



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

55  
2E5

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**"CALIDAD DE AGUA EN UNA MARINA PEQUEÑA"**

**TESIS**

que para obtener el título de  
**INGENIERO CIVIL**

presentan

**CARLOS ESTRADA SERRANO**  
**ALEJANDRO DE JESUS SÁNCHEZ AGUIRRE**

Director de tesis

*M. en I. Oscar A. Fuentes Mariles*

**FALLA DE ORIGEN**

Ciudad de México, Febrero de 1995.



**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

Señores:

**CARLOS ESTRADA SERRANO**  
**ALEJANDRO DE JESUS SANCHEZ AGUIRRE**

Presente.

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIRECCION  
60-1-110/93

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **M.I. OSCAR A. FUENTES MARILES**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrollen ustedes como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

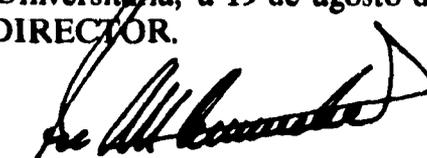
**"CALIDAD DEL AGUA EN UNA MARINA PEQUEÑA"**

- I. INTRODUCCION**
- II. ALGUNOS PROBLEMAS EN MARINAS**
- III. MAREAS**
- IV. HIDRODINAMICA**
- V. DIFUSION Y DISPERSION**
- VI. MODELO MATEMATICO DE TRANSPORTE DE SUSTANCIAS DILUIDAS**
- VII. EJEMPLOS DE APLICACION**
- VIII. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

Ruego a ustedes cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo les recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberán prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Cd. Universitaria, a 19 de agosto de 1993.  
EL DIRECTOR.

  
ING. JOSE MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

JMCS/RCR\*nl.

## DEDICATORIAS

---

**A mis padres, Bernardo y Conchita por que con sus palabras y ejemplo me impulsaron en la vida y en la formación académica.**

**A mis hermanos Alejandra, Bernardo, Hugo, Fernando, Rosario e Ivan Jacob por el cariño y apoyo recibido.**

**A mi novia Adriana Venegas Acosta. por que tu amor y apoyo me han dado la fuerza necesaria para buscar de la vida, algo más.**

**A mis amigos, en especial a mi compañero de tesis, y al Lic. Juan José Ugalde García, gracias por el impulso recibido.**

*Gracias a Dios que me ha dado la oportunidad de crecer intelectual y espiritualmente.*

*A mi esposa Vanessa y a mi hija Karla, por que gracias a su amor me han hecho comprender lo bella que es la vida.*

*A mis padres Juana e Hilario; a mis hermanos Yolanda, Hilda, Jorge, David, Guadalupe y Laura; a mi abuelita Juana y a mi tia Silvia; por el cariño y apoyo que siempre me han brindado.*

*Con agradecimiento al M. I. Oscar Fuentes M. por los conocimientos transmitidos para la elaboración de esta tesis.*

*Con cariño a mis amigos, en especial a Alejandro Sanchez, Javier Osnaya, Jose Luis Oliver, Cristina Honorato y Jose Luis O. Flores.*

# INDICE

<b>1. INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>2. MAREAS</b>	<b>4</b>
<b>2.1. Marea astronómica</b>	<b>5</b>
2.1.1. Marea semidiurna	6
2.1.2. Marea mixta	7
2.1.3. Marea diurna	8
2.1.4. Marea viva	8
2.1.5. Marea muerta	9
2.1.6. Marea equinoccial	10
<b>2.2. Marea de tormenta</b>	<b>10</b>
<b>2.3. Marea hidráulica</b>	<b>10</b>
<b>2.4. Descripción matemática de las mareas</b>	<b>11</b>
<b>2.5. Aparatos para la medición de mareas</b>	<b>13</b>
<b>2.6. Sistema mareográfico nacional</b>	<b>14</b>
<b>3. HIDRODINAMICA</b>	<b>17</b>
<b>3.1. Hidrodinámica de una marina</b>	<b>18</b>
<b>3.2. Intercambio de agua</b>	<b>19</b>
<b>4. ALGUNOS PROBLEMAS EN MARINAS</b>	<b>22</b>
<b>5. DIFUSION Y DISPERSION</b>	<b>25</b>
<b>5.1. Difusión</b>	<b>26</b>
5.1.1. Difusión molecular	27
5.1.2. Difusión turbulenta	28
<b>5.2. Dispersión o convección</b>	<b>29</b>
5.2.1. Dispersión libre	30
<b>6. MODELO MATEMATICO DE TRANSPORTE DE SUSTANCIAS DILUIDAS</b>	<b>32</b>
<b>6.1. Durante el descenso de la marea</b>	<b>35</b>
<b>6.2. Durante el ascenso de la marea</b>	<b>38</b>
<b>6.3. Concentración de una sustancia no conservativa</b>	<b>40</b>
<b>6.4. Concentración de OD y DBO</b>	<b>41</b>
<b>6.5. Ecuación para el cambio de concentración de DBO</b>	<b>42</b>
<b>6.6. Ecuación para el cambio de concentración de OD</b>	<b>43</b>
<b>6.7. Coeficiente de intercambio</b>	<b>44</b>

<b>7. EJEMPLOS DE APLICACION</b>	<b>46</b>
7.1. Cambio de concentración en la marina Kemer	46
7.2. Ejemplo teórico	49
7.2.1. Ingreso de contaminante	49
7.2.2. Ingreso artificial de gasto de agua limpia	50
7.2.3. Extracción artificial de agua de la marina	50
7.2.4. Variación de OD y DBO	51
<b>8 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>62</b>
<b>BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS</b>	<b>65</b>
<b>APENDICE</b>	<b>66</b>

## 1. INTRODUCCION

La Tierra, dadas sus características geológicas se encuentra en constante movimiento. La división de los continentes a partir de una gran masa de tierra la cual se conoce como Pangea ocasionó la formación de mares en el borde de los continentes tal es el caso de los golfos y las pequeñas lenguas de mar que penetran en los continentes. Algunos de estos cuerpos de agua, el hombre los ha transformado para tener lugares que permitan el transporte y manejo de mercancías o bien para actividades recreativas.

Recientemente se han construido conjuntos hoteleros o residenciales cerca de las playas que tienen un área donde las embarcaciones pueden detenerse o permanecer durante varios días. Estos conjuntos conocidos como marinas, presentan una serie de aspectos de ingeniería ambiental e hidráulica que deben ser estudiados para tener una buena planeación y asegurar su buen funcionamiento. En ello juega un papel muy importante la calidad del agua alojada en el interior de estos recintos marinos.

La calidad del agua de las marinas depende del movimiento que ella tenga. Este movimiento es debido a la marea, y se lleva a cabo con velocidades de flujo y niveles de la superficie libre, variables en el tiempo.

La calidad del agua, los procesos marinos y el arrastre de sedimentos dependen del comportamiento hidrodinámico de la marina. Este consiste en un patrón de flujo y variación de las elevaciones de la superficie libre a lo largo del tiempo.

La simulación de la hidrodinámica de la marina se basa en varias leyes de la Física en las que se considera la variación del nivel del mar, los ingresos y egresos de agua en la bocana de la marina, además también se toma en cuenta la forma del recinto y los obstáculos al paso del agua, tales como islas, muelles y muros.

Con base en la cantidad de agua que entra a la marina durante cada ciclo de marea, el tipo de sustancias diluidas en sus aguas y la simulación de la hidrodinámica se puede valorar la calidad del agua de su interior.

Este trabajo tiene como objetivo estimar la calidad del agua dentro de una marina durante su funcionamiento normal.

En el capítulo 2 se da una explicación de lo que es la marea y las causas que la originan, mencionando además los tipos de marea que existen.

En el capítulo 3 se describe el movimiento del agua de una marina y la importancia del estudio del intercambio de agua.

En el capítulo 4 se presentan varias causas de contaminación de una marina.

En el capítulo 5 se describe el concepto de concentración de un contaminante y las formas en que éste varía de acuerdo con el movimiento del agua y su remoción.

En el capítulo 6 se presentan los modelos matemáticos para determinar las concentraciones de una sustancia dentro de una marina después de un cierto número de mareas. También se plantea el cálculo de concentraciones de demanda bioquímica de oxígeno (DBO) y oxígeno disuelto (OD) dentro de la marina.

En el capítulo 7 se describen y resuelven algunos ejemplos de aplicación y finalmente en el capítulo 8 se incluyen las conclusiones y recomendaciones.

## 2. MAREAS

Para diversos estudios de la ingeniería hidráulica marítima, es importante el fenómeno llamado marea.

La primer teoría sobre el origen de este fenómeno fué hecho por Newton en 1687 (teoría estática) en la cual demostró que las fuerzas que generan el movimiento del agua son la atracción gravitacional entre el Sol, la Luna y la Tierra. Más tarde, Laplace mostró su teoría dinámica, la cual dió un panorama más claro sobre el movimiento del nivel del mar.

En ella determina que las consecuencias de esto son:

- 1) Las oscilaciones libres son función de las dimensiones del recipiente que constituyen los oceanos.
- 2) Las oscilaciones forzadas son producto de la atracción del Sol y la Luna.

Es así como en primera instancia se puede definir a la marea como el movimiento periódico de ascenso y descenso del nivel medio del mar.

Segun su origen, se pueden agrupar de la manera siguiente:

- a) Marea astronómica
- b) Marea de tormenta
- c) Marea hidráulica

## **2.1 MAREA ASTRONOMICA.**

La marea astronómica está relacionada con las fuerzas de atracción del Sol, la Luna y la Tierra, según explicó Newton en su teoría estática, aunque el Sol tiene una masa mucho mayor a la de la Luna, la cercanía de esta última respecto a la Tierra hace que la fuerza de atracción de la Luna tenga una influencia mayor (aproximadamente 2 veces mayor que la del Sol).

Para explicar de una manera más sencilla el fenómeno, se considera sólo el sistema Tierra-Luna, con las siguientes hipótesis:

- a) la Tierra está totalmente cubierta por agua
- b) la Luna se encuentra en el plano del ecuador de la Tierra
- c) no existe rotación de la Tierra

Dado que el sistema Tierra-Luna se mueve alrededor de un eje común, las fuerzas gravitacional y centrífuga están en equilibrio en el centro de masa de cada cuerpo. De esta manera, cuando la Luna se encuentra encima de la capa de agua, la atrae y la obliga a subir (marea ascendente) y después de cierto tiempo las aguas vuelven a bajar en cuanto la Luna se encuentra sobre la capa terrestre (marea descendente), como se muestra en la fig 2.1.

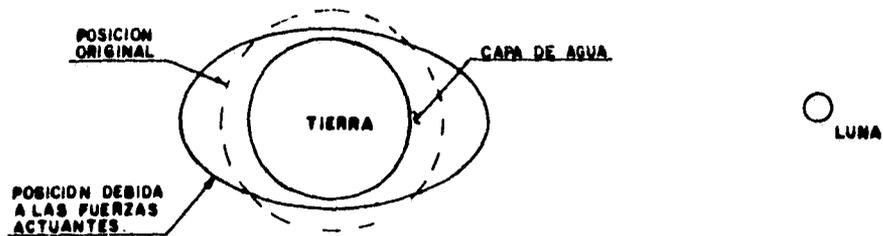


Figura 2.1

La segunda hipótesis no se cumple dado que en realidad el eje terrestre forma un ángulo de  $66.5^\circ$  con respecto al plano de la Luna. En tanto que la tercera hipótesis no es válida, ya que si existe dicho movimiento.

Se llama pleamar al nivel máximo que alcanza el nivel medio del mar durante un ciclo de marea y, bajamar al nivel mínimo durante dicho ciclo.

Las posiciones relativas del Sol y de la Luna dan lugar a distintos tipos de mareas, las cuales se describirán brevemente a continuación.

### 2.1.1 Marea semidiurna

Esta marea presenta dos pleamares y dos bajamares (fig 2.2) en un período de aproximadamente de 25 horas. El período de la marea semidiurna es un poco mayor a 12 horas, dado que se encuentra gobernada por dos movimientos; la rotación de la Tierra y la translación de la Luna alrededor de la Tierra. Esto quiere decir que en un cierto lugar de la Tierra de cara a la Luna, no será vista nuevamente hasta que la Tierra haya dado un giro completo (24 horas). Sin embargo la Luna también se ha movido en ese período alrededor de  $13^\circ$ , por lo cual tarda adicionalmente aproximadamente 50 minutos para estar en fase con la Luna

nuevamente. El período de la marea semidiurna es la mitad de ese tiempo, es decir, 12 horas y 25 minutos.

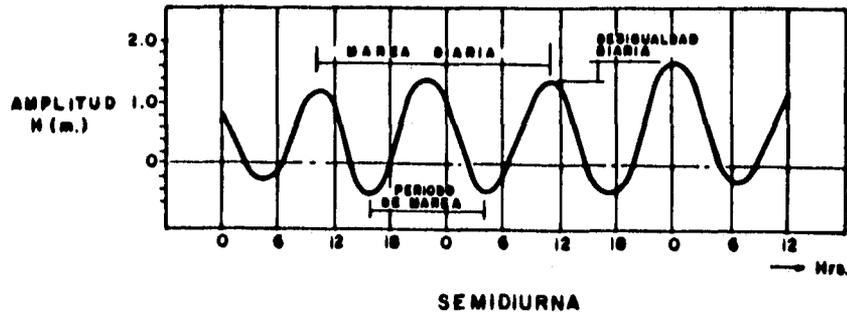


Figura 2.2

### 2.1.2 Marea mixta

Presenta dos pleamares y dos bajamares durante dos ciclos sucesivos, con período de 12 horas y 25 minutos cada uno. Las amplitudes de ambas presentan diferencias notorias denominadas desigualdad diaria (fig 2.3).

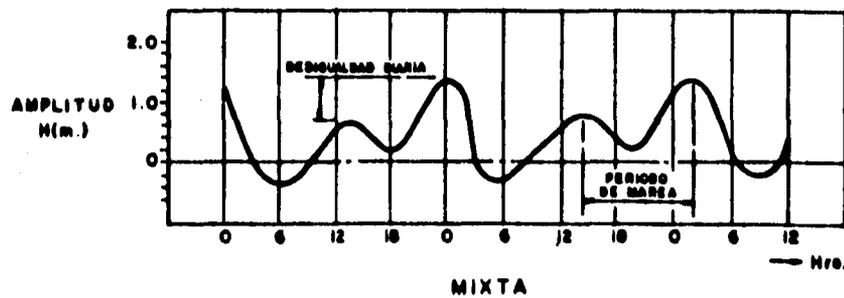


Figura 2.3

La desigualdad diaria tanto para las mareas semidiurnas como para las mixtas esta dada por la diferencia de altura entre los niveles de dos pleamares o bajamares sucesivos.

### 2.1.3 Marea diurna

En este tipo de marea se presenta un pleamar y un bajamar por ciclo, en un periodo promedio de 24 horas y 50 minutos (fig 2.4)

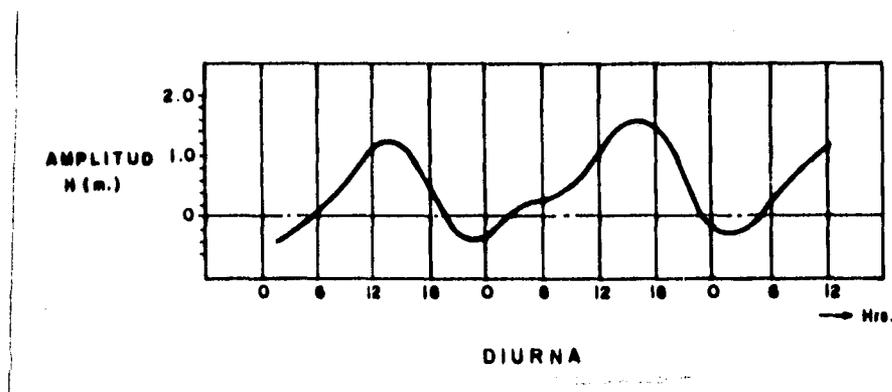


Figura 2.4

Además de las mareas antes mencionadas existen a su vez dos variantes conocidas como mareas vivas y mareas muertas las cuales dependen de la fase de la Luna.

### 2.1.4 Marea viva

Esta se presenta cuando la Luna nueva o llena, el Sol, y la Tierra se encuentran alineados, de manera que las fuerzas de atracción se suman, provocando los más altos niveles de agua durante el mes. También se le denomina marea de sicigias (ver fig 2.5 y 2.6).

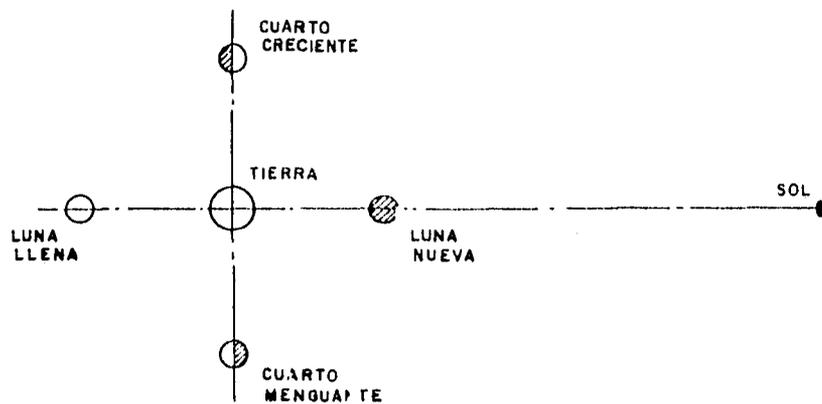


Figura 2.5

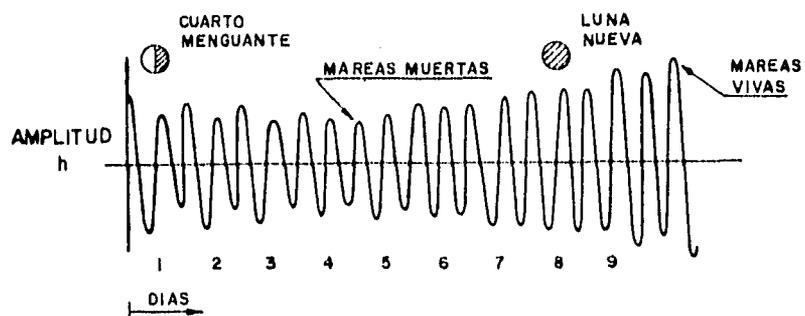


Figura 2.6

### 2.1.5 Marea muerta

Esta sucede cuando la Luna y el Sol forman un ángulo recto, es decir, cuando la luna se encuentra fuera de fase (cuarto creciente y cuarto menguante, ver fig 2.5). De esta manera los efectos de atracción de ambos no se pueden sumar, provocando los más bajos niveles de agua en el mes (fig 2.6).

### **2.1.6 Marea equinoccial**

Para un periodo en el año existe un fenómeno adicional, conocido como marea equinoccial, en la que se presentan las máximas amplitudes del año y la cual ocurre para la Luna de equinoccio, ya que el Sol se encuentra lo más cercano a la Tierra. A estas mareas se le puede considerar máximas mareas vivas durante el año.

En consecuencia se puede denominar mínimas mareas muertas a aquellas que se presentan cuando el cuarto creciente o menguante coincida con el solsticio (cuando el Sol se encuentra lo más alejado de la Tierra).

### **2.2 MAREA DE TORMENTA**

Se define como marea de tormenta a la variación del nivel del agua en el mar, ocasionado por la acción del viento sobre la superficie del agua. Esta suele ser importante en áreas sujetas a vientos ciclónicos, ya que puede originar un aumento o disminución del nivel del agua. Adicionalmente existe un cambio en la presión atmosférica, por lo tanto es vital para algunos proyectos tomar en cuenta su efecto.

En el caso de mareas de tormenta positivas, el viento sopla contra la costa, es decir, la fuerza del viento es tal, que el nivel del agua cerca de ésta tiende a subir. Por otra parte, en el caso de mareas de tormentas negativas el viento sopla en dirección opuesta a la costa, lo que provoca que el nivel del agua en esta zona baje (fig 2.7).

### **2.3 MAREA HIDRAULICA**

Se denomina marea hidráulica al efecto que se produce en la onda de marea al propagarse por un estrecho o en un golfo que se angosta en su extremo.

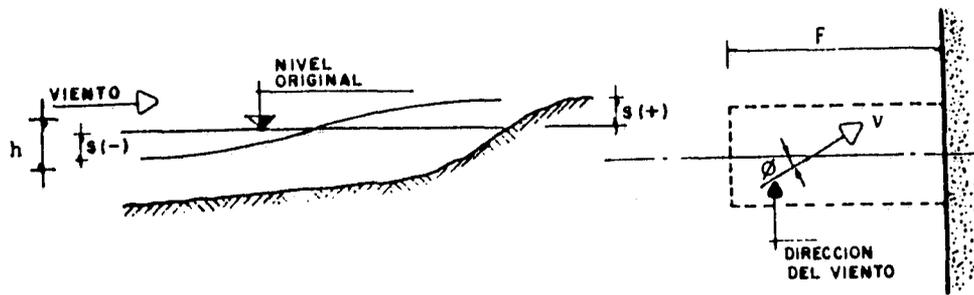


Figura 2.7

#### 2.4 DESCRIPCION MATEMATICA DE LAS MAREAS

Durante años ha existido la preocupación por separar los componentes de una marea; en primera instancia, para comprender el mecanismo de las mareas y, en segundo término, para predecir los niveles de marea en el futuro.

El primer método utilizado fué el de Análisis Armónico, desarrollado en los años 30. Este método describe el movimiento vertical del agua causado por las mareas, como una superposición de términos armónicos. Cada marea se caracteriza por los siguientes factores:

- a) La rango  $h$ , definido como la diferencia de alturas entre el nivel alto (o bajo) y el nivel promedio.
- b) El periodo  $T$ , que es el tiempo transcurrido para un ciclo de marea, expresado en horas.
- c) La frecuencia angular  $W$ , es igual a  $360^\circ$  entre el periodo.
- d) El ángulo de fase  $\alpha$ , definido como el tiempo que transcurre entre el paso de un astro (Sol o Luna) a través del meridiano del lugar considerado y el tiempo real de ocurrencia, expresado en horas.

En la tabla 2.1 se observan las principales constantes armónicas según Thijsse.

Tabla 2.1 Principales Constantes Armónicas (Thijsse)			
Componente (símbolo)	Causa	$W_i$ ( $^{\circ}$ /hora)	T(hr) ( $360^{\circ}/W_i$ )
M2	marea lunar	28.98	12.42
S2	marea solar	30.00	12.00
N2	elíptica larga de la luna	28.44	12.66
K2	marea semidiurna luna/sol	30.08	11.97
K1	marea diurna luna/sol	15.04	23.94
O1	marea diurna lunar	13.94	25.83
P1	marea diurna solar	14.96	24.06

Donde T es el tiempo transcurrido en una marea.

Los valores de  $W_i^{\circ}/T$  expresados en la tabla son los mismos para cualquier lugar del mundo; los valores de  $h_i$  y  $\alpha_i$  son únicos para un lugar en particular y se obtienen a partir de observaciones de campo.

De la explicación anterior previa se desprende que, en un cierto lugar y para un tiempo dado cuando se conocen los valores de  $a$  (donde  $a$  es la causa del tipo de marea), y  $\alpha$  para cada componente (M2, S2, N2, K2, K1, O1 y P1) el nivel de marea  $h_t$  puede expresarse como:

$$h_t = h_0 + \sum_{M2}^{P1} \left[ h \cos(W \cdot t - \alpha) \right]$$

donde:

- $h_t$  es el nivel del agua en el tiempo  $t$ , (m)
- $h_0$  es el nivel del agua promedio de una serie de observaciones horarias de marea, (m)
- $t$  es el tiempo considerado (hr)

Cuando se conocen los valores de las componentes es posible determinar el tipo de marea, calculando la relación

$$F = \frac{h_{K1} + h_{O1}}{h_{M2} + h_{S2}}$$

$F < 0.25$	predominante marea semidiurna
$0.25 < F < 1.00$	predominante marea mixta
$1.00 < F$	predominante marea diurna

Para el análisis de una marea (calculados  $h_i$  y  $\alpha_i$ ) se recomienda contar un periodo de 29 días de observaciones horarias como mínimo.

## 2.5 APARATOS PARA LA MEDICION DE MAREAS

Los instrumentos destinados a la medición de las ondas de marea, se clasifican en: mareómetros y mareógrafos.

El mareómetro o regla de mareas son indicadores del tipo más común, sin ningún mecanismo para realizar un registro automático de los niveles, por lo que es necesario que una persona efectúe las lecturas, en intervalos de tiempo (una hora generalmente). Consiste en una escala graduada (puede usarse un estadal) la cual es conveniente que se fije en un lugar apropiado, por ejemplo en un pilote de un muelle, algún macizo rocoso, etc. (fig 2.8)

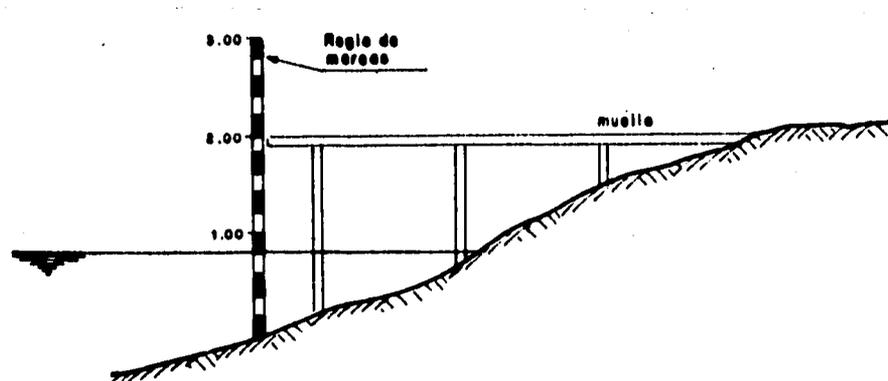


Figura 2.8

El mareógrafo está constituido por algún mecanismo que permite obtener un registro constante de los niveles del agua para cualquier fase de la marea. Los mareógrafos, a su vez, se pueden subdividir en atención a la naturaleza del dispositivo que usan en: mecánicos, eléctricos y electrónicos. Sin embargo, los tipos mecánico (fig 2.9) y eléctrico digital son los más usados en nuestro país, inclusive son los empleados por el Sistema Mareográfico Nacional.

- 1 CASETA DE PROTECCION
- 2 MESA PARA SOSTENER EL MAREOGRAFO
- 3 MAREOGRAFO STANDARD
- 4 POLEAS FIJAS AL TECHO DE LA CASETA
- 5 CONTRAPESO
- 6 FLOTADOR DE LATON
- 7 TUBO DE 12" Ø TRATADO CONTRA LA ACCION DEL MAR Y CON PERFORACIONES

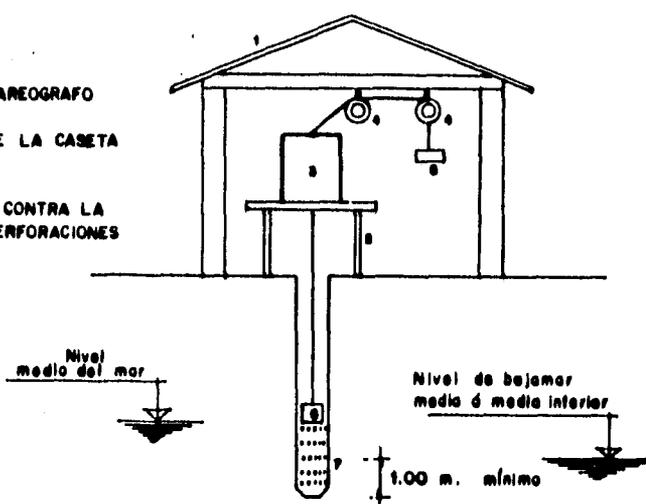


Figura 2.9

## 2.6 SISTEMA MAREOGRAFICO NACIONAL

Desde el año 1952 es operado por el Instituto de Geofísica, UNAM, el cual cuenta en la actualidad con 20 estaciones mareográficas instaladas en los principales puertos (13 en el Océano Pacífico y 7 en el Golfo de México), aunque cuenta con registros de otros lugares en donde alguna vez se operaron estaciones. Este servicio se encarga de la instalación, operación y mantenimiento de las estaciones, así como la interpretación de los mareogramas, la obtención de los planos de referencia y el

pronóstico de los niveles esperados, para lo cual anualmente edita las "Tablas de Predicción de Mareas".

Los pronósticos de las mareas, se obtienen con cálculos basados en los registros de la red de mareógrafos, utilizando series de 365 días de alturas horarias para calcular 48 constantes armónicas para cada puerto, por medio del método de mínimos cuadrados.

Las citadas tablas contienen las horas a las que ocurren las pleamares y las bajamares, así como la altura de ellas en relación a un plano de referencia; de igual forma presentan la ubicación geográfica de las estaciones, las principales constantes armónicas utilizadas y los diferentes niveles o planos generados por las mareas.

Dependiendo del tipo de marea (diurna, semidiurna y mixta) los planos de marea que se generan son:

Altura máxima registrada: nivel más alto registrado en la estación por efectos de algún ciclón.

Pleamar máxima registrada: nivel más alto registrado debido a las fuerzas de marea periódica, o también a que tengan influencia sobre las mismas factores meteorológicos.

Nivel de pleamar media superior: promedio de la más alta de las dos pleamares diarias, durante el periodo considerado en la estación (mareas semidiurna y mixta).

Nivel de pleamar media: promedio de todas las pleamares durante el periodo considerado en cada estación; cuando el tiempo de marea es diurna, este plano se calcula haciendo el promedio de la pleamar más alta diaria, lo que equivale a que la pleamar media en este caso sea lo mismo que la pleamar media superior.

Nivel medio del mar: promedio de las alturas horarias durante el periodo registrado en la estación.

Nivel de media marea: plano equidistante entre la pleamar media y la bajamar media; es decir se obtiene promediando estos dos valores.

Nivel de bajamar media: promedio de todas las bajamares durante el periodo considerado en la estación; cuando el tiempo de marea es diurna, este plano se calcula haciendo el promedio de la bajamar más baja diaria, lo que equivale a que la bajamar media en este caso sea lo mismo que la bajamar media inferior.

Nivel de bajamar media inferior: promedio de la más baja de las dos bajamares diarias, durante el periodo considerado en la estación (mareas semidiurna y mixta).

Bajamar mínima registrada: Nivel más bajo registrado debido a las fuerzas de marea periódica, o también que tengan influencia sobre las mismas factores meteorológicos.

Altura mínima registrada: nivel más bajo registrado en la estación por efectos de algún ciclón combinado, probablemente con el de la marea astronómica.

Cada uno de los niveles generados por las mareas son empleados para definir diferentes elevaciones en el proyecto de las obras marítimas; por ejemplo, los planos de referencia en los proyectos en general suelen ser el Nivel de bajamar media (N.B.M.) o Nivel de bajamar media inferior (N.B.M.I.) dependiendo del tipo de marea; las elevaciones de los muelles se determinan tomando en cuenta la pleamar con el barco descargado y la bajamar con el barco cargado; la elevación de la corona del núcleo de una escollera se asigna considerando la pleamar, de tal forma que no se inunde (cuando se trata de construcción por vía terrestre); etc.

### 3. HIDRODINAMICA

En éste capítulo se describe la hidrodinámica de una marina basándose en algunas ideas de mecánica de fluidos.

La mecánica de fluidos es la ciencia en la cual se aplican principios y leyes de la física a los fluidos en reposo o en movimiento. Los principios se refieren a la conservación de la materia y la energía; entre las leyes, consideran las de movimiento de Newton.

El estudio de la mecánica de fluidos, mediante el análisis matemático y la experimentación, permite explicar los fenómenos observados y predecir, por lo menos de manera aproximada, el comportamiento de los fluidos bajo condiciones específicas.

El avance técnico de los últimos años y la ampliación de los campos de interés del hombre en nuevos problemas, han dado lugar a la creación de un gran número de ramas de la mecánica de fluidos. Sin embargo, el campo

de interés de un ingeniero civil restringe el número de temas de esta ciencia, por lo tanto, en lo que respecta a este trabajo sólo se referirá a la Hidrodinámica.

La Hidrodinámica se encarga de estudiar las leyes de equilibrio y movimiento de los fluidos incompresibles, especialmente los líquidos. Cuando las leyes y los principios de la Hidrodinámica se aplican al estudio del flujo de aguas en estructuras que interesan directamente al ingeniero civil, se encuentra en el área de la Hidráulica.

### **3.1 HIDRODINAMICA DE UNA MARINA.**

Las marinas son recintos de agua que se encuentran protegidas del fuerte oleaje por estructuras que pueden ser naturales o construídas por el hombre. El acceso al mar es conocido como bocana o boca de la marina.

En las marinas cuya longitud en planta es mucho mayor que su profundidad y donde el fondo tiene pendiente suave o nula, el flujo del agua es prácticamente horizontal, por lo que el componente vertical de la velocidad es mucho menor a las horizontales y puede ser despreciable.

Para éstas marinas se pueden utilizar modelos en dos dimensiones en un plano horizontal para obtener su hidrodinámica. En un modelo bidimensional se considera que la presión varía con la profundidad de acuerdo con la ley hidrostática, y las velocidades del flujo corresponden a un valor promedio en la vertical.

Para poder llevar a cabo los estudios de elevación del agua, y componentes de velocidad, es necesario tomar en cuenta la ecuación de continuidad y la de conservación de cantidad de movimiento; en la segunda se considera el efecto de las aceleraciones convectivas, la fricción del fondo, la acción del viento y de la rotación de la Tierra.

Para el estudio del movimiento del agua dentro de una marina, es necesario tomar en cuenta los factores siguientes:

- 1) El lugar geográfico en el que se encuentre la marina.
- 2) El nivel medio del agua dentro de la marina.
- 3) La velocidad del agua y su tirante dentro de la marina a lo largo del tiempo.
- 4) El gasto por unidad de área que ingresa al cuerpo de agua.
- 5) La elevación del fondo.
- 6) El Factor de Coriolis.
- 7) La aceleración de la gravedad.
- 8) La geometría de la marina.

### **3.2 INTERCAMBIO DE AGUA.**

La calidad del agua en las marinas está relacionada con las propiedades biológicas, físicas y químicas del agua que contiene. Cuando se vierten sustancias dentro de ellas, ya sea en forma accidental (fallas de embarcaciones) descargas de aguas residuales o por corrientes superficiales formadas durante tormentas, la calidad del agua cambia. Para no afectarla es necesario evitar el ingreso de sustancias no deseadas y realizar maniobras periódicas de limpieza en estos recintos marinos.

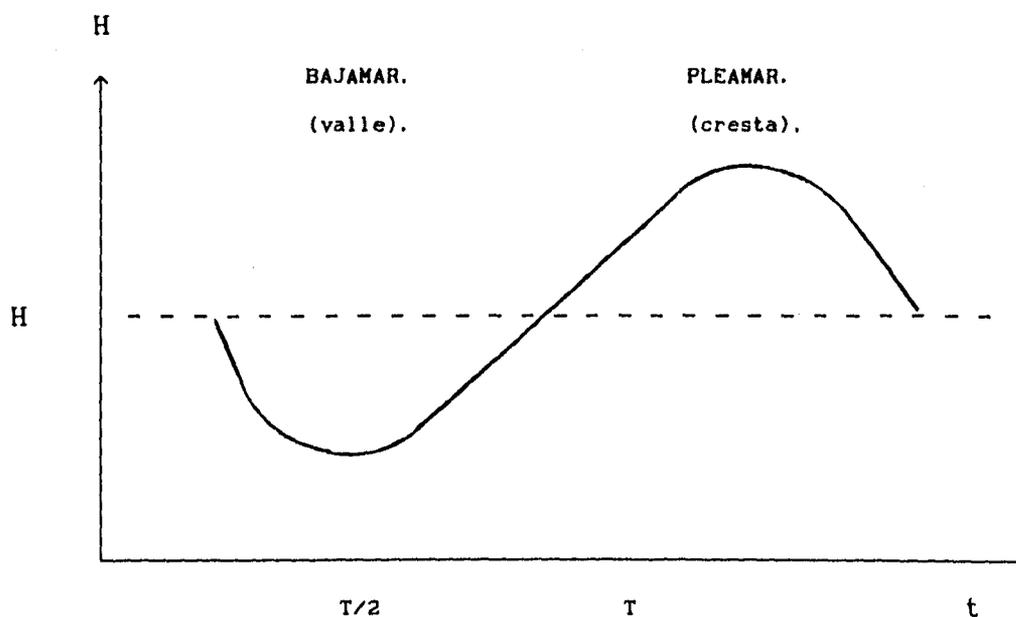
En algunas marinas el intercambio por marea puede ser insuficiente para mantener el agua de su interior en buenas condiciones. Para mejorar la calidad del agua es necesario durante ciertos lapsos de tiempo provocar mayores intercambios de agua lo cual puede hacerse de la manera siguiente:

Durante el lapso en el cual entra agua a la marina debido al ascenso de la marea, se extrae agua de la marina, provocando así que entre una mayor cantidad de agua limpia y disminuyendo la concentración de contaminantes que se encuentren en el agua. O bien durante el tiempo en

el cual sale agua de la marina debido al descenso del nivel de la marea, se coloca agua limpia dentro de la marina, dando lugar a una mayor salida de agua con contaminantes.

El intercambio de agua es importante en el análisis de la calidad del agua para calcular el tiempo que tardan en salir los contaminantes, ya que, al estimar la concentración de contaminantes en el tiempo se sabrá en cuantos días se limpia cierto volumen de agua de la marina. Para realizar este estudio se hace necesario valerse de un modelo de intercambio de agua, el cual se plantea a partir de la ecuación de balance de masa.

Durante el descenso de la marea (de cresta a valle), la marina desaloja contaminante al mar y se acepta que esta se aleja de la marina. Por ello en este lapso sale materia contaminante de la marina. Cuando la marea asciende (valle a cresta), a la marina entra agua del mar sin contaminante, y la concentración de contaminante disminuye debido a que el agua de la marina se mezcla con el agua limpia que entró en ella, figura 3.1.



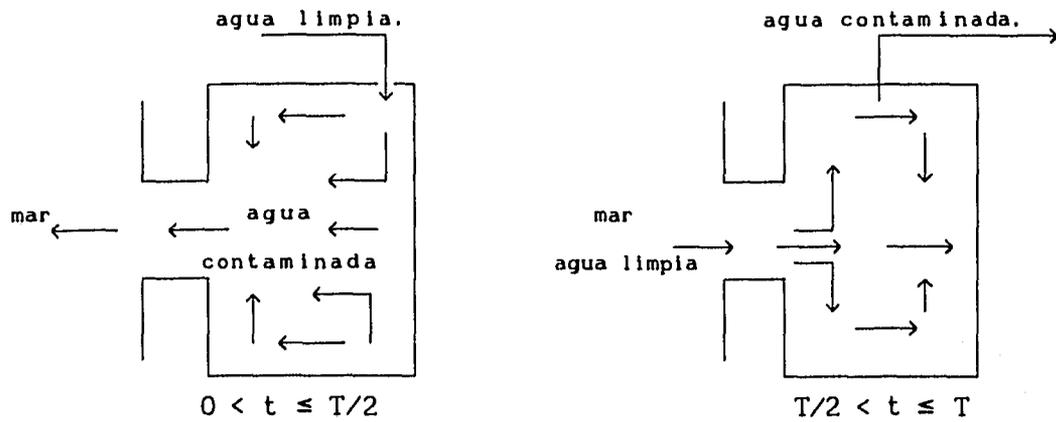


Figura 3.1

Aún sin los intercambios forzados la concentración de las sustancias que se encuentran en solución real dentro del agua, tanto moléculas como iones, finalmente llegarán a ser uniformes. Sin embargo este proceso de igualación o difusión es extremadamente lento.

#### 4. ALGUNOS PROBLEMAS EN MARINAS

Una marina puede ser el resultado de una transformación de un lugar cercano a las playas mediante técnicas ingenieriles, para crear zonas en las que las embarcaciones puedan detenerse o permanecer durante varios días.

Algunas causas de contaminación de una marina la producen los usuarios, estas se pueden clasificar en accidentales y deliberadas. Dentro de las primeras se encuentran las producidas por colapso de embarcaciones, fuga de combustible en los depósitos de éstas, etc. En las segundas, las producidas por descargas directas de drenajes, desechos industriales así como la inconciencia de algunas personas que usan el mar como basurero.

Si a la contaminación accidental se agrega la producida por tormentas, ya que durante éstas se forman corrientes superficiales las cuales llevan contaminantes hacia la marina, se observa que son muchas las formas en que se afecta una marina y pocas las medidas conocidas para evitar o disminuir la contaminación de sus aguas.

La calidad del agua en una marina puede ser deteriorada por la acumulación excesiva de plancton lo cual da como resultado que el agua de ésta tenga un valor por debajo de las normas establecidas para aguas de recreo e incluso para que exista vida acuática. El hecho de que el agua tenga poco oxígeno disuelto hace que la descomposición de los organismos marinos sea en forma anaeróbica lo que produce mal olor, fuente de contaminación que crea un aspecto negativo para el turismo.

Existen tres métodos confiables para combatir la contaminación en una marina:

- 1) Minimizar el derrame de combustible adoptando planes de mantenimiento preventivo y no correctivo para las embarcaciones.
- 2) Hacer operaciones de limpieza fuera de la marina.
- 3) Incrementar la capacidad de lavado de la marina (capacidad de la marina para intercambiar agua sucia por agua limpia) haciendo uso de la ingeniería, a esto se le conoce como intercambio forzado.

Las primeras dos implican un trabajo básicamente administrativo, mientras que el tercero hace resaltar el trabajo ingenieril para aumentar el lavado de la marina. Esto se puede hacer extrayendo agua de la marina o bombeando agua limpia hacia ésta, como se mencionó anteriormente.

El lavado de una marina por fuerzas naturales depende de la forma de ésta, del rango de marea y de su período. Otra posibilidad de aumentar el intercambio de agua de la marina con el mar consiste en construir cuerpos en el interior de ésta, lo cual se logra mediante estudios computarizados que simulan la hidrodinámica de la marina con un cuerpo construido de una u otra forma, ayudando éstos a que la velocidad de salida del agua sea mayor y como consecuencia el intercambio sea grande.

Sin embargo si no se hace un buen estudio del movimiento del agua dentro de la marina, y como consecuencia, de la forma en que estan distribuidas las concentraciones de sustancias y de los lugares que verdaderamente necesiten aumentar su velocidad de salida de agua, la calidad de esta en algunos lugares de la marina puede deteriorarse aún más.

Las características físicas y químicas de las que depende la calidad del agua de una marina son las siguientes:

- a) La transparencia del agua.
- b) La salinidad.
- c) La acidez.
- d) Temperatura.

La transparencia del agua en una marina es muy importante ya que según Enviromental Protection Agency, establecen que la cantidad de sólidos suspendidos y sedimentables no deberán reducir la profundidad del punto de compensación para la actividad fotosintética en mas del 10 % de la normal establecida para la vida acuática.

El agua turbia no es deseable para la natación y otros deportes de contacto, así como una excesiva concentración de sales no es deseable para las pesquerías. Es importante conocer la salinidad de un cuerpo de agua (concentración y naturaleza de las sales disueltas en ésta), para que el comparar con las normas establecidas, se defina si es conveniente o no para deportes de contacto o pesquerías.

También es importante conocer la naturaleza ácida o básica del agua (PH), para el agua pura el PH es de 7 y por debajo de éste se considera que es una solución ácida. Según estudios realizados para que exista vida acuática la cantidad de PH permisible varía entre 6.5 y 8.5 unidades.

## 5. DIFUSION Y DISPERSION

Los movimientos del agua, tanto en las principales corrientes como el movimiento de menor importancia, se producen por advección y difusión. El agua que se desplaza de un sitio a otro horizontal y verticalmente, se mueven por advección. EL movimiento por difusión se debe a la difusión molecular lo mismo que sucede con una gota de colorante o por difusión con remolinos, que puede compararse a lo que sucede cuando se aplica colorante con una espátula.

En el mar, la difusión en remolino es un proceso mas rápido que la difusión molecular, y la advección es mas rápida que cualquiera de las dos.

Concentración es la cantidad relativa de una sustancia en un punto específico en el espacio a un tiempo dado, ésta se puede expresar en unidades de masa, peso, volumen y algunas veces por unidad de volumen de fluido.

Cuando una concentración disminuye se dice que existe una remoción, lo que corresponde a una degradación o disminución de la cantidad de una masa dentro del volumen de otro. Por ejemplo cuando una lancha choca con algún objeto submarino y le provoca una fisura en el depósito de la gasolina y ella comienza a escapar hacia el mar. La cantidad de gasolina por unidad de volumen de agua de mar, corresponde a la concentración de gasolina; el volumen de contaminante es pequeño comparado con el volumen de agua de mar, por lo que el sistema (el mar), es capaz de absorber (diluir) al contaminante sin alterar o modificar bruscamente las condiciones del medio.

Las corrientes marítimas y los movimientos propios del mar, dispersarán al contaminante en diferentes direcciones, con lo que se hará más notoria la remoción. Otro factor para que exista una buena remoción del contaminante, será el tiempo que pasará el contaminante en el medio, ya que al mezclarse con el agua de mar, sus características físicas y químicas se verán alteradas, y como consecuencia se degradará.

### **5.1 DIFUSION**

La difusión es uno de los procesos por el que la concentración de una sustancia es alterada, cuando la distribución de la sustancia en un fluido no es uniforme existe un gradiente de concentración.

El proceso difusivo puede ser el resultado de la actividad molecular, llamado difusión molecular, o de la acción de la turbulencia, llamado difusión turbulenta. Los movimientos Eddy (o de remolino), durante los flujos turbulentos causan la difusión turbulenta que es generalmente mayor que la difusión molecular.

La energía, cantidad de movimiento y masa (materia), se pueden transportar por difusión. Algunos ejemplos de difusión molecular son los siguientes:

La energía en la forma de calor se transporta a través de una delgada capa de fluido entre placas paralelas fijas a diferentes temperaturas.

El transporte de cantidad de movimiento ocurre en un fluido entre dos placas paralelas cuando una de las placas se mueve relativamente a la otra. El esfuerzo cortante en la placa en movimiento por la acción molecular, causa que las placas de fluido adyacente se pongan en movimiento de acuerdo con la Ley de Viscosidad de Newton.

La colocación de un cristal de permanganato en un recipiente de agua inmóvil, causa un transporte de masa molecular, al esparcirse lentamente las partículas del colorante por el fluido.

Algunos ejemplos de difusión turbulenta de energía, cantidad de movimiento y masa, son los siguientes:

La difusión turbulenta de energía, ocurre durante el calentamiento de una superficie pavimentada en días calurosos de verano.

Las emisiones del escape de un automóvil, por ejemplo, el monóxido de carbono esparciéndose en la atmósfera representan la difusión turbulenta de masa.

### **5.1.1 Difusión molecular.**

El transporte de sustancias por procesos de difusión, requiere distribuciones de concentración no uniformes, expresados por la ecuación siguiente conocida como Ley de Fick.

$$P = - D_m \frac{\partial c}{\partial x} \quad (5.1)$$

La cual establece que la velocidad de transferencia o flujo (P) de la sustancia por unidad de área normal a la dirección (x), varía directamente con el coeficiente de la difusión molecular ( $D_m$ ), y el gradiente de la concentración de la sustancia. El signo menos de la ecuación 5.1, implica que el flujo es siempre en la dirección de disminución del gradiente. La difusión siempre lleva material de regiones de alta a las de baja concentración.

### 5.1.2 Difusión turbulenta.

La Ley de Fick se puede aplicar al transporte turbulento sustituyendo  $D_m$  por un coeficiente de turbulencia apropiado ( $D_t$ ). Debe indicarse que  $D_t$  no es una propiedad material como  $D_m$ , sino que depende del carácter de la turbulencia, como consecuencia,  $D_t$  no es necesariamente una constante en el espacio y en el tiempo.

Un caso interesante del transporte de una partícula en estado permanente es el del sedimento arrastrado por un río. Todas las partículas en suspensión tienden a asentarse en el fondo del río a velocidades de caída que dependen del tamaño de la partícula, de su forma y de su peso.

La acción de difusión turbulenta causa un flujo de partículas hacia arriba, que se debe a una mayor concentración cerca del fondo. Si se igualan las dos tendencias se establece una relación de régimen permanente que muestra cómo la concentración del sedimento varía verticalmente, sin embargo, es necesario conocer la concentración en un nivel como una condición de frontera. La Ley de Fick para este caso es

$$P = - \epsilon_c \frac{\partial C}{\partial y} \quad (5.2)$$

donde

P la velocidad de transferencia (número de partículas por unidad de área por unidad de tiempo).

C la concentración; es el número de partículas por unidad de volumen al nivel "y".

$\epsilon_c$  supuesto proporcional a E, la viscosidad de remolino cinemática.

Para partículas de tamaño no uniforme con diferentes velocidades, la ecuación anterior sería aplicada separadamente a grupos de partículas que tienen las mismas velocidades de asentamientos y las concentraciones resultantes se sumarían.

## 5.2 DISPERSION O CONVECCION

Un fluido puede estar en equilibrio mecánico (es decir, no presentar ningún movimiento macroscópico), sin estar en equilibrio térmico. Se encuentra que el equilibrio es estable sólo cuando se cumplen determinadas condiciones, en otro caso el equilibrio es inestable y esto conduce a la aparición de corrientes en el fluido que tienden a mezclar dicho fluido de tal modo que la temperatura se llegue a igualar, este movimiento se denomina convección.

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos se ven gradualmente simplificadas en el caso del flujo estacionario. Se entiende por flujo estacionario, aquél en el que la velocidad es constante en el tiempo en cada punto ocupado por el fluido.

Introduciendo el concepto de línea de corriente; estas líneas tienen la propiedad de que la tangente a ellas en cualquier punto, indica la dirección de la velocidad en dicho punto.

Para el flujo estacionario las líneas de corriente no varían con el tiempo, coincidiendo con las trayectorias de las partículas fluidas.

En el caso de flujo no estacionario deja de cumplirse esta condición, las tangentes a las líneas de corrientes dan las direcciones de las

velocidades de las partículas fluidas en diversos puntos del espacio a un instante dado, mientras que las tangentes a las trayectorias indican las direcciones de las velocidades de las partículas de fluido dadas en distintos instantes del tiempo.

### 5.2.1 Convección libre.

Se ha mostrado que si existe un equilibrio mecánico dentro de un fluido que está en un cuerpo gravitatorio, la diferencia de temperaturas sólo puede depender de la altitud ( $z$ ). Si la diferencia de temperaturas no satisface esta condición, sino que también es función de las demás coordenadas, entonces no es posible el equilibrio mecánico. Además en el caso de que las altitudes sean iguales, puede seguir siendo imposible el equilibrio mecánico si el gradiente vertical de temperaturas está dirigido hacia abajo.

La ausencia del equilibrio mecánico da como resultado la aparición de corrientes internas en el fluido, que tienden a mezclarlo y hacer que adquiera una temperatura constante. Dicho movimiento en el caso de un campo gravitatorio se denomina convección libre.

El flujo convectivo puede ser laminar o turbulento. No existe número de Reynolds para la convección libre ya que no existe ningún parámetro de velocidad característica, sin embargo la iniciación de la turbulencia se determina por el número de Grashof y la convección resulta turbulenta cuando éste es muy grande.

De manera que el número de Grashof se define de la siguiente manera

$$G = \frac{\beta g l^3 (T_1 - T_0)}{\nu^2}$$

donde

- G el número de Grashof
- $\beta$  coeficiente de dilatación térmica del fluido
- g aceleración de la gravedad
- l distancia entre dos planos horizontales
- $T_1$  temperatura del plano horizontal superior
- $T_0$  temperatura del plano horizontal inferior
- $\nu$  viscosidad cinemática del fluido

En el caso de valores muy grandes de G, la convección estacionaria se vuelve a su vez inestable; entonces, se establece la turbulencia para  $G \approx 50\ 000$ .

## 6. MODELO MATEMATICO DE TRANSPORTE DE SUSTANCIAS DILUIDAS

Con base en el principio de balance de masa es posible plantear un modelo matemático para calcular la distribución temporal de la concentración de una sustancia dentro de la marina pequeña.

Sean:

- P la masa (por unidad de tiempo) de una sustancia vertida en forma continua a la marina.
- $Q_p$  el gasto de agua por unidad de área que puede bombearse al interior de la marina.
- $Q_R$  el gasto de agua por unidad de área que, si se desea, se extrae desde la marina.

La concentración de la sustancia varía espacialmente en las direcciones horizontales  $x$  y  $y$ ; sin embargo, una marina se considera pequeña cuando la sustancia está completamente mezclada. La masa total de la sustancia se considera pequeña en comparación con la del agua en la marina, por lo que no altera su hidrodinámica.

Durante el descenso de la marea ("ebb tide" de pleamar a bajamar, fig. 6.1), la marina desaloja hacia el mar agua que contiene masa de la sustancia. Posteriormente, para el tiempo en el que asciende la marea ("flood tide" de bajamar a pleamar, fig. 6.1), al recinto entra agua de mar limpia, por ello no sale al mar agua con masa de la sustancia; sin embargo en esta etapa la concentración de la sustancia disminuye debido a que se mezcla con el agua que entró y se cuenta con un mayor volumen de agua al tender a pleamar.

Además, se considera que existe un ingreso ( $r_s$ ) de la sustancia desde el exterior y un egreso ( $r_d$ ) de la sustancia desde la marina al medio exterior.

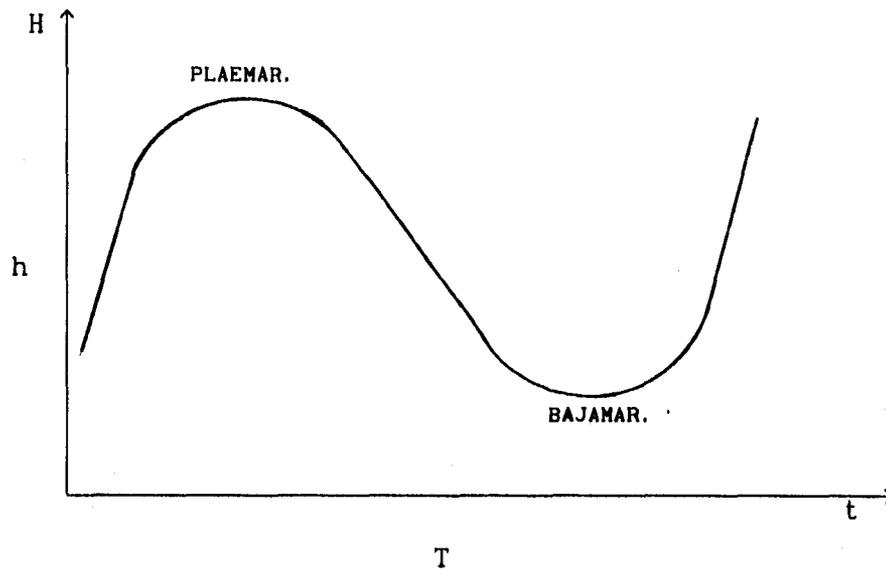


Figura 6.1

La ecuación de balance de masa se plantea a partir de un volumen de control con área horizontal  $A$  y profundidad  $h$ . De modo que la masa que entra ( $M_E$ ) menos la que sale ( $M_S$ ) del volumen, es igual al cambio de la masa de su interior en el tiempo ( $\partial M/\partial t$ ), es decir

$$M_E - M_S = \frac{\partial M}{\partial t} \Delta t \quad (6.1)$$

Durante el descenso de la marea ("ebb tide" de pleamar a bajamar, fig. 6.1), la marina desaloja hacia el mar agua que contiene masa de la sustancia. Posteriormente, para el tiempo en el que asciende la marea ("flood tide" de bajamar a pleamar, fig. 6.1), al recinto entra agua de mar limpia, por ello no sale al mar agua con masa de la sustancia; sin embargo en esta etapa la concentración de la sustancia disminuye debido a que se mezcla con el agua que entró y se cuenta con un mayor volumen de agua al tender a pleamar.

Además, se considera que existe un ingreso ( $r_s$ ) de la sustancia desde el exterior y un egreso ( $r_d$ ) de la sustancia desde la marina al medio exterior.

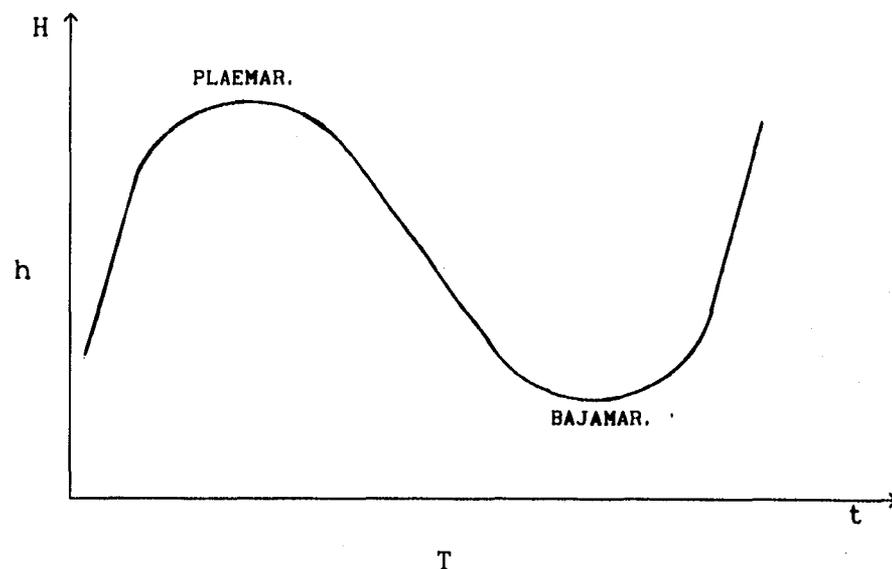


Figura 6.1

La ecuación de balance de masa se plantea a partir de un volumen de control con área horizontal  $A$  y profundidad  $h$ . De modo que la masa que entra ( $M_E$ ) menos la que sale ( $M_S$ ) del volumen, es igual al cambio de la masa de su interior en el tiempo ( $\partial M / \partial t$ ), es decir

$$M_E - M_S = \frac{\partial M}{\partial t} \Delta t \quad (6.1)$$

Sea  $C$  la concentración de la sustancia que se expresa como el cociente de la masa entre el volumen del agua alojado en la marina.

El volumen de agua alojado en la marina debido a la marea está dado como

$$V = V_m + \frac{1}{2} A_m R \cos wt \quad (6.2)$$

donde

$V$  volumen de agua que entra a la marina, en una marea.

$V_m$  volumen de la marina, en el nivel medio del mar.

$A_m$  área de la marina.

$R$  rango de la marea.

$w$  frecuencia de la marea.

$t$  tiempo o lapso de tiempo escogido para el estudio.

El gasto en la comunicación con el mar, se obtiene como

$$Q = \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2} A_m R w \sin wt \quad (6.3)$$

Si por un instante un observador se encuentra a orillas del mar, y el nivel de este se encuentra en pleamar (figura 6.1, el nivel del mar es el mayor que se puede tener), comienza a bajar el nivel del mar, es decir, se está en la curva que describe el lapso de tiempo pleamar-bajamar, dentro de la marina obviamente también tiene que descender el nivel del agua (en éste tiempo no existe remoción, ya que dentro de la marina existe la misma concentración de la sustancia, aunque no el mismo volumen de agua), lo que significa que de la marina está saliendo agua con contaminante con la concentración que tenga en ese instante, una vez que se llega al nivel del mar mínimo (bajamar), este comienza a subir, y dentro de la marina sucede lo mismo, esto es, a la marina entra agua de mar (agua limpia), y en este instante al aumentar el volumen de agua dentro de la marina la concentración disminuye, sin embargo la masa de contaminante es la misma.

Por lo que en cada período (pleamar-bajamar), el agua de la marina se está intercambiando con el agua de mar y la concentración disminuye.

### 6.1 DURANTE EL DESCENSO DE LA MAREA.

En el descenso de la marea (el flujo de agua es de la marina hacia el mar), se tienen las aportaciones de masa ( $M_E$ ) siguientes:

a) Masa vertida desde el exterior en ciertos lugares

$$P \Delta t$$

b) Masa que entra en la interfase agua-aire

$$r_s V \Delta t$$

c) El gasto  $Q_p$  incorporado artificialmente (bombeo) a la marina, con concentración  $C_p$

$$C_p Q_p \Delta t$$

Por lo que la entrada de masa es

$$M_E = P \Delta t + r_s V \Delta t + C_p Q_p \Delta t \quad (6.4)$$

La salida de masa de sustancia se deben a los motivos siguientes

a) Flujo de agua de la marina hacia el mar (como ya se explicó, al bajar la marea disminuye el nivel del agua de la marina sale agua de ella con una concentración  $C$ )

$$-C Q \Delta t$$

Se supone el signo (-) para ser congruentes con la ecuación 6.3.

b) El decaimiento de la sustancia en el tiempo (al pasar la sustancia, un tiempo prolongado en contacto con el agua de mar, paulativamente va perdiendo sus características, por lo que se dice que existe remoción).

$$r_d V \Delta t$$

c) El gasto  $Q_p$  que se incorporó artificialmente a la marina se va hacia el mar durante esta etapa

$$C Q_p \Delta t$$

Por lo que el término de salida de masa, queda de la siguiente manera

$$M_s = -C Q \Delta t + r_d V \Delta t + C Q_p \Delta t \quad (6.5)$$

Además se sabe que la masa en el interior de la marina es

$$M = C V \quad (6.6)$$

Por lo que sustituyendo las ecuaciones 6.4 y 6.5 en 6.1, se tiene

$$P \Delta t + r_s V \Delta t + C_p Q_p \Delta t + C Q \Delta t - r_d V \Delta t - C_p Q_p \Delta t = \frac{dM}{dt} \Delta t$$

Dividiendo la ecuación anterior entre  $\Delta t$

$$P + r_s V + C_p Q_p + C Q - r_d V - C Q_p = \frac{dM}{dt}$$

Considerando la ecuación 6.6, en la ecuación anterior tenemos lo siguiente

$$P + r_s V + C_p Q_p + C Q - r_d V - C Q_p = \frac{d(C V)}{dt} \quad (6.7)$$

Desarrollando la derivada del producto C V

$$\frac{d(C V)}{dt} = C Q + V \frac{dC}{dt} \quad (6.8)$$

Considerando que  $\frac{dV}{dt} = Q$  y sustituyendo la ecuación 6.8 en la ec 6.7

$$C Q + V \frac{dC}{dt} = P + r_s V + C_p Q_p + C Q - r_d V - C Q_p$$

$$V \frac{dC}{dt} = P + r_s V + C_p Q_p - r_d V - C Q_p$$

Despejando  $\frac{dC}{dt}$  y operando algebraicamente, se llega a

$$\frac{dC}{dt} = \frac{P + r_s V + C_p Q_p - r_d V - C Q_p}{V}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{P + C_p Q_p - C Q_p + r_s - r_d}{V}$$

Finalmente

$$\boxed{\frac{dC}{dt} = \frac{P + Q_p (C_p - C) + r_s - r_d}{V}} \quad (6.9)$$

La ecuación 6.9 corresponde a las ecuaciones de balance de masa durante el descenso de la marea.

## 6.2 DURANTE EL ASCENSO DE LA MAREA.

En ésta etapa el flujo de agua es del mar hacia la marina. Se presentan los ingresos siguientes:

Ingresos de masa.

a) Masa vertida desde el exterior en ciertos lugares

$$P \Delta t$$

b) Masa aportada en la interfase agua-aire

$$r_s V \Delta t$$

c) Desde el mar entra un gasto de agua  $Q$  con una concentración de la sustancia  $C_m$

$$C_m Q \Delta t$$

Por lo tanto la masa de entrada es

$$M_E = P \Delta t + r_s V \Delta t + C_m Q \Delta t$$

En esta etapa los egresos de masa que se presentan son los siguientes

a) Dentro del cuerpo de agua se tiene un decaimiento de la sustancia igual a

$$r_d V \Delta t$$

b) El gasto  $Q_R$  que se bombea desde la marina

$$C Q_R \Delta t$$

Por lo que el término asociado a la salida de masa resulta ser

$$M_s = r_d V \Delta t + C Q_R \Delta t$$

De la ecuación 6.1 se sabe que

$$P \Delta t + r_s V \Delta t + C_m Q \Delta t - r_d V \Delta t - C Q_R \Delta t = \frac{dM}{dt} \Delta t$$

Dividiendo entre  $\Delta t$

$$P + r_s V + C_m Q - r_d V - C Q_R = \frac{dM}{dt}$$

Desarrollando la derivada, y como  $M = C V$  se tiene que

$$\frac{d(CV)}{dt} = V \frac{dC}{dt} + CQ$$

$$V \frac{dC}{dt} + CQ = P + r_s V + C_m Q - r_d V - C Q_R$$

$$V \frac{dC}{dt} = P + r_s V + C_m Q - r_d V - C Q_R - CQ$$

Dividiendo entre  $V$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{P + C_m Q - C Q_R - CQ + r_s V - r_d V}{V}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{P - C(Q_R + Q) + C_m Q + r_s V - r_d V}{V}$$

(6.10)

La ecuación 6.10 corresponde a las ecuación de balance de masa durante el ascenso de la marea.

### 6.3 CONCENTRACION DE UNA SUSTANCIA NO CONSERVATIVA.

La masa y concentración de la sustancia considerada en las ecuaciones 6.9 y 6.10 se supone que es de un contaminante vertido a la marina tal que no existe ingreso desde el exterior ( $r_s = 0$ ) y el egreso desde el cuerpo de agua es igual a la concentración multiplicada por una tasa de decaimiento en el tiempo  $k$ , por lo que

$$r_s = 0$$

$$r_d = k C$$

De tal modo que al sustituir  $r_s$  y  $r_d$  en las ecuaciones 6.9 y 6.10, quedan de la forma siguiente:

Durante el descenso de la marea.

$$\frac{dC}{dt} = \frac{P + Q_p (C_p - C)}{V} - k C \quad (6.11)$$

Durante el ascenso de la marea.

$$\frac{dC}{dt} = \frac{P - C (Q + Q_R) + C_m Q}{V} - k C \quad (6.12)$$

#### 6.4 CONCENTRACION DE OD Y DBO

La evaluación de la calidad del agua se realiza a partir de los usos y servicios que a ella se le desea dar. Una forma de llevar a cabo esta evaluación es a partir de los valores que toman de las concentraciones de oxígeno disuelto (OD) y demanda bioquímica de oxígeno (DBO).

El OD mide la capacidad del agua para asimilar materia orgánica y soportar la vida acuática (que es del orden de  $4 \text{ g}_m/\text{m}^3$ ). Mientras que la DBO corresponde a la cantidad de oxígeno requerida para la descomposición de la materia orgánica y los requerimientos de los peces para poder vivir.

Se supone que dentro de una marina el agua está saturada con OD y que cuando se agrega agua con un contenido de materia orgánica en descomposición, el OD es consumido. Al mismo tiempo, cierta cantidad de oxígeno que existe en la atmósfera se disuelve en el agua y aporta OD, sin que sea mayor al valor de saturación que admite el agua.

Para determinar el efecto de la calidad del agua de la marina debido a la materia orgánica en descomposición vertida, se propone calcular en el tiempo las concentraciones de OD y DBO. Ellas se encuentran interrelacionadas entre sí y dependen de las velocidades de flujo del agua dentro de la marina, la turbulencia, difusión, ingresos de agua de mar a la marina, etc.

En marinas pequeñas se acepta que el agua que entra y sale de ella se encuentra completamente mezclada. Sin embargo, cuando son grandes, de forma irregular, muy largas, con varios canales en su interior, etc., no es válido tratarlas como aquí se plantea, ya que requiere el cálculo de las velocidades de flujo y de "difusión-advención" por lo menos en dos direcciones espaciales.

En este estudio se considera que una marina es pequeña, cuando el mezclado en su interior es bueno y permite tener las mismas concentraciones en cualquier lugar dentro de la marina.

### 6.5 ECUACION PARA EL CAMBIO DE CONCENTRACION DE DBO.

La ecuación que permite calcular la concentración de DBO se encuentra a partir de las ecuaciones generales 6.9 y 6.10, deducidas con anterioridad. La concentración de DBO, se representa con la literal B y sustituye a la C de las ecuaciones 6.9 y 6.10, adicionalmente se toman en cuenta los siguientes aspectos:

La cantidad de masa vertida P se representa como  $P_b$ .

No existe aportación de DBO desde el aire  $r_s = 0$  aunque no es el mismo subíndice usado anteriormente.

El agua que se bombea a la marina tiene una concentración  $b_p$  de DBO.

La tasa de consumo de DBO dentro de la marina se considera que es una fracción de la concentración de DBO, es decir

$$r_d = k_1 b$$

De manera que las ecuaciones 6.9 y 6.10 quedan de la forma siguiente:

$$\frac{db}{dt} = \frac{P_b + Q_p (b_p - b)}{V} - k_1 b \quad \text{descenso de la marea} \quad (6.13)$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{P_b - b (Q + Q_R) + b_m Q}{V} - k_1 b \quad \text{ascenso de la marea} \quad (6.14)$$

## 6.6 ECUACION PARA EL CAMBIO DE CONCENTRACION DE OD.

La ecuación para determinar la concentración de OD es deducida a partir de las ecuaciones 6.9 y 6.10 considerando los cambios siguientes:

La concentración de OD corresponde a la literal  $d$ .

La cantidad de masa vertida  $P$  identifica  $P_d$ .

La concentración de OD del gasto bombeado es  $d_p$ .

La concentración de OD de agua de mar es  $d_m$ .

La aportación de OD desde el aire es proporcional a la diferencia entre la concentración de OD de saturación ( $d_s$ ) y la concentración de OD, esto es

$$r_s = k_2 (d_s - d)$$

La tasa de consumo de OD dentro de la marina se considera igual a la de consumo de DBO:

Tomando en cuenta los aspectos anteriores, se plantea que

$$\frac{dd}{dt} = \frac{P_d Q_p (d - d)}{V} - k_1 b + k_2 (d_s - d) \quad \text{descenso de la marea} \quad (6.15)$$

$$\frac{dd}{dt} = \frac{P_d - (Q_R + Q) d + d_m Q}{V} - k_1 b + k_2 (d_s - d) \quad \text{ascenso de la marea} \quad (6.16)$$

Como en las ecuaciones 6.18 y 6.19 aparecen las concentraciones de OD y DBO se requiere resolver por parejas las ecuaciones anteriores, durante el descenso de marea se emplean las ecuaciones 6.15 y 6.18, y mientras el ascenso de marea se usan las ecuaciones 6.16 y 6.19.

### 6.7 COEFICIENTE DE INTERCAMBIO.

Durante cada ciclo de marea, entra y sale agua de la marina un volumen de agua llamado "prisma de marea" ( $P_m$ ) que es igual al producto del área de la superficie libre de la marina, por el rango de marea (diferencia entre el pleamar y bajamar). Sin embargo, no todo el volumen de agua de mar que entra ( $P_m$ ) vuelve a salir en un ciclo de marea, ya que el agua que ingresa se mezcla con la que tiene alojada la marina, luego al descender la marea, egresa un volumen  $P_m$  pero de agua mezclada. Por ello es necesario que transcurran varios ciclos de marea para cambiar una gran parte del volumen de agua que tenía la marina en el momento de iniciar la estimación de este volumen. Para hacer explícito el cambio de volumen neto de agua de mar que ha reemplazado al agua de la marina se define el "coeficiente de intercambio".

Si  $V$  es el volumen de agua de la marina en un pleamar,  $M_0$  y  $C_0$  son la masa de una sustancia contenida en esta agua, y su concentración en el tiempo  $t_0$  entonces se tiene que

$$M_0 = V C_0$$

Además  $M_0$  y  $C_0$  corresponden a la masa y concentración de la sustancia en el pleamar  $i$ -ésimo, por lo que

$$M_i = V C_i$$

Cuando esta masa se acomoda dentro de un volumen  $V'$  tal que dentro de él la concentración sea igual a  $C_0$  se tiene que

$$M_i = V' C_0$$

Igualando las dos ecuaciones últimas anteriores se tiene que

$$V' = \frac{C}{C_0} V$$

El volumen de agua  $S_i$  con concentración  $C_0$  que ha salido (durante el lapso entre los pleamares de tiempo  $t_0$  y el  $i$ -ésimo) es igual a la diferencia siguiente

$$S_i = V - V'$$

Sustituyendo  $V'$  y dividiendo entre  $V_p$ , en la ecuación anterior, se tiene

$$\frac{S_i}{V_p} = 1 - \frac{C}{C_0}$$

La relación entre volúmenes que aparecen en el primer miembro de la expresión anterior se llama coeficiente de intercambio  $E_i$  por lo que

$$E_i = 1 - \frac{C}{C_0} \quad (6.17)$$

El coeficiente de intercambio indica la proporción, respecto al nivel de agua de un pleamar, del agua de mar que ha ingresado a la marina después de  $i$  ciclos de marea.

## 7. EJEMPLOS DE APLICACION

Para obtener la solución de las ecuaciones planteadas en el capítulo anterior, se empleó el método de Runge-Kutta de cuarto orden para una o dos ecuaciones diferenciales simultáneas dado las ventajas que se tienen para manejar concentraciones adimensionales (ver anexo).

### 7.1 CAMBIO DE CONCENTRACION EN LA MARINA KEMER.

La marina Kemer se encuentra localizada al oeste de Turquía sobre la costa de la bahía de Antalaya, aproximadamente a 45 kilómetros al suroeste de la ciudad de Antalaya (figura 7.1).

La marina Kemer tiene un único vaso confinado por dos rompeolas y una entrada localizada al noroeste de la misma. Tiene capacidad para 150 embarcaciones, la profundidad media dentro de la marina en bajamar es de 4.25 m, una superficie de 53 000 m<sup>2</sup> con un volumen de 225 250 m<sup>3</sup>.

La marea del lugar donde se encuentra la marina Kemer es del tipo semidiurno, con un rango de 0.2 m siendo típico este rango para la línea costera de Turquía mediterránea.

El volumen medio de agua que entra a la marina durante la mitad del periodo de marea es  $10\,600\text{ m}^3$ .

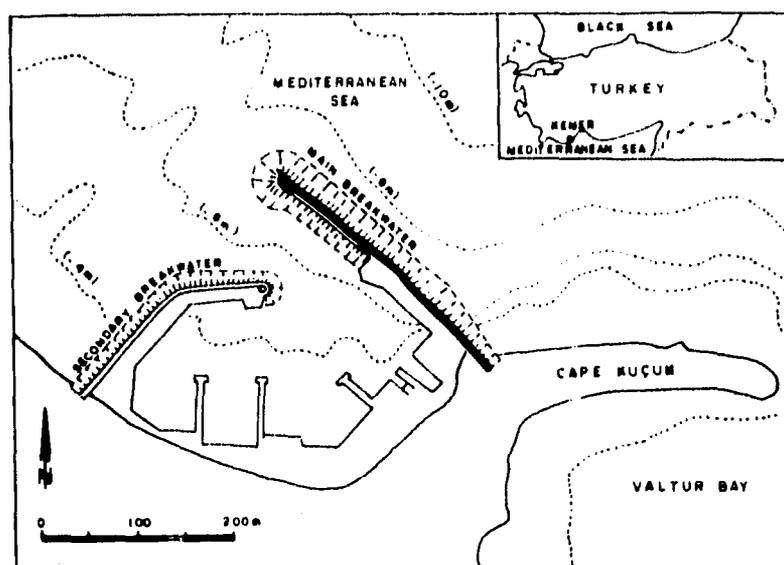


Figura 7.1

El valor para el parámetro de lavado ( $M$ ) es de 43.5 en la marina Kemer.

Usando los datos físicos de la marina, se realizó un estudio por medio de programas de cómputo para poder observar el comportamiento de la marina, usándola normalmente y determinar si la entrada y salida de agua de la marina por efecto de marea, era capaz de lavar o diluir las concentraciones dentro de la marina y en cuánto tiempo. Se observó que si el trabajo se le dejaba solamente a la marea, la concentración dentro de la marina aumentaba con el tiempo. Los programas de cómputo se modificaron agregándoseles ahora la función de bombear agua limpia

dentro de la marina en el período de pleamar a bajamar , ayudando así a que la concentración disminuyera, sin embargo los resultados no fueron los deseados y se tuvieron que modificar nuevamente los programas. Ahora con una función mas, la de analizar el agua de la marina si durante el período de bajamar a pleamar se extraía agua de la marina. Los gastos de extracción y bombeo de agua en la marina fueron gradualmente en aumento, hasta que se observó que un gasto de  $1 \text{ m}^3$  (gasto que se inyecta a la marina), era el apropiado para realizar el lavado de la marina.

En este ejemplo se verifica la validez del modelo planteado en éste trabajo para el cálculo de variación de una cierta concentración en una marina pequeña (ecuaciones 6.11 y 6.12), contra los resultados de Erdal Özhan (Özhan, 1989).

Los datos utilizados por Özhan y que son aplicables a las ecuaciones 6.11 y 6.12 son los siguientes:

Profundidad media:	4.25 m.
Area de superficie libre (al n.m.m.):	53 000.00 $\text{m}^2$ .
Volumen de agua (al n.m.m.):	225 250.00 $\text{m}^3$ .
Rango de marea:	0.20 m.
Período de marea (semidiurna):	12.50 hr.
Coficiente de decaimiento de la sustancia:	0.00
Gasto colocado artificialmente ( $Q_p$ ):	0.00
Gasto extraído artificialmente ( $Q_R$ ):	0.00
Concentración de la sustancia en el mar ( $C_m$ ):	0.00

Özhan plantea su solución final para el caso en que  $P = 0$  ;  $Q_R = 0 \text{ m}^3/\text{s}$  ;  $k = 0$  y variando el valor de  $Q_p$  de la siguiente manera:

- a)  $Q_p = 0.0 \text{ m}^3/\text{s}$       b)  $Q_p = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}$       c)  $Q_p = 1.0 \text{ m}^3/\text{s}$   
d)  $Q = 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$       e)  $Q = 2.0 \text{ m}^3/\text{s}$

Si se comparan las figuras 7.2 y 7.3, se observa que los resultados son similares, con lo que se ratifica la confiabilidad del modelo desarrollado en este trabajo.

De la figura 7.3 se concluye que para  $Q_p = 1.0 \text{ m}^3/\text{s}$  la concentración en la marina tiende a ser nula (0.5% de la inicial) en un tiempo menor a 20 días, lo cual se juzga adecuado para la calidad del agua. Lo anterior confirma el resultado obtenido por Özhan.

## 7.2 EJEMPLO TEORICO.

Sea una marina que contiene agua con una concentración de una sustancia  $C_0$  de la cual se tiene la siguiente información:

Profundidad media:	3.00 m
Superficie libre:	50 000.00 $\text{m}^2$
Volumen de agua:	225 000.00 $\text{m}^3$
Rango de marea:	0.20 m
Período de marea:	12.50 h
Coefficiente de decaimiento de la sustancia (k):	0.00
Gasto colocado artificialmente ( $Q_p$ ):	0.00
Gasto extraído artificialmente ( $Q_R$ ):	0.00
Concentración de la sustancia en el mar ( $C_m$ ):	0.00

### 7.2.1 Ingreso de contaminante.

Obtener la concentración de la sustancia dentro de la marina para un ingreso de masa de contaminante

- a)  $P = 0$ ; b)  $P = 0.10 \text{ g}_m/\text{s}$ ; c)  $P = 0.30 \text{ g}_m/\text{s}$ ; d)  $P = 0.50 \text{ g}_m/\text{s}$ ; y  
e)  $P = 1.0 \text{ g}_m/\text{s}$ ;

Obtener las concentraciones de las sustancias después de 20 días.

En la figura 7.4 se presentan los resultados obtenidos al resolver numéricamente las ecuaciones 6.11 y 6.12.

Los resultados muestran que para  $P=0$  el volumen de intercambio después de 40 ciclos de marea (20.83 días) es inadecuado para la calidad del

agua de la marina dado que la concentración es del 16.9% de la inicial, por lo que sería conveniente incluir bombeo de agua de mar a la marina, o bien, extraer agua de la misma. Para las tasas de ingreso diferentes de cero se tienen a la larga concentraciones de equilibrio, las cuales muestran un mayor deterioro del agua de la marina al grado de que para los tres últimos casos la concentración final es mayor a la del tiempo de comienzo.

### **7.2.2 Ingreso artificial de gasto de agua limpia.**

Para incrementar el volumen de intercambio de agua del ejemplo anterior se considera la incorporación de gasto de agua limpia ( $C_p=0$ ) para las siguientes relaciones

$$a) Q_p=0.5 \text{ m}^3/\text{s} ; b) Q_p= 1 \text{ m}^3/\text{s} ; c) Q_p= 2 \text{ m}^3/\text{s}$$

En las figuras 7.5 a 7.7 se presentan los resultados obtenidos por el modelo matemático.

Se observa para el caso en que  $P=0$  la concentración se hace nula (0.5% de la inicial) después de 37.03 mareas (19.29 días) para un gasto de bombeo de agua de mar limpia a la marina de  $1.0 \text{ m}^3/\text{s}$ . Lo anterior se juzga adecuado para la calidad de agua de la marina, ya que el tiempo de limpieza es conveniente y el agua no llega a deteriorarse.

### **7.2.3 Extracción artificial de gasto de agua de la marina.**

Al igual que en el ejemplo anterior y para incrementar el volumen de intercambio de agua del ejemplo se considera la extracción de un gasto de agua contaminada de la marina para las siguientes relaciones

$$a) Q_R=0.5 \text{ m}^3/\text{s} ; b) Q_R= 1 \text{ m}^3/\text{s} ; c) Q_R= 2 \text{ m}^3/\text{s}$$

En las figuras 7.8 a 7.10 se presentan los resultados obtenidos por el modelo matemático.

Se observa para el caso en que  $P=0$  la concentración se hace nula (0.5% de la inicial) después de 36.82 mareas (19.18 días) para un gasto de extracción de agua contaminada de la marina de  $1.0 \text{ m}^3/\text{s}$ . Lo anterior se juzga adecuado para la calidad de agua de la marina, ya que el tiempo de limpieza es conveniente y el agua no llega a deteriorarse.

Como se observa los resultados obtenidos en este caso muestran una similitud con los resultados del ejemplo anterior, con lo que la decisión de resultados quedará a criterio del diseñador.

#### **7.2.4 Variación de OD y DBO.**

Obtener la concentración del OD y DBO en la marina considerando que se vierte en forma uniforme y constante en toda la marina un gasto igual a  $1 \text{ m}^3/\text{s}$  con una carga de DBO igual a  $1.5 \text{ g}_m/\text{m}^3$  y un aporte de OD nulo.

Las constantes utilizadas para el modelo de OD y DBO son las siguientes:

a) Concentración de OD de saturación.

Para el agua a una temperatura de  $22^\circ\text{C}$  y salinidad de 33 o/oo, la concentración de OD de saturación es igual  $7.12 \text{ g}/\text{m}^3$  (Tchocobanoglous y Schroeder, 1987).

b) Tasa de reoxigenación.

De acuerdo con las velocidades del agua y del viento, la constante  $k_2$  de las ecuaciones 6.18 y 6.19 es del orden de 0.1/día.

c) Tasa de disminución de oxígeno disuelto.

La constante  $K_1$  que interviene en las ecuaciones 6.13 y 6.14 se estima que es igual a 0.2/día.

d) Concentración de OD del agua de mar.

Según las mediciones realizadas el agua de mar, tiene un promedio de concentración de oxígeno disuelto igual a  $6 \text{ g}_m/\text{m}^3$ .

e) Concentración de demanda bioquímica de oxígeno del agua de mar.

Se consideró que la concentración de demanda bioquímica de oxígeno del agua de mar es del orden de  $1 \text{ g}_m/\text{m}^3$ .

En la figura 7.11 se muestra el cambio de la concentración promedio de OD y DBO en toda la marina. Se observa que la concentración de DBO aumenta gracias al ingreso de una cierta carga de DBO y que esta concentración alcanza un valor constante igual a  $b=2.30 \text{ g}_m/\text{m}^3$ . La concentración de OD disminuye debido a la entrada del agua con DBO hasta un valor de  $C=4.21 \text{ g}_m/\text{m}^3$ , que está encima del valor recomendado para el agua de mar de buena calidad. Esto quiere decir que la marina podría limpiar una descarga accidental de agua tal que el DBO incorporado no exceda  $126.6 \text{ kg}_m/\text{día}$ .

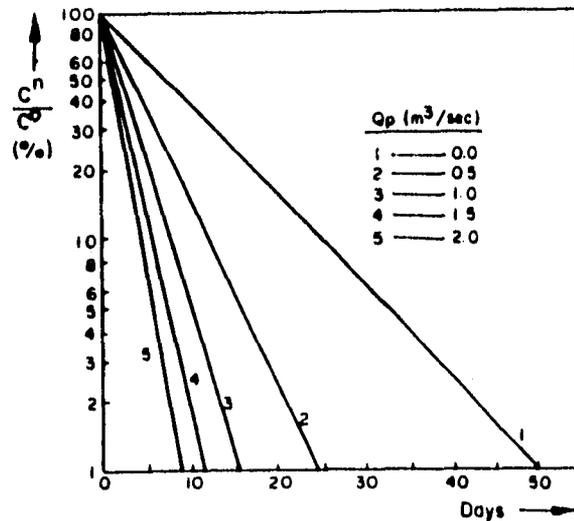


Figura 7.2. Resultados de Erdal Özhan para la Marina Kemer

# CALCULO DE UNA CONCENTRACION MARINA KEMER

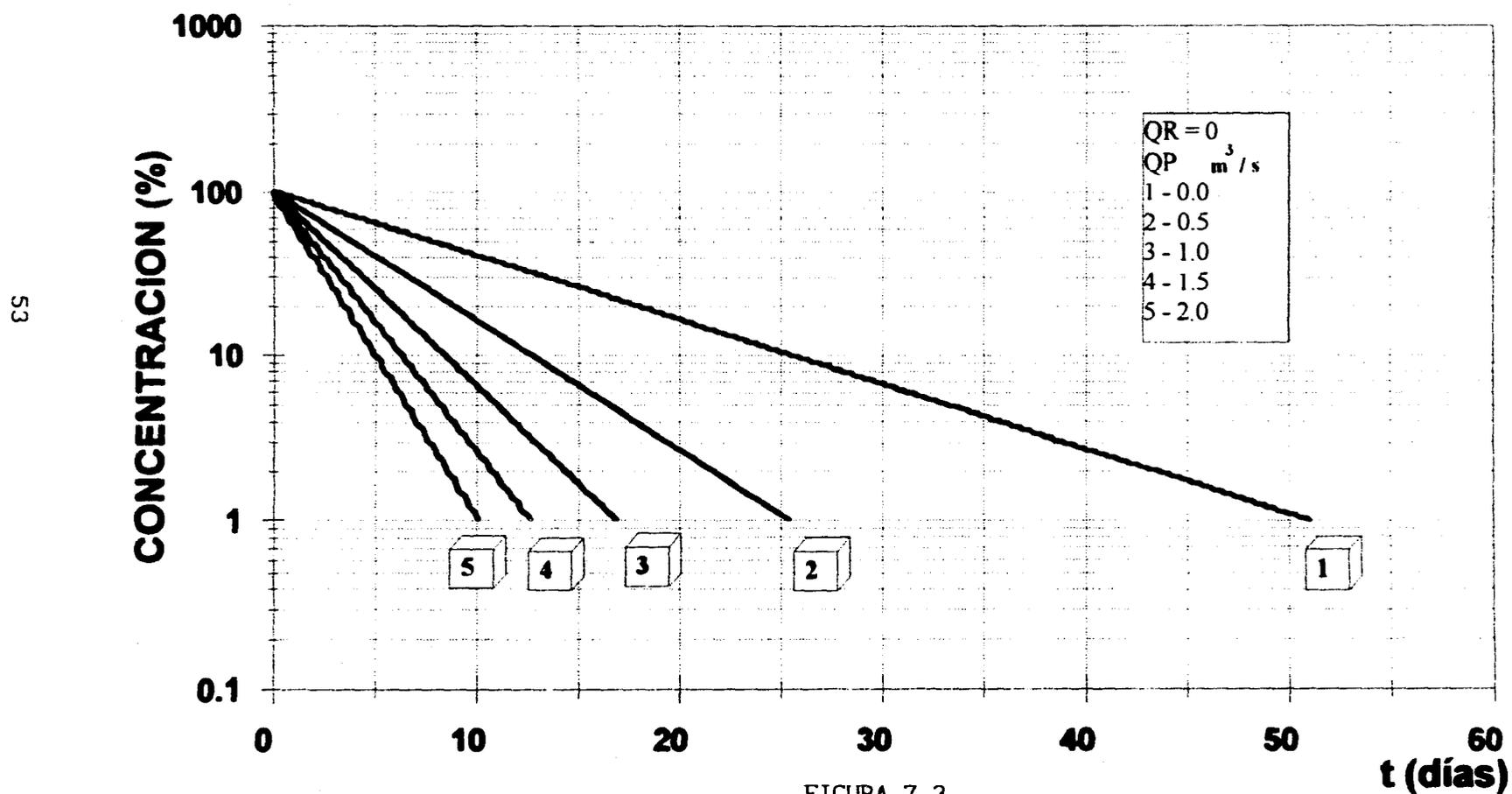


FIGURA 7.3

# CALCULO DE UNA CONCENTRACION NO CONSERVATIVA

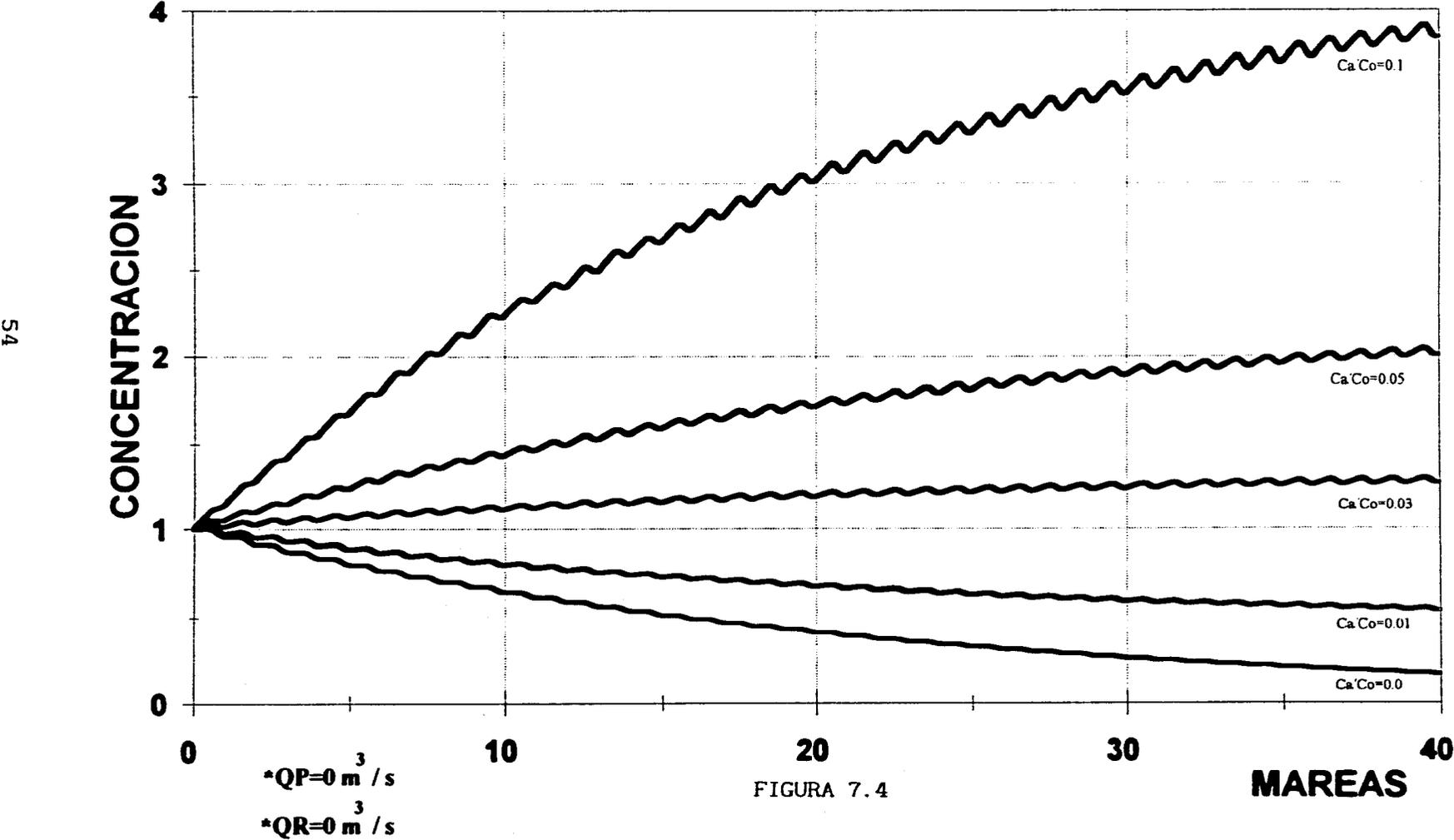


FIGURA 7.4

# CALCULO DE UNA CONCENTRACION NO CONSERVATIVA

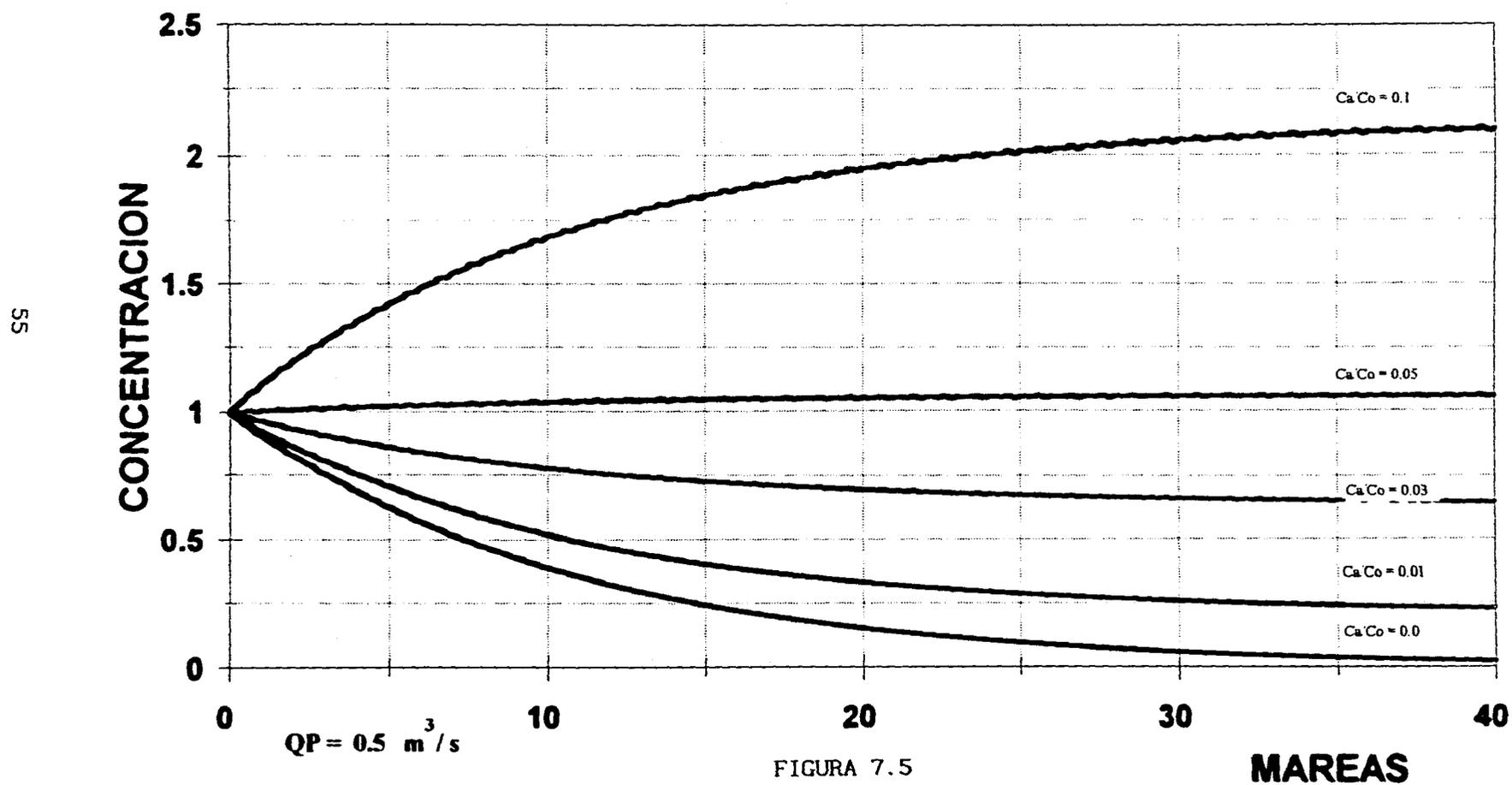


FIGURA 7.5

# CALCULO DE UNA CONCENTRACION NO CONSERVATIVA

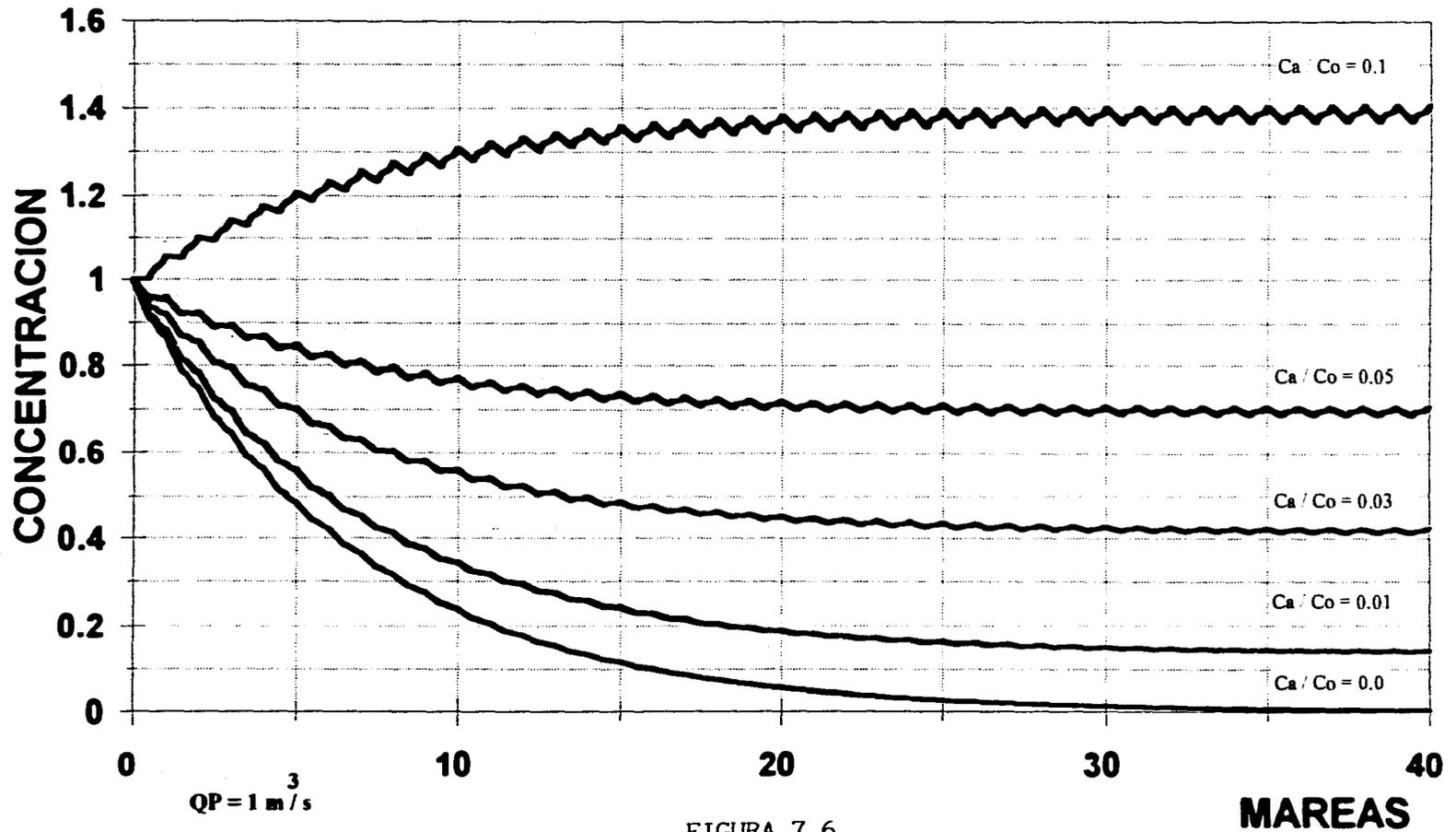


FIGURA 7.6

# CALCULO DE UNA CONCENTRACION NO CONSERVATIVA

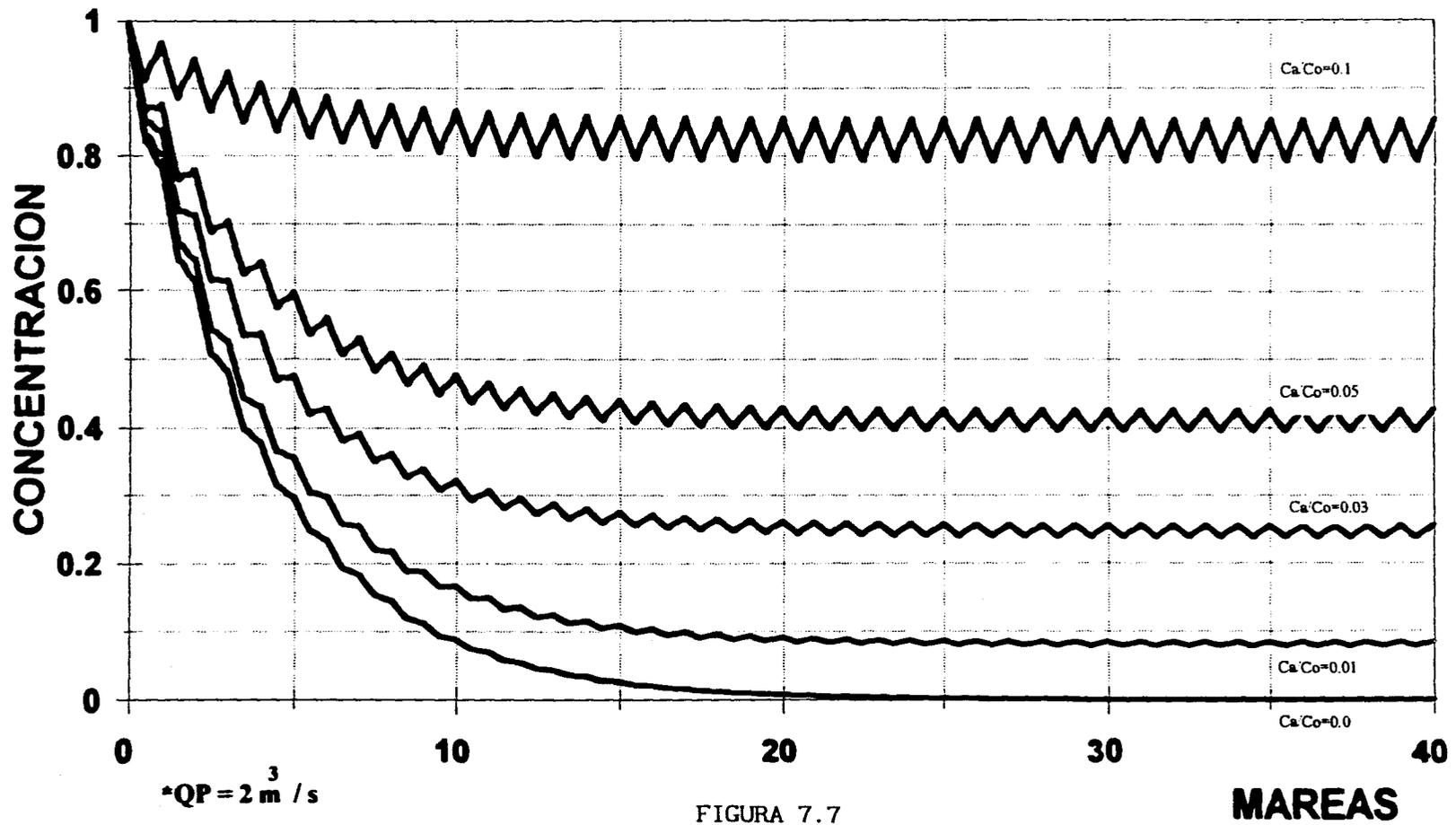


FIGURA 7.7

# CALCULO DE UNA CONCENTRACION NO CONSERVATIVA

58

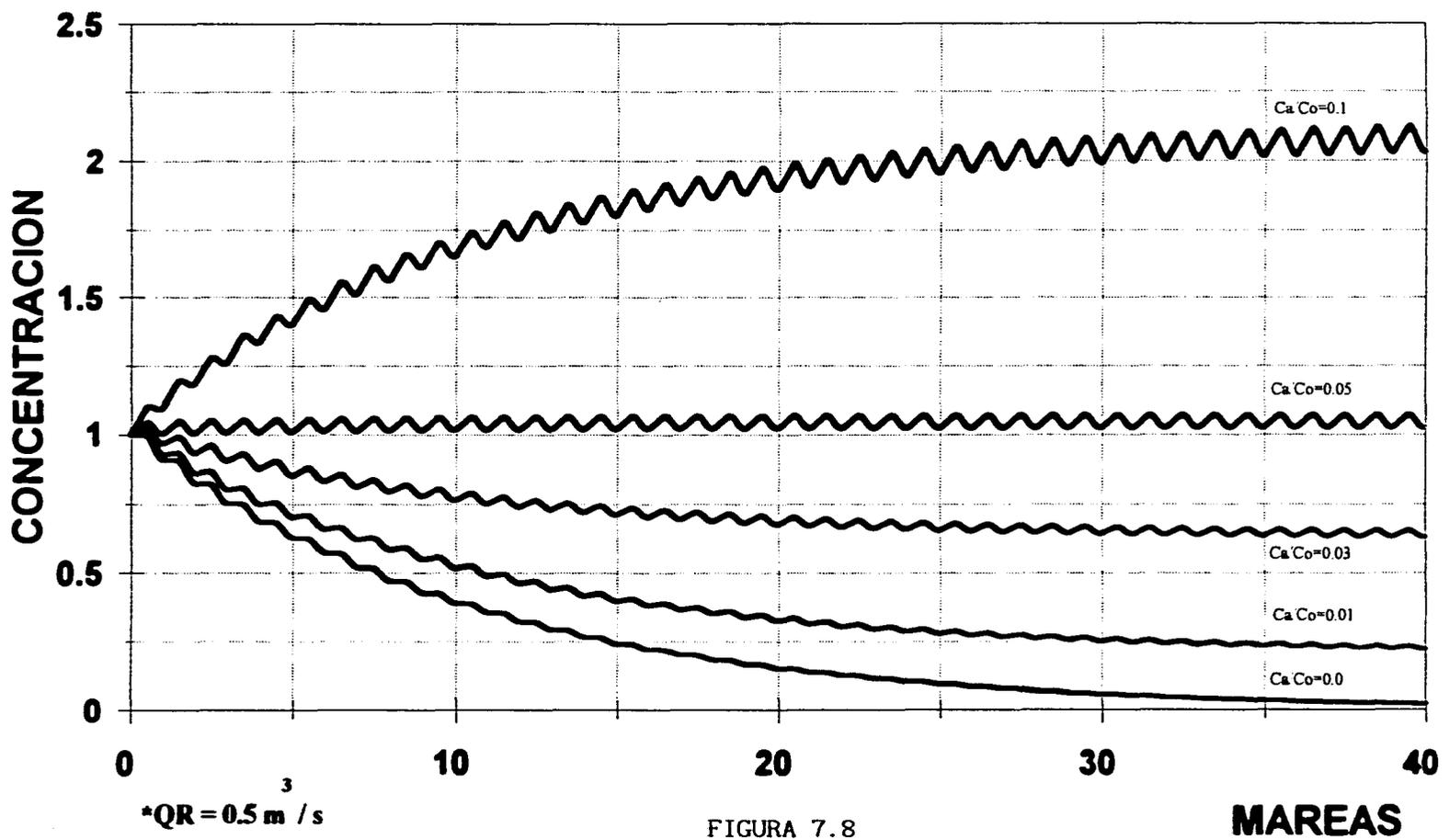


FIGURA 7.8

MAREAS

# CALCULO DE UNA CONCENTRACION NO CONSERVATIVA

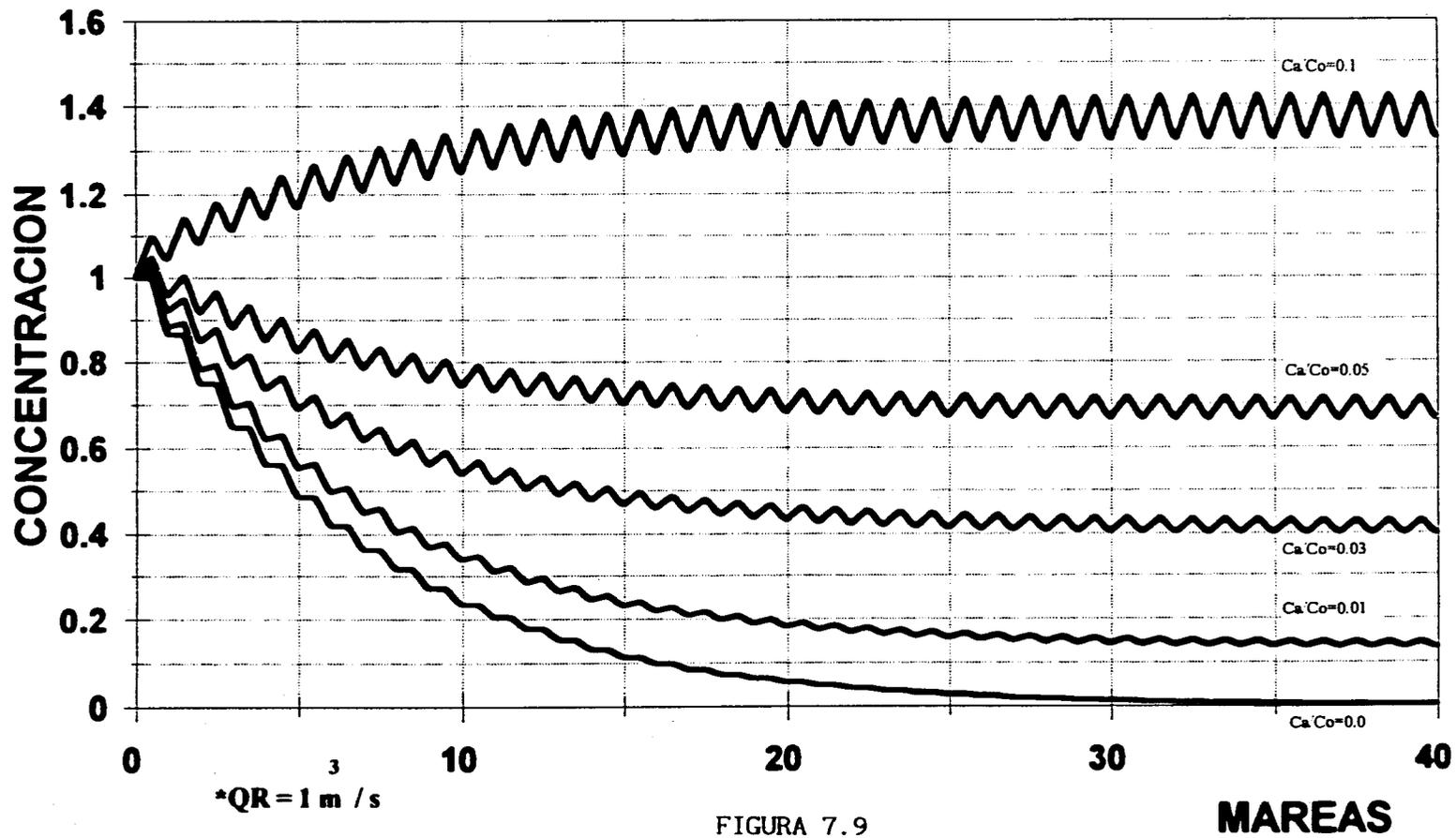
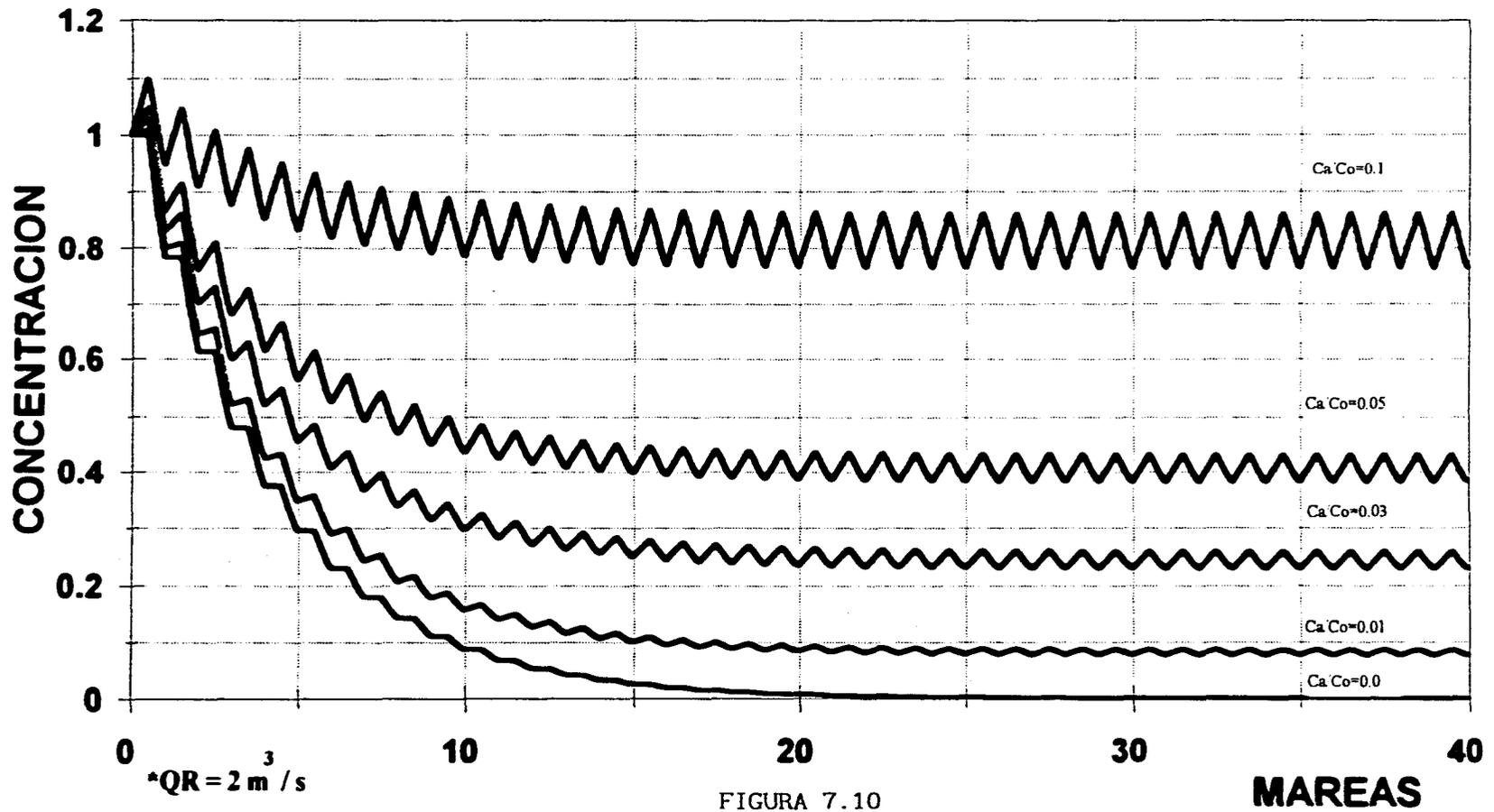


FIGURA 7.9

# CALCULO DE UNA CONCENTRACION NO CONSERVATIVA



## CONCENTRACION DE OXIGENO DISUELT Y DEMANDA BIOQUIMICA DE OXIGENO

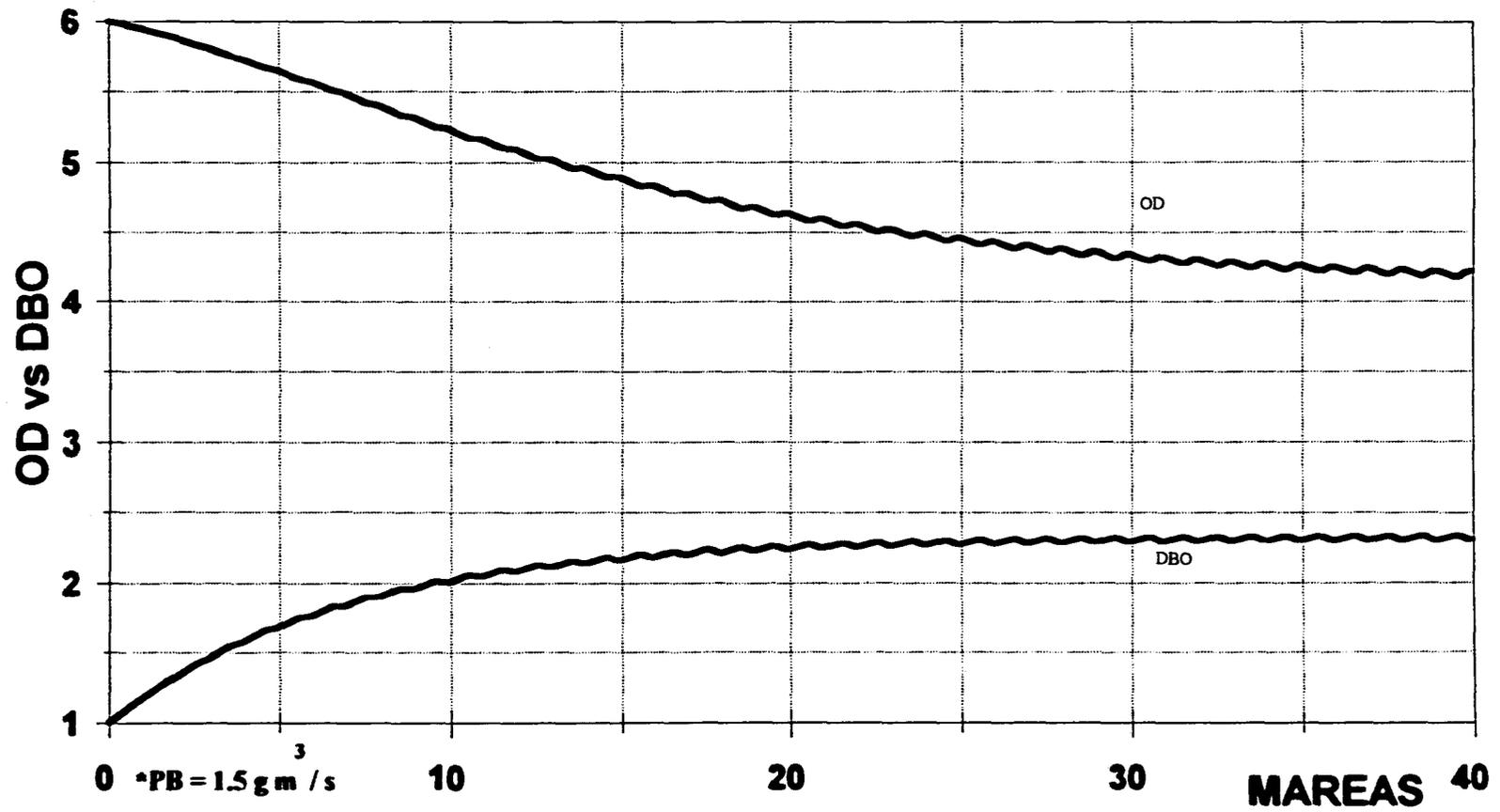


FIGURA 7.11

## 8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Una marina se considera pequeña cuando dentro de ella la concentración de una sustancia sea la misma en todo el recinto, lo que implica un mezclado completo del agua dentro de la marina. Para confirmar lo anterior se pueden realizar mediciones de campaña dentro de la marina para los parámetros más importantes de calidad del agua de mar (para la vida acuática), de manera que la semejanza de los valores obtenidos a lo largo y ancho de ésta sean mayores al 80% . De esta manera podrá considerarse la marina como pequeña y se podrá utilizar el modelo matemático planteado en este trabajo para la estimación de la calidad del agua de una marina.

La obtención de los parámetros utilizados en el modelo matemático se hará mediante planos (planta y batimétricos) para el área, profundidad y volumen; en tanto que para el rango y período de marea es conveniente utilizar las "Tablas de Predicción de Mareas" ó "Calendario de Mareas", editados por el Instituto de Geofísica de la UNAM.

Los resultados obtenidos por el modelo matemático para el caso de la marina Kemer (cap 7) confirman la confiabilidad del mismo para obtener la variación de una concentración de una sustancia no conservativa en una marina pequeña.

En cuanto al ejemplo 2 (cap 7) se observó que para una sustancia no deseada alojada en el recinto marítimo, disminuye a valores menores al 20% de la inicial en 40 ciclos de marea (20.83 días) por simple efecto de marea. Esto se debe a que los volúmenes de agua de mar que entran a ella no son suficientes para que la marina pueda limpiarse por si sola.

En el caso de que exista un ingreso accidental de contaminante la marina no tiene la facultad de limpiarse por si sola, lo que hace evidente el estudio de bombeo de agua limpia de mar a la marina (durante el descenso de marea) o extracción de agua contaminada (durante el ascenso de marea).

Los resultados muestran que para  $P=0$  y un gasto de bombeo de  $1 \text{ m}^3/\text{s}$  el intercambio de agua en la marina se considera adecuado para la calidad del agua dentro de esta, dado que la concentración desaparece después de 37.03 ciclos de marea (19.29 días). Para el caso en que se extrae agua de la marina la concentración desaparece después de 36.82 ciclos de marea (19.18 días) para un gasto de extracción de  $1 \text{ m}^3/\text{s}$ . Como se observa existe una similitud en los dos casos descritos con anterioridad, con lo que queda a criterio del diseñador la elección de resultados.

Para el caso en que exista una descarga accidental de contaminante, habrá que aumentar el gasto de bombeo o extracción de manera que la marina se limpie en un lapso no mayor a 20 días; buscando con esto el no deterioro del agua de la marina.

Se encontró que la marina es capaz de soportar una descarga de contaminante con una carga de demanda bioquímica de oxígeno inferior a

129.6 Kg<sub>m</sub>/día en un lapso no mayor a 20 días, ya que con ello la concentración de oxígeno disuelto disminuye a 4.21 g<sub>m</sub>/m<sup>3</sup>, que es del orden del valor recomendado para agua de mar de buena calidad.

Dado los resultados descritos en el presente capítulo así como sus recomendaciones, se consideran adecuados los modelos desarrollados en este trabajo (cap 6) para la variación de una concentración no conservativa y para la variación de la demanda bioquímica de oxígeno-oxígeno disuelto, para estimar la calidad de agua de una marina; siempre y cuando cumpla con las condiciones dadas para una marina pequeña.

## BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

1. Fuentes M.O., Osnaya R.J., Magaña M.P., Hidrodinámica, Volúmenes de Intercambio y Calidad de Agua de la Marina Mazatlán (informe interno), Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1993.
2. Streeter U.L., Mecánica de Fluidos, Mc Graw-Hill, 1987.
3. Landau y Lifshitz, Mecánica de Fluidos, Pergamon, 1987.
4. De la Lanza E. (comp), Oceanografía de Mares Mexicanos, A.G.T., México, 1991.
5. Özhan E., Flushing of Marinas With Weak Tidal Motion, Proceedings of the International Conference on Marinas, Southampton, U.K., 1989.
6. Tchobanoglous G., Shoroeder E.D., Water Quality, Addison Wesley Publishing Company, U.S.A., 1987.
7. Frias A. y Moreno G., Ingeniería de Costas, Limusa, México, 1988.

## APENDICE

### METODO DE RUNGE-KUTTA COMO SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Existen varios métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales, denominados métodos de solución paso a paso, ya que a partir de uno o varios puntos conocidos se calcula el siguiente, una vez obtenido, se apoya en este y en los anteriores para encontrar uno más y así sucesivamente, como se observa en la figura A.1.

Algunos de éstos métodos son:

Método de Euler.

Método de Euler-Gauss.

La serie de Taylor como solución de una ecuación diferencial.

Método de Runge-Kutta.

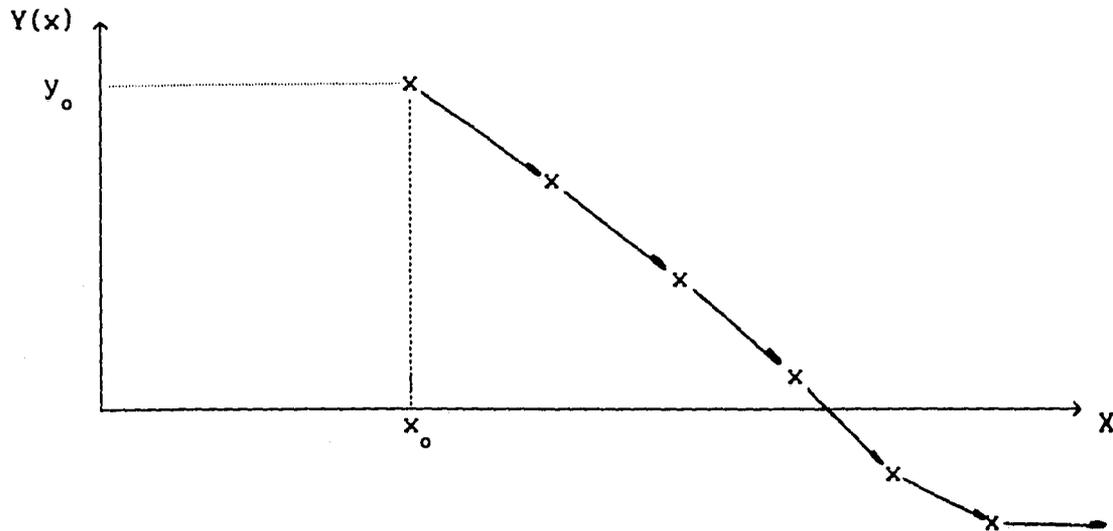


Figura A.1

Sin embargo en este trabajo sólo se usó el método de Runge-Kutta como solución de ecuaciones diferenciales por lo que a continuación se hace una breve descripción.

#### MÉTODOS DE RUNGE KUTTA.

Para estudiar los métodos de Runge-Kutta, considerese la estructura de los métodos de Euler y Euler-Gauss

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \quad (\text{Euler})$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [ f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) ] \quad (\text{Euler-Gauss})$$

Ambos métodos pueden escribirse como

$$y_{i+1} = y_i + h \psi(x_i, y_i) \quad \text{A.1}$$

Donde en el método de Euler

$$\psi(x,y) = f(x,y)$$

Y en el método de Euler-Gauss

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2} [ f(x,y) + f(x+h, y+hy') ]$$

Los métodos de Runge-Kutta consisten en obtener una ecuación similar a la expresión 6.9 que en forma general se escribe como

$$y_{i+1} = y_i + (w_1 k_1 + w_2 k_2 + \dots + w_n k_n) \quad \text{A.2}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

donde

$$k_1 = h f(x_1, y_1)$$

$$k_2 = h f(x_1 + \alpha_1 h, y_1 + \beta_{1,1} k_1)$$

$$k_3 = h f(x_1 + \alpha_2 h, y_1 + \beta_{2,1} k_1 + \beta_{2,2} k_2)$$

$$k_4 = h f(x_1 + \alpha_3 h, y_1 + \beta_{3,1} k_1 + \beta_{3,2} k_2 + \beta_{3,3} k_3)$$

$$\vdots$$

$$k_n = h f(x_1 + \alpha_{n-1} h, y_1 + \beta_{n-1,1} k_1 + \beta_{n-1,2} k_2 + \dots + \beta_{n-1,n-1} k_{n-1}) \quad \text{A.3}$$

Siendo  $w_1, w_2, \dots, w_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_{1,1}, \beta_{2,2}, \dots, \beta_{n,n-1}$  constantes que deben mantenerse de tal forma que proporcionen la mayor exactitud posible a la solución de la ecuación diferencial.

La ventaja de los métodos de Runge-Kutta con respecto a los métodos de Euler y Euler-Gauss, consiste en que los primeros cuentan con un orden de error menor. Con respecto a la Serie de Taylor, estos métodos tienen

la ventaja de que no requieren valuar ninguna derivada, sino únicamente la función  $f(x,y)$ .

**Método de Runge-Kutta de segundo orden.**

El método de Runge-Kutta de segundo orden consiste en considerar  $n=2$  en las ecuaciones A.2 y A.3, por lo que se tiene

$$y_{i+1} = y_i + (w_1 k_1 + w_2 k_2) \quad \text{A.4}$$
$$i = 0, 1, 2, \dots$$

donde

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = h f(x_i + \alpha_1 h, y_i + \beta_{1,1} k_1) \quad \text{A.5}$$

Desarrollando en serie de Taylor, el término de la izquierda de la expresión A.4 en el entorno del punto  $x = x_i$  y considerando hasta los términos de orden  $h^3$ , se obtiene

$$y_{i+1} = y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i) (x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2} (x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{6} (x_{i+1} - x_i)^3 + \dots$$

Simplificando

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{6} y'''_i + \dots \quad \text{A.6}$$

Por otra parte desarrollando en serie de Taylor, la función de dos variables  $f(x,y)$  en el entorno del punto  $x=x_i$  y  $y=y_i$  se tiene

$$\begin{aligned}
f(x,y) = & f(x_1, y_1) + \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \Big|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} (x-x_1) + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \Big|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} (y-y_1) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) \Big|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} (x-x_1)^2 + \frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x,y) \Big|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} (x-x_1) (y-y_1) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) \Big|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} (y-y_1)^2 + \dots
\end{aligned}
\tag{A.7}$$

Para simplificar la expresión anterior, se utilizará la notación siguiente

$$f_{mn} = \frac{\partial}{\partial m \partial n} f(m,n)$$

Y asumiendo que las derivadas parciales de la función se valúan en  $x = x_n$  y  $y = y_n$  la expresión 6.7 queda

$$\begin{aligned}
f(x,y) = & f(x_n, y_n) + f_x (x - x_n) + f_y (y - y_n) + \frac{1}{2} f_{xx} (x - x_n)^2 + \\
& + f_{xy} (x - x_n) (y - y_n) + \frac{1}{2} f_{yy} (y - y_n)^2 + \dots
\end{aligned}$$

Valuando la función para  $x = x_1 + \alpha h_1$  y  $y = y_1 + \beta_{1,1} k_1$  se obtiene

$$\begin{aligned}
f(x_1 + \alpha_1 h, y_1 + \beta_{1,1} k_1) &= f(x_1, y_1) + f_x(x_1 + \alpha_1 h - x_1) \\
&+ f_y(y_1 + \beta_{1,1} k_1 - y_1) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_1 + \alpha_1 h - x_1)^2 + \\
&+ f_{xx}(x_1 + \alpha_1 h - x_1)(y_1 + \beta_{1,1} k_1 - y_1) + \\
&+ \frac{1}{2} f_{yy}(y_1 + \beta_{1,1} k_1 - y_1)^2 + \dots
\end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
f(x_1 + \alpha_1 h, y_1 + \beta_{1,1} k_1) &= f(x_1, y_1) + \alpha_1 h f_x + \beta_{1,1} k_1 f_y + \\
&+ \frac{\alpha_1^2 h^2}{2} f_{xx} + \alpha_1 h \beta_{1,1} k_1 f_{xy} + \frac{\beta_{1,1}^2 k_1^2}{2} f_{yy}
\end{aligned}$$

De las expresiones A.5 se observa

$$f(x_1 + \alpha_1 h, y_1 + \beta_{1,1} k_1) = \frac{k_2}{h}$$

Despejando  $k_2$ :

$$\begin{aligned}
k_2 &= h f(x_1, y_1) + \alpha_1 h^2 f_x + \beta_{1,1} k_1 h f_y + \frac{\alpha_1^2 h^3}{2} f_{xx} + \\
&+ \alpha_1 h^2 \beta_{1,1} k_1 f_{xy} + \frac{\beta_{1,1}^2 k_1 h^2}{2} f_{yy} + \dots
\end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión y la A.6 en la expresión A.4, teniendo en cuenta que  $k_1 = h f(x_1, y_1)$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2} y_1'' + \frac{h^3}{6} y_1''' &= y_1 + w_1 h f(x_1, y_1) + w_2 (h f(x_1, y_1) + \\
&+ \alpha_1 h^2 f_x + \beta_{1,1} h^2 f(x_1, y_1) f_y + \frac{\alpha_1 h}{2} f_{xx} + \alpha_1 h^3 \beta_{1,1} f(x_1, y_1) f(x, y) + \\
&+ \frac{\beta_{1,1}^2 h^3 f^2(x_1, y_1)}{2} f_{yy} + \dots)
\end{aligned}$$

Igualando potencias de h

$$h y_1' = w_1 h f(x_1, y_1) + w_2 h f(x_1, y_1)$$

y como  $y_1' = f(x_1, y_1)$ , entonces

$$1 = w_1 + w_2$$

A.8

Igualando potencias de  $h^2$

$$\frac{h^2}{2} y_1'' = w_2 \alpha_1 h^2 f_x + w_2 \beta_{1,1} h^2 f(x_1, y_1) f_y$$

A.9

Siendo

$$y_1'' = \frac{d}{dx} f(x, y) \Big|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \Big|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \Big|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} f(x_1, y_1)$$

Utilizando la notación indicada se puede escribir como

$$y_1'' = f_x + f_y f(x_1, y_1)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la expresión A.9 se tiene que

$$\frac{h^2}{2} (f_x + f_y f(x_1, y_1)) = w_2 \alpha_1 h^2 f_x + w_1 \beta_{1,1} h^2 f(x_1, y_1) f_y$$

Entonces

$$\frac{1}{2} = w_2 \alpha_1 = w_1 \beta_{1,1} \tag{A.10}$$

Con las expresiones 9 y 10, se forma el siguiente sistema

$$w_1 + w_2 = 1$$

$$w_2 \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$w_2 \beta_{1,1} = \frac{1}{2}$$

Como el sistema tiene cuatro incógnitas y solamente tres ecuaciones, este tiene un número infinito de soluciones, una de ellas es

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = \beta_{1,1} = 1$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la expresión A.4, se obtienen las fórmulas de recurrencia que definen al método de Runge-Kutta de segundo orden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h f(x_i + h, y_i + h_1)$$

#### **Método de Runge-Kutta de cuarto orden.**

El método de Runge-Kutta de cuarto orden, se obtiene al considerar  $n=4$  en las expresiones A.2 y A.3 quedando

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

Donde:

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h f(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} k_1)$$

$$k_3 = h f(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} k_2)$$

$$k_4 = h f(x_i + h, y_i + k_3)$$

Que es el método de Runge-Kutta para ecuaciones diferenciales de cuarto orden.