of *Plasma Physics*, pp. 565-587. Pergamon Press, Northen Ireland, 1974.
- [3] F. F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, volume 1. Plenum, New York, second edition.
- [4] Guy M. Weyl. *Interaction of a Quasi Transverse Extraordinary Wave with Density Fluctuations in an Inhomogeneous Magnetized Plasma*, *Phys. Rev. Lett*, pages 1417-1419, 1970.
- [5] Whittaker E. T. and Watson G. N. *Modern Analysis*. Cambridge At the University Press, New York, 4th edition, 1965.
- [6] D. A. Frank-Kamenetski. *El Plasma, Cuarto Estado de La Materia*. Mir, Moscu, 1970.
- [7] Dwight R. Nicholson. *Introduction to Plasma Theory*. John Wiley and Sons, New York, 1983.
- [8] Thomas Howard Stix. *Waves in Plasmas*. AIP, New York, 1992.
- [9] George Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, inc, New York, 1970
- [10] Gradshteyn Ryzhik. *Table of integrals Series And Products*. Academic Press, New York And London, 4th edition, 1965.

- [11] Eugene Hecht and Alfred Zajac. *Optics*, Addison-Wesley, New York, 1974.
- [12] V. L. Ginzburg. *Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma*. Walter L. Sadowski, National Bureau of Standards, and D. M. Gallik, National Bureau of Standards. Gordon and Breach, Science Publishers, Inc, New York, 1961.
- [13] Barry Spain and M. G. Smith, *Functions of mathematical Physics*. Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
- [14] Thomas Howard Stix, *Radiation and Absorption Via Mode Conversion in an Inhomogeneous Collision-Free Plasma*. *Physical Review Letters*, 15(23):878-883, 1965.
- [15] A. F. Alexandrov and L. S. Bogdanskevich and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics*. Springer Verlag, Berlin, Alemania, 1984.
- [16] A. A. Skorupski, *Modern Plasma Physics, 187-248*. *International Atomic Energy Agency Vienna, Austria, 1981*.
- [17] V. E. Golant and A. D. Pilya, *Linear Transformation and Absorption of Waves in a Plasma*. *Soviet Physics Uspekhi*, 14(4), January-February 1972.
- [18] Mark W. Zemansky, *Heat and Thermodynamics*. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1968.
- [19] James Clerk Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover, New York, third edition, 1954.
- [20] L. Landau and E. Lifchitz, *Théorie des Champs*. Mir, Moscou, 1970.
- [21] Gerardo Anguiano, Enrique Camps y Oscar Olea. *Programa de Cómputo para el Cálculo del Campo Magnético Creado por un Sistema Lineal de Bobinas de una Fuente de plasma Tipo ECR*. *Memorias del IV Congreso Técnico Científico I.N.I.N.-SUTIN*,(5):1-8, Noviembre, 1992.
- [22] Enrique Camps, Ricardo Ondarza y Gerardo Anguiano, *Programa de Cómputo para el Diagnóstico de plasmas con sondas*. *Revista Mexicana de Física*, 38(5):825-835, 1962.
- [23] Enrique Camps, Oscar Olea, Gerardo Anguiano, Ricardo Ondarza and César Gutiérrez, *Multipurpose Microwave Plasma Source*. *Revista Mexicana de Física*, 39(2):260-270, 1993.

- [24] A. I. Akhiezer, I. A. G. Sitenko and K. N. Stepanov, *Plasma Electrodynamics*. Pergamon Press, Hungría, 1975.
- [25] V. Miléntiev and S. Temko, *Física del Plasma*. Mir, Moscu, 1987.
- [26] Harry Lass, *Vector and Tensor Analysis*, McGraw-Hill, Tokyo, 1950.
- [27] M. Denis-Papin and A. Kaufmann, *Cours de Calcul Tensoriel Appliqué*. Éditions Albin Michel, Paris, 1961.
- [28] V. D. Shafranov, *Electromagnetic Waves in a Plasma*, Reviews of Plasma Physics, 3, Paris, 1961.
- [29] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [30] Enrique Camps, Oscar Olea, Roberto Andrade, César Gutiérrez y Gerardo Anguiano, *Fuente de Plasmas por Microondas: Ensamble y pruebas Experimentales*. Rep. tec. # IB-94-18, Instituto nacional de Investigaciones Nucleares, México, Mayo, 1994.
- [31] V. V. Nikolski, *Electrodinámica y propagación de ondas de radio*, ed. Mir, Moscú, 1976.