19
24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

SOLUCION A LOS JUEGOS ESTOCASTICOS BIPERSONALES DE SUMA CERO CON DESCUENTO UTILIZANDO PROGRAMACION DINAMICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LIC. MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

P R E S E N T A :

MANUEL ALEJANDRO MORALES JIMENEZ

ASESOR: MAT. HECTOR ARGÜELLES TEJEDA

STA. CRUZ ACATLAN, EDO. MEX. 1995

FALLA DE ORIGEN

A mis padres: quienes con su ejemplo y apoyo me inculcaron el deseo de superación. Mi eterno agradecimiento.

A mi hermano, por su confianza y alegria.

A mi tio Alfonso, por su constante motivación y ayuda desinteresada.

PROLOGO

Existen varios motivos y circunstancias por las cuales elegí el tema de "Juegos Estocásticos" para desarrollarlo como trabajo de tesis profesional. Primeramente fue el interés que la materia que lleva el nombre de Teoría de Juegos despertó en mi, y que en un principio crei, ingenuamente que dicha teoría representaba una gran solución a diferentes tipos de problemas sociales, politicos y en general problemas de competencia. Sin embargo, la gran limitación que yo vi en la Teoría de Juegos era el hecho de que siempre se deben de tener los beneficios de los jugadores en la matriz de pagos, esto nos presenta un gran obtáculo pues no siempre se puede lograr esto. Mi primera idea fue trabajar sobre este defecto, pensando que el problema se podría resolver utilizando técnicas de pronósticos, pero, de haber trabajado por este lado hubiera necesitado una gran cantidad de información numérica, con la que no contaba ni cuento hasta ahora, por lo que si yo quería ampliar mis conocimientos en esta área tenía que mirar hacia otro lado. La falta de difusión de los avances en esta rama de la matemática fue tal vez mi principal problema, ya que fuera de la Teoría Clásica de Juegos (y por esto entiendo los trabajos de von Newman), hay muy poca información, la mayoría de ésta se encuentra en revistas cientificas (difíciles de conseguir) o en recopilaciones de artículos y son realmente raros los libros que aborden el tema con cierta profundidad. Dentro de esta información el tema más frecuente y del que podría sacar mayor provecho, son los Juegos Estocásticos con descuento, ya que ni los juegos recursivos, juegos sin descuento o de suma diferente de cero son tratados con frecuencia en la literatura, y por el momento no se conocen métodos confiables para encontrar su solución, o un campo de aplicaciones como el que podrían tener los Juegos Estocásticos con descuento.

Las limitaciones en cuanto a la cantidad de información representaron un fuerte problema, el poco material que existe, no sólo de Juegos Estocásticos, sino, de temas relacionados con la Teoria de Juegos, está en otro idioma (francés e inglés por lo general), y no se encuentran con facilidad. Incluso en las bibliografías que incluyen los libros o articulos, hacen referencia a tesis de grado sólo disponibles en Universidades extranjeras. Sobre los otros temas que toca brevemente el trabajo, como es la informática y la programación dinámica, la situación es muy diferente ya que actualmente existe mucha bibliografia en temas relacionados con la computación; con respecto a la programación dinámica, aunque la situación no es la misma, si es más fácil encontrar material.

Por lo escrito arriba, puedo trazarme un objetivo general, que creo haber cubierto con este trabajo, y es el de contribuir de alguna forma a la difusión de este tipo de juegos y teoría, muy poco conocidos, y valorados.

Otros objetivos, pero esta vez de tipo académico es el dar un ejemplo más que contribuya a ver otro tipo de solución vía programación dinámica; que como veremos a lo largo del trabajo es ideal para resolver este tipo de juegos, ya que su metodología se ajusta perfectamente para resolver los Juegos Estocásticos y como sabemos la mejor forma de lograr un dominio de este método es la difusión y análisis de ejemplos. Segundo, proponer que el tema de Juegos Estocásticos se incluya al temario de la materia de Teoría de Juegos, de la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación. Ya que este tipo de juegos permite una ampliación de los alcances de la Teoría de Juegos, al incluir el concepto de "estado" o "periodo" al juego, porque ahora no hablamos de un solo juego en un tiempo dado, sino de un juego que está compuesto de otros juegos que se repiten a través del tiempo. Esto permitirá encontrar más aplicaciones a la teoría.

El tema de Juegos Estocásticos con descuento lo desarrollé con el afán de conocer más acerca de este tema y por la escasa difusión del tema o tópicos alrededor de la Teoría de Juegos, que es una teoría que no ha dejado de evolucionar nunca. De cualquier forma, el desarrollo de este trabajo con el que de alguna forma he de dar por terminados mis estudios de licenciatura me ha dejado muy satisfecho. Estas últimas palabras me hablan de un último objetivo, esta vez de tipo personal, que es el de titularme en la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación.

Quiero agradecer al Licenciado Hector Argüelles Tejeda su ayuda y sus siempre atinados consejos, durante la elaboración de este trabajo; al Licenciado Carlos San Juan Rivera, por su ayuda en la elaboración del subcapítulo 3.4, así como a mi honorable jurado, por sus comentarios al trabajo final. Sin los cuales este trabajo no hubiera podido concretarse.

INDICE

Contenido Páginas

Contenido Páginas

INTRODUCCION

El trabajo que tiene ahora en las manos, trata el tema no muy conocido de la Teoría de Juegos Estocásticos, en particular, juegos de dos personas, de suma cero y con un factor de descuento. Así como de su solución utilizando la programación dinámica para obtenerla, viene con esto implicito el uso de la computadora como una herramienta necesaria para encontrar su solución.

El trabajo está dividido de la siguiente manera: primeramente, el Marco Teórico nos ubicará en el ambiente en que se desarrolla esta teoría, así como las diferentes ramas de la matemática que convergen en ella. También hablaremos de la utilidad que presta el actual desarrollo tecnológico en materia de computo para este tipo de problemas. En el Capítulo I definiremos que es un Juego Estocástico bipersonal de suma cero y veremos sus principales teoremas, como los presentó L. S. Shapley en 1953; bosquejaremos el modo de resolver un Juegos Estocástico y veremos cuales fueron las condiciones que frenaron el desarrollo, de esta nueva teoría, y por que es necesario utilizar programación dinámica si se desea trabajar con estos juegos. Ya en el Capítulo II definiremos un Juego Estocástico bipersonal con descuento y revisaremos un teorema importante, como lo presentó L. C. Thomas en 1984, que viene siendo un resumen de los tres primeros teoremas vistos en el capítulo I, pero éste ya contempla el factor de descuento. Hablaremos un poco sobre el desarrollo de algoritmos propuestos a lo largo del tiempo para resolver este tipo de juegos y finalmente veremos las afinidades entre la programación dinámica y los Juegos Estocásticos que nos serán muy útiles en el siguiente capítulo. Es en el Capitulo III donde por fin resolvemos un Juego Estocástico bipersonal de suma cero con descuento, elaborando para esto un programa dinámico que posteriormente fue codificado en un lenguaje de computo, para obtener su solución, y comentaremos esta solución; cuando se vea el problema se entenderá por que fue necesario hacer todo esto, por último bosquejaremos un problema detallando los elementos de porque podría pensarse como un Juego Estocástico con descuento. Las Conclusiones, a pesar de su brevedad hablan de lo que se puede esperar de esta nueva teoría en un futuro cercano, así como de sus limitaciones.

Hasta aquí el trabajo en lo que a Juegos Estocásticos se refiere; sin embargo, incluimos al final, tres apéndices para reforzar un poco el contenido de la tesis. El primer apéndice es acerca de la Teoría de Juegos "Clásica", la llamo clásica para poder diferenciarla de la Teoría de Juegos Estocásticos, pero no se le encuentra con este nombre en ningún otro lugar, este apéndice no pretende más que profundizar un poco en algunos conceptos y definiciones de la Teoría Clásica de los Juegos, que se tocaron durante el desarrollo de los capítulos. Leer el apéndice A, no ayudará a la persona que no este familiarizada con la Teoría de Juegos, a comprender el tema de este trabajo, su fin, es el de recordar algunas definiciones básicas. El apéndice B, trata el tema de la programación dinámica, explicando el trato que se les debe dar a los problemas que se quieran resolver, por medio de este método. El apéndice C, muestra el listado y la corrida del programa que se elaboró para encontrar la solución del juego visto en el tercer capítulo; hay que aclarar que este programa sólo es útil para ese problema en específico y no puede correrse con otro juego.

Antes de pasar a la lectura del trabajo, es necesario decir algo acerca de la bibliografía. Los Juegos Estocásticos no son un tema que se trate en todos los libros que hablen de juegos, aunque la mayoría de los libros que tuve oportunidad de revisar, fueron escritos y publicados pocos o muchos años después de 1953, año en que se dieron a conocer los primeros trabajos acerca de Juegos Estocásticos; estos libros no son de fácil acceso y son muy poco conocidos, a pesar de que son excelentes trabajos; libros fundamentales para el desarrollo de esta tesis fueron: "Game and decisions, introduction and critical survey", de Duncan Luce y Howard Raiffa; "Stochastic games and related topics", de varios autores, este libro es una recopilación de artículos que hablan de Juegos Estocásticos y temas afines, como el de algoritmos o juegos estocásticos n-personales; y por supuesto "Games, theory and applications", de L. C. Thomas; algunos de estos libros y otros son mencionados en la Lista de notas de pie de página. Otro tipo de libros que aparecen en la bibliografía, son los de investigación de operaciones y progamación dinámica, que también fueron muy útiles al momento de elaborar el trabajo, todos los libros de investigación de operaciones que consulté, tienen un capítulo para la Teoría de Juegos y otro para la programación dinámica. Por último, los libros que hacen referencia a otros temas, como son: métodos numéricos, informática y programación, no fueron tan ocupados, pero aportaron su grano de arena al trabajo final, estos también forman parte de la bibliografía. El material de la henmerografía fue muy útiles al momento de escribir el Marco Teórico y es de muy fácil acceso.

Sin más que decir, podemos pasar a la exposición del trabajo.

MARCO TEORICO

La teoría de Juegos Estocásticos se puede considerar como uno de los pasos más importantes en esta rama, desde que von Newman realizó sus trabajos, que ahora ya podemos considerar como la Teoría Clásica de los Juegos. Esta nueva teoría fue introducida en 1953 por L. S. Shapley en un artículo titulado simplemente "Juegos Estocásticos". Se puede decir que se trataba de un paso obvio para el desarrollo de la Teoría de Juegos, ya que anteriormente el juego se desarrollaba todo en una etapa, es decir, el juego se realizaba en un momento en el tiempo y enseguida se solucionaba, dándole a cada jugador su premio o pago correspondiente. Ahora, esta nueva idea nos permite desarrollar juegos por etapas, es decir, el juego estará compuesto por diferentes juegos que es necesario resolver a través del tiempo, sin que existan posibilidades de pasar a otro juego sin antes haber resuelto el juego donde se encuentran los jugadores en ese momento; ésta idea resulta fundamental para los Juegos Estocásticos así como para este trabajo, y nos ocuparemos en detalle de ella más adelante.

En un Juego Estocástico existirán probabilidades de transición para poder pasar de etapa a etapa o de juego en juego. Lo anterior sugiere que previos conocimientos de "cadenas de Markov" serán útiles para entender cabalmente estos juegos, ya que la forma de una cadena de Markov es muy semejante a la de un Juego Estocástico, como lo verifican las palabras de F. S. Hillier y G. J. Lieberman en su libro "Introducción a la investigación de operaciones":

"En los problemas de toma de decisiones, con frecuencia surge la necesidad de tomar decisiones basadas en fenómenos que tienen incertidumbre asociada a ellos... En lugar de manejar esta variabilidad como cuanlitativa, puede incorporarse al modelo matemático y manejarse en forma cuantitativa".

Sin embargo, no es indispensable tener conocimientos de cadenas de Markov para solucionar este tipo de juegos. En cambio la "Programación Dinámica" si nos será indispensable en el momento de obtener la solución, es necesario manejar o tener idea de la Programación Dinámica, y digo tener idea, debido a que no existe un método establecido para resolver problemas como sería en programación lineal, citando a los autores anteriormente mencionados, nos daremos una idea de lo que quiero decir:

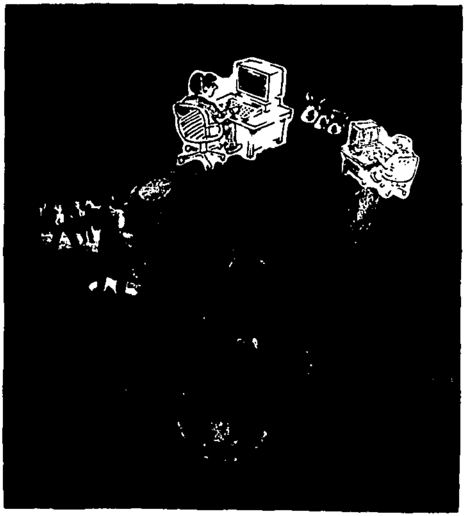
"En contraste con la programación lineal, no cuenta con una formulación matemática estandar para 'el' problema de programación dinámica, sino que se trata de un enfoque de tipo general para la solución de problemas y las ecuaciones especificas que se usan se deben desarrollar para que representen cada situación individual. Entonces, se necesita un cierto grado de creatividad y buen conocimiento de la estructura general de los problemas de programación dinámica para reconocer cuando un problema se puede resolver por medio de estos procedimientos y cómo estos se pueden llevar a cabo".

y es precisamente el Juego Estocástico un problema que se presta para resolverse mediante esta técnica, como tendremos oportunidad de ver.

Otra técnica idispensable es la programación, debido al tamaño que puede alcanzar un Juego Estocástico se hace imposible su solución en forma manual, como lo dicen A. Kaufmann y R. Cruon en su libro "La programación dinámica", esto sin hacer referencia directamente a los

Juegos Estocásticos pero sí con el mismo enfoque que debemos de tener:

"... debe subrayarse que en la práctica la resolución analítica completa de un programa dinámico aleatorio es prácticamente imposible cuando se tiene un cierto grado de complejidad, casi siempre presente en los casos en que se desea representar la realidad en forma suficientemente fiel. En general, el estudio analítico sólo permite demostrar ciertas propiedades de las soluciones. El método habitual consiste en este caso en buscar la solución numérica mediante una computadora electrónica".



Representación imaginaria de un Juego Estocástico

Como vemos hasta ahorita, los Juegos Estocásticos en su estructura y en su solución son una mezcla de varias ramas de la matemática, como son: las cadenas de Markov y la Teoría Clásica de

Juegos, así como la Programación Dinámica, auxiliada por las computadoras electrónicas. No es necesario decir que el conocimiento de la Teoría Clásica de los Juegos es indespensable para poder entender y resolver los Juegos Estocásticos, sin ésta no podríamos concebir la generalización que se hace de punto silla a todo el juego, esto significa que este punto silla satisface todo el juego y a cada uno de los subjuegos de que está compuesto; así como la extensión de estrategia, aquí llamada estrategia estacionaria.

Por otro lado, durante la elaboración de este trabajo se publicó el libro "Introducción a la matemática de los juegos" de Francisco Sánchez, cuya primera edición es de 1993, su actualidad, sin embargo, no nos presenta ningún material con respecto a los Juegos Estocásticos, no así con otros trabajos de Shapley sobre juegos, como son juegos n-personales coperativos y no coperativos. Por lo que podemos creer que a medida que se den a conocer este tipo de avances se podrá tener una mayor aplicación de la Teoría de Juegos.

Se hablaba arriba de la utilidad de las computadoras para resolver este tipo de juegos, debido al tamaño que llegan a tener éstos; es admisible que el lector se pregunte qué tan válido es hacer mención de la ayuda de las computadoras para resolver estos problemas, si ya casi nada se hace sin contar con una computadora, sin embargo, en favor de este argumento que esgrimo, puedo decir que esta teoría no había logrado un desarrollo potencial anteriormente, debido al poco grado de refinamiento en el que se encontraban las computadoras cuando surgió esta teoría, y aun ahora la solución de estos juegos se ve detenida o frenada por la capacidad de almacenamiento y procesamiento de las máquina. No dudamos que en breve, en vista de los constantes avances que presenta esta rama de la tecnología el problema desaparezca por completo.

Actualmente el problema de almacenamiento de datos (lo que no implica procesamiento) se puede decir que ha llegado a un grado satisfactorio, continuamente se puede enterar uno de los nuevos adelantos en esta rama, tal es el caso de los Sustratos de Cerámica o el Compact Disc como lo dio a conocer la revista PC Magazine en su número de octubre de 1993:

"El problema actual ya no es la información que tenemos para almacenar, sino procesar la que verdaderamente nos es útil. Cada día los fabricantes de medios de almacenamiento buscan nuevas alternativas en investigación y desarrollo, nuevos métodos para la conservación de información y sistemas con mayor capacidad, mejor vida útil y precio".

Hoy en día hablar de Gigabytes es ya algo normal. Los CDs parecen ser en estos momentos, el método más adecuado para sistematizar información, la masificación de estos productos tardará en México unos tres años aproximadamente, según información de la misma revista. Estos nuevos adelantos seguramente influirán en el desarrollo y aplicaciones de los Juegos Estocásticos.

En su número de julio de 1994, la misma revista nos ilustra sobre los últimos avances en lo que en ese momento era el mejor procesador, el "Pentium" ya que como ellos mismo lo dicen:

"Para cuando lea esto seguramente veremos procesadores más rápidos y potentes, comenzando con versiones de 90 MHz y 100 MHz que ejecutarán hasta 50 porciento más rápidamente que el Pentium de 66 MHz".

Aparte de las ventajas de estos procesadores se nos informa de lo rentables que serán estos equipos en un futuro cercano:

"Gracias al aumento de producción de los Chips de Pentium ya la competencia de procesadores potentes tipo RISC como el Alpha de Digital Equipment Corporation y PowerPC creados por Apple, IBM y Motorola el precio de la pontencia de Pentium, ahora esta al alcance de todos".

Más adelante el mismo artículo nos informa de lo que estos adelantos permitirán hacer:

"El Chip Pentium ejecuta cinco o seis veces más rápidamente que un 486DX2/66 en tareas de números reales, como los modelos matemáticos complejos comunes en los programas de CAD y de simulaciones financieras. Aunque el potencial de números reales de Pentium no está al nivel de las estaciones de trabajo basadas en RISC, las mejoras sobre el rendimiento del 486DX2/66 es impresionante".

Esto nos da idea de como la tecnología actual nos ayudará en la solución de nuestros Juegos Estocásticos. Pero para proceder a incertarlos en usos prácticos es necesario la difusión de trabajos relacionados con esta teoría ya que prácticamente es desconocida, pero lo que es aun más importante es difundir las aplicaciones que se han hecho en esta materia. Para qué esto, para poder tener un contexto de como aplicar y resolver este tipo de juegos. Trabajos así han sido publicados muy pocos.

CAPITULO I

JUEGOS ESTOCASTICOS

En este primer capítulo introduciremos la definición de Juego Estocástico, así como sus principales teoremas, bosquejaremos el modo de solución manual de un juego y veremos las condiciones que frenaron el desarrollo potencial de esta teoría.

1.1 Definición de Juego Estocástico

Como lo menciona T. E. S. Raghavan en sus escritos[1], fue L. S. Shapley quien formuló en 1953 este tipo de juegos, siendo el primero en establecer la existencia del valor del juego, de una estrategia óptima y de un punto silla para el Juego Estocástico[2]. La definición que manejaremos en este trabajo es la siguiente:

Definición. Un juego estocástico bipersonal de suma cero, Γ, es un conjunto de N juegos Γ^1, Γ^2, ..., Γ^N, en lo sucesivo llamados subjuegos. La forma normal de un subjuego Γ^k es una matriz de resultados $n_k \times m_k$ cuyas entradas son de la forma:

$$e^k_{ij} = a^k_{ij} + \sum_{l=1}^{N} P^{kl}_{ij}\, \Gamma^l$$

1 Raghavan, T. E. S., T. S. Ferguson, et al.. "Stochastic games and related topics", pág. 3.

2 Shapley, L. S. de: Raghavan, T. E. S., et al. "Stochastic games and related topics", págs. 201-206

donde e_{ij}^{k} es el resultado final si el jugador I juega su i-ésima alternativa y el jugador II juega su j-ésima alternativa. Esto consiste en un premio numérico α_{ij}^{k} y una probabilidad P_{ij}^{kl} de jugar Γ^{l} estando en Γ^{k}, para l = 1, 2, ..., N, donde $P_{ij}^{kl}\,\Gamma^{l} \geq 0$ y $\sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{kl} \leq 1$. Cada vez que se juega uno de los subjuegos constituye un estado del juego Γ. Si $\sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{kl}\,\Gamma^{l} < 1$ entonces hay una probabilidad positiva $s = 1 - \sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{kl}$ de que el juego termine en este estado.

Esta definición puede aceptar dos postulados:

<u>Postulado 1</u>. Sea $s = \min_{k,i,j} s_{ij}^{k}$ ya que s es positiva, el juego termina con probabilidad 1 después de un número finito de estados, porque para cualquier número t, la probabilidad de que no se detenga después de t estados no es mayor que $(1-s)^{t}$.

<u>Postulado 2</u>. Sea $M = \max_{k,i,j}|\alpha_{ij}^{k}|$ de lo que se deduce que la ganancia esperada total esta limitada por:

$$M + (1-s)M + (1-s)^{2}M + \cdots = M/s.$$

Es después del artículo de Shapley que se puede diferenciar claramente entre lo que ahora llamaremos la Teoría Clásica de los Juegos y la Teoría Estocástica de los Juegos porque sus trabajos fueron un parteaguas, pues desde los trabajos de von Newman[5] donde establecio los fundamentos de la Teoría de Juegos introduciendo el teorema minmax probando que es cierta para condiciones generales y creando a continuación una rica teoría de juegos para más de dos

5 Recientemente se ha puesto en duda que von Newman sea el padre de la Teoría de Juegos al encontrarse unos papeles de Borel (1953) de sus trabajos en los años 20's donde se trata también de los fundamentos de la Teoría de Juegos.

jugadores[4], no había ocurrido un progreso tan llamativo para la Teoría de Juegos ya que éstos no contemplaban juegos por estados o en el tiempo y eran juegos en un solo momento o estado. Con el trabajo de Shapley este problema queda superado.

1.2 Propiedades de los Juegos Estocásticos

En los tres teoremas que presentó Shapley éstos sólo nos garantizan la existencia de tres cosas: 1) Una solución única; 2) Existencia de una estrategia estacionaria; 3) Existencia de un punto silla. Pero probar esto y encontrar el valor del juego son dos cosas distintas. Antes de ver los teoremas con detenimiento, pensemos un poco en lo antes dicho. Se nos dice que los tres teoremas sólo nos garantizan que existan estos elementos en un Juego Estocástico, de no cumplirse esto es obvio que no se trata de este tipo de juegos. Primeramente se dice que existe una solución única, por lo que Shapley habla de juegos de suma cero, donde lo que gana uno lo pierde el otro. Como segunda garantía se nos dice que debe existir una estrategia estacionaria la cual no la podemos pensar como en un juego de una etapa, compuesta por un conjunto de estrategias puras y mixtas, ya que en un Juego Estocástico se toma mucha información que dos etapas adelante ya es irrelevante. Así que introduciremos algo de notación para estas estrategias estacionarias. A saber la estrategia que describe para un jugador las mismas probabilidades para su elección en

4 Luce, R. Duncan y Hovard Raiffa. "Game and decisions introduction and critical survey", pág. 2.

cada estado es conseguible, esta estrategia puede ser representada por una N-tupla de distribución de probabilidad tal que:

$\vec{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^N)$ donde cada $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{m_k}^k)$

para el primer jugador y similarmente para el segundo. Como tercer garantía se nos dice que existe un punto silla, pero este punto silla es para todo el juego $\Gamma = \{ \Gamma^k \mid k = 1, 2, \ldots, N \}$, no solamente para un solo juego como podría pensarse. El obtener este punto silla es el problema en este tipo de juegos. Como vemos, el saber las propiedades de un Juego Estocástico no nos dice como hacer para encontrar una solución, sólo nos orienta y dice lo que una solución debe de cumplir, en caso de que exista.

El primer teorema que veremos dice así:

<u>Teorema 1</u>. El valor del juego estocástico Γ es la solución única $\vec{\phi}$ del sistema

$$\phi^k = \text{val}\,[A^k(\vec{\phi})] \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

Demostración.

Dada una matriz B, permítase denotar como el valor minmax a val[B] para el jugador I y X[B], Y[B] el conjunto de estrategias óptimas mixtas[5] para el primer y segundo jugador respectivamente. Si B y C son dos matrices del mismo tamaño, entonces, es fácil demostrar que:

$$|\text{val}[B] - \text{val}[C]| \leq \max_{ij} |b_{ij} - C_{ij}| \qquad [1]$$

5 Una estrategia mixta consiste en asignar una distribución de probabilidad sobre un conjunto de estrategias. Para mayor información ver el apéndice A.

Regresando al Juego Estocástico Γ, definiendo $A^k(\vec{\alpha})$ como la matriz de elementos:

$$a^k_{ij} + \sum_{l=1}^{N} P^{kl}_{ij}\, \alpha^l \qquad i = 1, 2, \ldots, m_k; \quad j = 1, 2, \ldots, n_k$$

donde $\vec{\alpha}$ es cualquier N-vector con componentes numéricos.

Escogemos $\vec{\alpha}_{(0)}$ arbitrariamente y definiendo $\vec{\alpha}_{(t)}$ como la recursión:

$$\alpha^k_{(t)} = \mathrm{val}[A^k(\vec{\alpha}_{(t-1)})] \qquad t = 1, 2, 3, \ldots$$

(si escogimos $\vec{\alpha}_{(0)}$ para evaluar A^k para cada k entonces $\alpha^k_{(t)}$ será el valor del juego truncado $\Gamma^k_{(t)}$ que empieza en posición k y que se trunca después del estado t). Demostraremos que el limite de $\vec{\alpha}_{(t)}$ cuando $t \to \infty$ existe y es independiente de $\vec{\alpha}_{(0)}$; y que este componente es el valor del juego infinito Γ^k.

Consideremos la transformación T:

$$T\vec{\alpha} = \vec{\beta}, \quad \text{donde } \beta^k = \mathrm{val}\,[A^k(\vec{\alpha})]$$

definimos la norma de $\vec{\alpha}$ como: $\| \vec{\alpha} \| = \max_k |\alpha^k|$.

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\| T\vec{\beta} - T\vec{\alpha} \| &= \max_k \left| \mathrm{val}[A^k(\vec{\beta})] - \mathrm{val}[A^k(\vec{\alpha})] \right| \\
&\le \max_{k,i,j} \left| \sum_l P^{kl}_{ij}\, \beta^l - \sum_l P^{kl}_{ij}\, \alpha^l \right| \\
&\le \max_{k,i,j} \left| \sum_l P^{kl}_{ij} \right| \max_l \left| \beta^l - \alpha^l \right| \\
&= (1-s)\, \| \vec{\beta} - \vec{\alpha} \|
\end{aligned}$$

usando [1]. En particular, $\| T^2\vec{\alpha} - T\vec{\alpha} \| \le (1-s)\, \| T\vec{\alpha} - \vec{\alpha} \|$. De aquí que la secuencia $\vec{\alpha}_{(0)}$, $T\vec{\alpha}_{(0)}$, $T^2\vec{\alpha}_{(0)}$, ... es convergente. El límite del vector $\vec{\phi}$ tiene la propiedad $\vec{\phi} = T\vec{\phi}$. Hay sólo un vector, para

$\vec{\psi} = T\vec{\psi}$ que implica $\| \vec{\psi} - \vec{\phi} \| = \| T\vec{\psi} - T\vec{\phi} \| \leq (1-s)\| \vec{\psi} - \vec{\phi} \|$, de donde $\|\vec{\psi} - \vec{\phi}\| = 0$ de aquí $\vec{\phi}$ es único punto de T y es independiente de $\vec{\phi}(0)$.

Para demostrar que $\vec{\phi}$ es el valor del juego Γ^k, observamos que una estrategia óptima del juego finito $\Gamma^k(t)$ para los primeros t estados y jugadas arbitrarias de allí en adelante, el primer jugador puede asegurarse una cantindad dentro de $\varepsilon_t \leq (1-s)^t M/s$ del valor de $\Gamma^k(t)$. Así mismo, para el otro jugador. ya que $\varepsilon_t \to 0$ y el valor $\Gamma^k(t)$ converge a ϕ^k, concluimos que ϕ^k es el valor de Γ^k.

Este teorema nos garantiza que la solución de un Juego Estocástico es única, en un juego bipersonal de suma cero esta solución se interpreta como "lo que pierde uno lo gana el otro". El segundo teorema lo que garantiza es la existencia de una estrategia estacionaria.

<u>Teorema</u> 2. La estrategia estacionaria $\vec{X}^*$, $\vec{Y}^*$, donde $X^l \in X[A^l(\vec{\phi})]$, $Y^l \in Y[A^l(\vec{\phi})]$, $l = 1, 2, \ldots, N$ es óptimo para los jugadores I y II respectivamente en cada juego Γ^k perteneciente a Γ.

Demostración.

Supóngase una versión finita de Γ^k definida como el acuerdo de que en el estado t el juego parará con el jugador I recibiendo la cantidad de $a_{ij}^h + \sum_l P_{ij}^{hl} \phi^l$ en lugar de sólo a_{ij}^h. Claramente la estrategia estacionaria $\vec{X}^*$ asegura al jugador I la cantidad ϕ^k en esta versión finita. En el juego original Γ^k si el jugador I usa $\vec{X}^*$, sus expectativas de ganar antes de t estados son al menos:

$$\phi^k - (1-s)^{t-1} \max_{h,i,j} \sum_l P_{ij}^{hl} \phi^l$$

de aquí al menos:

$$\phi^k - (1-s)^t \max_l \phi^l.$$

Sus expectativas totales de ganar son al menos:

$$\phi^k - (1-s)^t \max_l \phi^l - (1-s)^t\, M/s.$$

Si esto es cierto para un valor grande arbitrario de t, se sigue que $\vec{X}^*$, es óptima en Γ^k para el primer jugador. Similarmente para el jugador II.

Este segundo teorema debe darnos idea de que la estrategia estacionaria es efectiva en cada subjuego, y es muy diferente a una estrategia común, donde una estrategia de algún juego no se puede aplicar a otro juego por muy parecidos que sean. El último teorema incumbe al punto silla del Juego Estocástico.

<u>Teorema 3</u>. Los juegos Γ^k poseen punto silla

$$\min_{\vec{Y}} \max_{\vec{X}} D^k(\vec{X}, \vec{Y}) = \max_{\vec{X}} \min_{\vec{Y}} D^k(\vec{X}, \vec{Y})$$

para k = 1, 2, ..., N cualquier estrategia estacionaria que es óptima para todo $\Gamma^k \in \Gamma$ es una estrategia óptima pura para todo $\hat{\Gamma}^{k} \in \Gamma$, y viceversa. El valor del vector de Γ y $\hat{\Gamma}$ es el mismo. Sea $D^k(\vec{X}, \vec{Y})$ la función de pago para el juego.

Demostración

Esta prueba se basa en un argumento simple del teorema 2. Se debe observar que una estrategia $\vec{X}$ quiza sea óptima, para el juego Γ^k (o $\hat{\Gamma}^{k}$) y no óptima para otros juegos pertenecientes a Γ (o $\hat{\Gamma}^{k}$). Estas son dos de las posibilidades que Γ hara la discontinuidad, pero, si ninguna de las P_{ij}^{kl} son cero estas probabilidades no aparecen.

Es decir, si ninguna probabilidad P_{ij}^{kl} es cero el juego no parará nunca, por lo que no afectará al valor del juego que $\vec{X}$ no sea óptima para algún Γ^k.

1.3 Condiciones que nos conducen a utilizar programación dinámica para encontrar el valor del juego

Como hemos observado, los problemas en el manejo de un Juego Estocástico viene dado por el número de subjuegos que existen en Γ y el número de decisiones (o dimensiones de la matriz) en cada subjuego, esto se ve más claro si generalizamos el juego[d]: los r componentes del juego Γ^1, Γ^2, ..., Γ^r son dados en el juego Γ^k, el jugador I tiene la estrategia pura x_1^k, x_2^k, ..., $x_{m_k}^k$ y el jugador II tiene la estrategia pura y_1^k, y_2^k, ..., $y_{n_k}^k$. Si I usa x_i^k y II usa y_j^k, el resultado final es:

$$a_{ij}^k + (P_{ij}^{kc}S,\ P_{ij}^{k1}\Gamma^1,\ P_{ij}^{k2}\Gamma^2,\ \ldots,\ P_{ij}^{kr}\Gamma^r).$$

donde $P_{ij}^{kc} > 0$, $P_{ij}^{kl} \geq 0$, para $l = 1, 2, \ldots, r$ y $P_{ij}^{kc} + P_{ij}^{k1} + \cdots + P_{ij}^{kr} = 1$.

Este resultado se interpreta como: II le da a I a_{ij}^k unidades y una lotería se ejecuta. Con esta generalización vemos que se pueden llegar a tener r subjuegos, cada uno de ellos será una matriz de dimensiones $m_k x n_k$, no necesariamente iguales para cada matriz. Sin embargo, cada r componente hay que resolverlo para hallar el valor del juego total. Es fácil ver ahora que este tipo de juegos serían muy complicados de resolver sin la ayuda de una computadora electrónica,

d Luce, R. Duncan y Howard Raiffa. "Game and decisions introduction and critical survey". pág. 450.

ya que sus operaciones son muy largas y se podría llegar a cometer errores. Pero , esto es fácil verlo ahora que contamos con la tecnología adecuada, pero en 1953 según la clasificación de E. Alcalde[7] la computación se encontraba en su segunda generación, cuyas características eran la sustitución de válvulas por transistores, perdiendo tamaño y ganando potencia y fiabilidad, lo que las hacia más prácticas. Se empezaba apenas a utilizar lenguajes de alto nivel (COBOL, ALGOL, FORTRAN), así como núcleos de ferrita, la cinta magnética y los tambores para almacenar información. Todos estos adelantos debian de ser razones de peso para las personas que querían manejar Juegos Estocásticos; sin embargo, su capacidad de procesamiento y memoria no permitia todavía un uso óptimo de la tecnología para estos juegos.

Estos factores llevarón a buscar otro tipo de técnica para encontrar una solución a los Juegos Estocásticos, la opción lógica era hacer uso de las técnicas de Programación Dinámica ya que en éstos juegos la misma operación se repite un número finito o infinito de veces, donde no es posible pasar de un estado a otro sin tener el resultado óptimo del predecesor.

Esta idea que puede aplicarse también en un Juego Estocástico es el principio de optimidad de Bellman que constituye la base del método de Programación Dinámica. Permitiendo en efecto, considerando sucesivamente 1, 2, 3, ..., N periodos, construir progresivamente una politica óptima. Podemos para esto partir ya sea del primero[8], del

7 Alcalde, E., M. García, et al., "Informática básica", págs. 10-21.

8 Kaufmann, L. C. y R. Cruon. "La programación dinámica", pág. 37.

último o de un periodo cualquiera. Para utilizar este modelo es necesario conocer el último de los subjuegos y de ahí partir hacia atrás[9].

1.3.1 Descripción de la solución

La forma en que un Juego Estocástico de n estados se puede resolver es truncando en algún momento el juego Γ ya que resulta imposible resolver todos los subjuegos. Primero el juego dado se trunca en el ensayo n, de la siguiente forma: se juega sin ninguna modificación, pero en el ensayo n, en lugar de jugar el subjuego para el ensayo n+1, el jugador II da a I una cantidad fija v_1^0 , si Γ^1 fue el que se jugó, y v_2^0 si Γ^2 se jugó. Entonces se dice que el juego se truncó en el ensayo n por cierto resultado (v_1^0 , v_2^0). Si n es grande, es intuitivo que el truncamiento del juego original y el valor particular v_1^0 y v_2^0 que son usados no afectan criticamente el valor total del juego truncado. Ahora para ilustrar ésto[10]; supóngase que en el ensayo n de algún juego (largo) el resultado final es:

$$\text{juego } \Gamma^1(v_1^0 , v_2^0)$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \beta_1^1 & \beta_2^1 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \end{array} & \begin{bmatrix} 4+0.5v_1^0 + 0.1v_2^0 & 0.5v_1^0 + 0.3v_2^0 \\ -2+0.4v_2^0 & 2+0.2v_1^0 \end{bmatrix} \end{array}$$

9 Para una descripción más detallada ver el apéndice B.

10 Luce, R. Duncan y Hovard Raiffa. "Game and decisions, introduction and critical survey", págs 458-464

juego $\Gamma^2(v_1^0 \; , v_2^0 \;)$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \beta_1^2 & \beta_2^2 \\
\begin{array}{c} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \end{array} &
\multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc} -1 & 2+0.2v_1^0 \; +0.2v_2^0 \\ 2+0.5v_1^0 \; +0.4v_2^0 & 5+0.6v_1^0 \; +0.1v_2^0 \end{array}\right]}
\end{array}
$$

Notese el etiquetado: el resultado final de la matriz del subjuego Γ^k en el ensayo n es denotado por $\Gamma^k(v_1^0 \; , v_2^0 \;)$, $k = 1, 2$.

Es decir:

v_1^1 = valor del juego de suma cero $\Gamma^1(v_1^0 \; , v_2^0 \;)$ = val $\Gamma^1(v_1^0 \; , v_2^0 \;)$

v_2^1 = valor del juego de suma cero $\Gamma^2(v_1^0 \; , v_2^0 \;)$ = val $\Gamma^2(v_1^0 \; , v_2^0 \;)$

Ahora trabajaremos hacia atrás. En el ensayo n+1 el resultado "jugar Γ^k como siguiente" tiene el valor de v_k^1 para el jugador I, $k = 1, 2$. Así en ese ensayo los jugadores deben comportarse como si jugaran $\Gamma^1(v_1^1 \; , v_2^1 \;)$ y $\Gamma^2(v_1^1 \; , v_2^1 \;)$; continuando con la inducción hacia atrás, para cada entero z, $0 \leq z \leq n-1$, tenemos:

$$v_k^{z+1} = \text{val } \Gamma^k(v_1^z \; , v_2^z \;) \quad \text{para } k = 1, 2.$$

En particular en el primer ensayo tenemos:

$$v_k^n = \text{val } \Gamma^k(v_1^{n-1} \; , v_2^{n-1} \;) \quad \text{para } k = 1, 2.$$

Así podemos ver que v_1^n y v_2^n son los valores de los juegos $(\Gamma^n ; \Gamma^1)$ y $(\Gamma^n ; \Gamma^2)$, respectivamente, cuando truncaron en n por (v_1^0, v_2^0).

Resulta, por lo visto en el ejemplo anterior, una gran ayuda conocer algo de Programación Dinámica por la gran semejanza entre este método y el propuesto por R. Duncan y Howard Raiffa. Así como métodos de programación, ya que si el número de subjuegos es muy grande el truncamiento debe ser en un estado r lo suficientemente grande para garantizar una buena estimación del valor del juego. Para reforzar lo arriba dicho cito las palabras de R. Duncan y Howard Raiffa.

> *"Aunque esto no es directamente relevante para la teoría misma, vale la pena enfatizar de nuevo que la Teoría de Juegos es previamente un producto de las matemáticas y no de la experimentación científica ..."*[11].

Por lo que es necesario que la persona interesada en estos juegos conozca o esté familiarizado con los conceptos matemáticos que ahí se manejan. Los siguientes extractos son de los mismos autores y aunque hablen de problemas económicos se pueden extender a otras áreas.

> *"Al menos dos problemas nos impiden poner un problema económico en la forma de un juego. En general es difícil precisar el conjunto de estrategias para los jugadores. Esto proviene de muchas causas pero la más frecuente es o son las posibles modificaciones del conjunto de estrategias durante la ejecución de un juego. Por ejemplo esto puede ocurrir de un nuevo invento que abra un nuevo rango de producción. Es verdad que tales situaciones pueden abarcarse formalmente por medio de la Teoría de Decisiones bajo incertidumbre, pero esto es tomar elementos fuera de la Teoría de Juegos"*.

Estas limitaciones o problemas se presentan cuando la cantidad de opciones y estrategias crece desmesuradamente, ocasionando con esto

11 Luce, R. Duncan y Howard Raiffa. ob. cit., págs 2-10

que el problema se haga intratable y se tengan que buscar otras vias para resolverlo.

"Una segunda complicación es describir el conjunto de estrategias en situaciones económicas y es que en la mayoria de las decisiones no se describe en términos obvios pero requiere una especificación de tiempo. La importancia del tiempo de decisión es obvio que necesita ilustrarse. No hay gran dificultad conceptual en alargar el conjunto de alternativas así como incluir el tiempo como parte de las elecciones pero este extendimiento del conjunto causará algunas dificultades prácticas. El conjunto de estrategias llegará a ser gigantesco muy rápidamente, y con esto la necesidad cuantitativa de describir la situación económica como un juego llegará a ser imposible. Hay importantes dificultades pero como lo vemos nosotros la mayoria de ellas se pueden vencer".

En 1957 año en que se presentó los trabajos de R. Duncan Luce y Howard Raiffa las computadoras electrónicas se encontraban en su segunda generación[12] y como ya hemos señalado, no era lo óptimo para resolver los problemas de forma rápida, eficiente y ante todo barata. Ya que por las caracteristicas era muy dificil manejar con soltura una cantidad grande de datos.

En ese tiempo se utiliza como soportes de información la cinta magnética que es un soporte de información continuo cuyas principales caracteristicas son su resistencia mecánica, la homogeneidad magnética, fuerte resistencia a los agentes fisicos y gran capacidad de almacenamiento que esta relacionada con el largo de la cinta. Y como medio de programación las tarjetas perforadas[13].

12 Alcalde, E., M. García, et al.. "Informática Básica", pág. 18.

13 Alcalde, E., M. García, et al.. Ob. cit., págs. 80 y 84.

El único lenguaje de alto nivel que existía en este momento era FORTRAN que es un lenguaje especializado en aplicaciones técnicas y cintificas, caracterizandose por su potencia en los cálculos matemáticos, pero estando limitado en aplicaciones de manejo de archivo y edición de informes entre otros[14].

Como hemos visto en este primer capitulo las posibilidades de resolver un Juego Estocástico por otro método que no sea Programación Dinámica auxiliandose de una computadora son muy pocas y sin un uso práctico. T. Parthasaraty y T. E. S. Raghavan dicen en el capitulo dedicado a los Juegos Estocásticos de sus escritos:

> *"En este capitulo probarémos que los Juegos Estocásticos tienen un valor ... usando los resultados que en Programación Dinámica cuando el espacio de estados es contable. El problema queda desechado cuando el conjunto de estados es incontable"*[15].

Vemos ya, como es un hecho el uso de la Programación Dinámica para solucionar los Juegos Estocásticos.

Sin embargo, a pesar de que en 1971, fecha de la publicación de los trabajos de los autores, la computación se encontraba entre la tercera y cuarta generación[16] Parthasarathy y Raghavan no aprovechan esto para proponer ninguna solución por esta vía. Estos adelantos

14 Ibidem, pág. 132.

15 Parthasarathy, T. y T. E. S. Raghavan, "Some topics in two-person games", pág. 290.

16 Alcalde, E., M. García, et al.. "Informática Básica", pág. 127.

permitían ya en esos momentos tener una aplicación con un número considerable de opciones y estados.

CAPITULO II

JUEGOS ESTOCASTICOS CON DESCUENTO

2.1 Definición de Juego Estocástico con descuento

Una vez definido que es un Juego Estocástico, la teoría se fue adecuando para que pudiera responder a diversos tipos de juegos[1]. La idea central fue ésta: en esta clase de juegos un juego normalizado es jugado en cada etapa y los jugadores pueden controlar el resultado del juego a través de sus estrategias. A partir de esta idea se fueron adecuando otros juegos; por ejemplo, los juegos de supervivencia y pelea donde hay un solo subjuego y este es repetitivo, los jugadores inicialmente cuentan con recursos limitados y estos fluctuan en el tiempo de acuerdo a los resultados del subjuego. Otro juego, que es el que nos interesa son los juegos de ruina económica, que son típicos de los problemas de políticas de dividendos corporativos como: la política más generosa de dividendos de la corporación o la de mayor seguridad en contra de las exigencias futuras, sin embargo, a estas trivialidades se impone la verdad, impuestos por la razón de un interés o en otras palabras "una unidad hoy es más valiosa que una futura".

Esta última clase de juegos ya deja ver lo que serán los Juegos Estocásticos con descuento. En realidad un Juego Estocástico con

[1] Luce, R. Duncan y Howard Raiffa, "Game and decisions introduction and critical survey", págs 457-458.

descuento se define igual que uno sin descuento pero introduciendo el factor de descuento β, este factor nos proporciona la idea de inflación. La definición que manejaremos será entonces:

<u>Definición</u>. Un Juego Estocástico bipersonal de suma cero con descuento, Γ, es un conjunto de N juegos Γ^1, Γ^2, ..., Γ^N, llamados subjuegos. La forma normal de un subjuego Γ^k es una matriz de resultados $n_k x m_k$ cuyas entradas son de la forma:

$$e_{ij}^{k} = \alpha_{ij}^{k} + \beta \sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{kl} \Gamma^{l} \qquad [2]$$

donde e_{ij}^k es el resultado final si el jugador I juega su i-ésima alternativa y el jugador II juega su j-ésima alternativa. Esto consiste en un premio numérico α_{ij}^k y una probabilidad P_{ij}^{kl} de jugar Γ^l estando en Γ^k, para l = 1, 2, ..., N, donde $P_{ij}^{kl} \geq 0$ y $\sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{kl} \leq 1$. β es el factor de descuento, así que el pago de los subjuegos jugados en el estado r son descontados por β^{r-1}, donde $\beta \leq 1$. Cada vez que se juega uno de los subjuegos constituye un estado del juego Γ. Si $\sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{kl} < 1$ entonces hay una probabilidad positiva $s = 1 - \sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{kl}$ de que el juego termine en este estado.

La dificultad de estos juegos multi-etápicos es que éstos conducen frecuentemente a resultados infinitos, y no es posible comparar dos estrategias que ambas tengan tales resultados. Por otro lado, hay dos maneras de pensar acerca del premio del juego:

a) El pago descontado, que trataremos a lo largo de este capítulo, por ser el que presenta mayor desarrollo y se visualizan usos prácticos de el.

b) Tomando el premio promedio por estado, así si E_r es el premio de las primeras r etapas del juego para una estrategia tomamos el $\lim_{n\to\infty} E_r/r$ como el premio promedio para esta estrategia[2].

Como ya lo dijimos en las primeras páginas, este trabajo se concentra en los Juegos Estocásticos con descuento, porque las condiciones para las cuales hay solución para el caso b estan todavía en proceso y no hay una buena técnica para su solución[3].

2.2 Propiedades de los Juegos Estocásticos con descuento

En un Juego Estocástico con descuento, Γ, una típica estrategia para un jugador es muy complicada. Para el jugador I consiste en una colección de estrategias $\vec{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^N)$ donde cada $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{m_k}^k)$. Si $x^k = \vec{x}$ para toda k la estrategia es una estrategia estacionaria. Aunque cada subjuego Γ^k del Juego Estocástico con descuento Γ tiene un número finito de estrategias, es obvio, por la descripción anterior de las estrategias que el juego Γ tiene un número infinito de tales estrategias, ya que la estrategia estacionaria debe elegir una estrategia para cada subjuego. Más adelante mostraremos que cada Juego Estocástico con descuento tiene una solución.

El modo de probar esto es usar el mismo truco de remplazar un juego por su valor. Obviamente, si el juego Γ tiene un valor que

2 Thomas, L. C.. "Games, theory and applications", pág. 152.

3 Un artículo que trata este tema a fondo es el de Truman Bewley y Elon Kohlberg, llamado "On stochastic games with stationary optima strategies", en Mathematics of operations Research, Vol. 3, No. 2, Mayo 1978. (USA).

depende de un subjuego anterios empezamos a jugar el anterior como primer subjuego. Así, el valor V^* de Γ (si existe) será el vector $V^* = (V_1^*, V_2^*, \ldots, V_N^*)$ en donde V_i^* = Val(Γ | empezando en Γ_i como el primer estado). Si sustituimo el valor de Γ empezando en Γ_l en lugar de Γ_l en [2] pensaríamos que este juego tiene entradas de pago $e_{ij}^k = a_{ij}^k + \beta \sum_{l=1}^N P_{ij}^{kl} V_l^*$. Si empezamos Γ en Γ_i, entonces si vamos a Γ_l en el segundo estado, el valor del juego para éste no es V_l^* pero si βV_l^*. No estamos jugando Γ empezando en Γ_l en el primer estado pero jugando Γ con Γ_l en el segundo estado y así todo el resultado final será un estado anterior que bajo Γ empieza en Γ_l. El criterio de descuento significa que el valor resultante es βV^*.

El truco de remplazar el juego por este valor sugiere que V^*, si este existe, debe satisfacer la ecuación:

$$V_k = \mathrm{val}(\Gamma_k(V)), \qquad k = 1, 2, \ldots, N \qquad [3]$$

donde $\Gamma_k(V)$ es un juego $n_k \times m_k$ con matriz de pago:

$$e_{ij}^k = a_{ij}^k + \beta \sum_{l=1}^N P_{ij}^{kl} V_l \qquad [4]$$

En general escribimos $\Gamma_k(w)$ para el juego $n_k x m_k$ con matriz de pago:

$$e_{ij}^k = a_{ij}^k + \beta \sum_{l=1}^N P_{ij}^{kl} w_l \qquad [5]$$

El siguiente teorema dice lo mismo que los tres primeros, pero ahora ya toma en cuenta el factor de descuento β.

<u>Teorema 4</u>.

a) Siempre hay una solución para $V_k = \mathrm{val}(\Gamma_k(V))$, $K = 1, 2, \ldots, N$.

b) Hay sólo una solución para $V_k = \mathrm{val}(\Gamma_k(V))$, $K = 1, 2, \ldots, N$.

c) Esta única solución es el valor del juego Γ.

Demostración.

Supóngase un juego donde se empieza en el subjuego Γ_k, jugando Γ para n estados y luego se detiene. Dependiendo de donde este el juego cuando se detiene, el jugador I recibe una cantidad $v^0 = (v_1^0, v_2^0, \ldots, v_N^0)$. Es obvio que si n=0, el valor de ese juego es v^0 mientras que si n=1, una reconsideración nos dirá que el valor del juego es v^1 que debe satisfacer $v_k^1 = \text{val}\ \Gamma_k(v^0)$, donde $\Gamma_k(v)$ fue definido en [5]. Ya que en un juego con n estados obtenemos el premio descontado por β, de los juegos terminados pertenecientes a n-1 estados, entonces:

$$v_k^n = \text{val}\ \Gamma_k(v^{n-1}) \tag{6}$$

este es el valor del juego. Se demostrará que como n tiende a infinito, v_k^n converge a este límite satisfaciendo (a), (b) y (c) del teorema 4.

Si $u_k = \text{val}\ \Gamma_k(v)$, para k = 1, 2, ..., N, escribimos esto como $u = Tv$ y para cada vector v haremos $\| v \| = \max_k |v_k|$ que es una norma, la cual es una medida de cuan larga es v. Ahora:

$$
\begin{aligned}
| Tv - Tu | &= \max_k | \text{val}\ \Gamma_k(v) - \text{val}\ \Gamma_k(u) | \\
&\le \max_k \max_{ij} | (a_{ij}^k + \beta \textstyle\sum_{l=1}^N P_{ij}^{kl} v_l) - (a_{ij}^k + \beta \sum_{l=1}^N P_{ij}^{kl} u_l) | \\
&= \max_k \max_{ij} | \beta \textstyle\sum_{l=1}^N P_{ij}^{kl} (v_l - u_l) | \\
&\le \max \beta \ | \textstyle\sum P_{ij}^{kl} | \max_l | v_l - u_l | \\
&\le \beta \| v-u \| && [7]
\end{aligned}
$$

donde la primera inecuación se sigue de [1] (cuyo resultado también se utilizó en el teorema 1). Ya que $v^n = Tv^{n-1}$, podemos sustituir dentro de [7] una y otra vez hasta obtener:

$$\| v^{n+1} - v^n \| \le \beta \| v^n - v^{n-1} \| \le \beta^n \| v^1 - v^0 \| \tag{8}$$

esta es una propiedad de la norma que satisface la desigualdad del triángulo $\|a-b\| \leq \|a\| + \|b\|$, para todo a, b, usando esta muchas veces obtenemos:

$$\| v^{n+k}-v^{n} \| \leq \| v^{n+k}-v^{n+k-1}\| + \| v^{n+k-1}-v^{n+k-2}\| + \cdots + \| v^{n+1}-v^{n} \|$$

$$\leq (\beta^{n+k-1} + \beta^{n+k-2} + \cdots + \beta^{n}) \| v^{1}-v^{0} \|$$

$$\leq \beta^{n} \| v^{1}-v^{0} \| / (1-\beta) \qquad [9]$$

si obtenemos una n muy grande [9] se hará tan pequeña como queramos y esto proveera de todas las subsecuentes v^{n+k} que estan cercanas a v^{n} y así la convergencia. Ahora $V^{*} = \lim_{n\to\infty} v^{n}$, es trivial:

$$TV^{*} = T\lim_{n\to\infty} v^{n} = \lim_{n\to\infty} Tv^{n} = \lim_{n\to\infty} v^{n+1} = V^{*} \qquad [10]$$

y [10] es exactamente la ecuación [3] cuando recordamos que TV^{*} = val $\Gamma_{k}(V^{*})$. Así V^{*} es la solución de [3] y la parte (a) del teorema esta probada.

Para probar (b) supóngase que existe otra solución V' de [3] así que $V^{*} = TV^{*}$ y $V' = TV'$. Entonces por [7]

$$\| V^{*} - V' \| = \| TV^{*} - TV' \| \leq \beta \| V^{*} - V' \| \qquad [11]$$

con $\beta<1$, esto sólo puede suceder si $\| V^{*} - V' \| = 0$ y entonces V^{*} = V'.

Finalmente para probar (c), recuerdese el truco que utilizamos anteriormente, donde empezabamos a jugar Γ en algún subjuego Γ_{k} para n estados y luego parar, obteniendo v^{0} el cual igualaremos a cero. Esto tiene un número finito de estrategias puras y por el teorema de von Nevman tiene un valor, el cual es v_{n}^{k} y es una estrategia óptima. Supóngase que justo en Γ, empezando en Γ_{k}, I juega la estrategia óptima para esta versión finita, para los primeros n estados y nada después de esto. ¿Cuál es su pago? El jugador I obtiene v_k^n de los primeros n estados y además del postulado 2 sabemos que todos los pagos estan entre -M y M, lo peor que le puede pasar a I después de eso es $-\beta^n M - \beta^{n+1}M - \beta^{n+2}M - \cdots$ ya que I tiene una estrategia que garantiza $v_k^n - \beta^n M - \beta^{n+1}M - \cdots$ el valor del juego Γ empezando en Γ_k si existe debe satisfacer:

$$V_k \geq v_k^n - \beta^n M - \beta^{n+1}M - \cdots \geq v_k^n - \beta^n M / (1-\beta) \qquad [12]$$

si II juega la misma clase de estrategia, en Γ un argumento análogo muestra que V_k (si existe) debe satisfacer:

$$V_k \leq v_k^n + \beta^n M / (1 - \beta). \qquad [13]$$

Permitiendo que n vaya a infinito en [12] y [13] nos da:

$$V_k^* = \lim_{n\to\infty} v_k^n \geq V_k \geq \lim_{n\to\infty} v_k^n = V_k^*. \qquad [14]$$

y así V^* es el valor del juego Γ. Con lo que el teorema queda demostrado.

2.3 Algoritmos iterativos, herramienta para encontra el valor del juego

Como se ha visto para resolver el juego es necesario truncar en algún estado, la desventaja de utilizar este método es que nunca se llega a la solución o valor actual del juego por lo que es necesario truncar en alguna momento ya que es necesario determinar en alguna iteración el valor de ese subjuego, para después partir de ahí y encontrar la solución de todo el juego.

La mayoría del tiempo, no obstante la estrategia óptima de cada iteración cambia de una a otra iteración. En este caso, suponemos que decidimos parar antes de calcular v^n, las n iteraciones pueden decirnos como acercarse al valor del juego V.

<u>Lema 1</u>. Sea $v^n = (v_1^n, v_2^n, \ldots, v_N^n)$ los valores de las n iteraciones del Juego Estocástico con factor de descuento β. Entonces, si $V = (V_1, V_2, \ldots, V_N)$ es el valor del juego:

$$v_i^n - (\beta \| v^n - v^{n-1} \| / (1-\beta)) \leq V_i \leq v_i^n + (\beta \| v^n - v^{n-1} \| / (1-\beta))$$

Demostración.

Los resultados siguientes se desprenden de [8]. Esta dice: $\| v^{n+k} - v^n \| \leq \beta \| v^n - v^{n-1} \|$ y usando la desigualdad del triángulo para normas tenemos:

$$\begin{aligned} \| v^{n+k} - v^n \| &\leq \| v^{n+k} - v^{n+k-1} \| + \| v^{n+k-1} - v^{n+k-2} \| + \cdots + \| v^{n+1} - v^n \| \\ &\leq (\beta^k + \beta^{k-1} + \cdots + \beta) \| v^n - v^{n-1} \| \\ &\leq \beta \| v^n - v^{n-1} \| / (1-\beta) \qquad [15] \end{aligned}$$

si $k \to \infty$ en [15] así llega a ser $\| V - v^n \|$ para toda i, i = 1, 2, ..., N :

$$\begin{aligned} -\beta \| v^n - v^{n-1} \| / (1-\beta) \leq -\| V - v^n \| \leq V_i - v_i^n &\leq \| V - v^n \| \\ &\leq \beta \| v^n - v^{n-1} \| / (1-\beta) \end{aligned}$$

y el lema esta probado.

Debido a que entre más grande sea el número n de iteraciones se acerca más a la solución verdadera, el uso de la computadora es esencial.

La idea de los métodos iterativos es el de obtener una secuencia de aproximaciones a la solución. Si todo sale bien, esta secuencia converge a la solución correcta, en el sentido de que cada término o iteración en la secuencia es una aproximación a la solución, mejor que la que le precede.

Como ya lo dijimos los Juegos Estocásticos fueron introducidos por Shapley, quien dio una prueba de la existencia de punto silla para Juegos Estocásticos bipersonales de suma cero. Esta demostración fue constructiva y nos dió el primer "algoritmo" para obtener el valor del juego[4]. Esto motivó el interés por encontrar algoritmos eficientes, para la solución de estos juegos.

Procurando un desarrollo eficiente un algoritmo con un número finito de pasos para cada clase especial son el resultado de una nueva línea de investigadores. Sin embargo, es poco lo que se sabe acerca de los Juegos Estocásticos de suma diferente de cero con resultados sin descuento y por lo tanto no hay algoritmos aun propuestos[5]. No así del caso que nos ocupa, los Juegos Estocásticos bipersonales de suma cero, con descuento y sin estructura especial.

Para este momento, los lenguajes de alto nivel y nivel medio son lo suficientemente accesibles para el manejo de éstos juegos. Ya estamos hablando de la quinta generación de computadoras, donde la memoria y la velocidad de proceso son muy altas y los lenguajes como ADA y C se manejan cotidianamente[6].

4 Breton, Michèle, de: Raghavan, Ferguson, et al.. "Stochastic games and relates topics", pág. 45.

5 Raghavan, T. E. S.., de: Raghavan, Ferguson, et al.. "Stochastic games and related topics", pág. 4.

6 Alcalde, E., M. García, et al.. "Informática básica", pág. 198.

Como lo explican E. Alcalde, M. García y S. Peñuelas:

"... las diferentes aplicaciones y usos de la computadora en la actualidad, teniendo en cuenta que cada día aparece alguna nueva y su potencial parece ilimitado debido a sus principales características:

- *Gran capacidad de almacenamiento y manejo de información.*
- *Alta precisión y rapidez en la realización de cálculos, por complicados que estos sean.*

Otro factor que afecta el crecimiento de las aplicaciones en las computadoras es el hecho de que su costo disminuye continuamente mientras que el del trabajo humano aumenta".

Del parrafo anterior podemos deducir que el número de iteraciones traducidas a tiempo-dinero, en un futuro proximo será muy costeable, dandonos los beneficios de sus principales características y la seguridad de que ese es el valor del juego.

2.3.1 Algoritmos propuestos através del tiempo

Actualmente existen varios algoritmos propuestos para resolver un Juego Estocástico, cada uno de ellos tienen pequeñas diferencias. A continuación presentamos algunos de los algoritmos más conocidos:

El algoritmo de Shapley[7] en su iteración n, se encuentra la función W^{n+1} que satisface para toda $k \in N$

$$W^{n+1}(k) = \min_{\vec{y}} \max_{\vec{x}} (a_{ij}^{k} + \beta\sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{kl} w^{l})$$

este algoritmo requiere en cada iteración la solución de $|N|$ matrices;

7 Breton, Michèle, de: Raghavan, Ferguson, et al.. "Stochastic games and related topics", pág. 47.

para que converja a W^* de cualquier W^0 inicial. En la iteración n tendremos:

$$DMAX^n = \max W^{n+1}(k) - W^n(k) \qquad k \in N$$

$$DMIN^n = \min W^{n+1}(k) - W^n(k) \qquad k \in N$$

si para un $\varepsilon > 0$ dado (este es el criterio de paro)

$$(DMAX^n - DMIN^n) \leq \varepsilon\,(1-\beta)/\beta \tag{16}$$

entonces la política $\vec{\alpha}$ satisface para toda $k \in N$

$$W^{n+1}(k) = \alpha_{ij}^k + \beta\Sigma_{l=1}^N P_{ij}^{kl} v^l$$

la ecuación [16] corresponde a encontrar una ε-estrategia. De hecho un valor iterativo por el algoritmo de aproximación sucesiva no es una forma eficiente para calcular la función V asociada al premio. En la iteración n si la condición [16] es satisfecha es suficiente resolver el sistema de $|N|$ ecuaciones lineales

$$V^* = \alpha_{ij}^k + \beta\Sigma_{l=1}^N P_{ij}^{kl} \alpha_l^* \tag{17}$$

donde α^* es un vector de políticas que satisface [16].

Otro algoritmo es el propuesto por Polltsheck y Avi-Itzak[*], es un algoritmo de iteraciones sucesivas que corresponde a la política iterativa de la programación dinámica. En la iteración n encontramos un vector $\vec{\alpha}$ de políticas y la función V^{n+1} tal que para todo $k \in N$, $\hat{X}$ y $\hat{Y}$ son óptimas en la matriz de los juegos y

$$W^{n+1}(k) = \alpha_{ij}^k + \beta\Sigma_{l=1}^N P_{ij}^{kl} v^l = v^n(k) \tag{18}$$

en cada iteración de este algoritmo uno necesita resolver $|N|$ matrices de juegos y el sistema de $|N|$ ecuaciones lineales.

Se ha demostrado que el algoritmo de Polltsheck y Avi-Itzak sólo

[*] Breton, Michèle, de: Raghavan, Ferguson, et al., ob. cit., pága. 48.

converge bajo condiciones especiales[9], ya se han propuesto también modificaciones al algoritmo[10]. Otros algoritmos son los de Hoffman y Karp[11] (1966) que fue propuesto para perfeccionar la velocidad de convergencia del algoritmo de Shapley. El algoritmo de Van der Wal[12] (1978) es una generalización del de Shapley y Hoffman-Karp.

El último algoritmo que veremos es el propuesto por Michèle Breton[13] (1991), llamado algoritmo híbrido, éste se propone hacer uso de la eficiencia de los algoritmos de Pollatschek y Avi-Itzak así como el de Shapley, además este algoritmo garantiza que converge a la solución partiendo de cualquier función inicial V^0. En la iteración n, resolviendo [17]:

$$\varepsilon^n = \beta/(1-\beta)\ (DMAX^n - DMIN^n)$$

mientras que la secuencia (ε^n) esta decreciendo redefinimos V^{n+1} por [18], esto corresponde al algoritmo de Pollatschek y Avi-Itzak. Sin embargo, si $\varepsilon^n \geq \varepsilon^{n-1}$, entonces hacemos $V^{n+1} = V^{n-1}$ y aplicamos el algoritmo de Shapley de allí en adelante. Ya que el algoritmo de Shapley converge de cualquier punto inicial, este algoritmo híbrido también convergerá y será tan eficiente como el de Pollatschek y Avi-Itzak.

9 Filar, Jerzy A. y Boleslav Tolwinski, de: Raghavan, Ferguson, et al.. Ob. cit., pág. 59.
10 Idem.
11 Breton, Michèle, de: Raghavan, Ferguson, et al.. Ob. cit., pág. 48.
12 Ibidem, pág. 49.
13 Idem.

Breton nos informa que con este algoritmo híbrido, ha podido resolver, en un tiempo razonable Juegos Estocásticos con 20 estados y 20 ecuaciones para cada jugador en cada estado. El problema de hecho es la memoria requerida de la máquina para los datos.

Lo que se ha querido demostrar con esta lista de algoritmos propuestos a lo largo del tiempo es lo siguiente: primero, la solución de un Juego Estocástico con descuento se puede resolver sólo a través de un algoritmo computacional; segundo, éste o éstos algoritmos todavía no presentan una forma universal, más bien, los algoritmos se proponen para casos muy concretos; tercero, el uso de la programación dinámica es indispensable en el momento de diseñar este algoritmo. Sus semejanzas con un Juego Estocástico se ilustrarán a continuación.

2.4 Semejanzas entre Juegos Estocásticos y programación dinámica

Como lo especifican Frederick S. Hillier y Gerald J. Lieberman en su libro de investigación de operaciones[14]:

> *"la programción dinámica es una técnica matemática útil en la toma de una serie de decisiones interrelacionadas. Proporciona un procedimiento sistemático para determinar la combinación de decisiones que maximiza la efectividad total"*

Más adelante agrega:

> *"no cuenta con una formulación matemática estándar para 'el'*

14 Hillier, Frederick S. y Gerald J. Lieberman, "Introducción a la investigación de operaciones", págs. 395-401.

problema de programación dinámica, sino que se trata de un enfoque de tipo general para la solución de problemas y las ecuaciones específicas que se usan se deben desarrollar para que representen cada situación individual"

En todo problema de programación dinámica se encuentran las siguientes características:

a) El problema se puede dividir en etapas que requieren una política de decisión en cada una de ellas.

Esta corresponde a cada subjuego, Γ^k, $k = 1, 2, \ldots, N$, donde cada uno de ellos requiere una estrategia para su solución.

b) Cada etapa tiene un cierto número de estados asociados a ella. En general, los estados son las distintas condiciones posibles en las que se puede encontrar el sistema en cada etapa del problema. El número de estados puede ser finito o infinito.

Estos estados se pueden identificar como las decisiones que puede hacer cada jugador, cada decisión puede cambiar el resultado del juego.

c) El efecto de la política de decisión en cada etapa es transformar el estado actual en un estado asociado con la siguiente etapa.

Como resultado de una elección se pasa a otro subjuego o se puede decidir jugar el mismo.

d) El procedimiento de solución esta diseñado para encontrar una política óptima para el problema completo, es decir, una receta para las decisiones de la política óptima en cada etapa para cada uno de los estados posibles. En cualquier problema, la programación dinámica proporciona este tipo de recetas o politicas sobre que hacer en todas las circunstancias posibles.

Esta es una característica del método de programación dinámica.

e) Dado el estado actual, una politica óptima para las etapas restantes es independiente de la politica adoptada en etapas anteriores.

Estando en el estado actual nuestras decisiones pasadas no afectan al siguiente subjuego, sólo la decisión actual.

f) El procedimiento de solución se inicia al encontrar la politica óptima para la última etapa. La politica óptima para la última etapa prescribe la politica óptima para cada estado posible en esa etapa.

Dadas las características del juego es necesario truncar en algún momento el juego y de ahí partir para solucionarlo, la solución del último subjuego acarrea la solución completa del juego.

g) Se dispone de una relación recursiva que identifica la politica óptima (n+1). La relación recursiva recibe este nombre porque constantemente recurre a las etapas posteriores conforme se trabaja hacia atrás una etapa a la vez.

La relación recursiva debe ser diseñada por el analista, dependiendo del medio en que se desenvuelva el juego, de tal forma que cubra todas las espectativas posibles.

h) Cuando se usa esta relación recursiva, el procedimiento de solución se mueve hacia atrás etapa por etapa -encontrando cada vez la política óptima para esa etapa, hasta que encuentra la política óptima desde la etapa inicial.

Esta es la forma en que trabaja el método de programación dinámica.

Como hemos visto la programación dinámica y los Juegos Estocásticos con descuento se complementan perfectamente siendo el primero el método más idóneo para encontrar el valor del Juego.

CAPITULO III

SOLUCION DE LOS JUEGOS ESTOCASTICOS CON DESCUENTO

En este último capitulo resolveremos un ejemplo sencillo que consta de dos subjuegos únicamente, la sencillez aparente del ejemplo desaparecerá en el momento en que hagamos un intento por resolverlo analiticamente. Propondremos un algoritmo utilizando la programación dinámica para resolver este juego especificamente, lo que nos debe de dar idea para la solución de otros problemas, recordemos que la mayoría de los trabajos que se pueden encontrar nos ofrecen soluciones a una restringida gama de juegos, como los que vimos en el capitulo anterior. Por lo tanto, más que intentar proponer un algoritmo universal, deseamos demostrar la efectividad de la programación dinámica para resolver este tipo de juegos. La solución se encontrará por medio de un programa de computo.

3.1 Ejemplo de un Juego Estocástico y su solución

Este ejemplo que podría ser real, se trata de un problema de publicidad entre dos compañías para ganarse al consumidor[1]. El problema es el siguiente:

1 Thomas, L. C.. "Games, theory and applications", págs. 157-158.

Dos compañías hacen la misma línea de productos, y cada año ellos pueden decidir si realizan una campaña publicitaria anunciando sus productos o no. Los efectos de la publicidad mal planeada también afecta si la demanda del producto continua. Piensese en ello como juguetes manufacturados que estan tratando de asegurar que cada navidad (cuando el 70% de los juguetes estan agotados) los niños esten esperando sus productos. Si la compañía I tiene la mejor imagen, el juego es Γ_1, mientras que si la compañía II tiene la mejor imagen el juego es Γ_2. Tomamos como resultado numérico la diferencia entre el beneficio de I y II cada año. El beneficio es descontado por un factor $\beta = 0.75$, y un conjunto de hipotéticos, pero razonables pagos son dados, donde I_a es cuando I anuncia y I_n cuando no lo hace y similarmente para la otra compañía.

$$\Gamma_1 \quad \begin{array}{c} \\ I_a \\ I_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} II_a & II_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 + ({}^{2}/{}_{3}\Gamma_1 + {}^{1}/{}_{3}\Gamma_2) & 2 + ({}^{2}/{}_{3}\Gamma_1) \\ 2 + ({}^{2}/{}_{3}\Gamma_2) & 2 + ({}^{1}/{}_{3}\Gamma_1) \end{bmatrix} \end{array} \qquad [19]$$

$$\Gamma_2 \quad \begin{array}{c} \\ I_a \\ I_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} II_a & II_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 + ({}^{1}/{}_{3}\Gamma_1 + {}^{2}/{}_{3}\Gamma_2) & 1 + ({}^{2}/{}_{3}\Gamma_1) \\ -2 + ({}^{2}/{}_{3}\Gamma_2) & 0 + ({}^{1}/{}_{3}\Gamma_2) \end{bmatrix} \end{array} \qquad [20]$$

Observemos que en algunos casos $\sum_{l=1}^{2} P_{ij}^{kl} < 1$, la razón es que la demanda para este producto no es eterna.

Podemos intentar resolver el juego, efectuando un número n de subjuegos y luego parar, recibiendo una cantidad $v^0 = (v_1^0, v_2^0)$, esta cantidad será $v_1^0 = 0$ y $v_2^0 = 0$, ya que no conocemos el valor verdadero del juego en la etapa n y dado que tenemos que inicializar el vector v con algún valor. Otra manera por medio de la cual podemos intentarlo es inicializar el juego desde el principio y comenzar a jugar resolviendo en cada etapa cada subjuego. Las dos formas son permitidas en la programación dinámica, así que resolveremos el juego por medio de la última forma descrita.

Reemplazando Γ_1 por βv_1^0 y Γ_2 por βv_2^0 en [19] y [20] podemos resolver para v^1, así que βv_1^0 y βv_2^0 son ambos cero, pero en el método esto es importante, por lo que:

$$v_1^1 = \text{val}\begin{bmatrix} 1 + 0 + 0 & 2 + 0 \\ 2 + 0 & 2 - 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$v_2^1 = \text{val}\begin{bmatrix} -1 + 0 + 0 & 1 + 0 \\ -2 + 0 & 0 + 0 \end{bmatrix} = -1$$

sustituyendo $\beta v^1 = (^3/_2,\ -^3/_4)$. Ahora, remplazando Γ_1 por βv_1^1 y Γ_2 por βv_2^1 en [19] y [20] podemos resolver para v^2

$$v_1^2 = \text{val}\begin{bmatrix} 1 + (^2/_3)(^3/_2) + (^1/_3)(^{-3}/_4) & 2 + (^2/_3)(^3/_2) \\ 2 + (^2/_8)(^{-3}/_4) & 2 + (^1/_8)(^3/_8) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{val}\begin{bmatrix} 1^{3}/_{4} & 3 \\ 1^{1}/_{2} & 3^{1}/_{2} \end{bmatrix} = 1^{3}/_{4}$$

$$v_2^2 = \mathrm{val}\begin{bmatrix} -1 + (^{1}/_{3})(^{3}/_{2}) + (^{2}/_{3})(^{-3}/_{4}) & 1 + (^{2}/_{3})(^{3}/_{3}) \\ -2 + (^{2}/_{3})(^{-3}/_{4}) & 0 + (^{1}/_{3})(^{-3}/_{4}) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{val}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2^{1}/_{2} & ^{-1}/_{4} \end{bmatrix} = -1$$

así que $v^2 = (1.75, -1)$, sustituyendo $\beta v^2 = (^{21}/_{16}, \ ^{-3}/_{4})$. Remplazando nuevamente Γ_1 por βv_1^2 y Γ_2 por βv_2^2 en [19] y [20] podemos resolver para v^3 y así hasta que el vector v "no cambie" significativamente. Cuando el vector v "no cambie" podemos decir que hemos encontrado el valor del juego.

Como se puede apreciar, el resolver el juego de esta forma nos lleva mucho tiempo, por lo que se construira el modelo de programación dinámica para que nos ayude y sea más rápida su solución.

3.2 <u>Diseño de un programa dinámico para solucionar el ejemplo</u>

Es fácil observar, como este problema contiene todas las características de un problema de programación dinámica, ya que el problema se puede dividir por etapas donde cada una de ellas requiere una política, aquí en este juego cada etapa esta dada cuando se encuentra el valor de todos los subjuego y obtenemos el vector v actualizado, la politica o estrategia en este caso es el criterio "minmax" y "maxmin". En los progamas dinámicos cada etapa tiene cierto número de estados, en este juego cada etapa tiene dos estados asociados que son los subjuegos Γ_1 y Γ_2. En la progamación dinámica se busca asociar un estado actual con el siguiente por medio de la política, aquí en este juego cada estrategia nos lleva a jugar un juego (que pueden ser el mismo juego o el otro) en la etapa siguiente. Además sabemos que en este problema como en los de programación dinámica lo que se ha decidido anteriormente no afecta la decisión en etapas futuras.

Nuestro propósito es encontrar un procedimiento para obtener el resultado de todo el juego no solamente de una etapa determinada, esto es, encontrar una receta de que hacer en cada una de las etapas del juego, valiendonos para esto de alguna relación recursiva que todavía no conocemos pero que debemos deducir del problema.

Podemos describir a grandes rasgos lo que hay que hacer:

Paso 1) Dar inicio.

Paso 2) Establecer un criterio de paro ε, ya que no sabemos que número de etapas sean necesarias para encontrar el valor del juego.

Paso 3) Establecer el valor de v_k^n, donde $k = 1, 2, \ldots, N$ y $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Paso 4) Resolver los subjuegos con v_k^n con el fin de obtener un vector v_k^{n+1} actualizado.

Paso 5) El valor del juego esta dado por $V = (v_1^n + v_2^n + \cdots + v_N^n)$.

Paso 6) Preguntar si $|\varepsilon_a| < \varepsilon$, si es menor pasar al paso 7, de otra forma regresar al paso 3.

Paso 7) Parar.

La ε es la tolerancia prefijada o criterio de paro y ε_a es el error relativo porcentual[2]. Las etapas se identificaran por n y los estados o subjuegos por k; el valor del juego es V.

Con el fin de encontrar los nuevos vectores v_k^{n+1} es necesario diseñar una ecuación recursiva que defina la política óptima n+1, recurriendo a información ya conocida, en este caso el mismo vector w una etapa atrás. Nuestra ecuación recursiva sera:

$$v_k^{n+1} = \mathrm{Max}_{1\le i\le n_k} \left\{ \mathrm{Min}_{1\le j\le m_k} \left[\left(\alpha_{ij}^k + \beta \sum_{l=1}^N P_{ij}^{kl} v_l^n \right) \right] \right\}$$

Esta ecuación utiliza el criterio "MaxMin" como estrategia, por lo que solamente es útil para el jugador I, la misma ecuación, pero con el criterio "MinMax" se utilizará para el jugador II[3]; i son las elecciones que puede hacer I y j las que puede hacer II, la expresión $\beta \sum_{l=1}^N P_{ij}^{kl} v_l^n$ son las entradas de las matrices de resultados o subjuegos definidos en el capítulo II, donde P_{ij}^{kl} son probabilidades, β es el factor de descuento y v_l^n es el vector w una etapa atrás.

Desarrollando la ecuación para el juego que nos ocupa quedaría así:

2 Chapra, Steven C. y Raymond P. Canale. "Métodos numéricos para ingenieros", pág. 60.

3 El criterio MaxMin se explica en el apéndice A.

Si $k = 1$ en $n = 0$ con $i = 1, 2$ y $j = 1, 2.$

$$v_1^1 = \mathrm{Max}_{i=1}\{ \mathrm{Min}_{j=1,2}[(\alpha_{11}^1 + \beta(P_{11}^{11} v_1^0 + P_{11}^{12} v_2^0)),$$
$$(\alpha_{12}^1 + \beta(P_{12}^{11} v_1^0 + P_{12}^{12} v_2^0))] \}$$

$$\mathrm{Max}_{i=2}\{ \mathrm{Min}_{j=1,2}[(\alpha_{21}^1 + \beta(P_{21}^{11} v_1^0 + P_{21}^{12} v_2^0)),$$
$$(\alpha_{22}^1 + \beta(P_{22}^{11} v_1^0 + P_{22}^{12} v_2^0))] \}$$

Si $k = 2$ en $n = 0$ con $i = 1, 2$ y $j = 1, 2.$

$$v_2^1 = \mathrm{Max}_{i=1}\{ \mathrm{Min}_{j=1,2}[(\alpha_{11}^2 + \beta(P_{11}^{21} v_1^0 + P_{11}^{22} v_2^0)),$$
$$(\alpha_{12}^2 + \beta(P_{12}^{21} v_1^0 + P_{12}^{22} v_2^0))] \}$$

$$\mathrm{Max}_{i=2}\{ \mathrm{Min}_{j=1,2}[(\alpha_{21}^2 + \beta(P_{21}^{21} v_1^0 + P_{21}^{22} v_2^0)),$$
$$(\alpha_{22}^2 + \beta(P_{22}^{21} v_1^0 + P_{22}^{22} v_2^0))] \}$$

Con lo que obtendremos una vez resueltos estos sistemas el vector $v^1 = (v_1^1, v_2^1)$ correspondiente a la primera etapa $n = 0$ con un error permitido ε.

Si $k = 1$ en $n = 1$ con $i = 1, 2$ y $j = 1, 2.$

$$v_1^2 = \mathrm{Max}_{i=1}\{ \mathrm{Min}_{j=1,2}[(\alpha_{11}^1 + \beta(P_{11}^{11} v_1^1 + P_{11}^{12} v_2^1)),$$
$$(\alpha_{12}^1 + \beta(P_{12}^{11} v_1^1 + P_{12}^{12} v_2^1))] \}$$

$$\mathrm{Max}_{i=2}\{ \mathrm{Min}_{j=1,2}[(\alpha_{21}^1 + \beta(P_{21}^{11} v_1^1 + P_{21}^{12} v_2^1)),$$
$$(\alpha_{22}^1 + \beta(P_{22}^{11} v_1^1 + P_{22}^{12} v_2^1))] \}$$

Si $k = 2$ en $n = 1$ con $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$.

$$v_2^2 = \text{Max}_{i=1}\left\{ \text{Min}_{j=1,2}\left[\left(\alpha_{11}^2 + \beta\left(P_{11}^{21}\, v_1^1 + P_{11}^{22}\, v_2^1 \right)\right), \left(\alpha_{12}^2 + \beta\left(P_{12}^{21}\, v_1^1 + P_{12}^{22}\, v_2^1 \right)\right) \right] \right\}$$

$$\text{Max}_{i=2}\left\{ \text{Min}_{j=1,2}\left[\left(\alpha_{21}^2 + \beta\left(P_{21}^{21}\, v_1^1 + P_{21}^{22}\, v_2^1 \right)\right), \left(\alpha_{22}^2 + \beta\left(P_{22}^{21}\, v_1^1 + P_{22}^{22}\, v_2^1 \right)\right) \right] \right\}$$

Con lo que obtendremos una vez resueltos estos sistemas el vector $v^2 = (v_1^2,\ v_2^2)$ correspondiente a la segunda etapa $n = 1$, con un error permitido ε y un error relativo porcentual ε . Así continuamos hasta que el vector v no cambie o $|\varepsilon_a| < \varepsilon$.

Teniendo ya nuestra ecuación recursiva podemos pasar a la diagramación del problema (Fig. 1, página siguiente), para posteriormente poder hacer la codificación del método en algún lenguaje de programación, como el lenguaje C, versión 2.0, que fue el que se utilizó en este trabajo.

3.3 Programación y solución del juego

El programa y la corrida completa pueden verse en el apéndice C, aquí sólo mostraremos las dos primeras matrices y la última, así como el resultado obtenido; tomando un error permitido de 0.001, y como vector inicial $v^0 = (0, 0)$.

En las dos primeras matrices los resultados son los mismos que ya habiamos obtenido manualmente:

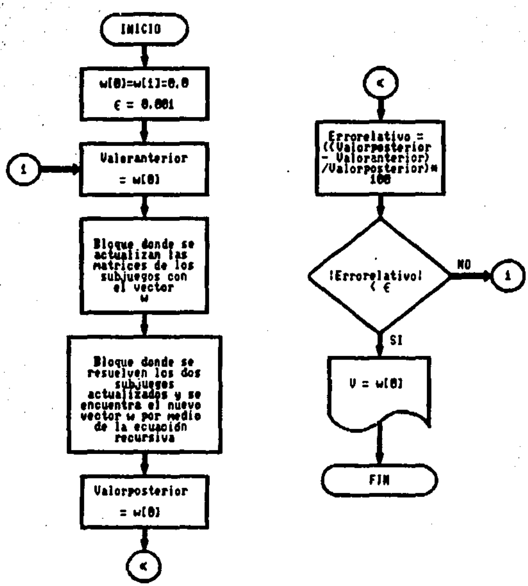


Fig. 1. Diagrama del problema.

$$v_1^1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 2.0000 \\ 2.0000 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

$$v_2^1 = \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 \\ -2.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

con v^1 = (2.000, -1.000) y un error relativo de 100, para la siguiente iteración las matrices son:

$$v_1^2 = \begin{bmatrix} 1.7500 & 3.0000 \\ 1.5000 & 2.5000 \end{bmatrix}$$

$$v_2^2 = \begin{bmatrix} -1.0000 & 2.0000 \\ -2.5000 & -0.2500 \end{bmatrix}$$

con v^2 = (1.750, -1-000) y un error relativo de -14.28571, todavía estamos muy lejos de encontrar el valor del juego.

En la iteración 34 (o etapa) las matrices son las siguientes:

$$v_1^{34} = \begin{bmatrix} 1.3334 & 2.6667 \\ 1.3334 & 2.3333 \end{bmatrix}$$

$$v_2^{34} = \begin{bmatrix} -1.3333 & 1.6667 \\ -2.6666 & -0.3333 \end{bmatrix}$$

con v^{34} = (1.333, -1.333) y un error relativo de -0.0009387466, que es menor en valor absoluto de 0.001, por lo que podemos considerar como el valor del juego a (1.3334, -1.3333). Ya que se trata de un juego de suma cero, el resultado final debe ser cero, la interpretación es la siguiente: el jugador I gana 1.3334 con las politicas establecidas desde un principio en Γ_1 y Γ_2, en cambio, el jugador II gana -1.3333 con esas mismas politicas, por lo que será necesario que corrija sus planes si desea tener alguna mejora.

Estos resultados son muy cercanos a los que obtiene L. C. Thomas que son de $(1^{1}/_{3}, -1^{1}/_{3})$, nosotros podriamos lograr un mejor resultado si cambiamos el error permitido. El programa se volvio a correr probando un error permitido de 0.0001 y los resultados fueron mucho mejores, el error relativo fue de -9.834739E-05, y el resultado fue (1.3333, -1.3333), en 43 iteraciones. Claro que entre más pequeño sea el error permitido mejores serán los resultados, pero el número de iteraciones se incrementa rápidamente y con esto los costos tiempo-máquina, que en un problema con más estados y más elecciones para los jugadores el costo resultará significativo.

3.4 Un enfoque práctico

El problema que bosquejaremos a continuación trata sobre el autofinanciamiento del "Tsuru 4 Ptas. Std. Tip. Plus" que comercializa SICREA, respaldada por la compañía NISSAN, y el "TOPAZ Austero" que comercializa CONAUTO, respaldado por la compañía FORD; éste último, fue posteriormente remplazado por el "SCORT". La competencia entre estos dos sistemas de credito automotriz y las dos unidades en particular, es válida, ya que los dos se distribuyen en un plan a 50 meses y el valor de las unidades no es muy diferente, pues en promedio, la diferencia entre el valor de las unidades varia solamente en N$ 2,539.00, precio público, estando algunas veces más caro el auto de NISSAN que el de FORD y viceversa.

La competencia, lógicamente esta en ganar clientes para cada unidad en el plan de 50 meses, con acciones como las siguientes: 1) Incrementar la publicidad a un plan en especifico; 2) Mejorar el plan existente; 3) Hacer algún tipo de promoción; 4) No tomar ninguna acción, etc.. Las estrategias que seguirán las compañias son: el de una promoción especial, como en el caso de CONAUTO, que sustituye el TOPAZ por el SCORT, en abril de 1994; en el caso de SICREA mejorar su plan 50 existente, comprometiendose a entregar la unidad con un mínimo de 20 mensualidades adelantadas, esto sucedio en mayo de 1994.

Como se puede ver, la competencia entre estas compañias existe y va en periodos mensuales.

Planteando el problema de forma que sea más fácil visualizarlo como un Juego Esctocástico bipersonal de suma cero con descuento, quedaria así:

Dos compañias autofinanciadoras: SICREA y CONAUTO, compiten para ganar el mercado de automoviles. Cada compañia puede decidir entre dos acciones posibles: 1) Hacer algún tipo de promoción que atraiga al cliente; o 2) No hacer nada, lo que implica dejar sus planes tal como están.

Cada mes el consumidor debe tomar la decisión de cual sistema es el mejor para él. Si partimos del momento en que SICREA se muestra más atractivo al consumidor, hablaremos del estado Γ_1, de igual manera, si partimos del momento en que CONAUTO es más atractivo, hablaremos del estado Γ_2. Las ganancias que ambas compañías podrían esperar, dependiendo de que estado se inicie, y aplicando sus estrategias son:

Γ_1 (SICREA como mejor opción)

	Ic No hacer nada	IIc Promoción especial
Is No hacer nada	N$ 3273417.90	N$ 1440340.10
IIs Promoción especial	N$ 64425860.68	N$ 5671826.67

Γ_2 (CONAUTO como mejor opción)

	Ic No hacer nada	IIc Promoción especial
Is No hacer nada	N$ 754034.01	N$ 1833077.80
IIs Promoción especial	-N$ 5671826.67	-N$ 4592782.88

Las probabilidades de que el proximo mes se pase a Γ_1 son:

Si partimos de Γ_1

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Ic & IIc \end{array} \\ \begin{array}{c} Is \\ IIs \end{array} & \begin{bmatrix} .5 & .3330 \\ .6629 & .3330 \end{bmatrix} \end{array}$$

Si partimos de Γ_2

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Ic & IIc \end{array} \\ & \begin{bmatrix} .5 & .3330 \\ .6629 & .6670 \end{bmatrix} \end{array}$$

Las probabilidades de que el proximo mes se pase a Γ_2 son:

Si partimos de Γ_1

$$\begin{array}{c|cc} & I_c & II_c \\ \hline I_s & .5 & .6670 \\ II_s & .3371 & .6629 \end{array}$$

Si partimos de Γ_2

$$\begin{array}{c|cc} & I_c & II_c \\ \hline I_s & .5 & .3371 \\ II_s & .3371 & .6629 \end{array}$$

Si la inflación en ese año fue de 0.03, lo que tomaremos como factor de descuento, tendremos β=0.03.

Tendremos un Juegos Estocástico, compuesto de dos subjuegos dados de la siguiente forma

Γ_1 (SICREA como mejor opción)

$$\begin{array}{c|cc} & I_c & II_c \\ \hline I_s & 3273417.90+(.5\Gamma_1 + .5\Gamma_2) & 1440340.10+(.333\Gamma_1 + .667\Gamma_2) \\ II_s & 64425860.68+(.6629\Gamma_1 + .3371\Gamma_2) & 5671826.67+(.667\Gamma_1 + .333\Gamma_2) \end{array}$$

Γ_2 (CONAUTO como mejor opción)

$$\begin{array}{c|cc} & I_c & II_c \\ \hline I_s & 754034.01+(.5\Gamma_1 + .5\Gamma_2) & 1833077.80+(.333\Gamma_1 + .667\Gamma_2) \\ II_s & -5671826.67+(.6629\Gamma_1 + .3371\Gamma_2) & -4592782.88+(.3371\Gamma_1 + .6629\Gamma_2) \end{array}$$

Una vez planteado el juego, podemos intentar encontrar su solución. El juego es de suma cero, si consideramos que en un mes los contratos que pierde una compañía los gana la otra y viceversa; esta claro que las decisiones de un periodo anterior son las únicas que afectan el estado actual del juego, sin importar que se decidiera en el inicio del juego; además, si dejamos actuar la inflación sobre el juego tendremos el factor de descuento requerido.

Por las observaciones anteriores podriamos considerar el problema como un Juego Estocástico e intentar encontrar su solución tratandolo como tal. Mi intensión al describir este problema ha sido el de mostrar un problema más real, que pueda ser tratado como un Juego Estocástico. Creo que la competencia de compañías autofinanciadoras es un buen ejemplo de como, con un poco de imaginación podemos utilizar los métodos de la Teoría de Juegos para encontrar la solución de diferentes problemas.

El desarrollo eficiente de algoritmo con un número finito de pasos para juegos de alguna clase especial tienen hoy resultados en una nueva línea de investigación[4]. Como hemos visto en este capitulo el desarrollo de algoritmos se entrelaza con ideas de la programación dinámica y progamas de computo, sin las cuales su solución estaría muy lejos de conocerse.

El dar a conocer este tipo de problemas permitirá a los análistas conocer diferentes formas de aplicación de la Teoría de Juegos Estocásticos con descuento. La habilidad para resolver este tipo de problemas se puede desarrollar mejor mediante la exposición de una gran variedad de aplicaciones y con el análisis detallado de las características comunes a estas situaciones.

4 Raghavan, T. E. S. de: Raghavan, Ferguson, et al.. "Stochastic games and related topics", pág. 4.

Con la difusión y popularización de las computadoras hemos entrado en la nueva era de las tecnologías de la información, cuyo horizonte parece ser la "sociedad automatizada" en un futuro no muy lejano[5].

No es fácil predecir los futuros avances y mucho menos los plazos en que se puede llevar acabo, habida cuenta de que la evolución y desarrollo de la tecnología aumenta a un ritmo cada vez más acelerado. No obstante a partir de los logros obtenidos y de otros iniciados se puede vislumbrar el efecto de su implantación masiva en la sociedad, donde los problemas de conflictos jugaran un papel importante, ya que las gestiones en las empresas e industrias se realizará de una forma totalmente automatizada, mediante algoritmos ya implantados en todo un sistema de información eliminando la mayor parte del trabajo manual.

5 Alcalde, E., M. García, et al.. "Informática básica", pág. 23.

CONCLUSIONES

Finalmente puede concluirse que los Juegos Estocásticos con descuento en general, son una nueva dirección en la Teoría Clásica de los Juegos, esta teoría es relativamente joven, pues fue apenas en la decada de los 50's cuando se empezó a trabajar en ella, sin embargo, las condiciones en que se desenvolvia no ayudaban a un rápido desarrollo y menos a una difusión más profunda del tema, por lo que tuvo que esperar. Es ahora con los adelantos tecnológicos que esta teoría puede rendir sus frutos. En nuestro país es practicamente desconocida, y por consiguiente muy poco valorada, de aquí la necesidad de difundir el tema y los progresos de la misma. Contribuir a esta tarea fue uno de los objetivos al comenzar este trabajo.

En particular los Juegos Estocásticos bipersonales de suma cero con descuento, son un buen principio para conocer y ver las posibles aplicaciones que puede llegar a tener esta teoría, el uso de las técnicas de programación dinámica si bien son más conocidas y utilizadas, requieren de mayor atención. Hasta ahora, por las características que presentan los problemas de Juegos Estocásticos y de programación dinámica, la única forma de lograr algún dominio de ellos es la presentación, análisis y difusión de problemas resueltos por estas técnicas. El constante desarrollo de la tecnología nos proporciona excelentes herramientas para encontrar la solución de juegos que solamente en dimensiones grandes pueden tener una aplicación útil. Como se describe en el marco teórico: "el problema actual ya no es la información que tenemos para almacenar, sino procesar la que verdaderamente nos es útil", los Juegos Estocásticos pueden convertirse en una buena herramienta para la toma de decisiones, ya que ahora que el problema de procesamiento y almacenamiento de datos pasa rápidamente a segundo término, el uso y solución de este tipo de problemas se harán más frecuentes.

Sin embargo, no nos engañamos, sabemos de las limitaciones que como teoría presentan los Juegos Estocásticos, los juegos de suma cero en particular, que son los más desarrollados, presentan la limitación de que no todos los conflictos se pueden reducir a esta forma e incluso habría que preguntarse si una vez hecha la reducción a suma cero, el problema representado todavía es confiable o útil. En general los Juegos Estocásticos suponen ciertas hipótesis que en la gran mayoría de los casos no se dan, como son:

- La hipótesis de que los jugadores puedan determinar la utilidad que para ellos tiene cada posible elección.
- La hipótesis de que cada jugador tiene conocimiento de las reglas o estructura del juego.
- La hipótesis de que cada uno de los jugadores tenga conocimiento de la utilidad del otro jugador.

Todas estas situaciones limitan la aplicabilidad de la teoría a situaciones conflictivas de la vida real.

Además es fácil ver que los juegos bipersonales son muchas veces inadecuados para construir modelos de situaciones conflictivas que involucran a más de un participante (aunque exista la posibilidad de hacer equipo entre los jugadores, de tal forma que solamente existan dos bandos, y aunque esto es deseable no siempre es posible), los cuales se presentan muy a menudo, ejemplo de esto son las competencias entre empresas, las relaciones diplomáticas o las relaciones legislativas; todas ellas contienen situaciones en las que interactuan más de dos jugadores.

Hasta ahora, nadie sabe exactamente adónde irá a parar el futuro desarrollo de la Teoría de Juegos, la Teoría de Juegos Estocásticos con descuento es un buen ejemplo del deseo de acercarse más a la realidad introduciendo el efecto estocástico y el factor de descuento, el desarrollo futuro de esta teoría como modelo de ciertos aspectos del comportamiento humano, dependen por una parte de nuestro conocimiento del hombre como alguien que toma decisiones, y por otra parte, el desarrollo de otras técnicas matemáticas mediante las que puedan ser estudiadas las complejas relaciones de las personas en conflicto.

A pesar de todo esto, si algo nos puede quedar claro, es que la solución de un Juego Estocástico bipersonal de suma cero con descuento debe hacerse por medio de la programación dinámica y utilizando un programa de computo. Por la misma forma en que se elabora un programa dinámico, que es en forma iterativa y haciendo uso de información anterior su implantación en un programa de computo es sencillo, el problema radicará en el tamaño del juego, este problema no es teórico sino tecnológico, ya que teóricamente el aumentar un estado o una elección a sus conjuntos respectivos no representa ningún problema, pero esto no es lo mismo si de memoria y procesamiento se trata. Sin embargo, la información de las numerosas revistas especializadas en estos temas nos llenan de optimismo, ya que cada vez más articulos hablan acerca de nuevos procesadores, siempre más rápidos y con mayor capacidad de almacenamiento.

Con este trabajo se trató de dar un panorama de lo que es un Juego Estocástico, y cual es su actual desarrollo, ya que el Juego Estocástico con descuento, es hasta el momento al que se le ha prestado mayor atención de parte de los analistas. A pesar de los problemas teóricos para su implantación, no deben subestimarse estos juegos, como una rama de la Investigación de Operaciones en pleno desarrollo y como una técnica para la toma de decisiones.

LISTA DE NOTAS DE PIE DE PAGINA

CAPITULO I

1. Raghavan, T. E. S., T. S. Ferguson, T. Parthasarathy y O. J. Vrieze. "Stochastic games and related topics", pág. 3. Este libro es una recopilación de artículos sobre Teoría de Juegos Estocásticos, fue de gran utilidad para la elaboración del trabajo, esta nota en particular se refiere a la introducción que escribió T. E. S. Raghavan sobre los trabajos de L. S. Shapley.

2. Shapley, L. S., de: Raghavan, Ferguson, Parthasarathy y Vrieze. "Stochastic games and related topics", págs. 201-206. Hace referencia al famoso artículo de Shapley "Stochastic Games", donde se habla por primera vez de este tipo de juegos y se demuestran sus propiedades.

3. Nota del autor.

4. Luce, R. Duncan y Howard Raiffa. "Game and decisions introduction and critical survey", pág. 2. Excelente libro sobre la Teoría de Juegos y uno de los pocos que trata el tema de Juegos Estocásticos, además de teoría contiene notas históricas muy interesantes sobre el desarrollo de los juegos.

5. Nota del autor.

6. Luce, R. Duncan y Howard Raiffa. Ob. cit., pág. 459. Los autores comienzan a tratar el tema de Juegos Estocásticos desde un caso particular hasta generalizar a un juego de N subjuegos.

7. Alcalde, E., M. García y S. Peñuelas. "Informática básica", págs 16-21. El libro nos presenta un panorama amplio de lo que es la informática, se trata de un libro de rápida lectura que nos permite identificar los avances de la computación por generaciones.

8. Kaufmann. L. C. y R. Cruon. "La programación dinámica", pág. 37. Se trata tal vez, del libro más completo de programación dinámica, con númerosos ejemplos y descripciones detalladas.

9. Nota del autor.

10. Luce, R. Duncan y Howard Raiffa. Ob. cit., págs. 458-461. Aunque no resuelven ningún juego la forma de obtener la solución se describe de una manera bastante clara.

11. Ibidem, págs. 2-10.

12. Alcalde, E., M. García y S. Peñuelas. Ob. cit., pág. 18.

13. Ibidem, págs. 89 y 94.

14. Ibidem, pág. 132.

15. Parthasarathy, T. y T. E. S. Raghavan, "Some topics in two-person games", pág. 238. Este es otro libro bastante completo, sin embargo, el nivel del libro es elevado y no hace ninguna aportación novedosa en lo que a Juegos Estocásticos se refiere. Me parece bien agregar, que contiene un pequeñísimo capítulo donde explica cuales son los principales problemas a los que se enfrenta la Teoría de Juegos actualmente.

16. Alcalde, E., M. García, et al.. Ob. cit., pág. 137.

CAPITULO II

1. Luce, R. Duncan y Howard Raiffa. "Game and decisions introduction and critical survey", págs. 457-458. Antes de entrar de lleno a lo que son Juegos Estocásticos, los autores hacen un pequeño bosquejo de como la teoria se ha ido adecuando a diferentes tipos de problemas.

2. Thomas, L. C.. "Games, theory and applications", pág. 152. Excelente libro para consultar temas que no se trantan frecuentemente en la literatura de juegos.

3. Nota del autor.

4. Breton, Michèle, de: Raghavan, Ferguson, Parthasarathy y Vrieze. "Stochastica games and related topics", pág. 45. El articulo se llama "Algorithms for Stochastic Games", Breton nos da una visión de los diferentes algoritmos que a través del tiempo se han propuesto.

5. Raghavan, T. E. S., de: Raghavan, Ferguson, et al.. Ob. cit., pág. 4. Se trata de nuevo de la introducción que escribió Raghavan, donde nos habla de los adelantos y las distintas ramas de los Juegos Estocásticos.

6. Alcalde, E., M. Garcia, et al.. "Informática básica", pág. 138.

7. Breton, Michèle, de: Raghavan, Ferguson, et al.. Ob. cit., pág. 47. Además de la panorámica que nos ofrece de los distintos algoritmos, Breton propone uno nuevo, utilizando lo mejor de

algunos algoritmos.

8. Ibidem, pág. 49.

9. Filar, Jerzy A. y Boleslav Tolvinski, de: Raghavan, Ferguson, et al.. Ob. cit., pág. 59. Los articulistas se proponen modificar el algoritmo de Pollatschek y Avi-Itzhak.

10. Idem.

11. Breton, Michèle, de: Raghavan, Ferguson, et al.. Ob. cit., pág. 48.

12. Ibidem, pág. 49.

13. Idem.

14. Hillier, Frederick S. y Gerald J. Lieberman. "Introducción a la investigación de operaciones", págs. 395-401. Este libro contiene un capítulo sobre programación dinámica, donde detalla sus características, éstas las ocupamos para ver sus afinidades con los Juegos Estocásticos.

CAPITULO III

1. Thomas, L. C.. "Games, theory and applications", págs. 157-158. Este libro además de abundante teoría contine númerosos ejemplos de Juegos Estocáticos; uno de ellos lo tomamos para elaborar el algoritmo, dando correctamente los resultados de L. C. Thomas.

2. Chapra, Steven C. y Raymond P. Canale. "Métodos numéricos para ingenieros", pág. 69. Contiene un magnifico capítulo sobre errores de redondeo y truncamiento.

3. Nota del autor.

4. Raghavan, T. E. S., de: Raghavan, Ferguson, et al.. Ob. cit., pág. 4.

5. Alcalde, E., M. García, et al.. Ob. cit., pág. 23.

APENDICE A

LA TEORIA DE JUEGOS[1]

Este apéndice no pretende cubrir todas las definiciones y métodos que existen para resolver un juego, tampoco se hablará de otros juegos que no sean bipersonales y de suma cero. Este apartado intenta sólo dejar más claro algunos conceptos que se utilizaron durante el desarrollo del trabajo. Existe un gran número de libros que tratan ampliamente el tema de la Teoría de Juegos y que durante el trabajo se le ha llamado La Teoría Clásica de Juegos.

Los numerosos ejemplos que involucran adversarios en conflicto incluyen juegos de mesa, combates militares, campañas políticas, de publicidad y de comercialización entre empresas de negocios que compiten, etc. Una característica básica en muchas de estas situaciones es que el resultado final depende, primordialmente, de la combinación de estrategias seleccionadas por los adversarios. La Teoría de Juegos es una teoría matemática que estudia las características generales de las situaciones competitivas de una manera formal y abstracta.

1 El texto fue tomado de los siguientes libros: principalmente de Mckinsey, J. C. C., "Introducción a la teoría matemática de los juegos", págs. 9-20. Y de: Hillier, Frederick S. y Gerald J. Lieberman, "Introducción a la investigación de operaciones", págs. 434 y 451.

La diferencia esencial entre los juegos de estrategia y los puros pasatiempos de azar radica en la circunstancia de que la inteligencia y la pericia son útiles cuando se trata de jugar los primeros, pero no los últimos.

El número y variedad de los juegos de estrategia es enorme, distinguiremos, en primer lugar, los juegos según el número de jugadores: juegos unipersonales, bipersonales, etc.

Consideremos ahora una partida de un juego de n personas, con los jugadores P_1, P_2, ..., P_n, y sea α_i (para i = 1, ...,n) el pago hecho a P_i al final de la partida (si es P_i quien tiene que pagar α_i será negativo). Entonces, si se verifica que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$$

diremos que la partida es de suma cero. Para nuestro caso en un juego bipersonal P_1 será I y P_2 será II y lo que gana I lo pierde II.

El caso de los juegos bipersonales de suma cero, en los que a cada jugador sólo se le ofrece la posibilidad de hacer una jugada. El primer jugador elige un número de los m primeros enteros positivos, y el segundo jugador, sin previa información de la elección hecha por el primero, elige un número de los n primeros enteros positivos. Ambos números se comparan después, y uno de los jugadores paga al otro una cantidad que depende de las elecciones hechas, y de acuerdo con las reglas del juego. Para que estos juegos tengan un nombre los llamaremos, con bastante arbitrariedad juegos rectangulares.

Un ejemplo de juego rectangular es el siguiente: el jugador I elije un número del conjunto (1, 2, 3), y el jugador II, sin haber sido informado de la elección echa por I, elige a su vez un número del conjunto {1, 2, 3, 4}. Hechas las dos elecciones, II paga a I una cantidad determinada de acuerdo con la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & 2 & 1 & 10 & 11 \\
2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
3 & -3 & -5 & -1 & 1
\end{array}$$

Es decir, si, p. ej., I elige 1 y la elección de II es 3, II pagará a I 10 unidades monetarias cualesquiera. En lo sucesivo, por razones de brevedad, describiremos los juegos de esta clase dando simplemente la <u>matriz de pago</u>.

<u>Juegos rectangulares con punto de silla</u>. Consideremos ahora el juego rectangular cuya matriz mxn es

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad [1]$$

Si el jugador I elige el número 1 en una determinada partida de este juego, estará entonces seguro de ganar por lo menos el mínimo de los elementos de la primera fila; es decir, por lo menos

$$\min_j a_{1j}.$$

Y, en genera, si elige el número i, tendrá la certeza de ganar por lo menos

$$\min_j a_{ij}.$$

Puesto que puede elegir i a discreción, es natural que lo elija de manera que

$$\min_j a_{ij}$$

sea lo mayor posible. Así, pues, hay una elección para I que garantiza que su ganancia será por lo menos

$$\max_i \min_j a_{ij}.$$

De manera análoga recordando que los pagos a II son los opuestos de los elementos de A, vemos que hay una elección para II que le asegurá la obtención de, por lo menos

$$\max_j \min_i -a_{ij}.$$

Conviene recordar ahora la propiedad elemental de que si f es una función real, para la que existen los máximos y mínimos indicados, se verificará que:

$$\max_x -f(x) = -\min_x f(x)$$

y

$$\min_x -f(x) = -\max_x f(X).$$

Y como en nuestro caso los campos de variabilidad de i y de j son finitos, y existen, por tanto, todos los máximos y mínimos deducimos que:

$$\max_j \min_i -a_{ij} = \max_j -[\max_i a_{ij}] = -\min_j \max_i a_{ij}.$$

Así, pues, II puede jugar de manera que adquiera la seguridad de obtener por lo menos

$$-\min_j \max_i a_{ij}.$$

En resumen: I puede estar seguro de conseguir por lo menos

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

y II puede impedirle que consiga más de

$$\min_j \max_i a_{ij}.$$

Si se verifica que

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = V$$

entonces I debe darse cuenta, si lo reflexiona suficientemente que puede obtener V, y que su contrincante le impedirá que consiga una cantidad mayor que ésta. Así, pues, a menos que tenga alguna razón poderosa para creer que II piensa hacer algo descabellado, I debe decidirse por V y jugar de manera adecuada para conseguirlo. Y, análogamente, II debe jugar de forma que obtenga -V.

Consideremos ahora el juego rectangular dado por la matriz [1]. Llamaremos <u>estrategia mixta</u> para I a un grupo ordenado de m números reales no negativos $(x_1, \ldots, x_m)$ que satisfagan la condición

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1;$$

tales números deberán considerarse, por supuesto, como las frecuencias con que I elige los números 1, 2, ..., m. En lo sucesivo utilizaremos el símbolo S_m para representar dicho conjunto. Análogamente, por estrategia mixta para II designaremos cualquier miembro de S_n; es decir, todo grupo ordenado de n números reales no negativos $(y_1, \ldots, y_n)$ tales que satisfagan la condición

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

A veces llamaremos a los propios números 1, ..., m <u>estrategias puras</u> para I, y a los números 1, ..., n estrategias puras para II. Es evidente que, respecto a I, la estrategia pura k equivale a la estrategia mixta $(x_1, \ldots, x_m)$, con tal que $x_k = 1$ y $x_i = 0$, para $i \neq k$.

Si I utiliza la estrategia mixta $X = (x_1, \ldots, x_m)$ y II emplea la $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, la esperanza matemática de I vendrá dada por la fórmula

$$E(X,Y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i\, y_j.$$

Y si ocurre que, para un X^* de S_m y un Y^* de S_n, se verifica

$$E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y),$$

para toda X de S_m y toda Y de S_n, diremos entonces que X^* e Y^* son <u>estrategias óptimas</u> (mixtas) para I y II, respectivamente, siendo $E(X^*, Y^*)$ el valor del juego (para I). Si X^* e Y^* son estrategias óptimas para I y II, respectivamente, diremos en tal caso que el par ordenado (X^*, Y^*) constituye una solución del juego, o bien que es un punto de silla estratégico.

Existen otros métodos para resolver un juego, como son dominancia, gráficamente o utilizando programación lineal, pero su metodología no se verá en este apéndice.

El problema general de como tomar una decisión en un medio competitivo es bastante común e importante. La contribución fundamental de la Teoría de Juegos es que proporciona un marco conceptual básico para formular y analizar tales problemas en situaciones simples. Sin embargo, existe un gran abismo entre lo que la teoría puede manejar y la complejidad de la mayor parte de las situaciones de competencia que surgen en la práctica.

APENDICE B

LA PROGAMACION DINAMICA[1]

Este apéndice presenta brevemente las ideas en que se basa la programación dinámica. Por el mismo desarrollo de la programación dinámica es imposible en un texto, por muy grande que sea, abarcar todas las formas que toma esta técnica, ya que al no tener una formulación estandar puede adoptar muchas formas, y sólo la experiencia podrá decirle al analista cuando utilizar éste método o aquel otro.

El método de programación dinámica requiere del uso de la computadora digital. Como se trata de una técnica enumerativa, los tiempos de cómputo para este método son en general grandes, así como los requerimientos de memoria. Debido a ello el empleo de esta técnica es un cuanto limitado, a pesar de su extensivo número de aplicaciones potenciales.

La programación dinámica es una técnica de optimización enumerativa aplicable a problemas con restricciones y funciones objetivo que pueden ser no lineales y regiones factibles no convexas.

1 El texto fue tomado de los siguientes libros: principalmente de Gerez, Victor y Manuel Grijalva, "El enfoque de sistemas", págs. 345-348. Un segundo libro fue el de Kaufman, A y R. Cruon, "La programación dinámica", págs. 36-37. Y por último el de Hillier, Frederick S. y Gerald J. Lieberman, "Introducción a la Investigación de Operaciones", pág. 425.

Se aplica en forma natural a problemas que pueden descomponerse en etapas a lo largo del tiempo, pero también puede emplearse en problemas no secuenciales o con estructura en serie.

Para resolver este tipo de problemas, se establece un modelo matemático cuyas principales componentes son:

1) Un estado inicial $\underline{x}$ que da toda la información relevante sobre el sistema antes de la toma de una decisión.
2) Un estado final $\tilde{x}$ que da toda la información relevante sobre el sistema después de haberse tomado la decisión.
3) La variable de decisión $D = (d_0, d_1, d_2, \ldots, d_N)$ que puede manipularse para obtener determinado cambio del sistema de un estado inicial $\underline{x}$ a ser estado final $\tilde{x}$.

Como el problema de decisiones se presenta en aquellas situaciones, donde un problema tiene varias soluciones factibles o alternativas, con objeto de poder seleccionar entre éstas, es necesario asociar a todas las posibles soluciones una función de beneficio o garantía , que mida la utilidad que se asocia a cada una de las posibles soluciones.

4) El beneficio r que es una función escalar que depende del valor de los estados iniciales, de las decisiones tomadas, y de los estados finales, es decir

$$r = r(\underline{x}, D, \tilde{x}) \qquad [1]$$

5) Una transformación T, univaluada que relaciona los estados finales, con los estados iniciales, y las variables de decisión.

$$\tilde{x} = T(\underline{x}, D) \qquad [2]$$

Esta función o relación de transformación puede ser una relación matemática o puede estar dada en forma tabular.

Como la función de transformación T es univaluada puede sustituirse [2] en [1] para obtener:

$$r = r(\ \underline{x},\ D,\ T(\underline{x}, D)\ )$$

Es decir, la función de beneficio r sólo depende de los estados iniciales y las variables de decisión.

$$r = r'(\ \underline{x},\ D\ )$$

Recordando que la función de transformación es univaluada puede obtenerse la transformación inversa T', a saber

$$\underline{x} = T'(\ \tilde{x},\ D\ )$$

Sustituyendo este valor en [1] se llega a:

$$r = r(\ T'(\tilde{x}\ , D),\ D,\ \tilde{x}\ )$$

o bien

$$r = r''(\ \tilde{x},\ D\ )$$

Un problema de toma de decisiones consiste en maximizar o minimizar la función de beneficio r, si las variables independientes o de decisión toman todos los posibles valores, dentro de las restricciones que fija el problema.

Estos problemas de toma de decisiones son, por lo tanto, problemas de optimización entre los que podemos distinguir dos tipos:

El problema de optimización de estado inicial x consiste en encontrar el máximo (o mínimo) del beneficio como función del estado inicial, es decir:

$$f(\underline{x}) = \max_{D} r'(\underline{x}, D) \qquad [3]$$

En el problema de estado final x, debe determinarse el máximo (o mínimo) del beneficio como función del estado final, es decir:

$$f(\bar{x}) = \max_{D} r''(\bar{x}, D) \qquad [4]$$

Problemas de optimización como los planteados en las figuras [3] y [4] contienen muchas variables. La programación dinámica transformar un problema de esta naturaleza en una serie de problemas más sencillos, que contienen pocas variables.

La programación dinámica se basa en el principio de optimalidad expuesto por R. D. Bellman de la siguiente manera:

> *"Una política es óptima si, en un periodo dado, cualesquiera que sean las decisiones precedentes, las decisiones que queden por tomar constituyen una política óptima en lo que respecta al resultado de las decisiones precedentes"*

Este principio, llamado "principio de optimidad" por Bellman, constituye la base del método de la programación dinámica. Permite, en efecto, considerando sucesivamente 1, 2, 3, ..., N periodos, construir progresivamente una política óptima. Podemos, para esto, partir ya sea del primero, del último o de un periodo cualquiera.

La programación dinámica es una técnica muy útil para tomar una sucesión de decisiones interrelacionadas. Requiere la formulación de una relación recursiva apropiada para cada problema individual. Sin embargo, proporciona grandes ahorros computacionales en comparación con la enumeración exhaustiva para encontrar la mejor combinación de decisiones, en especial cuando se trata de problemas grandes. Por ejemplo, si un problema tiene 10 etapas con 10 estados y 10 decisiones posibles en cada etapa, la enumeración exhaustiva tendría que considerar hasta 10^{10} combinaciones, mientras que la programción dinámica necesita hacer cuando mucho 10^{3} cálculos (10 para cada estado en cada etapa).

APENDICE C

PROGRAMACION Y CORRIDA

Se presenta a continuación el listado del programa que se utilizó para obtener los resultados del capitulo III, en este mismo apéndice se muestra la corrida del programa con un error permitido de 0.001; por problemas de espacio sólo aparecen las cinco primeras iteraciones y las cinco últimas, el lector verá que no es necesario conocer cada una de las iteraciones. Además en el programa listado, la salida es diferente, en éste sólo despliega el valor del juego, el número de iteraciones, el error relativo y el permitido; las modificaciones son solamente en la salida, toda la estructura es la misma. El programa fue codificado en lenguaje "Turbo C" versión 2.0. Como ya se dijo en el capítulo III, este programa solamente es útil para resolver el juego que ahí se detalla.

```
# include <stdio.h>
# include <conio.h>
# include <math.h>

float w[2],sub1[2][2],sub2[2][2];
int cont;

void constantes()
      {
       sub1[0][0]=1.0+(3.0/4.0)*((2.0/3.0)*w[0]+(1.0/3.0)*w[1]);   /* Aqui llena la   */
       sub1[0][1]=2.0+(3.0/4.0)*((2.0/3.0)*w[0]);                  /* matriz sub1 con */
       sub1[1][0]=2.0+(3.0/4.0)*((2.0/3.0)*w[1]);                  /* el vector w     */
       sub1[1][1]=2.0+(3.0/4.0)*((1.0/3.0)*w[0]);
       sub2[0][0]=-1.0+(3.0/4.0)*((1.0/3.0)*w[0]+(2.0/3.0)*w[1]);  /* Aqui llena la   */
       sub2[0][1]=1.0+(3.0/4.0)*((2.0/3.0)*w[0]);                  /* matriz sub2 con */
       sub2[1][0]=-2.0+(3.0/4.0)*((2.0/3.0)*w[1]);                 /* el vector w     */
       sub2[1][1]=(3.0/4.0)*((1.0/3.0)*w[1]);
      }

float resuelvesub1()
      {
       float grande,chico,maxmin[2],minmax[2],val1,val2,resultadosub1;
       int i,j;
       grande=-1000.0; chico=1000.0; resultadosub1=0.0; val1=0.0; val2=0.0;
       for(i=0;i<2;i++)
              maxmin[i]=minmax[i]=0.0;
       for(i=0;i<2;i++){
       chico=1000.0;                             /*Aqui emplea el criterio  */
       for(j=0;j<2;j++)                          /* maxmin y busca el más   */
              if(sub1[i][j]<=chico){             /* pequeño de sub1 por     */
                     chico=sub1[i][j];           /* renglones               */
                     maxmin[i]=sub1[i][j];
                    }
       }
       for(i=0;i<2;i++)                          /* Aqui busca el más grande*/
              if(maxmin[i]>=grande){             /* de maxmin y lo guarda en*/
                     grande=maxmin[i];           /* val1                    */
                     val1=maxmin[i];
                    }
       grande=-1000.0; chico=1000.0;
       for(j=0;j<2;j++){
       grande=-1000.0;                           /* Aqui emplea el criterio */
       for(i=0;i<2;i++)                          /* minmax y busca el más   */
              if(sub1[i][j]>=grande){            /* grande  de sub1 por     */
                     grande=sub1[i][j];          /* columnas                */
                     minmax[j]=sub1[i][j];
                    }
       }
       for(i=0;i<2;i++)                          /* Aqui busca el mas pequeño*/
              if(minmax[i]<=chico){              /* de minmax y lo guarda en*/
                     chico=minmax[i];            /* val2                   */
                     val2=minmax[i];
                    }
       if(val1==val2) resultadosub1=val1;
```

```
        else{
          clrscr();gotoxy(4,4);
          printf("La matriz sub1 no tiene punto silla en la iteración:  %d",cont);
          gotoxy(4,6);
          printf("es necesario buscar otra forma de solucionar este subjuego");
          getch();
          exit(1);
         }
     return(resultadosub1);
    }


float resuelvesub2()
    {
     float grande,chico,maxmin[2],minmax[2],val1,val2,resultadosub2;
     int i,j;
     grande=-1000.0; chico=1000.0; resultadosub2=0.0; val1=0.0; val2=0.0;
     for(i=0;i<2;i++)
            maxmin[i]=minmax[i]=0.0;
     for(i=0;i<2;i++){
     chico=1000.0;                          /* Aqui emplea el criterio */
     for(j=0;j<2;j++)                       /* maxmin y busca el más   */
            if(sub2[i][j]<=chico){          /* pequeño de sub2 por     */
                    chico=sub2[i][j];       /* renglones               */
                    maxmin[i]=sub2[i][j];
                   }
     }
     for(i=0;i<2;i++)                       /* Aqui busca el más grande*/
            if(maxmin[i]>=grande){          /* de maxmin y lo guarda en*/
                    grande=maxmin[i];       /* val1                    */
                    val1=maxmin[i];
                   }
     grande=-1000.0; chico=1000.0;
     for(j=0;j<2;j++){
     grande=-1000.0;                        /* Aqui emplea el criterio */
     for(i=0;i<2;i++)                       /* minmax y busca el más   */
            if(sub2[i][j]>=grande){         /* grande  de sub2 por     */
                    grande=sub2[i][j];      /* columnas                */
                    minmax[j]=sub2[i][j];
                   }
     }
     for(i=0;i<2;i++)                       /* Aqui busca el más pequeño*/
            if(minmax[i]<=chico){           /* de minmax y lo guarda en*/
                    chico=minmax[i];        /* val2                   */
                    val2=minmax[i];
                   }
     if(val1==val2) resultadosub2=val1;
        else{
          clrscr();gotoxy(4,4);
          printf("La matriz sub2 no tiene punto silla en la iteración:  %d",cont);
```

```
                gotoxy(4,6);
                printf("es necesario buscar otra forma de solucionar este subjuego");
                getch();
                exit(1);
               }
         return(resultadosub2);
        }

void resuelvejuego()
        {
         u[0]=resuelvesub1();
         u[1]=resuelvesub2();
        }

main()
        {
         float V1,V2,Vdes,Vant;
         int i;
         double error,errorelativo;
         cont=0; V1=0.0; V2=0.0; errorelativo=0.0;
         Vant=0.0; Vdes=0.0;
         u[0]=0.0;
         u[1]=0.0;
         error=0.001;
         do {
          constantes();
          Vant=u[0];
          resuelvejuego();
          Vdes=u[0];
          errorelativo=((Vdes-Vant)/Vdes)*100.0;
          cont=cont++;
         } while(error<(fabs(errorelativo)));
         V1=u[0];
         V2=u[1];
         clrscr();gotoxy(4,4);
         printf("El valor del juego es: %5.4f %5.4f",V1,V2);
         gotoxy(4,6);
         printf("Se hicieron un total de: %d %s",cont," iteraciones");
         gotoxy(4,8);
         printf("Con un error relativo de: %7.7g",errorelativo);
         gotoxy(4,10);
         printf("Y un error permitido de: %7.7g",error);
         getch();
        }
```

En la iteración: 0

subjuego1		subjuego2	
1.0000	2.0000	-1.0000	1.0000
2.0000	2.0000	-2.0000	0.0000

El vector v 'siguiente' es en esta iteración: 2.0000 -1.0000

En la iteración: 1

subjuego1		subjuego2	
1.7500	3.0000	-1.0000	2.0000
1.5000	2.5000	-2.5000	-0.2500

El vector v 'siguiente' es en esta iteración: 1.7500 -1.0000

En la iteración: 2

subjuego1		subjuego2	
1.6250	2.8750	-1.0625	1.8750
1.5000	2.4375	-2.5000	-0.2500

El vector v 'siguiente' es en esta iteración: 1.6250 -1.0625

En la iteración: 3

subjuego1		subjuego2	
1.5469	2.8125	-1.1250	1.8125
1.4688	2.4062	-2.5312	-0.2656

El vector v 'siguiente' es en esta iteración: 1.5469 -1.1250

En la iteración: 4

subjuego1		subjuego2	
1.4922	2.7734	-1.1758	1.7734
1.4375	2.3867	-2.5625	-0.2812

El vector w 'siguiente' es en esta iteración: 1.4922 -1.1758

En la iteración: 29

subjuego1		subjuego2	
1.3335	2.6667	-1.3332	1.6667
1.3334	2.3334	-2.6666	-0.3333

El vector w 'siguiente' es en esta iteración: 1.3335 -1.3332

En la iteración: 30

subjuego1		subjuego2	
1.3334	2.6667	-1.3332	1.6667
1.3334	2.3334	-2.6666	-0.3333

El vector w 'siguiente' es en esta iteración: 1.3334 -1.3332

En la iteración: 31

subjuego1		subjuego2	
1.3334	2.6667	-1.3333	1.6667
1.3334	2.3334	-2.6666	-0.3333

El vector w 'siguiente' es en esta iteración: 1.3334 -1.3333

En la iteración: 32

subjuego1		subjuego2	
1.3334	2.6667	-1.3333	1.6667
1.3334	2.3333	-2.6666	-0.3333

El vector v 'siguiente' es en esta iteración: 1.3334 -1.3333

En la iteración: 33

subjuego1		subjuego2	
1.3334	2.6667	-1.3333	1.6667
1.3334	2.3333	-2.6666	-0.3333

El vector v 'siguiente' es en esta iteración: 1.3334 -1.3333

El valor del juego es: 1.3334 -1.3333

Se hicieron un total de 34 iteraciones

Con un error relativo de: -0.0009387466

Y un error permitido de: 0.001

BIBLIOGRAFIA

1) Alcalde, E., M. García, S. Peñuelas. "Informática Básica". Ed. Mc. Graw Hill 1988.

2) Chapra, Steven C. y Raymond P. Canale. "Métodos numéricos para ingenieros, con aplicaciones en computadoras personales", Ed. Mc Graw Hill, 1988.

3) Dresher, M., A. W. Tucker y P. Wolfe. "Contribution to the theory of games". Ed. Princeton, New Jersey 1957. Volumen III.

4) Duncan Luce, R. y Howard Raiffa. "Game and decisions, introduction and critical survey". Ed. John Wiley and Sons 1957.

5) Gerez, Victor y Manuel Grijalva. "El enfoque de sistemas", Ed. Limusa 1976.

6) Hillier, Frederick S. y Gerald J. Lieberman. "Introducción a la investigación de operaciones". Ed. Mc. Graw Hill 1991.

7) Kaufmann, A. y R. Cruon. "La programación dinámica". Ed. Continental 1964.

8) Mckinsey, J. C. C.. "Introducción a la teoría matemática de los juegos". Ed. Aguilar 1960.

9) Parthasarathy, T. y T. E. S. Raghavan. "Some topics in two-person games". Ed. American Elsevier Publishing Company Inc. New York 1971.

10) Pravda, Juan. "Métodos y modelos de investigación de operaciones". Ed. Limusa 1980. Volumen II.

11) Raghavan, T. E. S., T. S. Ferguson, T. Parthasarathy y O. J. Vrieze "Stochastic games and related topics". Ed. Kluwer Academic Publishers 1991. Serie C. Volumen 7.

12) Sánchez Sánchez, Francisco. "Introducción a la matemática de los juegos". Ed. Siglo XXI, 1993.

13) Schildt, Herbert. "C manual de referencia". Ed. Mc. Graw Hill 1989.

14) Singleton, Robert R. y William F. Tyndall. "Introducción a la teoría de juegos y a la programación lineal". Ed. Labor Universitaria, 1977.

15) Thomas, L. C.. "Games, Theory and applications". Ed. Ellis Horwood limited 1984.

HENMEROGRAFIA

1) Anthony, Robert S.. "Desatando el poder de Pentium". PC MAGAZINE en español (México), Volumen 5, Julio 1994, No. 7. Págs. 25-38.

2) "Métodos de almacenamiento". PC MAGAZINE en español (México), Volumen 4. Octubre 1993, No. 10. Págs 94-95.