UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TITULO DE LA TESIS

# LA VALIDEZ DE LA FORMULA CUADRUPOLAR PARA LA RADIACION GRAVITACIONAL Y EL PULSAR BINARIO PSR 1913+16

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

Armando Rojas Niño



MEXICO, D.F. 1995

VNIVERSDAD NACIONAL AVPNºMA DE MEXICO

**M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE**
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) ROJAS NIÑO ARMANDO

con número de cuenta 8434619-9 con el Título:

"la validez de la fórmula cuadrupolar para la radiación gravitacional y el pulsar binario PSR 1913+16"

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Fisico

| **GRADO** | **NOMBRE(S)** | **APELLIDOS COMPLETOS** | **FIRMA** |
| --- | --- | --- | --- |
| DR. | ANTONIO | SARMIENTO GALAN | |
| **Director de Tesis** | | | |
| DR. | SAHEN | HACYAN SALERYAN | |
| DR. | CLAUDIO | FIRMANI CLEMENTI | |
| DR. | MIGUEL ANGEL | HERRERA ANDRADE | |
| **Suplente** | | | |
| DRA. | DEBORAH | DULTZIN KESSLER | Deborah Dultzin |
| **Suplente** | | | |

*...y mire la boveda cargada de estrellas*
*que tambien eran dioses....*
(J. L. Borges "*El Hacedor*")

Para mi Papá, quien siempre toleró mi exótica pasión por la física.

Para mi Mamá, que me considera el mejor hombre del mundo.

Para mi hermano y mi hermana, nada más porque sí.

Para mis maestros y compañeros, quienes compartieron conmigo esta locura.

A los libros que he leído y a la mujer que amo.

Quiero agradecer a la Facultad de Ciencias de la UNAM, (en la que cursé mis estudios de licenciatura), por los conocimientos que recibí de ella, y al Instituto de Astronomía de la UNAM, el apoyo brindado para la realización de este trabajo.

Y en especial, agradesco al Dr. Antonio Sarmiento, (a quien respeto y admiro), pues su ayuda dirigiendo este trabajo, fué indispensable y paciente.

INTRODUCCIÓN

Después de que en 1916 Albert Einstein planteara la teoría general de la relatividad y con ella las ecuaciones del campo gravitacional, los científicos encaminaron sus esfuerzos a encontrar soluciones a dichas ecuaciones. El propio Einstein encontró en 1918 que una solución a sus ecuaciones era una "onda de gravedad", es decir, una perturbación del espacio-tiempo que se propaga con la velocidad de la luz.

Esto es análogo a lo que sucede en la teoría electromagnética; las ondas electromagnéticas son una solución de las ecuaciones de Maxwell.

Para deducir la existencia de las ondas gravitacionales, Einstein trabajó de la siguiente manera. Supuso que cuando el campo gravitacional es pequeño, el tensor métrico podía ser considerado casi minkowskiano (aproximación de campo débil), es decir, se puede escribir como:

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij} \ ,$$

donde $\eta_{ij}$ es el tensor métrico del espaciotiempo plano, y $h_{ij} << 1$.

Calculando los símbolos de Christoffel, obtuvo:

$$\Gamma^{s}_{ij} = \frac{1}{2}\,\eta^{sr}\left[\frac{\partial}{\partial x^{i}}\,h_{jr} + \frac{\partial}{\partial x^{j}}\,h_{ir} + \frac{\partial}{\partial x^{r}}\,h_{ij}\right] + f(h^{2}),$$

donde f es una función de h a segundo orden, que por ser $h << 1$, se puede despreciar.

Continuando con el cálculo, obtuvo el tensor de Ricci a primer orden en h :

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Box^{2}h^{2}_{ij} - \frac{\partial^{2}}{\partial x^{i}\partial x^{s}}\,h^{s}_{j} - \frac{\partial^{2}}{\partial x^{j}\partial x^{s}}\,h^{s}_{i} + \frac{\partial^{2}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}\,h^{s}_{s}\right).$$

Las ecuaciones de campo son:

$$G_{ij} = 8\pi G T_{ij},$$

donde $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R^n_n$ y $T_{ij}$ es el tensor energía-momento de la materia que genera el campo gravitacional. Sustituyendo $R_{ij}$ en las ecuaciones de campo, obtuvo:

$$\Box^2 h_{ij} - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^s} h^s_i - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^s} h^s_j + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} h^n_n =$$
$$= - 16\pi G \left[ T_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} T^n_n \right].$$

Ahora, se pueden imponer condiciones a las coordenadas, dada su arbitrariedad. Imponiendo las condiciones armónicas:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left[ h^k_i - \frac{1}{2} \delta^k_i h^n_n \right] = 0,$$

se simplifican considerablemente las ecuaciones de campo, y Einstein obtuvo:

$$\Box^2 h_{ij} = - 16\pi G \left[ T_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} T^n_n \right].$$

Si se considera esta ecuación en el vacío, es decir, en ausencia de materia, el tensor energía-momento se anula, y la ecuación anterior se reduce a:

$$\Box^2 h_{ij} = 0.$$

Ésta es precisamente una ecuación de onda.

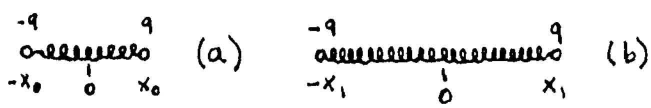
Einstein concluyó entonces que el campo gravitacional se puede propagar en el vacío en forma de ondas que viajan a la velocidad de la luz.

Ahora la pregunta natural que se puede plantear es que, dado que las ecuaciones del campo gravitacional permiten la existencia de ondas gravitacionales, ¿Qué tipo de cuerpos (distribución de materia) podría emitir dichas ondas?

Análogamente al caso electromagnético, en el cual las fuentes de radiación son distribuciones de carga que varían con el tiempo, las fuentes de ondas gravitacionales son distribuciones de masa (carga gravitacional) que varían con el tiempo.

Pero existe una diferencia sustancial en la emisión de los dos tipos de radiación.

En el primer caso, puede existir una distribución de carga cuyo momento dipolar cambie con el tiempo. Por ejemplo, dos cargas, una positiva y la otra negativa, unidas por un resorte.




Cuando el resorte está comprimido, (a), el momento dipolar del sistema es:

$$D = qx_0 + (-q)(-x_0) = 2qx_0.$$

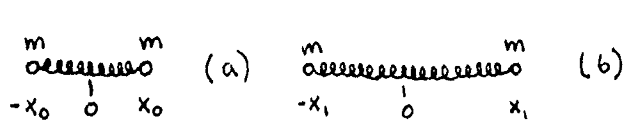
Mientras que cuando esta estirado, (b), el momento dipolar del sistema es:

$$D = qx_1 + (-q)(-x_1) = 2qx_1,$$

y puesto que $x_0 \neq x_1$ ($x_0 < x_1$), el momento dipolar del sistema cambia conforme el resorte se estira y se comprime y por lo tanto, el sistema puede emitir radiación electromagnética "dipolar".

En el caso gravitacional las cosas son diferentes. Esto es debido a que no puede existir una distribución de masa tal que su momento dipolar cambie con el tiempo.

Si por ejemplo reproducimos el ejemplo anterior, pero sustituyendo las cargas por masas, ocurre lo siguiente:



Cuando el resorte está comprimido, (a), el momento dipolar del sistema es:

$$D = mx_0 + m(-x_0) = 0,$$

y cuando está estirado, (b), el momento dipolar es:

$$D = mx_1 + m(-x_1) = 0.$$

Esto significa que el momento dipolar del sistema no cambia cuando cambia la separación de las masas.

Como sabemos de la teoría electromagnética, la potencia de la radiación dipolar es proporcional al cuadrado de la segunda derivada del momento dipolar del sistema con respecto al tiempo. Por lo tanto, en el ejemplo anterior el sistema no emite radiación dipolar, puesto que el momento dipolar del sistema es constante.

Si consideramos el caso de una distribución arbitraria de masa, la situación no cambia, debido a la conservación del ímpetu.

El cambio con respecto al tiempo del momento dipolar del sistema esta dado por:

$$\dot{D} = \frac{d}{dt}(mx) = mv = p,$$

donde p es el ímpetu. La segunda derivada del momento dipolar del sistema es:

$$\ddot{D} = \frac{d}{dt} p = 0,$$

puesto que el ímpetu se conserva. Como se mencionó anteriormente, la potencia de la radiación dipolar es proporcional a D, y esta cantidad es siempre nula para cualquier distribución de materia (carga gravitacional). Por lo tanto no puede existir la radiación gravitacional dipolar.

El hecho de que no pueda existir radiación gravitacional dipolar, y si pueda haber radiación electromagnética dipolar, en el fondo tiene que ver con el principio de equivalencia de la masa inercial y la masa gravitacional. Mientras que en el caso electromagnético, la forma en que responde una distribución de carga a una fuerza que se le aplique, no tiene que ver con la carga misma, sino con su masa, en el caso gravitacional, la forma en que responde una distribución de materia (masa gravitacional) a una fuerza que se le aplique, sí tiene que ver con la materia misma (masa inercial). Y en este último caso, la distribución de materia se mueve de tal forma, que D es siempre igual a cero.

Si regresamos a la figura anterior, podemos considerar qué pasa con el momento cuadrupolar del sistema.

Cuando el resorte está comprimido, el momento cuadrupolar es:

$$Q = mx_0^2 + m(-x_0)^2 = 2mx_0^2,$$

y cuando el resorte está estirado, el momento cuadrupolar es:

$$Q = mx_1^2 + m(-x_1)^2 = 2mx_1^2.$$

Y puesto que $x_0 \neq x_1$ $(x_0 < x_1)$, el momento cuadrupolar del sistema sí cambia con la separación de las masas. Por lo tanto sí puede existir radiación gravitacional "cuadrupolar". Así que se puede concluir que los cuerpos o sistemas de cuerpos que pueden emitir radiación gravitacional, son los que tienen momento cuadrupolar variable.

## LA FÓRMULA CUADRUPOLAR

Al igual que todos los campos gravitacionales, las ondas de gravedad poseen energía, es decir, tienen asociado un pseudo tensor energía-momento. Para entender qué es este pseudo tensor, nos tenemos que remontar a las ecuaciones de movimiento en la teoría general de la relatividad.

El tensor energía-momento de un sistema que produce un campo gravitacional, cumple en general con las ecuaciones:

$$T^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[ \sqrt{-g}\; T^k_i \right] - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0. \qquad \text{(I)}$$

Sin embargo, $T^k_i$ no contiene la energía del campo gravitacional, sino sólo la energía de la materia y del campo electromagnético.

Si ahora elegimos un sistema de referencia en el que:

$$\frac{\partial}{\partial x^l} g_{ik} = 0,$$

en un punto del espaciotiempo, entonces las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^k_i = 0,$$

lo que implica

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = 0.$$

Por otra parte, podemos escribir las ecuaciones de Einstein como:

$$T^{ik} = \frac{c}{8\pi G} \left( R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right) \qquad \text{(II)}$$

Podemos escribir a $R^{ik}$ y a $R$, en términos del tensor métrico, puesto que en el punto del espacio-tiempo que estamos considerando, las primeras derivadas del tensor métrico se anulan, y por lo tanto los símbolos de Christoffel son todos cero en este punto. Sustituyendo a $R^{ik}$ y a $R$ en

(2). podemos escribir:

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left[\frac{c}{16\pi G}\frac{1}{-g}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[-g\left(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km}\right)\right]\right].$$

Si a la cantidad entre paréntesis multiplicada por -g le llamamos $h^{ikl}$, obtenemos la expresión:

$$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} + gT^{ik} = 0, \qquad \text{(III)}$$

y por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l}h^{ikl} = 0.$$

En un sistema de referencia general, la expresión (III) ya no es válida, y tiene un valor diferente de cero. Si definimos ese valor como $t^{ik}$, obtenemos la siguiente expresión:

$$-g\,(T^{ik}+t^{ik}) = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}.$$

Sustituyendo esta expresión en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(-g)(T^{ik}+t^{ik}) = 0,$$

y por lo tanto podemos encontrar una ley de conservación;

$$P^i = -\int(-g)(T^{ik}+t^{ik})\,dS.$$

De esta manera, podemos decir que $t^{ik}$ representa la energía del campo gravitacional. Sin embargo, como podemos observar directamente de su definición, $t^{ik}$ sólo contiene primeras derivadas del tensor métrico, y por lo tanto no es un tensor. Este hecho trae consigo algunos problemas; por ejemplo, como $t^{ik}$ es función solamente de las primeras derivadas de $g^{jl}$, se puede elejir un sistema de referencia en el cual su valor sea cero en un punto arbitrario del espaciotiempo, lo cual implicaría que la energía del campo gravitacional en ese punto sería cero.

Sin embargo, Einstein demostró que para un sistema cerrado, la energía total del campo gravitacional es independiente del sistema de referencia; aunque la localización de esta energía depende del sistema de referencia elegido.

La energía que portan las ondas de gravedad, la obtienen de la fuente que las emite; por lo tanto, un cuerpo o sistema de cuerpos que esté emitiendo radiación, está perdiendo energía.

La cantidad de energía que generan por unidad de tiempo las fuentes de radiación gravitacional debido a este fenómeno, se puede calcular a través de la "fórmula cuadrupolar".

Esta fórmula fué encontrada por Landau y Lifshitz (1975) a partir de una solución aproximada de las ecuaciones de Einstein. Para encontrarla, Landau y Lifshitz razonaron de la siguiente manera:

Si consideramos un campo gravitacional débil producido por alguna distribución de materia, entonces, bajo la aproximación de campo débil, en las ecuaciones de campo deben aparecer términos relacionados con el tensor energía-momento de la materia que lo produce.

Así pues, las ecuaciones de campo se pueden escribir como sigue:

$$\frac{1}{2}\,\Box^2\,\psi_i^k = \frac{8\pi G}{c^4}\,\tau_i^k, \tag{1}$$

donde $\tau_i^k = T_i^k + t_i^k$, $\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h_n^n$, $T_i^k$ es el tensor energía-momento de la materia y $t_i^k$ contiene términos de segundo orden en $h_i^k$ del tensor $R_i^k$.

Debido a que el sistema de coordenadas satisface las condiciones:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \psi_i^k = 0, \qquad (2)$$

las leyes de conservación del tensor energía-momento:

$$T^k_{i;k} = 0,$$

se pueden reducir a:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \tau_i^k = 0. \qquad (3)$$

Las ecuaciones del campo resultantes para el caso de ondas de gravedad, tienen la misma forma que las ecuaciones de las ondas electromagnéticas. Por lo tanto su solución debe ser análoga. Así pues, la solución a las ecuaciones de campo son los potenciales retardados:

$$\psi_i^k = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{\tau_i^k}{R} dV.$$

Donde R es la distancia de cada parte del cuerpo que radía al punto de observación, y la integral debe realizarse sobre todo el cuerpo.

Si consideramos que el punto de observación de las ondas está a gran distancia de la fuente, podemos considerar a R como constante, y la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\psi_i^k = -\frac{4G}{R_0 c^4} \int \tau_i^k dV, \qquad (4)$$

donde $R_0$ es la distancia del punto de observación a un punto cualquiera de la fuente.

Con objeto de calcular estas integrales, podemos escribir las leyes de conservación de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \tau_{\alpha\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^0} \tau_{\alpha 0} = 0, \qquad (5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \tau_{0\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^0} \tau_{00} = 0. \tag{5b}$$

Ahora, si multiplicamos por $x_\beta$ e integramos la primera expresión sobre todo el espacio, obtenemos:

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \tau_{\alpha\gamma}\, x^\beta\, dV = \int \frac{\partial}{\partial x^0} \tau_{\alpha 0}\, x^\beta\, dV.$$

El integrando del lado izquierdo se puede escribir como:

$$x^\beta \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \tau_{\alpha\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (\tau_{\alpha\gamma}\, x^\beta) - \tau_{\alpha\gamma}.$$

Sustituyendo esto en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (\tau_{\alpha\gamma}\, x^\beta)\, dV - \int \tau_{\alpha\beta}\, dV = \frac{\partial}{\partial x^0} \int \tau_{\alpha 0}\, x^\beta\, dV.$$

Por el teorema de Gauss, la primera integral del lado izquierdo se puede convertir en una integral de superficie:

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\gamma}(\tau_{\alpha\gamma}\, x^\beta)\, dV = \oint \tau_{\alpha\gamma}\, x^\beta\, dS,$$

y dado que $\tau$ se anula en el infinito , esta integral también se anula; tenemos por lo tanto:

$$\int \tau_{\alpha\beta}\, dV = - \frac{\partial}{\partial x^0} \int \tau_{\alpha 0}\, x^\beta\, dV.$$

Si ahora transponemos los índices $\alpha$ y $\beta$, obtenemos:

$$\int \tau_{\alpha\beta}\, dV = - \frac{\partial}{\partial x^0} \int \tau_{\beta 0}\, x^\alpha\, dV.$$

Sumando las dos ecuacines anteriores, y dividiendo entre dos, tenemos:

$$\int \tau_{\alpha\beta}\, dV = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^0} \int (\tau_{\alpha 0}\, x^\beta + \tau_{\beta 0}\, x^\alpha)\, dV. \tag{6}$$

Si ahora multiplicamos la expresión (5b) por $x^\alpha x^\beta$ e integramos sobre todo el espacio, obtenemos:

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \tau_{0\gamma}\, x^\alpha\, x^\beta\, dV = \int \frac{\partial}{\partial x^0} \tau_{00}\, x^\alpha\, x^\beta\, dV.$$

El integrando del lado izquierdo se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \tau_{0\gamma} x^\alpha x^\beta = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (\tau_{0\gamma} x^\alpha x^\beta) - \tau_{0\alpha} x^\beta - \tau_{0\beta} x^\alpha .$$

Sustituyendo esto en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (\tau_{0\gamma} x^\alpha x^\beta) \, dV - \int \left(\tau_{0\alpha} x^\beta + \tau_{0\beta} x^\alpha\right) dV =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^0} \int \tau_{00} x^\alpha x^\beta \, dV.$$

Por el teorema de Gauss, la primera integral del lado izquierdo se puede transformar en una integral de superficie:

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (\tau_{0\gamma} x^\alpha x^\beta) \, dV = \oint \tau_{0\gamma} x^\alpha x^\beta \, dS.$$

Y puesto que $\tau_{\alpha\beta}$ se anula en infinito, esta integral también se anula y sólo queda:

$$\int (\tau_{0\alpha} x^\beta + \tau_{0\beta} x^\alpha) \, dV = - \frac{\partial}{\partial x^0} \int \tau_{00} x^\alpha x^\beta \, dV.$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (6), tenemos:

$$\int \tau_{\alpha\beta} \, dV = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} \int \tau_{00} x^\alpha x^\beta \, dV. \qquad (7)$$

Cuando la velocidad de la materia en el interior de la fuente es pequeña ($v \ll c$), su tensor energía-momento se puede expresar como:

$$\tau_{00} = \mu c^2 u_i u_k ,$$

donde $\mu$ es la densidad de masa de la fuente y $u^j$ es la tetravelocidad. La componente $\tau_{00}$ entonces es: $\tau_{00} = \mu c^2 u_0 u_0$, pero $u_0 = 1$, por lo tanto, tenemos que:

$$\tau_{00} = \mu c^2 .$$

Esto es debido a que las velocidades de las partículas en el interior de la fuente son pequeñas y por lo tanto, su energía cinética es despreciable comparada con su energía en reposo.

La solución a la ecuación (4), queda entonces, en términos de las características de la fuente:

$$\psi_{\alpha\beta} = - \frac{2G}{R_0 c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mu \, x^\alpha \, x^\beta \, dV. \tag{8}$$

El tensor "momento cuadrupolar" está definido de la siguiente manera:

$$Q_{\alpha\beta} = \int 3\mu \, x^\alpha \, x^\beta \, dV.$$

Por lo tanto, la métrica se puede expresar en función del momento cuadrupolar del sistema que radía ondas gravitacinales:

$$\psi_{\alpha\beta} = - \frac{2}{3} \frac{G}{R_0 c^4} \ddot{Q}_{\alpha\beta}, \tag{9}$$

donde el apóstrofe significa derivada respecto al tiempo.

Como se dijo antes, las ondas de gravedad tienen asociado un pseudo tensor energía-momento. Para un campo gravitacional general, este pseudo tensor energía-momento viene dado por la fórmula:

$$\begin{aligned} S^{ik} = \frac{c^4}{16\pi G} \Big[ & \left(2 \Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np} - \Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn} - \Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp}\right) \left(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}\right) + \\ & + g^{il}g^{mn}\left(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np}\right) + \\ & + g^{kl}g^{mn}\left(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np}\right) + \\ & + g^{lm}g^{np}\left(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np}\right)\Big]. \end{aligned} \tag{10}$$

Si consideramos las ondas que se propagan en la dirección x, entonces las $\psi_{ik}$ son funciones sólo de t - x/c. Por lo tanto las condiciones a las coordenadas:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \psi_{ik} = 0,$$

se reducen a:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \psi_{0i} + \frac{\partial}{\partial x^1} \psi_{1i} = 0,$$

pero como $\psi$ es función sólo de t - x/c, se cumple que:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\psi_{1i} = -\frac{\partial}{\partial x^0}\psi_{1i},$$

y por lo tanto la expresión anterior se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_{1i} - \frac{\partial}{\partial t}\psi_{0i} = 0.$$

Integrando estas ecuaciones obtenemos las relaciones:

$$\psi^1_0 = \psi^0_0, \qquad \psi^1_1 = \psi^0_1, \qquad \psi^1_2 = \psi^0_2, \qquad \psi^1_3 = \psi^0_3.$$

Si hacemos una transformación de coordenadas de la forma:

$$x'^i = x^i + \lambda^i \qquad \text{con } \lambda = \lambda\ (t - x/c),$$

estas nuevas coordenadas x' también satisfacen las condiciones:

$$\frac{\partial}{\partial x'^k}\psi'^k_i = 0.$$

Por lo tanto se pueden usar estas transformaciones para anular cuatro componentes de $\psi^k_i$; por ejemplo, las siguientes:

$$\psi^0_1 = \psi^0_2 = \psi^0_3 = \psi^2_2 + \psi^3_3 = 0.$$

De esta manera sólo quedan las componentes $\psi_{23}$ y $\psi_{22} - \psi_{33}$. Si ahora observamos que:

$$\psi^n_n = \psi^0_0 + \psi^1_1 + \psi^2_2 + \psi^3_3 = 0,$$

y como además sabemos que:

$$\psi^k_i = h^k_i - \frac{1}{2}\delta^k_i h^n_n,$$

podemos entonces obtener que:

$$\psi^n_n = h^n_n - \frac{1}{2}\delta^n_n h^n_n = h^n_n - 2h^n_n = -h^n_n = 0,$$

y por consiguiente que $\psi^k_i = h^k_i$.

Como las ondas se propagan en la dirección x, el flujo de energía que portan estas ondas se determina por la componente $S_{01}$ de su pseudo tensor energía-momento.

A partir de la fórmula (10), y después de un cálculo laborioso, se obtiene la siguiente expresión:

$$S_{01} = -\frac{c^3}{32\pi G}\left[\frac{\partial}{\partial x}h_{22}\,\frac{\partial}{\partial t}h_{22} + \frac{\partial}{\partial x}h_{33}\,\frac{\partial}{\partial t}h_{33} + 2\,\frac{\partial}{\partial x}h_{23}\,\frac{\partial}{\partial t}h_{23}\right]. \qquad (11)$$

Como $h_{ik} = h_{ik}\,(t - x/c)$, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x}h_{ik} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}h_{ik}$$

y la fórmula (11) se puede escribir como:

$$S_{01} = \frac{c^2}{16\pi G}\left[\frac{1}{2}\left(\dot h_{22}^2 + \dot h_{33}^2\right) + \dot h_{23}^2\right] \qquad (12)$$

y como $h_{22} = -h_{33}$, tenemos:

$$S_{01} = \frac{c^2}{16\pi G}\left[\dot h_{23}^2 + \frac{1}{4}\left(\dot h_{22} - \dot h_{33}\right)^2\right]$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de la métrica obtenidos en la ecuación (9), obtenemos el flujo de energia en la dirección x:

$$c\,S_{01} = \frac{G}{36\pi R_0 c^4}\left[\left(\frac{\dddot Q_{22} - \dddot Q_{33}}{2}\right)^2 + \dddot Q_{23}^{\,2}\right]$$

El flujo de energia para una dirección arbitraria se puede calcular introduciendo un vector unitario $\hat n$, en dicha dirección. La intensidad de energia dentro de un ángulo sólido $d\theta$ está dada por:

$$dI = \frac{G}{36\pi c^5}\left[\frac{1}{4}\left(\dddot Q_{\alpha\beta}\, n_\alpha\, n_\beta\right)^2 + \frac{1}{2}\dddot Q_{\alpha\beta} - \dddot Q_{\alpha\beta}\,\dddot Q_{\alpha\gamma}\, n_\alpha\, n_\beta\right]d\theta$$

La pérdida de energia de la fuente por unidad de tiempo, se obtiene de considerar la intensidad de radiación en todas las direcciones. Para ello, podemos promediar la expresion anterior y multiplicar por $4\pi$.

La pérdida de energia de la fuente por emisión de radiación gravitacional por unidad de tiempo es:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5}\dddot Q_{\alpha\beta}^{\,2} \qquad (13)$$

Esta formula (salvo el factor 1/45), se puede obtener mediante un análisis dimensional.

Si consideramos que la potencia de la radiación es proporcional al cuadrado de la tercera derivada del momento cuadrupolar con respecto al tiempo, entonces sabemos que:

$$\frac{dE}{dt} = k\,\dddot{Q}^2_{\alpha\beta},$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Ahora, podemos encontrar las dimensiones de k como:

$$[k] = \frac{[dE/dt]}{[Q^2_{\alpha\beta}]},$$

es decir, las dimensiones de k son:

$$[k] = \frac{T^3}{M\,L^2}$$

y la única posibilidad para expresar a k en términos de constantes físicas es que:

$$k = z\,\frac{G}{c^5},$$

donde z es una constante numérica.

Durante muchos años, esta fórmula y sobre todo, la forma en que fue obtenida, fue considerada como válida y como una consecuencia de la teoría de la relatividad. No fue sino hasta mediados de la década de los años setenta, que la fórmula fue cuestionada a raíz del descubrimiento del pulsar binario como posible emisor de radiación gravitacional.

EL PULSAR BINARIO

Desde la década de los años sesenta, se han hecho esfuerzos por detectar directamente la radiación gravitacional. Sin embargo, a diferencia de la radiación electromagnética, la cantidad de energía que portan las ondas de gravedad es muy pequeña, lo que hace extremadamente difícil su detección.

El principio en que se basa la detección de este tipo de radiación, es que al ser absorbida la energía que porta, ésta se pueda convertir en energía mecánica del objeto que la absorbió, es decir, en movimiento que pueda ser medido.

El primer tipo de detector, que fue desarrollado por Joseph Weber en 1962, fue el llamado de barra. Este consiste en un gran cilindro metálico cuya frecuencia de vibración es aproximadamente igual a la frecuencia de la radiación que se espera detectar, de manera que, cuando la radiación es absorbida, el cilindro entra en resonancia.

En la actualidad existen algunos detectores de barra funcionando; sin embargo tienen dos tipos de problemas. El primero es que, aún haciendo calculos optimistas, la cantidad de energía que podría llegar a la Tierra desde alguna fuente exterior de radiación, sólo haría desplazarse a la barra alrededor de $10^{-17}$ m. Por lo tanto se necesita equipo muy sofisticado para poder medir estos desplazamientos tan pequeños. Actualmente, se pueden medir desplazamientos del orden de $10^{-18}$ m.

Este problema conlleva al otro: el ruido. Es decir, al ser necesaria tanta sensibilidad en los aparatos que miden desplazamientos, éstos podrían registrar, y de hecho lo hacen movimientos en la barra que son producidos por fenómenos diferentes a la radiación gravitacional. Estos fenómenos son de dos tipos principalmente. Uno de ellos es el movimiento sísmico y el otro es el movimiento térmico en el interior de la barra.

Para atacar el primer problema se han ideado varias formas de aislar sísmicamente al detector. En la actualidad, se planea poner un detector en órbita alrededor de la Tierra.

En cuanto al segundo problema, se han construido detectores de cristal, que posteriormente se enfrían a temperaturas cercanas a los $0^{\circ}K$, con lo que se disminuye considerablemente el movimiento térmico en el interior de la barra. Existe un proyecto de enfriar una barra a una temperatura del orden de algunos miligrados Kelvin.

Además de los de barra, existen los llamados detectores de interferencia. Este tipo de detector consiste en un rayo láser que se divide en dos rayos, cada uno de los cuales rebota en un espejo, para después recombinarse, y formar en una pantalla un patrón de interferencia. Si durante la operación del interferómetro llegara una onda de gravedad al mismo, los espejos se moverían ligeramente y el patrón de interferencia se alteraría. Aunque este tipo de detector no tiene el problema del ruido térmico, su sensibilidad es menor que la del detector de barra. En la actualidad, los Institutos Tecnológicos de California y Massachusetts están a punto de poner en operación el Observatorio Gravitacional de Interferometría Laser (LIGO, por sus siglas en inglés), que se espera sea el primero en detectar, sin lugar a dudas, radiación gravitacional.

El detector consiste en dos tubos metálicos de 4 km de longitud cada uno, colocados perpendicularmente y unidos en uno de sus extremos. En el lugar donde se unen los dos tubos, se difracta un rayo laser en dos, y cada uno de los rayos resultantes recorre uno de los túneles que hay en el interior de cada tubo, en el cual se ha creado un alto vacío ($10^{-9}$ torr), hasta alcansar el otro extremo del túnel, donde es reflejado por un espejo, para así regresar al lugar de donde partió, y formar un patrón de interferencia con el rayo que reccorrió el otro túnel. Para aumentar la sensibilidad del detector, se pretende reflejar cien veces cada uno de los rayos antes de que formen el patrón de interferencia. Cada uno de los espejos está montado sobre una masa de 1 tonelada que está suspendida por un hilo delgado de un sostenedor. Este péndulo de una tonelada que contiene al espejo, está aislado sísmicamente por una serie de filtros consistente en resortes y placas metálicas recubiertas de hule, que absorberan las ondas sismicas antes de que éstas lleguen al espejo. El laser que se usa, que tiene una potencia de 60 watts, es de luz de Argon, y tiene una longitud de onda $\lambda = 0.5152\ \mu m$.

El principio de detección es éste: si llegara una onda de gravedad al detector, digamos paralelamente a uno de los tubos, no afectaría su longitud, pero sí afectaría la longitud del otro, y por lo tanto, el tiempo de recorrido del laser en cada tubo sería diferente y ello se vería reflejado en el patrón de interferencia. Inicialmente, este patrón de interferencia es destructivo, de manera que cuando los dos rayos refractados se recombinan, se destruyen el uno al otro, y no puede pasar ningún fotón, al contador de fotones que se coloca detrás de donde ocurre ésto.

Para estimar cual será la sensibilidad del instrumeto, podemos proceder de la siguiente manera. Cuando llegua al detector una onda gravitacional de la manera que se dijo anteriormente, el desfasamiento que ocurre en el patrón de interferencia es:

$$\Delta\Phi = \frac{2\Delta L}{\bar{\lambda}},$$

donde $\Delta L$ es el cambio de longitud del tubo, por efecto de haber incidido una onda gravitacional, y $\bar{\lambda}$ es la longitud de onda del laser entre $2\pi$. El cambio en la longitud del tubo, lo podemos expresar como:

$$\Delta L = L\, h,$$

donde L es la longitud del tubo y h es la amplitud de la onda gravitacional. Si hacemos que el laser se refleje V veces antes de recombinarse, tenemos:

$$\Delta\Phi = \frac{2VL}{\bar{\lambda}}\, h.$$

Por otro lado, el contador de fotones de LIGO tendrá una sensibilidad apenas por encima del ruido cuántico, es decir, podrá medir desfasamientos como:

$$\Delta\Phi \cong \frac{1}{\sqrt{N\eta}},$$

donde N es el numero de fotones que llegan al contador y $\eta$ es la eficiencia del contador ($\eta \approx 0.5$). Si el tiempo de detección es $\tau$, la energia total de los fotones que llegan al contador en este tiempo es:

$$E = I\tau = 2\pi N h\nu,$$

donde I es la potencia del laser, $\hbar$ es la constante de Planck entre $2\pi$ y $\nu$ es la frecuencia de la onda gravitatoria. Si despejamos a N de aquí, obtenemos:

$$N = \frac{I\tau}{\hbar\nu} = \frac{\bar{\lambda} I\tau}{\hbar c},$$

donde c es la velocidad de la luz. Si el tiempo de detección es la mitad del periodo de la onda gravitacional, que es el tiempo en que queda abierto el paso de fotones antes de que haya otravez interferencia destructiva, entonces $\tau = 1/2f$, donde f la frecuencia de la onda gravitacional. Asi tenemos:

$$N = \frac{\lambda I}{2\hbar c f}.$$

Con este valor de N la ecuación del desfasamiento es:

$$\Delta\Phi \cong \sqrt{\frac{2\hbar c f}{\lambda I \eta}}\ .$$

Si igualamos las dos expresiones para el desfasamiento, y despejamos la amplitud de la onda gravitacional, obtenemos:

$$h \cong \left[ \frac{2\hbar c \lambda}{I \eta} \frac{f}{(2VL)^2} \right]^{1/2}.$$

Si substituimos todos los parametros de LIGO en esta ecuación, y si la onda gravitacinal tiene una frecuencia digamos, de 1000 hz, entonces obtenemos que:

$$h \cong 10^{-23},$$

lo cual implica que el detector puede ser sensible a desplasamientos del orden de $10^{-20}$ m en la longitud de los tubos.

El LIGO ha sido diseñado para detectar radiación gravitacional con frecuencia de entre 10 hz y 10 khz, que es la frecuencia que se espera tenga la radiación proveniente de hoyos negros y sistemas binarios de estrellas de neutrones.

Actualmente, está funcionando un prototipo de LIGO con tubos de 40 m de longitud, el cual ha ayudado a detectar fallas y a hacer mejoras en el detector principal.

Para poder eliminar el ruido local, se plantea construir otros detectores iguales al LIGO en otras partes del mundo.

Hasta ahora, en dos ocasiones se ha anunciado la detección directa de radiación gravitacional. La primera vez fue a mediados de los años 60. En esa ocasión, Weber registró vibraciones simultáneamente en dos detectores que tenía funcionando; uno en Maryland y el otro en Argonne. Las vibraciones coincidían una vez al día en ambos laboratorios.

Auque nunca se pudo establecer una posible fuente de perturbación, tampoco se aceptó que lo que Weber registró era realmente radiación gravitacional. La razón de esto fue que no se conocía (y hasta ahora no se conoce) alguna fuente que emitiera radiación del tipo que Weber dijo haber detectado. Y además, luego de su anuncio, se construyeron detectores en varios lugares del mundo, incluso más complejos, que nunca pudieron confirmar las observaciones hechas por Weber.

La segunda vez que se anunció la detección directa de radiacion gravitacional, fue durante la explosión de la supernova SN 1987a. Cuando ésta ocurrió, los detectores criogénicos de Roma y Maryland estaban funcionando.

G. Pizzella (1989) del laboratorio de Roma, anunció que había detectado radiación gravitacional proveniente de la SN 1987a durante el tiempo de la explosión. Además, al mismo tiempo se anunció la detección de neutrinos provenientes de la explosión.

Sin embargo, como hace notar B. Shutz (1989), para que el detector criogénico de Roma, cuya sensibilidad es de $3x10^{-17}$ m, pudiera detectar esta radiación, se necesitaría que 40 masas solares se transformaran íntegramente en radiación gravitacional, algo que es imposible si la teoría general de la relatividad es correcta. Otras teorías de la gravedad tampoco permiten esta posibilidad.

De esta forma, hasta ahora no se ha establecido inequívocamente la detección directa de radiación gravitacional. Es por esta razón que la evidencia indirecta de la existencia de dicha radiación es de gran importancia. Y en este contexto, el descubrimiento del pulsar binario como posible emisor de radiación gravitacional, llamó poderosamente la atención de los investigadores. Durante el año de 1974, los investigadores R. A. Hulse y J. H. Taylor, se dedicaron a buscar sistemáticamente estrellas pulsares desde el gran radiotelescopio de Arecibo, en Puerto Rico.

Los pulsares fueron descubiertos años antes por Jocelyn Bell y Anthony Hewish, y son estrellas de neutrones que giran a gran velocidad sobre su propio eje. Su caracteristica distintiva es que emiten un haz de radiación electromagnética (principalmente en las frecuencias de radio) dentro de un ángulo sólido muy estrecho. Como la estrella gira a gran velocidad, el haz de radiación gira tambien a gran velocidad, y desde un punto de observación, por ejemplo la Tierra, se observa un pulso luminoso cada vez que el haz pasa por él. De ahí el nombre de pulsar.

Durante sus observaciones, Hulse y Taylor (1975) descubrieron muchos pulsares nuevos. Entre estos nuevos pulsares, descubrieron uno con periodo de pulsación de aproximadamente 59 ms, al que llamaron PSR 1913+16.

Cuando trataron de medir el periodo de la radiación con precisión de 1 $\mu$s, notaron que éste variaba alrededor de 80$\mu$s de un día para otro, un resultado completamente inusual puesto que la variación promedio en este tipo de radiación es del orden de 10 $\mu$s por año. Pronto se dieron cuenta de que ésta variación desproporcionada en el periodo se debía al efecto Doppler, debido a que el pulsar se estaba moviendo junto con una compañera invisible, en órbita alrededor del centro de masa de un sistema doble.

Después de algunos meses de observación, Hulse y Taylor lograron obtener las caracteristicas del sistema binario PSR 1913+16:

| | |
|---|---|
| Periodo orbital: | 27906.98 seg |
| Periodo de pulsación: | 0.059 seg |
| Disminución del período orbital: | $2.3 \times 10^{-12}$ seg/seg |
| Disminución del período de pulsación: | $8.64 \times 10^{-18}$ seg/seg |
| Excentricidad de la órbita: | 0.617 |
| Masa del pulsar: | 1.41 masas solares |
| Masa de la compañera | 1.42 masas solares |

Como podemos apreciar en la tabla, el período orbital no es constante, sino que disminuye con el tiempo. Esto significa que la órbita se está degenerando, es decir, que las dos estrellas estan girando en espiral, y que después de cada periodo estan más cerca una de la otra.

La degeneración orbital implica que el sistema está perdiendo energía.

Varios años antes, en 1963, P. C. Peters y J. Mathius (1963) calcularon a partir de la fórmula cuadrupolar, la cantidad de energía que, via radiación gravitacional, debe emitir un sistema de dos cuerpos en órbita eliptica.

Si el sistema está compuesto por dos cuerpos de masa $m_1$ y $m_2$ respectivamente, y la distancia entre ambos es d, la posición con respecto al centro de masa de cada cuerpo es:

$$r_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) d \qquad r_2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) d.$$

Si ahora consideramos que la órbita está en el plano xy, las únicas componentes del tensor momento cuadrupolar que no se anulan son:

$$Q_{xx} = \mu d^2 \cos^2\theta, \qquad Q_{yy} = \mu d^2 \mathrm{sen}^2\theta, \qquad Q_{xy} = \mu d^2 \mathrm{sen}\theta\cos\theta,$$

donde $\theta$ es el desplazamiento angular. La ecuación de la órbita es:

$$d = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},$$

donde $a$ es el semieje mayor y $e$ es la excentricidad de la órbita.

Si consideramos que los dos cuerpos se mueven según la ley de la gravitación de Newton, la velocidad angular estará dada por:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)a(1-e)^2}{d^2}}.$$

Podemos usar ahora estas dos ecuaciones para obtener las terceras derivadas del tensor Q :

$$\frac{d^3}{dt^3} Q_{xx} = k\ (1 + e\cos\theta)^2\ (2\mathrm{sen}2\theta + 3e\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta^2),$$

$$\frac{d^3}{dt^3} Q_{yy} = -k\ (1 + e\cos\theta)^2\ [2\mathrm{sen}2\theta + e\,\mathrm{sen}\theta(1 + 3\cos^2\theta)],$$

$$\frac{d^3}{dt^3} Q_{xy} = -k\ (1 + e\cos\theta)^2\ [2\cos2\theta - e\cos\theta(1 + 3\cos^2\theta)],$$

donde

$$k = \frac{4G^3 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5(1 - e^2)^5}.$$

Si sustituimos este resultado en la ecuación general de radiación gravitacional:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5}\dddot{Q}^2 = \frac{G}{45c^5}\left[\dddot{Q}^2_{xx} + \dddot{Q}^2_{yy} + \dddot{Q}^2_{xy}\right],$$

obtenemos para $-dE/dt$ :

$$\frac{8G^4}{15c^5}\ \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5(1 - e^2)(1 + e\cos\theta)^4}\left[12(1 + e\cos\theta)^2 + e\,\mathrm{sen}^2\theta\right]$$

Si promediamos esta cantidad sobre un periodo completo, obtenemos el siguiente resultado:

$$-\frac{dE}{dt}=\frac{32G^4}{5c^5}\frac{m_1^2m_2^2(m_1+m_2)}{a^5(1-e)^{7/2}}\left[1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right].$$

Este resultado fue usado por L. W. Esposito y E. R. Harrison (1975) por un lado, y por R. V. Wagoner (1975) por otro, para calcular la degeneración orbital del sistema. El resultado al que se llegó, fué que el período orbital debería variar como:

$$\frac{dP_0}{dt}=-\frac{192\pi G^{5/3}}{5c^5}\left[\frac{P_0}{2\pi}\right]^{-5/3}(1-e^2)^{-7/2}$$
$$\left[1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right]m_1m_2\left[m_1+m_2\right]^{-1/3}.$$

Para el caso de PSR 1913+16, obtenemos que:

$$\frac{dP_o}{dt}=-2.4\times10^{-12}\ \text{seg/seg}.$$

En 1978, y después de cuatro años de observación, Taylor encontró que el período orbital de PSR 1913+16 disminuía de forma muy aproximada a la que predice la ecuación anterior: $\dot{P}_o=-2.3\times10^{-12}$ seg/seg.

La interpretación que Taylor hizo a estas observaciones, fué que efectivamente el pulsar binario estaba emitiendo radiación gravitacional.

Sin embargo, existen otros mecanismos por los cuales el sistema pudiera estar perdiendo energía. Por ejemplo, si el sistema estuviera inmerso en un gas, la fricción entre las estrellas y el gas al moverse éstas, provocaría una pérdida de energía; sin embargo, no se ha observado dispersión en los pulsos de ondas de radio que emite el pulsar, cosa que necesariamente ocurriría si los pulsos tuvieran que atravesar un gas material.

Otro mecanismo por el cual el sistema podría perder energía es el de las fuerzas de marea. Las fuerzas de marea siempre existen en sistemas ligados gravitacionalmente. Sin embargo, su eficacia para disipar energía depende de la naturaleza de los cuerpos que gravitan mutuamente.

Como dijimos antes, el pulsar es una estrella de neutrones, es decir, una estrella muy compacta. Por lo tanto su compañera no puede levantar grandes mareas en su superficie.

En cuanto a la estrella acompañante, su naturaleza es desconocida. Sin embargo, conocemos algunas de sus características que nos pueden dar alguna información al respecto.

La masa de la estrella es del orden de una y media masas solares y por el hecho de que nunca ha eclipsado al pulsar, su diámetro no puede ser mayor a $10^5$ km. Así pues, con estos datos, esta estrella es candidata a ser otra estrella de neutrones o bien una estrella de helio.

Si la estrella fuera de neutrones, las mareas en su superficie serían casi inexistentes, y por lo tanto la pérdida de energía por este fenómeno sería despreciable. Si por el contrario, la estrella fuera de helio, las mareas provocadas por el pulsar en su superficie, serían espectaculares, debido a que el helio es un fluido. Y, puesto que el helio tiene cierto coeficiente de viscosidad, se perdería una gran cantidad de energía en forma de calor, y los cálculos de Taylor se verían en dificultades. No obstante, Taylor (1982), tiene confianza en que esta estrella sea de neutrones, debido a consideraciones teóricas y a los datos de que se dispone.

Damour y Taylor (1991) consideraron todas las posibles causas que pudieran provocar que el periodo orbital del sistema decallera.

En su trabajo, Damour y Taylor tomaron las observaciones del periodo orbital del sistema y del cambio de éste con respecto al tiempo. Después, tomaron el cociente de estas cantidades y obtuvieron:

$$\frac{\dot{P}_{ob}}{P_{ob}} = -87.39\ \alpha, \qquad \text{donde } \alpha = 10^{-18}\,\text{seg}^{-1}.$$

Después, tomaron todos los posibles fenómenos que pudieran tener efecto sobre $\dot{P}/P$, como por ejemplo, la aceleración de la galaxia ($\dot{P}/P = -0.61\alpha$), la existencia de una estrella cercana al pulsar o al Sol ($\dot{P}/P = 0.00004\alpha$), o la pérdida de masa del sistema ($\dot{P}/P = 0.0037\alpha$). Al realizar la suma de todos los efectos ajenos a la emisión de radiación gravitacional, obtuvieron:

$$\frac{\dot{P}_{aj}}{P_{aj}} = -0.60\ \alpha.$$

Por otro lado, la Teoría General de la Relatividad predice para este caso, que este cociente debería ser:

$$\frac{\dot{P}_{RG}}{P_{RG}} = 86.09\ \alpha,$$

por lo tanto, concluyeron que los fenómenos ajenos a la radiación gravitacional, tienen un efecto despreciable en el decaimiento del periodo orbital del sistema, por lo que este decaimiento es debido a que el sistema esta efectivamente emitiendo radiación gravitacional.

Hasta ahora sólo se ha podido observar directamente el decaimiento en el periodo orbital del sistema binario PSR 1913+16.

En 1991, T. D. Padalia (1991) analizó 22 sistemas binarios cuyas estrellas componentes tenían una masa de entre 1 y 2 masas solares cada una. De estos sistemas se conocían sus parámetros principales, como las masas, el periodo orbital, la distancia relativa, etc. Sin embargo, sólo en cuatro de estos sistemas se conocía la excentricidad de la órbita.

Estos sistemas son:

| Sistema | $m_1$ ($M_s$) | $m_2$ ($M_s$) | P. O.(dias) | D. R.($R_s$) | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| AR Lac | 1.30 | 1.29 | 1.983 | 9.12 | 0.11 |
| V 1073 Cyg | 1.37 | 0.47 | 0.786 | 4.39 | 0.12 |
| RW CrB | 1.60 | 0.42 | 0.726 | 4.30 | 0.12 |
| EK Cep | 1.71 | 1.07 | 4.428 | 15.95 | 0.11 |

Donde $m_1$ es la masa del pulsar, $m_2$ es la masa de su compañera, P. O. es el periodo orbital, D. R. es la distancia relativa en radios solares y $e$ es la excentricidad.

Con estos datos, se puede calcular, usando el mismo método que se usó con PSR 1913+16, el cambio en el periodo orbital debido a la emisión de radiación gravitacional ($\dot{P}$).

El cálculo arroja los siguientes resultados:

| Sistema | $\dot{P}$ |
|---|---|
| AR Lac | $- 8.85 \times 10^{-15}$ |
| V 1073 Cyg | $- 1.87 \times 10^{-14}$ |
| RW CrB | $- 2.65 \times 10^{-14}$ |
| EK Cep | $- 2.63 \times 10^{-14}$ |

Para PSR 1913+16, $\dot{P} = - 2.40 \times 10^{-12}$, es decir, entre 100 y 1000 veces mayor que el de los cuatro sistemas anteriormente mencionados. Por esta razón es extremadamente difícil observar directamente el cambio en el periodo orbital de estos sistemas en un tiempo tan corto.

Asi es que debemos esperar más tiempo para poder observar un cambio apreciable en el período orbital de estos sistemas, o bien descubrir otro pulsar binario de caracteristicas similares a las de PSR 1913+16, para poder comparar la observación con la predicción teorica de la radiación gravitacional.

El descubrimiento del sistema binario PSR 1913+16, suscitó entre los investigadores gran interés, sobre todo en lo relacionado con la radiación gravitacional.

En 1976, Jurgen Ehlers et. al. (1976), publicaron un articulo en el que criticaban la forma en que había sido obtenida la fórmula para calcular la pérdida de energía por radiación gravitacional. Ehlers considero que la fórmula habia sida obtenida sin suficiente rigor matemático, lo cual es el tema del siguiente capitulo.

## LOS PROBLEMAS DE LA FÓRMULA CUADRUPOLAR

El descubrimiento de Taylor de que el período orbital del pulsar binario estaba decreciendo consistentemente con lo que predice la teoría general de la relatividad, fue celebrado como un triunfo de la teoría.

Sin embargo en 1976, J. Ehlers y sus colaboradores, en el artículo mencionado anteriormente, criticaron la forma en que Landau había obtenido la fórmula cuadrupolar.

Como el propio Landau menciona en su trabajo, los cálculos que llevó a cabo para obtener la fórmula, son análogos a los que se realizan para el caso de la radiación electromagnética.

El problema es que la teoría electromagnética tiene serias diferencias con la Teoría General de la Relatividad.

En primer lugar, la teoría electromagnética es lineal. Físicamente, ésto significa que el campo producido por una distribución de carga no contiene carga. Por lo tanto, el principio de superposición es válido. En cambio en la teoría del campo gravitacional de Einstein, el campo producido por una distibución de materia si contiene carga gravitatoria (la energía del campo gravitacional) y por lo tanto, crea a su vez un campo gravitacional que invalida al principio de superposición. Matemáticamente, esto significa que la teoría no es lineal.

En segundo lugar, una distribución de carga no distorsiona la métrica del espaciotiempo, por lo que las ondas electromagnéticas viajan en un espaciotiempo plano. Una distribucion de materia por el contrario, si deforma la métrica del espaciotiempo y en consecuencia, las ondas gravitacionales viajan en un espaciotiempo curvo.

Landau no tomó en cuenta estas diferencias, y en la ecuación de onda:

$$\frac{1}{2}\,\Box^2\psi^k_i = \frac{8\pi G}{c^4}\,\tau^k_i,$$

el tensor $\tau^k_i$ no contiene la contribución del campo gravitacional, por un lado y por el otro, el operador d'Alambertiano, $\Box^2$, es usado como si el espaciotiempo fuera plano, es decir, $\Box^2$ está definido como:

$$\Box^2 = \eta^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\frac{\partial}{\partial x^j};$$

pero como el espaciotiempo es curvo, el operador de d'Alambert se debe definir como:

$$\Box^2 = g^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Además de estos problemas, existe el del concepto de energía en la teoría general de la relatividad. El hecho de asociar al campo gravitacional un pseudo tensor energía-momento, es algo que no es aceptado por todos, y es un tema que todavía se encuentra abierto a discución.

Para llegar al resultado deseado, de una manera formalmente aceptable, Ehlers propone un camino a seguir.

El problema es encontrar un modelo de espaciotiempo en el cual se cumplan las siguientes tres condiciones:

1) Que se cumplan las ecuaciones del campo:

$$G_{ij} = 8\pi G\; T_{ij},$$

y por lo tanto, la ecuación:

$$T^j_{i\,;\,j} = 0.$$

2) Que se pueda establecer un modelo razonable de la

fuente de radiación gravitacional. Es decir, que el tensor energía-momento de la fuente pueda escribirse en función de las características físicas de la misma, además de la métrica:

$$T_{ij} = T_{ij}(m_A, g_{ij}).$$

Landau no tuvo necesidad de conocer la forma específica del tensor energía-momento, puesto que pudo relacionarlo con la densidad de energía del sistema:

$$\int \tau_{\alpha\beta}\, dV = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mu x^\alpha x^\beta\, dV$$

Sin embargo, al incluir las consideraciones hechas anteriormente, el modo de proceder de Landau ya no es válido y resulta imposible substituir el tensor energía-momento. Por lo tanto es necesario conocer su forma.

3) Que cumpla con la condición de no absorción de radiación. Es decir, que las ecuaciones no lleven a la contradictoria solución de que el sistema este absorbiendo radiación en lugar de emitirla, que es el resultado correcto.

Después de estas consideraciones, Elhers y sus colaboradores concluyeron que la fórmula cuadrupolar no había sido obtenida satisfactoriamente de acuerdo con la Teoría General de la Relatividad hasta ese momento.

Debido al descubrimiento del pulsar binario y a los resultados anunciados por Taylor, el problema de la justificacion teórica de la fórmula cuadrupolar cobró mucha importancia.

LA JUSTIFICACIÓN DE LA FÓRMULA CUADRUPOLAR

Y

LA FÓRMULA ALTERNATIVA

A partir de 1976, muchos investigadores empezaron a trabajar en este problema, ya sea tratando de justificar la fórmula usual, pero tomando en cuenta las observaciones de Elhers, o bien tratando de encontrar una nueva fórmula.

Cuando Landau encontró la fórmula cuadrupolar, utilizó la aproximación de campo débil, es decir, supuso la existencia de un sistema de coordenadas en el cual la métrica se puede expresar como:

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij},$$

con $h_{ij} \ll 1$.

Sin embargo, el campo gravitacional no puede ser débil cerca de la fuente de radiación, y la aproximación de campo débil implica que el campo es débil en todo el espacio. Por lo tanto, es necesario aproximar la métrica de otra manera.

En 1960 Infeld y Plebansky (1960), desarrallaron un método para aproximar la métrica al que llamaron de movimiento rápido. Este mótodo ha sido utilizado desde los años 70 para el problema de la radiación gravitacional. En él, la métrica se aproxima como:

$$h_{ij} = \eta_{ij} - (g^n_n)^{1/2} g_{ij},$$

y se eligen sobre las coordenadas las condiciones de deDonder:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} h_{ij} = 0,$$

con lo cual, las ecuaciones de Einstein se escriben como:

$$\Box^2 h_{ij} = T_{ij} + \Lambda(g_{ij}),$$

donde $\Box^2$ es el operador de d'Alembert en coordenadas curvas. Para resolver esta ecuación, en el método de movimiento rápido, se sustituye $\Box^2$ por $\Box^2_\eta$, donde $\Box^2_\eta$ es el operador de d'Alembert en coordenadas planas, y la ecuación anterior se sustituye por:

$$\Box^2_\eta h_{ij} = T_{ij} + \Lambda(g_{ij}) + M(h_{ij}),$$

donde se ha incluido el término $M(h_{ij})$ para compensar el hecho de usar el operador de d'Alembert en coordenadas planas.

La nueva ecuación se puede resolver de forma iterativa, hasta el orden deseado, de la siguiente manera:

La solución general de esta ecuación es la función retardada de Green:

$$h_{ij} = \int \frac{\Omega_{ij}(t - x/c)}{r}\, dV,$$

donde $\Omega_{ij} = T_{ij} + \Lambda_{ij} + M(h)$.

Sabemos que se cumplen las leyes de conservación: $T^{ij}{}_{;i} = 0$, y conocemos además el tensor energía-momento en función del tensor métrico: $T_{ij} = T_{ij}(g_{ij})$.

A orden cero, se toma $h^0_{ij} = 0$, y entonces el tensor energía-momento es: $T^0_{ij} = T_{ij}(\eta_{ij})$. Por lo tanto, tenemos a orden cero, que $\Omega^0_{ij} = \Omega_{ij}(T_0, \eta)$.

Si ahora sustituimos este valor en la solución general, obtenemos el siguiente resultado:

$$h^1_{ij} = \int \Omega^0_{ij}\, dV.$$

Es decir, la métrica a primer orden. Si ahora repetimos este procedimiento, podremos encontrar la métrica a segundo orden, y así sucesivamente hasta encontrar el valor de la métrica al orden deseado.

La forma explícita de las ecuaciones de campo, encontrada por M. Walker y C. Will (1980) por un lado, y J. Anderson (1982) por otro, suponiendo las condiciones de deDonder, es:

$$\Box^2 h = -16\pi(-g^n_n)\tau_{ij} - h^{ij}{}_{,r} h_{ij,s} + h_{rs} h_{ij,r,s}$$

Cuando ya se ha encontrado el tensor métrico al orden deseado (su valor es más preciso cuanto mayor es el número de iteraciones realizadas), se pueden utilizar dos métodos para calcular el flujo de energía debido a la radiación gravitacional. El primero consiste en calcular el pseudo tensor energía-momento de la radiación, como lo hizo Landau. El otro consiste en considerar las ecuaciones de movimiento de la fuente radiante.

Como sabemos, el tensor $\tau_{ij}$ cumple con las leyes de conservación:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \tau^k_i = 0.$$

Si separamos la variable temporal de las espaciales, una de estas leyes de conservación es:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tau_{0\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^0} \tau_{00} = 0.$$

Si integramos esta ecuación sobre todo el espacio, obtenemos:

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tau_{0\alpha}\, dV = \frac{\partial}{\partial x^0} \int \tau_{00}\, dV.$$

Al lado izquierdo de la ecuación lo podemos convertir en una integral de superficie:

$$\int \tau_{0\alpha}\, dS_\alpha = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \tau_{00}\, dV.$$

Ahora, $\tau_{00}$ es la energía total de la fuente radiante, por lo tanto, el lado derecho de la ecuación es el cambio de la energía interna del sistema con respecto al tiempo. De manera que la ecuación anterior, se convierte en:

$$\frac{dE}{dt} = \int \tau_{0\alpha}\, dS_{\alpha}.$$

Así que se puede calcular la pérdida de energía por radiación gravitacional de una fuente a partir de su tensor energía-momento, el cual ya hemos calculado iterativamente.

A. Rosemblum (1981) ha trabajado con el método de movimiento rápido, aplicándolo a un caso concreto. Se plantea el problema de dos cuerpos que giran alrededor del centro de masa, cada uno de los cuales es una masa puntual. Para cada uno de estos cuerpos, el tensor energía-momento se puede escribir como:

$$T^{\alpha\beta} = m \int_{-\infty}^{\infty} x'^{\alpha} x'^{\beta} \left[ g_{\gamma\delta} \left( -g^{\lambda}_{\lambda} \right) x^{\gamma} x^{\delta} \right]^{-1/2} \delta^{4}\, dV.$$

donde $x'^{\alpha} = \frac{d}{dt} x^{\alpha}$, m es la masa y $\delta$ es la funcion de Dirac. Esta función aparece debido a que las dos masas son puntuales, y por lo tanto $T^{\alpha\beta} = 0$ en todas partes excepto donde están localizadas las masas.

Con este tensor energía-momento, aplicó el método y encontró el tensor métrico hasta segundo orden en h: $h^{2}_{ij}$.

Posteriormente, Rosemblum utilizó las ecuaciones de movimiento del sistema para calcular el flujo de energía por radiación gravitacional. Después de un cálculo laborioso, llegó a una expresión para la pérdida de energía del sistema radiante por la emisión de este flujo:

$$-\frac{dE}{dt} = A\, \dddot{Q}^{2}_{\alpha\beta}.$$

Este resultado coincide con la fórmula cuadrupolar, pero el valor de la constante A que encontró Rosenblum difiere por

por lo tanto, el lado derecho de la ecuación es el cambio de la energía interna del sistema con respecto al tiempo. De manera que la ecuación anterior, se convierte en:

$$\frac{dE}{dt} = \int \tau_{0\alpha}\, dS_{\alpha}.$$

Así que se puede calcular la pérdida de energía por radiación gravitacional de una fuente a partir de su tensor energía-momento, el cual ya hemos calculado iterativamente.

A. Rosemblum (1981) ha trabajado con el método de movimiento rápido, aplicándolo a un caso concreto. Se plantea el problema de dos cuerpos que giran alrededor del centro de masa, cada uno de los cuales es una masa puntual. Para cada uno de estos cuerpos, el tensor energía-momento se puede escribir como:

$$T^{\alpha\beta} = m \int_{\infty}^{\infty} x'^{\alpha} x'^{\beta} \left[ g_{\gamma\delta} \left( -g_{\lambda}^{\lambda} \right) x^{\gamma} x^{\delta} \right]^{-1/2} \delta^{4}\, dV.$$

donde $x'^{\alpha} = \frac{d}{dt} x^{\alpha}$, m es la masa y $\delta$ es la funcion de Dirac. Esta función aparece debido a que las dos masas son puntuales, y por lo tanto $T^{\alpha\beta} = 0$ en todas partes excepto donde están localizadas las masas.

Con este tensor energía-momento, aplicó el método y encontró el tensor métrico hasta segundo orden en h: $h^{2}_{ij}$.

Posteriormente, Rosemblum utilizó las ecuaciones de movimiento del sistema para calcular el flujo de energía por radiación gravitacional. Después de un cálculo laborioso, llegó a una expresión para la pérdida de energía del sistema radiante por la emisión de este flujo:

$$-\frac{dE}{dt} = A\, \dddot{Q}^{2}_{\alpha\beta}.$$

Este resultado coincide con la fórmula cuadrupolar, pero el valor de la constante A que encontró Rosenblum difiere por un factor de dos con el coeficiente usual. Rosenblum piensa que quizá esto se deba a que sea necesaria otra iteración, y llegar a una expresión de la métrica a tercer orden en h: $h^3_{;j}$.

Por otra parte, Walker y Will (1980) han trabajado con la aproximación de movimiento rápido, aplicándola al problema de dos cuerpos que se mueven alrededor del centro de masa. Pero cada uno de estos cuerpos, es una esféra de fluido perfecto. El tensor energía-momento de cada uno de estos cuerpos, se puede escribir como:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta}$$

con $p = p(\rho)$ y en donde $\rho$ es la densidad, p la presión y $u^\alpha = \frac{d}{dt} x^\alpha$.

De acuerdo con este método, encontraron iterativamente el tensor métrico a segundo orden en h. Posteriormente utilizaron el método del pseudo-tensor energía-momento para calcular el flujo de energía por radiación gravitacional, y llegaron a la siguiente expresión:

$$-\frac{dE}{dt} = A\, \dddot{Q}^2_{\alpha\beta}.$$

Esta expresión coincide con la fórmula cuadrupolar, incluso en el coeficiente A, por lo que Walker y Will afirman que la fórmula cuadrupolar es correcta.

Otro método para encontrar la métrica en el problema de la radiación gravitacional, es el llamado de movimiento lento.

Dentro de este método, el espaciotiempo se divide en dos zonas que se intersectan. Una es la zona cercana, que contiene a la fuente de radiación, y la otra es la zona lejana, que se extiende hasta el infinito e incluye al observador.

El método consiste en resolver las ecuaciones del campo gravitacional independientemente en cada una de las dos zonas y posteriormente, unir las dos soluciones haciéndolas coincidir en la zona de intersección para tener una expresión de la métrica en todo el espaciotiempo.

El método de movimiento lento ya se conocía en el terreno de la teoría electromagnética, y fue introducido a la relatividad por W. Burke (1971). De esta manera, se pueden aprovechar algunas analogías con el electromagnetismo para el caso del campo gravitacional.

Para encontrar la métrica en la zona cercana, se plantea primero la ecuación de Poisson para el campo gravitacional, es decir:

$$\nabla^2 U = 4\pi\rho,$$

donde U es el potencial Newtoniano, y $\rho$ es la densidad de masa. Después, se expande U en serie de potencias de un parámetro pequeño adimensional, definido como $\epsilon = v/c$, donde v es la velocidad típica de la fuente de radiación, de modo que el potencial queda expresado como:

$$U = U_0 + \epsilon\, U_1 + \epsilon^2 U_2 + \ldots$$

Para que $\epsilon$ sea pequeño, se debe cumplir que $v \ll c$, de ahí que el método se llame de movimiento lento. Una vez hecho esto, se resuelve la ecuación de Poisson, considerando cierto número de términos de la serie, es decir, hasta el orden deseado. De esta forma, encontramos a cada término de la serie en función de la distribución de materia: $U_i = U_i(\rho)$. Por lo que U queda en función de $\rho$ y en serie de potencias de

$\epsilon$. Después de hecho esto, se relaciona a $U$ con las componentes del tensor métrico. Asi, el tensor métrico queda expresado en serie de potencias de $\epsilon$.

Para la zona lejana, la ecuación que se debe resolver es:

$$\Box^2\psi_{ik} = -\frac{16\pi G}{c^4}\,\tau_{ik}$$

Como sabemos, la solución de esta ecuación es la de los potenciales retardados:

$$\psi_{ik} = -\frac{4G}{c^4}\int \frac{\tau_{ik}(x, t - x/c)}{x}\, dV.$$

Si ahora expandimos $\tau_{ik}$ en potencias de $\epsilon$, la ecuación anterior se convierte en:

$$\psi_{ik} = -\frac{4G}{c^4}\int \frac{\tau_{ik}(x,t)}{x}\, dV +$$

$$+ \frac{4G}{c^4}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{\epsilon^n}{n!}\,\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int \frac{\tau_{ik}}{x^{n-1}}\, dV.$$

y el tensor métrico queda en función de la distribución de materia y en serie de potencias de $\epsilon$, al igual que en la zona cercana.

El siguiente paso es unir las dos soluciones en la zona intermedia, es decir, hacer que coincidan las dos soluciones, aproximadamente, en la zona intermedia. Esto se puede hacer, encontrando los coeficientes adecuados en las dos expresiones de la métrica. De este modo, se obtiene una expresión para la métrica en todo el espaciotiempo.

S. Chandrasekhar y F. P. Esposito (1971) por un lado, y W. Burke (1971) por otro, han desarrollado este método, considerando esféras de fluido perfecto.

En años recientes, J. Anderson y R. Kates (1982) han aplicado el método para, después de encontrar la métrica, calcular el flujo de energía por radiación gravitacional, usando las ecuaciones de movimiento de la fuente radiante. Han llegado a que la pérdida de energía por este fenómeno es:

$$-\frac{dE}{dt} = A\,\dddot{Q}^2_{\alpha\beta}.$$

Es decir, la fórmula cuadrupolar, sólo que sin determinar el coeficiente A.

T. Futamase y B. Shutz también han usado la aproximación de movimiento lento para el cálculo del flujo de energía de la radiación gravitacional, y han encontrado también que la fórmula cuadrupolar es válida.

En virtud de los métodos de movimiento lento y de movimiento rápido, todos los investigadores están de acuerdo en que la fórmula cuadrupolar es válida para calcular el tensor métrico necesario para evaluar la emisión de radiación gravitacional por sistemas no ligados por gravedad.

Sin embargo, existe una controversia para el caso en que el emisor de la radiación es un sistema ligado por gravedad. Tal es el caso del pulsar binario PSR 1913+16.

El centro de la controversia está en cómo considerar la contribución del propio campo gravitacional en el tensor energía-momento del cuerpo que lo produce. En la ecuación:

$$\frac{1}{2}\,\Box^2\psi^k_{\,i} = -\frac{16\pi G}{c^4}\,\tau^k_{\,i},$$

nunca se había considerado la parte no lineal de $\tau^k_{\,i}$, no porque no se conociera, sino porque se consideraba despreciable comparada con $T^k_{\,i}$.

Físicamente, en un sistema ligado gravitacionalmente, las fuerzas de marea crean fuerzas internas de tensión en cada uno de los cuerpos que forman el sistema. Estas fuerzas no estan incluídas en el tensor energía-momento original, y tradicionalmente habían sido despreciadas.

Sin embargo, a partir de los años 70, se empezó a proponer que las fuerzas de marea en los sistemas ligados por gravedad deberían ser tomadas en cuenta. En 1986, F. I. Cooperstoock y P. H. Lim (1986), publicaron un artículo en el que declaran que la fórmula cuadrupolar falla en el caso de sistemas ligados por gravedad, y presentan una nueva fórmula basada en la consideración de las fuerzas de marea que, afirmaron, es una generalización de la cuadrupolar para este tipo de sistemas.

Cooperstock y Lim trabajaron de la siguiente manera:

Consideraron que la solución a las ecuaciones de campo, para este caso, es la de los potenciales retardados:

$$\psi^k_i = - \frac{4G}{R_0 c^4} \int \tau^k_i \, dV.$$

Hasta este punto, la solución coincide con la que encontró Landau. Pero a partir de este punto, empieza a diferir, pues se incluyen los efectos de marea en $\tau^k_i$. Como ya vimos, al no considerar estas contribuciones, Landau pudo relacionar a $\tau^k_i$ con la densidad de la fuente radiante.

A partir de la ecuación anterior, y usando la relación matemática:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f \, dV = \int \frac{\partial f}{\partial t} \, dV + \oint \frac{v}{1 - v \cdot r} \, dS,$$

se puede ver que, por un lado:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \tau^{0\alpha} x^\beta \, dV = - \int \tau^{\mu\alpha}{}_{,\mu} \, x^\beta \, dV + \oint \frac{v}{1 - v \cdot r} \tau^{0\alpha} x^\beta \, dS.$$

Por otro lado, también puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \tau^{0\alpha}\, x^{\beta}\, dV = \int \left(\tau^{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial t}\tau^{\mu\alpha}\, x^{\beta}\, r_{\mu}\right) dV -$$

$$- \oint \tau^{\mu\alpha}\, x^{\beta}\, dS_{\mu} + \oint \frac{v}{1 - v \cdot r}\, \tau^{0\alpha} x^{\beta}\, dS.$$

Así que se pueden igualar estas dos ecuaciones, y despejando obtenemos:

$$\int \tau^{\alpha\beta}\, dV = \frac{1}{2}\left(c^{\alpha\beta} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q^{\alpha\beta}\right)$$

donde

$$Q^{\alpha\beta} = \int \tau^{00}\, x^{\alpha}\, x^{\beta}\, dV$$

es el momento cuadrupolar y

$$c^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial t}\oint \left(\tau^{0\mu} - \frac{v^{\mu}}{w}\tau^{00} x^{\alpha} x^{\beta}\right) dS +$$

$$- \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\partial}{\partial t}\left(\tau^{0\mu} x^{\alpha} x^{\beta}\, r_{\mu}\right) dV - \int \frac{\partial}{\partial t}\left(\tau^{\mu\alpha} x^{\beta} + \tau^{\mu\beta} x^{\alpha}\right) r_{\mu}\, dV$$

Por lo tanto, el tensor métrico se puede escribir como:

$$\psi^{\alpha\beta} = -\frac{2G}{R_0}\left(c^{\alpha\beta} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q^{\alpha\beta}\right)$$

A partir de esta expresión de la métrica, y usando el método del pseudo tensor energía-momento del campo gravitacional, Cooperstock y Lim llegaron a la nueva fórmula para la pérdida de energía por radiación gravitacional:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2G}{45}\left(\dot{c}_{\alpha\beta} + \dddot{Q}_{\alpha\beta}\right)^2$$

Se puede ver que, cuando consideramos un sistema no ligado gravitacionalmente, esta fórmula se reduce a la fórmula cuadrupolar.

La aplicación estricta de esta fórmula a un sistema binario, tal como PSR 1913+16 es muy difícil, pues el cálculo matemático se complica dramáticamente. Sin embargo, se pueden comparar, en orden de magnitud, las contribuciones lineales a la radiación con las no-lineales.

Para hacer esto, se puede dividir el tensor métrico en dos partes. Una de ellas, la "cuadrupolar" que proviene del momento cuadrupolar del sistema y la otra, la "no-lineal" que proviene de las fuerzas de marea.

$$\psi^{\alpha\beta} = -\frac{2G}{R_0}(\psi_Q^{\alpha\beta} + \psi_N^{\alpha\beta}),$$

donde

$$\psi_Q^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q^{\alpha\beta} \qquad \text{y} \qquad \psi_N^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta}.$$

La intensidad de la radiación es aproximadamente proporcional a la derivada del tensor métrico con respecto al tiempo. Por lo tanto, comparando estas derivadas en orden de magnitud, se pueden comparar la contribución a la radiación de las partes lineal y no lineal del tensor métrico.

Para la parte cuadrupolar tenemos:

$$\dot{\psi}_Q^{\alpha\beta} \simeq \frac{G^2 m^2}{R_0 \alpha \lambda},$$

donde $\alpha$ es la distancia entre los dos cuerpos, y $\lambda$ es el inverso de la frecuencia.

A su vez, la parte no-lineal se puede dividir en dos partes: una que proviene de las integrales de superficie de $c^{\alpha\beta}$ y otra que proviene de las integrales de volumen de $c^{\alpha\beta}$.

La primera es del orden de:

$${}_S\dot{\psi}_N \simeq \frac{G^2 m^2}{R_0 \rho_0^2}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^5$$

La segunda, es del orden de:

$$ {}_{v}\dot{\psi}_N \cong \frac{G^2 m^2 N^3}{R_0 \lambda^2} \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^4 $$

A partir de estas expresiones, podemos ver qué tan importantes son las contribuciones no-lineales, comparadas con las cuadrupolares:

$$ \frac{{}_{v}\dot{\psi}_N}{\dot{\psi}_Q} \simeq N^3 \left(\frac{Gm}{\alpha}\right)^{-5/6} \qquad \text{y} \qquad \frac{{}_{S}\dot{\psi}_N}{\dot{\psi}_Q} \simeq \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^4 \left(\frac{\alpha}{\rho_0}\right)^2 , $$

donde N es el numero de revoluciones que ha dado el sistema.

Para que ${}_{v}\dot{\psi}_N$ sea comparable con $\dot{\psi}_Q$, es necesario que:

$$ N \simeq \left(\frac{Gm}{\alpha}\right)^{-5/6} . $$

En el caso de PSR 1913+16, $\frac{Gm}{\alpha} \simeq 10^{-6}$. Por lo que N debe ser del orden de $10^5$ órbitas que constituye una fracción de la vida del sistema.

Por otro lado, para que ${}_{S}\dot{\psi}_N$ sea comparable con $\dot{\psi}_Q$, se necesita que:

$$ \frac{\rho_0}{\alpha} \simeq \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 $$

Para PSR 1913+16, $\frac{\rho_0}{\alpha} \simeq 10^{-5}$, mientras que $\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 \simeq 10^{-6}$, por lo que resultan aproximadamente del mismo orden.

En los dos casos las contribuciones no-lineales son del mismo orden de magnitud que las cuadrupolares, lo cual hace pensar que de ser correcto el análisis de Cooperstock y Lim, los efectos de marea deberán poderse observar en el futuro. Cooperstock anunció que publicarían próximamente un artículo en el que analizarían con mas detalle la aplicación de su fórmula al pulsar binario, artículo que no ha aparecido hasta la fecha.

Otros investigadores, como por ejemplo Walker y Will (1986), han cuestionado el trabajo de Cooperstock y Lim, argumentando que los efectos de marea en verdad son despreciables, y que nunca han podido observarse. Esta controversia no ha podido resolverse hasta la fecha.

EL SISTEMA PSR B 1257+12 COMO POSIBLE EMISOR

DE RADIACIÓN GRAVITACIONAL

Muy recientemente, Alexander Wolszczan (1992) anunció la existencia de un sistema planetario alrededor del pulsar PSR B 1257+12.

La afirmación de Wolszczan está basada en el retraso periódico de los pulsos provenientes del pulsar, es decir, se interpretan estos retrasos como que el pulsar se está moviendo debido a la presencia de dos planetas que giran alrededor de él. Wolszczan trabajó suponiendo la existencia de dos planetas para explicar el retraso periódico de los pulsos. Las características que estos planetas tendrían que tener para causar el retraso de los pulsos que se ha observado son:

| | Masa(Mt) | P. O. (dias) | D. P.(m) |
|---|---|---|---|
| Planeta A | 3.4 | 66.54 | $5.40 \times 10^{10}$ |
| Planeta B | 2.8 | 98.22 | $7.05 \times 10^{10}$ |

En la tabla, la masa está medida en masas terrestres, P. O. es el periodo orbital en dias y D. P. es la distancia de cada planeta al pulsar en metros.

De ser cierta la existencia de este sistema planetario, los dos planetas deberian interaccionar gravitacionalmente entre si, lo cual se reflejaría en los tiempos de llegada de los pulsos. Esto se ha confirmado en forma observacional, por lo que se ha aceptado la existencia de estos planetas. Sin embargo existe un problema; en la actualidad se considera que un pulsar tiene una probabilidad muy pequeña de tener un sistema planetario a su alrededor, pues un pulsar es una estrella de neutrones, y por lo tanto proviene de la explosión de una supernova, y es difícil de imaginar cómo podría un sistema planetario sobrevivir a semejante explosión, o como podría formarse después de ella. Hasta ahora no hay una teoría aceptada de cómo podría ocurrir lo anterior.

En este trabajo propondremos que el pulsar PSR B 1257+12 está rodeado no por un sistema planetario, sino por un sólo cuerpo y que el sistema así formado, es un emisor de radiación gravitacional.

Nosotros consideraremos que efectivamente la llegada irregular de los pulsos provenientes de PSR B 1257+12 a la Tierra, es debida al movimiento del pulsar provocado por un acompañante, pero que este acompañante no es un sistema planetario, sino un sólo cuerpo al que llamaremos C. Para ser consistente con las observaciones, es necesario que el efecto que cause este cuerpo sobre el pulsar, sea igual al que causarían los dos planetas de Wolszczan sobre el mismo, es decir que la fuerza que ejercerían estos dos planetas sobre el pulsar, debe ser igual a la fuerza que ejerza el cuerpo C sobre éste.

Las fuerzas que ejercerían los planetas A y B sobre el pulsar, serían:

$$F_a = G \frac{M\, m_a}{a^2} \qquad (1a)$$

y

$$F_b = G \frac{M\, m_b}{b^2} \qquad (1b)$$

respectivamente, donde M es la masa del pulsar estimada en

1.4 $m_s$, G es la constante de la gravedad, a y b son las distancias del pulsar a los planetas A y B respectivamente, y $m_a$ y $m_b$ son sus correspondientes masas.

Ahora, la fuerza total que los dos planetas ejercerían sobre el pulsar, sería la suma vectorial de las fuerzas $F_a$ y $F_b$. Las fuerzas totales en las direcciones $x$ y $y$ serían, respectivamente:

$$F_x = F_a \cos\alpha + F_b \cos\beta \tag{2a}$$

y

$$F_y = F_a \operatorname{sen}\alpha + F_b \operatorname{sen}\beta, \tag{2b}$$

donde $\alpha$ y $\beta$ son los ángulos con respecto al eje $x$ de la posición de los planetas A y B, respectivamente. La fuerza total sobre el pulsar, sería:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{3}$$

y la dirección de la fuerza, es decir, el ángulo con respecto al eje $x$ en que se ejerce la fuerza, sería:

$$\gamma = \arc\tan\left(\frac{F_y}{F_x}\right). \tag{4}$$

Una vez conociendo la intensidad y dirección de la fuerza, podemos calcular la posición que debe ocupar el cuerpo C. Para ello, necesitamos conocer la posición de los dos planetas en función del tiempo. Sabemos que se mueven en órbitas elípticas alrededor del pulsar, y que sus excentricidades son $\epsilon_a = 0.0182$ y $\epsilon_b = 0.0264$, respectivamente.

Así pues, la ecuación de la órbita del planeta A, sería:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de donde, al despejar y obtenemos:

$$y = \frac{h}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \tag{5}$$

donde a es el semieje mayor y h el semieje menor de la órbita elíptica.

Para encontrar la posición como función del tiempo, usaremos la ley de las áreas de Kepler. El área que ha barrido el vector de posición del planeta desde que estaba sobre el eje $x$ hasta que ocupa la posición $(x,y)$, es:

$$A = \frac{h}{a}\int_x^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + \frac{1}{2}(x + c)\frac{h}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

donde c es la distancia del origen de coordenadas al foco de la elipse, en donde se encuentra el pulsar. Resolviendo la integral, nos queda:

$$A = \frac{h}{a}\left[\frac{a^2\pi}{4} - \frac{a^2}{2}\text{arc sen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right].$$

Por la segunda ley de Kepler, el área recorrida en una revolución completa dividida entre el periodo, es igual al área barrida por el radio vector desde el origen hasta un punto cualquiera entre el tiempo que le tomó barrerla, es decir:

$$\frac{ah\pi}{T} = \frac{ah}{2t}\left[\frac{\pi}{2} - \text{arc sen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{c}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right],$$

donde T es el periodo y t el tiempo. Si despejamos t de aquí, obtenemos:

$$t = \frac{T}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \text{arc sen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{c}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]. \tag{6}$$

Ésta es una ecuación implícita en la que no se puede despejar $x$ y por lo tanto no podemos obtener a $x$ como función de t.

Haciendo un cálculo análogo al anterior, podemos encontrar a t como función de $x$ para el planeta B:

$$t = \frac{T}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \text{arc sen}\left(\frac{x}{b}\right) + \frac{d}{b^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]. \tag{7}$$

Las cantidades c y d se pueden calcular a partir de los semiejes mayores y de las excentricidades de las órbitas correspondientes, obteniéndose $c = 9.72 \times 10^8$ m y $d = 1.83 \times 10^9$ m.

Debido a que estas ecuaciones no pueden ser despejadas, lo que hicimos fue dar valores a la coordenada $x$ de la posición del planeta A, y con la ecuación de su órbita (5), encontrar su coordenada $y$. Una vez hecho ésto, calculamos en qué tiempo se encontraba en esa posición, usando su ecuación de movimiento (6). Posteriormente encontramos la posición del otro planeta en ese tiempo, usando para ello su ecuación de movimiento (7). Este procedimiento lo ejecutamos 133 veces, es decir, encontramos la posición de los dos planetas en 133 momentos distintos hasta que el planeta A completa 2 órbitas y el planeta B completa 3, debido a que la relación entre sus periodos orbitales es aproximadamente 2 a 3.

Una vez conociendo la posición de los planetas en cada momento, podemos calcular $F_a$ y $F_b$ usando las ecuaciones (1a) y (1b), respectivamente. Usando las ecuaciones (2a) y (2b), podemos calcular $F_x$ y $F_y$ a partir de $F_a$ y $F_b$. Una vez hecho lo anterior, podemos encontrar la intensidad de la fuerza que siente el pulsar usando la ecuación (3), y su dirección usando la ecuación (4). Ya que sabemos la intensidad y direccion de la fuerza, podemos calcular la posición en la que debe estar el cuerpo C en cada uno de los 133 momentos con los que hemos trabajado, de tal forma que cause el mismo efecto sobre el pulsar que causarían los dos planetas. Para ello hacemos uso de la ley de la gravitación universal de Newton:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

de donde, despejando r obtenemos:

$$r = \sqrt{\frac{GMm}{F}}, \qquad (8)$$

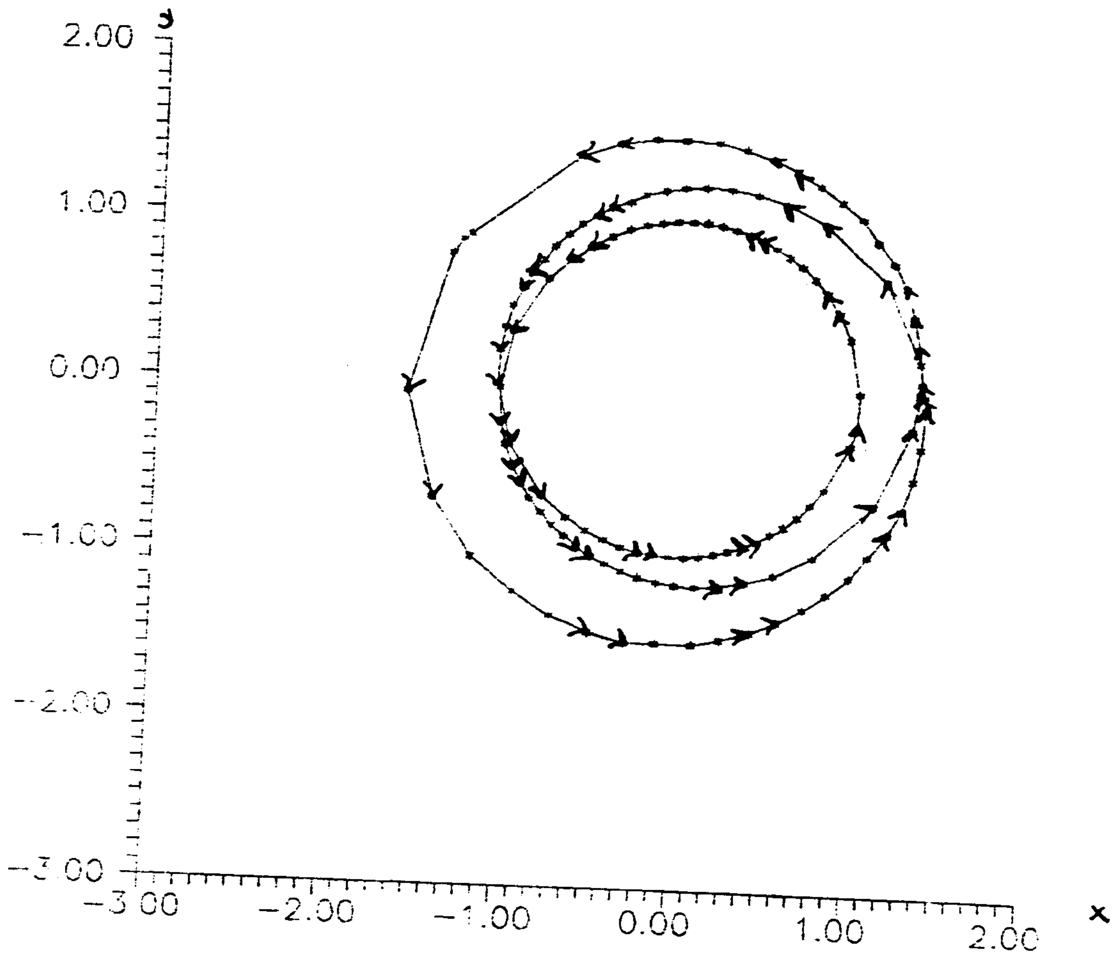
donde m es la masa del cuerpo, G la constante de la gravedad, M la masa del pulsar y F la fuerza. Con este procedimiento obtuvimos la siguiente tabla:

| t ($10^5$ s) | r ($\sqrt{m} \times 10^{-2}$m) | $\theta$ (gr) | t ($10^5$ s) | r ($\sqrt{m} \times 10^{-2}$m) | $\theta$ (gr) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0035 | 0.0 | 90.8 | 1.5713 | 221.5 |
| 3.6 | 1.0015 | 19.2 | 92.1 | 1.5542 | 233.0 |
| 5.4 | 1.0025 | 29.4 | 93.2 | 1.5542 | 242.5 |
| 6.8 | 1.0005 | 36.9 | 94.3 | 1.5542 | 251.3 |
| 8.0 | 1.0015 | 43.5 | 95.2 | 1.5467 | 259.3 |
| 9.0 | 1.0035 | 49.4 | 96.2 | 1.5285 | 266.0 |
| 10.0 | 1.0035 | 54.9 | 97.0 | 1.5285 | 273.8 |
| 11.0 | 1.0005 | 60.0 | 97.9 | 1.5145 | 279.9 |
| 11.8 | 1.0040 | 64.9 | 98.7 | 1.5041 | 286.5 |
| 12.7 | 1.0015 | 69.9 | 99.6 | 1.4957 | 292.8 |
| 13.6 | 1.0015 | 74.7 | 100.4 | 1.4841 | 299.3 |
| 14.4 | 1.0015 | 79.4 | 101.3 | 1.4776 | 305.4 |
| 15.3 | 1.0020 | 84.2 | 102.2 | 1.4760 | 311.9 |
| 16.1 | 1.0025 | 89.0 | 103.0 | 1.4525 | 318.2 |
| 17.0 | 1.0055 | 93.9 | 104.0 | 1.4540 | 324.9 |
| 17.8 | 1.0030 | 98.9 | 105.0 | 1.4389 | 331.8 |
| 18.8 | 1.0071 | 104.2 | 106.0 | 1.4185 | 339.1 |
| 19.7 | 1.0081 | 109.6 | 107.2 | 1.3989 | 347.2 |
| 20.8 | 1.0076 | 115.9 | 108.6 | 1.3884 | 356.4 |
| 21.9 | 1.0091 | 122.7 | 110.4 | 1.3621 | 8.6 |
| 23.2 | 1.0143 | 130.3 | 114.0 | 1.3245 | 31.0 |
| 25.0 | 1.0180 | 141.0 | 117.6 | 1.2804 | 52.4 |
| 28.5 | 1.0325 | 161.1 | 119.4 | 1.2599 | 63.9 |
| 32.0 | 1.0460 | 181.4 | 120.8 | 1.2423 | 71.9 |
| 33.8 | 1.0594 | 192.1 | 122.0 | 1.2300 | 79.2 |
| 35.1 | 1.0660 | 199.9 | 123.0 | 1.2190 | 85.8 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 36.2 | 1.0758 | 206.8 | 124.0 | 1.2080 | 91.6 |
| 37.3 | 1.0866 | 212.9 | 125.0 | 1.1978 | 96.8 |
| 38.2 | 1.0957 | 218.5 | 125.8 | 1.1893 | 102.4 |
| 39.2 | 1.0976 | 224.0 | 126.7 | 1.1696 | 107.0 |
| 40.0 | 1.1084 | 229.2 | 127.6 | 1.1720 | 112.4 |
| 40.9 | 1.1139 | 234.3 | 128.4 | 1.1562 | 117.1 |
| 41.7 | 1.1230 | 239.0 | 129.3 | 1.1516 | 122.2 |
| 42.6 | 1.1330 | 243.9 | 130.1 | 1.1403 | 127.1 |
| 43.4 | 1.1418 | 248.7 | 131.0 | 1.1345 | 132.2 |
| 44.3 | 1.1493 | 253.7 | 131.8 | 1.1208 | 137.2 |
| 45.2 | 1.1578 | 258.8 | 132.8 | 1.1173 | 142.8 |
| 46.0 | 1.1664 | 264.2 | 133.7 | 1.0997 | 147.9 |
| 47.0 | 1.1777 | 269.4 | 134.8 | 1.0950 | 154.5 |
| 48.0 | 1.1885 | 275.1 | 135.9 | 1.0827 | 161.3 |
| 49.0 | 1.1995 | 281.6 | 137.2 | 1.0733 | 169.0 |
| 50.2 | 1.2118 | 288.8 | 139.0 | 1.0594 | 179.8 |
| 51.6 | 1.2300 | 296.7 | 142.5 | 1.0426 | 200.0 |
| 53.4 | 1.2520 | 308.0 | 146.0 | 1.0265 | 219.9 |
| 57.0 | 1.2953 | 329.1 | 147.8 | 1.0217 | 230.7 |
| 60.6 | 1.3304 | 351.2 | 149.1 | 1.0159 | 238.3 |
| 62.4 | 1.3596 | 3.2 | 150.2 | 1.0143 | 245.1 |
| 63.8 | 1.3646 | 12.3 | 151.3 | 1.0148 | 251.4 |
| 65.0 | 1.3868 | 20.3 | 152.2 | 1.0133 | 260.0 |
| 66.0 | 1.4086 | 27.5 | 153.2 | 1.0071 | 261.8 |
| 67.0 | 1.4213 | 34.2 | 154.0 | 1.0112 | 267.4 |
| 68.0 | 1.4185 | 40.7 | 154.9 | 1.0071 | 272.2 |
| 68.8 | 1.4434 | 46.9 | 155.7 | 1.0071 | 277.0 |
| 69.7 | 1.4434 | 53.3 | 156.6 | 1.0071 | 281.9 |
| 70.6 | 1.4525 | 59.3 | 157.4 | 1.0066 | 286.7 |
| 71.4 | 1.4618 | 65.5 | 158.3 | 1.0066 | 291.5 |
| 72.3 | 1.4696 | 71.7 | 159.2 | 1.0086 | 296.5 |
| 73.1 | 1.4809 | 78.0 | 160.0 | 1.0045 | 301.4 |
| 74.0 | 1.4974 | 84.3 | 161.0 | 1.0081 | 306.6 |
| 74.8 | 1.4974 | 91.5 | 162.0 | 1.0076 | 312.2 |
| 75.8 | 1.5127 | 97.9 | 163.0 | 1.0050 | 318.2 |
| 76.7 | 1.5232 | 105.5 | 164.2 | 1.0035 | 324.8 |
| 77.8 | 1.5232 | 114.1 | 165.6 | 1.0081 | 342.3 |
| 78.9 | 1.5303 | 123.9 | 167.4 | 1.0065 | 348.0 |
| 80.2 | 1.5467 | 145.9 | 171.0 | 1.0045 | 362.1 |
| 82.0 | 1.5542 | 149.6 | | | |
| 85.5 | 1.5733 | 182.3 | | | |
| 89.0 | 1.5694 | 206.0 | | | |

Los datos de la tabla nos dan puntos de la órbita delcuerpo C, como se muestra es la gráfica.

Como hemos visto anteriormente, los sistemas dobles son emisores de radiación gravitacional. Por lo tanto, el sistema formado por el pulsar PSR B 1257+12 y el cuerpo C que aquí proponemos, debe estar radiando ondas de gravedad de acuerdo



y
2.00
1.00
0.00
−1.00
−2.00
−3.00
−3.00
−2.00
−1.00
0.00
1.00
2.00
x

con la siguiente fórmula (Peters y Mathius 1963):

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32G^4}{5c^5}\,\frac{M^2m^2(M+m)}{a^5(1-e)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right),$$

donde e es la excentricidad de la órbita y $a$ su semieje mayor. De la tabla obtenemos que $a = 1.5\times10^{-2}\sqrt{m}$ y un cálculo sencillo con los valores de la tabla nos lleva a que $e = 0.41$.

Si sustituimos todos los valores que conocemos en la ecuación anterior, obtenemos la cantidad de energía radiada por el sistema por unidad de tiempo en función de la masa del cuerpo:

$$-\frac{dE}{dt} = 5.21\times10^{-23}\,(1.14\times10^{71})\,\frac{m+2.70\times10^{30}}{\sqrt{m}}\,(1.52)\ \text{jul/seg.} \tag{9}$$

Ahora, como el cuerpo esta en órbita alrededor del pulsar, la fuerza de atracción gravitatoria debe estar en equilibrio con la fuerza centrifuga. La fuerza gravitatoria esta dada por:

$$F = G\,\frac{Mm}{r^2},$$

en tanto que la fuerza centrífuga esta dada por:

$$F = m\,\omega^2\,r,$$

donde $\omega$ es la velocidad angular. Podemos calcular $\omega$ en promedio, dividiendo $2\pi$ entre el tiempo T que tarda el cuerpo en dar una vuelta. Una vez hecho ésto, podemos igualar las ecuaciones anteriores y despejar r. Al hacer ésto obtenemos:

$$r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}.$$

La ecuación anterior es la tercera ley de Kepler y por lo tanto r es el semieje mayor de la órbita. Sustituyendo todas estas cantidades, obtenemos el semieje mayor de la órbita:

$$r = 5.66 \times 10^{12} \text{ m.}$$

De la tabla podemos obtener a r como función de m:

$$r = 1.34 \times 10^{-2} \sqrt{m},$$

y despejando m y sustituyendo r, obtenemos:

$$m = 1.78 \times 10^{25} \text{ kg.}$$

Sustituyendo este valor de m en la ecuación (9), obtenemos:

$$-\frac{dE}{dt} = 5.97 \times 10^{6} \text{ jul/seg.}$$

Esta es la cantidad de radiación gravitacional que debemos esperar venga del pulsar PSR B 1257+12, si existe el cuerpo C que nosotros proponemos.

Si ahora queremos calcular como disminuye el periodo orbital $P_o$ del sistema con el tiempo, podemos utilizar la siguiente fórmula (Taylor y Weisberg 1982):

$$\frac{dP_o}{dt} = -\frac{192\pi G^{5/3}}{5c^5}\left(\frac{P_o}{2\pi}\right)^{-5/3}(1-\epsilon^2)^{-7/2}$$

$$\left(1 + \frac{73}{24}\epsilon^2 + \frac{37}{96}\epsilon^4\right)\left[Mm\,(M+m)^{-1/2}\right].$$

Sustituyendo todos los valores en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\frac{dP_o}{dt} = -5.69 \times 10^{-22} \text{ seg/seg,}$$

que es el cambio en el periodo orbital del sistema producido por el hecho de que el sistema está emitiendo radiación gravitacional.

## CONCLUSIÓN

Después de la discusión presentada en este trabajo, podemos concluir que, en primer lugar, aunque la fórmula cuadrupolar fue desarrollada originalmente suponiendo al espacio-tiempo euclidiano, es aplicable en el caso de que la fuente de radiación gravitacional no sea un sistema ligado, como ha podido demostrarse posteriormente con los métodos de movimiento lento y de movimiento rápido.

Para el caso de que la fuente de radiación sea un sistema ligado gravitacionalmente, está todavía a debate si la fórmula cuadrupolar es válida o no, pues todavía no se resuelve satisfactoriamente el problema de saber si las fuerzas de marea realmente influyen en la radiación.

Por esta razón debemos esperar a que aparezca un método matemático capaz de resolver este problema sin lugar a dudas y también nuevas observaciones, ya sea en PSR 1913+16, o en otros sistemas, que inclinen la balanza a favor de alguno de los dos puntos de vista.

Por otra parte, el cálculo que realizamos sobre la cantidad de energía que debe emitir el sistema PSR B 1257+12 vía radiación gravitacional, nos lleva a concluir que esta energía no es lo suficientemente grande como para causar un decaimiento en el periodo orbital del sistema que pueda ser detectado en la actualidad. De hecho, este decaimiento es $P \approx 1x10^{-22}$ s/s, mientras que para el caso del sistema PSR 1913+16, esta misma cantidad es $P \approx 1x10^{-12}$ s/s, y es el único caso en que se ha podido detectar directamente.

Sin embargo, el cálculo teórico de la cantidad de energía que radían las fuentes de ondas gravitacionales, puede ser útil en el futuro, cuando se logre detectar directamente esta radiación para, por ejemplo, calcular la distancia de la fuente a la Tierra. Si se detectara radiación gravitacional proveniente de alguna fuente y se determinara que la cantidad de energía por segundo que llega al detector por unidad de superficie es $E_S$, entonces la cantidad total de energía que estaría emitiendo la fuente sería:

$$E_T = S\ E_S,$$

donde S es la superficie de la esfera, con centro en la fuente de radiación, y radio igual a la distacia de la fuente a la Tierra. Por lo tanto, $S = 4\pi r^2$. Sustituyendo ésto en la ecuación anterior, obtenemos:

$$E_T = 4\pi r^2 E_S,$$

haciendo el cálculo teórico de $E_T$ y despejando a r de la ecuación anterior, obtendríamos la distancia de la fuente de radiación a la Tierra en función de puros datos conocidos:

$$r = \sqrt{\frac{E_T}{2\pi E_S}}\ .$$

En mi opinión, para el caso de sistemas ligados por gravedad, las fuerzas de marea sólo jugarán un papel importante en la emisión de la radiación cuando el campo gravitacional generado por los cuerpos que conforman el sistema sea realmente intenso y entonces no será válida la fórmula cuadrupolar sino la generalización de Cooperstock y Lim. Pero para sistemas en que el campo gravitacional no sea tan intenso, la fórmula cuadrupolar seguirá siendo válida.

ÍNDICE

## REFERENCIAS

Amaldi M. y Pizzella G. *Ann. N. Y. Acad.* 571, 561 (1989).

Anderson J. y Kates R. *Phys. Rev. D.* 25, 8 (1985).

Burke W. *J. M. Phys.* 12, 3 (1971).

Cooperstoock F. I. y Lim P. H. *Ap. J.* 304, 671 (1986).

Chandrasekhar S. y Esposito F. P. *Ap. J.* 160, 153 (1970).

Damour T. y Taylor J. H. *Ap. J.* 366, 501 (1991).

Davies P. C. W. *En busca de las ondas de gravitación.* Ed. Salvat. (1989).

Ehlers J. A. et al. *Ap. J.* 208, L77 (1976).

Esposito L. W. y Harrison E. R. *Ap. J.* 196, L1 (1975).

Futamase T. y Schutz B. F. *Phys. Rev. D.* 32, 10 (1985).

Hulse R. A. y Taylor J. H. *Ap. J.* 195, L51 (1975).

Infeld L. y Plebansky J. *Movimiento y Relatividad.* Pergamon Press (1960).

Landau L. D. y Lifshitz E. M. *Teoria Clasica de los Campos.* Ed. Reverté (1975).

Padalia T. D. *As. Sp. Sci.* 185, 101, (1991).

Pauli W. *Teoria de la Relatividad.* Ed. Dover (1981).

Peters P. C. y Mathius J. *Phys. Rev.* 131, 1 (1963).

Peters P. C. *Phys. Rev. B* 136, 1224 (1964).

Rosemblum A. *Phys. Rev. L.* 81A, 1 (1981).

Schutz B. F. *Ann. N. Y. Acad.* 571, 27 (1989).

Taylor J. H. y Weisberg J. M. *Ap. J.* 253, 908 (1982).

Vogt R. E. *Proceedings of the 6th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity.* Part 1, 244 (1991).

Wagoner R. V. *Ap. J.* 196, L63 (1975).

Walker M. y Will C. *Phys. Rev. L.* 45, 22 (1981).

Weisberg S. *Gravitation and Cosmology*. N. Y. Wiley (1972).
Wolszczan A. *Science* 264, 538 (1994).