78
2EJ

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTRUCCION DE TABLAS DE DIGITOS AL AZAR USANDO LA FUNCION R= (X+Y) MOD. 10

T E S I S

Que para obtener el Título de

ACTUARIO

presenta

DAVID REYES MORALES

Asesor de Tesis:
M. en C. Arturo H. Nieva Gochicoa

MEXICO, D. F. 1995

FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron EL pasante(s) DAVID REYES MORALES

con número de cuenta 8327154-0 con el Título:

CONSTRUCCION DE TABLAS DE DIGITOS AL AZAR

USANDO LA FUNCION R = (X+Y) MOD. 10

Otorgamos nuestro Voto Aprobatorio y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de ACTUARIO

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
M.EN C.	ARTURO HUGO	NIEVA GOCHICOA	
Director de Tesis			
DR.EN ESTADISTICA	JOAQUIN	CURIEL CAÑEDO	
M. EN C.	JOSE ANTONIO	FLORES DIAZ	
ACT.	MARIA DEL PILAR	ALONSO REYES	
Suplente			
MAT.	SAUL	DIAZ ALVARADO	
Suplente			

CONSTRUCCION DE TABLAS DE DIGITOS AL AZAR
USANDO LA FUNCION R=(X+Y) MOD 10

INDICE

Página

Página

INTRODUCCION

El tema central de este trabajo de tesis es el estudio de algunas propiedades probabilistas de la función $R=(X+Y) \bmod 10$.

El problema sobre la distribución de la variable R se considera principalmente desde el punto de vista de la teoría de probabilidad, aunque después se trata de corroborar la validez de los resultados teóricos, aplicando algunas pruebas estadísticas con datos experimentales obtenidos de ciertos sucesos de la realidad.

En el capítulo 1 se estudia teóricamente bajo qué condiciones la función $R = (X+Y) \bmod 10$ se distribuye uniformemente, donde X e Y son variables aleatorias estadísticamente independientes.

En dicho capítulo se demuestra que R no siempre se distribuye uniformemente. También se demuestra que si una de las dos variables se distribuye uniformemente sobre un conjunto de valores $\{0,1,\ldots,10a-1\}$ donde a es natural, entonces la variable aleatoria R se distribuye uniformemente en $\{0,1,\ldots,9\}$

Este resultado se generaliza en el capítulo 4 al caso en que X, Y y R son vectores aleatorios.

En el capítulo 2 se analizan datos reales para verificar los resultados teóricos. Como primer paso se obtienen varias sucesiones de realizaciones de variables aleatorias relacionadas con el nombre y la fecha de nacimiento de los empleados de cierta dependencia. Algunas de estas variables tienen una distribución de frecuencias aproximadamente uniforme sobre los dígitos de 0 a 9 mientras que otras no se distribuyen uniformemente. Con estas sucesiones posteriormente se construyen nuevas sucesiones por medio de la fórmula $R_n = (X_n + Y_n) \bmod 10$, donde las sucesiones X_n e Y_n satisfacen pruebas estadísticas de independencia.

En los capítulos 2 y 3 se presenta la aplicación de algunas pruebas estadísticas para evaluar la validez de la hipótesis de que las sucesiones originales y las sucesiones R_n se distribuyen uniformemente.

Los resultados de las pruebas concuerdan o parecen confirmar los resultados teóricos. Varias de las sucesiones construidas satisfacen propiedades de uniformidad por dígitos individuales, por parejas y por ternas de dígitos, de modo que tales sucesiones se podrían usar con relativa confianza como tablas de dígitos al azar.

Sin embargo no se hace una aplicación exhaustiva de todas las pruebas estadísticas conocidas sobre aleatoriedad a las sucesiones construidas ya que el objetivo principal es investigar si tales sucesiones siguen o no una distribución uniforme en una o más dimensiones.

A continuación surge otra cuestión. Si se va a utilizar tablas de dígitos construidas con este método que se basa en observaciones de sucesos aleatorios de la realidad, se necesita registrar los resultados, tenerlos almacenados y recuperarlos con una velocidad razonable.

En el capitulo 5 se estudia la posibilidad de utilizar sucesiones aleatorias almacenadas en el disco de la computadora, en lugar de sucesiones generadas por un algoritmo determinista (el algoritmo de congruencia lineal), midiendo tiempos de ejecución de ambos métodos. Los tiempos de respuesta muestran que actualmente en equipos de mediana capacidad no hay una diferencia significativa.

En los apéndices se pueden encontrar los listados correspondientes a los programas y las sucesiones de digitos que se utilizan a lo largo del trabajo y que pueden ser útiles para otras aplicaciones.

Capitulo 1
Algunas propiedades de la función $R=(X+Y) \bmod 10$

1.1 El problema del fraile Edvin.

La idea de echar a la suerte una decisión que puede afectar en forma favorable o desfavorable a alguien dió lugar a que se diseñaran mecanismos o procedimientos imparciales para obtener un resultado al azar. Tal es el caso de una loteria en la cual se revuelven bolas numeradas dentro de un recipiente y se saca una de ellas por medio de una mano inocente. Sin embargo puede que algunos cuestionen la calidad de procedimientos como el lanzamiento de un dado o de una moneda en los cuales puede influir la habilidad del que lanza esos objetos.

Este problema de cómo echar suertes de una manera perfectamente honrada, libre de manipulación o habilidad humana llevó a un fraile llamado Edvin del monasterio franciscano de Tautra Noruega, a idear varios métodos para sacar números al azar que pueden seguir siendo válidos en la actualidad. En su libro "Al azar", Ivar Ekeland comenta el contenido de un manuscrito del fraile Edvin que data de los años 1240-1250 D.C. en el cual se mencionan 2 métodos interesantes.

El primer procedimiento propuesto consiste en lo siguiente: dos participantes o jugadores eligen un número cada quien en secreto y lo escriben en un papel o pergamino; después lo entregan a un árbitro que lee los 2 números, los suma, los divide por 6 y anuncia el resto como el resultado de echar suertes. Hay 6 posibilidades 1,2,3,4,5,0 que corresponden a los 6 resultados posibles de echar un dado, pero con este método el fraile Edvin buscaba evitar que el resultado aleatorio fuera afectado por un manipulador hábil y mal intencionado.

Es posible que previamente ambos participantes hayan acordado que si el resultado es menor o igual a 2 gana el primer participante, mientras que si el resultado es mayor a 2 gana el segundo participante. De esta forma ambos jugadores tienen las mismas posibilidades de ganar. Otra posibilidad es que el árbitro o un observador neutral proporcione un tercer número y que se aplique el procedimiento descrito con el número de cada jugador y el número del árbitro; en este caso el ganador sería el que obtenga el numero mayor.

Desde el punto de vista probabilista surgen varias preguntas en cuanto a este procedimiento.

Por un lado en el experimento de lanzar un dado no cargado, el resultado (el número en la cara superior) se distribuye uniformemente en {1,2,3,4,5,6}, lo cual induce a investigar si el resultado del experimento de fray Edvin se distribuye uniformemente en {0,1,2,3,4,5}.

Con relación a esta pregunta se podría incluso cuestionar si el suceso aleatorio propuesto por fray Edvin realmente tiene regularidad estadística, es decir, si los resultados se apegan a una sóla distribución de probabilidad de una corrida de realizaciones a otra.

Esta es una pregunta cuya respuesta se puede hallar experimentalmente observando si las proporciones de frecuencias $N(i)/N$ de cada dígito i tienden a valores constantes $P(i)$ para N suficientemente grande y si estos valores $P(i)$ varían significativamente de una corrida a otra de N repeticiones del experimento.

Los resultados experimentales de los capítulos 2 y 3 indican que la distribución de frecuencias del suceso propuesto por fray Edvin varía significativamente dependiendo de la naturaleza de las dos variables o fuentes de valores que intervienen en el cálculo del resultado.

Sin embargo, si se supone que cada una de las variables que intervienen para obtener el resultado tiene una distribución de probabilidad específica, entonces el suceso aleatorio propuesto por fray Edvin también tendrá una distribución específica que se puede estudiar por medio de la teoría matemática de probabilidad.

En este contexto más restringido, en el que se tienen dos variables específicas X e Y asociadas a ciertos experimentos aleatorios con regularidades estadísticas, nuevamente se puede uno preguntar bajo qué condiciones la variable $R=(X+Y) \bmod 6$ (que representa el resultado del experimento de fray Edvin) se distribuye uniformemente.

Regresando al planteamiento original del procedimiento, el fraile Edvin hace notar varias consideraciones matemáticas sobre este método. Primero menciona que si se multiplicara en lugar de sumar, el procedimiento sería vergonzosamente manipulable. Por ejemplo bastaría con que uno de los dos participantes eligiera un múltiplo de 6 para que el resultado fuera cero sin importar la elección del otro jugador. Esto se deriva de que si uno de los factores es divisible entre 6, el producto también lo será y por tanto el residuo de la división entre 6 será 0.

Obviamente ésto era un serio defecto para el fraile Edvin, debido a su preocupación por lograr que el resultado fuera realmente aleatorio y no se pudiera prever fácilmente.

La segunda observación del fraile Edvin se refiere a que lo que importa en el resultado final del procedimiento no son las magnitudes de los números elegidos *a* y *b* sino el residuo de la división por 6 de dichos números, es decir, *a mod 6* y *b mod 6*. Por ejemplo si se tiene el par de números 17 y 3051 el resultado será 2, el cual es el mismo resultado que se obtiene con el par 5 y 3 que son los restos de las divisiones por 6 de los números originales 17 y 3051. Algebráicamente lo anterior se puede describir de la siguiente manera:
Dados dos numeros enteros cualesquiera a y b, estos se pueden denotar como:

$$a = 6\,c_1 + r_1 \;; \qquad 0 \le r_1 < 6$$
$$b = 6\,c_2 + r_2 \;; \qquad 0 \le r_2 < 6$$

Entonces $\quad r_1+r_2 = 6\,c_3 + r_3 \;; \qquad 0 \le r_3 < 6$

Por lo tanto $\quad r_3 = (r_1+r_2) \bmod 6,\;$ pero también
$a+b = 6(c_1+c_2) + (r_1+r_2) = 6(c_1+c_2+c_3) + r_3$;
es decir $r3 = (a+b) \bmod 6$.
En consecuencia $(a+b) \bmod 6 = (r1+r2) \bmod 6$.

También como se verá en el capítulo de aplicaciones, este hecho limita el número de posibles sucesiones R_n que se pueden obtener combinando una sucesión dada X_n con diferentes sucesiones constantes del tipo $Y_n=c$ para toda *n* natural.

El segundo procedimiento sugerido por el fraile Edvin tiene una similitud sorprendente con el método de cuadrados medios propuesto por Von Neuman, excepto que la motivación del método es diferente. Fray Edvin lo pensó para el caso en que un individuo quiere sacar un número al azar sin que intervenga otro jugador, a diferencia del planteamiento más reciente para obtener sucesivos números pseudoaleatorios.

El método consistía en lo siguiente. Un jugador elige un número de 4 cifras y lo eleva al cuadrado, obteniendo un número de 7 u 8 cifras. De este segundo número suprime las dos últimas y la primera o las dos cifras iniciales a fin de obtener un número de 4 cifras. Repite entonces la operación 4 veces y toma el resto de la división por 6 del último número obtenido.

Para el fraile la motivación era sacar el resultado al azar y evitar hacerse trampa uno mismo, por lo cual advirtió un grave defecto al utilizar números en los que algunas cifras son ceros, ya que producen ciclos que se reproducen indefinidamente lo cual hace posible prever el resultado del procedimiento.
Vale la pena apuntar que la existencia de ciclos sigue siendo un inconveniente para varios métodos de generación de sucesiones pseudoaleatorias en la actualidad.

De estos dos métodos diseñados por el fraile Edvin, el método de combinar pares de números sumándolos y obteniendo el módulo en cierta base, se presenta como una posible opción para obtener sucesiones con distribución uniforme.
La cuestión es si el método original del fraile Edvin hace aparecer los números 0 al 5 con la misma distribución de frecuencias que se da al lanzar un dado, lo cual nos lleva a plantear la hipótesis de que los resultados obtenidos con la fórmula $R=(X+Y) \bmod 6$ tienden a distribuirse uniformemente.

La validez de esta afirmación se estudia en el presente capitulo desde el punto de vista de la teoría de probabilidad aunque en adelante se utilizará la función $R=(X+Y) \bmod 10$ en lugar de $R=(X+Y) \bmod 6$ ya que las sucesiones de digitos entre 0 y 9 pueden ser más útiles en aplicaciones prácticas.

Respecto a la hipótesis mencionada, los teoremas de este capitulo y las pruebas estadisticas que se presentan en los siguientes capitulos, muestran que no siempre se cumple que los resultados del experimento de fray Edvin se distribuyan uniformemente, aunque dichos resultados ciertamente sean aleatorios.

Sin embargo como se demuestra más adelante, si se tienen dos variables aleatorias discretas independientes X e Y y una de las dos variables se distribuye uniformemente sobre un conjunto de valores de la forma $\{0,1,...,10a-1\}$ donde a es natural, entonces la variable aleatoria $R=(X+Y) \bmod 10$ se distribuye uniformemente en $\{0,1,...,9\}$

1.2 Solución del problema de fray Edvin en el marco de la teoría de probabilidad

1.2.1 Suposiciones generales y planteamiento del problema

Sean E_1 y E_2 dos experimentos aleatorios independientes.
Sea E_3 el experimento de realizar E_1 y E_2 juntos.

Sea $\Omega_1 = \{0,\ldots,m-1\}$ el espacio de resultados de E_1.
Sea $\Omega_2 = \{0,\ldots,n-1\}$ el espacio de resultados de E_2.

Sea $\Omega_3 = \Omega_1 \times \Omega_2$ el espacio de resultados de E_3.

Sean $\{p_0,\ldots,p_{m-1}\}$ y $\{q_0,\ldots,q_{n-1}\}$ dos pseudodensidades.

Sea P_1 la medida de probabilidad definida en el contexto (E_1,Ω_1)
por $P_1(\{k\}) = p_k$
Sea P_2 la medida de probabilidad definida en el contexto (E_2,Ω_2)
por $P_2(\{k\}) = q_k$
Sea P_3 la medida de probabilidad definida en el contexto (E_3,Ω_3)
por $P_3(\{(i,j)\}) = p_i * q_j$

Sea X una variable aleatoria definida como la identidad sobre Ω_1.
Sea Y una variable aleatoria definida como la identidad sobre Ω_2.

Supóngase que X se distribuye con medida de probabilidad P_1 y que Y se distribuye con medida de probabilidad P_2.

Sea R una variable aleatoria definida en Ω_3 por la siguiente ecuación

$$R((i,j)) = (i+j) \bmod 10$$

y con valores en $D=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Expresado con palabras, el valor de R es el residuo de la división de $(i+j)$ entre 10.
Sea P_R la medida de probabilidad inducida por la variable aleatoria R

$$P_R(\{x\}) = P_3(R^{-1}(\{x\})) = P_3(R=x)$$

Problemas: ¿ P_R es la medida de probabilidad uniforme en $D=\{0,\ldots,9\}$?
¿ Bajo que condiciones la variable R se distribuye uniformemente en D?

1.2.2 Condiciones suficientes para la uniformidad de R.

__Teorema 1__. Si $\Omega_1 = \Omega_2 = \{0,\dots,9\}$ y al menos una de las dos variables X o Y se distribuye uniformemente, entonces R también se distribuye uniformemente.

Demostración.
Se obtiene la imagen inversa según R para cada dígito.

$$R^{-1}(\{0\}) = (R=0) = \{ (0,0)\ (1,9)\ (2,8)\ (3,7)\ (4,6)\ (5,5)\ (6,4)\ (7,3)\ (8,2)\ (9,1) \}$$

$$R^{-1}(\{1\}) = (R=1) = \{ (1,0)\ (2,9)\ (3,8)\ (4,7)\ (5,6)\ (6,5)\ (7,4)\ (8,3)\ (9,2)\ (0,1) \}$$

$$R^{-1}(\{2\}) = (R=2) = \{ (2,0)\ (3,9)\ (4,8)\ (5,7)\ (6,6)\ (7,5)\ (8,4)\ (9,3)\ (0,2)\ (1,1) \}$$

$$R^{-1}(\{3\}) = (R=3) = \{ (3,0)\ (4,9)\ (5,8)\ (6,7)\ (7,6)\ (8,5)\ (9,4)\ (0,3)\ (1,2)\ (2,1) \}$$

$$R^{-1}(\{4\}) = (R=4) = \{ (4,0)\ (5,9)\ (6,8)\ (7,7)\ (8,6)\ (9,5)\ (0,4)\ (1,3)\ (2,2)\ (3,1) \}$$

$$R^{-1}(\{5\}) = (R=5) = \{ (5,0)\ (6,9)\ (7,8)\ (8,7)\ (9,6)\ (0,5)\ (1,4)\ (2,3)\ (3,2)\ (4,1) \}$$

$$R^{-1}(\{6\}) = (R=6) = \{ (6,0)\ (7,9)\ (8,8)\ (9,7)\ (0,6)\ (1,5)\ (2,4)\ (3,3)\ (4,2)\ (5,1) \}$$

$$R^{-1}(\{7\}) = (R=7) = \{ (7,0)\ (8,9)\ (9,8)\ (0,7)\ (1,6)\ (2,5)\ (3,4)\ (4,3)\ (5,2)\ (6,1) \}$$

$$R^{-1}(\{8\}) = (R=8) = \{ (8,0)\ (9,9)\ (0,8)\ (1,7)\ (2,6)\ (3,5)\ (4,4)\ (5,3)\ (6,2)\ (7,1) \}$$

$$R^{-1}(\{9\}) = (R=9) = \{ (9,0)\ (0,9)\ (1,8)\ (2,7)\ (3,6)\ (4,5)\ (5,4)\ (6,3)\ (7,2)\ (8,1) \}$$

Como puede observarse, en cada conjunto de la forma $(R=k)$, cada dígito entre 0 y 9 aparece una sóla vez como primer coordenada de una pareja y también una sóla vez como segunda coordenada.

Supóngase que Y es la variable aleatoria que se distribuye uniformemente, es decir, $q_k=0.1$ para $k \in \Omega_2 = \{ 0,\dots,9 \}$.

Entonces para cualquier $0 \le x \le 9$ se tiene

$$P_R(\{x\}) = P_3(R^{-1}(\{x\}))$$

$$= \sum_{j=0}^{9} P_3(j, k_{(x,j)}) \quad ;$$

La notación $k_{(x,j)}$ indica que la segunda coordenada k, depende tanto del valor j de la primera coordenada como del valor x que determina el conjunto (R=x).

$$P_R(\{x\}) = \sum_{j=0}^{9} (p_j * q_{k_{(x,j)}})$$

$$P_R(\{x\}) = \sum_{j=0}^{9} (p_j * 0.1) \quad \text{Por hipótesis de uniformidad}$$

$$P_R(\{x\}) = 0.1 * \sum_{j=0}^{9} p_j$$

$$P_R(\{x\}) = 0.1 * 1 \quad \text{Por definición de pseudodensidad}$$

$$P_R(\{x\}) = 0.1$$

El caso cuando X se distribuye uniformemente es análogo.

El teorema anterior establece algunas condiciones particulares que implican que la variable aleatoria R se distribuya uniformemente en D. Sin embargo no siempre se cumple que R tenga distribución uniforme; más bien como se muestra en los siguientes dos ejemplos, la uniformidad de R depende tanto de las pseudodensidades como de los espacios de resultados asociados a las variables X e Y.

Ejemplo 1: Si $\Omega_1=\Omega_2=\{0,\ldots,9\}$, pero X e Y no se distribuyen uniformemente, entonces R no siempre se distribuye uniformemente.

Supóngase que la medida de probabilidad P_1 asociada a la variable aleatoria X está definida por la pseudodensidad binomial con parámetros n=9 y p=0.5, de modo que sus valores son:

$p_0=0.002$	$p_1=0.0175$	$p_2=0.0703$	$p_3=0.1641$	$p_4=0.2461$
$p_5=0.2461$	$p_6=0.1641$	$p_7=0.0703$	$p_8=0.0175$	$p_9=0.002$

Supóngase que la medida de probabilidad P_2 asociada a la variable aleatoria Y, está definida por la misma pseudodensidad, es decir:

q_0=0.002 q_1=0.0175 q_2=0.0703 q_3=0.1641 q_4=0.2461
q_5=0.2461 q_6=0.1641 q_7=0.0703 q_8=0.0175 q_9=0.002

Las parejas asociadas por R a cada digito siguen siendo las mismas que en el Teorema 1, sin embargo las probabilidades para cada digito son las siguientes:

P_R ({0})= 0.166942 P_R ({1})= 0.121466

P_R ({2})= 0.071388 P_R ({3})= 0.035787

P_R ({4})= 0.023340 P_R ({5})= 0.035787

P_R ({6})= 0.071388 P_R ({7})= 0.121466

P_R ({8})= 0.166942 P_R ({9})= 0.185493

Esto prueba que R no siempre se distribuye uniformemente aunque los espacios de resultados de X e Y sean iguales al conjunto de los digitos de 0 a 9.

Ejemplo 2: Aunque X e Y se distribuyan uniformemente, la variable aleatoria R no necesariamente se distribuye uniformemente.

Supóngase que X se distribuye uniformemente sobre {0,1,2,3,4} (de modo que la medida de probabilidad vale 0.20 para cada uno de estos 5 valores) y que Y se distribuye uniformemente sobre {0,1,2,3,4,5}, es decir, la medida de probabilidad vale 1/6 para cada uno de estos 6 valores.
A continuación se muestran las parejas asociadas por R a cada digito y la correspondiente medida de probabilidad de cada digito.

1 pareja para el valor 0:
(0,0)
Probabilidad calculada : 0.033333 ;

2 parejas para el valor 1:
(0,1) (1,0)
Probabilidad calculada : 0.066667 ;

3 parejas para el valor 2:
(0,2) (1,1) (2,0)
Probabilidad calculada : 0.100000 ;

4 parejas para el valor 3:
(0,3) (1,2) (2,1) (3,0)
Probabilidad calculada : 0.133333 ;

5 parejas para el valor 4:
(0,4) (1,3) (2,2) (3,1) (4,0)
Probabilidad calculada : 0.166667 ;

5 parejas para el valor 5:
(0,5) (1,4) (2,3) (3,2) (4,1)
Probabilidad calculada : 0.166667 ;

4 parejas para el valor 6:
(1,5) (2,4) (3,3) (4,2)
Probabilidad calculada : 0.133333 ;

3 parejas para el valor 7:
(2,5) (3,4) (4,3)
Probabilidad calculada : 0.100000 ;

2 parejas para el valor 8:
(3,5) (4,4)
Probabilidad calculada : 0.066667 ;

1 pareja para el valor 9:
(4,5)
Probabilidad calculada : 0.033333 ;

De modo que no es suficiente con que las variables X e Y tengan únicamente medida de probabilidad uniforme para que R se distribuya uniformemente.

Por otra parte, es más o menos inmediato que cuando X e Y se distribuyen uniformemente, la uniformidad en la distribución de R depende de CUANTAS parejas son mapeadas por R en cada digito, ya que si el número de parejas es igual para cualquier digito, la medida de probabilidad también será igual para cualquier digito.
Por tanto el siguiente paso será analizar bajo qué condiciones R mapea el mismo número de parejas en cada digito.

CARDINALIDAD DE LOS CONJUNTOS ($R=k$) o $R^{-1}(\{k\})$.

Una primera idea es que si el número total de parejas posibles que se pueden obtener con Ω_1 y Ω_2, es divisible entre 10, entonces el número de parejas asociadas a cada dígito del 0 al 9 será igual en todos los casos.
Sin embargo se pueden encontrar fácilmente casos que muestran que tal suposición es errónea. De hecho el Ejemplo 2 muestra que aunque $\#(\Omega_1)=5$ y $\#(\Omega_2)=6$, de modo que $\#(\Omega_3)=30$, el número de parejas asociadas a cada dígito no es siempre 3 como pudiera esperarse.

Obsérvese que las parejas (i,j) tales que el resto de la división de $(i+j)$ entre 10 es igual a k, satisfacen lo siguiente:

$i+j = 10x + k$ para algún $x \in Z$

$i+j -k = 10x$ (o sea que $i+j-k$ es divisible entre 10)

$i+j \equiv k \pmod{10}$

En este trabajo se usará la notación $b \mid a$ para indicar que b divide a a o equivalentemente que a es divisible entre b.

Más adelante se demostrará que si $10 \mid \#(\Omega_1)$ ó $10 \mid \#(\Omega_2)$, entonces $\#(R=i) = \#(R=j)$ para toda $0 \le i,j \le 9$. Pero antes se probará el siguiente teorema.

<u>Teorema 2</u> Si $\Omega_1=\{0,\dots,m-1\}$, $\#(\Omega_1)=m$, $\Omega_2=\{0,\dots,n-1\}$, $\#(\Omega_2) = n = 10a$ para algún a natural, entonces para $0 \le k \le 9$ se cumple

$$(R=k) = R_{k,1} \sqcup \dots \sqcup R_{k,a}$$

$$= \bigsqcup_{1 \le j \le a} R_{k,j}$$

donde $R_{k,j} = \{ \ (h, F_{k,j}(h)) \ \text{ tal que } h \in \Omega_1 \ \}$

$$\text{y} \qquad F_{k,j}(h) = \begin{cases} k-h + 10(j-1) & \text{si } h \le k \le 9 \\ k-h + 10j & \text{si } k < h \le 9 \\ F_{k,j}(\bmod 10 \, (h)) & \text{si } h > 9 \end{cases}$$

NOTA: La función $F_{k,j}$ se define recursivamente para $h > 9$.

Véase el Ejemplo 3 en la página 24, para aclarar el significado de este teorema.

Demostración.

1a. PARTE

Primero se demostrará la inclusión de $(R=k)$ en $\bigcup_{1 \le j \le a} R_{k,j}$

Sea $(s,t) \in (R=k)$, entonces

$s+t \equiv k \pmod{10}$

$s+t-k = 10x$ para algún $x \in Z$

$t = k-s+10x$

Como $t \in \Omega_2$ se tiene $0 \le k-s+10x \le 10a-1 = n-1$

Se quiere probar que $(s,t) \in \bigcup_{1 \le j \le a} R_{k,j}$, para lo cual se consideran los casos cuando $s \le 9$ y cuando $s > 9$. El caso $s \le 9$ se subdivide a su vez en los casos $s \le k$ y $s > k$.

Caso 1.1

Si $s \le 9$ y $s \le k$, entonces la pareja $(s,t) \in R_{k,x+1}$, ya que por definición $F_{k,x+1}(s)=k-s+10(x+1-1) = k-s+10x = t$

pero además $1 \le x+1 \le a$ porque

$$
\begin{aligned}
t = k-s+10x \le 10a-1 \quad &\rightarrow \quad k-s \le 10(a-x)-1\\
&\rightarrow \quad 0 \le 10(a-x)-1 \quad \text{por la suposición } s \le k\\
&\rightarrow \quad 1 \le 10(a-x)\\
&\rightarrow \quad 1/10 \le a-x\\
&\rightarrow \quad x < x+1/10 \le a\\
&\rightarrow \quad x < a\\
&\rightarrow \quad x+1 \le a
\end{aligned}
$$

y también

$$
\begin{aligned}
t = k-s+10x \ge 0 \quad &\rightarrow \quad 10x \ge s-k \ge -k \quad \text{porque } s \ge 0\\
&\rightarrow \quad 10x \ge -9 \quad \text{porque } k \le 9 \rightarrow -k \ge -9\\
&\rightarrow \quad x \ge 0\\
&\rightarrow \quad x+1 \ge 1
\end{aligned}
$$

De modo que si $s \le 9$ y $s \le k$ entonces

$(s,t) \in R_{k,x+1}$ con $1 \le x+1 \le a$

y también

$(s,t) \in \bigcup_{1 \le j \le a} R_{k,j}$

Caso 1.2

Si $k < s \le 9$, entonces la pareja $(s,t) \in R_{k,x}$ ya que por definición $F_{k,x}(s) = k-s+10x = t$

pero además, $1 \le x \le a$ como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
t = k-s+10x \le 10a - 1 \quad & \rightarrow \quad k-s \le 10\,(a-x) - 1 \\
& \rightarrow \quad -s \le 10\,(a-x) - 1 \qquad \text{porque } k \ge 0 \\
& \rightarrow \quad -9 \le 10\,(a-x) - 1 \\
& \qquad\qquad \text{ya que } s \le 9 \ \rightarrow\ -s \ge -9 \\
& \rightarrow \quad -8 \le 10\,(a-x) \\
& \rightarrow \quad x \le a
\end{aligned}
$$

y también

$$
\begin{aligned}
t = k-s+10x \ge 0 \quad & \rightarrow \quad 10x \ge s-k \\
& \rightarrow \quad 10x > 0 \qquad \text{por la suposición } s > k \\
& \rightarrow \quad x > 0 \\
& \rightarrow \quad x \ge 1
\end{aligned}
$$

Es decir, si $k < s \le 9$, se cumple:

$(s,t) \in R_{k,x}$ con $1 \le x \le a$

$$(s,t) \in \bigcup_{1 \le j \le a} R_{k,j}$$

Caso 2

$$
\begin{aligned}
\text{Si } s>9 \ \rightarrow\ & s = 10y + z && \text{para alguna } y \ge 1 \text{ y } 0 \le z \le 9 \\
\rightarrow\ & t = k-10y - z + 10x && \text{ya que } t = k-s+10x \\
\rightarrow\ & t = k-z + 10\,(x-y)
\end{aligned}
$$

Nótese que $z = s \bmod 10$, de modo que $F_{k,j}(s) = F_{k,j}(z)$ por la definición de tal función.

Ahora se tiene que $0 \le z \le 9$ y existen 2 casos posibles $z \le k$ y $z > k$.

Si se sustituyen z y $(x-y)$ en lugar de s y x en los casos 1.1 y 1.2 se obtiene lo siguiente:

si $z \leq k$ entonces se cumple

$1 \leq x-y+1 \leq a$

$F_{k,x-y+1}(s) = F_{k,x-y+1}(z) = k-z+10(x-y+1-1) = k-z+10(x-y) = t$

$(s,t) \in R_{k,x-y+1}$

de modo que $(s,t) \in \bigcup_{1 \leq j \leq a} R_{k,j}$

Por otro lado si $z>k$ entonces se cumple

$1 \leq x-y \leq a$

$F_{k,x-y}(s) = F_{k,x-y}(z) = k-z+10(x-y) = t$

$(s,t) \in R_{k,x-y}$

$(s,t) \in \bigcup_{1 \leq j \leq a} R_{k,j}$

Por lo tanto queda demostrado que si $(s,t) \in (R=k)$ entonces

$(s,t) \in \bigcup_{1 \leq j \leq a} R_{k,j}$

2a. PARTE

Ahora se demostrará la inclusión de $\bigcup_{1 \leq j \leq a} R_{k,j}$ en $(R=k)$.

Sea $(s,t) \in \bigcup_{1 \leq j \leq a} R_{k,j}$

entonces

$(s,t) \in R_{k,j'}$ para alguna $1 \leq j' \leq a$

$s \in \Omega_1$ por definición de $R_{k,j'}$ y además $t = F_{k,j'}(s)$

Primero se mostrará que $t \in \Omega_2$, es decir, $0 \leq F_{k,j'}(s) \leq n-1 = 10a-1$

Nuevamente se considerarán los casos posibles.

Caso 1.1. $s \le 9$ y $s \le k$

$s \le k \;\rightarrow k-s \ge 0$

$\rightarrow F_{k,j}(s) = k-s+10(j'-1) \ge 0$ ya que $j' \ge 1$

por otro lado $k-s \le k$ ya que $s \ge 0$, de donde

$$\begin{aligned} k-s+10(j'-1) &\le k+10(j'-1) \\ &\le k+10(a-1) \quad \text{ya que } j' \le a \\ &\le 9+10(a-1) \\ &=(10a)-1 \\ &=n-1 \end{aligned}$$

por tanto $0 \le F_{k,j}(s) \le n-1$

Caso 1.2. $k < s \le 9$

En este caso se tiene

$$\begin{aligned} k-s &\ge -s \text{ porque } k \ge 0 \\ &\ge -9 \text{ porque } s \le 9 \\ F_{k,j}(s)=k-s+10j' &\ge -9+10j' \\ &\ge -9+10 = 1 \quad \text{porque } j' \ge 1 \end{aligned}$$

Por otro lado $s>k$ implica

$$\begin{aligned} k-s &< 0 \\ k-s+10j' &< 10j' \\ &\le 10a \\ &=n \end{aligned}$$

Por tanto $1 \le F_{k,j}(s) < n$ o bien $1 \le F_{k,j}(s) \le n-1$

Caso 2. $s>9$

Sea $z = s \bmod 10$, entonces $0 \le z \le 9$ y por definición

$F_{k,j}(s) = F_{k,j}(z)$

Como ya se demostró en los casos 1.1 y 1.2 $0 \le F_{k,j}(z) \le n-1$,

de modo que $0 \le F_{k,j}(s) \le n-1$.

Finalmente se demostrará que $s + F_{k,j}(s) \equiv k \pmod{10}$, lo cual es necesario para que $(s, F_{k,j}(s)) \in (R=k)$

Si $s \leq 9$ entonces se cumple lo siguiente

$$s + F_{k,j}(s) = s + k-s + 10x \quad , \qquad \text{donde } x=j' \text{ o } x=j'-1$$

$$s + F_{k,j}(s) - k = 10x$$

y si $s > 9$ entonces se tiene

$$s = 10y + z \quad \text{con} \quad 0 \leq z \leq 9$$

$$s + F_{k,j}(s) = s + F_{k,j}(z) = (10y + z) +(k-z +10x)$$

$$s + F_{k,j}(s) = k +10(x+y) \qquad \text{donde } x=j' \text{ o } x=j'-1$$

de modo que $s + F_{k,j}(s) - k = 10(x+y)$

y por tanto $s + F_{k,j}(s) \equiv k \pmod{10}$.

Esto concluye la demostración de que $(s,F_{k,j}(s)) \in (R=k)$ y queda demostrado el teorema.

Ahora se aplica el teorema anterior para calcular $\#(R=k)$

Teorema 3 Si $\Omega_1=\{0,\dots,m-1\}$, $\#(\Omega_1)=m$, $\Omega_2=\{0,\dots,n-1\}$, $\#(\Omega_2) = n = 10a$ para algún a natural, entonces $\#(R=k) = a(m)$ para $0 \leq k \leq 9$ y además

$$(R=k) = \sum_{1 \leq j \leq a} R_{k,j}$$

Demostración.

Por el teorema anterior se tiene

$$(R=k) = \bigcup_{1 \leq j \leq a} R_{k,j}$$

Falta probar que $R_{k,x} \cap R_{k,y} = \emptyset$ si $x \neq y$

Supóngase que existe $(s,t) \in R_{k,x} \cap R_{k,y}$, entonces

$t = F_{k,x}(s)$, pero también $t = F_{k,y}(s)$.

Se analizará únicamente el caso $s \leq 9$ ya que el caso $s > 9$ puede llevarse a esta situación.

si $s \leq k$ se tiene

$$t = F_{k,x}(s) = k - s + 10(x-1) = k - s + 10(y-1) = F_{k,y}(s)$$
$$\rightarrow x = y$$

si $s > k$ se tiene

$$t = F_{k,x}(s) = k - s + 10x = k - s + 10y = F_{k,y}(s)$$
$$\rightarrow x = y$$

De modo que $R_{k,x}$ y $R_{k,y}$ son ajenos si $x \neq y$

Por otra parte $\#(R_{k,j}) = \#(\Omega_1)$,

ya que por definición $R_{k,j} = \{ (s, F_{k,j}(s)) : s \in \Omega_1 \}$

Por lo anterior

$$\#(R=k) = \sum_{1 \leq i \leq a} \#(R_{k,i}) = a(\#(\Omega_1)) = a(m)$$

El teorema anterior muestra bajo qué condiciones la variable aleatoria R mapea el mismo número de parejas en cada dígito. Bajo tales condiciones, si las dos variables X e Y tuvieran medida de probabilidad uniforme, entonces R también se distribuiría uniformemente. Sin embargo se pueden reducir los requerimientos de uniformidad a una sóla variable aleatoria como se indica en el teorema siguiente.

<u>Teorema 4</u> Si $\Omega_1 = \{0,\ldots,m-1\}$, $\#(\Omega_1) = m$, $\Omega_2 = \{0,\ldots,n-1\}$ y $\#(\Omega_2) = n = 10a$ para algún a natural y la variable aleatoria Y se distribuye uniformemente sobre Ω_2 entonces $P_3(R=k) = 0.1$ para $0 \leq k \leq 9$

Demostración.

$$P_3(R_{k,j}) = \sum_{0 \leq s \leq m-1} P_3(s, F_{k,j}(s))$$

Por hipótesis $q_t = 1/n = 1/10a$ para $0 \leq t \leq n-1$; de modo que:

$$P_3\,(R_{k,j}) = \sum_{0 \le s \le m-1} p_s \cdot 1/10a$$

$$= 1/10a \sum_{0 \le s \le m-1} p_s$$

$$= 1/10a \cdot 1$$

$$= 1/10a$$

Dado que $R_{k,i}$ y $R_{k,j}$ son ajenos si $i \neq j$ se tiene

$$P_3\,(R=k) = \sum_{1 \le j \le a} P_3\,(R_{k,j})$$

$$= \sum_{1 \le j \le a} 1/10a$$

$$= a\,(1/10a)$$

$$= 1/10$$

En el siguiente diagrama de conjuntos se puede ver más claramente cómo se divide el espacio de resultados $\Omega_1 \times \Omega_2$ con relación a la variable aleatoria R, cuando se cumple la condición del teorema 3.

Figura 1.1

$\Omega_3 = \Omega_1 \times \Omega_2$

(R=0)	(R=1)	(R=2)	(R=3)	(R=4)
$R_{0,1}$	$R_{1,1}$	$R_{2,1}$	$R_{3,1}$	$R_{4,1}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$R_{0,a}$	$R_{1,a}$	$R_{2,a}$	$R_{3,a}$	$R_{4,a}$
(R=5)	**(R=6)**	**(R=7)**	**(R=8)**	**(R=9)**
$R_{5,1}$	$R_{6,1}$	$R_{7,1}$	$R_{8,1}$	$R_{9,1}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$R_{5,a}$	$R_{6,a}$	$R_{7,a}$	$R_{8,a}$	$R_{9,a}$

Debe notarse que la demostración de los teoremas anteriores se basa en la suposición sobre la cardinalidad de Ω_2 y el resultado no se aplica directamente al caso en que la cardinalidad de Ω_1 sea divisible entre 10.

Sin embargo para el caso en que $\#(\Omega_1)$ es un múltiplo de 10, se puede probar un teorema análogo al Teorema 2 que dice que cada conjunto $(R=k)$ está formado por las parejas que se obtendrían según el Teorema 2 pero intercambiando de lugar las coordenadas de cada pareja. A continuación se presenta dicho teorema.

<u>Teorema 5</u> Si $\Omega_1=\{0,\dots,m-1\}$, $\#(\Omega_1) = m = 10a$ para algún $a \in N$, $\Omega_2=\{0,\dots,n-1\}$, $\#(\Omega_2) = n$, entonces para $0 \le k \le 9$

$$(R=k) = R'_{k,1} \cup \dots \cup R'_{k,a}$$

$$= \bigcup_{1 \le j \le a} R'_{k,j}$$

donde

$$R'_{k,j} = \{ (s,t) \text{ tal que } (t,s) = (t, F_{k,j}(t)) \text{ para } 0 \le t \le n-1 \}$$

$$F_{k,j}(h) = \begin{cases} k-h + 10\,(j-1) & \text{si } h \le k \le 9 \\ k-h + 10j & \text{si } k < h \le 9 \\ F_{k,j}(\bmod 10\,(h)\,) & \text{si } h > 9 \end{cases}$$

Demostración.
La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 2.

Primero se demuestra que $(R=k)$ está contenida en $\bigcup_{1 \le j \le a} R'_{k,j}$

Si $(s,t) \in (R=k)$ entonces $s=k-t+10x$ para algún $x \in Z$ y además $0 \le s \le m-1$, $0 \le t \le n-1$. Nuevamente se pueden considerar 3 casos.

Cuando $t \le k \le 9$ se tiene que $1 \le x+1 \le a$, y que $s=F_{k,x+1}(t)$

Cuando $k<t \le 9$ se tiene que $1 \le x \le a$, y que $s=F_{k,x}(t)$

Cuando $t>9$, se tiene :

$t = 10y + z$ para algún $y \ge 1$, $0 \le z \le 9$

$s = k-t+10x = k-z + 10(x-y)$

y como por definición $F_{k,j}(t) = F_{k,j}(z)$ se tiene :

si $z \le k$ entonces $s=F_{k,x-y+1}(t)$ con $1 \le x-y+1 \le a$

si $z > k$ entonces $s=F_{k,x-y}(t)$ con $1 \le x-y \le a$

Por lo tanto queda demostrado que si $(s,t) \in (R=k)$ entonces

$(s,t) \in \bigcup_{1 \le j \le a} R'_{k,j}$

Ahora se demostrará la inclusión de $\bigcup_{1 \le j \le a} R'_{k,j}$ en $(R=k)$.

Sea $(s,t) \in \bigcup_{1 \le j \le a} R'_{k,j}$

-> $(s,t) \in R'_{k,j'}$ para alguna $1 \le j' \le a$

-> $t \in \Omega_2$ por definición de $R'_{k,j'}$ y además $s=F_{k,j}(t)$

Dado que $1 \le j' \le a$ se deduce que $1 \le F_{k,j}(t) \le m-1 = 10a - 1$

es decir, $s \in \Omega_1$

Finalmente, si $0 \le t \le 9$ entonces

$$s+t-k = F_{k,j}(t) + t - k = 10x \quad \text{con } x=j' \text{ o } x=j'-1$$

y si $t = 10y + z$ con $0 \le z \le 9$, entonces

$$s+t-k = F_{k,j}(t) + t - k = 10(x+y) \quad \text{con } x=j' \text{ o } x=j'-1$$

y por tanto $F_{k,j}(t) + t \equiv k \pmod{10}$.

Esto concluye la demostración de que $(F_{k,j}(t), t) \in (R=k)$

y queda demostrado el teorema.

EN RESUMEN:

Si alguna de las variables X ó Y se distribuye uniformemente sobre un conjunto de números positivos con cardinalidad divisible entre 10, de la forma $\{0,1, \ldots ,10a-1\}$, entonces la variable aleatoria R se distribuye uniformemente sobre los dígitos de 0 a 9.

Se ilustrarán los teoremas anteriores con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

Supóngase que X tiene una distribución binomial con parámetros $n=12$, $p=0.40$, de modo que los valores de la pseudodensidad son los siguientes:

$p_0= 0.0022$ $\quad p_1= 0.0174$ $\quad p_2= 0.0638$ $\quad p_3= 0.1419$
$p_4= 0.2129$ $\quad p_5= 0.2270$ $\quad p_6= 0.1766$ $\quad p_7= 0.1009$
$p_8= 0.0420$ $\quad p_9= 0.0125$ $\quad p_{10}= 0.0025$ $\quad p_{11}= 0.0003$
$p_{12}= 0.0000$

Supóngase también que Y se distribuye uniformemente sobre $\{0,1,\ldots,19\}$ de modo que la medida de probabilidad vale 0.05 para cualquiera de esos valores.
A continuación se muestran las parejas asociadas por R a cada digito y la correspondiente medida de probabilidad de cada digito.

26 parejas para el valor 0

Probabilidad calculada : 0.10

$$R_{0,1}=\{(0,0)\ (1,9)\ (2,8)\ (3,7)\ (4,6)\ (5,5)\ (6,4)\ (7,3)\ (8,2)\ (9,1)\ (10,0)\ (11,9)\ (12,8)\}$$

$$R_{0,2}=\{(0,10)\ (1,19)\ (2,18)\ (3,17)\ (4,16)\ (5,15)\ (6,14)\ (7,13)\ (8,12)\ (9,11)\ (10,10)\ (11,19)\ (12,18)\}$$

26 parejas para el valor 1

Probabilidad calculada : 0.10

$$R_{1,1}=\{(0,1)\ (1,0)\ (2,9)\ (3,8)\ (4,7)\ (5,6)\ (6,5)\ (7,4)\ (8,3)\ (9,2)\ (10,1)\ (11,0)\ (12,9)\}$$

$$R_{1,2}=\{(0,11)\ (1,10)\ (2,19)\ (3,18)\ (4,17)\ (5,16)\ (6,15)\ (7,14)\ (8,13)\ (9,12)\ (10,11)\ (11,10)\ (12,19)\}$$

26 parejas para el valor 2

Probabilidad calculada : 0.10

$$R_{2,1}=\{(0,2)\ (1,1)\ (2,0)\ (3,9)\ (4,8)\ (5,7)\ (6,6)\ (7,5)\ (8,4)\ (9,3)\ (10,2)\ (11,1)\ (12,0)\}$$

$$R_{2,2}=\{(0,12)\ (1,11)\ (2,10)\ (3,19)\ (4,18)\ (5,17)\ (6,16)\ (7,15)\ (8,14)\ (9,13)\ (10,12)\ (11,11)\ (12,10)\}$$

26 parejas para el valor 3

Probabilidad calculada : 0.10

$$R_{3,1}=\{\ (0,3)\ (1,2)\ (2,1)\ (3,0)\ (4,9)$$
$$(5,8)\ (6,7)\ (7,6)\ (8,5)\ (9,4)$$
$$(10,3)\ (11,2)\ (12,1)\ \}$$

$$R_{3,2}=\{\ (0,13)\ (1,12)\ (2,11)\ (3,10)\ (4,19)$$
$$(5,18)\ (6,17)\ (7,16)\ (8,15)\ (9,14)$$
$$(10,13)\ (11,12)\ (12,11)\ \}$$

26 parejas para el valor 4

Probabilidad calculada : 0.10

$$R_{4,1}=\{\ (0,4)\ (1,3)\ (2,2)\ (3,1)\ (4,0)$$
$$(5,9)\ (6,8)\ (7,7)\ (8,6)\ (9,5)$$
$$(10,4)\ (11,3)\ (12,2)\ \}$$

$$R_{4,2}=\{\ (0,14)\ (1,13)\ (2,12)\ (3,11)\ (4,10)$$
$$(5,19)\ (6,18)\ (7,17)\ (8,16)\ (9,15)$$
$$(10,14)\ (11,13)\ (12,12)\ \}$$

26 parejas para el valor 5

Probabilidad calculada : 0.10

$$R_{5,1}=\{\ (0,5)\ (1,4)\ (2,3)\ (3,2)\ (4,1)$$
$$(5,0)\ (6,9)\ (7,8)\ (8,7)\ (9,6)$$
$$(10,5)\ (11,4)\ (12,3)\ \}$$

$$R_{5,2}=\{\ (0,15)\ (1,14)\ (2,13)\ (3,12)\ (4,11)$$
$$(5,10)\ (6,19)\ (7,18)\ (8,17)\ (9,16)$$
$$(10,15)\ (11,14)\ (12,13)\ \}$$

26 parejas para el valor 6

Probabilidad calculada : 0.10

$$R_{6,1}=\{\ (0,6)\ (1,5)\ (2,4)\ (3,3)\ (4,2)$$
$$(5,1)\ (6,0)\ (7,9)\ (8,8)\ (9,7)$$
$$(10,6)\ (11,5)\ (12,4)\ \}$$

$$R_{6,2}=\{\ (0,16)\ (1,15)\ (2,14)\ (3,13)\ (4,12)$$
$$(5,11)\ (6,10)\ (7,19)\ (8,18)\ (9,17)$$
$$(10,16)\ (11,15)\ (12,14)\ \}$$

26 parejas para el valor 7

Probabilidad calculada : 0.10

$$\begin{aligned} R_{7,1}=\{ & (0,7)\,(1,6)\,(2,5)\,(3,4)\,(4,3) \\ & (5,2)\,(6,1)\,(7,0)\,(8,9)\,(9,8) \\ & (10,7)\,(11,6)\,(12,5)\,\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{7,2}=\{ & (0,17)\,(1,16)\,(2,15)\,(3,14)\,(4,13) \\ & (5,12)\,(6,11)\,(7,10)\,(8,19)\,(9,18) \\ & (10,17)\,(11,16)\,(12,15)\,\} \end{aligned}$$

26 parejas para el valor 8

Probabilidad calculada : 0.10

$$\begin{aligned} R_{8,1}=\{ & (0,8)\,(1,7)\,(2,6)\,(3,5)\,(4,4) \\ & (5,3)\,(6,2)\,(7,1)\,(8,0)\,(9,9) \\ & (10,8)\,(11,7)\,(12,6)\,\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{8,2}=\{ & (0,18)\,(1,17)\,(2,16)\,(3,15)\,(4,14) \\ & (5,13)\,(6,12)\,(7,11)\,(8,10)\,(9,19) \\ & (10,18)\,(11,17)\,(12,16)\,\} \end{aligned}$$

26 parejas para el valor 9

Probabilidad calculada : 0.10

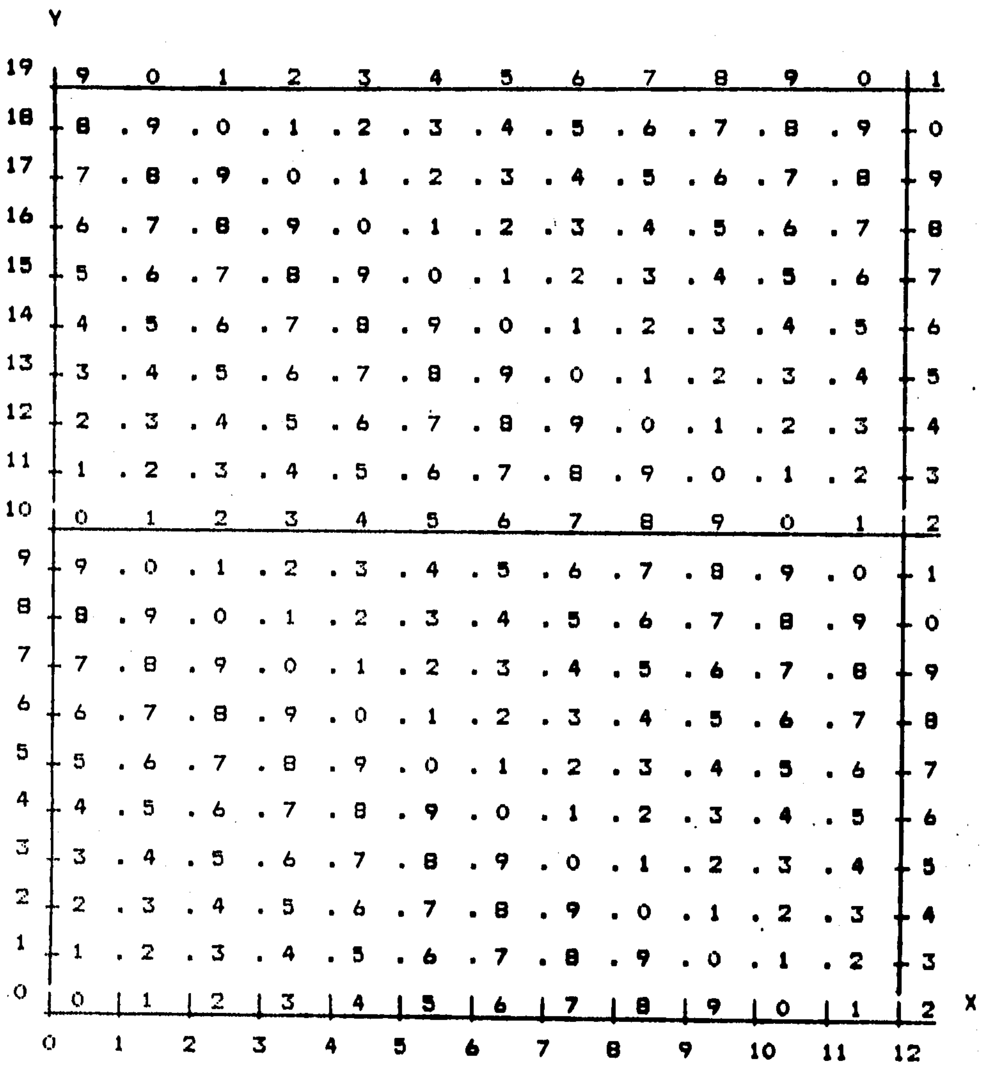
$$\begin{aligned} R_{9,1}=\{ & (0,9)\,(1,8)\,(2,7)\,(3,6)\,(4,5) \\ & (5,4)\,(6,3)\,(7,2)\,(8,1)\,(9,0) \\ & (10,9)\,(11,8)\,(12,7)\,\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{9,2}=\{ & (0,19)\,(1,18)\,(2,17)\,(3,16)\,(4,15) \\ & (5,14)\,(6,13)\,(7,12)\,(8,11)\,(9,10) \\ & (10,19)\,(11,18)\,(12,17)\,\} \end{aligned}$$

En la gráfica de la hoja siguiente se representan estos conjuntos en el plano cartesiano. A la derecha de cada punto perteneciente a $\Omega_1 \times \Omega_2$ se indica el valor de la función $R=(x+y) \bmod 10$. Como puede observarse los puntos con el mismo valor de R se encuentran sobre lineas rectas de la forma $y= -x + b$.

Los conjuntos $R_{k,1}$ están formados por los puntos para los cuales R vale k, en el sector inferior del plano limitado por las rectas $x=0$, $x=12$, $y=0$, $y=9$. Por su parte los conjuntos $R_{k,2}$ incluyen los puntos donde R vale k ubicados en el sector superior limitado por $x=0$, $x=12$, $y=10$, $y=19$.

Figura 1.2
Valores de R=(X+Y)mod 10 sobre $\Omega_1 \times \Omega_2 = \{0,1,..,12\} \times \{0,1,..,19\}$



OBSERVACIONES ADICIONALES.

Se llamará espacio principal al conjunto que tiene cardinalidad divisible entre 10 y espacio secundario al otro conjunto. Análogamente la variable aleatoria principal será la variable que se distribuye uniformemente sobre el espacio principal y la variable aleatoria secundaria será la variable asociada al espacio secundario.

. Como puede observarse en la demostración de los teoremas 2 y 5 en realidad no influye el hecho de que el espacio secundario sea finito. Más bien sin importar la cardinalidad de dicho espacio, cada uno de los conjuntos $R_{k,i}$ abarca todos los valores del espacio secundario en una coordenada, mientras que la otra coordenada se puede calcular por medio de la función $F_{k,i}$. De modo que la medida de probabilidad asociada al espacio secundario puede estar definida por una pseudodensidad infinita numerable tal como la de Poisson o la geométrica y el Teorema 4 acerca de la distribución de la variable R sigue siendo válido.

Sin embargo en cuanto a los valores del espacio principal ¿podrían ser $w_0,\dots,w_{10a-1}$, es decir valores cualesquiera, en vez de $0,\dots,10a-1$?. La respuesta es negativa ya que en la demostración del teorema 2 se puede notar que la condición de que t sea un elemento del espacio principal, es decir, $0 \le t \le 10a-1$, implica que cuando $t=k-s+10x$ entonces

$$1 \le x \le a \ (\text{ si } k<s \le 9) \text{ o bien } 1 \le x+1 \le a \ (\text{ si } s \le k \le 9). \qquad (1)$$

Y recíprocamente, si $t=k-s+10x$ y además (1) entonces $0 \le t \le 10a-1$.

La condición de que t se encuentre entre el límite inferior y el límite superior muestra que para que el espacio principal contenga a t debe estar formado por todos los valores consecutivos entre dichos límites.

No obstante sería posible llegar a esta situación por medio de una función de traslación $f(u)=u-w$ si el conjunto original fuera de la forma $\{ w, w+1, \dots , w+10a-1 \}$.

El teorema 4 tiene aplicaciones prácticas importantes como se verá en los capítulos 3 y 4, ya que a partir de una sucesión obtenida de una variable distribuida uniformemente sobre un espacio con cardinalidad múltiplo de 10, se pueden obtener múltiples sucesiones a partir de la fórmula $(x_n + y_n) \bmod 10$, que también reflejen la distribución uniforme.

Las variables secundarias de las cuales se toman las sucesiones, pueden tener cualquier distribución de probabilidad. La única condición es que las sucesiones secundarias sean independientes de la sucesión principal.

Se mostrará con un ejemplo que si las variables aleatorias primaria y secundaria no son independientes entre si, entonces la variable R no necesariamente se distribuye uniformemente.
Supóngase que la realización del evento (Y=k) implica la realización del evento (X=k), es decir que la probabilidad de que X=k habiéndose realizado Y=k es igual a 1.

La medida de probabilidad definida en $\Omega_1 \times \Omega_2$ es la siguiente

$$P_3(\ \{(i,j)\}\ ) = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Entonces la variable R= (X+Y) mod 10 se distribuye de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P_R\ (\{k\}) &= P_3\ (R=k) \\ &= P_3\ (\ \{\ (i,j) \text{ tal que } 10 \mid i+j-k,\ i=j\ \}\ ) \\ &\quad + P_3\ (\ \{\ (i,j) \text{ tal que } 10 \mid i+j-k,\ i\neq j\ \}\ ) \\ &= P_3\ (\ \{\ (i,i) \text{ tal que } 10 \mid 2i-k\ \}\ ) \end{aligned}$$

De modo que $P_R(\{k\})=0$ para cualquier k impar.

Por tanto no se cumple que $P_R(\{k\})=1/10$ para cualquier digito k entre 0 y 9, es decir, R no se distribuye uniformemente en $\{0,1,\ldots,9\}$.

Este ejemplo muestra la necesidad de verificar que las variables seleccionadas sean independientes antes de utilizar el teorema 4 en la construcción de sucesiones distribuidas uniformemente.

1.2.3 Condiciones necesarias para la uniformidad de R.

Hasta ahora se ha analizado cómo deben ser las variables aleatorias X e Y para que la variable aleatoria R = (X+Y) mod 10 se distribuya uniformemente y se han establecido ciertas condiciones suficientes sobre X e Y. Ahora se estudiarán las condiciones necesarias.

Supóngase que se tiene una variable aleatoria R que se distribuye uniformemente en $\{0,\ldots,9\}$ y que se obtuvo a partir de dos variables X e Y mediante la fórmula (X+Y) mod 10.

Para poder obtener información acerca de X e Y por medio de la teoría de probabilidad, se necesita primeramente suponer que X e Y son variables aleatorias con distribución o medida de probabilidad.

Además es necesario saber si son independientes o bien cuál es la relación de dependencia entre las medidas de probabilidad de cada variable.

Se analizará un caso particular que ilustra las condiciones necesarias que se deben cumplir para que R se distribuya uniformemente.

Sea $\Omega_1=\{0,1\}$ el espacio de resultados para X y $\Omega_2=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ el espacio de resultados para Y.

Sea $\{p_i\}$ una pseudodensidad cuyos elementos son $p_0=1/3$ y $p_1=2/3$.

Sea $\{q_j\}$ una pseudodensidad cuyos elementos son q0, q1, q2, q3, q4, q5, q6, q7, q8, q9, q10 y q11 los cuales son desconocidos.

Supóngase que las medidas de probabilidad P_1 y P_2 para X e Y están dadas por las pseudodensidades $\{p_i\}$ y $\{q_j\}$ respectivamente, es decir

$$P_1(\{x\})=p_x$$
$$P_2(\{y\})=q_y$$

Supóngase que X e Y son variables estadísticamente independientes. Entonces $P_{X,Y}(\{(i,j)\}) = P_1(\{i\})\, P_2(\{j\}) = p_i * q_j$

Las parejas asociadas a cada dígito por la variable aleatoria R son las siguientes:

(R=0) = { (0,0) (1,9) (0,10) }
(R=1) = { (1,0) (0,1) (1,10) (0,11) }
(R=2) = { (1,1) (0,2) (1,11) }
(R=3) = { (1,2) (0,3) }
(R=4) = { (1,3) (0,4) }
(R=5) = { (1,4) (0,5) }
(R=6) = { (1,5) (0,6) }
(R=7) = { (1,6) (0,7) }
(R=8) = { (1,7) (0,8) }
(R=9) = { (1,8) (0,9) }

Por hipótesis se tiene que $P_{X,Y}$ $(R=k)=1/10$ para $k=0,1,\dots,9$ y que $P_{X,Y}(\{(i,j)\}) = p_i * q_j$.
De modo que los valores $q_0,q_1,\dots,q_{11}$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones siguiente.

$$
\begin{aligned}
1/3\ q_0 + 2/3\ q_9 + 1/3\ q_{10} &= 1/10\\
2/3\ q_0 + 1/3\ q_1 + 2/3\ q_{10} + 1/3\ q_{11} &= 1/10\\
2/3\ q_1 + 1/3\ q_2 + 2/3\ q_{11} &= 1/10\\
2/3\ q_2 + 1/3\ q_3 &= 1/10\\
2/3\ q_3 + 1/3\ q_4 &= 1/10\\
2/3\ q_4 + 1/3\ q_5 &= 1/10\\
2/3\ q_5 + 1/3\ q_6 &= 1/10\\
2/3\ q_6 + 1/3\ q_7 &= 1/10\\
2/3\ q_7 + 1/3\ q_8 &= 1/10\\
2/3\ q8 + 1/3\ q_9 &= 1/10
\end{aligned}
$$

Se tiene entonces un sistema de 10 ecuaciones con 12 incógnitas el cual se puede representar por la matriz siguiente.

$$
\begin{bmatrix}
1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 1/10\\
2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1/10\\
0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/10\\
0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10\\
0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/10
\end{bmatrix}
$$

La matriz anterior es equivalente a la siguiente matriz escalonada.

$$
\begin{bmatrix}
1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 1/10\\
0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4/3 & 0 & 1/3 & -1/10\\
0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8/3 & 0 & 0 & 3/10\\
0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16/3 & 0 & 0 & -5/10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32/3 & 0 & 0 & 11/10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & -64/3 & 0 & 0 & -21/10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 128/3 & 0 & 0 & 43/10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & -256/3 & 0 & 0 & -85/10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 512/3 & 0 & 0 & 171/10\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1023/3 & 0 & 0 & -341/10
\end{bmatrix}
$$

El sistema anterior tiene más de una solución $(q_0,q_1,\ldots,q_{10},q_{11})$ que se pueda considerar como pseudodensidad. Los valores de q_9, q_8, q_7, q_6, q_5, q_4, q_3 y q_2 están completamente determinados y su valor es 1/10, pero los valores de q_{10} y q_{11} pueden ser elegidos apropiadamente (tales que su suma no exceda 2/10) y para cada elección se obtienen diferentes valores válidos de q_0 y q_1.

En particular la siguiente pseudodensidad es una solución del sistema

$$q_0=3/40 \quad q_1=1/20 \quad q_2=1/10 \quad q_3=1/10 \quad q_4=1/10 \quad q_5=1/10$$
$$q_6=1/10 \quad q_7=1/10 \quad q_8=1/10 \quad q_9=1/10 \quad q_{10}=1/40 \quad q_{11}=1/20$$

al igual que esta otra pseudodensidad

$$q_0=1/20 \quad q_1=1/20 \quad q_2=1/10 \quad q_3=1/10 \quad q_4=1/10 \quad q_5=1/10$$
$$q_6=1/10 \quad q_7=1/10 \quad q_8=1/10 \quad q_9=1/10 \quad q_{10}=1/20 \quad q_{11}=1/20$$

El ejemplo anterior ilustra que la condición de que una pseudodensidad sea uniforme sobre un conjunto de enteros con cardinalidad múltiplo de 10 no es una condición necesaria para que la variable R se distribuya uniformemente sobre $\{0,\ldots,9\}$.

Por lo tanto las condiciones necesarias de la uniformidad de R parecen ser más generales. En el caso de que X e Y sean estadísticamente independientes, una condición necesaria sería que los espacios de resultados para X e Y junto con las pseudodensidades asociadas fueran tales que la suma de probabilidades p_i*q_j sobre las parejas (i,j) que pertenecen al evento $(R=k)$ sea 1/10 para $0 \leq k \leq 9$.

Capítulo 2
Verificación del método de fray Edvin con datos reales.

2.1 Sucesos de la naturaleza como fuente de números al azar

De acuerdo al modelo clásico de la teoría de probabilidad una sucesión aleatoria es aquella que se obtiene al efectuar tiradas o repeticiones independientes de un suceso aleatorio.
En el capítulo 3 se considera más ampliamente la definición de sucesión aleatoria, pero en este capítulo al hablar de sucesión aleatoria se hace referencia a una sucesión de números extraídos al azar, es decir una lista de resultados $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N$ obtenidos al efectuar N repeticiones sucesivas de un experimento aleatorio.

Se dice que un experimento es aleatorio si las condiciones bajo las cuales se realiza dicho experimento y los resultados que se hayan obtenido en observaciones anteriores, no determinan el resultado que se obtendrá en la siguiente repetición del experimento.

Existe una gran variedad de tales experimentos y se podrían citar mecanismos físicos como una ruleta, un detector de radioactividad, el lanzamiento de una moneda, etc. Sin embargo también se pueden encontrar resultados aleatorios, a partir de la información almacenada en grandes bancos de datos utilizados por los sistemas de ciertas dependencias educativas o administrativas.

Como ejemplo del uso de dicha información se puede mencionar la tabla de 40,000 dígitos al azar, tomados de reportes de censos ingleses, publicada en 1927 por L.C.H. Tippett.

Si se tiene permiso para manipular con fines científicos la abundante información numérica almacenada en ciertas dependencias, se pueden seleccionar algunos elementos de la información que tienen características de aleatoriedad y que se distribuyan según un modelo conveniente para el investigador. Una vez producidas las sucesiones, se podrían grabar en algún medio magnético y distribuirlo a las instituciones o personas interesadas.
En la siguiente sección se presentan algunas sucesiones de resultados aleatorios que se obtuvieron de esta manera.

2.2 Elección de las variables X e Y

Considérese una situación de la realidad en la cual se pueden observar resultados aleatorios.
En una oficina de contratación de personal se recibe a cada nuevo empleado y se le pide que llene una forma de datos personales la cual incluye su nombre, su registro federal de contribuyentes y otros datos. Después se asigna un número consecutivo a su expediente o carpeta de documentación.

Aunque la política de contratación restrinja la fecha de nacimiento para aceptar solamente personas en un rango de edades, se puede considerar que el último dígito del año de nacimiento es un resultado aleatorio. De igual manera el último dígito del mes de nacimiento o del día de nacimiento son resultados aleatorios.

Esta información acerca de la fecha de nacimiento está contenida en el registro federal de contribuyentes (RFC) que está formado con las 2 primeras letras del apellido paterno, la letra inicial del apellido materno, la primera letra del nombre, los 2 últimos dígitos del año de nacimiento, dos dígitos que representan el mes y dos dígitos que representan el día del mes de la fecha de nacimiento.

Ahora se puede tomar como el resultado que interesa, el residuo de la división por 10 de una combinación lineal de los valores de las variables seleccionadas. En todos estos casos es imposible conocer de antemano el siguiente resultado que se tendrá al registrar un nuevo empleado.
Supóngase que la oficina de personal de la dependencia, guarda un archivo físico con la documentación de cada empleado registrado y que además ha introducido esa información en una computadora mediante algún programa o sistema. En tal caso se puede procesar el archivo de empleados para obtener las sucesiones de dígitos que interesan.

En este trabajo de tesis, se utilizó información del archivo de empleados de la Suprema Corte de Justicia como un registro de números obtenidos al azar *.

---

* Sin embargo, en apego a la disposición de no hacer uso indebido de la información confidencial, la única información producida y que salió de la dependencia fueron sucesiones aleatorias de dígitos almacenadas en archivos.

Se elaboró un programa el cual permitió generar los siguientes tipos de sucesiones:

A) último digito del día de nacimiento en el RFC
B) último digito del mes de nacimiento en el RFC
C) último digito del año de nacimiento en el RFC
D) número de caracteres (longitud) del apellido paterno
E) (X+Y) mod 10 donde X e Y pueden ser los valores de los casos A,B,C o D.

En el apéndice B se encuentran las listas de valores para cada una de estas sucesiones.
Las razones para seleccionar los resultados A, B, C, D y E como las variables aleatorias de interés son las siguientes.

Por un lado los resultados A y C teóricamente siguen una distribución aproximadamente uniforme bajo el supuesto de que los nacimientos se producen con la misma probabilidad en cualquier día del mes (0 a 30 si excluimos los nacimientos en día 31) y con la misma probabilidad cada año dentro de cada década. Si tales supuestos fueran ciertos las sucesiones A y C reflejarían una distribución uniforme sobre {0,1,...,9}.

Por otra parte suponiendo que los nacimientos también ocurren uniformemente en cualquier mes de enero a diciembre, la variable B presentaría mayor frecuencia de los dígitos 1 y 2. Esto es porque el dígito 1 ocurre cuando el mes de nacimiento es 1 ó 11 (enero y noviembre); a su vez el dígito 2 ocurre cuando el mes es 2 ó 12 (febrero o diciembre), mientras que los demás dígitos 3,4,5,6,7,8,9 y 0, se corresponden uno a uno con los meses 3,4,5,6,7,8,9 y 10 respectivamente.

En el caso de la variable D la experiencia indica que no se distribuye uniformemente, por lo que será combinada con la variable B para estudiar el caso en que las dos variables originales no se distribuyen uniformemente sobre un conjunto de la forma {0,...,10a-1}.

Con estas variables se puede evaluar experimentalmente la validez de la hipótesis de que el método del fraile Edvin de sumar dos sucesiones independientes y obtener el resto de la división por 10, realmente produce una sucesión con distribución uniforme, sin importar la distribución de las sucesiones originales.

De acuerdo con los resultados teóricos del capitulo anterior, cuando una de las 2 variables X ó Y se distribuye uniformemente sobre un conjunto de la forma $\{0,1,...,10a-1\}$, se obtendrá una variable R con distribución uniforme en $\{0,1,...,9\}$; pero si tal condición no se cumple entonces R no siempre se distribuye uniformemente.

Para corroborar experimentalmente estas afirmaciones primero se verificará que las variables A, B, C y D se pueden considerar como variables estadisticamente independientes. Si tal condición se cumple, se construirán las sucesiones tipo E y se evaluará con técnicas estadísticas la hipótesis de que se distribuyen uniformemente.

2.3 Prueba de independencia de X e Y

Se usará la prueba ji-cuadrada de independencia para probar la hipótesis de que las dos variables aleatorias X e Y son independientes. El procedimiento es el siguiente.

Se toman N observaciones independientes de la variable aleatoria bivariada (X,Y) y se definen varias categorías para la primera y segunda coordenadas con base a los posibles valores de las variables X e Y.

Las categorías de X se representan por renglones y las categorías de Y por columnas, formando una tabla de r renglones y c columnas.

De acuerdo al valor de la primera coordenada, cada observación está asociada con exactamente uno de los r renglones y según el valor de la segunda coordenada cada observación está asociada con exactamente una de las c columnas.

Sea O_{ij} el número de observaciones asociadas con el renglón i y la columna j simultáneamente
El número total de observaciones en el renglón i es designado por R_i y el total de observaciones en la columna j es denotado por C_j enfatizando que los totales por renglón y por columna son aleatorios más bien que fijos. La suma de las cantidades en todas las celdas es N.
Estas cantidades forman una tabla de contingencia r x c como la siguiente.

Tabla de contingencia r x c

ren.\ col.	1	2	3	...	c	Total
1	O_{11}	O_{12}	O_{13}	...	O_{1c}	R_1
2	O_{21}	O_{22}	O_{23}	...	O_{2c}	R_2
...	...	...	...	...	...	...
r	O_{r1}	O_{r2}	O_{r3}	...	O_{rc}	R_r
Total	C_1	C_2	C_3	...	C_c	N

La hipótesis que interesa probar se refiere a que el evento "una observación está en el renglón i" es independiente del evento "la misma observación está en la columna j" para todo i y j.

Por la definición de independencia de eventos, esta hipótesis y la hipótesis alternativa se pueden enunciar como sigue:

H_0: P(renglón i, columna j) = P(renglón i) P(columna j) para todo i,j

Vs

H_1: P(renglón i, columna j) $\neq$ P(renglón i) P(columna j) para algún par i,j

Estadística de Prueba.

$$T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \qquad \text{donde} \quad E_{ij}=\frac{R_iC_j}{N}$$

o equivalentemente

$$T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{O_{ij}^2}{E_{ij}}-N$$

Regla de decisión.

Rechazar H_0 si T excede el cuantil $1-\alpha$ de una variable aleatoria ji-cuadrada con $(r-1)(c-1)$ grados de libertad. El nivel aproximado de significancia es α. Nótese que α es la probabilidad de rechazar la hipótesis H_0 cuando es cierta.

En estas pruebas se da el nivel crítico (el más pequeño nivel de significancia con el cual se rechazaría la hipótesis H_0 con base al valor observado de la estadística de prueba) para tener más información de la evidencia experimental sobre la validez de H_0.

Por otra parte, nótese que valores grandes de la estadística T (en la cola superior de la distribución) que llevan a rechazar H_0 serían poco probables si H_0 fuera cierta, mientras que valores cercanos al centro de la distribución serían más probables cuando H_0 es cierta. De modo que el nivel de probabilidad asociado al valor calculado de T sirve para ver si los datos en las sucesiones apoyan o no la hipótesis de independencia.

A continuación se presentan los resultados de las pruebas realizadas con cada uno de los posibles pares de variables seleccionadas, los cuales apoyan la suposición de que son estadísticamente independientes entre si. Por esa razón se pueden utilizar dichas variables en la construcción de las nuevas variables de la forma $R=(X+Y) \bmod 10$, con el objeto de verificar los resultados teóricos sobre la distribución de R.

Aplicación de la prueba con el primer par de variables

X: último digito del año de nacimiento
Y: último digito del día de nacimiento

Tabla 2.1 Frecuencias observadas

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
0	65	40	45	49	60	55	43	50	47	42	496
1	49	57	56	36	56	45	54	49	38	36	476
2	42	57	53	50	48	50	45	49	56	39	489
3	35	58	51	53	48	42	44	58	41	47	477
4	49	66	40	45	53	57	41	39	46	39	475
5	39	44	38	61	51	49	52	37	42	47	460
6	50	55	39	47	47	37	40	59	36	44	454
7	38	50	57	46	55	54	46	50	48	43	487
8	51	57	51	61	54	54	46	41	56	43	514
9	56	60	58	49	53	55	48	59	58	48	544
Total	474	544	488	497	525	498	459	491	468	428	4872

Tàbla 2.2 Frecuencias esperadas

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	48	55	50	51	53	51	47	50	48	44
1	46	53	48	49	51	49	45	48	46	42
2	48	55	49	50	53	50	46	49	47	43
3	46	53	48	49	51	49	45	48	46	42
4	46	53	48	48	51	49	45	48	46	42
5	45	51	46	47	50	47	43	46	44	40
6	44	51	45	46	49	46	43	46	44	40
7	47	54	49	50	52	50	46	49	47	43
8	50	57	51	52	55	53	48	52	49	45
9	53	61	54	55	59	56	51	55	52	48

El valor de la estadística de prueba es T=76.011230 el cual corresponde al cuantil nivel p=0.37 de la distribución ji-cuadrada con 81 grados de libertad. El nivel crítico aproximado es 0.63. Los datos experimentales dan evidencia favorable a la hipótesis de independencia.

Aplicación de la prueba con el segundo par de variables

X: último dígito del año de nacimiento
Y: último dígito del mes de nacimiento

Tabla 2.3 Frecuencias observadas

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
0	47	90	75	38	47	47	33	47	35	37	496
1	45	73	63	41	40	40	44	47	41	42	476
2	30	94	77	33	34	43	40	41	43	54	489
3	41	79	79	46	31	35	38	41	37	50	477
4	44	72	76	38	42	41	40	37	41	44	475
5	37	73	70	32	43	35	30	47	49	44	460
6	53	72	65	41	32	38	43	25	37	48	454
7	35	65	76	40	38	47	42	45	51	48	487
8	52	104	74	34	49	52	30	47	36	36	514
9	55	88	82	50	42	53	44	45	45	40	544
Total	439	810	737	393	398	431	384	422	415	443	4872

Tabla 2.4 Frecuencias esperadas

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	45	82	75	40	41	44	39	43	42	45
1	43	79	72	38	39	42	38	41	41	43
2	44	81	74	39	40	43	39	42	42	44
3	43	79	72	38	39	42	38	41	41	43
4	43	79	72	38	39	42	37	41	40	43
5	41	76	70	37	38	41	36	40	39	42
6	41	75	69	37	37	40	36	39	39	41
7	44	81	74	39	40	43	38	42	41	44
8	46	85	78	41	42	45	41	45	44	47
9	49	90	82	44	44	48	43	47	46	49

La estadística de prueba T vale 84.344727 que corresponde al cuantil nivel p=0.63 de una variable aleatoria ji-cuadrada con 81 grados de libertad. El nivel crítico aproximado es de 0.37. El valor observado de T es favorable o concuerda con la hipótesis de independencia.

Aplicación de la prueba con el tercer par de variables

X: último dígito del día de nacimiento
Y: último dígito del mes de nacimiento

Tabla 2.5 Frecuencias observadas

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
0	56	73	51	36	40	49	39	31	49	50	474
1	54	91	73	50	35	54	42	57	45	43	544
2	27	83	77	42	50	44	46	41	35	43	488
3	42	86	78	44	42	40	36	41	47	41	497
4	46	91	83	43	43	47	40	50	37	45	525
5	43	84	75	33	52	52	34	41	42	42	498
6	37	82	71	33	34	38	38	40	44	42	459
7	53	88	79	29	34	37	44	38	44	45	491
8	44	67	84	35	32	34	35	48	38	51	468
9	37	65	66	48	36	36	30	35	34	41	428
Total	439	810	737	393	398	431	384	422	415	443	4872

Tabla 2.6 Frecuencias esperadas

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	43	79	72	38	39	42	37	41	40	43
1	49	90	82	44	44	48	43	47	46	49
2	44	81	74	39	40	43	38	42	42	44
3	45	83	75	40	41	44	39	43	42	45
4	47	87	79	42	43	46	41	45	45	48
5	45	83	75	40	41	44	39	43	42	45
6	41	76	69	37	37	41	36	40	39	42
7	44	82	74	40	40	43	39	43	42	45
8	42	78	71	38	38	41	37	41	40	43
9	39	71	65	35	35	38	34	37	36	39

El valor de la estadística de prueba es $T=80.479980$ que corresponde al cuantil nivel $p=0.50$ de una variable aleatoria ji-cuadrada con 81 grados de libertad. El nivel critico vale aproximadamente 0.5 y el valor observado de la estadística T favorece la hipótesis de independencia.

<u>Aplicación de la prueba con el cuarto par de variables</u>

X: longitud del apellido paterno
Y: último dígito del año de nacimiento

Tabla 2.7 Frecuencias observadas

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
3	1	3	2	4	1	0	1	0	1	1	14
4	53	39	42	33	37	47	41	34	33	42	401
5	79	79	76	76	80	70	63	75	94	91	783
6	107	89	114	117	110	102	102	111	113	138	1103
7	123	126	106	113	119	106	109	119	124	139	1184
8	82	85	76	70	68	77	70	76	82	75	761
9	41	40	56	47	47	48	55	60	55	46	495
10	7	10	10	10	7	5	9	7	6	6	77
11	2	4	5	7	3	3	2	4	5	4	39
12	0	0	0	0	0	1	2	1	0	1	5
13	1	1	0	0	3	0	0	0	1	1	7
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
16	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2
Total	496	476	489	477	475	460	454	487	514	544	4872

Tabla 2.8 Frecuencias esperadas

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
4	41	39	40	39	39	38	37	40	42	45
5	80	76	79	77	76	74	73	78	83	87
6	112	108	111	108	108	104	103	110	116	123
7	121	116	119	116	115	112	110	118	125	132
8	77	74	76	75	74	72	71	76	80	85
9	50	48	50	48	48	47	46	49	52	55
10	8	8	8	8	8	7	7	8	8	9
11	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
12-16	2	1	2	1	1	1	1	1	2	2

Nota: Los valores 12,13,14,15 y 16 fueron agrupados en una sóla categoría para cumplir la condición de que todas las frecuencias esperadas sean mayores o iguales a 1.

El valor de la estadística de prueba es T=76.9378 que corresponde al cuantil nivel p=0.39 de una variable aleatoria ji-cuadrada con 81 grados de libertad. El nivel crítico vale aproximadamente 0.61 y el valor observado de la estadística T favorece la hipótesis de independencia.

Aplicación de la prueba con el quinto par de variables

X: longitud del apellido paterno
Y: último digito del mes de nacimiento

Tabla 2.9 Frecuencias observadas

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
3	1	6	1	0	0	1	4	1	0	0	14
4	38	55	62	26	30	44	35	35	39	37	401
5	63	151	114	70	57	60	60	67	58	83	783
6	108	190	156	75	101	101	88	89	96	99	1103
7	96	182	189	97	104	111	93	95	113	104	1184
8	85	120	126	70	58	58	60	72	48	64	761
9	39	88	63	42	39	48	35	51	47	43	495
10	5	11	16	9	2	5	7	6	7	9	77
11	3	6	9	3	5	2	1	2	5	3	39
12	0	0	0	0	1	1	1	0	2	0	5
13	0	1	1	1	1	0	0	2	0	1	7
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
16	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2
Total	439	810	737	393	398	431	384	422	415	443	4872

Tabla 2.10 Frecuencias esperadas

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1
4	36	67	61	32	33	35	32	35	34	36
5	71	130	118	63	64	69	62	68	67	71
6	99	183	167	89	90	98	87	96	94	100
7	107	197	179	96	97	105	93	103	101	108
8	69	127	115	61	62	67	60	66	65	69
9	45	82	75	40	40	44	39	43	42	45
10	7	13	12	6	6	7	6	7	7	7
11	4	6	6	3	3	3	3	3	3	4
12-16	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1

Nota: Los valores 12,13,14,15 y 16 fueron agrupados en una sóla categoría para cumplir la condición de que todas las frecuencias esperadas sean mayores o iguales a 1.

El valor de la estadistica de prueba es $T=99.9304$ el cual corresponde al cuantil nivel $p=0.92$ de la distribución ji-cuadrada con 81 grados de libertad. El nivel crítico aproximado es 0.08 por lo cual no se rechaza la hipótesis de independencia.

Aplicación de la prueba con el sexto par de variables

X: longitud del apellido paterno
Y: último digito del día de nacimiento

Tabla 2.11 Frecuencias observadas

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
3	2	0	1	1	1	2	1	4	2	0	14
4	30	45	44	38	51	42	40	36	40	35	401
5	81	85	79	77	92	74	77	77	74	67	783
6	109	134	116	119	108	119	94	115	93	96	1103
7	120	134	113	112	115	120	119	121	113	117	1184
8	80	89	67	84	81	82	60	72	85	61	761
9	41	43	55	50	67	45	57	49	46	42	495
10	5	9	6	12	3	11	6	11	6	8	77
11	5	4	7	1	3	2	4	5	7	1	39
12	0	0	0	2	1	1	0	1	0	0	5
13	1	0	0	1	3	0	0	0	1	1	7
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
16	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2
Total	474	544	488	497	525	498	459	491	468	428	4872

Tabla 2.12 Frecuencias esperadas

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1
4	39	45	40	41	43	41	38	40	39	35
5	76	87	78	80	84	80	74	79	75	69
6	107	123	110	113	119	113	104	111	106	97
7	115	132	119	121	128	121	112	119	114	104
8	74	85	76	78	82	78	72	77	73	67
9	48	55	50	50	53	51	47	50	48	43
10	7	9	8	8	8	8	7	8	7	7
11	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3
12-16	1	2	2	2	2	2	1	2	1	1

Nota: Los valores 12,13,14,15 y 16 fueron agrupados en una sóla categoría para que ninguna frecuencia esperada sea igual a cero.

El valor de la estadística de prueba es T=76.3211 que corresponde al cuantil nivel p=0.37 de una variable aleatoria ji-cuadrada con 81 grados de libertad. El nivel crítico vale aproximadamente 0.63 de modo que el valor observado de la estadística T favorece la hipótesis de independencia.

2.4 Pruebas estadísticas sobre la distribución de las variables

2.4.1 Tablas de frecuencias de los dígitos

A continuación se presentan los resultados acerca de la distribución de frecuencias de las sucesiones de realizaciones de las variables seleccionadas.

Tabla 2.13
Ultimo dígito del año

Valor	Frec.	Frec.Rel.
0	496	0.101806
1	476	0.097701
2	489	0.100369
3	477	0.097906
4	475	0.097496
5	460	0.094417
6	454	0.093186
7	487	0.099959
8	514	0.105501
9	544	0.111658

Tabla 2.14
Ultimo dígito del mes

Valor	Frec.	Frec.Rel.
0	439	0.090107
1	810	0.166256
2	737	0.151273
3	393	0.080665
4	398	0.081691
5	431	0.088465
6	384	0.078818
7	422	0.086617
8	415	0.085181
9	443	0.090928

Tabla 2.15
Ultimo dígito del día

Valor	Frec.	Frec.Rel.
0	474	0.097291
1	544	0.111658
2	488	0.100164
3	497	0.102011
4	525	0.107759
5	498	0.102217
6	459	0.094212
7	491	0.100780
8	468	0.096059
9	428	0.087849

Tabla 2.16
Longitud del apellido paterno

Valor	Frec.	Frec.Rel.
3	14	0.002873
4	401	0.082307
5	783	0.160714
6	1103	0.226395
7	1184	0.243021
8	761	0.156198
9	495	0.101600
10	77	0.015804
11	39	0.008004
12	5	0.001026
13	7	0.001436
14	0	0
15	1	0.000205
16	2	0.000410

Tabla 2.17

R= [(último dígito del año) + (último dígito del mes)] mod 10

Valor	Frec.	Frec.Rel.
0	482	0.098933
1	485	0.099548
2	505	0.103654
3	490	0.100575
4	497	0.102011
5	498	0.102217
6	484	0.099343
7	461	0.094622
8	453	0.092980
9	517	0.106117

Tabla 2.18

R= [(último dígito del mes) + (último dígito del día)] mod 10

Valor	Frec.	Frec.Rel.
0	479	0.098317
1	474	0.097291
2	443	0.090928
3	475	0.097496
4	494	0.101396
5	502	0.103038
6	509	0.104475
7	497	0.102011
8	512	0.105090
9	487	0.099959

Tabla 2.19

R= [(último dígito del año) + (último dígito del día)] mod 10

Valor	Frec.	Frec.Rel.
0	509	0.104475
1	471	0.096675
2	471	0.096675
3	490	0.100575
4	490	0.100575
5	498	0.102217
6	481	0.098727
7	479	0.098317
8	485	0.099548
9	498	0.102217

Tabla 2.20

R= [(longitud del apellido paterno) +
(último digito del año)] mod 10

Valor	Frec.	Frec.Rel.
0	462	0.094827
1	459	0.094211
2	447	0.091748
3	497	0.102011
4	512	0.105090
5	521	0.106937
6	525	0.107758
7	465	0.095443
8	495	0.101600
9	489	0.100369

Tabla 2.21

R=[(longitud del apellido paterno) +
(último digito del mes)] mod 10

Valor	Frec.	Frec.Rel.
0	520	0.106732
1	447	0.091748
2	428	0.087848
3	395	0.081075
4	432	0.088669
5	450	0.092364
6	535	0.109811
7	546	0.112068
8	577	0.118431
9	542	0.111247

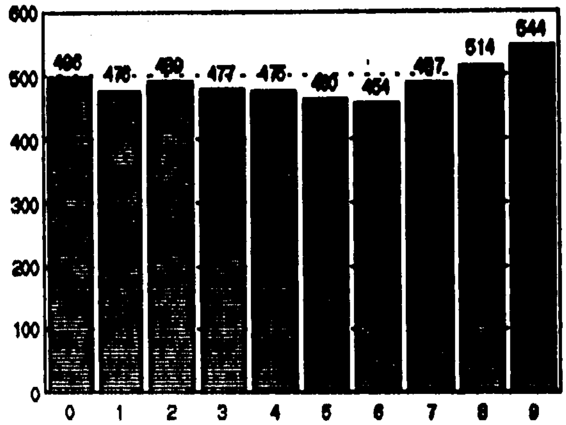
Tabla 2.22

R=[(longitud del apellido paterno) +
(último digito del día)] mod 10

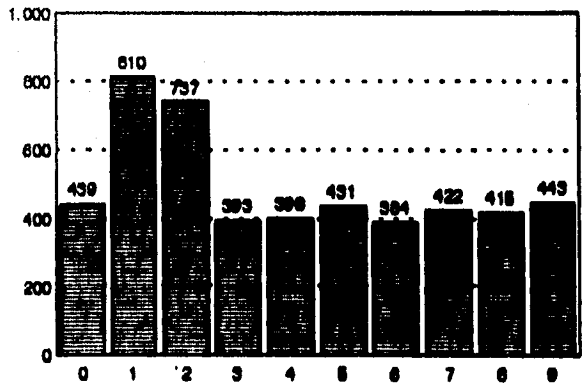
Valor	Frec.	Frec.Rel.
0	454	0.093185
1	503	0.103243
2	474	0.097290
3	515	0.105706
4	420	0.086206
5	481	0.098727
6	500	0.102627
7	499	0.102422
8	513	0.105295
9	513	0.105295

2.4.2 Histogramas

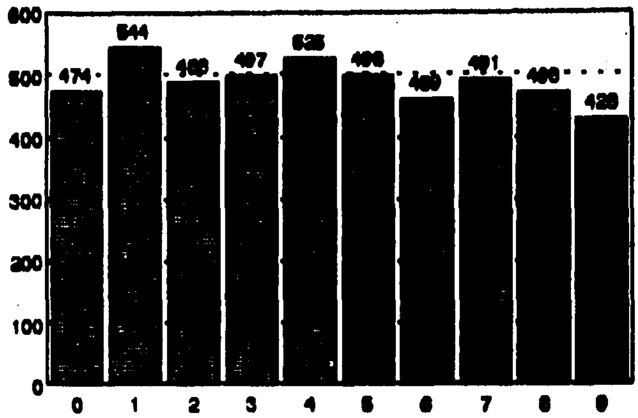
Histograma 1
Ultimo dígito del año



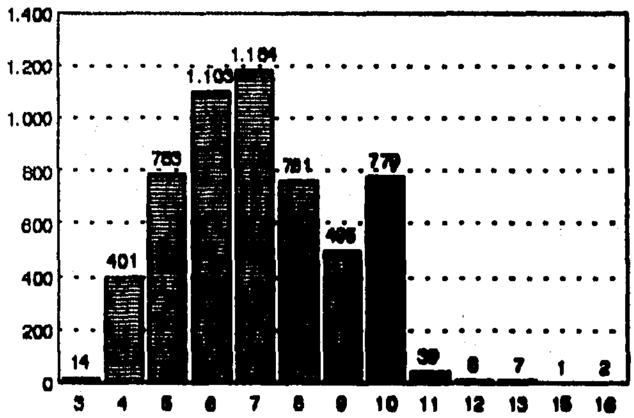
Histograma 2
Ultimo dígito del mes



Histograma 3
Ultimo dígito del día

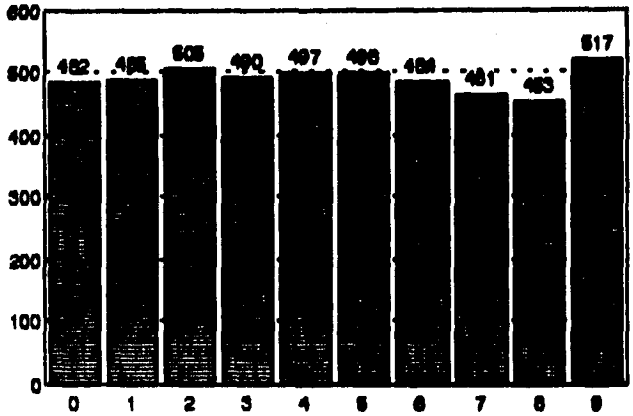


Histograma 4
Longitud del apellido paterno



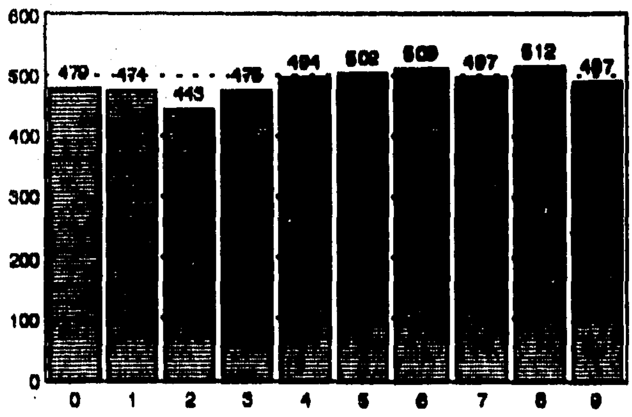
Histograma 5

R= [(último dígito del año) + (último dígito del mes)] mod 10



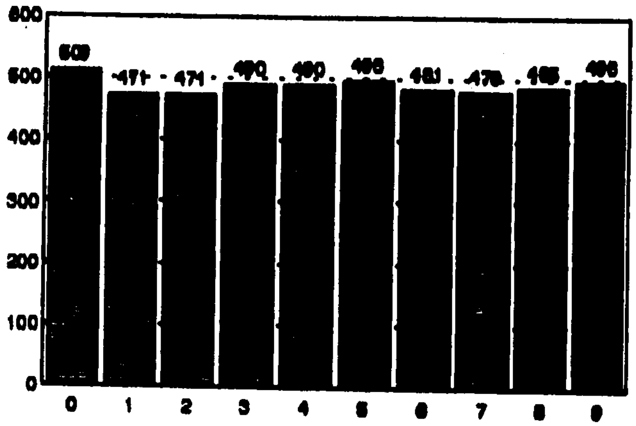
Histograma 6

R= [(último dígito del mes) + (último dígito del día)] mod 10



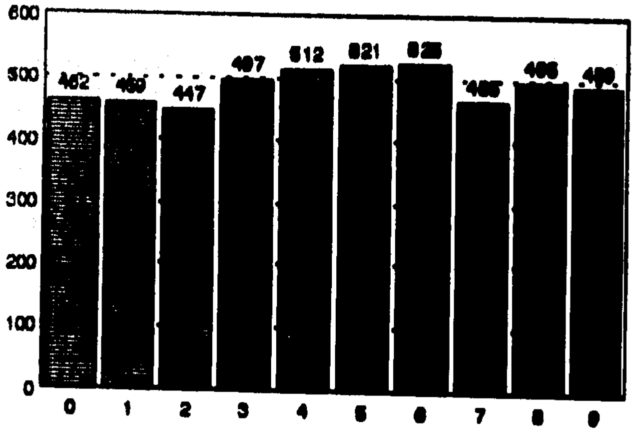
Histograma 7

R= [(último dígito del año) + (último dígito del día)] mod 10



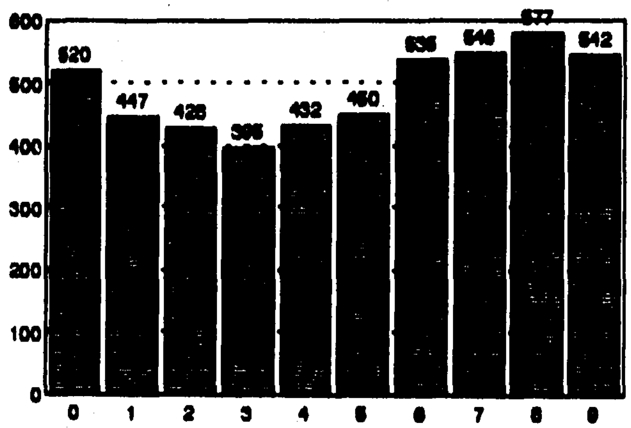
Histograma 8

R= [(longitud del apellido paterno) + (último digito del año)] mod 10



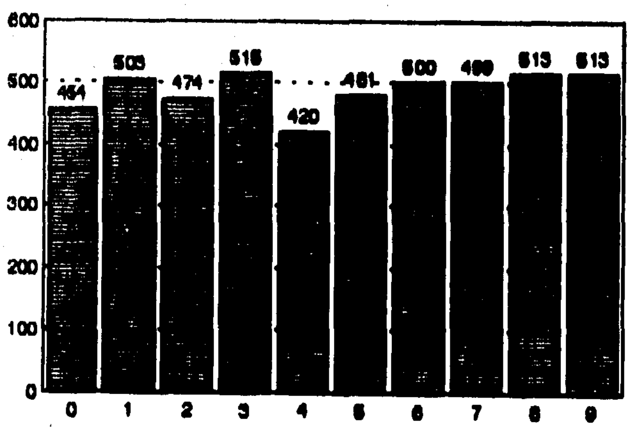
Histograma 9

R= [(longitud del apellido paterno)+(último digito del mes)] mod 10



Histograma 10

R= [(longitud del apellido paterno)+(último digito del dia)] mod 10



2.4.3 Pruebas ji-cuadrada de bondad de ajuste

Los datos para estas pruebas consisten de N observaciones independientes de una variable aleatoria X.
Las N observaciones son agrupadas dentro de c clases y se presentan en la forma de una tabla de contingencia 1 x c.

clase	1	2	...	c	Total
frecuencia	O_1	O_2	...	O_c	N

donde O_j denota el número de observaciones en la clase j para $j=1,2,\ldots,c$.

Las hipótesis son las siguientes.

H_0: $F(x) = F^*(x)$ para toda x
Vs
H_1: $F(x) \neq F^*(x)$ para al menos una x

donde F(x) es la función de distribución verdadera pero desconocida de X y $F^*(x)$ es una función de distribución especificada completamente.
En este caso $F^*(x)=(x+1)/10$ para $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ya que se quiere probar que la variable se distribuye uniformemente sobre los digitos de 0 a 9.

Estadística de prueba.
Sea p^*_j la probabilidad de que una observación aleatoria de la variable X caiga en la clase j bajo la suposición de que $F^*(x)$ es la función de distribución de X. Entonces para $j=1,2,\ldots,c$ definimos

$$E_j = N \cdot p^*_j$$

donde E_j representa el número esperado de observaciones en la clase j, cuando H_0 es verdadera.

La estadística de prueba T está dada por

$$T = \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_j-E_j)^2}{E_j}$$

o equivalentemente

$$T = \sum_{j=1}^{c} \frac{O_j^2}{E_j} - N$$

Regla de decisión.
La distribución aproximada de T válida para muestras grandes, es la distribución ji-cuadrada con (c-1) grados de libertad. Si se estiman parámetros de la distribución a partir de los datos de la muestra, se usaría un grado menos de libertad por cada parámetro estimado.

Por lo tanto la región de rechazo de tamaño aproximado α corresponde a valores de T mayores que el cuantil $(1-\alpha)$ de una variable aleatoria ji-cuadrada con c-1 grados de libertad (o con c-1-k grados de libertad donde k es el número de parámetros estimados).

Como en el grupo de pruebas de la sección anterior, se da el nivel crítico (el más pequeño nivel de significancia α con el cual se rechazaría la hipótesis H_0 con base al valor observado de la estadística de prueba T) para dar al lector mayor información de la evidencia experimental sobre la validez de H_0. El nivel de significancia α es la probabilidad de rechazar la hipótesis H_0 cuando ésta es cierta.

Los valores grandes de la estadística T indican mayor discrepancia entre las frecuencias esperadas y las observadas y llevan a rechazar H_0. Tales valores serían poco probables si H_0 fuera cierta, mientras que valores pequeños serían más probables cuando H_0 es cierta.
De modo que el nivel de probabilidad asociado al valor calculado de T sirve para ver si las frecuencias en los datos experimentales corresponden o no al modelo de probabilidad especificado en H_0.

Los resultados obtenidos con las sucesiones originales y con las sucesiones construidas con el método de fray Edvin se presentan en las páginas siguientes.

1) Ultimo dígito del año de nacimiento

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
496	476	489	477	475	460	454	487	514	544	4872

El valor de la estadística T es 12.819336 que corresponde al cuantil nivel p=0.81 de la distribución ji-cuadrada con 9 grados de libertad, siendo el nivel crítico 0.19. No se rechaza la hipótesis de uniformidad.

2) Ultimo dígito del mes de nacimiento

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
439	810	737	393	398	431	384	422	415	443	4872

El valor de la estadística T es 433.044922 el cual es mucho mayor que el cuantil de nivel 0.999 de la distribución ji-cuadrada con 9 grados de libertad, por lo cual se rechaza que esta variable se distribuya uniformemente.

3) Ultimo dígito del día de nacimiento

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
474	544	488	497	525	498	459	491	468	428	4872

El valor de la estadística T es 19.961914 que corresponde al cuantil 0.98 de la distribución ji-cuadrada con 9 grados de libertad. El nivel crítico aproximado es 0.02 por lo cual la evidencia experimental no es concluyente. Por ejemplo con un nivel de significancia de 0.05 se rechazaría H_0, pero con un nivel de significancia 0.01 no se rechazaría que la variable se distribuye uniformemente.

4) R= [(último dígito del año) + (último dígito del día)] mod 10

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
509	471	471	490	490	498	481	479	485	498	4872

El valor de la estadística T es 2.790527 el cual corresponde al cuantil 0.03 de la distribución ji-cuadrada con 9 grados de libertad, de modo que el nivel crítico aproximado es 0.97. El valor observado de T favorece la hipótesis de que R se distribuye uniformemente.

5) R= [(último dígito del año) + (último dígito del mes)] mod 10

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
482	485	505	490	497	498	484	461	453	517	4872

La estadística T vale 6.821777 que corresponde al cuantil 0.34 de la distribución ji-cuadrada con 9 grados de libertad. El nivel crítico aproximado es 0.66 de modo que no se rechaza la hipótesis de uniformidad.

6) R= [(último dígito del mes) + (último dígito del día)] mod 10

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
479	474	443	475	494	502	509	497	512	487	4872

El valor de la estadística de prueba T es 7.790527 que corresponde al cuantil 0.44 de la distribución ji-cuadrada con 9 grados de libertad. El nivel crítico aproximado es 0.56 por lo que no se rechaza que R se distribuya uniformemente.

7) R= [(longitud del apellido paterno) +
(último dígito del año)] mod 10

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
462	459	447	497	512	521	525	465	495	489	4872

El valor de la estadística T es 14.132812 correspondiente al cuantil 0.875 de la distribución ji-cuadrada con 9 grados de libertad. El nivel crítico aproximado es 0.125 por lo que no se rechaza que R se distribuya uniformemente.

8) R= [(longitud del apellido paterno) +
(último dígito del mes)] mod 10

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
520	447	428	395	432	450	535	546	577	542	4872

El valor de la estadística T es 73.763184 el cual es mayor que el cuantil 0.999 de la distribución ji-cuadrada con 9 grados de libertad. El nivel crítico es menor a 0.001 por lo que se rechaza que R se distribuya uniformemente.

9) R= [(longitud del apellido paterno) +
(último dígito del día)] mod 10

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
454	503	474	515	420	481	500	499	513	513	4872

La estadística de prueba vale 17.420410 que corresponde al cuantil 0.96 de la distribución ji-cuadrada con 9 grados de libertad. El nivel crítico aproximado es 0.04, de modo que la evidencia experimental no es concluyente; por ejemplo con un nivel de significancia de 0.05 se rechazaría H_0 pero con un nivel de significancia 0.01 no se rechazaría que R se distribuye uniformemente.

Comentario sobre las pruebas de bondad de ajuste.

Se puede observar que las pruebas estadísticas aplicadas a las sucesiones de realizaciones de las variables elegidas, concuerdan con los resultados teóricos del capítulo anterior. La variable aleatoria R=(X+Y) mod 10 se distribuye uniformemente cuando al menos una de las variables X ó Y se distribuye uniformemente en un rango de valores con cardinalidad múltiplo de 10 (por ejemplo el último dígito del año), pero cuando ninguna de las variables originales cumple con esa característica la variable R no siempre se distribuye uniformemente, como pudo observarse con las variables longitud del apellido paterno y último dígito del mes.

Capitulo 3
Aplicación en la construcción de tablas de digitos al azar

Con base a los resultados teóricos y experimentales de los capitulos anteriores se puede pensar que el método del fraile Edvin constituye un método para construir *nuevas* sucesiones R_n con distribución uniforme apartir de dos sucesiones X_n e Y_n que cumplen ciertas condiciones.

En efecto, dada una sucesión X_n que se distribuya uniformemente sobre un conjunto de enteros con cardinalidad múltiplo de 10, se puede obtener mediante la función $R=(X+Y) \bmod 10$, varias sucesiones R_n que se distribuyan uniformemente sobre los digitos de 0 a 9.

Puede servir cualquier sucesión de números Y_n que se tenga disponible y que sea independiente de la sucesión original X_n. Las sucesiones más sencillas que se pueden usar son las constantes, de la forma $Y_n=c$.

Sin embargo, se debe notar que a lo más se pueden obtener 10 sucesiones adicionales utilizando este tipo de sucesiones constantes. Como se mencionó en el capitulo 1, lo que importa en el resultado del cálculo no son las magnitudes de los números Y_n y X_n sino el residuo de la división por 10 de dichos números, es decir, $Y_n \bmod 10$ y $X_n \bmod 10$, de modo que $(X_n+Y_n) \bmod 10 = [(X_n \bmod 10) + (Y_n \bmod 10)] \bmod 10$.

En particular si $Y_n=c_1$ donde $c_1>9$ entonces $c_1=10q + c_2$ con $0\le c_2\le 9$

Sean $Y'_n = c_2$

$$R'_n = (X_n+Y'_n) \bmod 10 = (X_n+c_2) \bmod 10$$

Entonces
$$\begin{aligned}
R_n &= (X_n+Y_n) \bmod 10 \\
&= (X_n+c_1) \bmod 10 \\
&= (X_n+10q+c_2) \bmod 10 \\
&= (\ (X_n+c_2)+10q\ ) \bmod 10 \\
&= (\ (X_n+c_2) \bmod 10 + (10q) \bmod 10\ ) \bmod 10 \\
&= (\ (X_n+c_2) \bmod 10 + 0\ ) \bmod 10 \\
&= (X_n+c_2) \bmod 10 \\
&= R'_n
\end{aligned}$$

Esto muestra que cualquier sucesión R_n construida con una sucesión constante Y_n con valor mayor que 9 siempre corresponde a alguna sucesión R'_n construida con otra sucesión constante Y'_n con valor menor o igual a 9.

Por otra parte, si tales sucesiones de dígitos elaboradas con el método de fray Edvin se van a utilizar como tablas de dígitos al azar en aplicaciones tales como el muestreo, cálculos y simulaciones de fenómenos aleatorios, se necesita que tales sucesiones cumplan otros requerimientos además de tener distribución uniforme, de modo que pasen ciertas pruebas relacionadas con la idea que se tiene de la aleatoriedad.

3.1 Requerimientos que debe cumplir una tabla de dígitos al azar

En la naturaleza frecuentemente se encuentran situaciones o experimentos en los cuales se obtiene un resultado impredecible a partir de las condiciones en que se hace la observación o el experimento. Más aun los resultados que se hayan obtenido en observaciones anteriores no determinan el resultado que se obtendrá en la siguiente repetición del experimento.
Esta indeterminación es lo que se llama carácter aleatorio o azaroso del experimento o de los resultados del experimento.

Considérese un experimento o suceso aleatorio de la realidad denotado por E y un espacio de resultados Ω formado por los posibles resultados del experimento o suceso. Si se efectúan N repeticiones sucesivas de E, se obtiene una lista o sucesión de resultados $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N$

Estos resultados son aleatorios en el sentido cualitativo que se ha mencionado. Sin embargo los colectivos de resultados de sucesos aleatorios que son de mayor interés en la teoría matemática de probabilidad son aquellos que presentan regularidades de los resultados en el comportamiento global. Se dice que hay regularidad estadística cuando las proporciones de frecuencias de cada resultado $w \in \Omega$ tienden a valores constantes $P(w)$ cuando N se va haciendo más y más grande y estos valores $P(w)$ no difieren de una corrida a otra de N repeticiones del experimento.

Considérese un número M de corridas de ejecuciones del experimento E, donde cada una de estas corridas está formada por N observaciones sucesivas.
Dichas observaciones se pueden considerar como variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_N$ las cuales toman valores *particulares* $x_1, x_2, \ldots, x_N$ en cada corrida de *realizaciones* del experimento.

En este contexto de experimentos con regularidad estadística, se dice que el experimento E es aleatorio si las observaciones sucesivas (la primera, la segunda o la k-ésima) vistas como variables aleatorias, tienen la misma medida de probabilidad asociada a eventos o subconjuntos de Ω y son estadísticamente independientes.

Esta idea de un proceso aleatorio es la que está detrás de la definición de una sucesión aleatoria (y también de una muestra aleatoria) en estadística, la cual dice que es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Como se puede notar, esta definición se refiere a variables aleatorias más bien que a realizaciones particulares, sin embargo es común llamar sucesión aleatoria a un conjunto de realizaciones particulares de la variable aleatoria asociada al experimento aleatorio E.

Dada esta relación entre una sucesión de realizaciones y una variable aleatoria, cuando se dice que la sucesión tiene cierta distribución, por lo general se hace referencia a la distribución de la variable de la cual proviene dicha sucesión.

Otra definición de sucesión aleatoria propuesta por los matemáticos A. N. Kolmogorov y Martin Löf se refiere a que los valores en la sucesión aparecen sin ningún orden o diseño, de modo que no exista una fórmula de construcción para obtener r_k en términos de k y de $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$.#

En el presente trabajo no se aplicará esa definición, sino más bien se utilizarán pruebas relacionadas con la definición de sucesión aleatoria en estadística, que tienen que ver principalmente con la independencia entre elementos sucesivos y la distribución de probabilidad de la variable aleatoria de la cual se obtiene la sucesión.

Por otro lado, en adelante se hablará principalmente de sucesiones aleatorias con distribución uniforme, teniendo presente que a partir de éstas se pueden generar otras sucesiones con diferente distribución, las cuales se utilizan en muchas situaciones prácticas.

Una discusión detallada de esta y otras definiciones está fuera del ámbito del presente trabajo pero se puede encontrar en la obra de D.E. Knut "The art of computer programming"

Una de las características más importantes que tienen las sucesiones aleatorias uniformes de tamaño N bastante grandes es la equidistribución por grupos de k términos de la sucesión.
Esta propiedad consiste en que los puntos o vectores de la forma $(X_i,X_{i+1},\ldots,X_{i+k-1})$ formados con los elementos contiguos de la sucesión estén equirrepartidos, es decir, que se distribuyen uniformemente sobre espacios de resultados de la forma Ω^k.
Debido a la independencia entre las observaciones, se esperaría que una sucesión aleatoria infinita fuera completamente equidistribuida, es decir, equidistribuida para cualquier k natural.

En la práctica se tienen sucesiones o listas finitas de resultados, las cuales se analizan con técnicas estadísticas en busca de evidencia de que el proceso que generó cada sucesión es aleatorio.

Al aplicar dichas técnicas, se pueden cometer errores al juzgar si una sucesión finita es o no aleatoria basándose en las frecuencias observadas en los datos.
Por ejemplo si una variable se distribuye uniformemente, cualquier valor en el espacio de resultados es igualmente probable, de modo que una sucesión formada únicamente con ceros realmente puede provenir de un suceso aleatorio.

Sin embargo tal sucesión ocurriría con muy poca frecuencia y se espera que en general las proporciones de frecuencias observadas correspondan al modelo de probabilidad del suceso aleatorio observado.
Por esta razón cuando se rechaza que una sucesión se distribuya uniformemente debido a que las frecuencias observadas y esperadas difieren significativamente, se está tomando la decisión correcta en la mayoría de los casos.
Con el objeto de tener mayor información sobre la aleatoriedad de las sucesiones de dígitos del capítulo anterior, se efectuaron pruebas estadísticas a las parejas y ternas para investigar si éstas también se distribuyen uniformemente.

3.2 Pruebas adicionales de bondad de ajuste para las parejas y las ternas.

La prueba estadística que se utilizará en esta sección es básicamente la prueba de bondad de ajuste ji-cuadrada que se describió en el capítulo anterior. Sin embargo en esta ocasión las variables aleatorias de interés serán vectores P y T cuyas ocurrencias son de la forma $P_i=(X_i,X_{i+1})$ y $T_i=(X_i,X_{i+1},X_{i+2})$ para $1\leq i\leq N$, donde X representa una de las variables del capítulo anterior.

Para tener el mismo número de ocurrencias de P y T que de X, se toman $P_N=(X_N,X_0)$, $T_{N-1}=(X_{N-1},X_N,X_0)$ y $T_N=(X_N,X_0,X_1)$.

Se probarán las hipótesis de que P se distribuye uniformemente en D^2 y que T se distribuye uniformemente en D^3 donde $D=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. En cuanto a la estadística de prueba T que sigue una distribución ji-cuadrada se debe notar lo siguiente en cuanto al número de grados de libertad.

Cada ocurrencia de la variable aleatoria original X aparece N veces como primera y segunda coordenada del vector P, mientras que en el caso del vector T cada ocurrencia de X aparece N veces como primera, segunda y tercera coordenada. De modo que se deben cumplir ciertas restricciones lineales.

La primera restricción es que el total de frecuencias suma N. Por otro lado en el caso de las parejas, la suma de frecuencias en que la primera coordenada vale k será igual a la suma de frecuencias en que la segunda coordenada vale k y esto para cualquier $k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. De modo que se tienen 11 restricciones de las cuales sólo 10 son linealmente independientes, es decir, una de ellas es consecuencia de las demás.

En el caso de las ternas además de las restricciones anteriores se tiene que la suma de las frecuencias en que la primera coordenada vale k es igual a la suma de las frecuencias en que la tercera coordenada vale k para $k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. De estas últimas condiciones sólo 9 son linealmente independientes ya que una es consecuencia de la primer restricción sobre la frecuencia total N. En total se tienen 19 restricciones linealmente independientes para las ternas.

De modo que para las parejas el número de grados de libertad será 90 y para las ternas será 981. Las frecuencias esperadas para cada categoría en las parejas es 48.72 y para cada categoría en las ternas es 4.872.

Una tabla de valores aproximados de la distribución ji-cuadrada para 90 y 981 grados de libertad se encuentra en el apéndice A.

A continuación se presentan los resultados de las pruebas para las parejas y las ternas tomadas de las sucesiones del capítulo anterior.

1) último dígito del año de nacimiento

TABLA 3.1 Frecuencias por parejas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	55	54	44	45	47	49	50	49	48	55
1	50	55	42	49	46	40	45	41	64	44
2	52	45	48	61	52	57	41	43	44	46
3	57	57	43	34	47	46	45	44	54	50
4	43	42	55	43	53	52	39	56	37	55
5	42	40	46	51	44	48	41	48	48	52
6	45	36	55	34	52	35	50	44	53	50
7	50	47	53	51	40	40	47	60	48	51
8	38	50	54	52	39	44	47	53	66	71
9	64	50	49	57	55	49	49	49	52	70

El valor de la estadística T es 104.765625 que corresponde al cuantil 0.86 de la distribución ji-cuadrada con 90 grados de libertad. El nivel crítico aproximado es 0.14. No se rechaza la hipótesis de uniformidad.

2) último dígito del mes de nacimiento

TABLA 3.2 Frecuencias por parejas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	42	82	62	38	34	42	35	37	34	33
1	70	130	145	73	60	66	71	70	62	63
2	74	114	107	59	60	69	53	67	69	65
3	32	63	59	29	30	31	40	33	36	40
4	26	85	62	39	27	33	22	35	28	41
5	38	85	69	33	30	34	32	31	40	39
6	35	57	44	38	34	38	30	37	36	35
7	37	66	67	25	35	34	26	43	43	46
8	41	56	63	30	37	38	37	33	42	38
9	44	72	59	29	51	46	38	36	25	43

El valor de la estadística T es 990.848145 el cual es mucho mayor que el cuantil 0.999 de la distribución ji-cuadrada con 90 grados de libertad, por lo cual se rechaza que esta variable se distribuya uniformemente.

3) último digito del día de nacimiento

TABLA 3.3 Frecuencias por parejas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	46	47	51	46	48	42	43	48	58	45
1	46	64	57	58	65	57	45	56	51	45
2	61	60	44	34	46	43	44	46	56	54
3	47	54	41	48	57	43	50	62	56	39
4	50	65	48	63	52	58	57	50	42	40
5	42	58	60	45	58	51	43	57	44	40
6	53	45	47	63	36	53	39	47	42	34
7	43	52	49	50	56	53	47	43	51	47
8	47	53	53	50	51	52	48	40	29	45
9	39	46	38	40	56	46	43	42	39	39

El valor de la estadística T es 115.355957 que corresponde al cuantil 0.96 de la distribución ji-cuadrada con 90 grados de libertad. El nivel crítico aproximado es 0.04 por lo cual la evidencia experimental no es concluyente. Nótese que con un nivel de significancia de 0.05 se rechaza HO pero con un nivel de significancia 0.01 no se rechazaría que la variable se distribuye uniformemente.

4) R=(último digito del año)+(último digito del día) mod 10

TABLA 3.4 Frecuencias por parejas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	69	48	39	45	51	59	45	46	45	62
1	46	48	43	44	56	42	48	54	46	44
2	50	40	48	43	45	41	48	55	55	46
3	67	47	50	51	45	47	51	52	31	49
4	30	49	58	45	59	50	47	57	48	47
5	59	53	49	56	41	53	46	45	43	53
6	53	40	41	50	52	51	46	45	52	51
7	40	52	48	46	52	49	52	36	54	50
8	45	45	43	52	49	54	46	42	60	49
9	50	49	52	58	40	52	52	47	51	47

El valor de la estadística de prueba T es 81.818359 que corresponde al cuantil 0.28 de la distribución ji-cuadrada con 90 grados de libertad. El nivel crítico aproximado es 0.72 por lo que no se rechaza que la variable se distribuya uniformemente.

5) R=(último digito del año)+(último digito del mes) mod 10

TABLA 3.5 Frecuencias por parejas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	54	49	51	47	42	48	46	49	44	52
1	55	45	49	50	48	46	57	44	45	46
2	54	50	50	59	45	63	50	42	43	49
3	47	58	51	45	53	49	51	45	48	43
4	42	46	42	51	59	54	51	42	53	57
5	35	63	54	41	53	47	46	59	42	58
6	52	42	49	51	54	50	44	46	37	59
7	53	42	47	41	50	50	40	57	38	43
8	32	40	54	47	46	39	45	36	55	59
9	58	50	58	58	47	52	54	41	48	51

El valor de la estadistica de prueba T es 81.900391 que corresponde al cuantil 0.28 de la distribución ji-cuadrada con 90 grados de libertad. El nivel critico aproximado es 0.72 por lo que no se rechaza la hipótesis de uniformidad.

6) R=(último digito del mes)+(último digito del dia) mod 10

TABLA 3.6 Frecuencias por parejas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	47	50	32	47	59	38	53	38	53	62
1	48	45	45	37	41	55	56	51	45	51
2	42	33	47	49	41	45	54	44	46	42
3	43	47	49	43	50	59	44	49	44	47
4	48	58	49	43	43	58	33	61	51	50
5	58	54	44	55	43	42	44	49	65	48
6	49	51	50	52	42	57	54	54	46	54
7	48	50	37	40	65	56	56	44	53	48
8	52	45	46	55	53	51	63	47	58	42
9	44	41	44	54	57	41	52	60	51	43

El valor de la estadistica de prueba T es 98.033691 que corresponde al cuantil 0.74 de la distribución ji-cuadrada con 90 grados de libertad. El nivel critico aproximado es 0.26 por lo que no se rechaza la hipótesis de uniformidad.

7) R=(longitud del apellido paterno)+(último dígito del año) mod 10

TABLA 3.7 Frecuencias por parejas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	44	47	42	50	36	50	49	34	52	58
1	37	37	39	52	55	47	51	46	51	44
2	24	51	43	48	59	39	46	53	42	42
3	48	41	43	45	55	54	57	59	47	48
4	51	49	55	54	39	68	46	45	53	52
5	69	39	45	54	53	56	57	45	54	49
6	60	52	50	43	58	49	58	49	53	53
7	31	52	40	61	47	41	48	46	54	45
8	44	49	52	46	53	55	53	39	46	58
9	54	42	38	44	57	62	60	49	43	40

El valor de la estadistica de prueba T es 116.75097 que corresponde al cuantil 0.97 de la distribución ji-cuadrada con 90 grados de libertad. El nivel crítico aproximado es 0.03 por lo que la evidencia experimental no es concluyente. Mientras que con un nivel de significancia de 0.05 se rechaza H_0 , con un nivel de significancia 0.01 no se rechazaría que la variable R se distribuye uniformemente.

8) R=(longitud del apellido paterno)+(último dígito del mes) mod 10

TABLA 3.8 Frecuencias por parejas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	59	39	46	39	51	45	48	67	61	65
1	54	41	36	31	42	35	52	48	52	56
2	53	36	34	32	41	46	40	55	46	45
3	41	41	30	34	35	38	46	43	42	45
4	50	36	44	44	40	40	44	42	52	40
5	42	40	47	33	38	51	51	50	46	52
6	50	56	43	48	52	42	57	60	65	62
7	56	57	48	37	52	50	63	56	70	57
8	59	56	54	56	51	46	65	58	70	62
9	56	45	46	41	30	57	69	67	73	58

El valor de la estadistica T es 204.848633 el cual es mucho mayor que el cuantil de nivel 0.999 de la distribución ji-cuadrada con 90 grados de libertad. El nivel crítico es menor que 0.001 por lo cual se rechaza que esta variable se distribuya uniformemente.

9) R=(longitud del apellido paterno)+(último dígito del día) mod 10

TABLA 3.9 Frecuencias por parejas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	39	43	41	57	43	44	46	57	45	39
1	56	48	49	59	48	46	46	53	38	60
2	43	52	44	43	33	46	49	40	60	64
3	45	67	42	53	56	44	43	59	53	53
4	46	44	37	45	27	40	40	55	36	50
5	49	50	41	61	35	59	46	45	47	48
6	47	58	56	42	41	58	57	38	54	49
7	47	48	58	52	37	46	57	44	58	52
8	46	53	53	48	49	51	52	49	64	48
9	36	40	53	55	51	47	64	59	58	50

El valor de la estadística de prueba T es 121.555664 que corresponde al cuantil 0.985 de la distribución ji-cuadrada con 90 grados de libertad. El nivel crítico aproximado es 0.015. La evidencia experimental no es concluyente ya que con un nivel de significancia de 0.05 se rechaza H_0 , pero con un nivel de significancia 0.01 no se rechazaría que la variable R se distribuye uniformemente.

TABLA 3.10

Frecuencias por ternas del último digito del año

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 , 0	8	5	6	5	4	8	4	4	4	7
0 , 1	9	5	4	5	7	4	5	2	8	5
0 , 2	5	3	5	4	5	7	4	3	4	4
0 , 3	2	7	6	4	6	2	8	4	4	2
0 , 4	5	7	6	2	6	3	5	5	1	7
0 , 5	7	3	6	10	4	6	1	4	3	5
0 , 6	7	4	5	5	4	4	11	2	6	2
0 , 7	6	1	4	1	3	4	9	8	5	8
0 , 8	3	9	4	3	3	7	5	8	2	4
0 , 9	5	8	4	8	6	5	4	3	4	8
1 , 0	8	6	2	4	6	5	3	4	4	8
1 , 1	7	5	7	5	6	5	4	2	8	6
1 , 2	2	6	4	4	10	6	2	4	2	2
1 , 3	5	6	6	2	5	4	2	5	7	7
1 , 4	4	2	5	4	5	7	0	9	4	6
1 , 5	4	7	2	1	7	5	3	4	4	3
1 , 6	5	6	5	2	6	3	4	4	4	6
1 , 7	6	6	5	4	5	0	4	1	5	5
1 , 8	2	3	8	6	6	5	7	9	9	9
1 , 9	5	3	6	4	3	5	4	5	3	6
2 , 0	5	5	9	5	4	5	5	6	3	5
2 , 1	3	8	6	3	5	3	3	5	7	2
2 , 2	4	4	6	5	3	7	4	4	4	7
2 , 3	6	13	0	3	10	2	8	4	11	4
2 , 4	3	3	9	7	6	5	5	3	4	7
2 , 5	6	7	10	5	4	5	3	5	5	7
2 , 6	2	2	7	4	3	1	2	3	8	9
2 , 7	4	6	3	6	4	2	3	5	6	4
2 , 8	4	3	1	6	2	4	4	7	5	8
2 , 9	6	6	1	5	3	5	6	4	5	5
3 , 0	7	6	1	6	9	8	4	5	6	5
3 , 1	5	6	7	2	3	5	8	9	5	7
3 , 2	5	0	6	4	6	3	3	3	8	5
3 , 3	3	5	3	3	2	3	6	3	5	1
3 , 4	7	5	6	3	4	7	4	4	5	2
3 , 5	3	1	4	5	7	4	6	4	4	8
3 , 6	3	2	7	2	7	3	5	6	7	3
3 , 7	4	6	4	7	2	5	5	4	1	6
3 , 8	3	5	13	8	2	1	3	6	6	7
3 , 9	6	3	3	6	9	3	4	6	6	4
4 , 0	4	2	4	3	3	4	7	7	6	3
4 , 1	2	8	2	9	3	2	3	5	7	1
4 , 2	6	7	2	9	3	6	7	5	5	5
4 , 3	5	1	3	5	3	4	4	6	6	6
4 , 4	4	4	7	5	6	5	7	7	2	6
4 , 5	7	2	6	2	2	6	5	10	8	4
4 , 6	4	3	4	4	5	7	2	5	1	4
4 , 7	6	1	9	8	6	6	3	6	5	6
4 , 8	4	4	2	4	3	1	4	6	4	5
4 , 9	10	2	1	4	6	6	6	4	5	11
5 , 0	5	6	3	5	4	4	2	4	3	6
5 , 1	4	5	3	5	4	5	5	3	5	1
5 , 2	4	4	3	9	6	3	2	7	4	4
5 , 3	6	6	9	1	5	9	1	8	3	3
5 , 4	5	4	3	4	5	8	2	5	3	5
5 , 5	3	3	2	4	5	7	7	3	7	7
5 , 6	4	6	3	2	3	5	5	3	2	8
5 , 7	3	4	6	4	8	6	3	6	2	6
5 , 8	2	8	5	3	4	6	2	4	6	8
5 , 9	6	3	3	3	8	7	6	5	5	6
6 , 0	2	6	5	4	5	6	5	3	3	6
6 , 1	6	2	2	4	1	2	5	3	7	4
6 , 2	8	5	10	6	1	4	4	4	7	6
6 , 3	6	3	2	2	4	4	2	5	4	2
6 , 4	3	6	8	6	5	5	5	3	4	7
6 , 5	0	3	3	9	3	3	2	3	4	5
6 , 6	10	6	4	3	6	2	9	2	4	4
6 , 7	3	5	6	7	2	1	5	4	7	4
6 , 8	4	6	2	5	6	7	5	2	8	8
6 , 9	5	5	5	3	0	5	5	6	7	9
7 , 0	6	5	3	7	6	2	6	4	6	5
7 , 1	3	6	5	5	4	3	4	5	5	7
7 , 2	5	7	4	9	5	4	5	7	1	6
7 , 3	4	6	2	5	2	7	7	3	6	9
7 , 4	3	3	3	5	6	3	3	4	3	7
7 , 5	4	5	3	4	5	5	2	3	4	5
7 , 6	2	4	7	3	7	4	3	6	7	4
7 , 7	7	3	7	6	4	3	4	13	7	6
7 , 8	4	2	3	6	5	7	7	1	8	5
7 , 9	3	6	7	9	5	3	4	3	4	7
8 , 0	4	4	8	1	2	2	5	7	4	1
8 , 1	6	3	1	9	5	6	2	5	7	6
8 , 2	5	3	4	6	7	11	7	4	3	4
8 , 3	11	5	5	5	5	7	3	2	2	7
8 , 4	4	4	4	3	6	3	3	4	6	2
8 , 5	2	6	5	4	3	4	7	6	4	3
8 , 6	3	0	8	4	6	5	4	5	6	6
8 , 7	8	7	5	3	3	7	7	7	3	3
8 , 8	8	6	9	8	4	3	3	6	10	9
8 , 9	9	7	10	5	7	5	3	10	6	9
9 , 0	6	9	3	5	4	5	9	5	9	9
9 , 1	5	7	5	2	8	5	6	2	5	5
9 , 2	8	6	4	5	6	6	3	2	6	3
9 , 3	9	5	7	4	5	4	4	4	6	9
9 , 4	5	4	4	4	4	6	5	12	5	6
9 , 5	6	3	5	7	4	3	5	6	5	5
9 , 6	5	3	5	5	5	1	5	8	8	4
9 , 7	3	8	4	5	3	6	4	6	7	3
9 , 8	4	4	7	3	4	3	7	4	8	8
9 , 9	9	7	9	10	8	5	7	3	7	5

TABLA 3.11
Frecuencias por ternas del último digito del mes

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 , 0	9	6	4	6	3	3	3	2	2	4
0 , 1	8	15	16	7	4	10	5	5	3	9
0 , 2	4	8	14	9	4	5	2	7	6	3
0 , 3	2	5	6	7	2	5	3	2	2	4
0 , 4	3	6	4	5	2	1	6	1	1	5
0 , 5	4	8	3	5	1	6	6	3	1	5
0 , 6	2	6	2	3	4	5	4	3	4	2
0 , 7	3	6	7	2	2	2	3	4	5	3
0 , 8	3	3	9	1	1	3	3	2	4	5
0 , 9	3	7	5	2	2	3	5	2	1	3
1 , 0	6	17	12	1	6	7	4	8	6	3
1 , 1	10	15	25	13	7	8	16	12	12	12
1 , 2	16	31	15	7	19	13	11	8	19	6
1 , 3	5	11	11	11	7	5	9	5	3	6
1 , 4	6	13	10	5	2	7	2	4	5	6
1 , 5	8	13	13	5	6	6	1	2	8	4
1 , 6	4	7	10	10	8	5	7	5	7	8
1 , 7	5	11	11	3	3	7	4	7	11	8
1 , 8	8	6	9	3	6	6	5	6	10	3
1 , 9	5	12	11	5	5	7	5	7	0	6
2 , 0	8	13	9	5	8	10	5	4	4	8
2 , 1	8	17	21	11	8	10	13	10	8	8
2 , 2	8	19	20	6	7	8	9	8	8	14
2 , 3	4	7	9	3	7	7	6	7	8	1
2 , 4	4	17	5	4	6	3	3	4	6	8
2 , 5	4	12	16	3	4	3	2	7	8	10
2 , 6	7	4	6	5	3	4	3	8	8	5
2 , 7	8	14	12	4	5	3	3	7	4	7
2 , 8	7	8	14	5	3	2	9	7	7	7
2 , 9	4	12	9	5	4	4	10	4	6	7
3 , 0	3	5	8	2	1	2	4	3	1	3
3 , 1	6	7	17	5	5	2	10	2	8	1
3 , 2	4	7	3	6	6	12	5	6	4	6
3 , 3	2	4	3	2	3	2	2	4	1	6
3 , 4	2	3	2	4	2	4	2	6	1	4
3 , 5	4	4	8	4	0	0	4	3	2	2
3 , 6	7	5	6	3	4	2	3	4	4	2
3 , 7	1	7	5	4	4	3	2	1	2	4
3 , 8	6	3	7	1	4	6	3	1	3	2
3 , 9	6	5	4	3	3	4	3	5	4	3
4 , 0	1	5	3	5	3	1	3	1	3	1
4 , 1	4	16	14	4	10	8	5	10	8	6
4 , 2	9	5	12	4	7	2	3	4	7	9
4 , 3	1	11	6	0	4	0	5	3	6	3
4 , 4	3	5	4	0	4	2	1	4	2	2
4 , 5	3	5	5	4	5	3	1	1	2	4
4 , 6	0	4	3	3	1	2	0	3	2	4
4 , 7	4	8	5	2	3	3	1	2	3	4
4 , 8	3	7	3	3	2	1	2	0	4	3
4 , 9	3	6	8	4	5	5	3	3	3	1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5 , 0	3	5	7	2	5	4	2	2	3	5
5 , 1	6	17	11	9	6	5	8	12	6	5
5 , 2	6	6	14	8	3	6	4	10	6	6
5 , 3	2	6	7	1	0	2	2	4	4	5
5 , 4	2	6	6	2	3	2	3	2	1	3
5 , 5	3	5	5	5	3	4	2	4	2	1
5 , 6	1	5	4	3	2	5	5	2	1	4
5 , 7	2	1	4	0	4	4	0	9	5	2
5 , 8	2	6	2	3	6	3	4	3	4	7
5 , 9	4	3	6	1	4	9	2	2	4	4
6 , 0	3	6	6	2	4	4	2	5	1	2
6 , 1	12	7	11	3	2	5	5	5	2	5
6 , 2	4	5	8	3	4	4	3	6	4	3
6 , 3	3	12	7	1	2	1	4	0	5	3
6 , 4	1	7	10	4	0	2	1	2	1	6
6 , 5	1	11	4	3	2	3	4	4	2	4
6 , 6	3	4	3	5	4	5	1	2	1	2
6 , 7	7	4	5	3	5	1	4	3	3	2
6 , 8	4	5	4	4	4	3	1	6	1	4
6 , 9	3	5	1	4	5	6	1	3	0	7
7 , 0	1	8	2	5	2	3	3	3	7	3
7 , 1	5	10	9	6	7	6	4	7	6	6
7 , 2	8	12	6	9	3	8	7	4	2	8
7 , 3	3	3	1	3	1	2	3	2	3	4
7 , 4	1	6	6	4	4	4	1	4	4	1
7 , 5	5	6	2	0	4	4	5	3	2	3
7 , 6	3	6	2	1	1	5	3	2	3	0
7 , 7	2	5	4	6	4	3	3	6	4	6
7 , 8	2	8	4	5	6	4	4	4	3	3
7 , 9	4	11	4	2	11	1	2	4	2	5
8 , 0	6	8	6	1	1	4	7	5	2	1
8 , 1	4	9	7	9	5	7	2	4	3	6
8 , 2	12	6	7	3	2	8	5	10	7	3
8 , 3	3	2	7	1	0	4	3	1	3	6
8 , 4	1	10	6	5	2	4	0	4	3	2
8 , 5	5	10	6	2	2	2	2	1	4	4
8 , 6	5	7	5	4	1	3	3	4	1	4
8 , 7	1	5	8	0	2	1	4	3	1	8
8 , 8	2	6	8	2	5	5	6	3	4	1
8 , 9	3	5	6	2	7	3	2	2	3	5
9 , 0	2	9	5	9	1	4	2	4	5	3
9 , 1	7	17	14	6	6	5	3	3	6	5
9 , 2	3	15	8	4	5	3	4	4	6	7
9 , 3	7	2	2	0	4	3	3	5	1	2
9 , 4	3	12	9	6	2	4	3	4	4	4
9 , 5	1	11	7	2	3	3	5	3	9	2
9 , 6	3	9	3	1	6	2	1	4	5	4
9 , 7	4	5	6	1	3	7	2	1	5	2
9 , 8	4	4	3	3	0	5	0	1	2	3
9 , 9	9	6	5	1	5	4	5	4	2	2

TABLA 3.12
Frecuencias por ternas del último dígito del día

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	4	7	5	6	4	4	3	3	5	5
0,1	6	6	2	3	5	4	5	2	9	5
0,2	2	9	3	6	4	7	1	5	8	6
0,3	3	5	3	5	4	3	5	5	5	8
0,4	9	2	5	7	4	5	4	2	3	7
0,5	5	3	5	1	8	4	5	6	2	3
0,6	2	6	5	10	3	4	4	2	3	4
0,7	6	4	3	5	5	5	6	3	5	6
0,8	8	5	5	10	6	6	5	1	6	6
0,9	6	4	0	2	10	4	5	2	7	5
1,0	4	6	10	6	4	4	1	2	4	5
1,1	7	10	6	7	9	6	1	6	7	5
1,2	2	7	4	9	6	2	8	6	6	7
1,3	7	4	5	5	9	8	5	7	5	3
1,4	5	7	11	8	7	10	5	8	1	3
1,5	6	6	7	6	9	7	4	6	3	3
1,6	5	2	5	9	3	4	4	7	4	2
1,7	4	4	8	7	6	6	6	3	5	7
1,8	5	7	5	6	5	6	5	2	4	6
1,9	2	9	4	2	4	9	1	5	3	6
2,0	7	8	4	6	7	4	7	6	8	4
2,1	3	7	8	4	7	6	8	7	6	4
2,2	12	1	8	0	5	5	5	2	5	1
2,3	3	3	3	4	4	1	4	6	5	1
2,4	4	5	4	7	5	7	2	4	4	4
2,5	3	8	2	5	8	8	1	4	2	2
2,6	4	4	3	4	3	3	9	8	3	3
2,7	2	8	6	2	8	4	2	4	4	6
2,8	5	4	3	4	9	4	13	3	5	6
2,9	3	9	0	3	10	8	4	4	5	8
3,0	6	1	3	4	5	5	5	7	6	5
3,1	3	6	5	6	10	6	5	8	2	3
3,2	7	4	3	2	5	3	3	4	3	7
3,3	5	8	4	8	6	5	3	6	3	0
3,4	6	3	4	2	3	9	15	7	4	4
3,5	6	4	2	6	4	1	2	9	5	4
3,6	9	5	4	9	5	5	0	2	5	6
3,7	1	5	5	9	10	6	7	3	6	10
3,8	5	7	2	9	5	6	7	6	4	5
3,9	4	4	2	6	2	4	8	5	1	3
4,0	3	6	5	8	4	6	4	7	5	2
4,1	3	7	11	10	5	8	3	5	7	6
4,2	5	5	4	0	4	5	2	10	8	5
4,3	7	5	7	5	5	8	6	7	8	5
4,4	1	5	5	6	7	7	2	6	8	5
4,5	5	6	8	2	6	5	6	4	8	8
4,6	6	6	6	3	3	8	5	7	8	5
4,7	6	8	9	3	5	5	4	4	4	2
4,8	4	4	7	3	4	4	4	6	3	3
4,9	3	2	5	5	7	2	3	5	3	5
5,0	4	5	3	1	4	5	6	3	9	2
5,1	5	4	8	5	8	7	3	8	4	6
5,2	6	10	5	5	6	3	3	6	7	9
5,3	5	5	2	1	4	1	7	4	10	6
5,4	5	11	2	12	4	5	9	3	5	2
5,5	6	5	6	7	6	3	3	6	3	6
5,6	6	2	6	6	2	8	4	6	3	0
5,7	3	6	5	9	8	8	5	4	6	3
5,8	6	4	11	3	2	4	2	4	2	6
5,9	5	8	3	2	4	4	6	5	1	2
6,0	2	7	5	5	6	5	6	5	6	6
6,1	6	2	3	7	6	4	5	6	4	2
6,2	4	6	6	2	5	3	6	3	4	8
6,3	6	7	6	3	6	7	6	13	4	5
6,4	1	3	3	6	2	7	4	4	2	4
6,5	2	7	11	4	4	4	7	8	5	1
6,6	4	5	5	3	4	5	2	1	6	4
6,7	7	5	4	5	3	4	5	5	6	3
6,8	5	10	4	3	4	4	2	5	2	3
6,9	4	3	2	6	2	5	2	5	2	3
7,0	3	3	4	3	5	4	2	7	5	7
7,1	4	7	2	8	6	5	6	6	3	5
7,2	7	10	5	3	4	5	6	3	4	2
7,3	2	6	3	8	3	4	5	7	9	3
7,4	5	10	4	5	5	5	4	7	7	4
7,5	5	5	4	3	7	4	5	6	6	8
7,6	3	5	3	8	6	5	4	7	4	2
7,7	5	2	4	2	2	7	4	6	7	4
7,8	6	5	4	5	5	12	2	9	1	2
7,9	3	2	9	6	6	1	6	5	6	3
8,0	7	3	6	5	6	3	6	4	5	2
8,1	6	8	6	2	4	5	6	5	6	5
8,2	8	5	4	2	4	5	7	2	9	7
8,3	3	5	4	3	9	3	9	4	6	4
8,4	7	11	3	2	7	3	9	4	3	2
8,5	3	6	7	8	6	7	2	7	3	3
8,6	8	3	9	4	6	3	3	4	3	5
8,7	5	5	3	4	6	2	4	5	3	3
8,8	1	2	3	6	5	4	1	1	1	5
8,9	2	2	9	3	4	7	5	3	7	3
9,0	6	1	6	2	3	2	3	4	5	7
9,1	3	7	6	6	5	6	3	3	3	4
9,2	8	3	2	5	3	5	3	5	2	2
9,3	6	6	4	6	7	3	0	3	1	4
9,4	7	8	7	8	8	0	3	5	5	5
9,5	1	8	8	3	0	8	8	1	7	2
9,6	6	7	1	7	1	8	4	3	3	3
9,7	4	5	2	4	3	6	4	6	5	3
9,8	2	5	9	1	6	2	7	3	1	3
9,9	7	3	4	5	7	2	3	3	4	1

TABLA 3.13 Frecuencias por ternas de
R=[(último digito del año)+(último digito del dia)] mod 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 , 0	8	7	4	5	8	8	6	11	4	8
0 , 1	4	1	6	4	3	4	5	10	7	4
0 , 2	3	4	3	2	3	3	3	7	8	3
0 , 3	5	4	8	6	2	3	3	2	7	5
0 , 4	2	6	9	1	8	4	6	3	8	4
0 , 5	5	5	5	7	8	8	3	5	5	8
0 , 6	5	4	6	5	9	1	3	2	3	7
0 , 7	5	0	6	6	5	4	6	4	3	7
0 , 8	0	6	3	5	5	3	4	2	8	9
0 , 9	7	8	5	9	1	7	6	4	8	7
1 , 0	5	5	4	2	4	7	6	3	3	7
1 , 1	3	4	3	5	7	6	6	4	6	4
1 , 2	4	2	5	7	6	4	4	3	4	4
1 , 3	8	8	2	6	1	4	3	5	1	6
1 , 4	2	6	6	7	8	5	7	5	2	8
1 , 5	5	6	4	1	2	5	6	2	4	7
1 , 6	5	3	4	3	2	7	10	3	2	9
1 , 7	3	4	6	4	11	7	3	3	7	6
1 , 8	6	0	4	10	3	4	8	2	5	4
1 , 9	3	3	4	6	5	4	4	9	4	2
2 , 0	7	0	8	6	6	4	5	4	6	4
2 , 1	6	3	1	4	6	2	5	6	5	2
2 , 2	3	4	7	6	6	4	6	1	6	5
2 , 3	7	4	4	3	4	5	6	3	2	5
2 , 4	1	6	4	5	5	6	4	4	6	4
2 , 5	4	5	3	7	2	4	6	3	3	4
2 , 6	6	2	6	7	2	6	6	5	5	3
2 , 7	2	8	3	10	6	2	8	1	9	6
2 , 8	4	6	7	7	10	7	5	4	1	4
2 , 9	6	2	6	6	3	7	6	3	1	6
3 , 0	13	8	1	3	7	10	6	6	5	8
3 , 1	3	7	5	7	4	5	6	4	2	4
3 , 2	4	6	3	4	3	5	6	7	5	7
3 , 3	5	4	7	6	5	4	8	8	2	2
3 , 4	1	2	8	0	8	7	4	4	7	4
3 , 5	4	3	7	4	0	5	6	6	6	6
3 , 6	3	4	5	2	7	6	8	6	5	5
3 , 7	3	7	4	6	7	4	5	3	8	5
3 , 8	4	5	2	1	3	4	2	3	1	6
3 , 9	3	5	2	4	7	8	6	6	3	5
4 , 0	2	1	0	6	0	3	6	3	2	7
4 , 1	5	10	5	3	6	4	4	6	1	5
4 , 2	7	6	7	4	2	3	7	9	6	7
4 , 3	3	6	3	5	9	3	1	5	4	6
4 , 4	3	9	10	5	3	5	7	8	4	5
4 , 5	5	5	7	6	4	5	4	8	3	3
4 , 6	8	3	3	3	2	6	7	3	6	6
4 , 7	7	6	4	5	6	7	5	3	6	8
4 , 8	5	6	6	5	6	3	3	4	6	4
4 , 9	6	3	6	8	2	3	5	2	5	7
5 , 0	7	8	3	2	9	9	4	4	7	6
5 , 1	9	7	2	2	6	4	6	8	5	4
5 , 2	8	6	2	2	6	5	8	3	5	4
5 , 3	10	7	4	3	6	3	2	9	4	8
5 , 4	6	3	2	4	1	2	2	10	4	7
5 , 5	8	2	6	8	3	9	2	5	4	6
5 , 6	3	4	3	7	4	7	2	5	4	7
5 , 7	5	6	8	3	2	2	4	7	6	2
5 , 8	7	2	9	4	3	4	5	3	6	0
5 , 9	4	6	5	7	6	4	5	5	7	4
6 , 0	5	3	5	5	4	7	4	4	7	9
6 , 1	2	3	3	5	6	6	3	6	2	4
6 , 2	4	5	7	2	6	1	4	4	2	6
6 , 3	10	4	7	7	5	6	5	3	0	3
6 , 4	7	3	4	4	10	6	4	5	3	6
6 , 5	6	5	1	8	5	7	6	2	4	7
6 , 6	7	5	4	6	9	3	1	4	3	4
6 , 7	2	7	5	3	3	6	5	3	4	7
6 , 8	3	8	3	4	6	5	4	5	8	6
6 , 9	5	10	6	4	4	4	5	6	4	3
7 , 0	8	4	6	5	4	2	0	3	5	3
7 , 1	4	2	9	4	5	7	4	5	6	6
7 , 2	5	0	2	5	8	4	5	6	9	4
7 , 3	6	3	2	6	3	6	9	4	3	4
7 , 4	4	5	4	11	5	9	5	5	3	1
7 , 5	7	5	1	5	6	1	9	5	3	7
7 , 6	2	3	7	6	9	6	4	7	7	1
7 , 7	2	5	3	4	4	6	4	4	2	2
7 , 8	7	4	4	3	4	11	2	5	8	6
7 , 9	4	3	3	6	7	5	5	4	7	6
8 , 0	10	6	5	3	3	3	4	4	3	4
8 , 1	4	5	5	6	9	2	3	2	4	5
8 , 2	6	3	7	2	2	7	1	7	5	3
8 , 3	8	4	5	5	7	4	7	6	2	4
8 , 4	4	8	8	2	8	2	2	4	7	4
8 , 5	9	7	8	5	5	4	2	4	6	4
8 , 6	4	6	1	7	5	3	4	4	7	5
8 , 7	1	4	5	1	3	5	8	5	5	5
8 , 8	4	3	2	6	7	8	8	10	6	6
8 , 9	4	3	11	7	0	3	5	4	8	4
9 , 0	4	6	3	8	6	6	4	4	3	6
9 , 1	6	6	4	4	4	2	6	3	8	6
9 , 2	6	4	5	9	3	5	4	8	5	3
9 , 3	5	3	8	4	3	9	7	7	6	6
9 , 4	0	1	3	6	3	4	6	9	4	4
9 , 5	6	10	7	5	6	5	2	5	5	1
9 , 6	10	6	2	4	3	6	1	6	10	4
9 , 7	10	5	4	4	5	6	4	3	4	2
9 , 8	5	5	3	7	2	5	5	4	11	4
9 , 9	8	6	4	1	5	7	5	4	4	3

TABLA 3.14 Frecuencias por ternas de
R=[(último digito del año)+(último digito del mes)] mod 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 , 0	7	6	9	9	3	7	1	1	5	6
0 , 1	6	3	3	8	5	4	4	8	5	3
0 , 2	5	6	7	6	7	8	7	1	0	4
0 , 3	7	4	5	3	4	7	4	3	7	3
0 , 4	2	1	5	5	8	7	2	3	5	4
0 , 5	4	6	5	4	8	4	0	8	2	7
0 , 6	2	4	4	8	8	6	4	3	4	3
0 , 7	6	2	3	5	8	5	2	12	2	4
0 , 8	5	4	2	5	3	4	5	3	5	8
0 , 9	4	6	8	7	6	3	3	5	2	8
1 , 0	6	7	7	3	10	0	3	9	7	3
1 , 1	5	4	7	4	6	1	6	4	4	4
1 , 2	6	6	4	6	2	7	4	3	6	5
1 , 3	6	3	4	4	7	4	5	3	6	8
1 , 4	4	3	3	7	6	9	2	6	5	3
1 , 5	1	5	4	5	8	6	1	6	5	5
1 , 6	8	7	5	2	7	6	7	5	4	6
1 , 7	6	4	3	3	4	1	5	6	6	6
1 , 8	2	6	5	6	4	6	4	5	2	5
1 , 9	4	6	6	4	4	7	2	3	6	4
2 , 0	7	6	4	4	8	4	7	5	4	5
2 , 1	7	1	4	6	9	2	7	6	5	3
2 , 2	1	3	7	7	5	8	5	4	4	6
2 , 3	6	8	4	8	8	3	5	5	8	4
2 , 4	0	5	6	2	4	6	5	4	6	7
2 , 5	5	7	5	9	9	3	8	5	6	6
2 , 6	8	5	5	4	4	6	2	9	4	3
2 , 7	3	2	3	0	9	7	7	7	2	2
2 , 8	2	5	5	5	4	7	5	4	2	4
2 , 9	8	3	4	8	1	2	11	4	2	6
3 , 0	4	7	5	4	3	7	3	4	4	6
3 , 1	7	7	4	5	6	5	3	7	7	7
3 , 2	10	5	7	5	1	8	3	4	4	4
3 , 3	7	9	2	5	2	5	7	2	4	2
3 , 4	4	7	3	4	8	4	4	5	6	8
3 , 5	4	6	6	1	2	4	8	4	3	11
3 , 6	3	5	7	7	6	7	2	5	4	5
3 , 7	7	6	6	5	3	6	4	2	3	3
3 , 8	7	3	7	5	4	1	3	2	6	10
3 , 9	4	6	5	4	5	2	5	3	5	4
4 , 0	3	3	3	4	2	4	8	4	5	6
4 , 1	5	4	7	8	6	4	7	3	2	0
4 , 2	8	4	3	3	3	2	7	4	3	5
4 , 3	4	5	5	5	3	9	5	4	5	6
4 , 4	9	5	1	7	3	8	7	7	3	9
4 , 5	1	6	5	4	6	6	2	7	5	12
4 , 6	7	3	7	5	5	6	1	3	6	8
4 , 7	6	3	2	9	2	3	5	4	3	5
4 , 8	3	3	4	5	8	5	8	5	5	7
4 , 9	7	5	5	10	4	5	9	4	5	3
5 , 0	3	4	4	5	5	3	5	3	1	2
5 , 1	7	9	7	4	3	5	6	7	5	10
5 , 2	1	3	4	9	7	6	3	8	8	5
5 , 3	2	6	4	1	9	1	4	3	6	5
5 , 4	7	4	2	5	10	4	8	6	2	5
5 , 5	6	7	8	4	3	1	6	3	6	3
5 , 6	6	4	6	4	5	3	4	4	4	6
5 , 7	5	4	8	5	4	8	3	8	8	6
5 , 8	2	7	6	3	2	5	4	2	6	5
5 , 9	8	1	5	4	1	10	5	8	10	6
6 , 0	6	4	7	3	4	6	4	7	3	8
6 , 1	6	1	4	4	2	10	4	2	4	5
6 , 2	3	9	5	2	5	3	3	3	10	6
6 , 3	4	5	5	6	4	6	7	9	2	3
6 , 4	4	6	4	6	7	3	5	3	7	9
6 , 5	3	4	10	4	7	6	3	6	4	3
6 , 6	4	3	6	4	6	3	6	3	2	7
6 , 7	6	5	5	2	4	5	3	4	7	5
6 , 8	2	1	2	4	6	3	3	5	7	4
6 , 9	9	2	7	6	9	7	6	2	4	7
7 , 0	7	5	6	2	2	7	6	7	7	4
7 , 1	6	6	3	4	4	3	5	2	3	6
7 , 2	10	4	4	5	3	10	4	2	2	3
7 , 3	4	5	7	3	3	8	4	2	4	1
7 , 4	6	5	8	5	1	5	6	4	6	4
7 , 5	6	10	4	2	5	5	4	9	2	3
7 , 6	4	3	5	7	5	2	6	3	1	4
7 , 7	7	5	8	6	6	6	5	3	6	5
7 , 8	3	1	6	3	4	1	6	2	5	7
7 , 9	4	6	5	2	3	6	4	4	7	2
8 , 0	4	3	1	6	1	4	2	3	2	6
8 , 1	1	3	6	3	3	6	9	3	1	5
8 , 2	3	5	5	9	6	6	4	6	4	6
8 , 3	4	7	2	5	6	4	0	12	0	7
8 , 4	3	7	5	6	6	2	6	3	5	3
8 , 5	2	5	6	2	2	6	6	1	4	5
8 , 6	3	3	2	6	2	4	7	5	4	9
8 , 7	4	6	4	2	4	8	4	1	0	3
8 , 8	4	5	11	3	5	4	4	5	9	5
8 , 9	7	9	5	8	10	2	3	6	2	7
9 , 0	7	4	5	7	4	6	7	6	6	6
9 , 1	5	7	4	4	4	6	6	2	9	3
9 , 2	7	5	4	7	6	5	10	7	2	5
9 , 3	3	6	13	5	7	2	10	2	6	4
9 , 4	3	3	5	4	6	6	6	1	8	5
9 , 5	3	7	1	6	3	6	8	10	5	3
9 , 6	7	5	2	4	6	7	5	6	4	8
9 , 7	3	5	5	4	6	1	2	10	1	4
9 , 8	2	5	6	8	6	3	3	3	8	4
9 , 9	3	6	8	5	4	8	6	2	5	4

TABLA 3.15 Frecuencias por ternas de
R=[(último digito del mes)+(último digito del día)] mod 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 , 0	4	5	6	9	4	3	4	4	4	4
0 , 1	4	7	1	3	5	6	7	4	7	6
0 , 2	1	0	3	5	1	4	6	5	5	2
0 , 3	5	6	7	4	4	7	3	3	4	4
0 , 4	3	4	11	5	3	9	10	4	4	6
0 , 5	3	2	5	3	2	1	4	9	5	4
0 , 6	8	4	5	4	7	2	6	8	5	4
0 , 7	2	4	2	5	8	3	5	0	4	5
0 , 8	2	7	3	6	6	6	9	2	4	8
0 , 9	6	5	4	6	5	4	10	7	7	8
1 , 0	4	5	2	3	7	6	8	2	3	8
1 , 1	8	2	4	2	4	6	3	4	6	6
1 , 2	3	1	5	7	4	4	8	6	4	3
1 , 3	2	3	6	4	7	4	1	4	4	2
1 , 4	3	6	4	4	5	3	0	3	5	8
1 , 5	8	7	7	5	8	3	6	3	4	4
1 , 6	8	9	2	7	3	6	2	6	7	6
1 , 7	2	5	2	3	5	9	10	6	5	4
1 , 8	7	4	1	4	2	7	4	4	8	4
1 , 9	7	4	3	7	6	4	3	7	5	5
2 , 0	1	7	2	3	2	5	8	3	4	7
2 , 1	2	6	4	2	9	2	1	2	4	1
2 , 2	4	6	5	0	4	6	8	2	5	7
2 , 3	7	4	7	5	5	3	3	5	8	2
2 , 4	3	6	4	2	6	4	2	5	5	4
2 , 5	5	5	2	2	6	4	4	4	8	5
2 , 6	2	9	7	7	4	3	5	5	5	7
2 , 7	7	6	4	4	2	7	2	4	4	4
2 , 8	5	2	6	4	6	8	7	1	4	3
2 , 9	5	2	4	3	6	5	4	5	6	2
3 , 0	4	7	1	2	6	4	4	2	7	6
3 , 1	7	5	6	3	5	7	4	0	5	5
3 , 2	3	4	7	7	4	3	4	3	8	6
3 , 3	4	6	4	5	2	9	1	3	6	3
3 , 4	5	7	6	4	3	5	3	6	6	5
3 , 5	5	7	3	8	6	4	6	5	7	8
3 , 6	3	2	3	5	3	10	4	8	1	5
3 , 7	1	7	7	7	7	3	2	5	5	5
3 , 8	3	5	7	5	3	1	4	7	5	4
3 , 9	5	2	4	6	3	2	9	8	7	1
4 , 0	4	5	5	4	4	2	7	5	7	5
4 , 1	5	7	5	7	2	7	9	8	2	6
4 , 2	5	4	5	4	7	7	6	4	3	4
4 , 3	2	2	4	3	4	8	8	4	4	4
4 , 4	5	3	6	6	2	7	2	5	3	4
4 , 5	6	8	4	5	3	7	5	4	9	7
4 , 6	2	4	3	3	3	5	2	5	3	3
4 , 7	7	5	5	6	8	10	6	1	6	7
4 , 8	5	3	2	6	10	6	9	4	3	3
4 , 9	4	8	4	5	7	5	3	4	6	4
5 , 0	6	4	7	7	12	1	5	2	4	10
5 , 1	4	3	3	5	2	10	8	5	8	6
5 , 2	4	4	0	5	2	7	6	6	4	6
5 , 3	8	3	3	3	5	9	6	6	4	8
5 , 4	9	4	4	4	2	4	3	7	3	3
5 , 5	5	6	3	4	4	2	5	5	6	2
5 , 6	5	3	2	6	4	6	7	3	3	5
5 , 7	6	2	7	4	9	2	4	6	4	5
5 , 8	2	7	4	8	9	5	7	10	9	4
5 , 9	3	4	7	9	4	4	7	4	5	1
6 , 0	8	3	1	2	7	7	4	8	3	6
6 , 1	4	3	4	3	5	7	9	5	7	4
6 , 2	8	6	7	3	5	4	2	4	5	6
6 , 3	6	6	7	3	6	5	5	4	4	6
6 , 4	5	6	6	2	2	6	3	4	5	3
6 , 5	7	4	3	7	2	7	4	10	8	5
6 , 6	1	4	3	8	4	5	10	5	3	11
6 , 7	6	6	3	2	6	5	9	5	8	4
6 , 8	8	2	5	5	5	5	6	4	3	3
6 , 9	3	3	7	4	6	9	4	9	3	6
7 , 0	6	4	6	6	4	2	5	2	9	4
7 , 1	7	7	6	4	2	3	5	7	1	8
7 , 2	2	4	4	4	3	4	3	8	3	2
7 , 3	3	4	4	5	5	4	4	7	3	1
7 , 4	2	11	5	8	8	7	2	9	7	6
7 , 5	6	6	4	11	3	5	5	5	5	6
7 , 6	4	5	10	5	5	4	6	7	9	1
7 , 7	5	3	3	2	7	6	5	6	6	1
7 , 8	6	5	7	7	3	6	4	4	9	2
7 , 9	6	2	6	6	8	4	4	4	3	5
8 , 0	5	9	0	8	5	6	3	4	5	7
8 , 1	4	1	7	2	7	3	5	11	1	4
8 , 2	3	3	5	8	5	5	5	2	6	4
8 , 3	2	6	5	7	6	7	6	4	3	9
8 , 4	6	5	1	5	6	5	4	8	10	3
8 , 5	6	4	4	6	4	7	4	4	10	2
8 , 6	10	6	6	4	3	12	7	3	6	6
8 , 7	4	7	3	1	6	6	3	4	7	6
8 , 8	8	4	8	7	4	5	8	4	7	3
8 , 9	1	3	3	6	5	3	3	6	6	6
9 , 0	5	1	2	3	8	2	5	6	7	5
9 , 1	3	4	5	6	0	4	5	5	4	5
9 , 2	9	1	6	6	6	1	6	4	3	2
9 , 3	4	7	2	4	6	3	7	9	4	8
9 , 4	7	6	2	3	6	8	4	10	3	8
9 , 5	7	5	9	4	5	2	1	0	3	5
9 , 6	6	5	9	3	6	4	5	4	4	6
9 , 7	8	5	1	6	7	5	10	7	4	7
9 , 8	6	6	3	3	5	2	5	7	6	8
9 , 9	4	8	2	2	7	1	5	6	3	5

TABLA 3.16 Frecuencias por ternas de
R=[(longitud del apellido paterno)+(último dígito del año)] mod 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	2	3	9	7	5	5	3	0	5	5
0,1	3	3	8	4	9	3	5	4	4	4
0,2	2	4	1	5	9	5	4	6	2	4
0,3	4	4	3	5	7	10	5	9	1	2
0,4	7	3	3	4	4	5	2	0	4	4
0,5	8	3	2	8	5	3	6	7	3	5
0,6	4	5	2	7	6	3	6	3	8	5
0,7	2	5	4	3	5	3	3	2	4	3
0,8	3	2	7	7	8	5	2	4	4	10
0,9	9	6	3	2	5	7	12	2	7	5
1,0	1	4	4	3	2	7	2	2	5	7
1,1	2	3	5	1	4	1	3	9	5	4
1,2	1	3	5	3	6	6	5	1	4	5
1,3	4	4	4	6	5	8	3	9	2	7
1,4	4	7	6	5	4	9	5	8	3	4
1,5	6	1	2	6	2	5	7	8	5	5
1,6	5	6	3	2	3	10	4	5	7	6
1,7	0	5	6	4	3	6	7	4	7	4
1,8	3	5	3	1	8	10	4	6	4	7
1,9	1	5	3	5	7	6	5	3	7	2
2,0	4	2	3	1	3	3	2	0	2	4
2,1	2	5	6	5	5	4	7	6	6	5
2,2	5	2	5	5	8	1	9	4	2	2
2,3	4	4	4	5	5	3	5	6	6	6
2,4	9	8	4	4	2	9	5	7	7	4
2,5	3	3	7	3	5	2	3	2	6	5
2,6	6	3	7	3	8	2	6	4	6	1
2,7	3	5	7	8	0	6	3	7	9	5
2,8	7	2	4	3	8	6	3	3	5	1
2,9	5	2	5	2	6	5	6	5	1	5
3,0	3	4	0	8	3	6	9	2	6	7
3,1	4	3	4	3	7	3	3	6	6	2
3,2	2	3	5	7	6	5	0	7	4	4
3,3	2	6	3	3	4	6	7	4	5	5
3,4	3	6	7	7	5	6	6	3	6	6
3,5	8	5	4	5	7	5	11	3	2	4
3,6	5	6	4	4	8	8	5	6	4	7
3,7	5	3	4	9	8	6	6	5	4	9
3,8	5	4	3	6	4	5	6	5	3	6
3,9	5	8	2	4	7	2	3	6	5	6
4,0	5	2	9	8	3	7	3	1	6	7
4,1	7	5	2	4	5	8	6	5	6	1
4,2	2	6	4	9	5	4	6	8	4	7
4,3	5	5	5	5	5	4	8	8	5	4
4,4	5	1	5	3	3	3	6	6	2	5
4,5	10	6	3	7	8	8	8	6	7	5
4,6	3	5	8	5	1	5	3	6	7	3
4,7	2	6	6	3	6	2	4	8	4	4
4,8	3	7	6	9	5	2	7	3	4	7
4,9	3	4	6	6	1	5	8	8	8	3

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	7	7	4	8	5	7	5	16	4	6
5,1	6	5	2	4	0	4	5	6	2	5
5,2	4	7	5	4	6	3	4	6	3	3
5,3	2	7	6	4	9	2	9	8	3	4
5,4	4	3	6	8	4	9	5	7	1	6
5,5	13	7	3	3	6	6	5	3	8	2
5,6	4	7	5	4	7	7	6	5	4	8
5,7	5	7	2	9	3	2	8	3	3	3
5,8	2	6	3	9	5	6	6	5	6	6
5,9	5	4	5	6	6	4	8	5	4	2
6,0	7	6	4	2	5	5	9	7	8	7
6,1	1	5	2	9	4	8	6	2	6	9
6,2	1	9	7	1	6	3	8	3	5	7
6,3	4	3	4	6	5	3	8	3	5	2
6,4	6	7	7	4	6	9	4	1	5	9
6,5	6	2	8	4	8	4	3	0	3	11
6,6	8	3	4	4	9	4	8	7	4	7
6,7	3	7	3	12	5	4	4	2	6	3
6,8	6	7	8	2	2	7	8	5	4	4
6,9	6	4	4	3	5	11	7	7	2	4
7,0	3	7	1	3	1	7	3	1	1	4
7,1	3	2	6	9	6	5	9	2	5	5
7,2	2	5	3	3	6	2	2	7	6	4
7,3	8	5	6	4	7	5	6	5	9	6
7,4	5	5	4	1	3	8	4	5	7	5
7,5	2	4	6	4	2	3	5	6	8	1
7,6	7	7	6	4	6	1	4	4	3	6
7,7	4	7	4	4	6	3	3	4	7	4
7,8	4	8	7	4	6	6	5	1	8	5
7,9	8	4	4	6	2	6	2	9	2	2
8,0	5	5	2	4	3	3	5	1	9	7
8,1	3	5	2	8	7	6	6	2	7	3
8,2	2	9	5	7	3	8	5	7	5	1
8,3	7	2	2	4	3	6	4	4	7	7
8,4	4	4	5	6	6	4	6	3	11	4
8,5	5	3	4	6	5	11	7	3	5	6
8,6	9	4	5	4	4	5	6	5	5	6
8,7	4	1	2	4	5	3	6	5	2	7
8,8	6	5	2	3	2	4	6	6	5	7
8,9	9	4	2	5	10	6	9	2	2	9
9,0	7	7	6	6	6	0	8	4	6	4
9,1	6	1	2	5	8	5	1	4	4	6
9,2	3	3	3	4	4	2	3	4	7	5
9,3	8	1	6	3	5	7	2	3	4	5
9,4	4	5	8	12	2	6	3	5	7	5
9,5	8	5	6	8	5	9	2	7	7	5
9,6	9	6	6	6	6	4	10	4	5	4
9,7	3	6	2	5	6	6	4	6	8	3
9,8	5	3	9	2	5	4	6	1	3	5
9,9	3	1	4	5	8	10	0	2	5	2

TABLA 3.17 Frecuencias por ternas de
R=[(longitud del apellido paterno)+(último dígito del mes)] mod 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 , 0	8	4	8	4	5	6	5	6	7	6
0 , 1	5	5	4	3	3	3	2	4	4	6
0 , 2	6	4	4	4	5	4	3	6	5	5
0 , 3	8	4	1	3	2	6	4	3	4	4
0 , 4	6	4	9	5	4	3	1	2	12	5
0 , 5	4	2	4	3	2	7	5	6	6	6
0 , 6	6	7	4	6	2	3	2	5	8	5
0 , 7	6	10	6	6	6	4	7	7	8	7
0 , 8	5	5	10	5	1	6	14	3	7	5
0 , 9	5	6	6	2	5	5	6	9	14	7
1 , 0	8	4	4	2	7	6	3	8	7	5
1 , 1	5	2	3	2	3	4	4	5	5	8
1 , 2	2	2	5	2	3	2	3	3	5	9
1 , 3	1	5	2	4	4	2	4	4	2	3
1 , 4	7	5	2	4	4	2	5	5	7	1
1 , 5	4	1	6	0	4	5	3	3	4	5
1 , 6	3	5	4	4	11	2	7	8	4	4
1 , 7	0	3	2	6	3	8	7	7	3	9
1 , 8	7	3	4	6	10	3	5	3	8	3
1 , 9	2	4	6	5	5	1	5	14	7	7
2 , 0	6	4	7	4	6	5	6	3	7	5
2 , 1	5	2	2	2	7	0	4	5	4	5
2 , 2	4	2	1	4	3	6	3	2	5	4
2 , 3	3	3	2	3	3	1	6	3	4	4
2 , 4	5	6	5	7	3	8	3	2	1	1
2 , 5	2	6	5	5	4	3	7	3	6	5
2 , 6	5	4	3	6	5	4	5	5	2	1
2 , 7	6	7	6	4	3	2	8	7	10	2
2 , 8	3	4	6	4	4	3	4	6	7	5
2 , 9	2	1	4	2	0	10	5	7	6	8
3 , 0	3	3	3	7	8	0	1	7	5	4
3 , 1	5	4	2	3	1	4	10	4	5	3
3 , 2	5	3	3	1	2	6	1	4	3	2
3 , 3	7	3	3	2	5	3	1	5	3	2
3 , 4	3	5	4	5	3	4	2	2	5	2
3 , 5	1	4	2	5	4	3	5	6	5	3
3 , 6	8	1	4	4	3	7	4	7	2	6
3 , 7	3	4	7	3	5	2	3	3	7	6
3 , 8	4	5	4	6	4	2	2	4	3	8
3 , 9	2	3	7	5	3	7	3	4	6	5
4 , 0	3	2	3	5	4	9	3	10	1	10
4 , 1	6	3	4	0	1	4	4	3	3	8
4 , 2	5	5	1	2	5	5	3	10	4	4
4 , 3	7	7	1	4	3	4	2	5	5	6
4 , 4	5	0	2	7	7	4	3	2	4	6
4 , 5	4	6	5	2	2	2	4	5	3	7
4 , 6	3	4	2	5	2	5	6	5	7	5
4 , 7	5	0	2	3	5	5	5	2	11	4
4 , 8	3	9	7	5	4	5	3	6	3	7
4 , 9	6	4	1	3	2	7	4	3	4	6
5 , 0	5	2	5	4	3	1	5	4	6	7
5 , 1	8	4	6	5	4	3	3	1	4	2
5 , 2	7	2	6	1	3	9	3	6	6	4
5 , 3	1	5	4	3	1	4	6	3	3	3
5 , 4	5	4	3	5	3	3	5	2	3	5
5 , 5	4	3	8	5	7	6	5	4	4	5
5 , 6	4	4	2	6	6	1	3	7	8	10
5 , 7	4	7	4	1	5	9	4	3	6	7
5 , 8	6	7	2	6	3	1	7	4	6	4
5 , 9	10	6	4	3	3	1	8	6	6	5
6 , 0	2	3	2	2	7	7	8	7	5	7
6 , 1	8	2	1	5	6	6	10	7	7	4
6 , 2	5	5	5	0	4	3	6	5	6	4
6 , 3	4	4	2	6	7	4	6	4	4	7
6 , 4	8	5	8	2	2	2	3	12	7	3
6 , 5	5	4	3	3	1	5	6	4	6	5
6 , 6	5	6	7	1	7	7	6	3	7	8
6 , 7	6	6	9	1	6	6	10	7	4	5
6 , 8	4	5	4	6	7	8	6	7	10	8
6 , 9	6	4	3	8	2	7	8	6	12	6
7 , 0	7	5	6	3	3	6	5	7	7	7
7 , 1	6	4	8	4	5	5	6	10	4	5
7 , 2	6	5	1	6	8	5	7	3	1	6
7 , 3	4	4	6	6	1	2	3	1	7	3
7 , 4	7	2	2	5	5	5	8	4	7	7
7 , 5	9	5	1	4	3	5	7	7	2	7
7 , 6	5	9	4	6	6	6	5	5	9	8
7 , 7	6	7	1	3	6	7	7	7	5	7
7 , 8	9	10	6	3	5	6	8	7	9	7
7 , 9	6	6	4	5	3	7	8	7	7	4
8 , 0	6	6	3	4	3	3	6	11	10	7
8 , 1	5	9	4	4	4	5	1	4	10	10
8 , 2	6	3	4	4	6	3	7	11	7	3
8 , 3	2	2	7	2	4	8	9	11	6	5
8 , 4	1	2	6	2	6	6	10	7	4	7
8 , 5	3	3	9	2	5	8	6	3	3	4
8 , 6	2	9	5	1	6	6	14	9	10	3
8 , 7	7	7	6	8	6	3	6	5	9	1
8 , 8	5	4	6	10	5	6	7	11	7	9
8 , 9	12	9	6	5	3	7	10	3	3	4
9 , 0	11	6	5	4	5	2	6	4	6	7
9 , 1	1	6	2	3	8	1	8	5	6	5
9 , 2	7	5	4	8	2	3	4	5	4	4
9 , 3	4	4	2	1	5	4	5	4	4	8
9 , 4	3	3	3	2	3	3	4	4	2	3
9 , 5	6	6	4	4	6	7	3	9	7	5
9 , 6	9	7	8	9	4	1	5	6	8	12
9 , 7	13	6	5	2	7	4	6	8	7	9
9 , 8	13	4	5	5	8	6	9	7	10	6
9 , 9	5	2	5	3	4	5	12	8	8	6

TABLA 3.18 Frecuencias por ternas de
R=[(longitud del apellido paterno)+(último dígito del día)] mod 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 , 0	2	4	5	4	4	4	3	4	4	5
0 , 1	3	11	7	5	2	2	2	6	4	1
0 , 2	5	4	4	3	2	3	4	6	5	5
0 , 3	6	9	3	4	5	4	4	11	4	7
0 , 4	8	8	6	3	2	5	5	2	1	3
0 , 5	2	1	6	6	3	7	3	4	6	6
0 , 6	3	7	6	3	5	8	3	2	4	5
0 , 7	2	5	7	9	1	5	2	6	12	8
0 , 8	1	5	2	5	3	6	5	8	7	3
0 , 9	2	4	5	5	6	1	5	2	6	3
1 , 0	7	6	6	5	5	7	8	3	6	3
1 , 1	4	6	3	4	5	7	5	4	3	7
1 , 2	1	5	5	5	7	10	6	3	2	5
1 , 3	3	7	6	7	6	6	8	7	3	6
1 , 4	5	5	3	5	3	4	4	5	5	9
1 , 5	4	7	4	6	4	3	5	5	3	5
1 , 6	5	4	4	5	4	3	5	2	7	7
1 , 7	7	8	5	5	2	4	6	4	6	6
1 , 8	5	7	5	2	2	2	1	2	8	4
1 , 9	1	9	7	4	5	6	11	4	8	5
2 , 0	4	5	4	5	7	2	3	4	6	3
2 , 1	6	6	4	5	8	3	7	4	5	4
2 , 2	4	4	4	7	3	5	7	2	5	3
2 , 3	5	2	5	3	4	4	3	10	5	2
2 , 4	5	3	2	3	4	0	3	5	3	5
2 , 5	4	7	8	4	4	7	4	1	4	3
2 , 6	4	5	5	3	7	5	8	3	7	2
2 , 7	5	4	5	0	5	5	5	3	5	3
2 , 8	5	8	9	6	2	5	6	5	9	5
2 , 9	4	4	8	9	8	11	6	5	6	3
3 , 0	4	3	5	7	2	4	4	12	1	3
3 , 1	3	5	5	11	5	7	11	6	3	11
3 , 2	4	3	6	1	2	3	6	4	5	8
3 , 3	5	9	2	7	6	3	4	3	7	7
3 , 4	1	7	4	5	3	9	10	6	8	3
3 , 5	6	1	4	4	1	6	6	5	9	2
3 , 6	5	4	5	2	3	5	8	6	4	1
3 , 7	6	2	7	6	5	5	6	6	10	6
3 , 8	4	2	8	7	7	5	1	8	6	5
3 , 9	1	2	5	7	8	3	6	8	5	8
4 , 0	4	2	1	7	7	2	4	10	5	4
4 , 1	6	1	10	8	3	2	2	4	3	5
4 , 2	3	4	2	5	0	6	4	5	3	5
4 , 3	3	2	3	6	7	4	3	4	6	7
4 , 4	3	2	2	2	1	5	2	2	4	4
4 , 5	5	5	2	3	3	7	6	4	1	4
4 , 6	3	7	6	4	2	2	7	1	2	6
4 , 7	7	6	9	7	5	2	5	2	5	7
4 , 8	5	4	3	2	3	4	5	3	4	3
4 , 9	7	5	2	7	5	5	3	5	4	7
5 , 0	3	6	0	7	4	5	10	3	6	5
5 , 1	4	10	5	3	4	2	5	7	4	6
5 , 2	1	4	4	2	5	2	3	4	7	9
5 , 3	4	12	7	6	8	3	5	4	7	5
5 , 4	5	2	2	5	3	3	2	9	1	3
5 , 5	10	1	6	8	5	4	8	10	5	2
5 , 6	5	6	6	2	2	10	2	3	3	7
5 , 7	2	1	4	7	4	3	7	4	7	6
5 , 8	4	4	4	6	2	4	9	8	2	4
5 , 9	4	3	1	4	2	5	8	9	4	8
6 , 0	2	5	7	7	4	6	3	5	4	4
6 , 1	10	1	4	4	5	10	4	7	3	10
6 , 2	6	6	3	5	6	2	6	5	8	9
6 , 3	4	4	5	5	4	3	4	6	2	5
6 , 4	5	4	5	3	3	5	3	5	3	5
6 , 5	7	10	4	9	6	3	3	5	4	7
6 , 6	5	8	7	4	4	8	5	4	8	4
6 , 7	0	2	4	4	4	6	10	2	4	2
6 , 8	2	7	5	3	9	4	4	5	7	8
6 , 9	5	3	9	5	6	2	7	4	4	4
7 , 0	6	4	6	7	1	7	3	6	3	4
7 , 1	8	3	2	6	8	1	4	3	6	7
7 , 2	3	11	4	6	3	4	5	6	6	10
7 , 3	6	7	2	7	7	8	4	3	5	3
7 , 4	2	7	3	7	2	4	2	5	2	3
7 , 5	3	2	2	5	3	7	3	3	7	11
7 , 6	6	4	10	10	5	2	7	5	2	6
7 , 7	7	5	4	7	2	6	3	2	3	5
7 , 8	6	9	6	6	8	4	4	3	11	1
7 , 9	3	5	5	6	3	2	6	6	9	7
8 , 0	2	3	2	4	6	5	3	7	9	5
8 , 1	9	4	5	3	6	10	4	7	2	3
8 , 2	13	5	7	4	3	3	3	2	8	5
8 , 3	4	7	5	5	4	4	5	4	6	4
8 , 4	6	2	5	6	3	1	6	9	5	6
8 , 5	3	7	3	11	5	7	1	4	5	5
8 , 6	5	6	3	5	5	6	4	6	9	3
8 , 7	5	4	7	5	6	4	6	7	3	2
8 , 8	6	4	5	7	6	9	7	5	5	10
8 , 9	6	4	5	4	4	6	2	10	5	2
9 , 0	5	5	5	4	3	2	5	3	1	3
9 , 1	3	1	4	10	2	2	2	5	5	6
9 , 2	3	6	5	5	2	8	5	3	11	5
9 , 3	5	8	4	3	5	5	3	7	8	7
9 , 4	6	4	5	6	3	4	3	7	4	9
9 , 5	5	9	2	5	1	8	7	4	3	3
9 , 6	6	7	4	4	4	9	8	6	8	8
9 , 7	6	11	6	2	3	6	7	8	3	7
9 , 8	8	3	6	4	7	8	10	2	5	5
9 , 9	3	1	6	4	4	6	10	6	7	3

Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las sucesiones de ternas.

1) último digito del año de nacimiento
El valor de T es 934.246582 que corresponde al cuantil 0.145, por lo que el nivel crítico aproximado es 0.855. Los datos favorecen la hipótesis de uniformidad.

2) último digito del mes de nacimiento
El valor de T es 2460.890137 que es superior al cuantil 0.999, por lo que se rechaza la hipótesis de uniformidad para esta variable.

3) último digito del día de nacimiento
El valor de T es 1054.101074 que corresponde al cuantil 0.95, por lo que el nivel crítico aproximado es 0.05. Los datos no apoyan en forma concluyente la hipótesis de uniformidad pero no se rechazaría con un nivel de significancia aproximado del 5%.

4) R= [(último digito del año)+(último digito del día)] mod 10
El valor de T es 983.094238 que corresponde al cuantil 0.53, por lo que el nivel crítico aproximado es 0.47. Los datos apoyan la hipótesis de uniformidad.

5) R= [(último digito del año)+(último digito del mes)] mod 10
El valor de T es 983.912109 que corresponde al cuantil 0.53, de modo que el nivel crítico aproximado es 0.47. Los datos favorecen la hipótesis de uniformidad.

6) R= [(último digito del mes)+(último digito del día)] mod 10
El valor de T es 970.77832 que corresponde al cuantil 0.41, por lo que el nivel crítico aproximado es 0.59. Los datos favorecen la hipótesis de uniformidad.

7) R= [(longitud del apellido paterno) +
(último digito del año)] mod 10
El valor de T es 1042.20166 que corresponde al cuantil 0.92, por lo que el nivel crítico aproximado es 0.08. No se rechaza la hipótesis de uniformidad.

8) R= [(longitud del apellido paterno) +
(último digito del mes)] mod 10
La estadística de prueba T vale 1175.62207 y es mayor que el cuantil 0.999, de modo que se rechaza que esta variable se distribuya uniformemente.

9) R= [(longitud del apellido paterno)+
(último dígito del día)] mod 10

El valor de la estadística T es 1063.140625 que corresponde al cuantil 0.97 por lo que el nivel crítico aproximado es 0.03. La evidencia no es concluyente pero no se rechazaría la hipótesis de uniformidad con un nivel de significancia α igual a 0.01

3.3 Comentarios sobre los resultados de las pruebas

En vista de los resultados se puede decir que la variable último dígito del mes no debería usarse como una tabla de dígitos al azar de la distribución uniforme, como se podría esperar desde el principio.
De igual manera en el caso de la variable R construida con las variables longitud del apellido paterno y último dígito del mes, se rechazó que tuviera una distribución uniforme por parejas.

Esto es consecuente con el resultado de la prueba para dígitos individuales del capítulo anterior en la que también se rechazó que estas variables se distribuyan uniformemente.

En cuanto a otras variables como el último dígito del día y la variable R procedente del último dígito del día y de la longitud del apellido paterno, estuvieron en el límite entre la aceptación y el rechazo como variables distribuidas uniformemente por parejas y por ternas, de modo que deben usarse con reservas.

Finalmente las demás variables tuvieron apoyo de los datos observados a favor de la hipótesis de uniformidad, por lo que se tiene un grado razonable de confianza para utilizarlas como sucesiones aleatorias de la distribución uniforme.

Por otro lado se pudo observar que las parejas y las ternas de datos de algunas de las variables originales se apegan a la medida de probabilidad uniforme, al igual que las parejas y las ternas de las variables construidas con la función R=(X+Y) mod 10. De modo que se puede pensar en una generalización de los teoremas del capítulo 1 para vectores aleatorios de dimensión mayor que 1, la cual se demuestra en el siguiente capítulo.

Capítulo 4
Teorema generalizado sobre el vector aleatorio R

Ahora se aplicarán los teoremas del capítulo 1 sobre la medida de probabilidad de la variable $R=(X+Y) \bmod 10$, al caso en que X, Y y R son variables aleatorias n-dimensionales.

Recuerdése que por definición, una variable aleatoria n-dimensional o vector aleatorio, es una regla que asocia un vector de números reales con cada resultado $w \in \Omega$, o una colección de n reglas cada una de las cuales asocia un número único a cada $w \in \Omega$.
Una variable aleatoria n-dimensional se denota por $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$, donde de hecho cada X_i es una variable aleatoria.

El siguiente teorema muestra que a partir de dos vectores aleatorios que cumplen algunas condiciones, se pueden obtener otros vectores aleatorios que se distribuyen uniformemente sobre un conjunto de vectores o puntos, cuyas coordenadas toman como valores los dígitos de 0 a 9.

<u>Teorema 6</u>
Sea $X = (X_1,X_2,\ldots,X_n)$ una variable aleatoria n-dimensional donde

$$X : \Omega_1^n \dashrightarrow \Omega_1^n$$

$$X_j : \Omega_1^n \dashrightarrow \Omega_1$$

$X_j(w) = w_j$ para $w \in \Omega_1^n$ (es decir, la j-ésima coordenada de w)

donde $\Omega_1=\{0,\ldots,s-1\}$ con $s=10a$ y a es un número natural.
Además $X_1,X_2,\ldots,X_n$ son estadísticamente independientes e idénticamente distribuidas con medida de probabilidad uniforme, es decir:

$$P_{X_j}(\{k\}) = 1/10a \text{ para } k\in\Omega_1, \quad 1\le j\le n$$

$$P_X(\{w\}) = P_{X_1}(\{w_1\}) \cdots P_{X_n}(\{w_n\}) = (1/10a)^n$$

Sea $Y = (Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ una variable aleatoria n-dimensional donde

$$Y : \Omega_2^n \dashrightarrow \Omega_2^n$$

$$Y_j : \Omega_2^n \dashrightarrow \Omega_2$$

$Y_j(w) = w_j$ para $w \in \Omega_2^n$

$\Omega_2=\{0,\ldots,t-1\}$

Supóngase además que $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son estadísticamente independientes de modo que la medida de probabilidad en $\Omega_1^n \times \Omega_2^n$ está dada por:

$$P(\{(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)\}) = P_{X_1}(\{x_1\})\cdots P_{X_n}(\{x_n\})\ P_{Y_1}(\{y_1\})\cdots P_{Y_n}(\{y_n\})$$

y la medida de probabilidad definida en Ω_2^n es

$$P_Y(\{(y_1,\ldots,y_n)\}) = P_{Y_1}(\{y_1\}) \cdots P_{Y_n}(\{y_n\})$$

donde las funciones de probabilidad marginales P_{Y_i} no son necesariamente idénticas.

Sea $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$ la variable aleatoria tal que

$$R : \Omega_1^n \times \Omega_2^n \dashrightarrow D^n \qquad \text{donde } D=\{0,\ldots,9\}$$

$$R_j : \Omega_1^n \times \Omega_2^n \dashrightarrow D$$

$$\begin{aligned} R_j((x,y)) &= R_j((x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)) \\ &= (X_j(x) + Y_j(y)) \bmod 10 \\ &= (x_j + y_j) \bmod 10 \end{aligned}$$

Entonces la variable aleatoria R se distribuye uniformemente sobre D^n; es decir, la medida de probabilidad de R está definida por

$$P_{R_1,\ldots,R_n}(\{(k_1,\ldots,k_n)\}) = (1/10)^n \quad \text{para toda } (k_1,\ldots,k_n) \in D^n$$

Además $R_1,\ldots,R_n$ son estadísticamente independientes, es decir:

$$P_{R_1,\ldots,R_n}(\{(k_1,\ldots,k_n)\}) = P_{R_1}(\{k_1\}) \cdots P_{R_n}(\{k_n\})$$

Demostración.

$$P_{R_1,\ldots,R_n}(\{(k_1,\ldots,k_n)\}) = P(R_1=k_1,\ R_2=k_2,\ \ldots,\ R_n=k_n)$$

donde $(R_1=k_1,\ R_2=k_2,\ \ldots,\ R_n=k_n)$ denota el conjunto de los vectores $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ para los que la variable aleatoria $R=(R_1,R_2,\ldots,R_n)$ toma el valor $(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ y donde P denota la medida de probabilidad definida de la siguiente manera:

$$P(\{(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)\}) = P_{X_1}(\{x_1\})\cdots P_{X_n}(\{x_n\})\, P_{Y_1}(\{y_1\})\cdots P_{Y_n}(\{y_n\})$$

$$= (1/10a)^n\; P_{Y_1}(\{y_1\}) \cdots P_{Y_n}(\{y_n\})$$

Nótese que el conjunto $(R_1=k_1, R_2=k_2, \ldots, R_n=k_n)$ contiene las parejas (x,y) en $\Omega_1^n \times \Omega_2^n$ tales que

$R_1\ (x,y) = (x_1+y_1) \bmod 10 = k_1$
$R_2\ (x,y) = (x_2+y_2) \bmod 10 = k_2$
.
.
$R_n\ (x,y) = (x_n+y_n) \bmod 10 = k_n$

De modo que el conjunto $(R_1=k_1, R_2=k_2, \ldots, R_n=k_n)$ se puede expresar como

$(R_1=k_1) \cap \ \ldots\ \cap (R_n=k_n)$ donde

$(R_I=k_I) = \{ (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ tales que $(x_I+y_I) \bmod 10 = k_I$; $x_1,\ldots,x_n \in \Omega_1$; $y_1,\ldots,y_n \in \Omega_2$ $\}$

Por el teorema 5 se tiene que

$$(R_I=k_I) = \sum_{1 \le j \le a} A_{k_I,j}$$

donde

$$A_{k_I,j} = \{ (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \in \Omega_1^n \times \Omega_2^n \text{ tal que } x_I = F_{k_I,j}(y_I) \}$$

y

$$F_{k_I,j}(y_I) = \begin{cases} k_I - y_I + 10\,(j-1) & \text{si } y_I \le k_I \le 9 \\ k_I - y_I + 10j & \text{si } k_I < y_I \le 9 \\ F_{k_I,j}(\bmod 10\,(y_I)) & \text{si } y_I > 9 \end{cases}$$

Esto significa por un lado que el conjunto $(R_1=k_1, R_2=k_2, \ldots, R_n=k_n)$ contiene los vectores $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ tales que:

$x_I = F_{k_I,j}(y_I)$ donde $j=1,\ldots,a$; $y_I \in \Omega_2 = \{0,\ldots,t-1\}$.

Es decir, cada coordenada y_I puede tomar cualquier valor en Ω_2 y para cada valor particular de y_I existen un número a de valores posibles para x_I.

De modo que cada selección de valores x_I, y_I se puede hacer de $a\cdot t$ diferentes maneras dando un total de $(a\cdot t)^n$ vectores en el conjunto $(R_1=k_1, R_2=k_2, \ldots, R_n=k_n)$.
Sumando la medida de probabilidad sobre todos estos vectores se tiene:

$$\sum_{y_1=0}^{t-1} \cdots \sum_{y_n=0}^{t-1} \sum_{j=1}^{a} \cdots \sum_{j=1}^{a} P_{X_1}(\{F_{k_1,j}(y_1)\}) \cdots P_{X_n}(\{F_{k_n,j}(y_n)\})\, P_{Y_1}(\{y_1\}) \cdots P_{Y_n}(\{y_n\})$$

$$\sum_{y_1=0}^{t-1} \cdots \sum_{y_n=0}^{t-1} \sum_{j=1}^{a} \cdots \sum_{j=1}^{a} (1/10a)^n\, P_{Y_1}(\{y_1\}) \cdots P_{Y_n}(\{y_n\})$$

$$(1/10a)^n \sum_{y_1=0}^{t-1} \cdots \sum_{y_n=0}^{t-1} \sum_{j=1}^{a} \cdots \sum_{j=1}^{a} P_{Y_1}(\{y_1\}) \cdots P_{Y_n}(\{y_n\})$$

$$(1/10a)^n \sum_{y_1=0}^{t-1} \cdots \sum_{y_n=0}^{t-1} a^n\, P_{Y_1}(\{y_1\}) \cdots P_{Y_n}(\{y_n\})$$

$$(1/10)^n \sum_{y_1=0}^{t-1} \cdots \sum_{y_n=0}^{t-1} P_{Y_1}(\{y_1\}) \cdots P_{Y_n}(\{y_n\})$$

$$(1/10)^n$$

Por lo tanto

$$P_{R_1,R_2,\ldots,R_n}(\{(k_1,\ldots,k_n)\}) = (1/10)^n \quad \text{para toda } (k_1,\ldots,k_n) \in D^n$$

es decir, R se distribuye uniformemente sobre D^n.

Ahora se calculará $P(R_I=k_I)$.

El teorema 5 muestra que $A_{k_I,j}$ contiene todos los valores posibles en cualquier coordenada excepto para x_I la cual está determinada por el valor de y_I.

Si se renombran las coordenadas $x_1,\ldots,x_n$ exceptuando a x_I como $x'_1,\ldots,x'_{n-1}$ y se suman los valores de probabilidad sobre todos los elementos de $A_{k_I,j}$ se tiene:

$$P(A_{k_I,j}) = \sum_{x'_1=0}^{s-1} \cdots \sum_{x'_{n-1}=0}^{s-1} \sum_{y_1=0}^{t-1} \cdots \sum_{y_n=0}^{t-1} (1/10a)^n\, P_{Y_1}(\{y_1\}) \cdots P_{Y_n}(\{y_n\})$$

$$= (1/10a)^n \sum_{x'_1=0}^{s-1} \cdots \sum_{x'_{n-1}=0}^{s-1} \sum_{y_1=0}^{t-1} \cdots \sum_{y_n=0}^{t-1} P_{Y_1}(\{y_1\}) \cdots P_{Y_n}(\{y_n\})$$

$$P\,(A_{k_I,j}) = (1/10a)^n \sum_{x'_1=0}^{a-1} \cdots \sum_{x'_{n-1}=0}^{a-1} 1$$

$$= (1/10a)^n\, a^{n-1}$$

$$= (10a)^{-n} (10a)^{n-1}$$

$$= (10a)^{-1}$$

$$= 1/10a$$

En consecuencia se tiene:

$$P\,(R_I = k_I) = \sum_{1 \le j \le a} P\,(A_{k_I,j})$$

$$= \sum_{1 \le j \le a} 1/10a$$

$$= 1/10$$

Por tanto $P_{R_I}(\{k_I\}) = 1/10$ y además se tiene que

$$P_{R_1,\ldots,R_n}(\{(k_1,\ldots,k_n)\}) = P_{R_1}(\{k_1\}) \cdots P_{R_n}(\{k_n\}) = (1/10)^n.$$

Dado que la medida de probabilidad conjunta es igual al producto de las probabilidades marginales queda demostrado que las variables aleatorias R_i son estadísticamente independientes.

4.1 Aplicación del teorema a las sucesiones de realizaciones de las variables.

Un conjunto de observaciones independientes $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de cierta variable V se puede considerar como la realización de una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $V_1, V_2, \ldots, V_k$.
De modo que el teorema 6 se puede aplicar a las sucesiones de observaciones de variables aleatorias definidas originalmente en espacios lineales o de dimensión 1.

Sean X e Y variables aleatorias discretas e independientes.
Se define la variable aleatoria k-dimensional $S_X=(X_1,\ldots,X_k)$ donde las X_I son variables aleatorias independientes con medida de probabilidad

$$P_{X_I}(\{x\}) = P_X(\{x\}) = 1/10a \text{ para } x\in\Omega_1$$

$\Omega_1=\{0,\ldots,10a-1\}$ donde a es un número natural.

Las realizaciones de la variable S_X consisten en grupos de k observaciones sucesivas de X.
Sea la variable aleatoria k-dimensional $S_Y=(Y_1,\ldots,Y_k)$, donde las componentes Y_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que representan k observaciones sucesivas de la variable Y.
Supóngase que las observaciones apareadas $(X_1,Y_1),\ldots,(X_k,Y_k)$ son estadísticamente independientes y además que X_i es independiente de Y_i para $1\le i\le k$, de modo que todas las variables aleatorias $X_1,\ldots,X_k,Y_1,\ldots,Y_k$ son independientes entre si.

Sea $S_R=((X_1+Y_1) \bmod 10, \ \ldots \ , (X_k+Y_k) \bmod 10)$ que representa k observaciones sucesivas de la variable $R=(X+Y) \bmod 10$.
Por el teorema 6, S_R se distribuye uniformemente en D^k donde $D=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Esto muestra que si se tiene una sucesión $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_N$ que se distribuye uniformemente por observaciones individuales, por parejas de observaciones, por ternas, etc. sobre espacios de la forma $\{0,\ldots,10a-1\}^k$ y si se tiene otra sucesión $y_1,y_2,y_3,\ldots,y_N$ independiente de la primera, entonces la sucesión $r_1=(x_1+y_1) \bmod 10$, $r_2=(x_2+y_2) \bmod 10,\ldots,r_N=(x_N+y_N) \bmod 10$ se distribuye uniformemente por dígitos individuales en D, por parejas en D^2, por ternas en D^3, etc.

En el capitulo anterior se realizaron pruebas estadisticas para evaluar la hipótesis de que las parejas y las ternas formadas con las sucesiones de realizaciones de las diferentes variables tienen una distribución uniforme en D^2 y D^3 respectivamente. Los resultados de dichas pruebas corroboran experimentalmente el teorema 6 en el sentido de que a partir de dos vectores aleatorios independientes, uno de los cuales tiene la propiedad de que sus componentes son variables distribuidas uniformemente sobre un espacio de la forma $\{0,...,10a-1\}$, se puede construir otro vector aleatorio cuyas componentes se distribuyan uniformemente sobre D utilizando la función $R=(X+Y) \bmod 10$.

Desde el punto de vista práctico se puede aprovechar esta propiedad de la función R, para construir sucesiones de digitos $r_1,r_2,r_3,...,r_N$ que se distribuyan uniformemente (no sólo linealmente sino en espacios de dimensión mayor a 1), tomando como base tablas de digitos $x_1,x_2,x_3,...,x_N$ que hayan pasado diversas pruebas de aleatoriedad, incluyendo las de equidistribución por grupos de digitos.
Estas nuevas sucesiones de digitos se pueden considerar sucesiones aleatorias muy buenas para fines prácticos ya que pasan pruebas muy fuertes de independencia y aleatoriedad.

Capitulo 5.
Comparación entre los procesos de cálculo y de lectura de sucesiones aleatorias en una computadora.

En la actualidad la simulación de fenómenos aleatorios y otras tareas que utilizan sucesiones aleatorias de números, se realizan por lo general con ayuda de las computadoras por la rapidez y seguridad para efectuar cálculos.
En este capítulo se comparan dos mecanismos que pueden ser utilizados como generadores de números al azar en un equipo de cómputo, a saber:

- El algoritmo de congruencia lineal
- El proceso de lectura de números almacenados en disco

5.1 La decisión entre calcular o leer los números.

Hoy en día los generadores más populares de sucesiones son casos especiales del esquema introducido en 1949 por D. H. Lehmer, en el cual la sucesión $\langle X_n \rangle$ conocida como sucesión de congruencia lineal se obtiene por la ecuación

$$X_{n+1} = (a\ X_n\ + c)\ \mathrm{mod}\ m \qquad n \geq 0$$

donde las constantes cumplen lo siguiente

m el módulo	: $m > 0$
a el multiplicador	: $0 \leq a < m$
c el incremento	: $0 \leq c < m$
X_0 el valor inicial	: $0 \leq X_0 < m$

La primera desventaja que se advierte en este tipo de sucesiones es que siempre entran en un ciclo que se repite indefinidamente, lo cual ocurre porque la sucesión puede tomar a lo más m valores diferentes y al repetirse un valor se inicia un ciclo.
Sin embargo se han estudiado los principios para elegir los valores de las constantes de modo que el periodo o longitud del ciclo de las sucesiones producidas, sea lo más grande posible. De hecho cuando se utiliza un módulo m apropiado, el periodo de una sucesión congruencial lineal puede ser extremadamente largo, del orden de 10^9 o más, lo cual es suficiente para la mayoría de las aplicaciones típicas.

No obstante, el algoritmo de congruencia lineal tiene la seria deficiencia de que cada elemento a excepción del primero, depende de los anteriores, lo cual hace que las sucesiones generadas no sean apropiadas para construir sucesiones de vectores que sigan distribuyendose uniformemente en espacios de dimensión mayor a 1.

Por ejemplo cuando se utiliza un algoritmo de congruencia lineal para obtener puntos (x,y) en un cuadrado, hay m posibles valores de x cada uno de los cuales determina el valor de y. De modo que únicamente se pueden obtener m parejas (x,y) en lugar de las m^2 que uno esperaría.

La alternativa propuesta es la de registrar en un archivo valores numéricos, resultados de un suceso realmente aleatorio que se distribuya uniformemente y utilizar esa lista para construir sucesiones de cualquier dimensión. La ventaja consiste en que todos los elementos X_i de la sucesión aleatoria original son independientes entre sí, por lo cual las sucesiones $(X_i,\ldots,X_{i+k})$ tienden a ser equidistribuidas para $k>0$.

En este capítulo se estudiará la factibilidad de leer los números almacenados en archivos en disco, en lugar de generarlos con una fórmula o algoritmo determinístico.

El principal obstáculo a vencer para utilizar sucesiones almacenadas en disco, es el tiempo ocupado en leer los datos desde un dispositivo de disco. De hecho las operaciones de lectura/escritura entre el disco y la memoria principal de la computadora son mucho más lentas que las demás instrucciones realizadas por el procesador en la memoria principal.
Además un proceso de simulación requiere una gran cantidad de números al azar, por lo cual el número de operaciones de lectura es un factor principal para la eficiencia del programa de simulación.

Otra desventaja de leer los números, la cual se debe evaluar, es el tamaño de las sucesiones que requieren las aplicaciones, ya que esto implica que se deben registrar y almacenar sucesiones de resultados aleatorios suficientemente grandes.

A continuación se consideran algunos factores que pueden optimizar la recuperación de sucesiones aleatorias almacenadas en el disco de una computadora.

5.2 Factores que hacen más eficiente la lectura de archivos en disco.

El problema de mejorar el tiempo de respuesta de los programas que manipulan una gran cantidad de datos almacenados en disco ha sido un tema de interés y preocupación para muchos usuarios de sistemas de cómputo, principalmente aquellos que trabajan con bases de datos. Es por ello que a lo largo de la historia de la computación se han desarrollado varias soluciones que contribuyen a mejorar el rendimiento de esta clase de programas y que van desde el diseño físico de los componentes de la computadora hasta las técnicas de programación. A continuación se describen varias de estas soluciones que buscan reducir el número de operaciones de transferencia de datos del disco.

1. El diseño de circuitos que perfeccionan el flujo de datos.

Los fabricantes de equipos de cómputo de alto rendimiento utilizan componentes electrónicos conocidos como memoria "caché" o memoria de escondite, conectados con el procesador o CPU a través de canales de gran velocidad. La memoria de escondite almacena temporalmente datos procedentes de los dispositivos periféricos o de la memoria principal, haciéndolos disponibles al procesador para futuras instrucciones que necesiten esos datos. Esto permite minimizar los requerimientos de datos almacenados en memoria principal o en disco y acelera la ejecución de los programas.

2. El Sistema Operativo y las áreas de memoria para transferencias de archivos.

El sistema operativo es el programa que administra o controla los dispositivos de la computadora y que proporciona diversos servicios para los programas de los usuarios del equipo.

Algunos sistemas operativos se pueden configurar para que utilicen "buffers" o áreas de memoria asociadas a archivos, en los cuales se efectúan las operaciones de transferencia de datos desde y hacia el disco. Un programa que escribe datos al disco realizaría tales operaciones en el buffer en vez del disco y el sistema operativo vaciaría la información periódicamente al disco cada n segundos o cuando el buffer esté lleno. En cuanto a un programa que requiere una operación de lectura de disco, el sistema operativo puede transferir desde el disco al buffer en memoria no sólo el dato solicitado sino varios bloques contiguos de datos que pueden ser solicitados posteriormente por el programa. De esta forma se reduce el número de operaciones directas sobre el disco.

3. La organización o estructura de los datos almacenados en el disco.

Un número puede ser representado de varias maneras. Por ejemplo para un número racional se puede usar una cadena de digitos binarios para la mantisa junto con otra cadena de digitos binarios para el exponente donde el tamaño de tal estructura es fijo; o bien se puede representar como una cadena de caracteres que representan los digitos decimales que componen la parte entera, un punto y después los digitos decimales de la parte fraccionaria.

Sin embargo la primera representación es más conveniente, ya que todos los números que se puedan representar en ese formato ocupan la misma cantidad de digitos binarios, lo cual permite al programa recuperarlos de manera simple como bloques del mismo tamaño y leer varios números juntos en lugar de leer cadenas heterogéneas de caracteres de tamaño variable que representan cada número.
En otras palabras, si los datos han sido almacenados con una estructura común, el programa puede leerlos en grupos en vez de leer cada dato individualmente.

Otra aplicación útil de la organización de los datos se ha visto en los métodos de búsqueda de la información. Si los datos tienen el mismo tamaño, el programa puede localizar cualquier dato multiplicando su posición por dicho tamaño y encontrar directamente los registros con la ayuda de un índice que relaciona claves con posiciones en el archivo. Este método evita recorrer secuencialmente el archivo hasta encontrar la clave del registro buscado, por lo que acelera los sistemas de información.

4. Uso de instrucciones de lectura/escritura de registros de tamaño especificado por el programador.

El programador se encargaría de utilizar las instrucciones del lenguaje de programación con el cual esté trabajando, que permitan transferir desde o hacia el disco un número arbitrario de caracteres, ya que de esta manera podría cargar o descargar múltiples variables definidas por el programa en una sóla operación. Una vez asignados los datos recuperados a las variables definidas en el programa, éstas pueden ser procesadas por el programa que ejecuta la simulación o alguna otra tarea.

5. Selección del algoritmo óptimo para procesar los datos.

La aplicación del método de Montecarlo se puede perfeccionar en ciertas situaciones para reducir los requerimientos de tamaño de las sucesiones aleatorias, manteniendo un error muestral suficientemente pequeño.

Existen 2 formas típicas de aplicar el método de Montecarlo.
La primera forma que se pudiera llamar aplicación discreta, consiste en establecer una correspondencia entre ciertos valores de la sucesión con ciertos estados o resultados de un suceso de la realidad y entonces procesar los elementos de la sucesión detectando las ocurrencias del evento que se quiera estudiar.

Por ejemplo, en una simulación típica de atención a clientes, si se sabe que el promedio de los tiempos de llegada es de 6 minutos, se puede establecer arbitrariamente que cada número en la sucesión aleatoria es el resultado de un minuto y que si el número es menor a 1/6 entonces un cliente ha llegado y si el número es mayor o igual a 1/6 ningún cliente llegó en ese minuto.
Suponiendo que la sucesión de números es una muestra aleatoria de la distribución uniforme en [0,1], se puede esperar que los valores menores a 1/6 aparezcan con una frecuencia relativa de 1/6 y que reflejen la velocidad de entrada de clientes.

Existe otra forma de aplicar el método de Montecarlo que supone una distribución continua para el fenómeno y que puede requerir una cantidad mucho menor de datos.
Suponiendo que se tiene la distribución de probabilidades acumulativas para la variable, la cual puede ser un modelo teórico o bien una función que se obtuvo con base a la experiencia, entonces cada número de la sucesión aleatoria es considerado como un valor de probabilidad en el eje Y, para el cual se obtiene el valor correspondiente de la variable X (esto se puede hacer despejando a X en la función de distribución o bien se puede hacer con un procedimiento gráfico).
Los valores así obtenidos de la variable, por ejemplo los tiempos de llegada, se distribuirán de acuerdo al modelo utilizado, con la ventaja de que no se requiere procesar varios datos para obtener un sólo tiempo de llegada.

El caso anterior ilustra la conveniencia de utilizar una distribución continua con el método de Montecarlo siempre que la situación que se quiera simular se adapte a un modelo de ese tipo.

5.3 Pruebas de rapidez realizadas

Para obtener información relativa al tiempo requerido para leer una sucesión de números de un archivo en comparación con el método de congruencia lineal, se realizaron algunas pruebas con programas que implantan estos métodos, midiendo los tiempos que tardaron en ejecutarse.

En el programa de lectura se tomaron en cuenta algunos factores antes mencionados como la estructura de los datos almacenados y el uso de instrucciones para leer los números por bloques.
A continuación se describen varios aspectos relacionados con las pruebas.

Equipos de cómputo.

Las pruebas se realizaron en 3 diferentes computadoras con las siguientes características.

Computadora HP9000 modelo 822

Cantidad de memoria principal	: 16 MB
Procesador	: HP-PA RISC
Velocidad de reloj	: 33 MHz
Controlador de discos	: HP-IB
Capacidad del disco fijo	: 639 MB
Número de terminales conectadas	: 16

Computadora BULL DPX/20 modelo 140

Cantidad de memoria principal	: 32 MB
Procesador	: RISC
Velocidad de reloj	: 33 MHz
Controlador de discos	: SCSI
Capacidad de disco fijo	: 1024 MB
Número de terminales conectadas	: 10

Computadora CONTROL DATA modelo 386SX

Cantidad de memoria principal	: 10 MB
Procesador	: 80386
Velocidad de reloj	: 25 MHz
Controlador de discos	: IDE
Capacidad de disco fijo	: 320 MB
Número de terminales conectadas	: 3

Sistema Operativo.

El sistema operativo que se utilizó en las pruebas fué UNIX el cual ha sido adaptado por diferentes compañías para obtener un óptimo rendimiento en diferentes equipos de cómputo. Por ejemplo existen el HP-UX de HP, el AIX de IBM, el BOSX de BULL y el UNIX de SCO.
Este sistema operativo está ampliamente difundido y es utilizado en computadoras de capacidad mediana y grande.

El sistema operativo UNIX soporta eficientemente el manejo de archivos y de áreas de memoria para acelerar transferencias de datos desde y hacia disco. Además proporciona en forma natural muchas rutinas necesarias para programar en lenguaje C.

Lenguaje de Programación.

Tanto el programa de lectura como el de congruencia lineal se programaron en el lenguaje de programación C por la disponibilidad de dicho lenguaje en los sistemas UNIX y por la transportabilidad del código en diferentes sistemas operativos y máquinas.

Descripción de los programas.

1. Programa de lectura.

El programa de lectura lee números en representación de punto flotante previamente grabados en un archivo. De modo que no realiza ningún cálculo adicional. Se define en el programa una variable llamada *lista* la cual es un arreglo de N variables tipo "*float*" (punto flotante).
Se utiliza la función "*fread*" del lenguaje C que permite leer un número arbitrario de variables del mismo tipo desde un archivo en disco.
Después de ejecutarse cada vez la instrucción *fread*, la variable *lista* llega a contener N números leidos de disco.
El programa de lectura reconoce como parámetros la cantidad de operaciones de lectura, la cantidad de números que se deben recuperar por cada lectura y el nombre del archivo que contiene los números.

2. Programa del método de congruencia lineal.

Este programa utiliza la fórmula $X_{n+1} = (a X_n + c) \bmod m$
donde a, c y m son constantes enteras. La variable X toma un valor inicial arbitrario X_0 y se actualiza por medio de la fórmula anterior un número dado de veces.

Descripción de las pruebas.

Se utilizó a lo largo de las pruebas una cantidad fija de 500,000 valores que fueron calculados o recuperados de un archivo, variando el número de mensajes y el número de operaciones de lectura de disco. Tal cantidad de valores posiblemente no sea suficiente para simulaciones complejas, pero da una idea de los tiempos utilizados por los procesos de cálculo y de lectura. Para probar el programa de lectura no se utilizaron los datos de las sucesiones analizadas en capítulos anteriores de este trabajo, debido a que el tamaño de tales sucesiones no es suficientemente grande.

Los datos de prueba para el proceso de lectura consistieron en números de la forma x/1000000 para x natural en el rango $1 \leq x \leq 500000$, generados y almacenados en un archivo mediante el programa "*gefl.c*".

Los tiempos se midieron con la utilería "timex" del sistema operativo UNIX, la cual reporta el tiempo en minutos y segundos con exactitud de centésimas de segundo.
Los programas se ejecutaron uno por uno, en un horario en que ningún otro usuario estaba trabajando en el sistema.

Por lo general un programa de simulación presenta cierta información en pantalla, por lo que originalmente los programas incluyeron instrucciones para enviar periódicamente a pantalla mensajes con la cantidad de números procesados. En el caso del programa de lectura de un archivo, cada mensaje coincidía con una operación de lectura de un bloque de números.

Al ejecutar el programa de congruencia lineal se observó que gran parte del tiempo ocupado se debe a las operaciones para desplegar mensajes en pantalla ya que al reducir el número de veces que se mandan mensajes a pantalla el tiempo se reduce significativamente.
En el caso del programa de lectura del archivo también se observó que el tiempo ocupado disminuye al reducirse el número de mensajes.
Sin embargo debido a la influencia de este factor, los tiempos registrados no daban una medida clara de cuánto afecta el tamaño del bloque de números leidos en una sóla operación, al tiempo de ejecución del programa. Por esa razón, se modificaron los programas inhibiendo las instrucciones de salida a pantalla y se corrieron los programas nuevamente.
Los resultados se muestran en las tablas siguientes con los tiempos de ejecución escritos en formato minutos:segundos.

Tabla 5.1
Tiempos del programa de congruencia lineal con mensajes

m/n	total de mensajes	TIEMPO computadora 1	computadora 2	computadora 3
1/10	50000	16:37.90	15:03.05	14:33.60
1/50	10000	3:24.00	3:02:03	3:11.95
1/100	5000	1:44.71	1:31:89	2:10.48
1/200	2500	0:54.85	0:46.60	1:41.20
1/1000	500	0:15.11	0:10.75	1:14.90
1/2000	250	0:10.35	0:06.65	1:11.70

m/n = mensajes/números, es la periodicidad de los mensajes en función de los números procesados

Tabla 5.2
Tiempos del programa de lectura con 1 mensaje por cada operación de lectura

m/n	total de mensajes	TIEMPO computadora 1	computadora 2	computadora 3
1/10	50000	15:48.75	14:09.28	13:41.46
1/50	10000	3:14.50	2:51.10	3:04.10
1/100	5000	1:40.30	1:26.19	2:05.66
1/200	2500	0:55.00	0:44.25	1:36.70
1/1000	500	0:15.01	0:10.02	1:16.28
1/2000	250	0:10.46	0:06.39	1:10.43

m/n = mensajes/números, es la periodicidad de los mensajes en función de los números procesados

Tabla 5.3
Tiempos del programa de congruencia lineal sin ningún mensaje

Computadora 1	Computadora 2	Computadora 3
0:04.50	0:01.27	1:13.78

Tabla 5.4
Tiempos del programa de lectura sin ningún mensaje

bloque de lectura	total de lecturas	TIEMPO computadora 1	computadora 2	computadora 3
1	500000	0:10.34	0:03.08	1:22.83
2	250000	0:06.78	0:01.79	1:14.88
5	100000	0:04.86	0:01.12	1:10.08
10	50000	0:04.72	0:00.84	1:08.40
50	10000	0:04.72	0:00.69	1:07.11
100	5000	0:04.66	0:00.67	1:06.93
200	2500	0:04.66	0:00.66	1:06.80
1000	500	0:04.70	0:00.65	1:06.70
2000	250	0:04.74	0:00.65	1:06.76

Como se puede advertir en las tablas 5.3 y 5.4, la cantidad de números que se leen como un sólo bloque en una operación de lectura de disco, es un factor que influye para reducir el tiempo de respuesta del programa de lectura, a tal grado que puede ser muy cercano al tiempo obtenido con el algoritmo de congruencia lineal y aun mejorar dicho tiempo.

Sin embargo al comparar los tiempos entre los diferentes equipos de cómputo, se observa que para obtener tiempos de respuesta satisfactorios con el programa de lectura de números almacenados en disco, es necesario disponer de un equipo de gran capacidad y rendimiento como en el caso de los dos primeros equipos, ya que en el caso del tercer equipo el cual se considera una computadora personal, el tiempo de respuesta no mejora considerablemente.

<u>Otras consideraciones sobre la implantación del método de lectura</u>

Además del tiempo de respuesta, se deben tomar en cuenta otros aspectos para la implantación del método de lectura.

Si se requiere una gran cantidad de números al azar, se debe disponer de un banco de datos suficientemente grande, del cual se puedan extraer las sucesiones de resultados. Si se van a recolectar los datos aleatorios observando sucesos directamente de la realidad tal como el lanzamiento de una moneda, entonces se requerirá más tiempo y trabajo humano.
Después se deben aplicar las pruebas de equidistribución o algunas otras pruebas de aleatoriedad a tales sucesiones para seleccionar aquellas que tienen las propiedades que se requieren en la investigación.
Se puede utilizar el método de fray Edvin para construir sucesiones de dígitos con distribución uniforme, a partir de las sucesiones disponibles que cumplan las condiciones establecidas en los capítulos 1 y 4.

Por otro lado es posible que antes de ejecutar un proceso de simulación, se tengan que realizar algunos pasos previos sobre las tablas originales para obtener los datos requeridos por el proceso, tales como dígitos decimales, dígitos binarios, números enteros dentro de un rango, valores en el intervalo [0,1], parejas de números en [0,1], etc.
Por ejemplo si se tienen tablas de dígitos al azar como las que se han analizado en los capítulos anteriores y se necesitan números enteros en un rango [0-N] se podrían tomar varios dígitos contiguos para formar cada número. Y si se requieren números decimales en el rango [0,1] se pueden tomar k dígitos contiguos y dividir el número que formen entre 10^k . Estas nuevas sucesiones de resultados se deben guardar para su uso posterior en las aplicaciones, de modo que la transformación de los datos originales en los datos que se requieren, no se realice cada vez que se ejecute el proceso de simulación.

Una vez que se tienen las sucesiones apropiadas, la forma natural de utilizarlas, consiste en leer cada número o grupo de números y utilizarlos como ocurrencias o resultados del experimento simulado. En esta situación no se requiere ningún cálculo adicional salvo aquellos cálculos inherentes al proceso de simulación.
Sin embargo se podrían utilizar métodos alternativos de lectura del archivo de datos. En lugar de leerlos en orden secuencial, se pueden leer en otro orden arbitrario utilizando algún algoritmo para permutar los elementos de la sucesión. Esto aumentaría la complejidad del proceso y su tiempo de respuesta, pero podría dar mayor variedad en los experimentos.
También se debe notar que el mecanismo o proceso de recuperación de datos no es aleatorio, sino que cada vez que se ejecute, proporciona los resultados de la sucesión en el mismo orden. Esto es necesario en algunos casos para poder repetir una simulación y observar características o propiedades adicionales utilizando exactamente la misma sucesión de datos que en ocasiones anteriores.

En conclusión, la decisión de usar un algoritmo como el de congruencia lineal o un proceso de lectura dependerá de una evaluación cuidadosa de diferentes aspectos como independencia de las observaciones, tiempo de respuesta, disponibilidad de datos y requerimientos de programas para computadora, así como el tipo de investigación especifica que se desee realizar.

Conclusiones y perspectivas del estudio.

Se demostró teóricamente que la variable R=(X+Y) mod 10 no siempre se distribuye uniformemente, lo cual se verificó al analizar algunos colectivos de datos reales.

También se demostró que si se tienen dos variables aleatorias discretas independientes X e Y y una de las dos variables se distribuye uniformemente sobre un conjunto de valores de la forma {0,1,...,10a-1} donde a es natural, entonces la variable aleatoria R se distribuye uniformemente en {0,1,...,9}

Se mostró con un ejemplo que tales condiciones son suficientes pero no necesarias para que R se distribuya uniformemente. Las condiciones necesarias abarcan una variedad más amplia de situaciones relacionadas con las distribuciones de X e Y que las mencionadas en este trabajo. Tales condiciones no se establecieron formalmente, por lo que serían objeto de una futura investigación.

Se demostró que a partir de dos vectores aleatorios independientes, uno de los cuales tiene la propiedad de que sus componentes son variables distribuidas uniformemente sobre un espacio de la forma {0,...,10a-1}, se puede construir otro vector aleatorio cuyas componentes se distribuyan uniformemente sobre D={0,...,9} utilizando la función R=(X+Y)mod 10.

Esta propiedad de la función R se puede aprovechar para construir sucesiones de dígitos $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N$ que se distribuyan uniformemente, no sólo linealmente sino en espacios de dimensión mayor a 1, tomando como base tablas de dígitos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ que hayan pasado pruebas de equidistribución por grupos de dígitos.

Las pruebas estadísticas de bondad de ajuste aplicadas a sucesiones de datos reales concuerdan con los resultados teóricos. Varias sucesiones analizadas tienen distribución uniforme por dígitos individuales, por parejas y por ternas. Dichas sucesiones se recomiendan como tablas de dígitos al azar a reserva de aplicar otras pruebas de aleatoriedad.

Se estudió la posibilidad de utilizar sucesiones aleatorias almacenadas en el disco de la computadora, en lugar de sucesiones generadas por el algoritmo de congruencia lineal, midiendo tiempos de ejecución de ambos métodos. Los tiempos de respuesta muestran que en equipos de mediana capacidad no hay una diferencia significativa, aunque es necesario considerar otros aspectos como el tamaño de las sucesiones y la facilidad para recolectar y procesar los resultados aleatorios.

Los resultados de este trabajo muestran que el método de fray Edvin de sumar dos sucesiones independientes y obtener el módulo en cierta base, constituye bajo ciertas condiciones un método para obtener sucesiones de dígitos con distribución uniforme.
Sin embargo puede ser que las sucesiones construidas con el método de fray Edvin tengan una cantidad reducida de elementos, por lo que surge una pregunta para futura investigación: ¿ se pueden "pegar" las tablas construidas con las tablas originales para formar una sola tabla de mayor tamaño que siga teniendo propiedades de equidistribución e independencia entre elementos ?.

Otro tema para desarrollar tiene que ver con la generalización de los teoremas para otros sistemas numéricos. Por ejemplo se pueden estudiar las condiciones para la uniformidad de R=(X+Y) mod 2 con el propósito de obtener sucesiones de dígitos binarios.

Bibliografía.

1.- KNUTH, DONALD E., "The art of computer programming", Edit. Addison Wesley Publishing Company, 1981, Cap. 3

2.- CONNOVER W.J., "Practical nonparametric statistics", Edit. John Wiley & Sons Inc., 1971, secciones 2.1 y 7.3

3.- EKELAND IVAR, "Al azar", España,Edit. Gedisa, 1992, Caps. 1 y 2.

4.- FRANKLIN J.N., "Deterministic Simulation of Random Processes", Math.Comp., 1963, pags.28-69

5.- KENDALL M.G. y BABINGTON-SMITH B., "Randomness and Random Sampling Numbers", J. Roy.Statist.Soc., 1938

6.- NIEVA A., "Corduras del azar", Depto. Matemáticas Fac. Ciencias UNAM, 1993

7.- CHOU YA-LUN, "Análisis estadistico", Edit. Interamericana, 1977, Cap. 7

APENDICE A
Función de distribución X^2

Aproximación por la fórmula $W_p = k+\sqrt{2k}\,U_p+(2/3)U_p^2-(2/3)$

U_p son cuantiles de la distribución normal estandar

W_p son cuantiles de la distribución X^2 con k grados de libertad.

p	U_p	W_p		
		k=81	k=90	k=981
0,0001	-3,719	42,21926	48,65881	824,82327
0,0005	-3,2905	45,67069	52,40526	841,80097
0,001	-3,0902	47,36802	54,24048	849,82107
0,005	-2,5758	51,97210	59,19872	870,66299
0,01	-2,3263	54,33230	61,73069	880,89904
0,015	-2,1701	55,85215	63,35808	887,34958
0,02	-2,0537	57,00590	64,59197	892,17768
0,025	-1,96	57,94777	65,59835	896,07733
0,03	-1,8808	58,75301	66,45813	899,38265
0,04	-1,7507	60,09393	67,88861	904,83037
0,05	-1,6449	61,20103	69,06855	909,27721
0,06	-1,5548	62,15561	70,08516	913,07594
0,07	-1,4758	63,00150	70,98544	916,41558
0,075	-1,4395	63,39297	71,40190	917,95292
0,08	-1,4051	63,76557	71,79819	919,41141
0,09	-1,3408	64,46626	72,54315	922,14183
0,1	-1,2816	65,11625	73,23390	924,66056
0,11	-1,2265	65,72542	73,88100	927,00905
0,12	-1,175	66,29845	74,48949	929,20776
0,13	-1,1264	66,84246	75,06696	931,28590
0,14	-1,0803	67,36140	75,61763	933,26006
0,15	-1,0364	67,85820	76,14466	935,14263
0,16	-0,9945	68,33477	76,65008	936,94184
0,17	-0,9542	68,79535	77,13840	938,67455
0,18	-0,9154	69,24083	77,61059	940,34481
0,19	-0,8779	69,67329	78,06887	941,96102
0,2	-0,8416	70,09370	78,51428	943,52729
0,21	-0,8064	70,50305	78,94786	945,04778
0,22	-0,7722	70,90235	79,37070	946,52666
0,23	-0,7388	71,29381	79,78517	947,97245
0,24	-0,7063	71,67616	80,18989	949,38071
0,25	-0,6745	72,05163	80,58725	950,76000
0,26	-0,6433	72,42133	80,97843	952,11457
0,27	-0,6128	72,78399	81,36209	953,44001
0,28	-0,5828	73,14192	81,74067	954,74493
0,29	-0,5534	73,49385	82,11284	956,02492
0,3	-0,5244	73,84212	82,48108	957,28862
0,31	-0,4959	74,18548	82,84406	958,53163
0,32	-0,4677	74,52629	83,20429	959,76261
0,33	-0,4399	74,86330	83,56044	960,97718
0,34	-0,4125	75,19648	83,91248	962,17527

APENDICE A
Función de distribución χ^2
(Continuación)

p	U_p	W_p		
		k=81	k=90	k=981
0,35	-0,3853	75,52821	84,26294	963,36562
0,36	-0,3585	75,85603	84,60921	964,53942
0,37	-0,3319	76,18234	84,95384	965,70541
0,38	-0,3055	76,50714	85,29681	966,86356
0,39	-0,2793	76,83040	85,63811	968,01386
0,4	-0,2533	77,15209	85,97770	969,15629
0,41	-0,2275	77,47220	86,31557	970,29081
0,42	-0,2019	77,79071	86,65171	971,41742
0,43	-0,1764	78,10884	86,98739	972,54050
0,44	-0,151	78,42659	87,32263	973,66004
0,45	-0,1257	78,74393	87,65739	974,77602
0,46	-0,1004	79,06214	87,99301	975,89286
0,47	-0,0753	79,37867	88,32683	977,00171
0,48	-0,0502	79,69604	88,66148	978,11140
0,49	-0,0251	80,01425	88,99697	979,22193
0,5	0	80,33330	89,33330	980,33330
0,51	0,0251	80,65319	89,67047	981,44551
0,52	0,0502	80,97392	90,00848	982,55856
0,53	0,0753	81,29549	90,34734	983,67245
0,54	0,1004	81,61790	90,68703	984,78719
0,55	0,1257	81,94373	91,03028	985,91165
0,56	0,151	82,27042	91,37438	987,03697
0,57	0,1764	82,59925	91,72070	988,16759
0,58	0,2019	82,93024	92,06925	989,30353
0,59	0,2275	83,26341	92,42004	990,44480
0,6	0,2533	83,60006	92,77445	991,59587
0,61	0,2793	83,94022	93,13251	992,75675
0,62	0,3055	84,28390	93,49423	993,92748
0,63	0,3319	84,63114	93,85965	995,10808
0,64	0,3585	84,98195	94,22877	996,29855
0,65	0,3853	85,33634	94,60161	997,49893
0,66	0,4125	85,69701	94,98101	998,71821
0,67	0,4399	86,06133	95,36419	999,94745
0,68	0,4677	86,43199	95,75399	1001,19566
0,69	0,4959	86,80903	96,15045	1002,46288
0,7	0,5244	87,19116	96,55220	1003,74466
0,71	0,5534	87,58111	96,96211	1005,05004
0,72	0,5828	87,97758	97,37883	1006,37457
0,73	0,6128	88,38333	97,80523	1007,72731
0,74	0,6433	88,79708	98,23997	1009,10384
0,75	0,6745	89,22160	98,68598	1010,51324
0,76	0,7063	89,65562	99,14189	1011,95107
0,77	0,7388	90,10059	99,60924	1013,42196
0,78	0,7722	90,55935	100,09099	1014,93504
0,79	0,8064	91,03064	100,58583	1016,48590

APENDICE A

Función de distribución χ^2

(Continuación)

p	u_p	w_p		
		k=81	k=90	k=981
0,8	0,8416	91,51734	101,09676	1018,08374
0,81	0,8779	92,02097	101,62539	1019,73325
0,82	0,9154	92,54311	102,17334	1021,43912
0,83	0,9542	93,08531	102,74226	1023,20611
0,84	0,9945	93,65060	103,33530	1025,04354
0,85	1,0364	94,24064	103,95418	1026,95621
0,86	1,0803	94,86135	104,60511	1028,96269
0,87	1,1264	95,51592	105,29143	1031,07248
0,88	1,175	96,20907	106,01803	1033,29976
0,89	1,2265	96,94701	106,79143	1035,66339
0,9	1,2816	97,74046	107,62281	1038,19615
0,91	1,3408	98,59745	108,52057	1040,92188
0,92	1,4051	99,53357	109,50095	1043,88773
0,925	1,4395	100,03665	110,02772	1045,47670
0,93	1,4758	100,56923	110,58529	1047,15514
0,94	1,5548	101,73436	111,80480	1050,81402
0,95	1,6449	103,07335	113,20582	1054,99716
0,96	1,7507	104,65948	114,86479	1059,92303
0,97	1,8808	106,63037	116,92526	1066,00073
0,975	1,96	107,84122	118,19064	1069,71166
0,98	2,0537	109,28456	119,69849	1074,11278
0,985	2,1701	111,09388	121,58794	1079,59644
0,99	2,3263	113,55023	124,15183	1086,98349
0,995	2,5758	117,54127	128,31465	1098,85038
0,999	3,0902	126,03167	137,15920	1123,57861
0,9995	3,2905	129,43315	140,69859	1133,30287
0,9999	3,719	136,88954	148,44999	1154,28554

APENDICE B
DATOS EXPERIMENTALES

TABLA 1.
ULTIMO DIGITO DEL AÑO DE NACIMIENTO

TABLA 2.
ULTIMO DIGITO DEL MES DE NACIMIENTO

TABLA 3.
ULTIMO DIGITO DEL DIA DE NACIMIENTO

TABLA 4.
LONGITUD DEL APELLIDO PATERNO

TABLA 5.
R= [(ULTIMO DIGITO DEL AÑO)+(ULTIMO DIGITO DEL MES)] MOD 10

TABLA 6.
R= [(ULTIMO DIGITO DEL AÑO)+(ULTIMO DIGITO DEL DIA)] MOD 10

TABLA 7.
R= [(ULTIMO DIGITO DEL MES)+(ULTIMO DIGITO DEL DIA)] MOD 10

TABLA 8.
R= [(LONGITUD DEL APELLIDO PATERNO)+(ULTIMO DIGITO DEL AÑO)] MOD 10

TABLA 9.
R= [(LONGITUD DEL APELLIDO PATERNO)+(ULTIMO DIGITO DEL MES)] MOD 10

TABLA 10.
R= [(LONGITUD DEL APELLIDO PATERNO)+(ULTIMO DIGITO DEL DIA)] MOD 10

APENDICE B

TABLA 1. ULTIMO DIGITO DEL AÑO DE NACIMIENTO

9956598905	7270900286	0676033579	9465329926	0556180590	6575736734
5660338869	6223191945	7767530502	5231628818	8904173010	4699501429
9882567628	3897328595	6764201946	8196721862	3144368154	1152316366
9611954416	6896726971	9251700520	2259793043	2863167957	2052740685
7777924640	4775926893	3898473300	9319102707	2967054575	9450114720
4273589268	4445225290	0758510005	0813019686	4862882631	8701053176
9289962735	3278373104	4497101690	8197692507	7036202093	2589243352
5987618342	8848020404	6320974336	9588564792	4671230742	1616009953
1700593069	9019057304	7982489258	7989411244	9966000504	9527598165
4331515767	8928920776	4174072754	1649016308	8125340301	4425231992

8985278236	6099028003	4743822854	3362938335	0143545521	1851109345
9897727134	6793736901	6430079454	1248135287	6130000426	2070324000
1362543287	0367390190	3775149361	8445788830	4020601168	8240761966
1455778627	8489116986	7830852382	9701442356	9380488249	8588759736
0983558698	0674998634	1574841122	7464876783	1032381394	6608186996
2689473063	4076836428	7244443622	2018359947	0957621215	5686661993
0381091611	5654087628	6881898066	9921187339	7406801897	8130825512
4479671820	8539410669	3135496701	1245964932	4897359147	3115268506
1289283015	8144784729	3074755454	7541513195	2777708690	6262051610
7644558581	0097162149	9559231691	2439989005	3229638456	4248701278

6531197770	6024217450	7744305559	6931225855	6919806996	2902478940
4901678304	4251739168	1105815795	3947217003	6925725563	8211389186
8777864505	5471787062	1450038319	2532469987	4462789949	7620013963
8077114733	1666607572	9701099208	1389887239	8671900852	4967252439
1499379371	6529738892	9698557437	7363277393	3839758924	2457936413
1210655610	3960490958	0346159093	0932249827	2666462612	4242695216
4304411875	1613151540	1428253439	8426992212	5164405113	3145813486
9147823049	5129509866	9987037676	4585713777	3825708465	3448979901
0800290964	4234721094	1187545298	2245145755	7481093084	4653735696
8301894702	6689119222	9547244031	2801510061	0765739019	3439841402

0123094371	8893882223	8234429935	3259910050	9131898205	0513055382
7724779035	6092420904	1371903475	1605251554	9718268825	5353723764
9439791221	6429316683	3155947494	9325444738	1458715864	1387628659
2383322373	3625749666	2742737366	3741815449	0637262207	5354577065
6137891661	6462290835	5900182993	9435628083	2407764836	5187893283
0420320234	9936441767	8473680460	1015655510	5819944574	5006021457
5320399720	3689460570	8714953405	8406308747	2791487672	7939968478
5305459305	9393480066	1059488482	5186977788	9510800091	2123300574
4283549930	3263834530	3382629187	0460964268	8364261333	4788879696
5353768202	6910367887	1407819371	7212508636	7786738988	5643416773

APENDICE B

TABLA 1. ULTIMO DIGITO DEL AÑO DE NACIMIENTO (Continuación)

5992179200	4179947750	9821323653	7744630741	1188392713	8921394955
6594291519	3225947044	4744207231	8653008269	0851354276	8673178830
7226883042	3596960458	4487351413	1124251143	4024188992	0250037535
6890899954	9066425963	9496884372	5225589932	0445972060	9908705218
8749089582	4909579818	9079337988	0877499886	3318754093	9662181090
6154816880	7883333606	4990092342	2811147792	8888805594	8348686580
8406569891	3914253573	8782953596	1842704050	3409818223	6799099312
6470344738	8772298939	8085749919	6776950530	9504400948	9257661870
7858941328	0700780635	0933298646	3523620108	9996814777	7959880778
6856915550	3456179714	0009052845	3285500796	8188643830	2522989917

0708147637	1826348400	2293452764	6511422677	2876844365	3036606841
4944381393	9447938711	0403842344	6618176608	6857120732	8383238626
0430606220	2438785604	9087292739	3977372317	3682368150	8655976238
1783006666	4329684834	5617706890	6671138503	1507639880	6474852463
0757192875	9588817139	5159068515	9917106657	2945207916	2943889579
9291440185	6168397724	7695948773	1706875555	8889495324	9679644794
7066640534	2002906225	8408150421	3820618902	9158354284	9449827394
5856054641	7111672053	1243091607	6582501349	4907991423	1698663342
0940287185	9529817833	2726582110	7999646103	1920277221	1565890499
7843387915	1823939785	1882779219	8918495313	6490360226	8346997506

6846733032	9571125771	0020269201	0408183151	3450183295	7503112215
4752528993	5839523361	9429602545	0901438686	2909905249	1187785129
7435666224	9934802427	1203081558	7777234183	9631258104	7938025623
1271549885	4462363700	2383752064	5246971722	9426975521	4777947467
2596012390	3171955503	2839200336	4183060251	6017092124	3629983556
9215359064	0860712703	5357520238	6208889688	3244137099	4727922819
2342184866	4923676673	5022001622	2853540829	3579079223	0411791274
3173017475	1186458811	3719110081	4566018435	5484497161	9785230538
2388025599	4553768962	1195897807	0947311652	7171305337	5674761742
1860801132	0532649616	2891854578	4132273418	9739543750	0890505399

0877047237	0316987121	7111018026	9788022250	9119719907	6858190708
5744652813	2641358267	0855185702	9141487242	3797587394	0603754464
5828956227	2193908250	7620663406	6423148828	9940780212	5271616986
7853118483	1723172119	8421881741	1501323100	4109504236	6056300012
4491107004	7028726379	4214745778	6222625245	8461021005	9045269721
1408715407	9406238256	9566537390	1117234234	6717911217	6591010460
9601382418	9768594648	0774938975	1393643763	5889727603	8254723875
6909488825	3797883105	5481091959	1999291585	6054267374	6546517862
4370413434	1218245589	5975813182	0912623909	1606359566	2049475553
8262595027	8023379359	5953680101	4828845149	8398242523	0368076599
1888092031	9707704189	3096305373	1015729660	4558352340	9771439241
9991083227	90				

APENDICE B

TABLA 2. ULTIMO DIGITO DEL MES DE NACIMIENTO

8589473379	4152722660	9695215298	0628982799	4711921206	5721118008
5339851392	4628615694	3928398252	9120327073	9756009082	0004151587
9701018083	5280274835	6948869511	6556631699	0872227171	2096584397
1572342434	3145494385	1781215388	4171493606	4292298565	3101725854
6703390190	4636498851	3727163079	9752243185	1357718518	2775414728
7784912814	8022991588	6927771254	4421687482	9126003061	2429291489
2411286643	0566422651	5406325921	8065301527	5969912119	1140192110
8286147126	9737360331	0957455326	8920814181	7979411623	4598395517
8943219217	5903952252	3111005611	9100243844	1267361511	5546312887
0489292059	8397670358	5941118071	3187200032	7299643411	4278557802

4954921040	8271705122	4712524148	1326311339	4928723490	7199416616
8205325815	7723719481	3663037960	3888770782	8594318262	1432025277
6111711853	5638229726	1197191362	3520423794	8839741801	1022401990
0593649134	1905112281	1921312695	1164121359	5172151282	6995184726
3819783201	5178882033	7182680236	7014121241	1282193268	0092822732
4470120128	2296176561	2299960404	5120972145	4298140230	2228222211
2135161791	2069302060	2559522724	1395851002	7431525116	9128191011
5085057942	9205555893	5026621711	7852515322	9223136431	4374159958
1541909375	1820436027	7945380773	9408235818	8765956738	6382382031
1120398289	3029718715	0252265114	5537212000	1221307513	1158480197

1072792368	2210229101	1136022681	1687989412	7735143711	8204940539
8865225951	4046992632	9012510581	0668526847	2057217291	9626225829
3516386072	1325779124	5282627813	2927220019	1894206012	3012125261
0272102381	4565912611	5425952191	0723528729	4524888491	7978671166
5661041469	4852270937	3063125121	8114385105	6550714929	9141930882
4815322215	8417820288	8151231141	9502860117	6826314867	0972142213
3415327035	7509903101	5059510998	7941246736	6429712861	8211113629
5871199036	3915990104	3125909612	8201254035	3961271483	1248212885
0136517520	7903301222	7352287773	4797444440	9116171723	6167184241
2218426741	4929814177	2794411690	5674474202	3475449422	7601931248

0134583713	6249442372	5223474737	4204965750	4774408152	0001523380
7818323251	9790118790	9236886310	5110256890	2832120828	2316222725
1107216792	4039946127	9270222089	1049905695	7738067780	7139564112
7914167112	3009119258	9899224921	2089586784	4843756314	7578800705
1776707713	1238436676	4281185638	9858432911	7181370221	0011953179
2150332212	1388116257	7723626367	6075441273	0980094929	6124417689
7577441131	8090108281	7212178627	5077951411	4201133761	0775549374
5417394224	4810140672	8258015292	3184268978	3631200555	0462217165
2719493604	0617743133	2316511241	1530616850	5257847106	1755781964
9225216052	1134690739	9122174749	5825751320	0760215512	1787663526

APENDICE B

TABLA 2. ULTIMO DIGITO DEL MES DE NACIMIENTO (Continuación)

9512323296	7462091642	8391289968	2596390360	2076336586	2579177477
7154539166	7174345222	1519756219	0216574204	9684192283	2101288054
1815577001	2417553824	1011021919	6727118945	4794325627	4225065178
6241709604	2266511925	2723050883	8258016415	0928799581	1212078351
8304654610	3610821244	5577827514	3166604215	2741884282	5890145708
2765985043	1122295996	8577725310	1786597291	1335695895	6249511214
0312254117	2677381978	4142902371	3771242011	3296768484	3848129413
7501776109	2121451701	0781756691	2852046911	1440467750	5928926102
9565288229	1554815412	4111302418	2126745314	2714211589	0307410683
2481328192	8021918726	0552961627	2095165378	5221636348	9411259064

1520431693	4343120910	2382293445	1286805112	1860536226	9347519422
1331785813	0296152212	1327612127	9164652523	8516360845	0913833911
2672010891	1011649670	1922387151	6994716992	1418412602	6516424937
2371725296	8380191997	8312425926	0708000412	6703996194	0159805972
5235384284	1491966453	2468302294	6160135012	4016251779	4160722867
2990289133	9000661219	1264980632	0502245841	6055041051	9379852712
8271613859	2102229899	7055619584	0352035619	7651679647	1459216326
5132892930	3150911761	1745422607	0413313367	8352184205	2337612222
1612513182	1708613930	2378450067	2025476281	0551419223	2841136903
4592447891	4158623687	8451885112	2221272629	2117105199	0825882526

0006497015	0122500181	6787209615	5374177938	6113302791	4247192779
3091712537	2620150205	0657089124	4241021371	1758847080	2027813166
5116119595	3132742683	2413610116	2218946323	5015101107	2642223252
3495552827	1725942014	1812972901	1296975881	9110117221	2594142002
8003168743	8072028062	7087907650	3347911235	3250211791	8818766513
4703257429	9022943911	7211211161	9975710710	8124799832	5249740271
7121217313	1211213599	9112201631	0211163400	3219459527	7300220232
7872205754	2715291344	9188270655	3166242724	8855836762	1211552551
2511876654	2390163214	2930908693	9260190899	1858368794	2118204121
6226748209	2168162100	0438957290	6101159158	7911214071	3211104958

6412414981	3129146811	8656564022	9512012151	1193211681	2101255272
1724141497	7782820220	1228412016	6281130647	1517013112	4033536451
2164112158	9686691954	2866121838	5086962280	1078841195	2329613008
8271442268	0663251781	0216273324	1882095610	8066312899	2913186099
3401349079	4787518629	8122212620	5350942911	1396267566	0179116915
1791018017	5521885163	1639759543	6205133390	3859118896	4282701288
2872061470	6845044615	2232380428	6100326421	2013931912	9925152272
9220243610	6871881325	9013464325	7811293923	5747238296	4863124169
4179949424	7251015151	1854324249	0539694171	9642349216	2222539352
5220748390	3436995514	2245283010	5625023121	6188127068	1731280886

3010447892	4918032871	1288619527	1415452323	7334222805	0003731641
2333186069	70				

APENDICE B

TABLA 3. ULTIMO DIGITO DEL DIA DE NACIMIENTO

1538174205	9401843759	1260977672	2441117968	7331885522	0112456135
8492778102	1670805651	8943658918	6604358959	9814458071	4279247907
8658095508	4025605469	4410911454	5390932371	1731363787	4562125487
2556693460	6937213080	7619182919	2099653808	2996821707	9089753607
0952136397	0898651646	3099428647	6643353145	5289212472	7420840352
4220314615	1953140748	1765255552	7512201916	8837245034	8018208320
5217471804	4831776707	3852161378	0027316388	4449403931	6376816707
0167148251	7138743531	4733578587	1570003649	2030395636	2365206538
6222671754	1818386261	4285416244	9447436374	7211305436	0845433599
5134696902	5909027117	2740447117	8111927111	9320728461	4218170738

6934435094	2672861602	5469003190	0914510195	5243838427	2553806493
9979601406	3289692031	3803870941	2804270252	3682337487	9460001465
2187412315	4860697408	0088441181	0833172274	8130863413	7369517123
4687787195	1855367131	7605928504	9320744476	3562201110	8921474894
3435089657	7967354320	6466147756	8449949221	6878184211	8114245975
2847251645	0238785077	6853049943	8417237205	7240553855	5909602300
6573076012	1021898266	5824295210	6989346787	9872373734	9512376770
8183739155	7480597090	2793151457	5609439780	0383639652	7214184346
2944983494	1443001391	3475430751	8943839559	0022534720	0243124506
3716295375	4360197792	5430056664	0009562081	5763618958	4070949387

4915754405	0864709902	2066329991	1549907481	1010941132	1662054023
6137360980	1027752765	5160675305	4057497651	3091986784	1834845526
0838920179	3170458299	2343245669	5609194971	4208861079	1745975825
5412606374	6909922543	0497809863	3247218039	6374930901	6796562990
8348156514	3741733386	9614512142	1765254103	8297233623	8832420477
8973933445	1172660982	7114713406	2673079266	8043495246	8114028800
5425132346	5412061601	8384141990	4929562202	6697333039	6017581159
6435746154	7141425395	1081045369	3314155171	5174717370	9396576475
4133406308	0218129358	5454482040	7501506206	8166444629	4320857105
3636515112	1448828188	5724583425	7385947814	4496322825	4677222953

5122489314	9491011333	7476373174	6443740120	4619821505	5308571705
0963948243	7269589845	8798200750	0191650889	8708373143	1263836129
7541341915	5411226279	2589271900	8965735738	1543940211	9767105413
1380803628	6082621618	5792572034	6352306171	2316297195	2935305780
8604392706	3573534054	3260222021	6656521728	6215904857	8777704186
5786908876	3273894154	3176456074	5912289300	4095828641	8445068163
9163773717	5631154750	4825752961	3889250081	3685191459	0634145575
8854977413	5775710345	8254852842	9407838386	6216800706	6104385386
0376674083	1342133770	4212726642	8191577401	3747787286	1505200298
6438773361	6311357636	9209821285	6899309668	0603974652	6452898112

APENDICE B

TABLA 3. ULTIMO DIGITO DEL DIA DE NACIMIENTO
(Continuación)

9144681806	5636867689	7078591565	2532944546	7442559522	2657217956
5130634295	8083345291	1344177114	5810444508	6858266218	6913645271
9133796009	8264125152	0733251508	0622027474	3310562655	9230612684
1882045560	8486812121	5200288368	1941112978	7649930720	1102193505
7169985281	9756522492	3175386036	4379469420	0403259312	7661025376
1890396040	5127431523	5178324158	9065228984	0443656731	2128841553
9939558661	6767349869	8957094220	8347139614	1301113207	3307726705
1895676810	1521028363	1923267594	3841567379	2334595656	3582226160
1655462993	4679403792	0451956457	3970713540	2381826464	5103850185
3924475568	6203353915	4608299408	7389682847	9946827998	1436305462
5146523761	4340831147	4149676331	1631530055	4598227870	0944271693
3244486076	9179378754	8445234592	0851243766	9132110345	7493029097
7163401153	2867628473	2241238357	1853904128	6258162250	7847154659
1007636300	4603384033	3304277989	9635871637	8550080666	3063458040
9000490767	5143977756	7764331090	2836042722	4881794834	7003558001
0942868009	8100182178	5291274419	9201873797	1726955759	3937419447
0311531102	5507794131	9761322090	2857141928	7596657327	8413744299
1290961040	7422681783	1835617387	8228241393	3407985381	6707596716
8918461118	6477262846	6333467216	5156785212	9528963713	8123819512
6118033502	0439333166	8396040167	8408583298	4648775197	8986329487
6581427582	8406185454	3085379841	1023298675	7670143541	8331428347
5830472524	1627437578	2061521118	5382871005	0812755240	1094243021
9846877595	8925347215	7329471941	2498846063	1597595201	6029346778
5575242830	2062961056	3294705145	8201028052	6683625587	4432515222
0067828417	3375057978	8921496997	2225147215	8517987456	0708296379
9429924528	7617857551	4280721135	7412860703	6131330948	3517927415
5174804626	5068702947	0407604680	4947257777	2965720494	9084846658
2634674225	0435080286	2488839982	0304801434	6881912142	4003984123
2173684427	2071114321	4486089501	8024385504	5126979432	7778379088
3460981576	9328624905	2783474163	7931459110	7851010219	5295546371
4654781544	8220793364	2613425452	9108624662	9075863903	9096654288
3605298025	5119934574	7359115117	5701359621	2948738892	9111958023
9653641350	6381243305	6383083697	3775737553	7215854307	1762811476
3079263519	9050294042	7510019951	9906014780	6172791354	4784895146
8118028855	9130306976	2713764852	7979736994	4452112677	8531656538
3155403278	2405574548	7181233389	2679715136	3173899770	2419559741
5084482003	6066854001	8237803785	6785153326	7058266123	6037506263
1018164566	0574153672	0884622284	1286247028	2196626846	5417596103
7312660213	7369550150	0642443839	3031345202	9191764617	2982958591
2724828082	8073484941	0320991141	1864359617	7043144851	5291403534
6683605058	8959442713	4553656499	0085291404	0337934655	7963575787
0380249715	50				

APENDICE B

TABLA 4. LONGITUD DEL APELLIDO PATERNO

5,7,6,6,7,6,7,5,9,7,7,8,7,5,8,7,6,5,6,5,5,7,4,8,7,3,7,5,7,5,7,8,9,7,6,6,7,7,7,9,7,8,5,7,5,7,4,5,4,7,
8,10,7,6,6,6,7,6,6,6,8,5,4,9,9,6,6,5,4,6,5,6,9,6,4,8,3,9,7,7,7,9,6,9,7,9,4,8,5,8,6,6,5,9,9,7,5,6,10,8,
7,6,8,4,8,8,7,8,7,6,6,8,5,7,9,5,9,6,9,6,8,5,5,5,4,7,5,9,10,6,6,6,7,5,8,6,6,9,8,7,5,5,6,7,8,8,9,9,8,9,
8,6,7,6,7,5,6,6,4,7,7,7,9,9,8,6,6,6,6,11,6,5,6,6,7,7,8,5,6,7,7,4,6,7,5,6,6,5,7,9,8,7,6,9,8,8,8,7,8,5,
6,16,5,7,7,11,5,5,7,8,5,6,9,10,6,6,7,7,9,8,5,7,7,8,7,9,6,7,5,8,8,7,4,5,9,7,9,7,7,8,8,6,6,6,6,8,7,6,7,6,
7,4,5,9,8,8,9,7,6,8,7,6,9,6,4,7,7,9,7,7,8,5,4,7,4,8,7,8,9,6,8,4,7,9,8,7,6,9,5,7,7,7,7,8,7,4,6,8,11,7,
8,6,9,7,6,6,13,6,8,9,8,6,6,8,5,6,8,6,6,9,4,6,7,5,5,7,4,7,7,6,6,7,8,6,4,5,9,6,4,8,7,7,7,4,6,6,8,7,5,9,
7,6,8,6,7,7,11,7,8,9,9,5,11,6,6,6,8,7,7,8,7,7,4,5,6,7,9,8,5,6,6,9,6,8,5,9,6,8,6,7,8,6,6,6,8,8,5,9,7,6,
7,6,7,8,8,6,6,7,5,6,7,5,6,4,7,7,6,4,11,5,4,8,5,6,6,6,9,6,6,5,5,6,8,9,6,9,8,7,6,7,9,5,5,5,4,7,5,10,7,7,
6,6,9,5,9,7,6,7,4,5,6,5,6,6,6,5,7,7,7,9,7,4,9,8,9,7,9,7,6,6,4,5,6,6,5,8,5,8,8,4,6,6,6,6,7,7,7,6,6,8,
7,7,5,7,5,6,4,5,4,7,7,5,5,7,4,7,7,6,6,5,7,8,6,6,8,4,6,6,7,10,8,6,6,8,9,8,7,7,7,5,5,7,10,4,6,8,8,5,5,4,
8,7,7,6,6,8,6,6,7,6,7,5,8,8,8,6,6,8,7,3,6,5,5,4,7,8,6,6,6,4,6,7,6,8,6,9,7,9,8,7,6,6,6,4,7,5,8,6,6,7,
7,7,7,6,9,7,5,8,6,9,6,7,9,5,8,10,7,8,7,6,6,4,7,5,6,8,8,6,7,9,6,8,4,6,6,7,9,6,8,8,7,6,5,10,9,9,6,5,7,9,
6,7,6,5,9,9,7,8,7,7,6,8,9,4,7,6,7,7,5,8,7,5,5,7,5,7,9,7,6,6,7,7,5,9,8,9,7,6,5,4,8,8,5,6,7,6,9,5,8,4,
7,8,6,5,8,6,7,9,5,8,7,8,5,7,9,7,11,7,4,9,6,9,7,5,4,7,6,6,4,6,8,8,10,7,7,10,6,9,11,5,9,6,10,8,7,5,4,9,7,6,
8,6,6,7,8,6,5,5,8,4,7,4,7,8,7,5,4,5,6,6,6,7,8,5,5,6,5,7,6,6,9,5,9,7,4,5,5,5,6,9,9,4,8,4,5,8,6,7,9,7,
9,9,8,6,5,5,6,6,7,8,8,4,8,7,6,7,5,8,8,7,4,5,5,5,9,9,7,5,7,7,7,6,5,7,9,6,5,8,7,7,7,5,9,4,7,7,6,6,8,7,
4,9,4,7,6,8,5,6,6,5,6,9,9,6,6,6,7,5,4,8,9,6,6,7,5,5,6,9,8,8,5,7,10,7,4,9,5,7,5,6,8,9,7,7,7,4,5,8,7,7,
4,9,5,7,8,8,6,8,7,7,5,6,6,6,6,6,7,5,8,5,6,4,7,9,7,10,8,4,7,6,4,4,5,4,4,6,5,7,5,6,7,7,9,7,8,5,7,8,8,7,
7,4,8,7,4,5,10,9,5,5,6,3,6,10,7,5,7,7,6,8,6,8,6,7,9,4,7,5,6,6,9,6,4,7,7,6,6,7,10,7,7,6,7,5,7,7,5,10,5,6,
6,9,7,6,6,6,5,5,7,7,10,8,7,8,7,7,5,8,4,9,6,8,6,9,6,8,7,7,7,6,7,5,6,7,6,5,7,8,6,8,5,7,6,4,7,8,7,8,8,5,
7,7,5,7,5,10,9,6,6,8,6,8,10,8,9,7,4,11,6,6,7,5,7,7,9,9,5,6,4,7,7,8,8,7,7,7,7,7,8,8,7,6,7,8,6,7,4,6,6,8,
7,5,9,5,8,7,5,6,6,4,7,6,6,7,4,5,8,7,6,7,9,7,9,8,7,7,5,7,7,9,6,6,9,8,7,7,7,4,8,9,7,9,7,8,5,7,9,4,7,6,
13,8,7,6,7,5,6,7,7,7,7,4,4,5,8,6,7,9,5,5,7,5,9,4,7,6,6,8,9,5,8,7,7,5,5,9,6,6,8,6,7,9,5,8,6,7,8,9,8,7,
6,9,8,5,8,6,7,7,5,7,7,8,6,5,8,5,8,5,4,5,11,5,7,7,8,7,6,7,7,7,8,6,9,9,8,6,6,7,9,7,7,6,5,8,6,5,6,9,6,5,
6,7,9,8,6,7,5,7,9,4,5,6,5,7,7,7,9,5,8,6,5,6,5,7,6,8,8,8,7,5,7,8,6,11,8,7,6,7,8,9,8,9,7,7,8,4,6,7,7,7,
6,7,5,9,7,7,7,7,6,4,5,6,8,3,3,9,6,6,8,5,8,4,6,7,6,7,7,6,8,4,8,4,7,7,6,8,7,6,7,6,5,6,4,4,8,8,7,4,7,7,
8,5,6,7,4,6,4,8,10,8,5,4,6,5,4,8,6,6,7,7,8,4,5,5,7,7,6,4,8,5,8,8,9,6,7,7,6,8,7,7,7,7,7,6,7,8,7,4,9,8,
7,9,4,7,9,7,5,7,8,6,7,8,5,6,8,7,7,9,5,6,7,8,9,6,6,5,10,9,8,4,7,7,9,11,7,5,4,5,8,6,5,6,7,5,6,9,7,7,7,7,
6,6,6,6,6,6,5,7,7,9,9,7,6,8,7,4,7,6,7,6,7,9,8,7,6,6,7,6,8,7,4,7,9,5,8,5,7,5,10,5,4,7,8,5,6,5,7,6,10,9,
4,8,4,7,7,8,4,6,6,7,6,7,8,7,5,7,6,8,6,7,6,6,5,9,6,8,10,4,8,8,6,6,6,4,6,6,8,6,7,4,8,6,6,4,5,7,10,9,7,4,
7,7,6,6,6,9,7,5,7,6,8,9,4,9,6,6,9,5,8,5,6,8,5,5,4,7,5,9,7,8,8,8,7,5,7,5,7,8,8,6,9,6,6,8,6,6,11,5,6,9,
8,6,8,5,7,9,9,6,5,6,7,7,7,5,7,4,7,6,7,8,6,6,5,6,7,5,7,6,7,5,8,5,7,5,8,8,6,7,4,7,8,6,7,8,6,8,4,6,9,7,
9,8,6,7,8,6,7,8,9,7,7,7,7,6,11,5,8,8,5,7,6,7,6,7,5,10,5,6,5,10,6,5,9,8,7,5,7,5,5,7,13,6,6,6,5,4,6,7,6,7,
4,6,6,7,7,5,7,8,5,7,8,7,4,7,9,5,6,7,5,8,6,7,5,9,7,7,5,6,4,4,6,10,8,7,9,5,6,7,8,7,7,8,7,8,7,5,9,4,9,6,
5,5,6,6,7,7,7,5,7,5,6,7,7,9,5,9,5,4,10,5,7,9,7,7,7,4,6,5,8,5,8,5,5,7,9,5,6,6,8,8,8,9,4,6,9,9,7,9,9,6,
4,8,6,8,5,6,7,8,4,6,4,10,6,7,7,6,7,5,4,9,6,6,6,5,9,8,7,5,6,8,6,6,6,8,9,4,8,8,8,5,5,4,11,8,8,4,8,7,4,8,
9,8,4,4,7,6,8,5,5,8,6,7,4,9,6,8,6,7,7,6,8,8,9,6,5,8,7,7,6,8,10,7,5,7,7,5,6,8,6,6,8,5,5,4,8,12,7,4,8,6,
9,6,5,5,6,7,6,7,4,4,10,8,8,7,9,6,6,7,6,7,6,6,9,4,9,8,7,9,4,7,4,8,7,8,4,4,7,6,10,7,7,9,9,4,6,6,5,7,8,8,
8,9,5,7,5,8,7,7,7,5,6,9,7,9,6,7,6,6,6,7,5,5,9,9,4,4,6,8,5,9,7,8,6,6,9,6,6,8,7,6,7,8,6,5,6,7,5,11,6,8,
6,12,13,6,7,9,6,6,5,8,9,6,9,8,4,7,9,8,7,8,6,6,9,7,5,4,3,5,6,7,6,7,8,9,7,7,7,8,7,7,5,6,8,5,6,8,6,5,6,8,
6,7,10,9,7,8,4,8,5,5,8,6,4,7,8,7,6,6,6,7,6,6,5,8,7,9,4,7,5,5,4,5,6,6,5,7,6,8,7,6,6,11,4,5,8,5,8,8,7,7,
7,10,6,7,6,5,5,6,8,9,7,5,6,5,6,7,5,7,4,4,7,8,8,9,6,6,5,5,5,4,6,8,9,6,5,5,4,10,8,7,8,7,8,8,8,7,7,9,8,7,
8,6,8,8,8,6,6,5,5,4,7,6,7,7,6,8,5,5,7,6,5,6,4,8,7,8,7,8,5,7,9,7,7,8,7,5,6,7,7,6,4,5,5,4,8,8,9,9,7,8,
6,6,7,5,6,9,7,6,4,7,7,6,6,7,6,6,7,6,6,7,9,6,6,9,6,7,6,7,6,8,5,8,7,11,7,6,6,6,9,9,8,4,6,6,6,5,7,8,9,4,
7,5,4,8,8,8,5,5,5,5,7,6,8,5,5,4,5,8,7,7,5,5,6,7,5,5,7,6,7,6,4,7,6,9,7,6,7,3,5,5,8,5,8,9,5,7,9,9,9,5,
5,4,8,7,9,9,8,5,6,8,9,8,4,5,7,8,7,9,7,4,6,8,7,7,6,9,6,6,6,5,5,7,5,9,11,5,7,5,6,9,8,8,8,4,6,5,7,5,7,7,
8,6,6,6,7,6,7,7,5,7,7,9,5,9,8,8,7,6,5,8,7,6,8,4,5,7,4,5,5,6,8,4,5,9,9,7,5,4,8,9,6,7,6,7,8,8,5,6,8,9,
4,6,4,7,7,5,6,9,7,7,9,9,9,4,5,8,9,6,6,7,4,9,7,6,8,5,4,5,8,7,4,9,8,8,7,8,5,5,7,7,7,5,6,8,8,6,5,8,5,6,
8,7,4,5,9,6,8,7,7,4,9,6,6,9,9,9,5,7,10,5,8,7,6,4,7,7,6,4,9,5,6,9,5,6,16,4,7,9,7,4,5,6,9,7,5,7,8,7,6,8,
5,4,7,8,3,7,5,4,5,5,10,8,7,6,6,8,8,5,4,5,5,5,9,9,7,9,7,9,7,7,8,8,5,7,7,9,10,6,7,6,6,8,8,5,9,7,7,6,5,9,
6,6,6,7,7,9,9,4,4,6,7,5,6,4,8,7,7,7,5,7,5,11,7,7,3,7,9,6,7,8,6,4,7,4,5,8,4,8,9,6,7,6,8,6,6,9,7,7,4,5,
9,5,5,7,7,6,5,7,9,8,4,4,8,5,8,7,4,7,9,6,7,6,7,9,9,6,6,7,7,5,7,6,4,7,6,6,6,7,7,4,9,8,10,6,6,8,5,7,8,9,

APENDICE B

TABLA 4. LONGITUD DEL APELLIDO PATERNO
(Continuación)

7,8,7,5,8,5,4,5,4,6,6,8,7,5,7,6,9,7,5,6,5,5,5,7,8,5,7,9,5,9,6,5,7,7,11,6,7,7,6,6,4,4,9,8,6,9,7,8,6,6,
8,7,6,6,8,6,5,6,7,4,6,8,5,5,7,7,6,8,9,6,4,6,7,7,6,7,6,5,7,6,5,5,9,8,7,6,5,7,9,7,8,7,11,5,7,10,9,6,7,6,
9,8,6,7,6,9,6,8,6,6,7,6,6,7,6,9,11,5,7,6,4,9,5,5,9,5,8,8,8,7,5,8,4,8,6,5,4,7,5,6,9,13,6,6,9,7,8,9,7,9,
6,5,5,6,8,7,5,7,5,8,7,7,5,8,7,5,5,4,8,7,7,4,5,6,5,7,4,7,7,4,6,8,8,9,7,7,8,6,6,8,9,7,9,7,9,6,7,7,6,7,
8,6,4,7,7,6,8,4,5,9,5,7,7,6,7,10,6,6,6,7,8,4,8,6,9,9,4,9,9,7,6,6,6,9,9,7,4,5,9,5,5,9,6,6,6,8,6,5,6,6,
7,6,5,7,6,6,5,7,6,9,6,7,5,8,3,6,6,9,8,7,9,6,6,8,5,7,4,7,7,6,6,10,4,6,7,5,9,7,6,8,6,8,9,6,8,8,5,9,5,5,
7,6,8,6,7,7,7,4,6,8,7,8,5,5,7,6,8,9,4,7,8,7,8,8,7,5,4,8,7,5,5,8,6,7,9,6,8,9,6,8,8,8,5,6,7,7,7,5,8,9,
7,5,7,9,6,9,7,7,5,8,7,7,7,6,7,5,8,7,6,7,9,7,6,6,7,6,7,5,12,4,5,6,5,10,7,9,5,6,9,5,6,8,5,5,7,5,9,6,5,5,
5,8,4,6,6,4,9,7,7,5,6,8,8,4,7,6,9,11,7,9,7,4,6,4,6,6,7,5,4,8,7,7,6,6,9,6,9,6,7,5,8,6,5,8,6,4,5,6,8,5,
4,6,6,10,7,9,5,7,9,6,6,11,9,4,6,10,7,5,9,6,5,9,6,6,8,8,6,5,7,7,6,8,5,6,5,11,5,4,8,8,7,4,5,6,7,8,6,6,5,7,
6,8,7,8,5,7,8,5,6,6,7,7,9,7,5,9,7,7,8,7,7,5,5,7,6,7,5,4,6,9,7,5,7,6,7,8,6,8,7,8,9,9,8,9,6,5,5,6,6,5,
7,5,8,7,4,5,7,8,5,5,7,5,5,5,9,5,4,6,6,6,5,5,6,7,5,9,6,4,6,5,7,8,6,5,9,6,6,7,7,5,9,8,7,9,5,5,7,5,5,7,
5,6,7,8,6,4,5,8,7,5,5,6,6,7,6,9,4,8,9,4,8,5,7,6,6,7,7,4,9,7,7,9,8,6,9,4,6,4,6,4,8,4,5,7,6,7,7,6,9,9,
7,9,4,6,7,9,7,5,8,4,10,8,5,7,6,7,6,5,7,6,4,6,6,9,7,7,7,8,8,7,7,5,6,8,8,8,7,9,6,9,7,7,4,9,7,4,8,11,6,8,
7,6,9,7,9,5,6,5,9,8,7,10,4,9,9,6,8,4,6,5,6,6,6,6,6,6,7,4,7,8,6,8,6,5,5,5,9,9,6,5,4,10,7,6,4,5,9,6,6,
6,6,6,7,5,7,7,7,7,9,6,8,7,10,6,6,9,8,7,6,4,5,7,7,7,6,8,5,7,5,8,4,9,5,7,8,4,7,5,6,8,8,7,9,9,5,10,5,7,10,
10,6,6,5,6,6,7,4,6,6,4,6,5,7,9,8,8,6,4,11,8,11,9,7,7,8,5,7,5,7,5,8,9,7,4,6,7,5,5,8,6,5,5,5,7,9,6,8,9,6,
5,6,4,4,6,6,7,5,9,9,9,6,4,7,8,8,6,8,7,7,8,6,6,6,5,6,5,5,6,7,5,7,6,8,6,7,9,5,6,6,4,7,6,8,6,8,10,5,9,8,
6,9,8,7,7,4,9,8,7,5,11,6,7,6,4,5,9,7,8,5,5,4,7,6,4,4,6,4,5,7,7,7,8,8,8,7,7,8,8,6,6,5,7,7,5,6,6,9,4,4,
5,8,8,7,6,4,8,8,6,9,5,9,8,8,5,8,6,6,6,13,6,8,6,8,5,6,5,9,8,6,7,4,4,8,7,7,7,8,5,7,6,7,7,6,7,8,7,9,7,6,
8,8,7,7,4,8,9,5,7,6,4,8,8,5,8,4,6,4,5,7,7,6,8,4,7,6,9,6,8,8,6,9,6,5,7,4,5,4,6,7,6,9,6,9,4,6,6,8,8,9,
7,4,10,7,7,10,5,7,6,7,7,8,6,6,8,5,9,8,6,5,8,7,9,6,7,5,5,6,7,6,11,6,5,5,8,6,8,7,5,8,7,9,5,6,4,9,6,7,6,5,
6,4,7,4,11,6,7,7,9,6,8,7,7,7,7,7,5,5,6,7,8,7,7,8,8,10,7,6,4,6,7,4,6,6,7,7,7,7,5,9,6,6,6,5,6,7,10,9,6,7,
6,7,6,9,7,5,6,7,7,5,4,8,5,6,6,8,7,6,4,8,6,6,8,9,5,6,7,7,8,9,5,7,5,7,9,7,7,8,7,6,6,5,5,9,5,7,9,5,6,5,
5,7,6,8,8,7,5,7,4,7,7,7,7,5,9,7,6,9,6,6,8,5,5,8,6,6,8,6,4,8,7,8,5,7,5,5,7,7,8,4,7,5,7,7,7,8,9,6,9,9,
5,8,8,5,6,5,4,7,7,7,8,7,8,7,7,9,10,10,5,7,9,6,7,7,7,5,8,7,6,7,4,5,6,5,5,8,6,6,5,7,7,5,7,6,8,6,6,9,6,8,
7,8,8,6,5,6,4,6,4,7,6,5,7,9,8,6,8,7,5,4,5,7,7,7,5,5,6,7,5,5,5,9,8,8,9,6,8,7,6,8,7,8,7,7,7,6,8,5,7,7,
7,6,5,6,8,7,9,8,4,8,8,8,6,4,9,7,7,7,6,10,6,6,9,6,6,5,7,8,6,6,5,7,8,9,8,6,9,4,6,7,10,6,9,7,7,6,9,5,8,4,
8,6,7,7,4,7,5,8,4,8,7,5,6,6,5,6,6,9,12,7,8,7,7,5,9,7,5,6,6,3,6,6,8,8,7,8,6,8,6,5,8,8,4,6,6,8,6,8,5,6,
5,5,7,5,7,7,6,8,5,6,7,4,4,6,6,6,7,5,6,5,9,8,8,4,5,6,5,5,4,7,6,9,9,4,5,8,4,6,8,7,8,6,7,7,6,6,6,7,6,4,
7,8,8,9,4,7,9,6,6,6,5,5,5,8,9,8,6,5,5,6,9,7,6,8,9,9,5,7,7,6,7,5,8,8,7,5,7,6,9,5,6,11,4,6,5,6,4,5,5,7,
6,8,7,5,5,5,5,5,7,8,7,9,6,6,6,6,5,8,5,8,7,7,6,6,4,6,6,7,6,5,8,9,8,9,6,7,9,7,8,6,6,3,4,8,4,6,6,7,6,7,
6,5,7,7,6,4,7,7,8,8,5,8,7,6,7,9,8,8,9,5,5,8,6,9,7,7,7,7,9,6,6,8,8,10,8,6,4,8,5,8,6,5,7,8,5,7,6,5,9,4,
4,6,7,8,4,8,7,5,5,7,5,10,9,7,5,4,5,8,7,4,7,5,5,6,6,9,7,5,8,6,9,9,8,7,7,6,6,8,7,5,6,8,3,4,8,4,10,6,5,7,
7,7,4,7,7,8,5,6,9,8,7,7,5,6,7,6,5,6,7,5,6,7,6,9,7,5,7,4,7,8,6,6,8,4,4,7,5,5,7,8,8,8,6,4,6,6,7,7,7,6,
8,9,8,7,6,4,5,5,5,6,6,5,4,8,5,6,9,7,4,5,6,8,7,6,7,7,4,8,5,8,7,6,6,7,8,4,5,6,11,9,8,9,7,7,5,9,8,8,9,5,
7,8,4,10,6,8,9,6,7,9,7,4,7,8,8,8,6,6,8,7,4,4,9,7,6,6,6,7,4,5,5,6,7,5,7,6,6,8,4,8,5,6,8,7,9,8,5,5,10,5,
9,5,5,6,6,6,11,8,7,8,8,7,4,5,6,4,7,8,7,7,9,6,4,5,9,4,7,5,7,5,8,4,7,7,5,9,7,6,7,7,8,8,9,7,5,5,6,9,5,10,
4,6,5,5,7,8,7,5,6,6,8,7,8,8,4,7,9,7,6,7,6,7,4,7,8,7,5,8,10,7,6,6,9,5,8,8,6,8,5,8,8,6,6,8,4,10,5,7,7,6,
6,6,6,9,6,5,9,8,5,8,8,5,8,8,5,5,7,5,7,6,8,6,9,5,7,6,6,6,7,8,7,4,5,5,8,7,7,10,4,8,6,6,7,6,8,9,7,7,4,6,
8,7,9,6,9,8,8,5,4,8,8,4,7,5,11,5,5,5,7,5,4,7,9,8,7,6,6,6,5,5,9,6,4,8,7,5,6,6,6,7,5,7,4,6,4,4,9,7,6,6,
6,6,9,5,4,8,7,9,5,7,4,6,9,5,5,7,4,6,6,5,8,10,11,9,8,4,9,9,7,6,5,6,11,7,7,7,6,5,5,8,9,9,7,7,6,4,4,6,6,9,
4,6,6,7,7,5,8,6,5,7,4,5,4,8,6,6,9,8,8,4,4,5,6,9,7,4,10,8,6,5,5,7,6,9,7,8,6,15,6,7,6,8,7,5,8,6,4,4,12,5,
5,4,8,7,4,11,10,7,5,7,7,8,4,7,5,8,8,7,9,7,7,7,8,4,6,5,4,5,5,5,6,6,7,6,7,10,7,8,4,5,9,5,5,8,5,6,6,4,6,6,
6,5,7,6,8,5,4,6,13,6,6,9,5,7,5,7,7,7,8,9,5,4

APENDICE B

TABLA 5.
R= [(ULTIMO DIGITO DEL AÑO)+(ULTIMO DIGITO DEL MES)] MOD 10

7435961274	1322622846	9261248767	9083201615	4267001796	1296844732
0999189151	0841706539	0685828754	4351945881	7650172092	4693652906
8583575601	8077592320	2602060457	4642352451	3916585225	3148890653
0183296840	9931110256	0932915808	6320186649	6055355412	5153465439
3470214730	8301314644	6515536379	8061345882	3214762083	1125528448
1957491072	2467116778	6675281259	4234696068	3988885692	0120244555
1690148378	3734795755	9893426511	6152993024	2995114102	3629335462
3163755468	7575380735	6277329652	7408378873	1540641365	5104394460
9643702276	4912909556	0093484869	6089654088	0123361015	4063800942
4710707716	6215590024	9015180725	4726216330	5314983712	8693788794

2839199276	4260723125	8455346992	4688249664	4061268911	8940515951
7092042949	3416445382	9093006314	4026805969	4624318688	3402349277
7473254030	5995519816	4862230623	1965101524	2859342969	9262162856
1948317751	9384228167	8751164977	0865563605	4452539421	4473833452
3792231899	5742770667	8656421358	4478997924	2214474552	6690908628
6059593181	6262902989	9433303026	7138221082	4145761445	7804883104
2416152302	7613389688	8330310780	0216938331	4837326903	7258916523
9454628762	7734965452	8151017412	8097479254	3010485578	7489317454
2720182380	9964110746	0919035127	6949748903	0432654328	2544333641
8764846760	3016870854	9701496705	7966191005	4440935969	5396181365

7503889038	8234436551	8870327130	7518104267	3644949607	0106318479
2766893255	8297621790	0117325276	3505733840	8972932754	7837504905
1283140577	6796456186	6632655122	4459689996	5256985951	0632138124
8249216014	5121519183	4126941399	1002305958	2195788243	1835823595
6050310730	0371908729	2651672558	5477552498	9389462843	1598866295
5025977825	1377210136	8497380134	9434009934	8482776479	4114737429
7719738800	8112054641	6477763327	5367138948	1583117974	1356926005
4918912075	8034499960	2002936288	2786967702	6786979848	4686181786
0936707484	1137022216	8439722961	6932589195	6597164707	0710819837
0519210443	0508923399	1231655621	7475984263	3130178431	0030772640

0257577084	4032224595	3457893662	7453875700	3805296357	0514578662
4532092286	5782538694	0507789785	6715407344	1540388643	7669945489
0536907913	0458252700	2325169473	0364349323	8186772544	8416182761
9297489485	6624858814	1531951287	5720391123	4470918511	2822377760
7803598374	7690626401	9181267521	8283050994	9588034057	5198746352
2570652446	0214557914	5196206727	7080096783	5799938493	1120438036
2897730851	1679568751	5926021022	3473259158	6992510333	7604407742
0712743529	3103520638	9207493674	8260135656	2141000546	2585517639
6992932534	3870577663	5698130328	1990570018	3511008439	5433550550
4578974254	7044957516	0529983010	2037259956	7446943490	6320079299

APENDICE B

TABLA 5.
R= [(ULTIMO DIGITO DEL AÑO)+(ULTIMO DIGITO DEL MES)] MOD 10
(Continuación)

4404492496	1531938392	7112502511	9230920001	3154628299	0490461322
3648720675	0399282266	5253953440	8869572463	9435446459	0774356884
8031350043	5903413272	5498372322	7841369088	8718403519	4475092603
2031598558	1222936888	1119834155	3473595347	0363661541	0110773569
6043633192	7519390052	4546154492	3933093091	5059538275	4452226798
8819791823	8905528592	2467717652	3597634983	9113490389	4587197794
8718713908	5581534441	2824855867	4513946061	6695576607	9537118725
3971010837	0893649630	8766495500	8528996441	0944867698	4175587972
6313129547	1254595047	4044590054	5649365412	1600025256	7256290351
8237233642	1477087430	0551913462	5270665064	3309279178	1933138971

1228578220	5169468310	4575645109	7797227789	3636370581	2373115263
5275066106	9633080923	1720454461	5772728121	4363480577	8296061537
2002616011	3449324274	0909579880	9861088209	4090770752	4161390165
3054721852	2609775721	3929121716	6379138915	7200525974	6523657335
5982476059	0979773582	7517360709	5077231669	6951458685	6003501336
1181629218	5168958933	8859828305	1208010396	4834436375	8948496406
5237253383	4104125014	5453769905	3172643511	6709923821	0898033610
0988846571	0261583714	2988413204	6995814606	2259075628	3925275564
1552790267	0227420763	4094932177	9914012384	1471686444	3306926392
1335724706	5971552362	9233554321	0139667932	8507465315	8161779022

6842120047	9693625852	6707468816	5772250089	9563485986	1740204984
7743230420	7459673566	9076681669	4142459957	3657742229	3104598285
2541775719	2066544000	3616691664	9985170406	4646359201	9570248875
4666091602	5187205714	3195624965	6432846503	8536082742	6261089469
0599170033	1143973565	9816107986	7420971486	9267203815	1437649069
3918506483	9882655614	2568731399	5173599398	1368826821	9966662080
9463391179	5134889162	4134202253	2064603229	6788428740	7711911406
0945212129	3891649155	2897380636	7622250159	3239223823	0996782089
4899891143	6843821176	3025795490	9107401441	8929663021	7782965863
7086549331	2690701716	2229701768	0233322566	6640757721	3001609247

6289451118	3435023932	5767572048	8290034301	0202920588	8959345970
6468793200	9323178487	1073597718	5322517889	4204590406	4636280815
7982068375	1779599104	9486784234	1409000008	0918521307	7590229984
5024550641	1386323890	8637054065	2383318710	2165816025	8969486001
7892446073	1705234998	2336957398	1572567156	9757288561	9114375636
2199723414	4927013319	0195286833	7312367524	9566029003	0773711648
1473343888	5503538253	2906218393	7493969184	7892658515	7179875047
5129621435	9568664420	4494455274	8700484408	1791495560	0309631921
8449352858	8469250630	6729137321	0441217070	0248698772	4261904805
3482233317	1459264863	7198863111	9443868260	4476369581	1099256375

4898439823	3615736950	4274914890	2420171983	1882574145	9774160882
1224169286	60				

APENDICE B

TABLA 6.

R= [(ULTIMO DIGITO DEL AÑO)+(ULTIMO DIGITO DEL DIA)] MOD 10

0484662100	6671743935	1836900141	1806436884	7887965012	6687182869
3052006961	7893996596	5600188410	1835976767	7718521081	8868748326
7430552126	7812923954	0174112390	3486653133	4875621831	5614431743
1167547876	2723939951	6860882439	4248346841	4759988654	1031493282
7629050937	4563577439	6887891947	5952455842	7146266947	6870954072
8493893873	5398365938	1413765557	7325210592	2699027665	6719251496
4496333539	7009049801	7249262968	8114908885	1475605924	8855059059
5044756593	5976763935	0053442813	0058567331	6601525378	3971205481
7922164713	0827333565	1167895492	6326847518	6177305930	9362921654
9465101669	3827947883	6814419861	9750933419	7445068762	8633301620

4819603220	8661889605	9102825944	3276448420	5386373948	3304905738
8766328530	9972328932	9233849395	3042305439	9712337803	1430325465
3449955592	4127987598	3753580442	8278850004	2150464571	5509278089
5032455712	9234473017	4435770886	8021186722	2842689359	6409123520
3318537245	7531242954	7930988878	5803715904	7800465505	4712321861
4426624608	4204511495	3097482565	0425586142	7197174060	0585263293
6854067623	6675875884	1605083276	5800423016	6278174521	7642191282
2552300975	5919907659	5828547158	6844393612	4170988799	0329342842
3123166409	9587785010	6449185105	5484342644	2799232310	6405175116
0350743856	4357259831	4989287255	2438441086	8982246304	8218640555

0446841175	6888916352	9700624440	7470122236	7929747028	3564422963
0038938284	5278481823	6265480090	7994604654	9916601247	9045124602
8505784674	8541135251	3793273978	7131553858	8660540918	8365988788
3489710007	7565529015	9198898061	4526095268	4945830753	0653714329
9737425885	9260461178	8202069579	8028421496	1026981547	0289356880
9183588055	4032050830	7450862499	2505218083	0609857858	2356613016
9729543111	6025112141	9702394329	2345454414	1751738142	9152394535
5572569193	2260924151	0968072935	7899868848	8999415735	2734445376
4933696262	4442840342	6531927238	9746641951	5547437603	8973582791
1937309814	7027937300	4261727456	9186457875	4151051834	7006063355

5245473685	7284893556	5600792009	9692650170	3740619700	5811526087
7687617278	3251909749	9069103125	1796801333	7416531968	6516559883
6970032136	1830532852	5634118394	7280179466	2991655075	0044723062
3663125991	9607360274	7434209390	9093111510	2943459392	7289872745
4731183367	9935724889	8160304914	5081149701	8612668683	3854597369
5106228000	2109235811	1549036434	6927834810	9804762115	3441089510
4483062437	8210514220	2539605366	1285558728	5376578021	7563003943
3159326718	4068190301	9203230224	4583705064	5726600797	8227685850
4559113913	4505967200	7594345729	8551431669	1001948519	5283079884
1781431563	2221614413	0606630556	3001807294	7389602530	1095204885

APENDICE B

TABLA 6.

R= [(ULTIMO DIGITO DEL AÑO)+(ULTIMO DIGITO DEL DIA)] MOD 10

(Continuación)

4036750006	9705704339	6899814118	9276574287	8520841235	0578501801
1624825704	1208282235	5088374345	3463442767	6609510484	4586713001
6359579041	1750085500	4110502911	1746278517	7334640547	9480649119
7672834414	7442237084	4696062630	6166691800	7084802780	0000898713
5808964763	3655091200	2144613914	4146858206	3711903305	6223106366
7944102820	2900764129	9068316490	1876365676	8221451225	0466427033
7335017452	9671592332	6639947716	9189833664	4700921420	9096715017
7265910548	9293216292	9908906403	9517417809	1838995594	2739887930
8403303211	4379183327	0384144093	6493333648	1277630131	2052630853
9770380018	9659422629	4607241243	0564182533	7024460728	3958284379

5844660398	5166179547	6332028095	7142952622	6364061135	3970877434
7188767369	8516206465	8848076836	6469319364	5989230077	5776257613
7593007373	4295303077	1228420086	4720276435	9830420300	5492020887
2780632966	8922968867	8911973779	5206909130	9057619446	9437200403
9757582532	4621784885	2813399505	1743148379	6726991740	9946337570
9133208184	4268479892	2886112182	0907648242	9505340073	2506053131
7377171636	7509690356	7169472411	5677759820	6644901501	7852561583
6046915681	4533253736	2078608984	4700742632	7304876704	7395159058
8858648293	5996079679	8059949326	2045321315	0448130934	9688609901
3951310417	1252262841	9178719376	6316978501	0038035313	6222216983

2327150514	7977200125	3005538042	1421371726	0020226736	5834530552
9582990417	6456950839	1480123653	5283209681	2711650489	2171928140
6271433719	7859149632	8522452499	9165070146	0128743305	3957361391
6746781615	6424224756	5577457109	3447999774	5009590008	8109452689
2553830707	6446902471	0750696223	6308107466	4524979570	3327179825
8634273582	7477569254	9537241363	3610649381	9375467937	7234849224
7416988482	9981378510	5429605202	6790797596	5434799617	9495537822
5707681690	1511438097	5197949963	4860819869	1265309203	3788114651
4451609916	6524872283	5571876308	8961696156	2297274769	2342030720
4220782608	9850263511	4574228631	1063622528	6580553969	5085041660

4421728771	8536670485	9724433478	8886646812	8184572800	5844744986
8349840838	7750282731	7104290819	4842736863	5635215186	9714602487
4471597577	8474141555	3903646093	9198875371	6155534519	6933427352
0822371992	0773366151	5931890692	0407337880	0271295580	0730195158
2509925859	6158022245	6927409520	3191351139	2813133672	7576815259
4553118675	1801702794	6647760679	3786949360	9880700987	8900569101
4685764411	5724348649	8901731650	7078796089	2837983726	4281229038
7917542381	3261936777	5265613133	2175438503	8140883110	1953003965
1682073647	8577795639	5517256911	3943968101	0797013173	4921323044
0986313009	6096753290	5273571242	5682194756	5331386374	5559479023

7461697089	7656146892	7549951762	1090910064	4885286995	6634904928
9271222932	40				

APENDICE B

TABLA 7.

R= [(ULTIMO DIGITO DEL MES)+(ULTIMO DIGITO DEL DIA)] MOD 10

9017547574	3553565319	0855182860	2069099657	1042706728	5833564133
3721529494	5298410245	1861946160	5724675922	8560457053	4273398484
7359003581	9205879294	0358770965	1846563960	1503580858	6558609774
3028935894	9072607365	8390397297	6160046404	6188019262	2180478451
6655426487	4424049497	6716581616	5395596220	6536920980	9195254070
1904226429	9975031226	7682926706	1933888398	7953248095	0437499709
7628657447	4397198358	8258486299	8082617805	9308315040	7416908817
8343285377	6865003862	4680923803	9490817720	9909706259	6853591045
4165880961	6711238413	7396411855	8547679118	8478666947	5381745376
5513888951	3296697465	7681555188	1298127143	6519361872	8486627530

0888356034	0843566724	9171527238	1230821424	9161551817	9642212009
7174926211	0902301412	6466807801	5682940934	1176645649	0892026632
8298123168	9498816124	1175532443	3353595968	6969504214	8381918013
4170326229	2750479312	8526230199	0484865725	8634352392	4816558510
6244762858	2035136353	3548727982	5453060462	7050277479	8106067607
6217371763	2424851538	8042909347	3537109340	1438693085	7127824511
8608137703	3080190226	7373717934	7274197789	6203898840	8630467781
3168786097	6685042883	7719772168	2451944002	9506765083	1588233294
3485882769	2263437318	0310710424	7341064367	8787480458	6525406537
4836583554	7389805407	5682211778	5536774081	6984915461	5128329474

5987446763	2074928003	3192341572	2126886893	8745084843	9866994552
4992585831	5063644397	4172185886	4615913498	5048193975	0450060345
3344206141	4495127313	7525862472	7526314980	5092067081	4757090086
5684708655	0464834154	5812751954	3960736758	0898718392	3664133056
3909197973	7593903213	2677637263	9879539208	4747947542	7973350259
2788255650	9589480160	5265944547	1175839373	4869709003	8086160013
8830459371	2911964702	3333651888	1860708938	2016045890	4228694778
1206835180	0056315499	4106944971	1515309106	8035988753	0534788250
4269913828	7111420570	2706669713	1298940646	7272515342	0487931346
5844931853	5367632255	7418994015	2959311016	7861761247	1278153191

5256962027	5630453605	2699747801	0647605870	8383229657	5309094085
7771261494	6959697535	7924086060	5201806679	0530493961	3579058844
8648557607	9440162396	1759493989	9904630323	8271907991	6896669525
8294960730	9081730866	4581796955	8331882855	6159943409	9403105485
9370099419	4701960620	7441307659	5404953639	3396274078	8788657255
7836230088	4551900301	0899072331	1987620573	4975812560	4569475742
6630114848	3621252931	1037820588	8856101492	7886224110	0309684849
3261261637	9585850917	6402867034	2581096254	9847000251	6566592441
2085067687	1959876803	6528237883	9621183251	8994524382	2250981152
5653989313	7445947365	8321995924	1614050988	0363189164	7139451638

APENDICE B

TABLA 7.
R= [(ULTIMO DIGITO DEL MES)+(ULTIMO DIGITO DEL DIA)] MOD 10
(Continuación)

8656904092	2098858221	5369770423	4028234806	9418885008	4126384323
2284163351	5157680413	2853823323	5026918702	5432358491	8014823225
0948263000	0671678976	1744272417	6349135319	7004887272	3455677752
7023744164	0642323046	7923238141	9199128383	7567629201	2314161856
5463539891	2366343636	8642103540	7435063635	2144033594	2451160074
3555271083	6249626419	3645049468	0741715175	1778241526	8367352767
9241702778	8334620737	2099996591	1018371625	4597871681	6145845118
8396342919	3642479064	1604913185	5693503280	3774952306	8400142262
0110640112	5123218104	4562258865	5096458854	4095037943	5400260768
5305793650	4224261631	4150150025	9374747115	4167453236	0847554426

6666954354	8683951057	6421869776	2817335167	5358753096	9281780015
4575161889	9365420966	9762846619	9915895289	7648470180	7306852908
9735411944	3878267043	3163515408	7747610010	7666574852	3353578586
3378351596	2983475920	1616692805	9333871049	4253976750	3112253912
4235774941	6534833109	9122633284	8996177734	8897945503	1163270868
2832047132	7100743387	6455154041	9703018538	7771996700	2206261159
8582144951	7609913920	6716931574	2109176537	4147226964	9862950515
6322753970	0572592444	2570039984	8631554650	1759069586	8034108938
9520974290	7175875776	8601817273	7171151493	9079372936	0964945415
0600470393	4587956743	6747825279	0629755817	6755870286	8701101903

6587814597	8528685535	9762578456	6397365503	3783445232	2578510016
8821184051	3247587773	2618500232	9523892376	1560592220	3011056187
4952986080	1057089898	9732081057	4606782386	6502696308	8661569920
8960794657	3787803060	4006677046	9497993833	5793732708	6926657224
8060986150	1347075930	5908393547	5562058440	1767198147	8516952882
3122171947	6639790462	1491932296	6387570413	4255029770	8756667686
2295011939	6279915436	9519805211	4158310177	5174179911	6384066880
9406879979	2140271520	1566009537	3460043158	4636748804	5214436674
4684450071	4361277535	6316987194	7284475393	6974237126	9886573109
9686629775	1486786005	2111321353	3032508268	4762224280	8406640229

0066195425	1349839175	0269989474	8610636713	0168074584	1197809450
4329339412	2891754794	8577527123	1982489268	3455741904	3144484474
1717753408	5967834259	8149104425	8751699733	8283695492	3081424474
1240605777	9613445723	7726282275	0788009390	4138003143	6697971135
1519167824	3817814595	0835976472	2229678805	5748379133	8600762443
4846411285	7926359601	8710982822	8874848426	6922907566	6691250929
7856443473	2801898616	0469183103	2885479747	9061197035	5952658435
0238307176	6345934997	9897086509	8097430941	7833854032	9270610262
1481509637	4510565201	1496767078	3560939373	8733003823	4104487843
7944566372	1409379455	2565174151	6489372738	3121261819	6922683310

9693042840	2867474584	5731265916	1490643727	7661156450	7966206328
2613325774	20				

APENDICE B

TABLA 8.

R= [(LONGITUD DEL APELLIDO PATERNO)+
(ULTIMO DIGITO DEL AÑO)] MOD 10

4612255492	4045776741	5314760044	6252986695	7303654037	4541393390
3109294305	1819574812	4626224350	1880593416	5588950886	0446450015
7337932524	9462184472	1221080825	6762477409	0833124715	7618084823
6078410985	4555504656	5808415098	7849350731	7531853605	0797619353
5333501216	1124705551	0484840277	7856589593	0336820422	6128850537
2860142847	2003783859	4323084771	6599468224	1536440380	5387724855
8795520403	0913942950	0355697457	6753477473	4604068749	9043919767
9733277907	3427618161	5875349303	5173430437	0137887411	8004978619
5266078843	5675724962	4639943795	4436888809	6722846174	7185475830
9035193211	6694506342	1652838527	7193792962	4883937288	0089989559

5651143095	2784825879	0118400423	9108507913	7793431090	7516096112
5681484882	3240205667	3189866008	9094894761	3995867374	9827295749
7237919823	8164096005	2373893237	6002543314	1498355624	4925226622
0942123186	7863692673	6716308950	7188017133	3835375716	5135614503
7477224275	4511573299	7460408660	6021322661	6739776040	4575821763
6536259830	9632493903	3613141098	6462714693	7644478092	2063011848
6641748379	1411924184	5428554763	6596852385	3372466364	8908590351
0238258596	5096067427	8899173586	8992463590	0695223203	0682153143
8066950793	5712358387	0569520018	4108961852	1465473369	2850728099
4512027957	3863818816	6994098546	9923645890	1994124032	1196379155

2416954427	3889065995	8211171226	4520081542	3567452851	8690043634
9558347880	9808317933	8966681474	1814053770	2674492227	3894675761
6134431189	3848364638	6094815786	0099823785	9827165516	5075789348
6863880500	8332384960	6648964984	8135654185	5467550736	1658906915
6064966048	2185393561	8356294003	4240834970	7524505429	6132583012
5057339277	9647966715	6995739471	6596807491	0220932586	1908282782
2243070350	7468526418	9293900215	7084553771	3749194769	0810550054
5793570614	3694385503	7555611263	3342570564	0591856212	9105474551
6398947411	7890267751	5744292045	0982091403	3130768628	0630681373
5179543198	1145886797	5216739436	9778256546	8212685697	1375738398

4981551117	2850549762	4899306493	9817858835	4549636943	9357713830
3463355701	4888907662	1028659231	9159078930	8363834569	5130689421
5023678168	0297753280	0049502172	7272921403	7327381421	6876064408
9149288149	0480314724	8978423914	2339284217	6224705764	1033244832
1712477129	2161974680	3547958550	5083312738	6963230602	1222641050
7487975813	6491016401	5252245914	7801109597	3597711451	3684887901
2997974296	8227147327	7482609171	2950187615	8366074219	4596525035
4964025063	4164146655	9415035276	2624752233	6195345868	7680857140
8942206285	1742303425	8769517645	9205641132	4131857998	9437926155
3137315779	4576024534	8356696929	4896072182	5135603367	1300291352

TABLA 8.
R= [(LONGITUD DEL APELLIDO PATERNO)+
(ULTIMO DIGITO DEL AÑO)] MOD 10
(Continuación)

9539825177	3063426317	3797177130	1622315218	8646157569	6666252629
5153186214	1989613439	0690844105	3240576927	5229629621	8449756375
2715570919	1343650024	0262228062	7781940589	1588955649	5327306103
2264373740	6642012608	8943549060	9600353628	7014838735	6545361982
7545664261	1774323354	5844096634	5324246735	9885811759	3050778856
4810671454	3638009492	8567668818	7309802489	6593504160	7105272346
5063150367	7869101350	3520507242	0108672929	9955683971	3447744799
3826818402	4551966597	7772606676	4313618989	4270106505	7633555767
3417815813	5666366191	7580853305	9271986085	8554388443	3995539436
2642790405	0032846172	7854710782	1963254561	3945501798	0378656496

7277734385	8592096167	1959119288	1161117262	8621593910	8872245516
0728040462	6801595259	7169701919	4266711283	0417815428	4477835112
5396482797	8284290082	6433978386	9745840873	0379855837	5102541697
8259782434	3208239499	2194153645	3126082169	6064125245	3239718138
9526649322	4156452904	0716652309	7483773044	9821143370	0390456168
6137137669	6915963290	1254615550	8264652414	5528133482	6266590282
4005508999	8668562962	6084605317	8227253868	5715821953	5219486160
9323712116	5506356709	9012941177	6147168705	8554879064	9785348099
5737644633	5074503629	7360149609	6536422970	9586732788	6223469955
1501967403	7700678550	2458128994	3384831760	3178137002	4813453440

1623371891	4459601334	6888724187	7846850908	9126860161	5370591781
8537364340	2413282949	5384347902	6860894465	9306600906	8943534984
5121311890	0589660175	8159477213	3141391879	7308923661	5606822269
8637216534	0027933667	8042408739	9092558360	5005432200	9424814233
8045581855	8839720240	9504176292	2631628899	3864549808	0196662145
4090903731	8547402750	4924278995	0763365235	0710993957	1503486456
8811942510	9690122328	0900969380	9620208396	0125848061	8275668934
9769664231	6865217278	3306879565	2133483273	2940953088	7450105191
8966701354	2399344718	6660563653	7383978117	6955860874	1568245329
9437467896	7311018272	7349730024	3890168184	6217290345	6936069846

6642592705	7272542979	4877474781	7667691936	5457175664	2325737486
0510340608	7400025953	6635949550	5619953736	7365964841	5690299238
2374543703	1070664025	3454403053	3160823416	6696445887	1930363354
3437583951	9587739885	6308426297	7049882845	0975278084	3613145621
2368695899	4868305948	1682521355	0619281980	3036787843	4622144226
0954376275	7141875023	8101474865	9584721801	4504467167	0146797926
7389751175	5405369445	6369714723	9951048439	1448376451	6732270341
4594144493	0142650143	1057888695	9685179023	4429312849	0234273417
3918169091	6954684245	1560290039	4507197564	9615198432	7656141001
7139139686	2680027906	9491249985	8387585904	3057928080	6133830914

6265402788	6544282876	0770959828	7681426405	3006818706	5247283877
5848550906	44				

APENDICE B

TABLA 9.
R= [(LONGITUD DEL APELLIDO PATERNO)+
(ULTIMO DIGITO DEL MES)] MOD 10

3245130866	1927598125	4333942763	7415549468	1568495743	3797775664
3878717838	9214098561	0887082000	5779292671	6330886858	6851000173
7256483989	1855030712	1405648490	4122387236	7561083732	8552252854
8939808903	1804272060	7338920856	9761050394	9960984213	1846694522
4369977766	1085277519	0313530946	7299620971	9726584465	9443150535
5371575493	6680459147	0592245920	0107036020	6890661710	9005962168
1927844311	7201091407	1364811788	6621186493	2537778865	8604868525
2032706781	4316958098	9402820393	4515780826	3435068392	1986264273
2409794091	1569629810	0868569158	6657610409	8023107181	3104299552
5183870503	6063256924	2429974844	9631986696	3957230398	0832205469

1620896809	4966502998	0187102717	7162980917	1578619969	3854303483
4099082563	4270288147	0312824514	1634439266	5359175110	8289996916
2086187499	3435925631	0795845238	1187288278	5207495367	7707966656
9080094693	0389698978	0807868263	9541796136	9627048759	3542049593
0303459888	9015467698	3078247774	6671677129	6989588914	8969567509
8327906995	7852733046	8668668870	9574337891	1985997017	9605672166
8495818459	8826249526	1196288421	8960526058	3307180683	9996866850
1844634618	6762102651	0780308596	4509014980	5021000597	1841044595
8328676053	8498000685	4430155337	6065683575	7453621407	2970059410
8098867655	6895464482	7697022069	2021978895	9996893199	8006058074
7957559015	9075077646	2603898358	9276745109	4383799676	4992515223

3412994437	9693570407	6873386260	8535362514	8706984955	4209511404
1973953656	9792356790	0826404280	0484684817	6259682689	1467891646
8068878158	1231699009	2362827877	7579395675	1310438375	4669325642
0236638136	0418835606	2721862797	5091942782	0245561424	3826587481
8652006872	4194396045	4700811529	5166428781	4480884731	7638739789
1354986510	3354378079	3824267774	6509807295	4004401417	5986850297
1427846601	1480776841	1793583209	7068011822	0637329230	7905717435
6624264077	0569847989	1919934520	2434390198	5865846367	2144030928
9086175137	9485581642	8463906095	2541110787	1922395000	5547828134
4992040559	0206109811	1888351295	0862803535	9182246890	9845281838

3557909927	7586695458	9983532176	3664073276	1487796562	2193188482
7791193639	8807383724	6164887767	9996482360	3607633347	2628900961
4770023988	0864784316	5025910579	1677955552	0430299871	3257577572
6351383271	7937110421	2828951295	5406126666	1647846097	6156701946
9117987891	8843781991	4502281811	2861995250	8668861806	4702273133
4144026607	3638885038	6980824393	9521730389	0876720308	7332106931
4076960982	9681806261	6614662086	0622043423	0216745322	5929764731
6478150959	8196212028	7793409709	0375393724	1024433761	6404838423
7009863529	9790357486	6071951397	2409225876	8119180991	7444448105
3159079163	6356570209	2267033445	6474075837	9534191332	0214035141

APENDICE B

TABLA 9.
R= [(LONGITUD DEL APELLIDO PATERNO)+ (ULTIMO DIGITO DEL MES)] MOD 10
(Continuación)

6713424861	5838011617	7465393183	5803042962	4052467638	2977866599
6304264978	0264243490	7896998568	2384807381	1258192374	9392334746
2615283490	9842108660	1270715571	2633880101	7597655256	8859634025
7100239399	0485675780	1342586260	8613451164	8218941948	9288732564
0421740617	7977961782	2144391886	6274252988	9040394461	5006107070
7979845683	6522239755	9980556027	2037110980	9742533132	0596874890
4957240873	8900129369	9478613358	0499704360	6116163317	3304810099
5124152714	6410491978	1768967177	8874001291	1372785255	6343169341
8277103047	5607685184	7307629564	0773819143	0088594206	7267926543
8099028341	1019878677	1048950969	6836590707	7615285871	4183158197
7115444982	7650719750	8083571792	7712297108	2176055531	6007430407
7538896368	7867154058	8378063708	2762284458	8105909389	3063099396
9847401064	7269746552	5899872771	7253954078	1260482559	7914761647
4004831731	6069501228	7025996088	4636702409	1992197133	2517399456
9836976617	9857237785	5823657419	7060022700	3794789119	6966708200
5210571214	8768885536	5631164470	5759670575	3218146316	7229875192
9609550405	1545695417	9514372177	0078970723	2909062846	0424397979
6409970630	7253309726	7912017556	1662252058	8117974780	7509705469
8250027389	0035362452	9027234897	7697618076	9895972975	6392348460
5883035874	5000086744	2545764591	2712844785	2889089667	2014571245
7876558984	9204819883	6512724581	0100487150	8155542747	9883662921
3802864161	4787500331	9369006871	8682003019	3782876664	0310020898
0851229576	7380512971	7571628676	5042552429	5799674900	7241019878
4552637208	3730893709	4752873516	1895579873	0007768475	5385445102
9588801196	7709633968	6888969828	3430296367	5690555790	2025204818
3690075067	6988769244	4090169399	7088821977	0865228365	5164197992
3468852510	7494050701	9775939139	1733617562	5311392689	9986427114
8199552419	0136749060	7405674449	6606757354	0632823231	8002788708
4893304963	9947531766	5986833746	5869044824	4499961666	9357668405
2287969459	0085701669	5312920787	7491681837	7431677348	8678892950
6590839282	2541597916	7008276864	2759606131	5185490669	9020071225
9610709634	8563357729	8690961485	2723647878	8724506760	8088360476
4855817736	8427818457	8193818870	7320554355	4832086647	9570921608
1378837864	1527197298	5590098207	9747508656	6961923304	5756091410
0247679885	3266422930	0274696018	4672620967	1646664746	8837488744
0550430137	2582819412	8827166276	4768721197	8672580760	7403609748
7815909288	3226658363	5689251061	5507171461	3112383761	8551880714
3717695081	2997454817	7449701196	4124168736	7651188182	7839205800
4197382959	7093643161	6783842894	9184763986	1847803525	7506044201
8497857549	1755510568	8962263072	7081159168	6882788261	6579585277
8280653748	24				

APENDICE B

TABLA 10.
R= [(LONGITUD DEL APELLIDO PATERNO)+ (ULTIMO DIGITO DEL DIA)] MOD 10

6294831792	6276619214	6908604147	9238774637	4188359069	8188013791
6931634648	6266288528	5802342766	2253223557	6498235847	0026196593
6103460404	0690461346	9977790333	3966688918	8420129348	0028893944
9913159939	4696091765	3266897487	7689210596	7664517455	7724622375
8518713963	7247430304	0685895514	4180730931	3658088329	4198586169
2817977294	9511608307	5330729228	3298650554	5501803783	5694979009
4723039572	1576345553	9710657135	8683191254	1017269687	3830582112
4913707816	2717331298	3288943554	7165979384	8596942305	9753175294
0788156538	7474053829	1932970781	6994803939	4077141006	8403310264
0838274456	3675603783	9228203980	4665603775	5088315348	0872828395

3600300853	8367668478	1834681769	6750189773	2893724996	8218793260
5763368154	0736161797	0552667595	0650939736	0447194335	6217972104
8052888951	2667393313	9686195057	8490937758	5508517979	3044072889
3174132654	0239843828	6581474172	7707319253	7017198687	5578339661
0929755234	1804939985	2352704294	7006495109	1575579967	6081980742
6794037412	5894342552	2222747319	2861692951	4937300632	2386052255
2833723770	7888735722	4461951917	3554011733	5748938201	9380041519
4942316821	4947144858	7457838232	2356938348	6181503718	4781079983
9721650172	8011675959	0960205315	5500287216	9710209499	6831891985
0684764741	7136843469	2875813519	7593228876	3438104534	1928517264

0890511152	7629557447	3533195668	9138763178	8668597097	7350629717
1784039466	6674330530	2921441084	2924233328	9740653448	6417131101
8295597753	1547035865	7987022036	3166558779	9663247646	9190641200
3208372141	3675609931	7334774549	0093085985	3160580885	3487216476
3913743281	9307398055	8372259718	8642811780	2982080128	2517077076
2710617002	7859136749	3763393884	8237637830	6607965110	5870615376
3364791821	1267436579	6159898776	3587123761	4272022685	3782228727
2081493729	5616201032	9659629956	2171912968	2840865127	5053071025
0621153855	3874665015	9011139897	5248452954	4815119263	0307703882
0404264508	6904595653	1493078820	4252683399	2943278403	2513119849

9980946150	3458778872	3031250632	2001688905	9027669243	4142239253
6602524919	5055066503	8445956516	8645477265	7353949887	1040792886
3135228852	9289663876	9473836688	6812212403	7412516878	4256541262
8146769494	3847296776	1928268682	5940775949	8903730652	8614072557
3289978264	9272218809	1807098688	2204215473	0771470623	4812552953
2743553455	0738469898	0955011528	1708733387	2773695528	6023824617
6730358283	0279831507	3593408637	7333039959	9250788096	7291702132
7413543171	0546476934	6610409636	6945613831	3891345573	1661832952
4035331338	9821602665	9699614100	7936254375	9514373841	6254357757
4212320838	4977014383	6158608833	3473873114	8052849031	2119673791

APENDICE B

TABLA 10.
R= [(LONGITUD DEL APELLIDO PATERNO)+
(ULTIMO DIGITO DEL DIA)] MOD 10
(Continuación)

3781337773	4520346246	1944345042	6410629013	4900314378	0392175620
4799529990	6747011686	7290714088	0407912266	1226531663	6789223716
4622483976	6011815728	6518128157	6289716810	0874339302	4307981252
7256529356	5062409866	4757943056	5326986664	4218896495	8749759279
6965560960	6521376938	9940045782	9826216379	6970316078	1059612132
9556151614	1972107319	9745990624	4553983671	8158355307	1985437319
6596149137	0612297646	3795648976	7603007583	7857988955	0055471182
8241140584	7300796921	0610124251	1488225728	7000291213	1968110057
7214336488	9535089258	7008511116	9628079427	1949390130	1149509843
9710250413	3889020373	1453957345	5067336612	4703785856	9282072941

2615110419	1016589804	3805333855	6281225640	0343976425	5780810368
9028145145	6533935292	5101193167	8409888341	3792805031	3587626583
2029287620	8613133851	9697914904	7621472684	3945659937	4394729018
8573312178	3582939698	0881624734	6180725293	3017576021	0828314715
8879947214	0711512521	2321925884	0302619119	1767630298	5450125690
7888555583	8957758644	9850941296	6769650656	8465693817	0524365935
7350499567	1163350878	7347877986	7254786884	3153124096	4283303065
5767629515	5817365439	9604567857	8883808759	7054863922	4894271463
3705828666	2922958632	1977024705	4793561089	7184428270	3881488078
0876613090	6316072931	9962499842	3874929645	1326542973	4453885321

1368065341	3384661017	9843834727	8461965422	3346820417	6108807813
9615218971	8201196156	8926266575	1241237884	7219450907	8850092886
7532522161	9570105963	4275867606	8862903759	9264260768	4797143314
2931919589	8627531913	9953451810	2057605690	2262182266	9189482098
6516397972	8033822615	5696362853	0773705853	5364434130	7275975968
4204578295	5394547508	3857479892	1977346350	3607196806	0393481052
1643662370	0735258692	5385562348	1714915244	9511599232	7848713318
8220221081	5114849643	2075598466	8971276272	3347478069	2778859786
8751360282	0817790177	9951755357	5460942069	4900434979	3662853665
1037547230	6107093561	7231350619	6699344886	4339767804	1331000828

0429236012	5186358112	9379881117	7087293348	5313229660	5563291966
8471986810	0978601260	3139979965	1279825115	6516115349	4108493897
6109238836	5268909170	2117823244	0412412141	4961519972	7421568844
9653638087	7814851718	5497654407	5444573425	2948465102	1341630755
6085316640	6970985545	9181540439	1366392639	9027878415	3118531033
2601064046	0140111315	6726170854	0046202703	1960345620	6064236207
3762851760	2703629808	4822689533	4343558092	3617815971	4515053739
9603820134	7929920610	6450419920	9972125566	0561771311	9105252758
6950316870	2005999816	6237820786	7626819867	7100503583	7599624049
1691462641	2630132598	4868550925	5323099472	2702820318	1066267959

1060015705	5796920400	1237200944	6651998249	9885490011	3439329313
6237716494	04				

APENDICE C
PROGRAMAS PARA COMPUTADORA

Programa #1
Nombre: genera.prg
Objetivo: Generar una lista de números aleatorios con base a:
- i) el segundo dígito del día de nacimiento en el rfc,
- ii) el segundo dígito del mes de nacimiento en el rfc,
- iii) el segundo dígito del año de nacimiento en el rfc,
- iv) modulo 10 de una combinación lineal de los anteriores

donde rfc significa el registro federal de contribuyentes

Programa #2
Nombre: residuo.prg
Objetivo: Construir una sucesión de dígitos con la fórmula R=(X+Y)mod 10

Programa #3
Nombre: convnum.c
Objetivo: Convertir números enteros almacenados en formato texto a la representación de punto flotante

Programa #4
Nombre: linco.c
Objetivo: Generar una sucesión pseudoaleatoria de números por el algoritmo de congruencia lineal

Programa #5
Nombre: func.c
Objetivo: Definir rutinas generales para producir mensajes en pantalla

Programa #6
Nombre: gefl.c
Objetivo: Generar números de punto flotante y grabarlos en un archivo para realizar pruebas de lectura

Programa #7
Nombre: recup.c
Objetivo: Leer números de un archivo con una cantidad reducida de transferencias desde el disco.

Programa #8
Nombre: cuenta.c
Objetivo: Contar frecuencias de números en un archivo individualmente, por parejas y por ternas

Programa #9
Nombre: cuentpar.c
Objetivo: Contar frecuencias de pares de números de dos archivos y calcular la estadística de la prueba de independencia

Programa #1

```
* Programa: Genera.prg
* Objetivo: Generar una lista de números aleatorios con base a:
*           i)   el segundo digito del dia de nacimiento en el rfc,
*           ii)  el segundo digito del mes de nacimiento en el rfc,
*           iii) el segundo digito del año de nacimiento en el rfc,
*           iv)  modulo 10 de una combinación lineal de los
*                anteriores
*           donde rfc significa el registro federal de
*           contribuyentes
* Entrada:  archivo datos.dbf
* Salida :  archivo numero.dbf
* Lenguaje de programación: Dbase III

*******************************************************************
procedure constr
parameter metodo
num_al=0
* Abre archivos de entrada y salida
USE datos
SELECT 1
USE serie
SELECT 2
factor1=0
factor2=0
dato1=""
dato2=""
do case
  case metodo=1
    posicion=6
  case metodo=2
    posicion=8
  case metodo=3
    posicion=10
  case metodo=4
    do while dato1<>"a" .and. dato1<>"m" .and. dato1<>"d"
      @ 5 10 say "Primer Dato (a,m,d):" get dato1
      read
    enddo
    @ 6,10 say "Factor para el primer dato" get factor1 picture"99"
    read
    do while dato2<>"a" .and. dato2<>"m" .and. dato3<>"d"
      @ 7,10 say "Segundo dato (a,m,d):" get dato2
      read
    enddo
    @ 8,10 say "Factor para el segundo dato" get factor2 pic "99"
    read
```

Programa #1 (continuación)

```
    do case
      case dato1="a"
        pos1=6
      case dato1="m"
        pos1=8
      case dato1="d"
        pos1=10
      case dato2="a"
        pos2=6
      case dato2="m"
        pos2=8
      case dato2="d"
        pos2=10
   endcase
endcase
* Recorre archivo de entrada y obtiene un numero aleatorio para
cada registro
SELECT 1
DO WHILE .NOT. EOF()
   IF metodo=1 .or. metodo=2 .or. metodo=3
    num_al=substr(rfc,posicion,1)
   ELES
    num_al= val(substrae(rfc,pos1,1))*factor1+
            val(substrae(rfc,pos2,1))*factor2
    num_al= modo(num_al,10)
    ? num_al
    SELECT 2
    append blank
    replace  result with num_al
    SELECT 1
    SKIP
ENDDO
return
```

Programa #2

```
* Programa: residuo.prg
* Objetivo: Construir una sucesión de dígitos con la fórmula
*              R=(X+Y)mod 10
* Entrada:  archivos pat.dbf y anio.dbf
* Salida :  archivo p-a.dbf
* Lenguaje de programación: Dbase III

*******************************************************************

clear
set echo off
set talk off

* Abre archivo que contiene la sucesión Xn
select 1
use pat

* Abre archivo que contiene la sucesión Yn
select 2
use anio

* Abre archivo para grabar la sucesión Rn
select 3
use p-a

select 1
do while .not. eof()

* Toma un dato del primer archivo
  x=pat

* Toma un dato del segundo archivo
  select 2
  y=anio
  skip

* Obtiene el resultado
  z= mod ( x+y,10 )

  ? "x",x,"y",y,"z",z

* Graba el resultado en el tercer archivo
  select 3
  append blank
  replace valor with z

  select 1
  skip
enddo
```

Programa #3

```
/* Programa: convnum.c                                               */
/* Objetivo: Convertir números enteros almacenados en formato       */
/*           texto a la representación de punto flotante             */
/* Lenguaje de programación: C                                       */
/*-----------------------------------------------------------------*/
#include    <stdio.h>
FILE *apesc, *aplec;
int MAX=10, cuenta=9;
float SUP=10e4;
struct arint
 {
 float t[4];
 } ;

main()
{
abrearch();
leetexto();
cierraarch();
}

abrearch()
{
char s[12];
printf("Nombre del archivo que desea leer:  ");
gets(s);
if ( (aplec=fopen( s,"r" ))==NULL )
   {
    printf("No se puede abrir el archivo %s para lectura\n",s);
    exit(1);
   };
printf("Nombre del archivo de salida:  ");
gets(s);
if ( (apesc=fopen( s,"w" ))==NULL )
   {
    printf("No se puede abrir el archivo %s para escritura\n",s);
    exit(1);
   };
}
cierraarch()
{
fclose(apeos);
fclose(paleos);
}

graba(t)
/* Graba en un archivo en disco la lista de números en formato */
/* de punto flotante  */
float *t;
{
  fwrite( t, sizeof(*t), 1, apeos);
}
```

Programa #3 (continuación)

```
leetexto()
/* lee los datos originales en formato texto */
{
char numcad[10], c;
int j=0,totgrab=0;
float r;
while ( (c=getc(paleos))!=EOF )
    {
    if ( (c!=10)&&(c!=13) )
        {
          numcad[j]=c;
           j++;
        }
    else
        {
        numcad[j]=0; /* Carácter nulo indica final de la cadena */
        convfloat(numcad,j-1,&r);
        r=  r/SUP;
        printf(" %f \n",r);
        graba(&r);
        totgrab++;
        numcad[0]=0;  /* Borra la cadena con el numero anterior */
        j=0;
        }
    }
/*  Procesa el ultimo numero */
if (j>0)
   {
    numcad[j]=0; /* Carácter nulo indica final de la cadena */
    convfloat (numcad, j-1,&r);
    r= r/SUP ;
    printf(" %f \n",r);
    graba(&r);
    totgrab++;
   }
printf("Numero de registros grabados %d \n",totgrab);
}

convfloat(x,fin,f)
char *x;
int fin;
float *f;
{
int pot=1,m,i,j;
float n=0,y;
for (i=fin;i>-1;i--)
 {
   m=x[i]-'0';
   y=(float) m*pot;
   n=n+y; /* printf( "%f ",n); */
   pot=pot*10;
 }
*f=n;
}
```

Programa #4

```
/* Programa: linco.c                                                */
/* Objetivo: Generar una sucesión pseudoaleatoria de números        */
/*           por el algoritmo de congruencia lineal                 */
/* Se utiliza la siguiente formula para generar la sucesión:        */
/*  X(n+1) = ( a X(n) +c ) mod m                                    */
/* Nota    : Las instrucciones printf, gotoxy y drawbox que         */
/*           sirven para desplegar mensajes pueden ser inhibidas */
/* Lenguaje de programación: C                                      */
/*----------------------------------------------------------------*/

#include "func.c"
long int cuenta=20, grupo=100;
static int  a=32749 ,x=1,c=3, m=32749;

main(argc,argv)
int argc;
char *argv[4];
{
int j;
long int i;
float r;
if (argc==1)
  {
   printf ("linco Genera y despliega una sucesión pseudoaleatoria
\n");
   printf ("uso: linco cantidad_en_grupos numeros_por_grupo \n");
   exit();
   }
if (argc>1) cuenta=(atoi(argv[1]));
if (argc>2) grupo=(atoi(argv[2]));
draw_box(1,1,24,79);
gotoxy(3,25); printf ("Calculando números pseudoaleatorios");
gotoxy(14,25); printf ("Números calculados");

cuenta++;
for (i=1;i<cuenta;i++)
 {
  for (j=1;j<=grupo;j++)
     ran1(&r);
  gotoxy(15,25);
  printf("%d   ",i*grupo);
 }
}

ran1(v)
float *v;
{
float t;
t=(a*x+c) & m;
x=( int)  t;  /* actualiza la semilla entera */
t=t/32749;  /* valor entre 0 y 1*/
*v=t;
return;
}
```

Programa #5

```
/* Programa : func.c                                                    */
/* Objetivo : Definir rutinas generales para producir mensajes          */
/*            en pantalla                                               */
/*    gotoxy  traslada el cursor hasta la columna x,  renglón y         */
/*    drawbox dibuja un marco en la pantalla                            */
/* Lenguaje de programación: C                                          */
/* ---------------------------------------------------------------------*/

gotoxy(x,y)
   int x,y;
     {
       char xx[3],yy[3];
       sprintf(xx, "%d\0",x);
       sprintf(yy, "%d\0",y);
       printf("\033[%s;%sH",xx,yy);
     }

draw_box( ax,ay,cx,cy)
int ax,ay,cx,cy;
 {
   register short int i;
   if(ax==cx)
         for(i=ay;i<cy;i++) {
           gotoxy(ax,i); printf("%c",196);
          }
         else {
               if(ay==cy)
                  for(i=ax;i<cx;i++) {
                     gotoxy(i,cy); printf("%c",179);
                    }
                  else {
                     gotoxy(ax,ay); printf("%c",218);
                     for(i=ay+1;i<cy;i++) {
                        gotoxy(ax,i); printf("%c",196);
                       } ;
                     gotoxy(ax,cy); printf("%c",191);
                     for(i=ax+1;i<=cx-1;i++) {
                        gotoxy(i,cy); printf("%c",179);
                       };
                     gotoxy(cx,cy); printf("%c",217);
                     for(i=cy-1;i>ay;i--) {
                        gotoxy(cx,i); printf("%c",196);
                      } ;
                     gotoxy(cx,ay); printf("%c",192);
                     for(i=cx-1;i>=ax+1;i--) {
                        gotoxy(i,ay); printf("%c",179);
                      };
                }
     }
   return(0);
  }
```

Programa #6

```
/* Programa: gefl.c                                                  */
/* Objetivo: Generar números de punto flotante y grabarlos          */
/*           en un archivo para realizar pruebas de lectura          */
/* Lenguaje de programación: C                                       */
/* ---------------------------------------------------------------- */
#include   <stdio.h>
FILE *apesc, *aplec;
int MAX=10, cuenta=9;
long int tope=500000;
struct arint
 {
 float t[4];
 } ;

main()
{
abrearch();
genera(tope);
cierraarch();
}

abrearch()
{
char s[12];
printf("Nombre del archivo de salida:  ");
gets(s);
if ( (apesc=fopen( s,"w" ))==NULL )
  {
    printf("No se puede abrir el archivo %s para escritura\n",s);
    exit(1);
   };
}
cierraarch()
{
  fclose(apeos);
}

genera(lim)
long int lim;
{
float y=0;
int x=0;
do  {
  y= (float) x/1000000;
  graba(&y);
  x++;
    }while (x<lim);
}

graba(t)
/* Graba en un archivo en disco la lista de números  */
float *t;
{  fwrite( t, sizeof(*t), 1, apeos);
}
```

Programa #7

```
/* Programa: recup.c                                                */
/* Objetivo: Leer números de un archivo con una cantidad            */
/*           reducida de transferencias desde el disco.             */
/* Lenguaje de programación: C                                      */
/* Nota    : Las instrucciones printf, gotoxy y drawbox que         */
/*           sirven para desplegar mensajes pueden ser inhibidas */
/* -----------------------------------------------------------------*/
#include   <stdio.h>
#include "func.c"
FILE  *aplec;
int MAX=16, cuenta=1000;
float lista[2000];

main(argc,argv)
int argc;
char *argv[10];
{
char nombre[12];
if (argc<3 )
  {
   printf(" recup Recupera números de punto flotante \n");
   printf(" Uso: recup num_bloques tam_bloque nom_archivo \n ");
   exit();
  }
cuenta=atoi(argv[1]); /* fija el numero de operaciones de E/S */
MAX=atoi(argv[2]);    /* fija el tamaño del buffer */
if (argc>3 )
  strcpy(nombre,argv[3]);
else
  {
  printf("Nombre del archivo que desea leer:  ");
  gets(nombre);
  };
/*
draw_box (1,1,24,79);
gotoxy(3,25); printf ("Leyendo %s ",nombre);
gotoxy(14,25); printf("Números leidos:");
*/
abrearch(nombre);
recupera();
cierraarch();
}

abrearch(s)
char s[12];
{
if ( (aplec=fopen( s,"r" ))==NULL )
   {
    printf("No se puede abrir el archivo %s para lectura\n",s);
    exit(1);
   };
}
```

Programa #7 (continuación)

```
cierraarch()
{
fclose(paleos);
}

recupera()
/*  Lee de un archivo en disco una lista de números  */
{
int i=0,j=0, n=0;
do
  {
   for (j=0;j<MAX;j++) lista[j]=0; /* inicializa lista */
   fread( (char *)lista, sizeof(*lista),MAX, paleos);
   i++;
/*   n=i*MAX;  */
/*   gotoxy(15,25); printf(" %d ",n); */
   if (i>=cuenta) break;
   } while ( !feof(aplec) );
}
```

Programa #8

```
/* Programa: cuenta.c                                              */
/* Descripción: Contar frecuencias de números en un archivo        */
/*              individualmente, por parejas y por ternas          */
/* Lenguaje de programación: C                                     */
/* -------------------------------------------------------------- */

#include   <stdio.h>
#include "func.c"

/* variables globales */
FILE  *aplec;
int MAX=16, cuenta=1000, dimension=1;
char lista[2000];
static int frec[10], frec2[10][10], frec3[10][10][10];
static char posicion=0;
static unsigned char vector[3],primero,segundo;

main(argc,argv)
int argc;
char *argv[10];

{
char nombre[12];
if (argc<3 )
  {
   printf(" cuenta: recupera bytes de un archivo desplegando \n");
   printf(" las frecuencias de los valores \n");
   printf(" Uso: cuenta num_bloques tam_bloque nom_archivo
dimension\n ");
   exit();
  }
cuenta=atoi(argv[1]); /* fija el numero de operaciones de E/S */
MAX=atoi(argv[2]);    /* fija el tamaño del buffer */
if (argc>3 )
  strcpy(nombre,argv[3]);
else
  {
  printf("Nombre del archivo que desea leer:  ");  gets(nombre);
  };
if (argc>4)
  dimension=atoi(argv[4]);

draw_box (1,1,24,79);
gotoxy(3,25); printf ("Leyendo %s ",nombre);
gotoxy(14,25); printf("Números leidos:");

inicializa ();
abrearch(nombre);
recupera();
cierraarch();
completa();
tabla();
estadistica();
}
```

Programa #8 (continuación)

```
abrearch(s)
char s[12];
{
if ( (aplec=fopen( s,"r" ))==NULL )
   {
    printf("No se puede abrir el archivo %s para lectura\n",s);
    exit(1);
   }
else {
   printf("Listo para procesar archivo %s \n", s);
   }
}

cierraarch()
{
fclose(aplec);
}

recupera()
/*  Lee de un archivo en disco una lista de números  */
{
int i=0,j=0, n=0;
do
  {
   for (j=0;j<MAX;j++) lista[j]=0; /* inicializa lista */
   fread( (char *)lista, sizeof(*lista),MAX, aplec);
   if (!feof(aplec)) procesa (lista);
   i++;
   if (i>=cuenta) break;
   } while ( !feof(aplec) );
}

procesa(t)
/* Procesa los números recuperados en una sola operación a disco */
char *t;
{
int i, mx;
unsigned char a,b,c;
unsigned char r,x;
mx=MAX+1;
switch (dimension) {
 case 1:
   for (i=1;i<mx;i++)
     {
       r= *t;
       if (r<0) printf(" %d ",r);
       x=r % 10;
       printf(" %d ",x);
       frec[x]=frec[x]+1;
       t++;    /* posiciona apuntador al siguiente número */
     }
     break;
```

Programa #8 (continuación)

```
case 2 :
 for (i=1;i<mx;i++)
  {
    r= *t;
    if (posicion ==99)  /* existen previos valores del vector */
      {
       vector[0]=vector[1];
       vector[1]=r;
      }
    if (posicion < 2 )
      {
      vector[posicion]=r ;
      if (posicion==0)
         primero=vector[posicion]; /* guarda el 1er. valor */
      posicion++;
      if (posicion==2) {posicion=99;}
      else { t++; continue;};
      }
    a=vector[0] % 10 ;
    b=vector[1] % 10;
    printf(" %d , %d \n", a,b );
    frec2[a][b]=frec2[a][b]+1;
    t++;    /* posiciona apuntador al siguiente número */
   }
  break;
 case 3 :
  for (i=1;i<mx;i++)
   {
    r= *t;
    if (posicion ==99)  /* existen previos valores del vector */
      {
       vector[0]=vector[1];
       vector[1]=vector[2];
       vector[2]=r;
      }
    if (posicion < 3 )
      {
      vector[posicion]=r;
      /* guarda los 2 elementos iniciales de la sucesión */
      if (posicion==0) primero=vector[posicion];
      if (posicion==1) segundo=vector[posicion];
      posicion++;
      if (posicion==3) {posicion=99;}
      else { t++; continue;};
      }
    a=vector[0] % 10 ;b=vector[1] % 10 ;c=vector[2] %10 ;
    printf(" %d %d %d \n",a,b,c);
    frec3[a][b][c]=frec3[a][b][c]+1;
    t++;    /* posiciona apuntador al siguiente número */
  }
  break;
  } /* termina switch */
}
```

```
completa()
/* completa el número de vectores igual al número de datos   */
/* individuales usando los primeros elementos de la sucesión */
{
unsigned char a,b,c;
switch (dimension)
  {
   case 2:
     vector[0]=vector[1];
     vector[1]=primero;
     a=vector[0] % 10 ;  b=vector[1] % 10;
     frec2[a][b]=frec2[a][b]+1;
     break;
   case 3:
     vector[0]=vector[1];
     vector[1]=vector[2];
     vector[2]=primero;
     a=vector[0] % 10 ;b=vector[1] % 10 ;c=vector[2] %10 ;
     frec3[a][b][c]=frec3[a][b][c]+1;
     vector[0]=vector[1];
     vector[1]=vector[2];
     vector[2]=segundo;
     a=vector[0] % 10 ;b=vector[1] % 10 ;c=vector[2] %10 ;
     frec3[a][b][c]=frec3[a][b][c]+1;
     break;
  }
}

tabla()
{
int i,j,k, suma=0;
printf(" Frecuencias de clases módulo 10 \n");
switch (dimension) {
  case 1 :
    suma=0;
    for (i=0;i<10;i++)
      {
        printf(" %d : %d \n", i , frec[i] );
        suma=suma+frec[i];
      }
    printf(" Total de numeros leídos %d \n",suma);
    break;
  case 2 :
    suma=0;
    for (i=0;i<10;i++)
     {
       printf(" %d \n",i);
       for (j=0;j<10;j++)
        {
          printf(" %d ", frec2[i][j]);
          suma=suma+frec2[i][j];
        }
       printf("\n");
     }
```

Programa #8 (continuación)

```
    printf(" Total de numeros leídos %d \n",suma);
    break;
  case 3 :
    suma=0;
    for (i=0;i<10;i++)
     {
      for (j=0;j<10;j++)
       {
        printf(" %d  %d \n",i,j);
        for (k=0;k<10;k++)
          {
          printf(" %d ", frec3[i][j][k]);
          suma=suma+frec3[i][j][k];
          }
        printf("\n");
       }
     }
    printf(" Total de numeros leídos %d \n",suma);
    break;
  } /* termina switch */
}

estadistica()
{
int i,j,k, obs, numobs;
float tmp, suma,estad,frecesp;
printf(" Cálculo de estadística ji-cuadrada   \n");
switch (dimension)   {
  case 1 :
    suma=0;
    numobs=MAX*cuenta;
    frecesp= (float) numobs/10;
    printf("frecuencia esperada %f \n",frecesp);
    for (i=0;i<10;i++)
      {
        tmp=frec[i];
        suma=suma+ (tmp*tmp)/frecesp;
      }
    estad=suma - numobs;
    printf("valor de la estadística %f \n",estad);
    break;
  case 2 :
    suma=0;
    numobs=MAX*cuenta;
    frecesp= (float) numobs/100;
    printf("frecuencia esperada %f \n",frecesp);
    for (i=0;i<10;i++)
     {
       for (j=0;j<10;j++)
        {
          tmp= frec2[i][j];
          suma=suma+ (tmp*tmp)/frecesp;
        }
     }
```

Programa #8 (continuación)

```
    estad= suma - numobs;
    printf("valor de la estadística %f \n",estad);
    break;
  case 3 :
    suma=0;
    numobs=MAX*cuenta;
    frecesp= (float) numobs/1000;
    printf("frecuencia esperada %f \n",frecesp);
    for (i=0;i<10;i++)
     {
      for (j=0;j<10;j++)
       {
        for (k=0;k<10;k++)
          {
          tmp= frec3[i][j][k];
          suma=suma+ (tmp*tmp)/frecesp;
          }
       }
     }
    estad= suma - numobs;
    printf("valor de la estadística  %f  \n",estad);
    break;
  } /* termina switch */
}

inicializa()
{
  int i,j,k;
  for (i=0;i<10;++i)
     {
     frec[i]=0;
     for (j=0;j<10;++j)
         {
          frec2[i][j]=0;
          for (k=0;k<10;++k)  frec3[i][j][k]=0;
         };
     };
}
```

Programa #9

```
/* Programa: cuentpar.c                                                   */
/* Objetivo: Contar frecuencias de pares de números de dos               */
/*           archivos y calcular estadística de la prueba                */
/*           de independencia                                            */
/* Lenguaje de programación: C                                           */
/* ------------------------------------------------------------------ */

#include   <stdio.h>
#include "func.c"

/* variables globales */
FILE  *aplec1, *aplec2;
int MAX=16, cuenta=1000;
char lista1[1000], lista2[1000];
static int frecX[20], frecY[20], frecZ[20][20], frecZesp[20][20];
/* valores mayores que 20 seran ignorados en el conteo */
static char posicion=0;
static unsigned char vector[3],primero,segundo;
int lim1=0,lim2=0;
main(argc,argv)
int argc;
char *argv[10];
{
char nombre1[12],nombre2[12];
if (argc<3 )
  {
   printf(" cuentpar: recupera bytes de dos archivos   \n");
   printf(" desplegando las frecuencias de los valores \n");
   printf(" Uso: cuentpar num_bloques tam_bloque nom_arch_1
nom_arch_2\n ");
   exit();
  }
cuenta=atoi(argv[1]); /* fija el número de operaciones de E/S */
MAX=atoi(argv[2]);    /* fija el tamaño del buffer */
if (argc>3 )
  strcpy(nombre1,argv[3]);
else
  {
  printf("Nombre del primer archivo :  ");  gets(nombre1);
  };
if (argc>4 )
  strcpy(nombre2,argv[4]);
else
  {
  printf("Nombre del segundo archivo :  ");  gets(nombre2);
  };
/*
draw_box (1,1,24,79);
gotoxy(3,25); printf ("Leyendo %s ",nombre);
gotoxy(14,25); printf("Números leidos:");
*/
inicializa ();
abrearch(nombre1,nombre2);
```

Programa #9 (continuación)

```
recupera();
cierraarch();
lim1++;
lim2++;
printf("%d  %d \n",lim1,lim2);
tabla();
estadistica();
}

abrearch(s1,s2)
char s1[12],s2[12];
{
if ( (aplec1=fopen( s1,"r" ))==NULL )
   {
    printf("No se puede abrir el archivo %s para lectura\n",s1);
    exit(1);
   }
else {
   printf("Listo para procesar archivo %s \n", s1);
   }
if ( (aplec2=fopen( s2,"r" ))==NULL )
   {
    printf("No se puede abrir el archivo %s para lectura\n",s2);
    exit(1);
   }
else {
   printf("Listo para procesar archivo %s \n", s2);
   }
}

cierraarch()
{
fclose(aplec1);
fclose(aplec2);
}

recupera()
/*  Lee de un archivo en disco una lista de números  */
{
int i=0,j=0, n=0;
do
  {
   for (j=0;j<MAX;j++)
     { lista1[j]=0; lista2[j]=0; } ;
   fread( (char *)lista1, sizeof(*lista1),MAX, aplec1);
   fread( (char *)lista2, sizeof(*lista2),MAX, aplec2);
   if  ( ( !feof(aplec1) ) && ( !feof(aplec2) ) ) procesa
(lista1,lista2);
   i++;
   if (i>=cuenta) break;
   } while ( ( !feof(aplec1) ) && ( !feof(aplec2) ) );
}
```

Programa #9 (continuación)

```
procesa(t1,t2)
/* Procesa los  números leídos en una sola operación a disco */
char *t1, *t2;
{
int i, mx;
unsigned char r,s,x,y;
mx=MAX+1;
   for (i=1;i<mx;i++)
     {
       r= *t1;
       s= *t2;
       if ((r<0)||(s<0)) printf(" %d  %d",r,s);
       x=r % 20;  y=s % 20;
       if (x>lim1) lim1=x;
       if (y>lim2) lim2=y;
       frecZ[x][y]=frecZ[x][y]+1;
       frecX[x]=frecX[x]+1;
       frecY[y]=frecY[y]+1;
       t1++;   /* posiciona apuntador al siguiente número */
       t2++;
     }
}

tabla()
{
int i,j,k, suma=0;
float frecesp;
printf(" Frecuencias de la 1er. variable o archivo \n");
for (i=0;i<lim1;i++)
    {
     printf(" %d : %d \n", i , frecX[i] );
     suma=suma+frecX[i];
    }
printf(" Total de numeros leídos 1er. archivo  %d \n",suma);
printf(" Frecuencias de la 2a. variable o archivo \n");
suma=0;
for (i=0;i<lim2;i++)
    {
     printf(" %d : %d \n", i , frecY[i] );
     suma=suma+frecY[i];
    }
printf(" Total de numeros leídos 2o. archivo  %d \n",suma);

suma=0;
for (i=0;i<lim1;i++)
    {
     printf(" %d \n",i);
     for (j=0;j<lim2;j++)
         {
           printf(" %d ", frecZ[i][j]);
           suma=suma+frecZ[i][j];
         }
     printf("\n");
    }
```

Programa #9 (continuación)

```
printf(" Total de pares de numeros leidos %d \n",suma);
printf(" Frecuencias esperadas          \n");
for (i=0;i<lim1;i++)
   {
    printf(" %d \n",i);
    for (j=0;j<lim2;j++)
        {
        frecZesp[i][j]=frecX[i]*frecY[j]/suma;
        /* redondea el valor de la frecuencia */
        frecesp= (float) frecX[i]*frecY[j]/suma;
        frecesp= frecesp - (float) frecZesp[i][j];
        if (frecesp > 0.5) frecZesp[i][j]=frecZesp[i][j]+1;
        printf(" %d ",frecZesp[i][j]);
        }
    printf("\n");
   }
}

estadistica()
{
int i,j,k, obs, numobs;
float tmp, suma,estad,frecesp;
printf(" Cálculo de estadística ji-cuadrada   \n");
suma=0;
estad=0;
for (i=0;i<lim1;i++)
   {
    printf(" %d \n",i);
    for (j=0;j<lim2;j++)
        {
        tmp=(float) frecZ[i][j]*frecZ[i][j]/frecZesp[i][j];
        estad=estad+tmp;
        suma=suma+frecZ[i][j];
           printf(" %f %f \n", tmp, estad );
        }
    printf("\n");
   }
    estad=estad-suma;
    printf(" valor de la estadística de prueba %f \n",estad);
}

inicializa()
{
int i,j;
  for (i=0;i<20;++i)
      {
      frecX[i]=0;  frecY[i]=0;
      for (j=0;j<20;++j)
          {
           frecZ[i][j]=0;
           frecZesp[i][j]=0;
          };
      };
}
```