

25
2EJ



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACERCA DE LA REACCION DE RADIACION
DE PARTICULAS CON CARGA ELECTRICA
Y MAGNETICA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

F I S I C O

P R E S E N T A :

LUIS GUILLERMO NASSER BELENDEZ



MEXICO, D. F.



1995

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

FALLA DE ORIGEN

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE

Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) _____

Luis Guillermo Nasser Belendez

con número de cuenta 8852765-3 con el Título: _____

ACERCA DE LA REACCION DE RADIACION DE PARTICULAS CON

CARGA ELECTRICA Y MAGNETICA

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Físico

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
M. en C.	José Luis Jiménez	Ramírez	
Director de Tesis	M. en C.	Ignacio Campos Flores	
Dr.	Stephen Muhl	Saunders	
Dr.	Victor Manuel Romero	Rochin	
Suplente	Dr.	Manuel Torres Labansat	
Suplente			

*Este trabajo está dedicado a la memoria de Habib Nasser,
quien a pesar de haber sido médico siempre
anheló ser matemático.*

Descansa en paz viejo...

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis se elaboró bajo la excelente dirección del Maestro José Luis Jiménez Ramírez, a quien le deseo agradecer nuevamente todas esas horas que pasamos discutiendo y analizando las ideas que finalmente se manifiestan aquí por escrito. Del mismo modo, quisiera también agradecerle todas las tardes que pasé resolviendo problemas de electromagnetismo, primero como su estudiante y después como su ayudante, pues gracias a ellas ahora gozo plenamente de la fiebre del tema.

Agradezco sinceramente al Dr. Victor Romero Rochin su constante apoyo, su tolerancia a ciertas excentricidades de mi parte, su interés y sugerencias durante la revisión de este trabajo, y sobre todo los magníficos cursos que tuve la suerte de llevar con él, debido a los cuales "cuajó" mi vocación por la física teórica y matemática.

Al Dr. Stephen Muhl Saunders por los años de amistad, y un apoyo que en verdad solo se puede describir como una verdadera constante de movimiento. Gracias también por haberme hecho entender de manera contundente que la física experimental es una barrera de potencial impenetrable para mí.

A los demás sinodales, por la generosidad con que aceptaron este trabajo.

Al Chino Lee (¿o quizás debiera decir William Folch?), por su amistad y por todo el café y la risa que compartimos durante innumerables horas talacha. Y ya que estamos en eso de la risa, también le doy gracias al Tirantes, al Enano con Patas de Bolillo, a Emilio, al geriatra del Abuelo, al Zapatov, al Andyman, al Zapién, al Raggi, a los ahuitados de Miguel y el Antman, al Zayas, al Dr. Marcos Ley Koo, y la plétora restante de individuos gracias a los cuales esta carrera fue realmente un placer.

To Gordon Gylchrist, who banned me from O-Level Art, and whom I therefore hold responsible for all this mess. Thanks Gordon, I owe you one...

To Lisl Pleshette, for footing the bills all along. Thanks Lisl, I owe you... plenty!

A mi madre, por haber soportado tan heroicamente a mí y a los otros orates que constituyen mi familia durante tanto tiempo, y por habernos sacado adelante.

Pero principalmente a Ursula, quien sabe bien que fue lo que ella contribuyó, y que de no haber sido por ello no hubiese habido nada que escribir, ni nadie a quien agradecer. Ni nada de nada.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1 - Acerca de los Monopolos Magnéticos.	
1.1 El Modelo de Cuerdas de Dirac.	4
1.2 Ecuaciones de Maxwell y transformaciones de Dualidad.	10
CAPÍTULO 2 - Ecuaciones de Maxwell y la Fuerza de Lorentz.	
2.1 Solución General a las Ecuaciones de Maxwell.	16
2.2 Evaluación de los Potenciales y Campos generados por un Monopolo Magnético en Movimiento Arbitrario.	24
2.3 Monopolo Magnético moviéndose con Velocidad Constante.	33
2.4 Fuerza de Lorentz para un Monopolo Magnético.	36
CAPÍTULO 3 - Acerca de la Reacción de Radiación de Partículas con Carga Eléctrica y Magnética.	
3.1 Cálculo de la Reacción de Radiación por conservación de Energía.	41
3.2 Cálculo de la Auto-Fuerza sobre una Manguerna de Carga Eléctrica en Movimiento Longitudinal, y su relación con la Reacción de Radiación.	46
3.3 Cálculo de la Auto-Fuerza sobre una Manguerna de Carga Eléctrica en Movimiento Transversal.	52
3.4 Evaluación de la Auto-Torca sobre una manguerna de Carga Eléctrica que rota con Velocidad Constante.	59
3.5 Acerca de la Reacción de Radiación de un Monopolo Magnético.	66
3.6 Acerca de la Reacción de Radiación de una Partícula con Carga Eléctrica y Magnética.	
3.6.1 Cálculo de la Auto-Fuerza sobre una Manguerna de Carga Eléctrica y Magnética en Movimiento Longitudinal.	67
3.6.2 Cálculo de la Auto-Fuerza sobre una Manguerna de Carga Eléctrica y Magnética en Movimiento Transversal.	68
3.6.3 Cálculo de la Auto-Torca sobre una Manguerna Rígida de Carga Eléctrica y Magnética, Girando en contra de las Manecillas del reloj con Velocidad Constante Ω .	69
CONCLUSIONES	73
APÉNDICE A Acerca del Teorema de Poynting para Sistemas con Carga Eléctrica y Magnética, y de la Potencia Radiada por un Monopolo Magnético.	76
APÉNDICE B	
A.B.I Potenciación de Series.	80
A.B.II Inversión de Series.	82
BIBLIOGRAFÍA	83

INTRODUCCIÓN

Se conoce bien que una partícula cargada eléctricamente es más difícil de acelerar bajo la influencia de una cierta fuerza que una partícula descargada de igual masa, y esto se debe a que, de acuerdo con las leyes de la electrodinámica, una carga acelerada radia. Dado que esta radiación le resta energía cinética a la partícula, al estudiar el movimiento de cargas aceleradas es usual introducir una fuerza resistiva, llamada *reacción de radiación*, de tal forma que la energía radiada por la carga sea igual al trabajo mecánico que realiza a lo largo de su trayectoria en contra de esta fuerza de "fricción electromagnética".

Existen dos maneras de calcular esta fuerza de reacción de radiación. El primer método, debido a Lorentz [18], intenta abordar el problema del *origen* de esta reacción de radiación, ya que si bien es cierto que debe de estar presente dicha fuerza para poder preservar intactas las leyes de conservación, el origen de esta fuerza no es nada obvio. Básicamente, Lorentz propone que la tercera Ley de Newton no es válida en la electrodinámica, y para mostrarlo considera el movimiento acelerado de una carga con estructura. En este sistema, Lorentz encuentra que la fuerza de una parte de la carga sobre otra *no* es igual y opuesta a la fuerza de la segunda parte sobre la primera, y al integrar estos desbalances de fuerza sobre toda la configuración de carga, encuentra que existe una fuerza neta de la carga sobre sí misma. En particular, Lorentz mostró que para una distribución esférica instantáneamente en reposo, el desequilibrio interno de fuerza tiene una resultante que es consistente¹ con la fórmula de Abraham [2],[5],[7], para velocidades pequeñas.

El otro método, debido a Abraham, es mucho mejor conocido. Esencialmente, el método de Abraham es indiferente a las causas por las cuales existe la reacción de radiación, y consiste en aplicar la conservación de energía y momento a lo largo de la trayectoria de la partícula cargada. La generalización covariante a este resultado se debe a un trabajo de Dirac² [1], en el cual encuentra su bien conocida expresión para la reacción de radiación:

$$I_{rad}^{\mu} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left[\frac{d^2 v^{\mu}}{d\tau^2} - \frac{v^{\mu}}{c^2} \left(\frac{d v^{\alpha}}{d\tau} \frac{d v_{\alpha}}{d\tau} \right) \right]$$

donde v^{μ} es la cuadrivelocidad de la partícula cargada, c es la velocidad de la luz en el vacío, e es la carga de la partícula en movimiento y τ es el tiempo propio.

Estos métodos son de gran importancia para nosotros ya que en este trabajo nos avocaremos al estudio del problema de la reacción de radiación de partículas con carga

¹Claramente, la comparación entre el método de Lorentz y el de Abraham se lleva a cabo haciendo tender a cero el tamaño de la configuración, ya que entonces toda la dependencia estructural desaparece y el resultado de Lorentz debe de ser consistente con el que se encuentra a partir de las leyes de conservación por sí solas.

²La gran ironía de este trabajo es que Abraham fué uno de los más grandes opositores a la teoría de la relatividad.

eléctrica y *magnética*. Naturalmente, se puede objetar de inmediato la validez de resolver este problema ya que no hay ninguna evidencia experimental que indique de manera definitiva la existencia de carga magnética en la naturaleza. Sin embargo, estamos convencidos de la validez del estudio que llevaremos a cabo, simplemente por curiosidad y por su interés desde un punto de vista *académico*. Nuestro objetivo es presentar el desarrollo del problema de la manera más elemental y sencilla posible, y para lograrlo procederemos de la siguiente forma:

i) Supondremos, de manera totalmente arbitraria y caprichosa, la existencia de carga magnética en el universo, y estudiaremos algunas de las implicaciones que esto tendría en el marco de la teoría electromagnética.

ii) Habiéndonos familiarizado de esta forma con las diferencias y semejanzas que existen entre la electrodinámica de monopolos eléctricos y magnéticos, utilizaremos el método de Lorentz para calcular la reacción de radiación de una partícula con ambos tipos de carga, y contrastaremos los resultados obtenidos con los ya conocidos para el caso de cargas netamente eléctricas.

El método de Lorentz no ha gozado de gran popularidad, quizás debido a que los cálculos involucrados resultan bastante tediosos y elaborados. Esto es una pena ya que sus ideas son muy interesantes desde un punto de vista físico, por lo cual nos preguntamos: ¿Habrá manera de emplear el método de Lorentz para calcular la reacción de radiación sobre una partícula cargada acelerada empleando una configuración más sencilla y tratable, desde un punto de vista algebraico, que una distribución esférica de carga? La respuesta a esta pregunta la encontramos en un artículo publicado por David J. Griffiths [6], en el cual propone modelar a la partícula³ cargada como una mancuerna rígida de longitud fija. Colocando la mitad de la carga total de la partícula en cada extremo de la mancuerna, Griffiths muestra que se puede calcular el desequilibrio de fuerza al interior de la configuración directamente, y encuentra que la resultante que se obtiene al hacer tender la longitud del rotor a cero es consistente con la fuerza predicha por la fórmula de Abraham. Nosotros emplearemos aquí el modelo propuesto por Griffiths para calcular la reacción de radiación sobre una partícula acelerada, cargada eléctrica y magnéticamente, y analizaremos varios tipos de movimiento de la mancuerna con la finalidad de exhibir y discutir las virtudes y deficiencias del modelo a la luz de los resultados entregados por éste. Otros autores [17] han propuesto que en sistemas con carga eléctrica y magnética hay cambios notables en los resultados para la reacción de radiación con respecto a los que se obtienen para el caso netamente eléctrico, por lo cual en este trabajo vamos a procurar establecer y precisar dichos cambios. En particular, resultaría interesante determinar si existe alguna orientación del eje del rotor con respecto a su aceleración para la cual no exista reacción de radiación, ya que de ser así, ese único hecho debería de bastarle al más duro y pragmático crítico para interesarse por este "ocioso" problema.

³Al hablar de una partícula, debemos de tener cuidado ya que una partícula *puntual* carece de tamaño, y por ende de estructura, por lo cual el método de Lorentz no es aplicable. Al hablar acerca de partículas nos estaremos refiriendo a partículas sub-atómicas, tales como electrones y protones.

CAPÍTULO 1

Acerca de los Monopolos Magnéticos

La inexistencia de los monopolos magnéticos es una idea ampliamente aceptada en la física, lo cual es razonable en vista de la falta de evidencia experimental que demuestre lo contrario. Sin embargo, aun hay físicos intentando encontrar monopolos magnéticos en la naturaleza mediante experimentos sumamente costosos y sofisticados en el área de física de altas energías. Esta aparente contradicción se debe sin duda a un trabajo realizado por Dirac [1], en el cual propone un sistema que permite modelar un monopolo magnético, y muestra que la cuantización de la carga eléctrica sería una consecuencia directa de la existencia de carga magnética al estudiar la interacción de un monopolo eléctrico con una carga magnética. Dado que hasta la fecha el argumento de Dirac ha sido el mejor intento que se ha hecho en la física por resolver el profundo misterio de la cuantización de la carga eléctrica, la búsqueda de los monopolos magnéticos continúa. Para nosotros, las ideas de Dirac resultan sumamente interesantes, pero como nuestro objetivo es estudiar la reacción de radiación de partículas con carga eléctrica y magnética, debemos primero de habituarnos a la forma que cobran las soluciones a las ecuaciones de la electrodinámica bajo el supuesto de la existencia de carga magnética.

Por tal motivo, en este trabajo nosotros abordaremos el problema de obtener los campos generados por monopolos magnéticos en movimiento directamente a partir de las ecuaciones de Maxwell, y la forma en que lo haremos será simplemente proponiendo la existencia de densidades de carga y corriente magnética, y resolviendo las ecuaciones correspondientes. Este enfoque resulta ser mucho menos extravagante y considerablemente más sencillo de tratar desde un punto de vista matemático que el modelo de cuerdas propuesto por Dirac, además de tener ciertas ventajas adicionales que mostraremos mas adelante.

En este capítulo haremos una breve discusión acerca de estas dos diferentes formas de atacar la electrodinámica de los monopolos magnéticos, para poder así empezar a familiarizarnos con el manejo y con algunas las implicaciones que tiene la existencia de carga magnética en el contexto de la teoría electromagnética.

1.1 El Modelo de Cuerdas de Dirac

Consideremos para empezar nuestra discusión que se tiene un solenoide cuyas espiras son de radio infinitesimal, alineado a lo largo del eje Z. Dicho solenoide tiene uno de sus extremos en el origen y el otro en $z = -\infty$, tal y como se muestra en la figura 1.1.

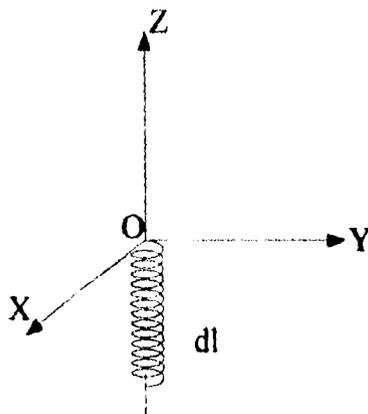


Figura 1.1

Debido a que el radio de las espiras es infinitesimal, la expresión para el potencial vectorial del solenoide es idéntica a la expresión para el potencial vectorial asociado a una cadena de dipolos magnéticos, alineados a lo largo del eje Z, es decir:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = g \int_L \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.1)$$

donde, como es usual, las coordenadas primadas se refieren a las posiciones de las fuentes, las no primadas a las posiciones de los puntos de observación, y donde g es una constante de proporcionalidad con unidades adecuadas por las cuales no nos ocuparemos en este momento.

Esta integral no es difícil de calcular notando que $d\mathbf{l}' = \mathbf{k} dz'$, y que $\mathbf{r}' = \mathbf{k} z'$. De esta forma encontramos que $d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -y dz' \mathbf{i} + x dz' \mathbf{j}$, lo cual implica entonces que podemos reescribir (1.1) como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = g I (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}) \quad (1.2)$$

donde I esta dada por:

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{dz'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2 + y^2)} - \frac{z}{(x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$$

Reemplazando este resultado en (1.2) obtenemos entonces que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{-gy}{\alpha^2} \left(1 - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right) \mathbf{i} + \frac{gx}{\alpha^2} \left(1 - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right) \mathbf{j} \quad (1.3)$$

donde $\alpha^2 = x^2 + y^2$.

Escribiendo la expresión para el potencial vectorial del solenoide en coordenadas esféricas, y recordando que: $\hat{\phi} = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}$, obtenemos finalmente que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = g \frac{(1 - \cos\theta)}{r \sin\theta} \hat{\phi} = \frac{g}{r} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\phi} \quad (1.4)$$

donde claramente $\theta \neq \pi$, pues de lo contrario tendríamos problemas con nuestra función potencial.

El siguiente paso es calcular cuanto vale el campo $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ debido al potencial dado por (1.4). Sabemos que:

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (1.5)$$

y en coordenadas esféricas tenemos que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin\theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & g(1 - \cos\theta) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\hat{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} g(1 - \cos\theta) \right\} \right]$$

$$\therefore \mathbf{B}(\mathbf{r}) = g \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (1.6)$$

Este es un campo magnético radial, y es en todo equivalente al campo producido por un monopolo eléctrico (salvo en aquellos puntos que se encuentran en el núcleo del solenoide, i.e. para $\theta = \pi$) identificando a la constante g como la magnitud de la carga de un monopolo magnético. Este es el sistema propuesto por Dirac para modelar un monopolo magnético de magnitud g , colocado en el extremo de un solenoide infinito (al cual llamaremos *cuerda de Dirac*) como el que se muestra en la figura 1.1.

Es claro que a cada espira infinitesimal del solenoide se le puede asociar un momento dipolar magnético $d\mathbf{m}$, y a partir de la figura observamos que el elemento de potencial vectorial debido a uno de estos elementos ubicado en el punto con vector de posición \mathbf{r}' esta dado por:

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -d\mathbf{m} \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (1.7)$$

Naturalmente, la expresión para el potencial vectorial asociado a la cuerda completa se obtiene al integrar la ecuación (1.7) a lo largo de toda la cuerda, y es:

$$\mathbf{A}_l(\mathbf{r}) = -g \int_l d\mathbf{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (1.8)$$

Ya hemos mostrado que el modelo de cuerdas en efecto reproduce las propiedades del campo que esperaríamos de un monopolo magnético (es un campo radial, con flujo total externo de $4\pi g$, etc...), excepto en puntos que se encuentran sobre la cuerda misma. Podemos pensar que la singularidad que observamos sobre la cuerda es equivalente a un campo \mathbf{B}' muy intenso, el cual solo existe en el interior del solenoide, y que cancela el flujo del monopolo a lo largo de la línea descrita por la cuerda. De esta forma, el campo debido únicamente al monopolo está dado por:

$$\mathbf{B}_{\text{monopolo}} = \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{B}' \quad (1.9)$$

Hasta ahora, no hemos hecho más que exhibir un sistema un tanto extravagante propuesto por Dirac que nos permite modelar un monopolo magnético. El siguiente paso de Dirac fué estudiar la interacción de un electrón con un monopolo magnético, y se topó de inmediato con un terrible problema. Inevitablemente, su modelo sólo le permitía estudiar la interacción de un electrón con un *largo solenoide de diámetro infinitesimal*, y no con un monopolo magnético *per se*. Para lograr superar esta dificultad, Dirac recurrió a la mecánica cuántica, y postuló que el electrón debe de tener una función de onda que se anule sobre la cuerda, para que de esta forma nunca "sienta" el campo singular \mathbf{B}' en el interior del solenoide, y sólo interactúe con el campo \mathbf{B} del monopolo magnético. Claramente, esta propuesta arbitraria fué duramente criticada, pero aquí nos abstendremos de discutir los detalles ya que nuestro objetivo tan solo es ilustrar la condición de cuantización a la que nos conduce este modelo de Dirac, y no el discutir la validez de dicho modelo.

Haciendo entonces a un lado las asperesas del postulado de Dirac, retomemos ahora la expresión (1.8) para el potencial de la cuerda, y antes de estudiar la interacción del electrón con el monopolo magnético veamos si dicha expresión cumple con el requisito de que los resultados que se obtienen a partir de ella no se vean afectados por la colocación de la cuerda en el espacio. Esto es de suma importancia ya que las observables

físicas tales como el campo \mathbf{B} no pueden depender de la ubicación de la cuerda. Para esto, consideremos dos cuerdas L_1 y L_2 como las que se muestran en la figura 1.2

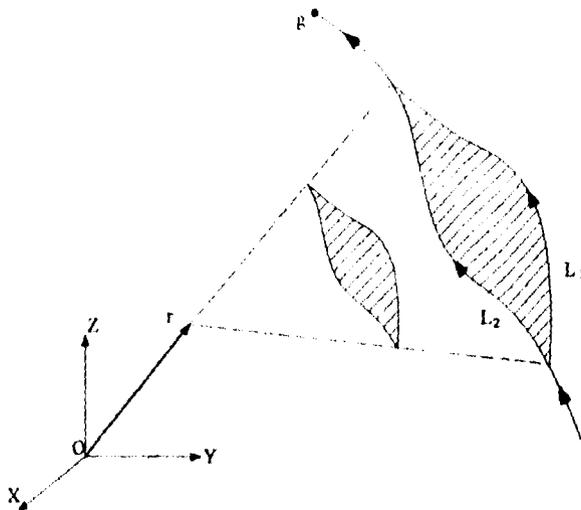


Figura 1.2

La diferencia entre los dos potenciales está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{L_2} - \mathbf{A}_{L_1} &= \int_{L_2} g d\mathbf{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \int_{L_1} g d\mathbf{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ \Rightarrow \mathbf{A}_{L_2} - \mathbf{A}_{L_1} &= \oint_C g d\mathbf{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde el contorno C es el que se aprecia en la figura 1.2. Ahora, es posible reescribir convenientemente la expresión (1.10) recordando los siguientes resultados claves:

En primer lugar, tenemos que si ∇ opera sobre variables no primadas, entonces:

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (1.11)$$

Por otra parte, sabemos a partir de la ley de Biot - Savart que el campo magnético en un punto \mathbf{r} debido a un incremento de corriente $I d\mathbf{l}'$ en el punto \mathbf{r}' está dado por:

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} d\mathbf{l}' \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right)$$

lo que significa que el campo total en el punto \mathbf{r} debido a una espira de corriente descrita por un contorno cerrado C es:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} \oint_C d\mathbf{l}' \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = \frac{I}{c} \nabla \Omega_C \quad (1.12)$$

donde Ω_C es el ángulo sólido subtendido por el contorno C en el punto de observación \mathbf{r} .

Con estos dos resultados vemos entonces que (1.10) cobra la forma:

$$\mathbf{A}_{L,2} = \mathbf{A}_{L,1} + g \nabla \Omega_C \quad (1.13)$$

La ecuación (1.13) muestra que variar las posiciones de las cuerdas corresponde simplemente a una transformación de norma en el potencial vectorial, lo cual a su vez implica que $\mathbf{B}_{L,2} = \mathbf{B}_{L,1}$ ya que el rotacional de un gradiente es siempre nulo.

Ahora, el siguiente paso es calcular la función de onda del electrón en presencia del monopolo. Para ello, es indispensable conocer la forma que cobra el Hamiltoniano del sistema (\hat{H}) que aparece en la ecuación de Schrödinger:

$$\hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t) = E \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.14)$$

Dado que nuestro sistema consta de un electrón de carga $-q$ y masa μ en presencia del campo \mathbf{B} producido por un monopolo magnético, podemos escribir al Hamiltoniano de la siguiente manera [13]:

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \left[\hat{\mathbf{p}} + \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 \quad (1.15)$$

donde el operador de momento está dado por:

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (1.16)$$

y \hbar es la constante de Planck entre 2π .

Esto quiere decir que podemos reescribir la ecuación (1.14) como:

$$\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 \Psi(\mathbf{r}, t) = E \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.17)$$

Es claro que la ecuación (1.17) no es invariante ante transformaciones de norma, ya que si hacemos la transformación $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}, t)$, el Hamiltoniano cambia bruscamente. Para preservar invariancia ante este tipo de transformaciones debemos exigir que cada transformación de norma en el potencial vectorial vaya acompañada por un cambio de fase en la función de onda, es decir:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \Psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow e^{i\Lambda(\mathbf{r}, t)} \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.18)$$

Al hacer esto vemos que:

$$\begin{aligned} \hat{H}\Psi &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} + \frac{q}{c} \nabla f \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} + \frac{q}{c} \nabla f \right) e^{i\Lambda} \Psi \\ &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} + \frac{q}{c} \nabla f \right) \cdot \left[e^{i\Lambda} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \Psi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \Psi + \frac{q}{c} \nabla f \Psi + \hbar \nabla \Lambda \Psi \right) \right] \\ \therefore \hat{H}\Psi &= \frac{e^{i\Lambda}}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} + \frac{q}{c} \nabla f + \hbar \nabla \Lambda \right)^2 \Psi \end{aligned} \quad (1.19)$$

Comparando la ecuación (1.19) con la (1.17) vemos que la única forma de preservar la invariancia ante la transformación dada por (1.18) es que:

$$\Lambda(\mathbf{r}, t) = - \frac{q f(\mathbf{r}, t)}{\hbar c} \quad (1.20)$$

Ahora bien, de la ecuación (1.13) sabemos que para nuestro sistema

$$f(\mathbf{r}, t) = g \Omega_c \quad (1.21)$$

lo que significa que al cambiar la posición de la cuerda de L1 a L2, la fase de la función de onda del electrón se debe de modificar exactamente de la siguiente forma:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \Psi e^{-i \left(\frac{qg}{\hbar c} \right) \Omega_c} \quad (1.22)$$

Sin embargo, notemos que si el electrón atraviesa la superficie S, Ω_c da un repentino brinco de 4π , es decir:

$$\Psi e^{-i \left(\frac{qg}{\hbar c} \right) \Omega_c} \rightarrow \Psi e^{-i \left(\frac{qg}{\hbar c} \right) \Omega_c} e^{-4\pi i \left(\frac{qg}{\hbar c} \right)} \quad (1.23)$$

por lo cual vemos que para que la función de onda sea monovaluada debemos de cumplir con la siguiente relación:

$$4\pi \left(\frac{gq}{hc} \right) = 2n\pi$$

$$\Rightarrow \frac{gq}{hc} = \frac{n}{2} \quad (1.24)$$

donde n es un entero cualquiera diferente de cero.

Este sorprendente resultado se conoce como la *condición de cuantización de Dirac*, y hemos mostrado que, a partir de la expresión (1.8) para el potencial vectorial de una cuerda de Dirac, se obtiene como consecuencia directa de imponer a la ecuación de Schrödinger para un electrón en presencia de un monopolo magnético invariancia ante transformaciones de norma, y de exigir que la función de onda del electrón sea monovaluada al realizar dichas transformaciones.

1.2 Ecuaciones de Maxwell y Transformaciones de Dualidad.

En la sección anterior hablamos acerca del modelo de cuerdas de Dirac, y mostramos de manera muy general la forma en que la naturaleza discreta de la carga eléctrica es consecuencia de la existencia de carga magnética. Sin embargo, a nosotros no nos resulta práctico el modelo de Dirac, ya que describe la interacción de un electrón con un monopolo magnético *en reposo*. Es claro que si intentamos resolver el problema de la interacción de un electrón con una cuerda de Dirac en *movimiento*, al menos vamos a toparnos con serias dificultades matemáticas. Por lo tanto, por el momento vamos a dejar de ocuparnos por *como* modelar los monopolos magnéticos y simplemente vamos a dar por hecho que existen¹. De ser así, podemos entonces escribir las ecuaciones de Maxwell de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_e \quad (1.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_e \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_m \quad (1.27)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_m \quad (1.28)$$

donde \mathbf{E} es el vector de campo eléctrico, \mathbf{D} es el vector de desplazamiento eléctrico, \mathbf{B} es el vector de densidad de flujo magnético, \mathbf{H} es el vector de intensidad del campo magnético, y donde supondremos que las densidades de carga y corriente eléctricas y

¹Notemos que ambas propuestas son igualmente arbitrarias, ya que *tampoco* existen estos solenoides infinitos de diámetro infinitesimal.

magnéticas, ρ_e , \mathbf{J}_e , ρ_m y \mathbf{J}_m respectivamente, satisfacen una ecuación de continuidad de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{e,m} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{e,m} = 0 \quad (1.29)$$

En realidad, aquí se puede objetar la arbitrariedad con que se eligieron los signos de ρ_m y \mathbf{J}_m . Sin embargo, hemos elegido ambos signos positivos ya que de esa manera estas cuatro ecuaciones cumplen con el requisito de tener la debida invariancia ante *transformaciones de dualidad*. Antes de seguir adelante para ver que significa esto, debemos recordar las propiedades de tres tipos de transformaciones, que son las *rotaciones*, las *inversiones espaciales*, y las *inversiones temporales*:

1. Una *rotación* en tres dimensiones es una transformación lineal de las coordenadas de un punto de modo que la suma de los cuadrados de las coordenadas se mantenga constante. A las cantidades físicas se les clasifica como *tensores* de diferentes rangos, dependiendo de como se comporten ante rotaciones. Por ejemplo, si las coordenadas de un punto son $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$, entonces después de la rotación las nuevas coordenadas $\mathbf{r}'(x'_1, x'_2, x'_3)$ se relacionan con las viejas de la siguiente forma:

$$x'_i = \sum_j A_{ij} x_j \quad (1.30)$$

donde los coeficientes A_{ij} son los elementos de una matriz ortogonal, es decir:

$$\sum_i A_{ij} A_{ik} = \delta_{jk} \quad (1.31)$$

y donde δ_{jk} es la delta de Kronecker. Si tenemos el caso en que $\det(\hat{A}) = 1$, entonces decimos que la rotación es *propia* ya que es posible obtenerla a partir de la configuración inicial mediante una secuencia de pasos infinitesimales. Si tenemos que $\det(\hat{A}) = -1$, entonces decimos que la matriz representa una rotación *impropia*, la cual consta de una rotación propia más una reflexión.

Cualquier cantidad física que se transforme de acuerdo a (1.30) se conoce como un tensor de rango uno o *vector*. Esto quiere decir que por ejemplo las posiciones, velocidades y momentos se transforman de acuerdo a esta regla. A cualquier producto punto de vectores, u otra cantidad física que sea invariante ante rotaciones se le conoce como tensor de rango cero o *escalar*. Cualquier cantidad física que se transforme de acuerdo a la siguiente relación:

$$T'_{ij} = \sum_{k,l} A_{ik} A_{jl} T_{kl} \quad (1.32)$$

se conoce como tensor de rango dos, o simplemente como *tensor*. Cabe mencionar que un vector que se obtiene del producto cruz de otros dos solo se transforma de acuerdo a la regla (1.30) si la matriz de transformación \hat{M} produce una rotación propia. Esto se debe a que si tenemos:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$$

entonces,

$$\begin{aligned} A'_i &= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} B_j C_k \\ \Rightarrow A'_i &= \det(\hat{M}) \sum_j M_{ij} A_j \end{aligned} \quad (1.33)$$

por lo que la expresión (1.33) resulta equivalente a la (1.30)

2. Una *inversión espacial* corresponde a una reflexión con respecto al origen de las tres componentes de cada vector de posición, es decir:

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}'_i = -\mathbf{r}_i \quad (1.34)$$

Como en general no es posible obtener una inversión espacial mediante rotaciones propias en el espacio tridimensional, la inversión espacial corresponde a una rotación impropia. Esto quiere decir que los *vectores* cambian de signo bajo inversiones espaciales, pero los productos cruz o *pseudovectores* conservan su signo. Esta es una distinción importante entre vectores ya que nos conduce directamente a una distinción similar entre *escalares* y *pseudoescalares*. Por ejemplo, el triple producto escalar es *escalar* sólo si los tres vectores que lo conforman son todos vectores *polares*, pero si alguno de ellos es un pseudovector (vector *axial*) entonces el triple producto sería un *pseudoescalar*. Las propiedades de transformación de tensores de mayor rango, (y por ende su clasificación en *tensores* y *pseudotensores*) son deducibles a partir de las de los vectores, construyéndolas a partir de productos de las componentes de vectores polares o axiales.

3. Una *inversión temporal* consiste de la transformación:

$$t \rightarrow t' = -t \quad (1.35)$$

Si una cantidad física cambia de signo bajo una inversión temporal, se dice que es *impar* ante este tipo de transformaciones. De lo contrario, se dice que es *par*.

Se puede aprender mucho acerca de los campos electromagnéticos y sus fuentes utilizando estas ideas. Es un ejercicio algebraico muy sencillo mostrar, empeando estas definiciones, los siguientes resultados:

Cantidad Fisica	Rango Tensorial	Comportamiento ante Inversión Espacial.	Comportamiento ante Inversión Temporal.
ρ_e	0	<i>Escalar</i>	<i>Par</i>
ρ_m	0	<i>Pseudoescalar</i>	<i>Impar</i>
\mathbf{J}_e	1	<i>Vector Polar</i>	<i>Impar</i>
\mathbf{J}_m	1	<i>Vector Axil</i>	<i>Par</i>
\mathbf{E}	1	<i>Vector Polar</i>	<i>Par</i>
\mathbf{D}	1	<i>Vector Polar</i>	<i>Par</i>
\mathbf{B}	1	<i>Vector Axil</i>	<i>Impar</i>
\mathbf{H}	1	<i>Vector Axil</i>	<i>Impar</i>

Ahora bien, una *transformación de dualidad* sobre los campos y fuentes está dada por.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' \cos \xi + \mathbf{H}' \operatorname{sen} \xi \quad (1.36)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}' \cos \xi + \mathbf{B}' \operatorname{sen} \xi \quad (1.37)$$

$$\mathbf{H} = -\mathbf{E}' \operatorname{sen} \xi + \mathbf{H}' \cos \xi \quad (1.38)$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{D}' \operatorname{sen} \xi + \mathbf{B}' \cos \xi \quad (1.39)$$

$$\rho_e = \rho'_e \cos \xi + \rho'_m \operatorname{sen} \xi \quad (1.40)$$

$$\rho_m = -\rho'_e \operatorname{sen} \xi + \rho'_m \cos \xi \quad (1.41)$$

$$\mathbf{J}_e = \mathbf{J}'_e \cos \xi + \mathbf{J}'_m \operatorname{sen} \xi \quad (1.42)$$

$$\mathbf{J}_m = -\mathbf{J}'_e \operatorname{sen} \xi + \mathbf{J}'_m \cos \xi \quad (1.43)$$

donde ξ es un ángulo cualquiera (real o imaginario).

Estas transformaciones son de interés ya que si el ángulo es real, tanto formas cuadráticas tales como $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ y $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$, como el tensor de energía-momento, se mantienen invariantes. Además, es fácil mostrar que este tipo de transformación también deja invariantes a las ecuaciones de Maxwell. Por ejemplo, reemplazando (1.37) y (1.40) en (1.25) tenemos:

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}' \cos \xi + \mathbf{B}' \operatorname{sen} \xi) = 4\pi (\rho'_e \cos \xi + \rho'_m \operatorname{sen} \xi)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D}' = 4\pi \rho'_e \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \mathbf{B}' = 4\pi \rho'_m$$

ya que el seno y el coseno son funciones ortogonales.

Del mismo modo, al realizar la transformación de dualidad sobre la ecuación (1.26) obtenemos las dos ecuaciones de Maxwell restantes, con campos y fuentes primadas.

La invariancia de las ecuaciones de Maxwell ante transformaciones de dualidad tiene una profunda importancia para los fines de nuestra discusión acerca de los monopolos magnéticos, ya que demuestra [16] que el hecho de que no se *observe* carga magnética en el universo no implica necesariamente que no *exista*. Esto se deduce de la ecuación (1.41), ya que:

$$\rho_m = 0 \Rightarrow \frac{\rho'_e}{\rho'_m} = \tan \xi = \text{constante} \quad (1.44)$$

A partir de (1.44) vemos que la aparente ausencia de carga magnética es equivalente a pensar que *la razón de carga eléctrica a magnética es una constante universal*. Dicho de otra manera, si todas las partículas cargadas tienen la misma razón de carga eléctrica y magnética, entonces es posible realizar una transformación de dualidad sobre las *verdaderas* ecuaciones de Maxwell ((1.25), (1.26), (1.27), y (1.28)) que nos permita escribirlas en su forma usual con ρ_m y $\mathbf{J}_m = 0$. De hecho, si consideramos que el electrón tiene carga magnética nula, la carga magnética de un nucleón debe ser sumamente pequeña [2] ($\approx 2 \times 10^{-24} e$, donde e es la carga del electrón) ya que el campo magnético promedio sobre la superficie terrestre es de aproximadamente un Gauss.

En este contexto, las propiedades de transformación de ρ_e y ρ_m son de sumo interés. Por lo que hemos visto anteriormente, las simetrías ante inversiones espaciales y temporales de ρ_e son totalmente opuestas a las de ρ_m . Por lo tanto, una consecuencia de la existencia de partículas con ambos tipos de carga sería el hecho de que las inversiones espaciales y temporales ya no podrían ser válidas para las leyes físicas. Ahora, es un hecho bien conocido en la física de partículas que las inversiones espaciales y temporales de hecho resultan ser simetrías no válidas, pero al parecer la violación de estas simetrías es sumamente pequeña y se debe a las interacciones débiles. Hasta la fecha (y en vista de la falta de evidencia experimental que muestre la existencia de monopolos magnéticos), no se han realizado esfuerzos por explicar esta violación a las simetrías utilizando partículas con carga magnética.

En resumen, hasta ahora solo hemos discutido brevemente dos diferentes maneras de abordar el problema de los monopolos magnéticos: Por un lado, hemos mostrado que es posible emplear el sofisticado e ingenioso modelo de cuerdas de Dirac para reproducir el comportamiento de un *monopolo magnético fijo en el espacio*. Sin embargo, para nosotros va a ser de suma importancia saber calcular los campos producidos por una carga magnética en *movimiento arbitrario*, ya que nuestra intención es poder estudiar el problema de la reacción de radiación de partículas con carga eléctrica y magnética. Sinceramente, el modelo de cuerdas de Dirac resulta suficientemente complicado al considerar el caso simple de un monopolo magnético en reposo, y por ende se antoja virtualmente imposible para nuestros propósitos.

Por otra parte, se puede partir directamente de las ecuaciones de Maxwell observando que se pueden generalizar para incluir la presencia de cargas y corrientes magnéticas, en virtud de su invariancia frente a transformaciones de dualidad. Este camino es mucho más manejable desde el punto de vista matemático, y tiene la ventaja adicional de acarrear consigo la equivalencia entre la ausencia de carga magnética que se observa en la naturaleza y la existencia de partículas con ambos tipos de carga. Por estas razones, vamos a adoptar en lo que resta de este trabajo el enfoque de las ecuaciones de Maxwell "generalizadas", para calcular a partir de ellas los campos de un monopolo magnético en movimiento arbitrario.

Capítulo 2

Ecuaciones de Maxwell y La Fuerza de Lorentz.

2.1 Solución General a las Ecuaciones de Maxwell.

Antes de poder abordar el problema de la reacción de radiación de partículas con carga eléctrica y magnética, es necesario conocer los campos producidos por una carga magnética en movimiento, así como la forma que toma la fuerza de Lorentz para una partícula con este tipo de carga. En el capítulo anterior discutimos las razones por las cuales nosotros obtendremos dichos campos directamente a partir de las ecuaciones de Maxwell, sin necesidad de emplear el modelo de cuerdas propuesto por Dirac. En este capítulo resolveremos explícitamente las ecuaciones de Maxwell en presencia de monopolos magnéticos, y estudiaremos la conservación del momento y la energía en sistemas formados por campos electromagnéticos y partículas con carga eléctrica y magnética. La finalidad de ello es encontrar la expresión para la fuerza que siente un monopolo magnético en presencia de campos externos.

Lo que sabemos con certeza antes de comenzar a resolver las ecuaciones de Maxwell para este problema es, citando a Feynman¹, que *las mismas ecuaciones deben tener las mismas soluciones*. Es claro entonces que podríamos simplemente escribir las soluciones a las ecuaciones de Maxwell para el caso netamente eléctrico, e intercambiar símbolos para obtener la solución correspondiente al caso magnético, sin más ni más. Sin embargo, presentaremos el cálculo desarrollado detalladamente, tanto por completéz como por el deseo de mostrar la elegancia y belleza del método de solución.

Consideremos una región del espacio totalmente libre de carga eléctrica, i.e. $\rho_e = 0$ y $\mathbf{J}_e = 0$. En ese caso, las ecuaciones de Maxwell toman la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_m \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

¹Feynman, Leighton, Sands, *The Feynman Lectures On Physics*, sección 12.1 del volumen 2. Cabe mencionar sin embargo que Feynman hace su comentario en un contexto diferente, ya que él lo usa para ilustrar que al resolver las ecuaciones de la electrostática, inadvertidamente se aprende mucho acerca de otras áreas de la física. Esto se debe a una de las coincidencias más hermosas que hemos encontrado al estudiar la naturaleza: *Al aplicar los principios básicos que sabemos se cumplen para toda clase de fenómenos, descubrimos que las ecuaciones que describen situaciones físicas muy distintas resultan ser las mismas.*

A partir de la ecuación (2.1) notamos de inmediato que podemos escribir al campo \mathbf{E} como:

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{A}_m \quad (2.5)$$

donde el potencial vectorial \mathbf{A}_m se debe a flujos de carga magnética, y el signo ha sido elegido negativo de acuerdo con la discusión que se realizó en el capítulo anterior, respecto a la generalización de las ecuaciones de Maxwell mediante transformaciones de dualidad sobre los campos en las ecuaciones habituales.

Reemplazando la expresión (2.5) en la ecuación (2.4) tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\mathbf{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{B} &= -\nabla \phi_m - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por otro lado, combinando las ecuaciones (2.2) y (2.6) tenemos que:

$$\nabla^2 \phi_m + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}_m) = -4\pi \rho_m \quad (2.7)$$

mientras que de las ecuaciones (2.3), (2.5) y (2.6) se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla \times (-\nabla \times \mathbf{A}_m) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi_m - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} \right) - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_m \\ \therefore -\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}_m) + \nabla^2 \mathbf{A}_m &= \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_m}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_m \end{aligned} \quad (2.8)$$

esta última ecuación la podemos reescribir de la siguiente forma:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}_m - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_m + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_m$$

si ahora se impone la norma de Lorentz,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_m + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} = 0 \quad (2.9)$$

la ecuación (2.8) cobra la forma usual de una ecuación de onda inhomogénea:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_m - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_m}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_m \quad (2.10)$$

Del mismo modo, al imponer la norma (2.9) sobre la ecuación (2.7) resulta que el potencial escalar ϕ_m también satisface una ecuación de onda dada por:

$$\nabla^2 \phi_m - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial t^2} = - 4\pi \rho_m \quad (2.11)$$

Habiendo desacoplado las ecuaciones de Maxwell, el siguiente paso consiste en resolver las ecs. (2.10) y (2.11). Para ello vamos a emplear el método de Green, que describiremos a continuación:

Consideremos una ecuación de la siguiente forma:

$$\hat{\Omega} \psi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) \quad (2.12)$$

donde $\hat{\Omega}$ es un operador lineal invertible que actúa sobre las variables no primadas, y $f(\mathbf{r}, t)$ es un término "fuente" cualquiera. Entonces podemos escribir la siguiente expresión que es equivalente a (2.12):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{\Omega}^{-1} f(\mathbf{r}, t) \quad (2.13)$$

Consideremos ahora la siguiente ecuación con el mismo operador $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (2.14)$$

y la expresión equivalente,

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') = \hat{\Omega}^{-1} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \} \quad (2.15)$$

recordando la siguiente propiedad de la delta de Dirac:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int d^3 \mathbf{r}' d t' f(\mathbf{r}', t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (2.16)$$

y reemplazando la ecuación (2.16) en (2.13) tenemos que:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{\Omega}^{-1} \int d^3 \mathbf{r}' d t' f(\mathbf{r}', t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$$

pero como $\hat{\Omega}$ sólo opera sobre las variables no primadas, puede entrar dentro de la integral, y nos queda que:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3 \mathbf{r}' dt' f(\mathbf{r}', t') \hat{\Omega}^{-1}(\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')) \quad (2.17)$$

Si ahora reemplazamos (2.15) en (2.17) obtenemos, finalmente, el siguiente resultado:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3 \mathbf{r}' dt' f(\mathbf{r}', t') G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \quad (2.18)$$

La función G se conoce como la función de Green asociada a la ecuación (2.12), y a partir de ella podemos conocer la solución a las ecuaciones (2.10) y (2.11), siempre y cuando la forma funcional del término fuente nos permita calcular la integral (2.18).

En nuestro problema, el operador $\hat{\Omega}$ es el D'Alambertiano, y los términos fuente son justamente las densidades de carga y corriente magnética. Por lo tanto, para resolver las ecuaciones de los potenciales debemos primero calcular la función de Green que satisface la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t')}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (2.19)$$

donde las variables \mathbf{r}' y t' se refieren a la posición e instante en que se encontraban las fuentes que generaron los campos que medimos en la posición \mathbf{r} al tiempo t .

Sea $\bar{g}(\mathbf{k}, \omega)$ la transformada de Fourier de la función de Green, es decir:

$$\bar{g}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{R}, \tau) \exp(-i\{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) - \omega \tau\}) d^3 R d\tau \quad (2.20)$$

donde hemos introducido las siguientes abreviaciones: $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, y $\tau \equiv t - t'$. A partir de la ecuación (2.20) tenemos que:

$$G(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) - \omega \tau\}) d^3 k d\omega \quad (2.21)$$

aplicando ahora $\hat{\Omega}$ por la izquierda a la ec.(2.21), obtenemos:

$$\hat{\Omega} G(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 k d\omega \bar{g}(\mathbf{k}, \omega) \left(\nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \exp(i\{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) - \omega \tau\})$$

donde $\nabla_{\mathbf{R}}^2$ está dado por:

$$\nabla_R^2 \equiv \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.22)$$

Reemplazando (2.22) en la expresión anterior, realizando todas las derivadas y simplificando el integrando se llega a:

$$\hat{\Omega} G(R, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 k d\omega \tilde{g}(\mathbf{k}, \omega) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \exp(i\{\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega \tau\})$$

Ahora, recordando que la representación integral de la delta de Dirac es:

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(i\xi(x - a)) \quad (2.23)$$

y que:

$$\delta(\mathbf{R}) = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (2.24)$$

se puede ver que:

$$\delta(\mathbf{R}) \delta(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 k d\omega \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega \tau)) \quad (2.25)$$

entonces, a partir de la ecuación (2.14) tenemos:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 k d\omega \tilde{g}(\mathbf{k}, \omega) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \exp(i\{\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega \tau\}) = \frac{1}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 k d\omega \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega \tau))$$

y al igualar los integrandos obtenemos que:

$$\tilde{g}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{c^2}{\omega^2 - c^2 k^2} \right) \quad (2.26)$$

Con este resultado, podemos reescribir la ecuación (2.21) como:

$$G(R, \tau) = \frac{c^2}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega^2 - c^2 k^2} \right) \exp(i\{\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega \tau\}) d^3 k d\omega \quad (2.27)$$

donde ahora sólo resta el evaluar la integral para conocer la función de Green.

$$G(R, \tau) = \frac{c^2}{16\pi^4} \int_0^\tau \Gamma \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})) d^3 k \quad (2.28)$$

donde Γ se define como:

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - c^2 k^2} d\omega \quad (2.29)$$

Para evaluar Γ , consideremos la siguiente integral sobre el plano complejo:

$$\oint_C \frac{e^{-iz\tau}}{(z+ck)(z-ck)} dz = 0 \quad (2.30)$$

en esta integral, C es el contorno que se muestra en la figura 2.1. Es claro a partir de (2.30) que podemos calcular (2.29) aprovechando el comportamiento del integrando al hacer tender R a infinito, y aplicando el Teorema de Residuos de Cauchy [3]. Notamos por inspección que el integrando de (2.30) tiene 2 polos de primer orden sobre el eje real, en $z = ck$ y en $z = -ck$. Los residuos en estos polos están dados por:

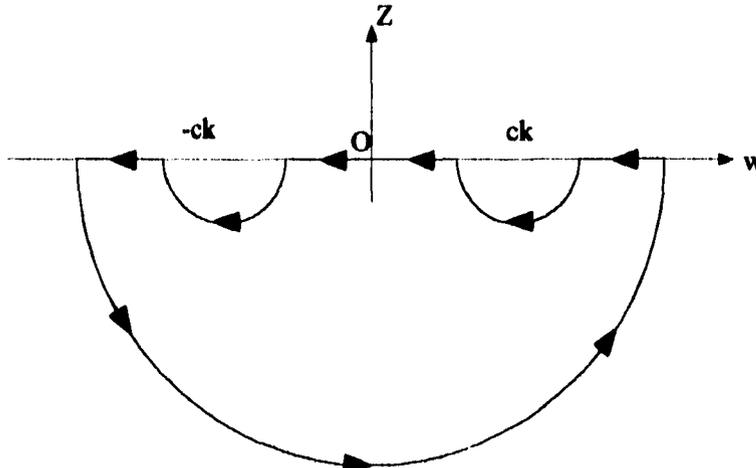


Figura 2.1

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow ck} \left\{ (z - ck) \left(\frac{e^{-iz\tau}}{(z - ck)(z + ck)} \right) \right\} = \frac{e^{-ick\tau}}{2ck} \quad (2.31)$$

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow -ck} \left\{ (z + ck) \left(\frac{e^{-iz\tau}}{(z - ck)(z + ck)} \right) \right\} = \frac{-e^{ick\tau}}{2ck} \quad (2.32)$$

por lo que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - c^2 k^2} d\omega = \frac{i\pi}{2ck} (e^{-ick\tau} - e^{ick\tau}) \quad (2.33)$$

y como sabemos que:

$$\frac{e^{-ick\tau} - e^{ick\tau}}{2} = -\operatorname{senh}(ick\tau) = -i \operatorname{sen}(ck\tau) \quad (2.34)$$

$$\therefore \Gamma = \frac{\pi}{ck} \operatorname{sen}(ck\tau) \quad (2.33)$$

$$\Rightarrow G(R, \tau) = \frac{c^2}{16\pi^4} \left(\frac{\pi}{c}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(ck\tau) \frac{1}{k} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}) d^3k \quad (2.34)$$

Ahora, tenemos que $\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} = kR \cos\theta$ y $d^3k = k^2 \operatorname{sen}\theta dk d\theta d\varphi$, por lo cual:

$$\begin{aligned} G(R, \tau) &= \frac{c}{16\pi^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} k \operatorname{sen}\theta dk d\theta d\varphi \operatorname{sen}(ck\tau) e^{ikR \cos\theta} \\ &= \frac{c}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} k \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(ck\tau) e^{ikR \cos\theta} dk d\theta \\ &= \frac{-c}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \int_1^{-1} k \operatorname{sen}(ck\tau) e^{ikR u} du dk \\ &= \frac{c}{8\pi^2} \int_0^{\infty} k \operatorname{sen}(ck\tau) \frac{(e^{ikR} - e^{-ikR})}{ikR} dk \end{aligned}$$

ahora, reemplazando (2.34) en este último integrando tenemos que:

$$G(R, \tau) = \frac{-c}{8R\pi^2} \int_0^{\infty} dk \left\{ e^{ik(R+c\tau)} + e^{-ik(R+c\tau)} - e^{ik(R-c\tau)} - e^{-ik(R-c\tau)} \right\}$$

Para reescribir esta integral en una forma reconocible, es necesario hacer el siguiente cambio de variable: si el exponente es negativo hacemos $y = -k \Rightarrow dy = -dk$, y si el exponente es positivo hacemos $y = k \Rightarrow dy = dk$.

Con esto encontramos que:

$$G(R, \tau) = \frac{c}{8R\pi^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iy(R-c\tau)} - \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iy(R+c\tau)} \right\} \quad (2.35)$$

y utilizando la identidad (2.23) en (2.35) obtenemos finalmente que la función de Green para nuestro problema es:

$$G(R, \tau) = \frac{c}{4\pi R} [\delta(R-c\tau) - \delta(R+c\tau)] \quad (2.36)$$

A pesar de que la expresión (2.36) es matemáticamente correcta, no es del todo consistente con la realidad física del problema. Esto se debe al hecho de que, dado que R es siempre positivo y c es una constante positiva, la única contribución de la segunda delta de la expresión (2.36) para la función de Green ocurre cuando $\tau = -R/c$. Si consideramos valores negativos de τ , estaríamos permitiendo la posibilidad de observar efectos en instantes previos a sus causas. Como esto es algo totalmente ajeno a la intuición y la experiencia cotidiana, es habitual reescribir la expresión (2.36) para la función de Green de la siguiente manera:

$$G(R, \tau) = \frac{c \Theta(\tau)}{4\pi R} [\delta(R-c\tau)] \quad (2.37)$$

donde la función de Heaveside $\Theta(\tau)$ nos permite evitarnos² este problema, obligando a que τ siempre sea positiva.

Regresando ahora a la ecuación (2.18), vemos que los potenciales que buscamos están dados por:

$$\phi_m = \phi_{m0} + \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' d t' \frac{4\pi \rho_m(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \quad (2.38)$$

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{A}_{m0} + \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' d t' \frac{4\pi \mathbf{J}_m(\mathbf{r}', t')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \quad (2.39)$$

donde ϕ_{m0} y \mathbf{A}_{m0} son las soluciones a las ecuaciones de Maxwell en ausencia de ρ_m y \mathbf{J}_m , y donde también hemos hecho uso de las siguientes dos propiedades de la delta de Dirac:

$$\delta(R - c\tau) = \delta(c\tau - R) \quad (2.40)$$

²Es importante recalcar que nosotros hicimos uso de la función de Heaveside para poder ser consistentes con nuestras ideas de causalidad, pero que dicha función de ninguna manera es consecuencia directa del cálculo de la función de Green.

$$\delta(c\tau - R) = \frac{1}{c} \delta\left(\tau - \frac{R}{c}\right) \quad (2.41)$$

Las ecuaciones (2.38) y (2.39) son totalmente equivalentes a sus contrapartes para el caso bien conocido en el que sólo se considera la presencia de cargas y corrientes eléctricas, [2],[4],[7],[9],[10], tal y como era de esperarse.

2.2 Evaluación de los Potenciales y Campos Generados por un Monopolo Magnético en Movimiento Arbitrario.

En la sección anterior encontramos explícitamente la solución a las ecuaciones de Maxwell para una región del "vacío" donde únicamente existen densidades de carga y corriente magnéticas. A continuación estudiaremos el problema de un monopolo magnético en movimiento arbitrario para conocer las expresiones de los campos que éste genera, que nos serán de suma utilidad cuando abordemos el problema de la reacción de radiación más adelante.

Consideremos un monopolo magnético de magnitud g que se mueve a lo largo de una trayectoria descrita por $\mathbf{r}'(t')$, tal y como se muestra en la figura 2.2.

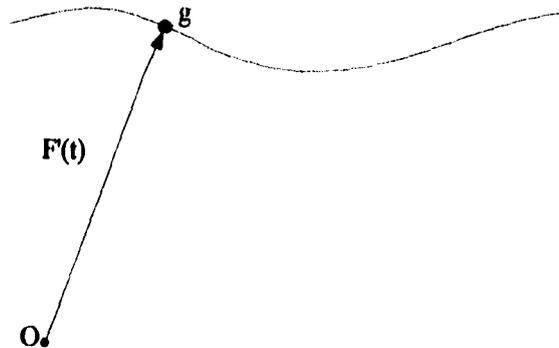


Figura 2.2

En este caso, las densidades de carga y corriente magnética están dadas por:

$$\rho_m(\mathbf{r}', t') = g \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'(t')) \quad (2.42)$$

$$\mathbf{J}_m(\mathbf{r}', t') = g \dot{\mathbf{r}}' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'(t')) \quad (2.43)$$

Esto quiere decir que las integrales a enfrentar para conocer las expresiones de los potenciales son las siguientes:

$$\phi_m = g \int d^3 r' d t' \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \quad (2.44)$$

$$\mathbf{A}_m = \frac{g}{c} \int d^3 r' d t' \frac{\dot{\mathbf{r}}'(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'(t')) \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \quad (2.45)$$

Para poder evaluar estas integrales es preciso tener cuidado, ya que los argumentos de las deltas no permiten una evaluación directa. Sin embargo, podemos resolver el problema de la siguiente forma:

Recordando que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$$

$$\Rightarrow \delta(f) dx = \delta(x - x_0) dx$$

donde es claro que la igualdad sólo se cumple en el caso de que x_0 sea raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Podemos entonces reescribir el último resultado de la manera siguiente:

$$\delta(f(x)) = \delta(x - x_0) \frac{dx}{df} = \delta(x - x_0) \left| \frac{df}{dx} \right|^{-1}$$

$$\Rightarrow \int dx g(x) \delta(f(x)) = \left. \frac{g(x)}{\left| \frac{df}{dx} \right|} \right|_{f(x)=0} \quad (2.46)$$

La ecuación (2.46) nos brinda la manera de empezar a resolver el problema. Hagamos primero la integración sobre t' en (2.44):

Sea,

$$f(t') = t - t' + \frac{R(t')}{c} \quad (2.47)$$

$$\Rightarrow \frac{df(t')}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR(t')}{dt'} \quad (2.48)$$

pero,

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ R \end{pmatrix} \Rightarrow R(t') = \mathbf{R} \cdot \hat{n}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} (\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \\ &= \frac{1}{c} \left\{ \frac{d\mathbf{R}}{dt'} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{R} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt'} \right\}\end{aligned}$$

ahora,

$$\begin{aligned}\mathbf{R} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt'} &= \mathbf{R} \cdot \left\{ \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{r}}{R} - \frac{\mathbf{r}'}{R} \right) \right\} \\ &= \mathbf{R} \cdot \left(\frac{1}{R^2} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{dR}{dt'} - \frac{1}{R} \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \right) \\ \therefore \mathbf{R} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt'} &= - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} dR}{R^2 dt'} - \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \\ &= - \frac{d(\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}})}{dt'} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt'} &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d}{dt'} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= - \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}\end{aligned}$$

por lo que entonces resulta que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} (\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \\ &= \frac{1}{c} \left\{ - 2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} - \frac{d}{dt'} (\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \right\}\end{aligned}$$

de donde vemos que,

$$\begin{aligned}\frac{2}{c} \frac{d}{dt'} (\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}}) &= - \frac{2}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \\ \Rightarrow \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} &= - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{r}}'}{c}\end{aligned}$$

reemplazando este resultado en (2.48) tenemos que

$$\frac{df}{dt'} = 1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\beta} \equiv s \quad (2.49)$$

donde $\vec{\beta} = \dot{\mathbf{r}}'/c$. Usando ahora (2.46) & (2.49) en (2.44) tenemos

$$\begin{aligned}\phi_m &= g \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{s|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Big|_{f(t')=0} \\ &= \frac{g}{c} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{s(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}')} \Big|_{f(t')=0} \frac{1}{(t - t')}\end{aligned}\quad (2.50)$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_m &= gc \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{s|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \vec{\beta} \Big|_{f(t')=0} \\ &= g \int d^3 \mathbf{r}' \left\{ \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{s(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}')} \vec{\beta} \Big|_{f(t')=0} \left(\frac{1}{t - t'} \right) \right\}\end{aligned}\quad (2.51)$$

donde hemos utilizado que $f(t') = 0 \Rightarrow c(t - t') = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}'(t)|$.

A esta última expresión se le suele llamar *Factor de Doppler*, y será de suma importancia más adelante.

Ahora, al evaluar la integral tengamos presente que $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, pues de lo contrario se anula la delta. Esto quiere decir que:

$$\begin{aligned}\phi_m &= \frac{g}{c(t - t')} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{s(\mathbf{r}')} \Big|_{f(t')=0} \\ \Rightarrow \phi_m &= \frac{g}{s(\mathbf{r}, t')R(\mathbf{r}, t')} \Big|_{f(t')=0}\end{aligned}\quad (2.52)$$

y por lo mismo,

$$\mathbf{A}_m = \frac{g\vec{\beta}}{s(\mathbf{r}, t')R(\mathbf{r}, t')} \Big|_{f(t')=0}\quad (2.53)$$

Las ecuaciones (2.52) & (2.53) usualmente se conocen como los *Potenciales Retardados de Lienard - Wiechert*, y son totalmente equivalentes a sus contrapartes para un monopolo eléctrico en movimiento arbitrario, como era de esperarse

El siguiente paso es determinar los campos a partir de los potenciales que fueron calculados. Para ello, lo único que debemos hacer es recurrir a las ecuaciones (2.5) y (2.6)

y realizar todas las derivadas, pero nuevamente hay que proceder con cautela porque las ecuaciones (2.52) y (2.53) se evalúan en los *tiempos retardados*. Por tal motivo hay que considerar cuidadosamente la forma que toman los operadores que aparecen en las ecuaciones (2.5) y (2.6).

Consideremos una función $\psi = \psi(\mathbf{r}, t')$. Es claro que

$$\begin{aligned}\nabla \psi &= \frac{d\psi(\mathbf{r}, t')}{d\mathbf{r}} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \psi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial \mathbf{r}} \\ \Rightarrow \nabla &= \nabla|_r + \nabla t' \frac{\partial}{\partial t'}\end{aligned}\tag{2.54}$$

y por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t'}\tag{2.55}$$

A partir de estos resultados obtenemos entonces que:

$$\begin{aligned}\nabla R &= \nabla(c(t - t')) \\ &= \nabla|_r R + \nabla t' \frac{\partial R}{\partial t'}\end{aligned}\tag{2.56}$$

pero,

$$\begin{aligned}\nabla|_r R &= \frac{(x - x')}{R} \mathbf{i} + \frac{(y - y')}{R} \mathbf{j} + \frac{(z - z')}{R} \mathbf{k} \\ \therefore \nabla|_r R &= \hat{n}\end{aligned}\tag{2.57}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial t'} &= \mathbf{R} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) + \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'} \\ &= \mathbf{R} \cdot \left[\mathbf{R} \left(-\frac{1}{R^2} \right) \frac{\partial R}{\partial t'} + \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'} \right] + \hat{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'}\end{aligned}$$

pero $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')$, y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t'} &= -\frac{R^2}{R^2} \frac{\partial R}{\partial t'} - \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t'} - \hat{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t'} \\ \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial t'} &= -c \hat{n} \cdot \vec{\beta} \end{aligned} \quad (2.58)$$

De este modo, resulta que:

$$\begin{aligned} \nabla|_r R + \nabla t' \frac{\partial R}{\partial t'} &= \hat{n} - c \hat{n} \cdot \vec{\beta} \nabla t' \\ &= -c \nabla t' \end{aligned}$$

y despejando obtenemos

$$\nabla t' = -\frac{\hat{n}}{cs} \quad (2.59)$$

Si ahora aplicamos el factor de Doppler en (2.55) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &= \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t'} [c(t-t')] \\ &= c \left[1 - \frac{\partial t}{\partial t'} \right] \end{aligned}$$

y usando (2.58) en esta última expresión

$$\begin{aligned} c \left[1 - \frac{\partial t}{\partial t'} \right] &= -c \hat{n} \cdot \vec{\beta} \frac{\partial t'}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.59) y (2.60) en (2.54) y (2.55) nos queda que:

$$\nabla = \nabla|_r - \frac{\hat{n}}{cs} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (2.61)$$

&

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (2.62)$$

De este modo tenemos que es posible reescribir las ecuaciones (2.5) y (2.6) como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = - \left(\nabla|_r - \frac{\hat{n}}{cs} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \phi_m - \frac{1}{cs} \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t'} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \left(\nabla|_r - \frac{\hat{n}}{cs} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \times \mathbf{A}_m \quad (2.64)$$

respectivamente, donde ϕ_m y \mathbf{A}_m estan dados por (2.52) y (2.53).

Con todo lo anterior ya estamos listos para calcular directamente los campos a partir de los potenciales, simplemente insertándolos explícitamente en (2.63) y (2.64) para obtener las expresiones buscadas. Sin embargo, este cálculo resulta ser considerablemente elaborado en el álgebra y un tanto aburrido. Por ese motivo, aquí sólo citaremos los resultados que consideramos claves para llegar a las expresiones finales. Habiendo dicho esto, comencemos por calcular $\bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{r}}, t)$:

De las ecuaciones (2.63), (2.52) y (2.53) tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= - \left(\nabla|_r - \frac{\hat{n}}{cs} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \frac{g}{sR} - \frac{1}{cs} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{g\bar{\beta}}{sR} \\ \therefore \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= -g \left(- \frac{1}{(sR)^2} \nabla|_r (sR) + \frac{\hat{n}}{cs^3 R^2} \frac{\partial}{\partial t'} (sR) \right) \\ &\quad + \frac{1}{cs} \left\{ \frac{-\bar{\beta}}{s^2 R^2} \frac{\partial}{\partial t'} (sR) + \frac{1}{sR} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t'} \right\} \end{aligned}$$

y realizando las operaciones se encuentra que

$$\nabla|_r (sR) = \hat{n} - \bar{\beta} \quad (2.65)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t'} (sR) = c \left(\beta^2 - \hat{n} \cdot \bar{\beta} - \frac{R}{c} \hat{n} \cdot \dot{\bar{\beta}} \right) \quad (2.66)$$

Insertando (2.65) y (2.66) en la expresión para $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ encontramos que:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -g \left[\frac{(\hat{n} - \bar{\beta})(\beta^2 - \hat{n} \cdot \bar{\beta} - 1 + \hat{n} \cdot \bar{\beta})}{s^3 R^2} - \frac{\left\{ (\hat{n} - \bar{\beta})(\hat{n} \cdot \dot{\bar{\beta}}) - (1 - \hat{n} \cdot \bar{\beta})\dot{\bar{\beta}} \right\}}{cs^3 R} \right]$$

y como sabemos del análisis vectorial [12] que

$$\hat{n} \times \left[(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] = (\hat{n} - \vec{\beta}) (\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \dot{\vec{\beta}}$$

entonces nos queda

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{g} \left[\frac{(1 - \beta^2)(\hat{n} - \vec{\beta})}{s^3 R^2} + \frac{\hat{n} \times \{ (\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \}}{cs^3 R} \right] \quad (2.67)$$

Del mismo modo, tenemos de (2.53) y (2.64) que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla|_r \times \left(\frac{\mathbf{g}\vec{\beta}}{sR} \right) + \frac{\hat{n}}{cs} \frac{\partial}{\partial t'} \times \left(\frac{\mathbf{g}\vec{\beta}}{sR} \right) \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = & -\mathbf{g} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta_x}{sR} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\beta_y}{sR} \right) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\beta_x}{sR} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta_z}{sR} \right) \right] \mathbf{j} \right. \\ & \left. \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta_y}{sR} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta_x}{sR} \right) \right] \mathbf{k} \right\} \\ & + \frac{1}{Rsc} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (x-x') \frac{\partial}{\partial t'} & (y-y') \frac{\partial}{\partial t'} & (z-z') \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\mathbf{g}\beta_x}{sR} & \frac{\mathbf{g}\beta_y}{sR} & \frac{\mathbf{g}\beta_z}{sR} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ahora, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (sR) &= \frac{(x_i - x'_i)}{R} - \beta_i \\ \Rightarrow \nabla|_r \left(\frac{\mathbf{g}\vec{\beta}}{sR} \right) &= \frac{\mathbf{g}}{s^2 R^2} (\vec{\beta} \times \hat{n}) \end{aligned} \quad (2.69)$$

y de manera similar tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\beta_i}{sR} \right) = \frac{1}{sR} \dot{\beta}_i - \frac{\beta_i}{s^2 R^2} \frac{\partial}{\partial t'} (sR)$$

que al utilizar (2.66) se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\beta_i}{sR} \right) = \frac{1}{sR} \dot{\beta}_i - \frac{c \beta_i}{s^2 R^2} \left(\beta^2 - \hat{n} \cdot \vec{\beta} - \frac{R}{c} \hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right)$$

$$\Rightarrow \hat{n} \frac{\partial}{\partial t'} \times \frac{\vec{\beta}}{sR} = \frac{1}{sR} \left[\left(\mathbf{R} \times \dot{\vec{\beta}} \right) + \frac{c}{sR} \left(\beta^2 - \hat{n} \cdot \vec{\beta} - \frac{R}{c} \hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right) (\vec{\beta} \times \mathbf{R}) \right]$$

Entonces, a partir de éste resultado y de (2.69) encontramos que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left\{ \frac{g}{cR s^2} \left[\left(\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}} \right) - \frac{c}{sR} \left(\beta^2 - \hat{n} \cdot \vec{\beta} - \frac{R}{c} \hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right) (\hat{n} \times \vec{\beta}) \right] - \frac{g}{s^2 R^2} (\vec{\beta} \times \hat{n}) \right\}$$

Agrupando,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{n} \times \left\{ \frac{g \vec{\beta}}{s^3 R^2} (1 - \beta^2) + \frac{g}{cR s^3} \left[\dot{\vec{\beta}} (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) + \vec{\beta} (\hat{n} \cdot \vec{\beta}) \right] \right\}$$

Es claro que al corchete de esta última expresión le podemos sumar cualquier factor de \hat{n} sin que ello altere la ecuación en lo más mínimo. En particular, si le agregamos $\frac{g \hat{n}}{cR s^3} (\hat{n} \cdot \vec{\beta})$ y $\frac{g \hat{n}}{s^3 R^2} (1 - \beta^2)$ al sumando dentro del corchete y reorganizamos todo cuidadosamente encontramos finalmente que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\hat{n} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2.70)$$

Las ecuaciones (2.68) y (2.70) son las expresiones para los campos que estábamos buscando, y nos serán de suma utilidad más adelante al abordar de lleno el problema de la reacción de radiación.

2.3 Monopolo Magnético moviéndose con Velocidad Constante.

Antes de pasar a estudiar las leyes de conservación en sistemas que contienen monopolos magnéticos, sería conveniente estudiar un ejemplo donde se apliquen los resultados obtenidos en la sección anterior.

El problema de un monopolo magnético que se mueve con velocidad uniforme es el ejemplo más conveniente que podemos estudiar para empezar a adquirir familiaridad con nuestros resultados, ya que es el menos engoroso desde el punto de vista algebraico, y su contraparte eléctrica es muy bien conocida.

Por tales motivos, consideremos que tenemos una carga magnética puntual que se mueve con velocidad v a lo largo del eje X del sistema de referencia que se muestra en la figura 2.3:

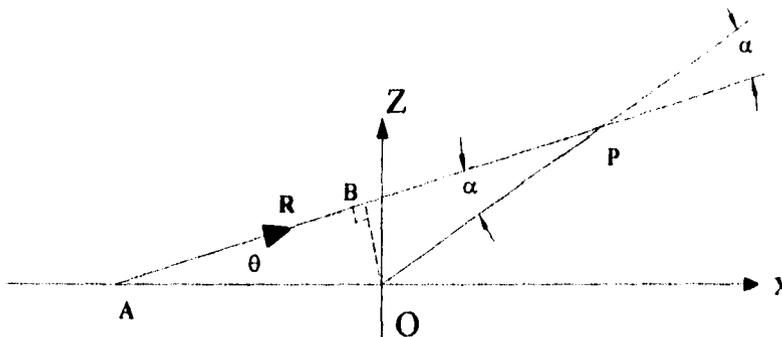


Figura 2.3

Lo que buscamos es el campo \mathbf{B} en el punto P al tiempo $t = 0$.

Recordando que el Factor de Doppler se escribe como:

$$R = c(t - t') \quad (2.71)$$

se ve que la posición e instante en que se encontraba el monopolo magnético (de modo que notemos su campo en P al tiempo $t = 0$) están relacionadas de la siguiente forma:

$$t' = -\frac{R}{c} \quad (2.72)$$

De la figura, es claro que

$$|AO| = |vt'| = \left| \frac{-vR}{c} \right| = \beta R$$

y que

$$\beta R \cos\theta = AB \Rightarrow AB = \vec{\beta} \cdot \mathbf{R}.$$

Esto quiere decir entonces que

$$BP = R - \mathbf{R} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}} = R(1 - \hat{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}})$$

De la figura tambien se observa que

$$r^2 = (BP)^2 + (BO)^2$$

pero

$$BO = \beta R \text{ sen}\theta$$

asi que

$$r^2 = R^2 (1 - \hat{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}})^2 + \beta^2 R^2 \text{ sen}^2 \theta$$

y como

$$r^2 = x^2 + z^2$$

entonces

$$x^2 + z^2 - \beta^2 R^2 \text{ sen}^2 \theta = R^2 (1 - \hat{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}})^2$$

pero como

$$z = R \text{ sen}\theta$$

resulta que

$$\frac{1}{\gamma^2} (\gamma^2 x^2 + z^2) = R^2 (1 - \hat{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}})^2 \quad (2.73)$$

En nuestro caso se tiene que $\dot{\bar{\boldsymbol{\beta}}} = 0$, y por lo tanto de acuerdo con (2.67):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = g \left[\frac{(1 - \beta^2)(\hat{n} - \bar{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \hat{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}})^3 R^2} \right] \quad (2.74)$$

Notando que $\mathbf{r} = R(\hat{n} - \bar{\boldsymbol{\beta}})$, y reemplazando (2.73) en (2.74) obtenemos que:

$$\mathbf{B} = \frac{\gamma g}{(\gamma^2 x^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{r} \quad (2.75)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{B}| = \frac{g(1 - \beta^2)}{r^2 (1 - \beta^2 \text{ sen}^2 \theta)^{3/2}} \quad (2.76)$$

Del mismo modo, tenemos de (2.70) que:

$$\mathbf{E} = - \frac{\gamma g}{(\gamma^2 x^2 + z^2)^{3/2}} \hat{n} \times \mathbf{r} \quad (2.77)$$

pero

$$\hat{n} \times \mathbf{r} = - r \text{sen } \alpha \mathbf{j}$$

y de la figura 2.3

$$\text{sen } \alpha = \frac{OB}{OP} = \frac{\beta R \text{sen } \theta}{r}$$

$$\Rightarrow \hat{n} \times \mathbf{r} = - \beta R \text{sen } \theta \mathbf{j} = - \beta z \mathbf{j}$$

de modo que:

$$\mathbf{E} = - \frac{\gamma g \beta z}{(\gamma^2 x^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} \quad (2.78)$$

Estos resultados son totalmente consistentes con los que se obtienen al resolver el problema eléctrico correspondiente, tal y como se esperaba. Resulta interesante notar que también es posible obtener las expresiones (2.75) y (2.78) únicamente a partir de las transformaciones de Lorentz, sin trabajar para nada con los potenciales retardados. Sin embargo, este cálculo está desarrollado en detalle en varias partes de la literatura [14], y por lo tanto no lo incluiremos aquí.

2.4 Fuerza de Lorentz para un Monopolo Magnético.

Lo último que necesitamos para empezar a estudiar el problema de la reacción de radiación de partículas con carga eléctrica y magnética es conocer la forma que cobra la fuerza de Lorentz para un monopolo magnético. Para obtener la expresión que buscamos, consideremos lo siguiente:

La segunda Ley de Newton nos dice que:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_{mec} = \mathbf{F} \quad (2.79)$$

Por otra parte, sabemos que la expresión para la fuerza de Lorentz que siente una partícula con cargas e y g , sujeta a los campos externos totales \mathbf{E} y \mathbf{B} debe ser una de las siguientes cuatro expresiones:

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) + g \left(\mathbf{B} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right) \quad (2.80)$$

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) - g \left(\mathbf{B} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right) \quad (2.81)$$

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) + g \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right) \quad (2.82)$$

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) - g \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right) \quad (2.83)$$

Es claro que sólo puede haber *una* expresión para la fuerza de Lorentz, y a continuación mostraremos que la única expresión correcta es la ec. (2.82). Tomemos ésta expresión, y reemplazemosla en (2.79):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_{mec} = \int_v dV \left(\rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J}_e \times \mathbf{B} + \rho_m \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{J}_m \times \mathbf{E} \right) \quad (2.84)$$

Ahora, de las ecuaciones de Maxwell tenemos que:

$$\rho_e = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E}$$

$$\rho_m = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{J}_e = \frac{c}{4\pi} \left(\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right)$$

$$\mathbf{J}_m = \frac{-c}{4\pi} \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right)$$

Al reemplazarlas en (2.84) y agrupar, la expresión queda escrita como:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_{mec} = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \left(\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} + \right. \\ \left. (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \times \mathbf{E} \right) \right)$$

pero,

$$- \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}}{c} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \frac{\mathbf{E}}{c}$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_{mec} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} \int_V dV (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \left(\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} + \right. \\ \left. (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right)$$

De esto último vemos que el momento contenido en los campos está dado por:

$$\mathbf{p}_{campo} = \int_V \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV \quad (2.85)$$

y como claramente $\mathbf{p}_{Total} = \mathbf{p}_{mec} + \mathbf{p}_{campo}$, entonces podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_{Total} = \int_V \left(\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} - (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right) dV \quad (2.86)$$

Ahora bien, sabemos que la componente $\alpha\beta$ del tensor de energía - momento para el campo electromagnético está dada por:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right] \quad (2.87)$$

El criterio que vamos a seguir para establecer si la expresión (2.82) es la correcta para la fuerza de Lorentz es que dicha expresión debe de cumplir con lo siguiente:

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{Total}} \right) \cdot \hat{e}_\alpha = \int_V \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} dV \quad (2.88)$$

y como es fácil mostrar que para un campo vectorial cualquiera se cumple que:

$$[\mathbf{G} \nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{G})] \cdot \hat{e}_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(G_\alpha G_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \mathbf{G} \cdot \mathbf{G} \right) \quad (2.89)$$

se vé de inmediato que la expresión (2.82) efectivamente conduce a un resultado consistente con (2.88), y por lo tanto correcto.

Finalmente, sólo falta demostrar que la expresión (2.82) es la única expresión correcta para la fuerza de Lorentz. Para ello, supongamos que hubiésemos reemplazado la ec. (2.80) en (2.79). De ser así, tendríamos entonces:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{mec}} = \frac{1}{4\pi} \int_V dV (\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \times \mathbf{E} \right))$$

En esta expresión vemos que se pierde la pareja de formas

$$\mathbf{G} \nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{G})$$

que se necesitan para ser consistentes con (2.88) ya que el término en \mathbf{E} sería:

$$\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

Además, en este caso el término

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \times \mathbf{E}$$

aparece negativo, lo cual genera un término adicional en la expresión para el momento del campo electromagnético de tal suerte que:

$$\mathbf{P}_{\text{campo}} = \int_V \frac{1}{4\pi c} (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}) dV + \int_V \frac{1}{2\pi c} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \times \mathbf{E} \right) dV$$

y ello nos lleva a inconsistencias con el teorema de Poynting. Del mismo modo, si reemplazamos (2.83) en (2.79) vemos que el signo negativo que aparece frente a ρ_m provoca que se pierda la forma $E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta$ que aparece en el tensor de energía -

momento; y al reemplazar la ec.(2.81) no sólo perdemos esa misma forma sino que también se introduce otro término extraño en la expresión para \dot{p}_{comp} .

En vista de todo lo anterior, en efecto se puede concluir que la fuerza de Lorentz para un monoplo magnético de magnitud g se escribe como:

$$\mathbf{F} = g \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right) \quad (2.90)$$

Una vez conociendo la expresión (2.90) estamos en posición de abordar de lleno el problema de la reacción de radiación en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Acerca de la Reacción de Radiación de Partículas con Carga Eléctrica y Magnética.

De acuerdo a las leyes de la electrodinámica, una carga acelerada radia. En el caso de una *partícula* cargada, esta radiación disipa energía que, debido a la falta de estructura de la carga, debe ser a expensas de su energía cinética. Esto significa que bajo la influencia de una misma fuerza, una partícula cargada se acelerará *menos* que una partícula neutra de igual masa, lo cual es equivalente a pensar que para describir el movimiento de una carga acelerada debemos considerar una fuerza adicional de fricción eléctrica, por así decirlo, y a esta fuerza se le conoce como *reacción de radiación*. El cálculo de la reacción de radiación para el caso de partículas con carga eléctrica es muy bien conocido, y existe una literatura extensa al respecto¹. Por otro lado, hasta donde sabemos no existe ningún texto en el cual se discuta la reacción de radiación de partículas con carga magnética, y en los capítulos anteriores hemos mostrado dos cosas muy interesantes:

I. Matemáticamente, las ecuaciones de Maxwell en ausencia de carga magnética son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell que describen una región del espacio donde exista carga eléctrica y magnética en una proporción fija.

II. Al estudiar con cierto detalle la electrodinámica de los monopolos magnéticos, encontramos un parecido notable con la electrodinámica de los monopolos eléctricos.

Basándonos en estos resultados, podemos seguir adelante con nuestro estudio acerca de los monopolos magnéticos haciéndonos las siguientes preguntas: ¿podríamos aprender algo nuevo si estudiamos la reacción de radiación de partículas con carga magnética, a pesar de que no existan?, ¿Y qué hay acerca de la reacción de radiación de partículas con *ambos* tipos de carga?

En este capítulo vamos a buscar respuestas para estas preguntas. Para ello, estudiaremos los dos métodos que se conocen para calcular la reacción de radiación, y los aplicaremos primero al caso bien conocido de una carga *eléctrica puntual acelerada*. Una vez que nos hayamos familiarizado con ellos, escogeremos el método que más nos convenga para resolver el problema de la reacción de radiación de cargas *magnéticas*, y de partículas con *ambos* tipos de carga.

¹Véase la Bibliografía.

3.1 Cálculo de la Reacción de Radiación por Conservación de Energía.

Sabemos que el movimiento de una partícula de masa m sujeta a una fuerza externa \mathbf{F}_{ext} está descrito por:

$$m \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (3.1)$$

Si ahora consideramos que la partícula tiene una carga q , entonces sabemos que la partícula va a emitir radiación, lo cual tiene el efecto de frenarla. Esto lo podemos incorporar fácilmente en la ecuación de movimiento sumándole una fuerza de reacción de radiación, i.e.

$$m \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{rad}} \quad (3.2)$$

El siguiente paso es determinar cuanto vale esta nueva fuerza. Para ello, vamos a considerar que, por conservación de energía, el trabajo realizado por esta fuerza en el intervalo $t_1 < t < t_2$ debe ser igual (salvo un signo) a la energía radiada por la partícula durante este tiempo. Es fácil mostrar² que la potencia radiada por la partícula (en un régimen de velocidades no relativistas) está dada por la fórmula de *Larmor*:

$$P(t) = \frac{2 q^2}{3 c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \quad (3.3)$$

Esto nos conduce entonces a que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2 q^2}{3 c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt$$

e integrando por partes tenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2 q^2}{3 c^3} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt - (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) \frac{2 q^2}{3 c^3} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Si el movimiento es de tal forma que $(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) = 0$ cuando $t = t_1$ y $t = t_2$, entonces podemos escribir:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_{\text{rad}} - \frac{2 q^2}{3 c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

de donde podemos identificar a la reacción de radiación como:

² Véase el Apéndice A.

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} = m \tau \ddot{\mathbf{v}} \quad (3.4)$$

donde τ se conoce como *tiempo característico*, y es una constante para cada partícula cargada.

Ahora, al reemplazar (3.4) en (3.2) obtenemos:

$$m (\dot{\mathbf{v}} - \tau \ddot{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (3.5)$$

la cual se conoce como la *Ecuación de Movimiento de Abraham-Lorentz*. Un grave problema de esta ecuación es que involucra segundas derivadas en la velocidad, lo cual va en contra de los requisitos que debe satisfacer una ecuación de movimiento. De hecho, esta deficiencia nos conduce de inmediato a una dificultad en el caso particular en que $\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$, ya que entonces (3.5) admite las siguientes dos soluciones:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{cases} 0 \\ \mathbf{a} e^{t/\tau} \end{cases} \quad (3.6)$$

donde \mathbf{a} es la aceleración cuando $t = 0$.

La solución exponencial nos ofrece dos terribles inconsistencias. En primer lugar, notamos la sorprendente peculiaridad de que al transcurrir el tiempo la aceleración de la partícula aumenta exponencialmente, aun cuando no exista una fuerza externa que la acelere.

Por otra parte, tenemos que si \mathbf{u} es la velocidad inicial de la partícula cargada:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{a} e^{t/\tau} \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{a} \tau (e^{t/\tau} - 1) + \mathbf{u}$$

$$\therefore \mathbf{v}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(t) = a^2 \tau e^{2t/\tau} - a^2 \tau e^{t/\tau} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} e^{t/\tau}$$

asi, resulta entonces que si γ es el ángulo entre \mathbf{a} y \mathbf{u} :

$$\mathbf{v}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(t) = a^2 \tau e^{t/\tau} \left(e^{t/\tau} - 1 + \frac{u \cos \gamma}{a \tau} \right)$$

$$\therefore \mathbf{v}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \tau e^{t/\tau} = 0 \\ \left(e^{t/\tau} - 1 + \frac{u \cos \gamma}{a \tau} \right) = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación, $a^2 \tau e^{t/\tau} = 0$, sólo tiene una raíz, que es $t = -\infty$.

La segunda ecuación aparentemente también tiene sólo una raíz, dada por:

$$t = \ln \left(1 - \frac{u \cos \gamma}{a \tau} \right) \quad (3.7)$$

Sin embargo, hay que tener cuidado ya que si el argumento del logaritmo es negativo estaremos en graves problemas. De hecho, esto siempre ocurre a menos que los vectores \mathbf{a} y \mathbf{u} sean paralelos. Para ver esto con mayor claridad, tomemos el ejemplo del electrón. Para un electrón, tenemos que $\tau = 6.26 \times 10^{-24}$ seg. Además, tanto u como a son cantidades positivas, de aproximadamente el mismo orden de magnitud, y sabemos que $0 \leq \cos \gamma \leq 1$. Por lo tanto, a excepción de valores de γ tales que $\cos \gamma \approx a \tau / u$:

$$1 - \frac{u \cos \gamma}{a \tau} \approx - \frac{1}{\tau} \approx - 10^{24}$$

por lo que entonces (3.7) carece de sentido.

Por otra parte, aun en el caso en que $\cos \gamma \approx a \tau / u$, la ecuación (3.7) tiene la misma raíz que $a^2 \tau e^{t/\tau} = 0$, i.e. $t = -\infty$. Todas estas consideraciones nos permiten concluir lo siguiente:

1. Hay algo que está gravemente mal en la ecuación de Abraham-Lorentz³.
2. El tiempo característico τ juega un papel muy importante en la descripción de la dinámica de partículas cargadas si tomamos en cuenta los efectos radiativos.

Antes de seguir adelante, conviene hacer notar la importancia del segundo punto. Supongamos que tenemos una partícula con carga q , sujeta a una aceleración de magnitud a durante un tiempo T . Empleando la fórmula de Larmor, tenemos que la energía radiada durante este tiempo será:

$$E_{rad} \approx \frac{2 q^2 a^2 T}{c^3} \quad (3.8)$$

Por otra parte, si la partícula se encontraba inicialmente en reposo, su energía cinética después de que ha transcurrido un tiempo T está dada por:

$$E_{cin} \approx m (a T)^2 \quad (3.9)$$

A esta energía la podemos considerar como la energía *relevante* para la descripción del movimiento de la partícula cargada, ya que nos da una medida de la cantidad de energía que ha adquirido la partícula bajo la influencia de la aceleración a durante el tiempo T . Entonces, en el caso en que la energía radiada sea mucho menor que

³ Es posible superar considerablemente los problemas de la ecuación de Abraham-Lorentz al reemplazarla por una ecuación integro-diferencial. Para una discusión muy clara véase: L. De La Peña, J.L. Jiménez and R. Montemayor, *Il Nuovo Cimento*, 69, 71 (1982).

la energía relevante del sistema, es claro que los efectos de la reacción de radiación serán despreciables en la descripción del movimiento de la partícula cargada. La condición para la cual esto ocurre se tiene de (3.8) y (3.9), y es:

$$T \ll \frac{2 q^2}{3 mc^3} \quad (3.10)$$

Empleando la ecuación (3.4), vemos que una expresión totalmente equivalente a la anterior sería:

$$T \ll \tau \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) establece que los efectos de la reacción de radiación sobre el movimiento de una partícula cargada sólo van a ser importantes en sistemas donde las fuerzas externas que provocan la aceleración sean de tal forma que logren ocasionar cambios bruscos en el movimiento de la partícula, al actuar sobre ella durante intervalos de tiempo del orden de τ . De lo contrario, los efectos de la reacción de radiación serán totalmente despreciables a corto plazo.

Para tomar en cuenta los efectos cumulativos a largo plazo de la reacción de radiación sobre el movimiento de la carga debemos de realizar un balance de energía a lo largo de la trayectoria que describe la carga, y eso es justamente lo que nos condujo a la ecuación de Abraham-Lorentz. Sin embargo, las inconsistencias que hemos exhibido anteriormente muestran que la ecuación de Abraham-Lorentz solo es válida en casos donde la reacción de radiación se pueda considerar como una *perturbación* en el estado de movimiento de la partícula.

Es posible decir mucho más al respecto de este problema, pero el hacerlo nos alejaría demasiado de nuestros objetivos. Por el momento, solo nos resta enfatizar que la expresión (3.4) para la reacción de radiación es sumamente limitada. Sin embargo, es posible [7] hacer una generalización covariante de la expresión (3.4) que incorpore conservación de *momento* y que permita movimientos con velocidades relativistas. El resultado de este cálculo nos va a ser de suma utilidad mas adelante, y por lo tanto aquí lo citamos sin discutir para nada su derivación⁴:

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{2 q^2}{3 c^3} \gamma^4 \left[\mathbf{G} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{G}) \right] \quad (3.12)$$

donde, \mathbf{v} es la velocidad de la partícula,

⁴ No conviene meternos en detalles ya que la validez del metodo empleado por Abraham para llegar a (3.12) ha sido ampliamente cuestionada por diversos autores, tales como Sommerfeld, Dirac, Rohrlich, y Teitelboim. Sin embargo, a pesar de los distintos modelos propuestos por ellos, ninguno ha encontrado una expresión distinta para la reacción de radiación.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{G} = \dot{\mathbf{a}} + 3\gamma^2 \left[\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})}{c^2} \right] \mathbf{a} \quad (3.14)$$

y \mathbf{a} su aceleración.

Ahora bien, aun tenemos una pregunta fundamental que ha sido pasada por alto en nuestra discusión: A que se *debe* la reacción de radiación? Una cosa es decir que debe *existir* una reacción de radiación para no violar las leyes de conservación, pero otra muy distinta es buscar la manera de identificar su origen.

La respuesta a esta pregunta la dió Lorentz al mostrar que la *tercera Ley de Newton no* es válida en la electrodinámica. Esto lo hizo mostrando que para una carga de volumen finito en movimiento, la fuerza de una parte sobre otra *no* es igual y opuesta a la fuerza de la segunda parte sobre la primera. El resultado que se obtiene al integrar estos desequilibrios de fuerza sobre toda la configuración de carga es una fuerza *neto* de la carga *sobre sí misma*. Lorentz llamó a esta fuerza la *auto-fuerza*, y para una configuración esférica, instantáneamente en reposo, obtuvo un resultado consistente con (3.12) [1].

Desgraciadamente, el método de Lorentz resulta sumamente laborioso desde un punto de vista algebraico, y quizás por tal motivo nunca gozó de gran popularidad. Esto es una pena ya que su *idea* es muy interesante desde un punto de vista *físico*. Por tal motivo, en la siguiente sección estudiaremos la manera de obtener la reacción de radiación para un electrón de carga e , usando el modelo más simple que permita emplear el desequilibrio de fuerza que necesitamos para emplear el método de Lorentz: una *mancuerna rígida*. Vamos a estudiar el movimiento de una mancuerna rígida de cargas separadas una distancia fija d , y colocaremos en cada extremo la mitad de la carga total del electrón. Lo sorprendente de esta configuración es el hecho de que a pesar de que realmente carece de gran parecido con una partícula cargada, nos muestra con toda claridad de donde proviene la auto-fuerza, y en el límite cuando $d \rightarrow 0$ reproduce los resultados predichos por la expresión (3.12) para la reacción de radiación.

3.2 Cálculo de la Auto-Fuerza sobre una Mancuerna de Carga Eléctrica en Movimiento Longitudinal, y su relación con la Reacción de Radiación.

Consideremos una mancuerna moviéndose a lo largo del eje X, como la que se muestra en la figura 3.1, de manera que la separación d entre los extremos se mantiene fija en el sistema del laboratorio, y sea $\omega(t)$ la posición del punto medio de la mancuerna al tiempo t .

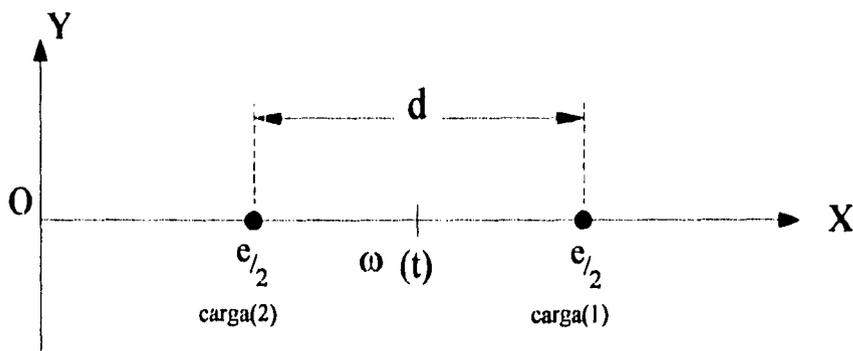


Figura 3.1

Sea E_1 el campo que siente la carga (1) debido a la carga (2), y sea E_2 el campo que siente la carga (2) debido a la carga (1). Dado que la información electromagnética tiene una velocidad finita de propagación, consideraremos que la carga (2) "emite" al tiempo t_1 de modo que la carga (1) se "entera" al tiempo t .

Al tiempo t_1 , (1) se encuentra en $x = \omega(t_1) + d/2$ y (2) se encuentra en $x = \omega(t_1) - d/2$. Del mismo modo, al tiempo t la carga (1) se encuentra en $x = \omega(t) + d/2$ y la carga (2) se encuentra en $x = \omega(t) - d/2$.

Ahora, del capítulo anterior sabemos que si la carga que esta "emitiendo" sigue una trayectoria descrita por $s(t)$, los tiempos de emisión y recepción se relacionan mediante la siguiente expresión, conocida como *factor de Doppler*:

$$c |t - t_1| = |r(t) - s(t_1)| \quad (3.15)$$

donde r es la posición de recepción al tiempo t .

En este caso particular, tenemos que $r = (\omega(t) + d/2) i$ y $s = (\omega(t_1) - d/2) i$,

$$\Rightarrow c (t - t_1) = \omega(t) - \omega(t_1) + d \quad (3.16)$$

Del mismo modo, al tiempo t_2 , (1) se encuentra en $x = \omega(t_2) + d/2$ y (2) se encuentra en $x = \omega(t_2) - d/2$, mientras que al tiempo t la carga (1) se encuentra en $x = \omega(t) + d/2$ y la carga (2) se encuentra en $x = \omega(t) - d/2$. Repitiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior, llegamos a que:

$$c(t - t_2) = \omega(t) - \omega(t_2) + d \quad (3.17)$$

Por otro lado, sabemos que el campo eléctrico producido por una carga eléctrica de magnitud $e/2$ moviéndose a lo largo de una trayectoria $\mathbf{s}(t)$ está dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e n}{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^3} \left[(c^2 - v^2) \mathbf{m} + \mathbf{n} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{a}) \right] \quad (3.18)$$

y el campo magnético está dado por:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (3.19)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de la carga que "emite", \mathbf{a} es la aceleración de la misma, \mathbf{n} es un vector que va de la carga que "emite" al punto de "recepción" \mathbf{r} (i.e. $\mathbf{n} = \mathbf{r} - \mathbf{s}$), $\mathbf{m} = c\hat{n} - \mathbf{v}$, y todas las cantidades hay que evaluarlas al tiempo retardado.

En nuestro caso, tenemos que \mathbf{n} y \mathbf{v} son vectores paralelos, $\Rightarrow \mathbf{m} \times \mathbf{a} = 0$, y por lo tanto:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e n}{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^3} (c^2 - v^2) \mathbf{m} \quad (3.20)$$

Calculemos ahora \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 . Tenemos que:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = c(t - t_1) [c - \dot{\omega}(t_1)] \quad (3.21)$$

ya que $\mathbf{n} = c(t - t_1) \mathbf{i}$, $\mathbf{v}(t) = \dot{\omega}(t) \mathbf{i}$, y $\mathbf{m} = c \mathbf{i} - \dot{\omega}(t_1) \mathbf{i}$. Esto nos permite escribir entonces que:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{(e/2) c(t - t_1)}{c^3 (t - t_1)^3 [c - \dot{\omega}(t_1)]^3} \left\{ (c^2 - \dot{\omega}^2(t_1)) [c - \dot{\omega}(t_1)] \right\} \mathbf{i}$$

$$\therefore \mathbf{E}_1 = \frac{e}{2c^2} \left(\frac{1}{t_1 - t} \right)^2 \left(\frac{c + \dot{\omega}(t_1)}{c - \dot{\omega}(t_1)} \right) \mathbf{i} \quad (3.22)$$

Si siguiendo un procedimiento idéntico con $\mathbf{n} = -c(t - t_2)\mathbf{i}$, y $\mathbf{m} = -(c + \dot{\omega}(t_2))\mathbf{i}$, encontramos que:

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{e}{2c^2} \left(\frac{1}{t_2 - t} \right)^2 \left(\frac{c - \dot{\omega}(t_2)}{c + \dot{\omega}(t_2)} \right) \mathbf{i} \quad (3.23)$$

Ahora, no es posible despejar t_1 y t_2 de las ecuaciones (3.16) y (3.17) para reemplazarlos en (3.21) y (3.22) ya que no conocemos $\omega(t)$ (de hecho, aun teniendo $\omega(t)$ es probable que no fuera posible despejar t_1 y t_2). Sin embargo, podemos hacer lo siguiente:

Por el teorema de Taylor, tenemos que:

$$\omega(t_1) = \omega(t) + \dot{\omega}(t)(t_1 - t) + \frac{1}{2} \ddot{\omega}(t)(t_1 - t)^2 + \dots \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}(t_1) = \dot{\omega}(t) + \ddot{\omega}(t)(t_1 - t) + \frac{1}{2} \dddot{\omega}(t)(t_1 - t)^2 + \dots \quad (3.25)$$

y de la ecuación (3.16) tenemos entonces que:

$$d = (\dot{\omega} - c)(t_1 - t) + \frac{1}{2} \ddot{\omega}(t_1 - t)^2 + \frac{1}{3!} \dddot{\omega}(t_1 - t)^3 + \dots \quad (3.26)$$

Invirtiéndola esta serie⁵, se obtiene:

$$(t_1 - t) = \frac{d}{(\dot{\omega} - c)} - \frac{\ddot{\omega} d^2}{2(\dot{\omega} - c)^3} + \left[\frac{3\ddot{\omega}^2 - \ddot{\omega}'(\dot{\omega} - c)}{6(\dot{\omega} - c)^5} \right] d^3 + \dots \quad (3.27)$$

y a partir de (3.27) encontramos que⁶:

$$\left(\frac{1}{t_1 - t} \right)^2 = \frac{(c - \dot{\omega})^2}{d^2} + \frac{\ddot{\omega}}{d} - \frac{(3\ddot{\omega}^2 + 4(c - \dot{\omega})\ddot{\omega}')}{12(c - \dot{\omega})^5} + \mathcal{O}(d) \quad (3.28)$$

Por otra parte, a partir de (3.25) tenemos:

$$c + \dot{\omega}(t_1) = (c + \dot{\omega}) + \ddot{\omega}(t_1 - t) + \frac{1}{2} \dddot{\omega}(t_1 - t)^2 + \dots \quad (3.29)$$

⁵ En todo lo que resta de este capítulo vamos a utilizar diversos resultados y propiedades de series cuya deducción no incluiremos en el cuerpo del texto. El lector interesado puede ver el apéndice B.

⁶ Nuevamente, véase el Apéndice B.

$$c - \dot{\omega}(t_1) = (c - \dot{\omega}) - \ddot{\omega}(t_1 - t) - \frac{1}{2} \ddot{\omega} (t_1 - t)^2 + \dots \quad (3.30)$$

por lo que entonces

$$\left(\frac{1}{c - \dot{\omega}(t_1)} \right) = \left(\frac{1}{c - \dot{\omega}} \right) \left[1 + \frac{\ddot{\omega}(t_1 - t)}{c - \dot{\omega}} + \left(\frac{\ddot{\omega}^2}{(c - \dot{\omega})^2} + \frac{\ddot{\omega}}{2(c - \dot{\omega})} \right) (t_1 - t)^2 + \dots \right] \quad (3.31)$$

y obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{c + \dot{\omega}(t_1)}{c - \dot{\omega}(t_1)} &= \left(\frac{c + \dot{\omega}}{c - \dot{\omega}} \right) + \left[\frac{\ddot{\omega}(c + \dot{\omega})}{(c - \dot{\omega})^2} + \frac{\dot{\omega}}{c - \dot{\omega}} \right] (t_1 - t) + \\ &\quad \left[\frac{\ddot{\omega}^2}{(c - \dot{\omega})^2} + \frac{(c + \dot{\omega})}{(c - \dot{\omega})^2} \left(\frac{\ddot{\omega}^2}{c - \dot{\omega}} + \frac{\ddot{\omega}}{2} \right) + \frac{\ddot{\omega}}{2(c - \dot{\omega})} \right] (t_1 - t)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.32)$$

Reemplazando (3.28) y (3.32) en (3.22) obtenemos despues de una *monserga* de algebra:

$$E_1 = \frac{e}{2c^2} \left[\frac{(c^2 - \dot{\omega}^2)}{d^2} - \frac{\ddot{\omega}}{d} + \left(\frac{\ddot{\omega}(2c - \dot{\omega})}{3(c - \dot{\omega})} + \frac{\ddot{\omega}^2(3c - \dot{\omega})}{4(c - \dot{\omega})} \right) + \mathcal{O}(d) \right] \quad (3.33)$$

Si ahora partimos de la expresi3n (3.17), y repetimos ex3ctamente los mismos pasos que nos llevaron desde (3.26) hasta (3.33), obtenemos:

$$E_2 = \frac{e}{2c^2} \left[\frac{(c^2 - \dot{\omega}^2)}{d^2} + \frac{\ddot{\omega}}{d} + \left(\frac{-\ddot{\omega}(2c + \dot{\omega})}{3(c + \dot{\omega})} + \frac{\ddot{\omega}^2(3c + \dot{\omega})}{4(c + \dot{\omega})} \right) + \mathcal{O}(d) \right] \quad (3.34)$$

Regresando ahora a la parte f3sica del problema, nos interesa calcular el *desequilibrio* de fuerza que existe en esta configuraci3n. De la figura 3.1 es claro que esto lo podemos escribir como:

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = \frac{e}{2} (E_1 - E_2) \mathbf{i} \quad (3.35)$$

ya que \mathbf{n} y \mathbf{E} son vectores paralelos, y por (3.19) el campo magn3tico se anula sobre el eje X. Entonces, al reemplazar (3.33) y (3.34) en (3.35) obtenemos, despues de agrupar y simplificar todos los t3rminos:

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = \mathbf{i} \frac{e^2}{c^2} \left\{ -\frac{2\ddot{\omega}}{d} + \frac{e^3}{(c^2 - \dot{\omega}^2)^{3/2}} \left[\dot{\omega} \ddot{\omega}^2 + \frac{\ddot{\omega}}{3} (c^2 - \dot{\omega}^2) \right] + \mathcal{G}(d) \right\} \quad (3.36)$$

Veamos ahora que ocurre al tomar el límite cuando $d \rightarrow 0$. En ese caso vemos que los únicos términos de (3.36) que sobreviven son el coeficiente de d^{-1} (el cual depende linealmente de la aceleración, y de hecho diverge al tomar el límite) y el término independiente de d . La presencia de un término proporcional a la aceleración resulta interesante ya que si lo enviamos al lado izquierdo de (3.2), este tiene el efecto de aumentar la masa de la mancuerna (por lo cual recibe el nombre de término de *renormalización de masa*), de modo que su inercia total sería:

$$m = 2 m_0 + m_{\text{mi}} \quad (3.37)$$

donde m_0 es la masa de cada extremo de la mancuerna, y

$$m_{\text{mi}} = \frac{e^2}{2 c^2 d} \quad (3.38)$$

La expresión (3.38) indica que la repulsión eléctrica entre las cargas hace que aumente la masa de la mancuerna, lo cual suena bastante razonable por lo siguiente: La energía potencial de esta configuración, medida en el laboratorio, es $e^2/4 d^2$. Por otra parte, sabemos que $E = mc^2$ por lo que la relatividad especial predice que (3.38) debería de estar multiplicada por un factor de 0.5. Esta paradoja fué resuelta por Poincaré, quien propuso que en vista de que la partícula cargada es inestable en virtud de la repulsión eléctrica que experimentan sus partes, esta se auto-destruiría a menos de que exista una fuerza *adicional* que la mantenga unida. La inclusión de una fuerza cohesiva de Poincaré resuelve satisfactoriamente este problema, pero hay varios autores que se han interesado por dar explicaciones alternativas [7]. Cabe mencionar que independientemente de todo lo anterior, no tenemos manera de librarnos de la terrible divergencia del término de renormalización de masa. Podemos intentar eliminar la dificultad argumentando que nosotros sólo podemos observar la masa total m (la cual es además la única que tiene relevancia en la descripción dinámica de la mancuerna), y que quizá m_0 también contenga un infinito que compense de alguna manera, pero esto claramente no convence a nadie. Este duro problema ha sido tratado por ciertos autores [11], y por el momento no conviene hablar más acerca de él ya que, afortunadamente, no influye para nada en la determinación de la reacción de radiación por el método de Lorentz como veremos mas adelante

Para poder continuar, recordemos ahora la expresión de Abraham para la reacción de radiación:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2 q^2}{3 c^3} \gamma^4 \left[\mathbf{G} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{G}) \right] \quad (3.12)$$

tenemos que en este caso,

$$\mathbf{G} = \ddot{\omega} \mathbf{i} + 3 \gamma^2 \left(\frac{\dot{\omega} \ddot{\omega}}{c^2} \right) \dot{\omega} \mathbf{i} \quad (3.39)$$

$\Rightarrow \mathbf{v} \times \mathbf{G} = 0$, y por lo tanto para este sistema

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{2 q^2}{3 c^3} \gamma^4 \mathbf{G} \quad (3.40)$$

Ahora, reemplazando (3.39) en (3.40), obtenemos:

$$\mathbf{F}_{auto} = \mathbf{i} \frac{2 e^2}{3 c^3} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right)^2 \left(\ddot{\omega} + \frac{3 \dot{\omega} \ddot{\omega}^2}{c^2} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) \right)$$

y como $\beta = \dot{\omega} / c$, encontramos finalmente que:

$$\mathbf{F}_{auto} = \frac{2 \mathbf{i} e^2}{c^2} \frac{c^3}{(c^2 - \dot{\omega}^2)^3} \left[\dot{\omega} \ddot{\omega}^2 + \frac{\ddot{\omega}}{3} (c^2 - \dot{\omega}^2) \right] \quad (3.41)$$

Comparando (3.41) con el coeficiente del término en d^0 de (3.36), notamos que (3.41) es exactamente el doble de (3.36). Esta aparente contradicción se resuelve fácilmente notando que aun no hemos considerado la auto-fuerza de cada extremo sobre sí mismo. Esta auto-fuerza de cada extremo sobre sí mismo se puede calcular usando (3.12), y es:

$$\mathbf{F}_{auto}^{extremo \ sobre \ si} = \frac{\mathbf{i} e^2}{2 c^2} \frac{c^3}{(c^2 - \dot{\omega}^2)^3} \left[\dot{\omega} \ddot{\omega}^2 + \frac{\ddot{\omega}}{3} (c^2 - \dot{\omega}^2) \right] \quad (3.42)$$

por lo cual, al sumarle 2(3.42) a (3.36), obtenemos expresiones idénticas para la fuerza.

Esto nos permite concluir que *el término independiente de d en la expansión (3.36) para la auto-fuerza realmente representa la fuerza de reacción de radiación del sistema*. Este es un resultado muy importante que nos será de gran utilidad mas adelante, y el cual no debe de causar mucha sorpresa ya que al tomar el límite cuando $d \rightarrow 0$, lo que estamos haciendo es alejarnos muchísimo de la configuración hasta poder despreciar la dependencia en la estructura. Claramente, si tenemos otra configuración "mas realista" para describir al electrón (como puede ser una distribución esférica como la que usó Lorentz), el término de renormalización de masa que aparezca en la expansión equivalente a (3.36) será diferente, al igual que todos los términos que involucren potencias de d mayores a cero. Sin embargo, el término constante en la expansión correspondiente a (3.36) sera el *mismo* para cualquier configuración ya que, al dejar de tomar en cuenta la estructura, estamos regresando al régimen donde las leyes de conservación son las que determinan la forma que cobra la reacción de radiación.

3.3. Cálculo de la Auto-Fuerza sobre una Mancuerna de Carga Eléctrica en Movimiento Transversal.

Ahora, consideremos la misma mancuerna rígida, nuevamente moviéndose a lo largo del eje X, pero con su eje paralelo al eje Y como se muestra en la figura 3.2. En este caso, la separación, d , entre los extremos también se mantiene fija en el sistema del laboratorio, y $x = \omega(t)$ vuelve a denotar la posición del punto medio de la mancuerna al tiempo t .

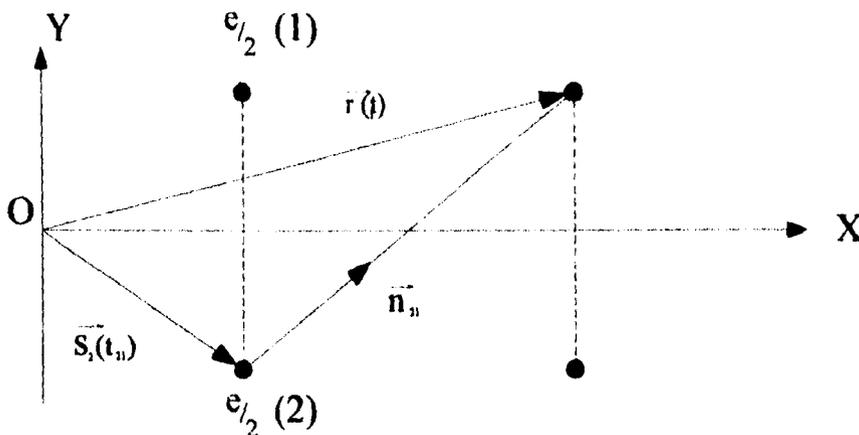


Figura 3.2

Primero calculemos el campo que siente la carga 1 al tiempo t debido a la carga 2, al cual llamaremos \mathbf{E}_{21} . A diferencia del caso anterior, de la figura vemos que si conocemos \mathbf{E}_{21} , entonces por simetría también conocemos el campo que siente la carga 2 al tiempo t debido a la carga 1 (\mathbf{E}_{12}), ya que claramente:

$$\mathbf{E}_{21} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{E}_{12} \cdot \mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_{21} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{E}_{12} \cdot \mathbf{j} \quad (3.43)$$

Para empezar, en este caso tenemos que:

$$x_1(t) = x_2(t) = \omega(t)$$

$$\mathbf{s}_2(t_2) = \omega(t_2) \mathbf{i} - \frac{d}{2} \mathbf{j} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{r}_1(t) = \omega(t) \mathbf{i} + \frac{d}{2} \mathbf{j} \quad (3.45)$$

donde t_{21} es el tiempo al que la carga 2 "emitió" la información de su campo para que la carga 1 la "reciba" al tiempo t . Esto nos permite entonces escribir el factor de Doppler como:

$$c |t - t_{21}| = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(t_{21})|$$

$$\Rightarrow c^2 (t - t_{21}) = [\omega(t) - \omega(t_{21})]^2 + d^2 \quad (3.46)$$

Continuando, tenemos que:

$$\mathbf{n}_{21} = [\omega(t) - \omega(t_{21})] \mathbf{i} + d \mathbf{j} \quad (3.47)$$

$$n_{21} = c (t - t_{21}) \quad (3.48)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\omega}(t_{21}) \mathbf{i} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\omega}(t_{21}) \mathbf{i} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{m} = \frac{c}{n_{21}} \left\{ [\omega(t) - \omega(t_{21})] \mathbf{i} + d \mathbf{j} \right\} - \dot{\omega}(t_{21}) \mathbf{i} \quad (3.51)$$

A partir de este punto, vamos a repetir exactamente los mismos pasos de la sección anterior. La idea es primero reemplazar estos vectores ((3.47) \rightarrow (3.51)) en la expresión (3.18) para el campo eléctrico, y posteriormente encontrar un desarrollo en potencias de d para el campo que nos permita (igual que en el caso anterior) encontrar una expansión en potencias de d para la auto-fuerza sobre la mancuerna. Al tener el desarrollo para la auto-fuerza, podemos obtener a partir de ella la reacción de radiación tomando el límite cuando $d \rightarrow 0$, y listo. Sin embargo, existen algunas diferencias entre este caso y el anterior que hacen que los cálculos necesarios para lograr nuestro objetivo se compliquen de una forma increíble:

1) La fórmula para el tiempo retardado en este caso, (3.46), es *cuadrática*, a diferencia por ejemplo de la (3.16) que es lineal. Esta inocente diferencia tiene el efecto de aumentar perversamente el álgebra de series que se debe de realizar para llegar a la expansión deseada.

2) En este caso no sucede que $\mathbf{n} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{a}) = 0$, lo cual hace que la expresión para el campo eléctrico cobre una forma mucho más formidable que en el caso anterior.

3) Por si lo anterior fuera poco, para poder evaluar la auto-fuerza debemos de tomar en cuenta los efectos del campo magnético, ya que para este sistema no se anula como en el caso anterior. Dado que la expresión para el campo eléctrico resulta ser algo monstruoso, y que para conocer \mathbf{B} debemos de calcular $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}$, es claro para cualquiera

que haya seguido con cuidado el álgebra de la sección anterior que el cálculo por realizarse ahora promete ser una experiencia realmente siniestra.

Sin embargo, se dice por ahí que una imagen vale más que mil palabras. En este caso, creo que haremos uso de este refrán con la finalidad de exhibir porqué el método de Lorentz no fué muy favorecido, a pesar de entregar resultados tan interesantes como ha hecho hasta ahora.

Sea:

$$\mathbf{Q} \equiv (c^2 - v^2) \mathbf{m} + \mathbf{n}_{21} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{a}) \quad (3.52)$$

de modo que:

$$\mathbf{E}_{21}(\mathbf{r}, t) = \frac{e n_{21} \mathbf{Q}}{2 (\mathbf{n}_{21} \cdot \mathbf{m})^3} \quad (3.18.2)$$

Entonces, al reemplazar ((3.47) → (3.51)) en (3.52) tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & \left[\frac{(c^2 - \dot{\omega}^2)}{n_{21}} \{ \omega(t) - \omega(t_{21}) \} - \frac{(c^2 - \dot{\omega}^2) \dot{\omega}(t_{21})}{c} - \frac{d^2}{n_{21}} \ddot{\omega}(t_{21}) \right] \mathbf{i} \\ & + \frac{d}{n_{21}} \left[(c^2 - \dot{\omega}^2) + \ddot{\omega}(t_{21}) \{ \omega(t) - \omega(t_{21}) \} \right] \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Recordemos ahora que cada $\omega(t_{21})$, $\dot{\omega}(t_{21})$, y $\ddot{\omega}(t_{21})$ debe ser reemplazado por un desarrollo en serie de Taylor al son de (3.25) y (3.26). Luego, recurriendo a (3.46) podemos obtener un desarrollo en serie de potencias de $(t - t_{21})$ para d^2 . A este desarrollo le sacamos raíz⁷, y al desarrollo en serie de potencias de $(t - t_{21})$ que de esta forma encontramos para d lo invertimos, obteniendo así un desarrollo en serie de potencias de d para $(t - t_{21})$ ⁸. El desarrollo de $(t - t_{21})$ en serie de potencias de d también nos sirve para obtener un desarrollo para n (ver (3.48)). Al realizar todo esto (alrededor de 20 páginas de cálculos), obtenemos finalmente:

⁷Vease el Apéndice B.

⁸Nótese que esto es serio. No se trata de ningún trabalenguas.

$$\begin{aligned} n_{21} \mathbf{Q} = & \left\{ -\frac{1}{2} \ddot{\omega} d^2 + \left[\frac{2 \ddot{\omega}}{3 (c^2 - \dot{\omega}^2)^{3/2}} + \frac{\dot{\omega} \ddot{\omega}^2}{2 (c^2 - \dot{\omega}^2)^{5/2}} \right] d^1 + \mathcal{O}(d^4) \right\} \mathbf{i} \\ & + \left\{ (c^2 - \dot{\omega}^2) d + \left[\frac{3 \dot{\omega} \ddot{\omega}}{(c^2 - \dot{\omega}^2)^{3/2}} \right] d^2 + \left[\frac{\ddot{\omega}^2 c^2}{2 (c^2 - \dot{\omega}^2)^2} \right] d^3 + \mathcal{O}(d^4) \right\} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Ahora, antes de poder por fin evaluar el campo eléctrico necesitamos un desarrollo en serie de potencias de d para $(\mathbf{n}_{21} \cdot \mathbf{m})^{-3}$. Haciendo operaciones similares (en estilo y cantidad) a las que nos condujeron a la expansión (3.54), se encuentra que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^{-3} = & \frac{1}{(c^2 - \dot{\omega}^2)^{3/2}} \frac{1}{d^3} - \frac{3 \dot{\omega} \ddot{\omega}}{(c^2 - \dot{\omega}^2)^3} \frac{1}{d^2} + \\ & \left\{ \frac{51 c^2 \dot{\omega}^2 \ddot{\omega}^2 - 60 \dot{\omega}^4 \ddot{\omega}^2 - 24 \dot{\omega}^3 \ddot{\omega}^3 c^2 + 9 c^4 \dot{\omega}^2 + 12 \dot{\omega} \ddot{\omega} c^4 + 12 \dot{\omega}^3 \ddot{\omega}}{8 (c^2 - \dot{\omega}^2)^{11/2}} \right\} \frac{1}{d} + \dots \end{aligned} \quad (3.55)$$

por lo cual, de (3.54) y (3.55) obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{21} = & \left\{ \frac{e}{2} \left[\frac{-\dot{\beta}}{2 c (1 - \beta^2)^{3/2}} \frac{1}{d} + \frac{2 \ddot{\beta}}{3 c^2 (1 - \beta^2)^2} + \frac{2 \beta \ddot{\beta}^2}{c^2 (1 - \beta^2)^3} + \mathcal{O}(d) \right] \right\} \mathbf{i} + \\ & \left\{ \frac{e}{2} \left[\frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \frac{1}{d^2} + \frac{12 \beta \ddot{\beta} (1 - \beta^2) - \dot{\beta}^2 (12 \beta^2 - 13)}{c^2 (1 - \beta^2)^{7/2}} + \mathcal{O}(d) \right] \right\} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.56)$$

donde hemos usado que $c^2 (1 - \beta^2) = (c^2 - \dot{\omega}^2)$.

El siguiente paso es calcular \mathbf{B}_{21} . Para ello, necesitamos primero un desarrollo en serie de potencias de d para \hat{n}_{21} . La manera de obtener esta expansión es en todo análoga a la manera en la que se han obtenido todas las demás expansiones, por lo que sin entrar en mas detalles tenemos:

$$\mathbf{B}_{21} = \mathbf{k} \left\{ (\hat{n}_{21} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{E}_{21} \cdot \mathbf{j}) - (\hat{n}_{21} \cdot \mathbf{j})(\mathbf{E}_{21} \cdot \mathbf{i}) \right\} \quad (3.57)$$

ahora,

$$(\hat{n}_{21} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{E}_{21} \cdot \mathbf{j}) = \frac{e}{2} \left\{ \frac{\beta}{d^2(1-\beta^2)^{3/2}} - \frac{\dot{\beta}}{2c(1-\beta^2)d} + \left[\frac{48\beta^3\dot{\beta}^2 - 100\beta^3\ddot{\beta}^2 - 96\beta^4\ddot{\beta} + 52\beta\dot{\beta}^2 + 48\beta^2\ddot{\beta}(1+\beta^4) + \beta\dot{\beta}^2(1-\beta^2)^2}{4c^2(1-\beta^2)^{5/2}} \right] + \mathcal{O}(d) \right\} \quad (3.58)$$

y

$$(\hat{n}_{21} \cdot \mathbf{j})(\mathbf{E}_{21} \cdot \mathbf{j}) = \frac{e}{2} \left\{ \frac{-\dot{\beta}}{2c(1-\beta^2)d} + \frac{2\ddot{\beta}}{3c^2(1-\beta^2)^{3/2}} + \frac{7\beta\dot{\beta}^2}{4c^2(1-\beta^2)^{5/2}} + \mathcal{O}(d) \right\} \quad (3.59)$$

por lo que entonces sumando (3.58) y (3.59) y simplificando encontramos,

$$\mathbf{B}_{21} = \frac{e}{2} \left\{ \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}d^2} + \frac{8\ddot{\beta}(1-\beta^2)(19\beta^2-1) - 6\beta\dot{\beta}^2(21\beta^2-23)}{12c^2(1-\beta^2)^{7/2}} + \mathcal{O}(d) \right\} \mathbf{k} \quad (3.60)$$

Ahora, la fuerza de Lorentz está dada por:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{e}{2} \left(\mathbf{E}_{21} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_{21} \right) \quad (3.61)$$

Entonces, de (3.56) y (3.60) obtenemos:

$$\mathbf{F}_{21} \cdot \mathbf{i} = \frac{e^2}{4} \left\{ \frac{-\dot{\beta}}{2cd(1-\beta^2)^{3/2}} + \frac{2\ddot{\beta}}{3c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{2\beta\dot{\beta}^2}{c^2(1-\beta^2)^3} + \mathcal{O}(d) \right\} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{F}_{21} \cdot \mathbf{j} = \frac{e^2}{4} \left\{ \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{d^2} + \frac{152\beta\ddot{\beta}(1-\beta^2) - 6\dot{\beta}^2(21\beta^2-26)}{12c^2(1-\beta^2)^{7/2}} + \mathcal{O}(d) \right\} \quad (3.63)$$

Bien. Ahora, solo nos falta repetir todo lo anterior para conocer \mathbf{F}_{12} y listo. Recordando la expresión (3.43), podemos escribir de inmediato:

$$\mathbf{E}_{12} = \left\{ \frac{e}{2} \left[\frac{-\dot{\beta}}{2c(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{1}{d} + \frac{2\ddot{\beta}}{3c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{2\beta\dot{\beta}^2}{c^2(1-\beta^2)^3} + \mathcal{O}(d) \right] \right\} \mathbf{i} + \left\{ -\frac{e}{2} \left[\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \frac{1}{d^2} + \frac{12\beta\ddot{\beta}(1-\beta^2) - \dot{\beta}^2(12\beta^2-13)}{c^2(1-\beta^2)^{7/2}} + \mathcal{O}(d) \right] \right\} \mathbf{j} \quad (3.64)$$

y para el campo magnético tenemos que:

$$\mathbf{B}_{12} = \mathbf{k} \{ (\hat{n}_{12} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{E}_{12} \cdot \mathbf{j}) - (\hat{n}_{12} \cdot \mathbf{j})(\mathbf{E}_{12} \cdot \mathbf{i}) \} \quad (3.65)$$

y encontrando un desarrollo en serie de potencias de d para \hat{n}_{12} , obtenemos $\mathbf{B}_{12} = -\mathbf{B}_{21}$, i.e.:

$$\mathbf{B}_{12} = -\frac{e}{2} \left\{ \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} \frac{1}{d^2} + \frac{8\ddot{\beta}(1-\beta^2)(19\beta^2-1) - 6\beta\dot{\beta}^2(21\beta^2-23)}{12c^2(1-\beta^2)^{7/2}} + \mathcal{O}(d) \right\} \mathbf{k} \quad (3.66)$$

A continuación, tenemos:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{e}{2} \left(\mathbf{E}_{12} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_{12} \right) \quad (3.67)$$

por lo cual:

$$\mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{i} = \frac{e^2}{4} \left\{ \frac{-\dot{\beta}}{2cd(1-\beta^2)^{3/2}} + \frac{2\ddot{\beta}}{3c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{2\beta\dot{\beta}^2}{c^2(1-\beta^2)^3} + \mathcal{O}(d) \right\} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{j} = -\frac{e^2}{4} \left\{ \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{d^2} + \frac{152\beta\ddot{\beta}(1-\beta^2) - 6\dot{\beta}^2(21\beta^2-26)}{12c^2(1-\beta^2)^{7/2}} + \mathcal{O}(d) \right\} \quad (3.69)$$

Ahora, para conocer la fuerza total tenemos que:

$$\mathbf{F}_{\text{total}} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = (2\mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} \quad (3.70)$$

$$\therefore \mathbf{F}_{\text{total}} = \frac{e^2}{2} \left\{ \frac{-\dot{\beta}}{2cd(1-\beta^2)^{3/2}} + \frac{2\ddot{\beta}}{3c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{2\beta\ddot{\beta}}{c^2(1-\beta^2)^3} + \mathfrak{g}(d) \right\} \mathbf{i} \quad (3.71)$$

Es muy razonable cuestionar la validez de (3.71), simplemente debido a la bestial cantidad de álgebra que se realizó para obtenerla. Sin embargo, ya mostramos que el término constante (independiente de d) que aparece en (3.71) tiene que ser exactamente la mitad del resultado que obtendríamos a partir de la expresión (3.12) de Abraham para la reacción de radiación. Verifiquemos entonces de esta forma nuestro resultado:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 \left[\mathbf{G} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{G}) \right] \quad (3.12)$$

donde

$$\mathbf{G} = \dot{\mathbf{a}} + 3\gamma^2 \left[\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})}{c^2} \right] \mathbf{a} \quad (3.14)$$

en este caso, tenemos que $\mathbf{a} = \ddot{\omega} \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \dot{\omega} \mathbf{i}$,

$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{G} &= \ddot{\omega} \mathbf{i} + 3\gamma^2 \left(\frac{\dot{\omega} \ddot{\omega}}{c^2} \right) \ddot{\omega} \mathbf{i} \\ &= c \left(\ddot{\beta} + 3\gamma^2 \beta \dot{\beta}^2 \right) \mathbf{i} \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\Rightarrow \mathbf{G} \times \mathbf{v} = 0 \quad (3.73)$$

y reemplazando (3.72) y (3.73) en (3.12) obtenemos:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = e^2 \left\{ \frac{2\ddot{\beta}}{3c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{2\beta\ddot{\beta}}{c^2(1-\beta^2)^3} \right\} \mathbf{i} \quad (3.74)$$

Lo cual es bastante relajante después del esfuerzo realizado. Además, la expresión (3.74) es idéntica al término independiente de d de (3.36), tal y como era de esperarse ya que las expansiones para el movimiento transversal y el longitudinal deben de ser idénticas cuando $d \rightarrow 0$. Por otra parte, es muy interesante notar que, a pesar de que el término de renormalización de masa que aparece en (3.71):

$$\frac{-\dot{\beta} e^2}{4cd(1-\beta^2)^{3/2}}$$

es distinto al que aparece en (3.36):

$$-\frac{2 \ddot{\omega} e^2}{dc^2} = -\frac{2 e^2 \dot{\beta}}{dc}$$

ambos son negativos (lo que significa que ambos hacen que la inercia de la mancuerna aumente), ambos son proporcionales a la aceleración, y ambos tienen el mismo tipo de divergencia hiperbólica al tomar el límite $d \rightarrow 0$.

3.4. Evaluación de la Auto-Torca sobre una Mancuerna de Carga Eléctrica que Rota con Velocidad Angular Constante.

Supongamos ahora que nuestra mancuerna en vez de moverse en línea recta como ha venido haciendo rota en contra de las manecillas del reloj con velocidad angular constante, Ω . En este problema, nuevamente colocaremos cargas de magnitud $e/2$ en cada extremo de la mancuerna, y sea $d = 2R$ como se muestra en la figura 3.3.

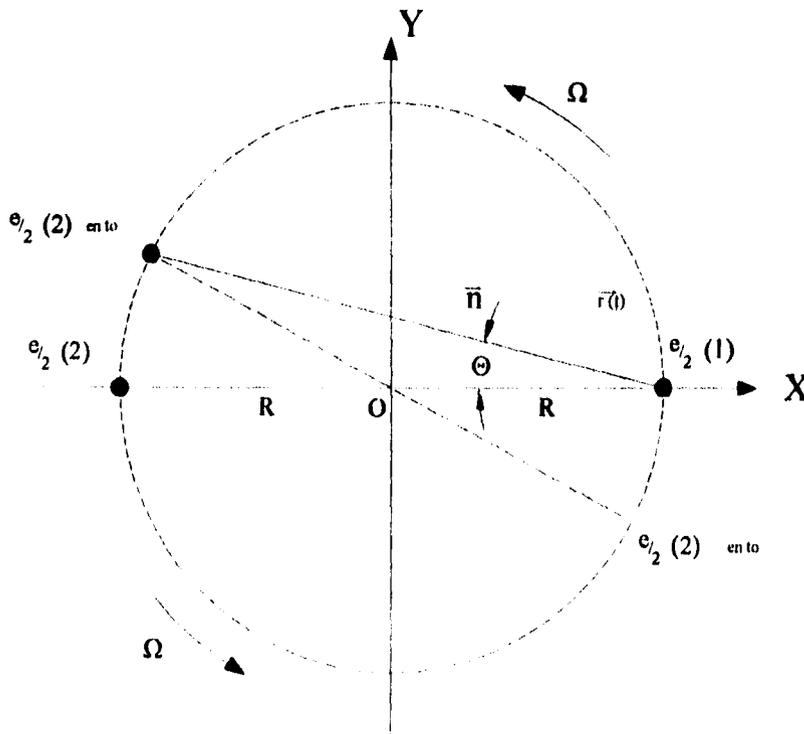


Figura 3.3

Para simplificar el cálculo, calculemos la torca en el instante en que el eje de la mancuerna coincide con el eje X. Por simetría, la torca total debe de ser el doble de la torca que experimenta la carga (1). La información electromagnética que llega a (1) al tiempo $t=0$ salió de la carga (2) en un instante anterior, al cual llamaremos t_0 . En ese instante, la carga (2) se encuentra en el punto P, el cual se encuentra a un ángulo θ del eje X. Ahora, para conocer la torca necesitamos primero la fuerza, y para conocer la fuerza debemos de calcular el campo eléctrico dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e n}{2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^3} \left[(c^2 - v^2) \mathbf{m} + \mathbf{n} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{a}) \right] \quad (3.18)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de la carga que "emite", \mathbf{a} es la aceleración de la misma, \mathbf{n} es un vector que va de la carga que "emite" al punto de "recepción" \mathbf{r} (i.e. $\mathbf{n} = \mathbf{r} - \mathbf{s}$), $\mathbf{m} = c\hat{n} - \mathbf{v}$, y todas las cantidades hay que evaluarlas al tiempo retardado t_0 .

En coordenadas Cartesianas, tenemos que: $\mathbf{n} = R\mathbf{i} - \mathbf{s}$ como se muestra en la figura.3.4:

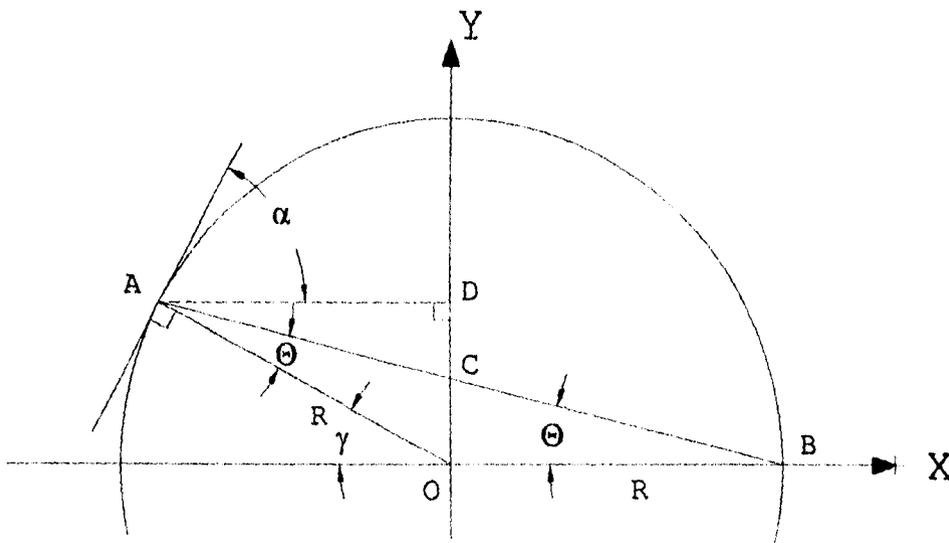


Figura 3.4

Ahora, como el triángulo AOB es isosceles, tenemos que:

$$\angle OAB = \angle OBA = \theta$$

$$\Rightarrow \angle AOB = \pi - 2\theta$$

$$\therefore \gamma = \pi - \angle AOB = 2\theta$$

Por otra parte,

$$\angle OCB = \angle ACD = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\& \angle DAC = \angle OBC = \theta$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

De la figura 3.4, tenemos que:

$$\mathbf{s} = -R \cos \gamma \mathbf{i} + R \sin \gamma \mathbf{j}$$

$$\therefore \mathbf{s} = -R \cos 2\theta \mathbf{i} + R \sin 2\theta \mathbf{j}$$

entonces,

$$\mathbf{n} = R(1 + \cos 2\theta) \mathbf{i} - R \sin 2\theta \mathbf{j}$$

que simplificando con identidades trigonométricas se escribe como:

$$\mathbf{n} = 2R \cos \theta \hat{n} \quad (3.75)$$

donde,

$$\hat{n} = \cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} \quad (3.76)$$

Ahora, la velocidad que lleva la carga en el punto P está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -R \Omega \cos \alpha \mathbf{i} - R \Omega \sin \alpha \mathbf{j} \\ &= -R \Omega (\sin 2\theta \mathbf{i} + \cos 2\theta \mathbf{j}) \end{aligned} \quad (3.77)$$

y la aceleración radial está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= R \Omega^2 \cos \gamma \mathbf{i} - R \Omega^2 \sin \gamma \mathbf{j} \\ &= R \Omega^2 (\cos 2\theta \mathbf{i} - \sin 2\theta \mathbf{j}) \end{aligned} \quad (3.78)$$

por lo que el último vector que necesitamos para evaluar el campo es:

$$\mathbf{m} = (c \cos \theta + R \Omega \sin 2\theta) \mathbf{i} + (R \Omega \cos 2\theta - c \sin \theta) \mathbf{j} \quad (3.79)$$

Al reemplazarlos en (3.18), encontramos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e}{2(2R \cos \theta)^2 (c + \Omega R \sin \theta)^3} \times \left\{ c \cos \theta (c^2 + 2c \Omega R \sin \theta - \Omega^2 R^2 \cos 2\theta) \mathbf{i} \right. \\ &\quad \left. + [-c^3 \sin \theta + c^2 \Omega R \cos 2\theta + c \Omega^2 R^2 \sin \theta (2 + \cos 2\theta) + \Omega^3 R^3] \mathbf{j} \right\} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Lo siguiente es conocer la fuerza. Sabemos por Lorentz que:

$$\mathbf{F} = \frac{e}{2} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (3.81)$$

Sin embargo, tanto \mathbf{E} como \hat{n} están sobre el Plano XY. Por lo tanto, $\mathbf{B} = \hat{n} \times \mathbf{E}$ es un vector paralelo al eje Z, lo cual implica que la parte *magnética* de la fuerza expresada en (3.81) apunta radialmente, y por ende no contribuye a la torca.

Entonces, tenemos que:

$$\mathbf{T} = 2 \left(R \hat{i} \times \frac{e}{2} \mathbf{E} \right) \quad (3.82)$$

y, al reemplazar los vectores correspondientes cobra la siguiente forma:

$$\mathbf{T} = \frac{e \mathbf{k}}{8R \cos^2 \theta (c + \Omega R \sin \theta)^3} \left[-c^3 \sin \theta + c^3 \Omega R \cos 2\theta + c \Omega^2 R^2 \sin \theta (2 + \cos 2\theta) + \Omega^3 R^3 \right] \quad (3.83)$$

El siguiente paso es librarnos de θ . Para ello, tenemos como siempre que:

$$-c t_0 = n \quad (3.84)$$

Ahora, desde el instante en que la carga (2) "emite" hasta el instante en que la carga (1) "recibe", la mancuerna ha girado un ángulo $\gamma = 2\theta$,

$$\therefore 2\theta = -\Omega t_0 \Rightarrow t_0 = -\frac{2\theta}{\Omega} \quad (3.85)$$

y como tenemos de (3.75) que:

$$n = 2R \cos \theta \quad (3.86)$$

de (3.84):

$$-t_0 = \frac{2R \cos \theta}{c}$$

$$\therefore R \Omega \cos \theta = 0 c \Rightarrow \theta = \beta \cos \theta \quad (3.87)$$

donde $\beta = R \Omega / c$.

La ecuación (3.87) nos permite reescribir (3.83) como:

$$\mathbf{T} = \frac{e^2 \beta \mathbf{k}}{8 R \theta^2 \left[1 + (\beta^2 - \theta^2)^{1/2} \right]} \left[(\beta^4 - \beta^2 + 2\theta^2) + (\beta^2 - \theta^2)^{1/2} (\beta^2 + 2\theta^2 - 1) \right] \quad (3.88)$$

y nos permite también escribir:

$$\beta = \theta \sec \theta = \theta + \frac{1}{2} \theta^3 + \frac{5}{24} \theta^5 + \frac{61}{720} \theta^7 + \dots \quad (3.89)$$

Invirtiendo la serie (3.89), se obtiene:

$$\theta = \beta - \frac{1}{2} \beta^3 + \frac{13}{24} \beta^5 - \frac{541}{720} \beta^7 + \dots \quad (3.90)$$

y reemplazando la expansión (3.90) en (3.88), haciendo el álgebra usual⁹, encontramos finalmente:

$$\mathbf{T} = \frac{e^2 \beta^3}{3 R} \left(1 - \frac{14}{5} \beta^2 + \dots \right) \mathbf{k} \quad (3.91)$$

La ecuación (3.91) resulta un poco alarmante ya que el término dominante tiene el efecto de *incrementar* a la velocidad angular, y esto está en contradicción con lo que ya hemos aprendido que debe ocurrir: un aumento en la inercia rotacional de la mancuerna debido a su carga. Sin embargo, aun no hemos incluido la auto-torca debida a la auto-fuerza de cada extremo de la mancuerna sobre sí mismo. Para hacerlo y ver si eso arregla la situación, lo primero que se nos ocurre (quizas ya simplemente por costumbre) es recurrir a (3.12) para calcular la fuerza que cada extremo ejerce sobre sí mismo, y utilizarla para calcular la respectiva auto-torca. Sin embargo, aquí conviene tener mucho cuidado antes de proseguir y cometer un error.

Recordemos que la ecuación (3.12) y la auto-fuerza *no* son la misma fuerza. Anteriormente, hemos hecho cálculos para tomar en cuenta la estructura del electrón modelándolo como una mancuerna rígida, y al tomar el límite cuando la separación entre los extremos de la mancuerna tiende a cero, el término sobreviviente de la expansión para la auto-fuerza (salvo la renormalización de masa que siempre es divergente y sobre la cual ya hemos discutido brevemente) coincide con la acción de radiación predicha por (3.12). En *este* caso, es claro que no tiene sentido recurrir a (3.12) para calcular la fuerza que ejerce cada extremo sobre sí mismo por lo siguiente:

En los dos casos anteriores, aun al despreñar la estructura siempre fué claro cuanto valía la aceleración y la velocidad de cada extremo de la mancuerna. Esto es importantísimo ya que resulta indispensable conocer estos vectores con toda precisión para evaluar \mathbf{G} , y por ende \mathbf{F}_{rad} . Si aquí hacemos $R \rightarrow 0$, no es tan fácil hablar de las

⁹Véase el Apéndice B.

velocidades y aceleraciones que percibiría un observador muy lejano a la mancuerna. De hecho, de acuerdo con las expresiones (3.77) y (3.78) un observador lejano concluiría $\mathbf{a} = \mathbf{v} = 0$. Además, al tomar el límite cuando $R \rightarrow 0$ estamos volviendo al caso de una *partícula* cargada, y creo que no tiene mucho sentido hablar de la *rotación* de una *partícula*. De hecho, justamente por esta razón fué que elegimos a β (3.87) en lugar de R como parámetro para hacer el desarrollo de la auto-torca.

Habiendo establecido entonces que no podemos seguir el mismo método que hemos estado empleando, debemos buscar algún camino alternativo para superar la dificultad que nos presentó la ecuación (3.91). Una posibilidad sería el siguiente argumento [15]:

Es un hecho que para que una partícula gire sobre una circunferencia de radio R , debe de estar sujeta a una fuerza centrípeta $F_{r_{ext}}$. Sin embargo, si la partícula está cargada entonces va a radiar debido a que está acelerada. Además, es claro que la fuerza centrípeta no puede actuar como la fuente de esta energía ya que es una fuerza *radial*, y por lo tanto es perpendicular en todo instante a la trayectoria de la partícula. Por conservación de la energía concluimos entonces que debe existir una fuerza adicional *tangencial* $F_{\theta_{ext}}$, en sentido del movimiento de la partícula. Ahora, en nuestro caso particular tenemos que la carga rota con una velocidad angular *constante* Ω . Si hubiese una fuerza tangencial, esta tendría el efecto de acelerar a la partícula en dirección del movimiento, y para contrarrestar este efecto debemos añadir *otra* fuerza tangencial $F_{\theta_{em}}$, antiparalela a la anterior, tal y como se muestra en la figura 3.5.

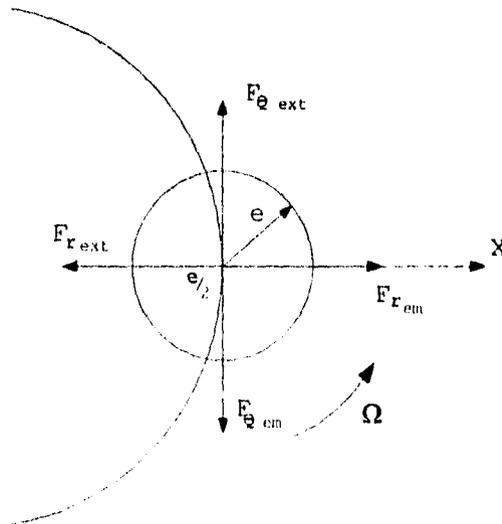


Figura 3.5

Debido a su orientación, vemos que \mathbf{F}_{0em} tiende a frenar a la carga en el sentido de su movimiento, y por tal motivo la identificamos con la reacción de radiación. El siguiente paso entonces sería calcular cuanto vale \mathbf{F}_{0em} . Para ello, es necesario conocer primero cuanto valen los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} en la posición de la carga, y lo que haremos será promediar los campos sobre una esfera de radio ϵ centrada en la carga $e/2$, y luego tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Este cálculo no es demasiado complicado, aunque si es un poco tedioso en el álgebra¹⁰, por lo que simplemente citamos el campo *eléctrico* promedio en el interior de la esfera de radio ϵ :

$$\mathbf{E}_{\text{auto}} = \frac{e \Omega^2 R}{12 c^2 \epsilon} \mathbf{i} - \frac{1 e \Omega^3 R}{3 c^3} \mathbf{j} \quad (3.92)$$

Como andamos tras de una fuerza en sentido $-\mathbf{j}$, el campo magnético no nos interesa ya que tanto \mathbf{n} como \mathbf{E} están sobre el plano XY , lo que implica que \mathbf{B} es paralelo al eje Z , y por lo tanto $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ será un vector *radial*. La ecuación (3.92) nos permite entonces escribir:

$$\mathbf{F}_{0\text{auto}} = \frac{e}{2} \mathbf{E}_{0\text{auto}} = -\frac{1}{6} \left(\frac{e^2 \Omega^3 R}{c^3} \right) \mathbf{j} \quad (3.93)$$

ó, en términos de β ,

$$\mathbf{F}_{0\text{auto}} = -\frac{1}{6} \left(\frac{e^2 \beta^3}{R^2} \right) \mathbf{j} \quad (3.94)$$

Esto quiere decir que:

$$\mathbf{T}_{\text{auto}}^{\text{extremo}} = R \mathbf{i} \times \mathbf{F}_{0\text{auto}} = -\frac{1}{6} \left(\frac{e^2 \beta^3}{R} \right) \mathbf{k} \quad (3.95)$$

y como la mancuerna tiene dos extremos, al sumarle el doble de (3.95) a (3.91) ocurre una cancelación exacta del término dominante, y sólo nos queda una auto-torca que tiende a disminuir la rotación, como era de esperarse.

¹⁰Véase [15]. El cálculo viene muy bien esbozado.

3.5 Acerca de la Reacción de Radiación de un Monopolo Magnético.

En las tres secciones anteriores hemos discutido ampliamente la manera de obtener la reacción de radiación de un electrón (monopolo eléctrico) a partir del modelo de mancuerna rígida. La siguiente pregunta que uno se puede hacer es si los resultados obtenidos en las secciones anteriores son semejantes a los que se obtendrían en el caso de un monopolo magnético. La respuesta a esta pregunta la encontramos comparando las ecuaciones (2.67) y (2.70) del capítulo anterior para los campos producidos por un monopolo magnético en movimiento arbitrario con las ecuaciones (3.18) y (3.19) que son su contraparte para un monopolo eléctrico. Tenemos como siempre:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e n}{2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^3} \left[(c^2 - v^2) \mathbf{m} + \mathbf{n} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{a}) \right] \quad (3.18)$$

sin embargo,

$$\mathbf{m} = c (\hat{\mathbf{n}} - \vec{\beta}) \quad (3.96)$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = c n (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\beta}) = s \quad (3.97)$$

recordando la ecuación (2.49) del capítulo anterior. Así, al reemplazar (3.96) y (3.97) en (3.18) encontramos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{2} \left[\frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{n}} - \vec{\beta})}{s^3 R^2} + \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \{ (\hat{\mathbf{n}} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \}}{c s^3 R} \right] \quad (3.98)$$

pero

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = g \left[\frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{n}} - \vec{\beta})}{s^3 R^2} + \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \{ (\hat{\mathbf{n}} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \}}{c s^3 R} \right] \quad (2.67)$$

Comparando (3.98) con (2.67) vemos que son idénticas en su forma, y que se puede obtener una a partir de la otra simplemente haciendo $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ y $e/2 \rightarrow g$. Del mismo modo, encontramos una correspondencia entre (3.19) y (2.70) haciendo $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$. Esto quiere decir entonces que si queremos conocer la expansión para la autofuerza de una mancuerna de carga magnética, basta tomar los resultados que ya conocemos para la mancuerna de carga eléctrica, y hacer $e \rightarrow g$ en las expresiones para la autofuerza y/o la auto-torca, según sea el caso de interés. Por tal motivo, no hablaremos más acerca de la reacción de radiación que experimenta un monopolo magnético, y pasaremos al problema de partículas con *ambos* tipos de carga.

3.6 Acerca de la Reacción de Radiación de una Partícula con Carga Eléctrica y Magnética.

Para terminar esta discusión, pasaremos ahora al problema del cálculo de la reacción de radiación de una partícula con carga eléctrica y magnética. Este problema es de interés ya que, como se mostró en el capítulo 1, es posible explicar la aparente ausencia de carga magnética como una consecuencia de la coexistencia de carga eléctrica y magnética en una razón fija, de acuerdo a la ecuación (1.44), además de que hasta donde nosotros sabemos no existe ninguna literatura al respecto. Para estudiar este problema, nuevamente vamos a emplear el método de Lorentz para modelar a la partícula como una mancuerna rígida tal que su punto medio se mueve de acuerdo a $x = \omega(t)$, con la única diferencia de que ahora colocaremos en uno de los extremos de la mancuerna toda la carga eléctrica de la partícula, y en el otro toda su carga magnética.

3.6.1 Cálculo de la Auto-Fuerza sobre una Mancuerna de Carga Eléctrica y Magnética en Movimiento Longitudinal.

Consideremos un sistema como el que se muestra en la figura 3.6:

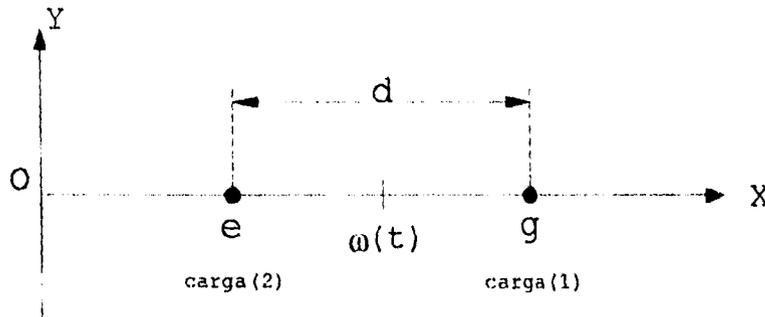


Figura 3.6

Afortunadamente, ya calculamos en las secciones anteriores las expresiones que necesitamos para conocer los campos eléctricos y magnéticos de esta configuración. Lo que resta entonces es simplemente evaluar cuanto vale la fuerza. Sean \mathbf{E}_e y \mathbf{B}_e los campos producidos por la carga eléctrica, \mathbf{E}_g y \mathbf{B}_g los campos producidos por la carga magnética, \mathbf{F}_{eg} la fuerza que siente la carga eléctrica debido a la magnética, y sea \mathbf{F}_{ge} la fuerza que siente la carga magnética debido a la eléctrica. Entonces, tenemos:

$$\mathbf{F}_{eg} = e \left(\mathbf{E}_g + \frac{\mathbf{v}_g}{c} \times \mathbf{B}_g \right) \quad (3.99)$$

$$\mathbf{F}_{ge} = g \left(\mathbf{B}_e - \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{E}_e \right) \quad (3.100)$$

Por otra parte, sabemos que la carga eléctrica produce un campo eléctrico de la forma $\mathbf{E}_e = E \hat{\mathbf{i}}$ (la forma precisa de esta expresión está dada por (3.33), haciendo $e/2 \rightarrow e$). Además tenemos que $\mathbf{v}_e = \dot{\omega} \hat{\mathbf{i}}$, y $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{i}}$. Entonces, dado que $\mathbf{B}_e = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_e$, $\mathbf{B}_e = 0$. Del mismo modo, tenemos que:

$$\mathbf{B}_g = -\frac{g}{e} E \hat{\mathbf{i}}, \mathbf{v}_g = \dot{\omega} \hat{\mathbf{i}}, \mathbf{n} = -\hat{\mathbf{i}} \text{ y } \mathbf{E}_g = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}_g \Rightarrow \mathbf{E}_g = 0$$

de donde vemos que una mancuerna de carga eléctrica y magnética en movimiento longitudinal no experimenta auto-fuerza alguna. Claramente, esto constituye una tremenda diferencia con los casos netamente eléctrico y/o magnético, sobre la cual hablaremos más adelante.

3.6.2. Cálculo de la Auto-Fuerza sobre una Mancuerna de Carga Eléctrica y Magnética en Movimiento Transversal.

En este caso tenemos el sistema descrito por la figura 3.7:

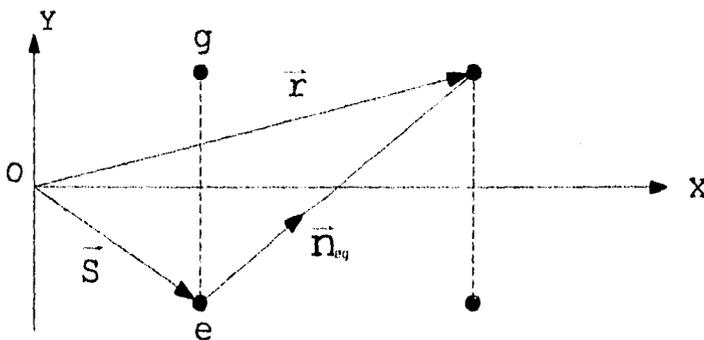


Figura 3.7

En este caso tenemos que:

$$\mathbf{E}_e = e F_x \hat{\mathbf{i}} + e F_y \hat{\mathbf{j}} \quad (3.101)$$

$$\mathbf{B}_g = g F_x \hat{\mathbf{i}} - g F_y \hat{\mathbf{j}} \quad (3.102)$$

$$\mathbf{B}_e = e B \hat{\mathbf{k}} \quad (3.103)$$

$$\mathbf{E}_g = g B \hat{\mathbf{k}} \quad (3.104)$$

donde F_x y F_y están dados por los corchetes de (3.56) y B está dado por el corchete de (3.60). Reemplazando estos resultados en (3.99) y (3.100), y notando que $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_g = \dot{\omega} \mathbf{i}$ tenemos:

$$\mathbf{F}_{e,y} = e g \left(B + \frac{\dot{\omega}}{c} E_y \right) \mathbf{k} \quad (3.105)$$

$$\mathbf{F}_{g,x} = e g \left(B - \frac{\dot{\omega}}{c} E_y \right) \mathbf{k} \quad (3.106)$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{\text{auto}} = \mathbf{F}_{e,y} + \mathbf{F}_{g,x} = 2 g e B \mathbf{k} \quad (3.107)$$

donde nuevamente se observa una enorme diferencia con los casos netamente eléctricos o magnéticos, en particular en el *sentido* de la fuerza, que en este caso es *perpendicular* al plano XY mientras que en los otros era una fuerza *sobre* del plano, pero de esto hablaremos en el siguiente capítulo.

3.6.3. Cálculo de la Auto-Torca sobre una Mancuerna Rígida de Carga Eléctrica y Magnética Girando en contra de las Manecillas del Reloj con Velocidad Angular Constante Ω .

Consideremos un sistema como el que se muestra en la figura 3.8:

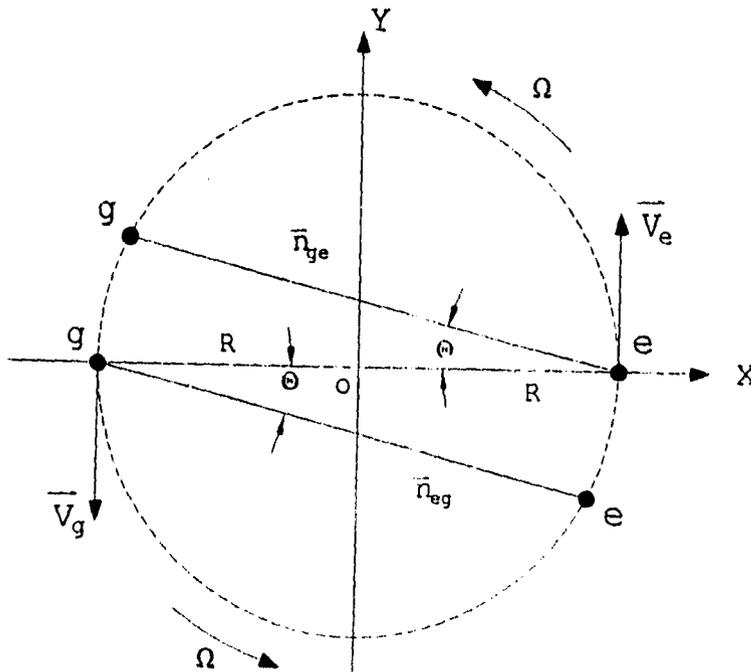


Figura 3.8

Nuevamente vamos a calcular la torca en el instante en que la mancuerna está alineada a lo largo del eje X para poder aprovechar los resultados que ya calculamos en la sección 3.4. Sean \mathbf{E}_e y \mathbf{B}_e los campos producidos por la carga eléctrica, y sean \mathbf{E}_g y \mathbf{B}_g los campos producidos por la carga magnética. Como ya hemos visto anteriormente, tenemos que $\mathbf{E}_g = -\hat{n}_{ge} \times \mathbf{B}_e$, y como dado que \hat{n}_{ge} y \mathbf{B}_e son vectores sobre el plano XY, es claro que el campo eléctrico producido por la carga magnética va a ser paralelo al eje Z. Además, en el instante en que vamos a calcular la torca \mathbf{v}_e es paralelo a \mathbf{j} , por lo cual tenemos que:

$$\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}_g = -R \Omega (\mathbf{B}_g \cdot \mathbf{i}) \mathbf{k}$$

Reemplazando estos dos resultados en (3.99), encontramos que la torca que siente la carga eléctrica debido a la carga magnética, \mathbf{T}_{eg} , está dada por:

$$\mathbf{T}_{eg} = - \left(e R E_g - \frac{e R^2 \Omega}{c} (\mathbf{B}_g \cdot \mathbf{i}) \right) \mathbf{j} \quad (3.108)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior para el otro extremo de la mancuerna, encontramos que la torca que siente la carga magnética debido a la eléctrica es:

$$\mathbf{T}_{ge} = \left(g R B_e - \frac{g R^2 \Omega}{c} (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{i}) \right) \mathbf{j} \quad (3.109)$$

de donde obtenemos que:

$$\mathbf{T}_{\text{total}} = \left((g B_e - e E_g) R + \left(e (\mathbf{B}_g \cdot \mathbf{i}) - g (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{i}) \right) \frac{R^2 \Omega}{c} \right) \mathbf{j} \quad (3.110)$$

Ahora, tenemos que:

$$\mathbf{B}_e = -\frac{e}{g} \mathbf{E}_g, \Rightarrow g B_e = e E_g \text{ y } e (\mathbf{B}_g \cdot \mathbf{i}) = -g (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{i})$$

por lo cual:

$$\mathbf{T}_{\text{total}} = \left(2 e (\mathbf{B}_g \cdot \mathbf{i}) \right) \frac{R^2 \Omega}{c} \mathbf{j} \quad (3.111)$$

Podemos conocer $(\mathbf{B}_g \cdot \mathbf{i})$ a partir de la componente i de (3.80), simplemente haciendo $e/2 \rightarrow g$. Reemplazando esto en (3.111) obtenemos:

$$\mathbf{T}_{\text{auto}} = \frac{e g \Omega}{2 \cos \theta (c + R \Omega \sin \theta)^2} (c^2 + 2 R \Omega c \sin \theta - R^2 \Omega^2 \cos 2\theta) \mathbf{j} \quad (3.112)$$

Esta expresión se puede reescribir adecuadamente usando (3.87) como:

$$\mathbf{T}_{\text{auto}} = \frac{e g \beta^3}{2 R c \left[1 + (\beta^2 - \theta^2)^{1/2} \right]^2} \left[1 + (\beta^2 - \theta^2)^{1/2} - 2\theta^2 + \beta^2 \right] \mathbf{j} \quad (3.113)$$

lo cual implica de acuerdo a (3.90) que:

$$\mathbf{T}_{\text{auto}} = \frac{e g \beta}{2 R} \left\{ 1 - \frac{5}{2} \beta^2 + \frac{181}{24} \beta^4 - \dots \right\} \mathbf{j} \quad (3.114)$$

La expresión (3.114) es muy diferente a la (3.91), y desde luego resulta aun más sorprendente y alarmante ya que esperaríamos que la torca fuese en sentido \mathbf{k} . Sin embargo, tal parece que el hecho de tener ambos tipos de carga surte el efecto de que una vez que la carga eléctrica se entera de la magnética (al estar la mancuerna alineada con el eje X), el plano de giro de la mancuerna va a empezar a rotar. Además, en este caso no se resuelve nada considerando la torca que experimenta cada extremo debido a si mismo, ya que si volvemos a proceder de acuerdo con la sección 3.4, resulta que cuando la mancuerna se encuentra alineada con el eje X:

$$\mathbf{E}_{\text{auto}}^{\text{extremo eléctrico}} = \frac{e \Omega^2 R}{6 c^2 \epsilon} \mathbf{i} - \frac{2 e \Omega^3 R}{3 c^3} \mathbf{j} \quad (3.115)$$

y realizando un cálculo completamente análogo para el extremo con carga magnética tenemos que:

$$\mathbf{B}_{\text{auto}}^{\text{extremo magnético}} = -\frac{g \Omega^2 R}{6 c^2 \epsilon} \mathbf{i} + \frac{2 g \Omega^3 R}{3 c^3} \mathbf{j} \quad (3.116)$$

Con estas expresiones tenemos entonces que, de acuerdo con la discusión que se realizó en torno a la figura 3.5:

$$\mathbf{F}_{0 \text{ auto}}^{\text{extremo eléctrico}} = e \mathbf{E}_{0 \text{ auto}}^{\text{extremo eléctrico}} = -\frac{2}{3} \left(\frac{e^2 \beta^3}{R^2} \right) \mathbf{j} \quad (3.117)$$

y

$$\mathbf{F}_{0 \text{ auto}}^{\text{extremo magnético}} = g \mathbf{B}_{0 \text{ auto}}^{\text{extremo magnético}} = \frac{2}{3} \left(\frac{g^2 \beta^3}{R^2} \right) \mathbf{j} \quad (3.118)$$

A partir de (3.117) y (3.118) vemos que podemos escribir las auto-torcas que actúan sobre los extremos debidas a los auto-campos como:

$$\mathbf{T}_{\text{auto}}^{\text{extremo eléctrico}} = R \mathbf{i} \times \mathbf{F}_{0 \text{ auto}}^{\text{extremo eléctrico}} = -\frac{2}{3} \left(\frac{e^2 \beta^3}{R} \right) \mathbf{k} \quad (3.119)$$

y

$$\mathbf{T}_{\text{auto}}^{\text{extremo magnético}} = -R \mathbf{i} \times \mathbf{F}_{0 \text{ auto}}^{\text{extremo magnético}} = -\frac{2}{3} \left(\frac{g^2 \beta^3}{R} \right) \mathbf{k} \quad (3.120)$$

De esta forma, sumándole (3.119) y (3.120) a la expansión (3.114) obtenemos:

$$\mathbf{T}_{\text{auto}}^{\text{total}} = \frac{e g \beta}{2 R} \left\{ 1 - \frac{5}{2} \beta^2 + \frac{181}{24} \beta^4 - \dots \right\} \mathbf{j} - \frac{2 \beta^3}{3 R} (e^2 + g^2) \mathbf{k} \quad (3.121)$$

la cual es un desarrollo *radicalmente* diferente a los desarrollos que corresponden a los casos de carga nétamente eléctrica o magnética. En ella, vemos que además de un término de atenuación en el sentido de rotación (debido a la influencia de cada extremo sobre sí mismo), hay un término adicional que tiene el efecto de hacer que precese el eje de rotación. Esto es interesante, ya que nuevamente la introducción de carga magnética a un sistema eléctrico introduce fuerzas en nuevas direcciones, tal y como fué el caso en la sección anterior, pero de esto hablaremos más adelante.

CONCLUSIONES

En los primeros dos capítulos de este trabajo encontramos varios resultados importantes.

En primer lugar, encontramos que suponer la existencia de carga magnética no altera de ninguna forma los resultados conocidos de la electrodinámica, y que de hecho la aparente ausencia de carga magnética es equivalente, dentro del contexto de las ecuaciones de Maxwell, a pensar que existe carga eléctrica y magnética en una proporción fija. A continuación, resolviendo las ecuaciones de Maxwell para un monopolo magnético en movimiento arbitrario encontramos que las soluciones son en todo consistentes con las soluciones correspondientes a un monopolo eléctrico, tal y como se esperaba, y también encontramos que la fuerza que experimenta un monopolo magnético de magnitud g , moviéndose a velocidad \mathbf{v} en presencia de campos externos \mathbf{E} y \mathbf{B} está dada por:

$$\mathbf{F} = g \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right)$$

Posteriormente, en el capítulo 3 nos familiarizamos con el manejo del método de Lorentz (usando el modelo de mancuerna rígida propuesto por Griffiths) para calcular la reacción de radiación sobre una partícula cargada eléctricamente, considerando tres diferentes tipos de movimientos de la mancuerna. Encontramos que el método de Lorentz nos conduce a resultados consistentes con la fórmula de Abraham, tanto para movimiento longitudinal como transversal, y exhibimos detalladamente las complicaciones que surgen a partir del modelo de mancuerna rígida para calcular la auto-torca correctamente. En particular, encontramos también que todos los resultados para una partícula cargada magnéticamente eran plenamente consistentes con los correspondientes a una carga eléctrica, y todo parecía marchar bien.

Sin embargo, el siguiente paso fué tomar todos los resultados anteriores, y aplicarlos al problema de una partícula con carga eléctrica y magnética, y fué ahí donde surgieron resultados muy sorprendentes. En primer lugar, encontramos en la sección 3.6.1 que *una mancuerna de carga eléctrica y magnética en movimiento longitudinal no experimenta auto-fuerza alguna*. Este resultado es muy sorprendente, ya que quiere decir que la carga eléctrica jamás se entera de la presencia de la magnética, y viceversa, y por ende la única fuerza que experimentan se debe a los campos propios y no a los externos. De hecho, a partir de la fórmula de Lorentz vemos que esta fuerza es:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \mathbf{i} \frac{2(e^2 + g^2)c}{3(c^2 - \dot{\omega}^2)^3} \left[\dot{\omega} \ddot{\omega}^2 + \frac{\ddot{\omega}}{3}(c^2 - \dot{\omega}^2) \right]$$

o bien, haciendo $\dot{\omega} = \beta c$,

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2}{3}(e^2 + g^2) \left\{ \frac{\ddot{\beta}}{3c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{\beta \ddot{\beta}}{c^2(1-\beta^2)^3} \right\} \mathbf{i}$$

Ahora, al analizar el movimiento transversal, esperaríamos que el resultado final fuese idéntico al anterior. Sin embargo, como se vió en la sección 3.6.2 esto no es así, y de hecho la fuerza total en este caso es:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2}{3}(e^2 + g^2) \left\{ \frac{\ddot{\beta}}{3c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{\beta \ddot{\beta}}{c^2(1-\beta^2)^3} \right\} \mathbf{i} + 2egB \mathbf{k}$$

donde B está dado por (3.60).

Esta diferencia resulta sumamente notable ya que el sistema de carga eléctrica y magnética experimenta una fuerza adicional a la que experimentan los sistemas netamente eléctricos ó magnéticos, y esta fuerza adicional tiende a hacer que la mancuerna salga del plano. Del mismo modo, en la sección 3.6.3 encontramos que una mancuerna de carga eléctrica y magnética experimenta una auto-torca muy distinta a la que experimenta una mancuerna netamente eléctrica ó magnética. De hecho, vimos que la introducción de ambos tipos de carga tiene el efecto de imposibilitar la rotación de la mancuerna sin que también precese el eje.

¿A qué se deberá esta anomalía? Esa es una pregunta muy difícil de responder. Quizas nos pudiésemos aventurar a responderla ingénuamente a la luz de la forma que cobra la fuerza de Lorentz para un monopolo magnético. Ciértamente, desde un punto de vista algebraico se puede deducir que estas nuevas fuerzas son el producto de los papeles invertidos que juegan los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} en las expresiones para la fuerza de Lorentz en el caso de un monopolo magnético, con respecto a la fuerza de Lorentz para un monopolo eléctrico, pero esa respuesta ciértamente no resulta satisfactoria. Dado que el método de Lorentz para el cálculo de la auto-fuerza parece estar lo suficientemente bien acorazado para resistir los embates de dudas en su contra, ¿podríamos culpar entonces al modelo de Griffiths? La respuesta a esta pregunta también es difícil. En principio, diríamos que no ya que el modelo en sí nos entregó buenos resultados en los casos netamente eléctricos y magnéticos. Sin embargo, aun no hemos realizado un estudio del comportamiento del modelo de Lorentz para configuraciones de carga eléctrica y magnética distintas a la mancuerna propuesta por Griffiths. Si realizáramos dicho estudio, por ejemplo para cascarones esféricos de carga eléctrica y magnética en movimiento acelerado, y encontrásemos fuerzas en direcciones distintas a las que encontramos para cascarones de carga netamente eléctrica o magnética moviéndose de la misma forma, el modelo de Griffiths quedaría libre de sospecha.

Todo parece indicar entonces que el culpable en el asunto es el monopolo magnético, pero esa sería una acusación mal fundada, ya que antes de siquiera empezar a discutir el problema de la reacción de radiación de partículas con carga eléctrica y

magnética, corroboramos la certeza de Feynmann al decir que: "*las mismas ecuaciones tienen las mismas soluciones*", y mostramos que las leyes de conservación de la electrodinámica (el teorema de Poynting, la divergencia del tensor de energía-momento, etc...) son exáctamente iguales antes y despues de introducir densidades de carga y corriente magnéticas en las ecuaciones de Maxwell. Por tal motivo, resulta lógico pensar que la introducción de carga magnética al lado de carga eléctrica en el modelo de Griffiths no debería de introducir ninguna fuerza nueva.

Finalmente, surge entonces la siguiente pregunta: ¿qué se puede concluir acerca de estos sorprendentes resultados? Objetivamente podemos concluir que el manejo del método de Lorentz, aunque a veces tedioso y engorroso, resultó ser a nuestro juicio mucho más intuitivo e ilustrativo que el método propuesto por Abraham para calcular la reacción de radiación. Y siendo honestos, debemos admitir que el problema encerraba muchas mas cosas de las que aparentaba en un inicio. Nuestros resultados indican que los sistemas con carga eléctrica y magnética experimentan fuerzas muy distintas a las que se manifiestan en sistemas nétamente eléctricos y magnéticos, pero no tenemos suficiente información todavía para poder explicar satisfactoriamente porqué sucede esto. Por lo tanto, consideramos que este trabajo no es más que una puerta abierta, para poder investigar más a fondo este interesante problema.

APÉNDICE B.

A lo largo del Capítulo 3 fué necesario realizar varias operaciones de potenciación e inversión de series con el fin de encontrar las expansiones en potencias de d para la auto-fuerza. Estas operaciones en realidad son muy sencillas, aunque en nuestro caso particular fueron muy pesadas de realizar simplemente por la cantidad tan tremenda de álgebra que involucraron. Con la finalidad de que el trabajo de tesis quede auto-contenido, presentamos aquí todos los resultados que utilizamos para poder obtener las expansiones anteriormente mencionadas.

Claramente se puede objetar la aparente ociosidad de lo que a continuación se presenta dada la existencia de toda clase de tablas con listas de estos resultados. El problema es que a veces no es posible encontrar la expansión para la potencia deseada de la serie en las tablas más comunes (como fué el caso de una serie al cubo por ejemplo), o bien las expansiones en tablas no incluyen todos los términos necesarios para el cálculo que se está realizando. Por lo tanto, a nosotros nos resultó muy conveniente familiarizarnos con la potenciación e inversión de series dado que no se disponía de facilidades tales como el software *Mathematica* en una máquina de gran memoria, o tablas soviéticas lo suficientemente neuróticas para realizar este trabajo.

A.B.I - Potenciación de Series.

Sea S una expansión en serie de potencias de x dada por:

$$S = a + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4 + f x^5 + \dots \quad (\text{A.B.1})$$

entonces, haciendo los productos pertinentes en cada caso resulta fácil encontrar los siguientes resultados:

$$S^2 = a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + 2(ad + bc)x^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)x^4 + 2(af + e b + cd)x^5 + \dots \quad (\text{A.B.2})$$

$$S^3 = a^3 + 3a^2bx + (3ab^2 + 3ac^2)x^2 + (3a^2d + 6abc + b^3)x^3 + (3ac^2 + 3a^2e + 6abd + 3b^2c)x^4 + [2a(af + be + cd) + b(c^2 + 2ae + 2bd) + 2c(ad + bc) + d(b^2 + 2ae) + 2abe + a^2f]x^5 + \dots \quad (\text{A.B.3})$$

Supongamos ahora que queremos encontrar una serie de potencias para $S^{1/2}$, o tal vez S^{-1} . El mecanismo para lograrlo sería el siguiente (como ejemplo calculemos S^{-1}):

Sea

$$\sigma = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \dots$$

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -(\mathbf{B} \cdot \mathbf{J}_m + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e) \quad (\text{A.A.4})$$

donde

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (\text{A.A.5})$$

se conoce como el *vector de Poynting*, y a partir de (A.A.4) es claro que este vector apunta en dirección del flujo de potencia radiada. Por otra parte, la expresión (A.A.4) no es más que la forma diferencial de escribir la ley de conservación de energía (es decir, el *Teorema de Poynting*) si consideramos la presencia de flujos de carga magnética en la región del espacio de interés.

Aplicando el teorema de la divergencia a la ecuación (A.A.4) considerando una superficie cerrada Σ que contiene un volumen V , tenemos:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = - \int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV - \int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{J}_m + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e) dV \quad (\text{A.A.5})$$

donde $d\mathbf{a} = \hat{n} R^2 d\Omega$.

Utilizando la forma integral del teorema de Poynting (A.A.5), vamos a calcular la potencia radiada por un monopolo magnético, para compararla con la potencia radiada por uno eléctrico. En el capítulo 2 mostramos que los campos producidos por un monopolo magnético en movimiento son:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = g \left[\frac{(1 - \beta^2)(\hat{n} - \vec{\beta})}{s^3 R^2} + \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{c s^3 R} \right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\hat{n} \times g \left[\frac{(1 - \beta^2)(\hat{n} - \vec{\beta})}{s^3 R^2} + \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{c s^3 R} \right]$$

por lo que vemos que ambos campos tienen un término que solo depende de la velocidad $\vec{\beta}$, y otro que también depende de la aceleración, $\dot{\vec{\beta}}$. Esto nos permite escribir a los campos como:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\vec{\beta}} + \mathbf{E}_{\dot{\vec{\beta}}} \quad (\text{A.A.6})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\vec{\beta}} + \mathbf{B}_{\dot{\vec{\beta}}} \quad (\text{A.A.7})$$

A partir de estas dos ecuaciones, tenemos que:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}_\rho \times \mathbf{B}_\rho + \mathbf{E}_\rho \times \mathbf{B}_{\dot{\beta}} + \mathbf{E}_{\dot{\beta}} \times \mathbf{B}_\rho + \mathbf{E}_{\dot{\beta}} \times \mathbf{B}_{\dot{\beta}} \quad (\text{A.A.8})$$

Ahora, $\mathbf{E}_{\dot{\beta}} \times \mathbf{B}_{\dot{\beta}}$ es un término que va como R^{-2} , $\mathbf{E}_\rho \times \mathbf{B}_\rho$ es un término que va como R^{-4} , y $\mathbf{E}_\rho \times \mathbf{B}_{\dot{\beta}}$ y $\mathbf{E}_{\dot{\beta}} \times \mathbf{B}_\rho$ son términos que van como R^{-3} . Esto significa que al multiplicar al vector de Poynting por $d\mathbf{a} = \hat{n} R^2 d\Omega$ e integrar sobre la superficie Σ , el único término que contribuye a la integral para grandes valores de R es $\mathbf{E}_{\dot{\beta}} \times \mathbf{B}_{\dot{\beta}}$ puesto que los otros tres decaen hiperbólicamente. Esto implica que:

$$P_{\text{rad}} = \frac{c}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left(\mathbf{B}_{\dot{\beta}} \times (\hat{n} \times \mathbf{B}_{\dot{\beta}}) \right) \cdot \hat{n} R^2 d\Omega \quad (\text{A.A.9})$$

donde hemos usado el hecho de que $\mathbf{E}_{\dot{\beta}} = -\hat{n} \times \mathbf{B}_{\dot{\beta}}$.

Por otra parte, tenemos que:

$$\mathbf{B}_{\dot{\beta}} \times (\hat{n} \times \mathbf{B}_{\dot{\beta}}) = \hat{n} B_{\dot{\beta}}^2 - \mathbf{B}_{\dot{\beta}} (\mathbf{B}_{\dot{\beta}} \cdot \hat{n})$$

y como

$$\mathbf{B}_{\dot{\beta}} = \frac{g \left\{ (\hat{n} - \vec{\beta}) \hat{n} \cdot \vec{\beta} - (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \hat{n} \cdot \vec{\beta} \right\}}{c s^3 R}$$

entonces

$$\mathbf{B}_{\dot{\beta}} \cdot \hat{n} = \frac{g \left(\hat{n} \cdot \vec{\beta} (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) - \hat{n} \cdot \vec{\beta} (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \right)}{c s^3 R} = 0$$

y la potencia radiada cobra la forma:

$$P_{\text{rad}} = \frac{c}{4\pi} \oint_{\Sigma} B_{\dot{\beta}}^2 R^2 d\Omega \quad (\text{A.A.10})$$

Ahora, el cálculo de $B_{\dot{\beta}}^2$ es directo a partir de la expresión para $\mathbf{B}_{\dot{\beta}}$ pero muy tedioso, por lo cual aquí solo citamos el resultado final:

$$P_{\text{rad}} = \frac{g^2}{4\pi c} \oint_{\Sigma} \frac{1}{s^3} \left\{ \dot{\beta}^2 + \frac{2(\hat{n} \cdot \dot{\beta})(\vec{\beta} \cdot \dot{\beta})}{s} - \frac{(1 - \beta^2)(\hat{n} \cdot \dot{\beta})}{s^2} \right\} d\Omega \quad (\text{A.A.11})$$

A partir de (A. A. 11) podemos escribir:

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{d\Omega} = \frac{g^2}{4\pi c s^6} \left| \hat{n} \times (\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right|^2 \quad (\text{A.A. 12})$$

y en un régimen de velocidades tal que $\beta \ll 1$, $s \cong 1 \Rightarrow s^6 = 1$ y la expresión (A.A.12) cobra la forma:

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{d\Omega} = \frac{g^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \sin^2 \theta \quad (\text{A.A. 13})$$

donde θ es el ángulo entre $\dot{\vec{\beta}}$ y \hat{n} .

Claramente podemos alinear al vector \hat{n} con los ejes de coordenadas de modo que esta θ corresponda al ángulo θ en coordenadas esféricas. De esta forma, tenemos que:

$$P_{\text{rad}} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \frac{g^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \sin^3 \theta$$

$$\therefore P_{\text{rad}} = \frac{2}{3} \frac{g^2 a^2}{c^3} \quad (\text{A.A. 14})$$

donde hemos usado el hecho que $\dot{\beta}^2 = a^2 / c^2$.

La ecuación (A.A. 14) para la potencia radiada por un monopolo magnético tiene una contraparte en el caso netamente eléctrico muy bien conocida llamada la *Fórmula de Larmor*. Esta expresión es la base a partir de la cual se obtiene la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz en el capítulo 3, y vemos que su forma para un monopolo magnético es totalmente consistente con la forma para una carga eléctrica, haciendo simplemente el intercambio $e \rightarrow g$.

APÉNDICE A

Acerca del Teorema de Poynting para Sistemas con Carga Eléctrica y Magnética, y de la Potencia Radiada por un Monopolo Magnético.

En este apéndice concluiremos la discusión que se inició en el capítulo 2 acerca de la solución a las ecuaciones de Maxwell en presencia de monopolos magnéticos, estudiando como se altera la forma de las leyes de conservación de energía del campo electromagnético, y mostraremos que todos los resultados que se obtienen para densidades de carga y corriente magnética son consistentes con los que ya se conocen para densidades de carga y corriente eléctrica.

Sabemos que para cualquier pareja de vectores se cumple:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.A.1})$$

entonces, reemplazando en (1.26) y (1.28) en (A.A.1) encontramos:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_m \right) - \mathbf{E} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_e \right)$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) &= 2 \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \\ \Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) &= -\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + B^2) - \frac{4\pi}{c} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{J}_m + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e) \end{aligned}$$

y como sabemos que la densidad de energía almacenada por el campo electromagnético, u , se escribe como:

$$u = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \quad (\text{A.A.2})$$

entonces claramente vemos que:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\frac{4\pi}{c} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{J}_m + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e) \right\} \quad (\text{A.A.3})$$

lo cual se puede reescribir como:

de modo que $S\sigma = 1$. Realizando el producto de ambas series, encontramos:

$$S\sigma = a\alpha + x(a\beta + b\alpha) + x^2(a\gamma + b\beta + c\alpha) + \dots$$

Sin embargo, dado que $S\sigma = 1 \forall x$, entonces todos los coeficientes de potencias de x en $S\sigma$ deben de ser nulos, por lo cual:

$$\alpha = \frac{1}{a}, \quad a\beta + b\alpha = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{b}{a^2}, \text{ etc...}$$

i.e.

$$S^{-1} = a^{-1} \left[1 - \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} \right)x^2 + \left(\frac{2bc}{a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{a^3} \right)x^3 + \left(\frac{2bd}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{e}{a} - 3\frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} \right)x^4 + \dots \right] \quad (\text{A.B.4})$$

Las ecuaciones (A.B.3) y (A.B.4) fueron de gran utilidad en el capítulo 3 ya que cada vez que se calculaban los campos había que encontrar una expansión para $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^{-1}$. Por ejemplo, en el caso del movimiento transversal se tiene:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) = d(c^2 - \dot{\omega}^2)^{1/2} + \frac{\dot{\omega}\ddot{\omega}}{(c^2 - \dot{\omega}^2)}d^2 + \left[\frac{8c^2\dot{\omega}^3\ddot{\omega} - 3c^4\ddot{\omega}^2 - 4\dot{\omega}\ddot{\omega}c^4 + 4\dot{\omega}^4\ddot{\omega}^2 - c^2\dot{\omega}^2\ddot{\omega}^2 - 4\dot{\omega}^3\ddot{\omega}}{8(c^2 - \dot{\omega}^2)^{7/2}} \right]d^3 + \dots$$

de donde se ve claramente que el álgebra involucrada para llegar a (3.55) resultó realmente tediosa y elaborada. Otro resultado que fué muy importante conocer para trabajar con la expansión (3.88) para la auto-torca (y que se obtiene de manera muy similar a la forma en que se obtuvo (A.B.4)) es:

$$S^{-1/2} = a^{-1/2} \left[1 - \frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \left(\frac{3}{8}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{c}{a} \right)x^2 + \dots \right] \quad (\text{A.B.5})$$

A.B.II. Inversión de Series.

El otro tipo de cálculo que se realizó fué el siguiente:

Sea:

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots \quad (\text{A.B.6})$$

Nosotros queremos encontrar α , β , γ , δ , etc ... tales que:

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \dots \quad (\text{A.B.7})$$

para ello, tomamos (A.B.7), la elevamos al cuadrado, al cubo, a la cuarta, etc.. y reemplazamos estas expansiones en (A.B.6):

$$y = \alpha \alpha y + (\alpha \beta + b \alpha^2) y^2 + (\alpha^3 + a \gamma + 2 b \alpha \beta) y^3 + \dots \quad (\text{A.B.8})$$

entonces, dado que (A.B.8) debe de cumplirse $\forall y$, resulta por independencia lineal que los coeficientes que buscamos están dados por:

$$\alpha = \frac{1}{a}, \beta = -\frac{b}{a^2}, \gamma = \frac{1}{a^3} (2b^2 - ac), \text{ etc...}$$

Aquí nos damos cuenta de lo importante que fué el hecho de que (A.B.6) no tenga un término constante, ya que si lo hubiese sería imposible invertir la serie.

Hay una manera alternativa muy elegante de encontrar los coeficientes de (A.B.7) utilizando variable compleja [3], pero nuestro metodo de fuerza bruta (aunque mucho menos sutil) es suficientemente ilustrativo. Es muy importante que el lector interesado busque la *primera* edicion de [3], ya que las ediciones posteriores no incluyen esta discusión.

REFERENCIAS

- [1]. P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* **133**, 60 (1931); *Phys Rev.* **74**, 817 (1948).
- [2]. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (Wiley, 1975).
- [3]. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, (Academic Press, 1968).
- [4]. Panofsky, Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, (Addison Wesley, 1964)
- [5]. L. De la Peña, J.L. Jiménez, R. Montemayor, *Il Nuovo Cimento*, Vol. 69 B, N.1 (1982).
- [6]. D. J. Griffiths, E.W. Szeto, *Am. J. Phys.* **46** (3) (1978).
- [7]. F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, (Addison Wesley, 1965).
- [8]. Dwight, *Tables of Integrals and other Mathematical Data*, (Macmillan, 1961).
- [9]. D.K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, (Addison-Wesley, 1983).
- [10]. Marion, Heald, *Classical Electromagnetic Radiation*, (HBJ, 1985).
- [11]. Feynman, Leighton, Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol 2, (Addison-Wesley, 1964).
- [12]. H.P. Hsu, *Análisis Vectorial*, (Fondo Educativo Interamericano, 1973).
- [13]. S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, (Addison-Wesley, 1974).
- [14]. E.M. Purcell, *Electricity and Magnetism*, (McGraw-Hill, 1985).
- [15]. T.H. Boyer, *Am. J. Phys.* **40**, 1843 (1972).
- [16]. J. Schwinger, *Science* **165**, 757 (1969).
- [17]. J. A. E. Roa-Neri, J. L. Jiménez, *Il Nuovo Cimento*, Vol. 108 B, N.8, (1993).
- [18]. H.A. Lorentz, *The Theory Of Electrons* (Teubner, Leipzig, 1909).