

13
2E



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**CUBIERTAS UNIVERSALES
BAJO TRANSFORMACIONES
DE SEMEJANZA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A:

SILVIA FERNANDEZ MERCHANT



MEXICO, D. F.



FACULTAD DE CIENCIAS
REGION ESCOLAR

1995

FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE

Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron LA pasante(s) SILVIA FERNANDEZ MERCHANT

con número de cuenta 8820829-9 con el Título:

CUBIERTAS UNIVERSALES BAJO TRANSFORMACIONES DE SEMEJANZA

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de MATEMATICO

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
DR.	CARLOS	BOSCH GIRAL	<i>Carlos Bosch Giral</i>
Director de Tesis	LUIS	MONTEJANO PEIMBERT	<i>[Signature]</i>
DR.	VICTOR	NEUMANN LARA	<i>[Signature]</i>
DR.	JORGE LUIS	AROCHA PEREZ	<i>[Signature]</i>
Suplente	SALVADOR	PEREZ ESTEVA	<i>[Signature]</i>
Suplente			

Lista de Figuras

1.1	Un conjunto de abiertos que se intersectan por ternas y que tienen intersección vacía.	12
1.2	Conjunto Clásico de Cantor.	14
1.3	Puntos extremos izquierdos del Conjunto Clásico de Cantor.	16
1.4	El círculo circunscrito al triángulo $P_n P_{n-1} P_i$ contiene a todos los puntos.	19
1.5	Todos los puntos están en el mismo semiplano determinado por la recta OP	20
2.1	La composición de rotaciones es otra rotación.	22
2.2	Las rotaciones dilatadas mandan segmentos en segmentos.	28
2.3	Las rotaciones dilatadas mandan segmentos en segmentos.	29
2.4	P y Q son diferentes	31
2.5	P y Q son iguales.	32
2.6	Casos en que los segmentos son paralelos.	33



2.7	Segunda forma de encontrar el centro de una rotación dilatada.	34
2.8	Las curvas descritas por A y B son semejantes.	35
2.9	Todas las posiciones de A, B y C son semejantes. A se mueve en PQ, B en PR y C en RQ.	36
3.1	Cubiertas para 2 puntos.	39
3.2	Cubiertas para 3 puntos.	40
3.3	Cubiertas para 3 puntos formadas por rectas.	40
3.4	Otra cubierta universal para tres puntos.	44
3.5	Cubiertas universales para 4, 5, 6 y 7 puntos.	46
3.6	Una cubierta más pequeña para cinco puntos.	48
3.7	Un conjunto que pertenece a F_4 que necesita ser unido a un conjunto no acotado para pertenecer a F_5	49
4.1	Ejemplos de latices en el plano.	56
4.2	Una semicubierta para tres puntos formada por una parábola y rectas.	57
4.3	Una semicubierta para cuatro puntos.	58
4.4	A, B y C se mueven en rectas diferente	63
4.5	El punto de	64
4.6	Las rectas son concurrentes...	64

4.7	Primer caso lado izquierdo, segundo caso lado derecho.	65
4.8	Caso 2	66
4.9	a) Tres puntos no colineales y n rectas paralelas. b) Una transformación que lleva a los tres puntos sobre tres rectas fijas.	67
4.10	Utilizando la transformación inversa.	68
4.11	Al final tenemos un número finito de rectas	68



Cubiertas Universales bajo Transformaciones de Semejanza

Silvia Fernández Merchant

Febrero 1995



Contenido

I	Temas Generales	7
1	Preliminares	9
1.1	El Teorema de Helly	9
1.2	Problemas Relacionados con el Teorema de Helly	12
1.3	Conjuntos de Cantor	13
1.3.1	Conjunto Clásico de Cantor	14
1.3.2	Conjuntos de Cantor Base b	16
1.4	El Teorema de las Esferas Anidadas	17
1.5	El Teorema de la Categoría de Baire	18
1.6	Un Problema con Círculos	19
2	Transformaciones Geométricas	21
2.1	Traslaciones	21
2.2	Rotaciones	22
2.3	Reflexiones	23

6 Contenido



2.4 Homotecias	24
2.5 Rotaciones Dilatadas	25

II Cubiertas Universales de Conjuntos Finitos 37

3 Cubiertas Bajo Congruencia 39

3.1 Una Cubierta Universal para todo Conjunto Finito de Puntos	50
--	----

4 Cubiertas bajo Semejanza 55

4.1 Cubiertas Formadas por Rectas	62
4.2 Cubiertas Formadas por Círculos	69
4.3 Cubiertas Formadas por Curvas Simples	69
4.4 Una Posible Semicubierta Interesante para Cinco Puntos	70
4.5 Semi-cubiertas Universales Formadas por Círculos	70
4.6 Una Semi-Cubierta para Cinco Puntos	72

Bibliografía 79

Parte I

Temas Generales

1

Preliminares

1.1 El Teorema de Helly

Uno de los teoremas que utilizaremos en el transcurso de este trabajo es el Teorema de Helly.

Teorema 1 (Helly) *Si de n figuras convexas en el plano cada tres tienen un punto en común, entonces las n figuras tienen un punto en común.*

Demostración: La demostración es por inducción.

1) Para $n = 4$:

Sean C_1, C_2, C_3 y C_4 cuatro figuras convexas en el plano, cada tres de las cuales tienen un punto en común. Sean P_1 en la intersección de C_2, C_3 y C_4 ; P_2 en la intersección de C_1, C_3 y C_4 ; P_3 en la intersección de C_1, C_2 y C_4 y P_4 en la intersección de C_1, C_2 y C_3 . Como P_2, P_3 y P_4 son puntos en C_1 y ésta es una figura convexa entonces los segmentos P_2P_3, P_3P_4 y P_4P_2 , y por lo tanto el triángulo $P_2P_3P_4$, están también contenidos en C_1 . Análogamente tenemos que el triángulo $P_1P_3P_4$ está totalmente contenido en C_2 , el triángulo $P_1P_2P_4$ está totalmente contenido en C_3 y el triángulo $P_1P_2P_3$ está totalmente contenido en C_4 .

Tenemos dos casos:

Caso 1: Sin perder generalidad supongamos que P_1 está en el triángulo $P_2P_3P_4$. Entonces P_1 está en la intersección de las figuras C_1, C_2, C_3 y C_4 lo cual quiere decir que $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \neq \emptyset$.

Caso 2: Supongamos que ninguno de los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 pertenece al triángulo formado por los restantes tres puntos. De esta manera tenemos que el cuadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ es convexo. Sea P el punto de intersección de sus diagonales. Entonces P está en la intersección de las figuras C_1, C_2, C_3 y C_4 lo cual quiere decir que $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \neq \emptyset$.

2) Supongamos cierto el resultado para $n = k$. Demostremoslo para $k + 1$.

Sean C_1, C_2, \dots, C_k y C_{k+1} figuras convexas en el plano, cada tres de las cuales tienen un punto en común. Sea C la intersección de las figuras C_k y C_{k+1} . Notemos que $C \neq \emptyset$ pues $\emptyset \neq C_1 \cap C_k \cap C_{k+1} \subseteq C_k \cap C_{k+1} = C$ y como C_k y C_{k+1} son figuras convexas entonces C también lo es. Utilizando el resultado para $n = 4$ tenemos que para cada pareja de figuras C_i y C_j existe un punto en $C_i \cap C_j \cap C_k \cap C_{k+1} = C_i \cap C_j \cap C$ y por hipótesis tenemos que la intersección de cualesquiera tres de las figuras tomadas del conjunto $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ es no vacía. Así C_1, C_2, \dots, C_{k-1} y C son k figuras convexas tales que la intersección de cualesquiera tres de ellas es no vacía, de lo cual podemos deducir, utilizando la hipótesis de inducción, que existe un punto P en $C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{k-1} \cap C = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k \cap C_{k+1}$ que es precisamente lo que deseábamos demostrar. \square

Teorema 2 (Generalización) *Cualquier colección de conjuntos convexos y compactos que se intersecan por ternas tiene intersección no vacía.*

Demostración: Sea \mathcal{C} una colección arbitraria de conjuntos convexos y acotados que se intersecan por ternas. Sea $C_1 \in \mathcal{C}$ y supongamos que $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$.

Sea $x \in C_1$. Como $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$ entonces existe $C_x \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin C_x$, es decir, x está en el complemento de C_x . Como C_x es compacto en el plano entonces es cerrado (y por lo tanto su complemento es abierto) y acotado, por lo que existe un abierto V_x que contiene a x y tal que $V_x \cap C_x = \emptyset$. El conjunto $\{V_x \mid x \in C_1\}$ es una cubierta abierta de C_1 .

Como C_1 es compacto existe $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_k}\}$ subcubierta finita de C_1 , es decir, $C_1 \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_k}$.

Por otra parte como $V_{x_i} \cap C_{x_i} = \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ entonces tenemos que

$$(C_{x_1} \cap \dots \cap C_{x_k}) \cap (V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_k}) = (C_{x_1} \cap \dots \cap C_{x_k} \cap V_{x_1}) \cup \dots \cup (C_{x_1} \cap \dots \cap C_{x_k} \cap V_{x_k}) = \emptyset.$$

De lo anterior podemos concluir que $C_1 \cap C_{x_1} \cap \dots \cap C_{x_k} = \emptyset$ lo cual contradice el Teorema de Helly¹. Por lo tanto $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. \square

¹Cualquier subcolección finita de \mathcal{C} cumple las condiciones del Teorema de Helly.



1.2 Problemas Relacionados con el Teorema de Helly

En el siguiente ejemplo tenemos una cantidad numerable de conjuntos no cerrados que se intersecan por pares y que aún siendo acotados tienen intersección vacía lo cual nos demuestra la importancia de pedir que los conjuntos sean compactos en el teorema 2.

Ejemplo 1 Sea $\{A = B_{\frac{1}{n}}(P_n) \mid \{P_2, P_3, \dots\} \in OP_1 \text{ y } d(P_n, O) = \frac{1}{n}\}$ entonces la intersección de cualesquiera tres elementos de A es no vacía y $\bigcap A = \emptyset$ (ver Figura 1.1).

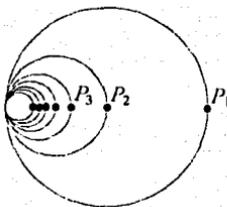


FIGURA 1.1. Un conjunto de abiertos que se intersecan por ternas y que tienen intersección vacía.

Teorema 3 Si en un conjunto acotado de puntos cada tres de ellos pueden ser cubiertos por un disco de radio R , entonces existe uno de tales discos que cubre al conjunto entero.

Demostración: Sea C un conjunto acotado de puntos, con la propiedad de que cada tres de ellos pueden ser cubiertos por un disco de radio R . Consideremos el conjunto $A = \{B_R(X) \mid X \in C\}$.

Notemos que cualesquiera dos puntos del conjunto C están a distancia a lo más $2R$.

Caso 1: Supongamos que existen $X, Y \in C$ tales que la distancia entre X y Y es $2R$.

Sea D el disco con diámetro XY entonces D es el único disco de radio R que contiene a X y Y . Por lo tanto C está totalmente contenido en D .

Caso 2: Supongamos que la distancia entre cualesquiera dos puntos $X, Y \in C$ es menor que $2R$.

En este caso tenemos que para cualquier terna de puntos X_1, X_2, X_3 en C se tiene que $B_R(X_1) \cap B_R(X_2) \cap B_R(X_3) \neq \emptyset$. La generalización del Teorema de Helly nos asegura que $\cap A \neq \emptyset$. Sea $P \in \cap A$ entonces $P \in B_R(X)$ (es decir, $d(P, X) < R$) para toda $X \in C$, por lo que el disco de radio R con centro en P contiene a C . \square

1.3 Conjuntos de Cantor

Definición 1 *Un subconjunto de $[0, 1]$ es totalmente desconexo si no contiene intervalos.*

Definición 2 *Un conjunto A es perfecto si $A \subseteq A^a$.*

Definición 3 *A es un Conjunto de Cantor si A es un subconjunto de $[0, 1]$ cerrado, totalmente desconexo y perfecto.*

La anterior es una definición general de Conjunto de Cantor. Aquí daremos algunos ejemplos que utilizaremos en el capítulo



3. Por estar fuera de los objetivos de este trabajo no verificaremos que cumplen con las condiciones de la definición anterior, sin embargo recomendamos ver [[2]] para profundizar en el tema.

1.3.1. CONJUNTO CLÁSICO DE CANTOR

Construyamos la siguiente sucesión de subconjuntos de $[0, 1]$:

Sean $C_0 = [0, 1]$, $C_1 = C_0 - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $C_2 = C_1 - \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) - \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ y en general sea C_{n+1} el conjunto obtenido de eliminar los tercios centrales de cada uno de los intervalos cerrados pertenecientes a C_n (ver Figura 1.2). De esta forma obtenemos una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos cerrados tales que $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots$. A la intersección $\mathfrak{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ de todos estos conjuntos le llamamos el Conjunto Clásico de Cantor.

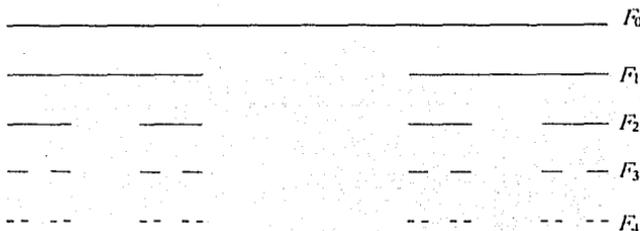


FIGURA 1.2. Conjunto Clásico de Cantor.

Existe una forma de caracterizar a los elementos del Conjunto Clásico de Cantor en función de su representación en base 3. Para ésto recordemos que a cualquier número $X \in [0, 1]$ lo podemos expresar como $\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$ en donde $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ son 0, 1 ó 2, escribiendo $(a_1 a_2 \dots a_n \dots)_3$, por ejemplo $\frac{7}{9} = (0.21)_3$,

$\frac{1}{4} = (0.020202\dots)_3$, $\sqrt{2} = (1.1020112\dots)_3$, etc. Algunos números (números racionales de la forma $\frac{a}{3^k}$) admiten dos diferentes representaciones en base 3, por ejemplo $\frac{1}{3} = (0.100\dots)_3 = (0.022\dots)_3$.

Proposición 1 Sea $X \in [0, 1]$. Entonces X pertenece al Conjunto Clásico de Cantor \mathfrak{C} si y sólo si X no contiene como dígito al 1 en su representación base 3.

Demostración: Sea $X \in [0, 1]$. El primer dígito a la derecha del "punto ternario" es 1 si y sólo si $X \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] = \{(0.100\dots)_3, (0.122\dots)_3\}$ por lo que C_1 está formado por los números cuyo primer dígito a la derecha del "punto ternario" es 0 ó 2. El segundo dígito de un punto en $X \in C_1$ a la derecha del "punto ternario" es 1 si y sólo si $X \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}] \cup [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}] = \{(0.0100\dots)_3, (0.0122\dots)_3\} \cup \{(0.2100\dots)_3, (0.2122\dots)_3\}$ por lo que C_2 está formado por los números cuyo segundo dígito a la derecha del "punto ternario" es 0 ó 2. Continuando de esta forma tenemos que $\mathfrak{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ está formado exactamente por los números del subconjunto $[0, 1]$ que no contienen como dígito al 1 en su representación en base 3. \square

Veamos otras formas de construir al Conjunto Clásico de Cantor. Si $L \subseteq \{R$ y $s \in \{R$ denotaremos por $L + s$ al conjunto $\{x + s \mid x \in L\}$. Construyamos la siguiente sucesión de conjuntos: $L_0 = \{0\}$ y $s_0 = \frac{2}{3}$; $L_1 = L_0 + s_0 = \{0, \frac{2}{3}\}$ y $s_1 = \frac{s_0}{3} = \frac{2}{9}$ y en general $L_{n+1} = L_n + s_n$ y $s_{n+1} = \frac{s_n}{3}$ (ver Figura 1.3). Notemos que el conjunto L_n está formado por los puntos extremos izquierdos de los intervalos cerrados que forman a C_n , es decir, por los números que tienen expresión en base 3 finita² que constan de 0 ó 2. Sea $L = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$.

² $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ tiene representación finita en base 3 si y sólo si $a_n = 0$ si $n \geq m$ para un cierto número natural m .



FIGURA 1.3. Puntos extremos izquierdos del Conjunto Clásico de Cantor.

Proposición 2 Si $X \in \mathfrak{S}$ entonces X es el límite de una sucesión de puntos de L .

Demostración: Como $X \in \mathfrak{S}$ entonces por la Proposición 1 tenemos que $X = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, en donde $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ son 0 ó 2. Sea $x_k = \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{3^n}$. Entonces $x_k \in L_k \subset L$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. \square

1.3.2 CONJUNTOS DE CANTOR BASE b

La construcción de los llamados Conjuntos de Cantor Base b es muy similar a la del conjunto Clásico de Cantor (ver Proposición 1).

Ahora nos fijamos en los puntos pertenecientes al intervalo $[0, 1]$ tales que no contengan al dígito $b-1$ en su representación

base b . A dicho conjunto lo denotaremos por \mathfrak{S}_b y lo llamaremos Conjunto de Cantor Base b .

1.4 El Teorema de las Esferas Anidadas

El Teorema de las Esferas Anidadas puede ser enunciado de forma general para espacios métricos. Como en este trabajo nos interesa trabajar solamente en el plano, lo enunciaremos de la siguiente manera:

Teorema 4 Sea $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de discos $D_n = D_{r_n}(O_n)$ tales que $D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots \supseteq D_n \supseteq \dots$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$.

Demostración: Sea $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de discos tales que $D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots \supseteq D_n \supseteq \dots$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ en donde $D_n = D_{r_n}(O_n)$.

Si $n \leq m$ entonces $D_n \supseteq D_m$ lo cual implica que $O_m \in D_n$ y así $d(O_n, O_m) \leq r_n$. Como $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 entonces $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y por lo tanto (porque estamos trabajando en el plano y éste es completo) converge, digamos a un punto O . Veamos que $O \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que la sucesión $\{O_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$. De esta forma $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_{n+k} = 0$. Como $\{O_{n+k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq D_n$ y D_n es cerrado entonces $O \in D_n$, es decir, $O \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. Por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$. \square



1.5 El Teorema de la Categoría de Baire

Al igual que el teorema anterior el Teorema de Baire puede ser enunciado de forma general para espacios métricos completos. Por no estar dentro de los fines de este trabajo diha versión general, sólo lo enunciaremos para el plano. Para profundizar en este teorema recomendamos ver [2].

Definición 4 Un conjunto A es denso en ninguna parte si $A^{-\circ} = \emptyset$.

Definición 5 Un conjunto A es denso si $A^- = \mathbb{R}^2$.

Teorema 5 (Baire) Sea $\{O_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos abiertos densos. Entonces $\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k$ es denso.

Demostración: Dado un conjunto abierto U , sea $x_1 \in O_1 \cap U$ y $r_1 > 0$ tal que $S_1 = B_{r_1}(x_1) \subseteq O_1 \cap U$. Como O_2 es denso existe $x_2 \in O_2 \cap S_1$. Como O_2 es abierto, existe $0 < r_2 < \min\{\frac{1}{2}r_1, r_1 - d(x_1, x_2)\}$ tal que $S_2 = B_{r_2}(x_2) \subseteq O_2 \cap S_1$. Entonces $S_2^- \subset S_1$. Siguiendo inductivamente obtenemos una sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de bolas tal que $S_n^- \subset S_{n-1}$ y $S_n \subset O_n$ cuya sucesión respectiva de radios $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. Además si $n, m \geq N$ entonces $x_n \in S_N$ y $x_m \in S_N$ por lo que $d(x_n, x_m) \leq 2r_N$ y como $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ entonces tenemos que la sucesión de centros $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Así para $n > N$ se cumple que $x_n \in S_{N+1} \subset S_{N+1}^- \subset S_N \subset O_N$. Por lo tanto $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ y $x \in U$. Como U era un abierto arbitrario, $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ es denso. \square

Corolario 5.1 Cualquier conjunto abierto no puede ser expresado como la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.

Demostración: Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y $U \neq \emptyset$ un abierto. Entonces $O_n = E_n^c$ es denso y abierto. Por el Teorema de Baire tenemos que existe $x \in U$ tal que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ pero esto significa que $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y por lo tanto U no está contenido en $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ \square

1.6 Un Problema con Círculos

Lema 1 *Dados n puntos existen dos de ellos tales que la recta que determinan deja en el mismo semiplano a los restantes (algunos de estos puntos, o todos si los n puntos fueran colineales, podrían estar sobre dicha recta).*

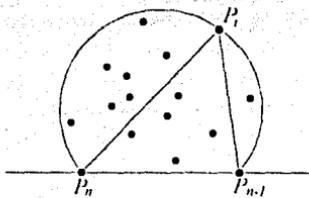


FIGURA 1.4. El círculo circunscrito al triángulo $P_n P_{n-1} P_1$ contiene a todos los puntos.

Demostración: Consideremos un conjunto de n puntos, como este conjunto es finito entonces existe un disco que lo contiene. Consideremos una recta horizontal que no intersekte a dicho disco y movámosla hacia arriba o hacia abajo hasta que toquemos por primera vez a un punto O de nuestro conjunto y rotémosla con centro en O hasta que toquemos por primera vez

a algún otro punto P del conjunto. Entonces la recta OP cumple las condiciones del Lema (ver Figura 1.4). \square

Teorema 6 *Dados $n \geq 3$ puntos no todos colineales existen tres de ellos tales que el disco cuya frontera es el círculo circunscrito a éstos contenga a los restantes.*

Demostración: Sean P_1, P_2, \dots, P_n puntos y sin perder generalidad supongamos que P_1, P_2, \dots, P_{n-2} están en el mismo semiplano determinado por la recta $P_{n-1}P_n$ (ver Lema 1). Entonces el disco cuya frontera es el círculo circunscrito al triángulo $P_{n-1}P_nP_i$, en donde el ángulo $P_{n-1}P_nP_i$ es el menor posible para $i = 1, 2, \dots, n-2$, contiene a P_1, P_2, \dots, P_n (ver Figura 1.5). \square

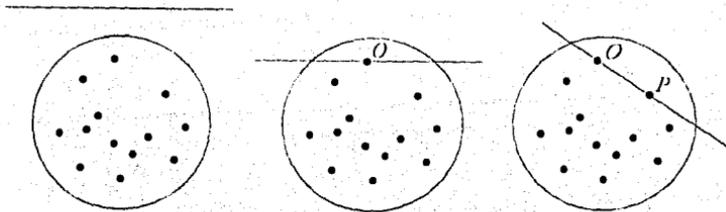


FIGURA 1.5. Todos los puntos están en el mismo semiplano determinado por la recta OP .

Corolario 6.1 *Dados cuatro puntos no todos colineales, algún disco cuya frontera es el círculo circunscrito a tres de ellos contiene al cuarto.*

2

Transformaciones Geométricas

2.1 Traslaciones

Definición 6 Una traslación con longitud y dirección del segmento PQ es una transformación que manda a cada punto A en el punto A' de tal forma que los segmentos AA' y PQ sean paralelos, tengan la misma sentido y $d(A, A') = d(P, Q)$.

Denotaremos por T_{PQ} a la traslación con longitud y dirección del segmento PQ .

Algunas de las propiedades que son consecuencia inmediata de la definición son:

Propiedades:

1. La traslación T_{PP} es la identidad.
2. Las traslaciones no dejan puntos fijos.
3. La composición de las traslaciones T_{PQ} y T_{QP} es la identidad.
4. La imagen de una recta o un círculo bajo una traslación es una recta o un círculo respectivamente.

5. La composición de dos traslaciones T_{PQ} y $T_{P'Q'}$ es otra traslación T_{PR} en donde $R = T_{P'Q'}(Q)$.

2.2 Rotaciones

Definición 7 Una rotación con centro en O y ángulo α es una transformación que manda a cada punto A en el punto A' de tal forma que $d(A, O) = d(A', O)$ y el ángulo $\angle AOA' = \alpha$.

Denotaremos por $R_{(\alpha, O)}$ a la rotación con centro en O y ángulo α (en general podremos suponer que $0 \leq \alpha < 2\pi$).

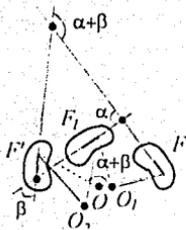


FIGURA 2.1. La composición de rotaciones es otra rotación.

Algunas de las propiedades que son consecuencia inmediata de la definición son:

Propiedades:

1. La rotación $R_{(0, O)}$ es la identidad.

2. El único punto fijo de una rotación diferente de la identidad es su centro.
3. La composición de las rotaciones $R_{(\alpha, O)}$ y $R_{(-\alpha, O)}$ es la identidad.
4. La imagen de una recta o un círculo bajo una rotación es una recta o un círculo respectivamente.
5. La composición de dos rotaciones $R_{(\alpha_1, O_1)}$ y $R_{(\alpha_2, O_2)}$ es otra rotación $R_{(\alpha_1 + \alpha_2, O)}$, en donde el centro O puede ser obtenido a partir de los centros O_1 y O_2 ¹ (ver Figura 2.1).

2.3 Reflexiones

Definición 8. Una reflexión sobre la recta l es una transformación que manda a cada punto A en el punto A' de tal forma que $d(A, l) = d(A', l)$ y el segmento AA' es perpendicular a la recta l .

Denotaremos por R_l a la reflexión sobre la recta l .

Algunas de las propiedades que son consecuencia inmediata de la definición son:

Propiedades:

1. es la identidad.

¹ Supongamos que $R_{(\alpha_2, O_2)} \circ R_{(\alpha_1, O_1)}(A) = A'$ y $R_{(\alpha_2, O_2)} \circ R_{(\alpha_1, O_1)}(B) = B'$. Sea P el punto de intersección de las rectas AB y $A'B'$. Entonces O es el punto de intersección del círculo circunscrito al triángulo $AP A'$ y la mediatriz del segmento AA' .



2. Una reflexión R_l sólo deja fijos a todos los puntos de la recta l .
3. La composición de las reflexiones R_{l_1} y R_{l_1} es la identidad.
4. La imagen de una recta o un círculo bajo una reflexión es una recta o un círculo respectivamente.
5. La composición de dos reflexiones R_{l_1} y R_{l_2} , en donde l_1 es paralela a l_2 es una traslación en dirección perpendicular a l_1 y con longitud $d(l_1, l_2)$.
6. La composición de dos reflexiones R_{l_1} y R_{l_2} , en donde l_1 no es paralela a l_2 es una rotación con centro en el punto de intersección de l_1 y l_2 y con ángulo 2α en donde α es el ángulo entre las rectas l_1 y l_2 .

Definición 9 Las transformaciones rígidas o isometrías (pues conservan las distancias entre pares de puntos) son las composiciones de traslaciones, rotaciones y reflexiones.

2.4 Homotecias

Definición 10 Una homotecia con centro en O y razón $k \neq 0$ es una transformación que manda a cada punto A en el punto A' de tal forma que $\frac{d(A', O)}{d(A, O)} = k$ y los puntos O , A y A' son colineales.

Denotaremos por $H_{(k, O)}$ a la homotecia con centro en O y razón k .

Algunas de las propiedades que son consecuencia inmediata de la definición son:

Propiedades:

1. La homotecia $H_{(1,O)}$ es la identidad.
2. El único punto fijo de una homotecia diferente de la identidad es su centro.
3. La composición de las homotecias $H_{(k,O)}$ y $H_{(\frac{1}{k},O)}$ es la identidad.
4. La composición de las transformaciones $H_{(k,O)}$ y $H_{(\frac{1}{k},O)}$ es la homotecia $H_{(1,O)}$.
5. La imagen de una recta o un círculo bajo una homotecia es una recta o un círculo respectivamente.
6. La composición de dos homotecias $H_{(k_1,O_1)}$ y $H_{(k_2,O_2)}$ es otra homotecia $H_{(k_1+k_2,O)}$ si $k_1+k_2 \neq 1$ (en donde el centro O puede ser obtenido a partir de los centros O_1 y O_2) y es una traslación $T_{O_1O_2}$, en donde $H_{(k_2,O_2)}(O_1) = O'_1$, si $k_1+k_2 = 1$.

2.5 Rotaciones Dilatadas

Definición 11 Una rotación dilatada es la composición de una rotación y una homotecia con el mismo centro.

Denotaremos por $D_{(k,\alpha,O)}$ a la rotación dilatada con centro en O , ángulo de rotación α y razón de homotecia k^2 .

²Recordemos que k debe ser diferente de 0 en cualquier homotecia y por lo tanto en cualquier rotación dilatada.



Algunas de las propiedades que son consecuencia inmediata de la definición son:

Propiedades:

1. La rotación dilatada $D_{(1,0,O)}$ es la identidad.
2. El único punto fijo de una rotación dilatada diferente de la identidad es su centro.
3. La composición de las rotaciones dilatadas $D_{(k,\alpha,O)}$ y $D_{(\frac{1}{k},-\alpha,O)}$ es la identidad.
4. La imagen de una recta o un círculo bajo una rotación dilatada es una recta o un círculo respectivamente.
5. La rotación dilatada $D_{(1,\alpha,O)}$ coincide con la rotación $R_{(\alpha,O)}$.
6. La rotación dilatada $D_{(k,0,O)}$ coincide con la homotecia $H_{(k,O)}$ y $D_{(k,-\pi,O)}$ coincide con la homotecia $H_{(-k,O)}$.
7. La composición de dos rotaciones dilatadas $D_{(k_1,\alpha_1,O_1)}$ y $D_{(k_2,\alpha_2,O_2)}$ es
 - i) Otra rotación dilatada $D_{(k_1 k_2, \alpha_1 + \alpha_2, O)}$ (en donde el centro O puede ser obtenido a partir de los centros O_1 y O_2) si $k_1 k_2 \neq 1$ ó $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ ó bien
 - ii) Una traslación en la dirección y con la longitud del segmento $O_1 O'_1$ en donde O'_1 es la imagen de O_1 bajo la rotación dilatada $D_{(k_2,\alpha_2,O_2)}$ si $k_1 k_2 = 1$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$.

Aún cuando la última de estas propiedades no es del todo directa es muy importante dentro del estudio de las transformaciones geométricas. Aquí no daremos su demostración por considerarlo fuera de los objetivos del trabajo pero recomendamos ver [4] para profundizar en este tema.

Definición 12 Dos curvas γ y γ' son semejantes si existe una rotación dilatada $D_{(k,\alpha,O)}$ tal que $D_{(k,\alpha,O)}(\gamma) = \gamma'$.

La siguiente serie de resultados se exponen con el fin de llegar a la demostración del teorema 7 el cual utilizaremos en la sección referente a semi-cubiertas universales.

Proposición 3 La imagen de cualquier segmento AB bajo la rotación dilatada $D_{(k,\alpha,O)}$ es otro segmento $A'B'$, donde $A' = D_{(k,\alpha,O)}(A)$ y $B' = D_{(k,\alpha,O)}(B)$, que cumple:

i) $\frac{A'B'}{AB} = k$ y

ii) El ángulo dirigido formado por los segmentos AB y $A'B'$ es igual a α .

e inversamente, si tenemos una transformación tal que la imagen de cualquier segmento es otro segmento y éstos cumplen las condiciones i) y ii) entonces la transformación es una rotación dilatada.

Demostración: Consideremos la rotación dilatada $D_{(k,\alpha,O)}$ y el segmento AB . Sean $A' = D_{(k,\alpha,O)}(A)$, $B' = D_{(k,\alpha,O)}(B)$, $A_1 = R_{(\alpha,O)}(A)$ y $B_1 = R_{(\alpha,O)}(B)$. Recordemos que $D_{(k,\alpha,O)} = H_{(k,O)} \circ R_{(\alpha,O)}$.

La rotación $R_{(\alpha,O)}$ manda al segmento AB en el segmento A_1B_1 de igual longitud con $\angle AOA_1 = \angle BOB_1 = \alpha$ y la homotecia $H_{(k,O)}$ manda al segmento A_1B_1 en el segmento $A'B'$ con las ternas de puntos O, A_1, A' y O, B_1, B' colineales, $k = \frac{OA'}{OA_1} = \frac{OB'}{OB_1}$ y los segmentos $A'B'$ y A_1B_1 paralelos, es decir, los triángulos $OA'B'$ y OA_1B_1 son semejantes por lo cual tenemos que $k = \frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{A'B'}{AB}$. Tenemos dos casos:

un punto y $T(B) = B'$ entonces $D_{(k,\alpha,O)}(B) = B'$ (ver Figura 2.3).

Tenemos dos casos:

Caso 1: Si los segmentos AB y $A'B'$ son paralelos entonces $\angle OA'B' = \angle OAB$, $\alpha = 0$ ó π (es decir, los puntos A, A' y O son colineales) y $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = k$. De esta manera tenemos que los triángulos $OA'B'$ y OAB son semejantes, por lo que $\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = k$ y $\angle ABO = \angle A'B'O$, es decir, los puntos B, B' y O son colineales.

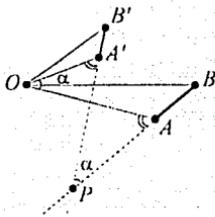


FIGURA 2.3. Las rotaciones dilatadas mandan segmentos en segmentos.

Caso 2: Supongamos que los segmentos AB y $A'B'$ no son paralelos. Sea P el punto de intersección de las rectas AB y $A'B'$. Así $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = k$ y $\angle AOA' = \angle BPA' = \alpha$ lo cual implica que $\angle OA'P = \angle OAP$ y así $\angle OA'B' = \angle OAB$ por lo cual los triángulos $OA'B'$ y OAB son semejantes. Todo lo anterior implica que $\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = k$ y $\angle AOB = \angle A'OB'$ por lo cual $\angle BOB' = \alpha$. Por lo tanto concluimos que la rotación dilatada $D_{(k,\alpha,O)}$ coincide con la transformación T . \square



Lema 2 Supongamos que una rotación dilatada $D_{(k,\alpha,O)}$ manda al segmento AB en el segmento $A'B'$ entonces

i) Si los pares de segmentos $AB, A'B'$ y AA', BB' son paralelos entonces $D_{(k,\alpha,O)}$ es la identidad o $A = B', B = A'$ y $D_{(k,\alpha,O)} = R_{(\pi,O)}$ en donde O es el punto medio del segmento AB .

ii) Si el segmento AB es paralelo al segmento $A'B'$ y los segmentos AA' y BB' no son paralelos entonces el punto O coincide con la intersección de las rectas AA' y BB' .

iii) Si los pares de segmentos $AB, A'B'$ y AA', BB' no son paralelos entonces el punto O coincide con la intersección de los círculos circunscritos a los triángulos $AA'P$ y $BB'P$ en donde P es el punto de intersección de las rectas AB y $A'B'$.

Demostración: Si la rotación dilatada $D_{(k,\alpha,O)}$ manda al segmento AB en el segmento $A'B'$ entonces (ver Proposición 3) α coincide con el ángulo formado por los segmentos AB y $A'B'$ y $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$.

i) Si los pares de segmentos $AB, A'B'$ y AA', BB' son paralelos entonces $\alpha = 0$ ó π y $AB = A'B'$. Por la Proposición 3 tenemos que $k = 1$, es decir, $D_{(k,\alpha,O)} = R_{(\alpha,O)}$. Si $\alpha = \pi$ entonces $D_{(k,\alpha,O)}(A) = R_{(\pi,O)}(A) = A'$ en donde O es el punto medio de AA' y de igual forma O es también el punto medio de BB' . Como los segmentos AA' y BB' son paralelos y O pertenece a ambos entonces los puntos A, A', B, B' son colineales, es decir, $A = B', B = A'$ y así O es el punto medio del segmento AB . Por último si $\alpha = 0$ entonces $D_{(k,\alpha,O)}$ es la identidad.

ii) Si $\alpha = 0$ ó $\alpha = \pi$, es decir, si los segmentos AB y $A'B'$ son paralelos, entonces (ver Propiedad 6) la rotación dilatada $D_{(k,\alpha,O)}$ coincide con la homotecia $H_{(k,O)}$ ó $H_{(-k,O)}$ respectiva-

mente y en este caso el centro O de la homotecia será el punto de intersección de las rectas AA' y BB' .

iii) Sea P el punto de intersección de las rectas AB y $A'B'$ entonces los ángulos APA' y BPB' son iguales a α . Tracemos los círculos circunscritos a los triángulos $AA'P$ y $BB'P$. Sea Q el segundo punto de intersección de estos círculos (si los círculos resultan ser tangentes entonces $P = Q$). De esta forma tenemos que los ángulos AQA' y BQB' son iguales a α . Ahora sólo falta ver que $k = \frac{QA'}{QA} = \frac{QB'}{QB}$. Analicemos dos casos:

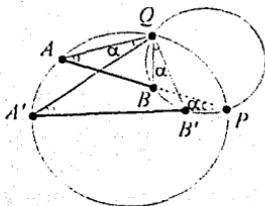
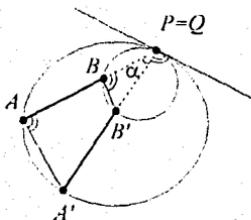


FIGURA 2.4. P y Q son diferentes

Caso 1: Si $P \neq Q$ entonces (ver Figura 2.4) $\angle AQB = \alpha + \angle A'QB = \angle A'QB'$ y $\angle QAB = \angle QA'B' = \alpha$ lo cual implica que los triángulos AQB y $A'QB'$ son semejantes. Por lo tanto $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{QA'}{QA} = \frac{QB'}{QB}$.

Caso 2: Si $P = Q$ entonces (ver Figura 2.5) $\angle QBB' = \angle QAA'$ es decir, los triángulos QAA' y QBB' son semejantes. Por lo tanto $\frac{QA'}{QA} = \frac{QB'}{QB} = \frac{A'B'}{AB} = k$.

FIGURA 2.3. P y Q son iguales.

De todo lo anterior concluimos que los puntos O y Q son iguales. \square

Lema 3 *El centro de la rotación dilatada diferente de la identidad⁴ que manda al segmento AB en el segmento $A'B'$ coincide con el centro de la rotación dilatada que manda al segmento AA' en el segmento BB' .*

Demostración: Consideremos los pares de segmentos $AB, A'B'$ y AA', BB' . Tenemos tres casos:

Caso 1: Ambos pares de segmentos son paralelos, entonces por el Lema 2 la rotación dilatada que manda al segmento AB en el segmento $A'B'$ es la rotación $R_{(\pi, O)}$ en donde $A = B', B = A'$ y O es el punto medio del segmento AB (pues por hipótesis dicha transformación no es la identidad). Por lo tanto la rotación dilatada que manda al segmento AA' en el segmento BB' es la

⁴Debemos pedir que sea diferente de la identidad para poder hablar de un centro específico.

rotación $R_{(\pi, O')}$ en donde O' es el punto medio del segmento AA' ; pero como $AA' = AB$ entonces los puntos O y O' coinciden.

Caso 2: Alguno de los pares de segmentos es paralelo y el otro no. Supongamos sin perder generalidad que los segmentos AB y $A'B'$ son paralelos y que las rectas AA' y BB' se intersectan en Q entonces (ver Lema 2) el centro de la rotación dilatada que manda al segmento AB en el segmento $A'B'$ coincide con el punto Q y el centro de la rotación dilatada que manda al segmento AA' en el segmento BB' es el punto de intersección diferente de Q de los círculos circunscritos a los triángulos QAA' y QBB' o el punto Q si dichos círculos son tangentes.

Como los segmentos AB y $A'B'$ son paralelos entonces $\angle QAB = \angle QA'B'$ y $\angle ABQ = \angle A'B'Q$. Sea l la recta tangente al círculo circunscrito al triángulo QAB entonces el ángulo formado por los pares de rectas l, BB' y l, AA' es igual al ángulo QAB y QBA respectivamente, es decir, la recta l es tangente al círculo circunscrito al triángulo $QA'B'$ (ver Figura 2.6). Por lo tanto los círculos circunscritos a los triángulos QAB y $QA'B'$ son tangentes y así Q es el centro de las rotaciones dilatadas que mandan AB en $A'B'$ y AA' en BB' .

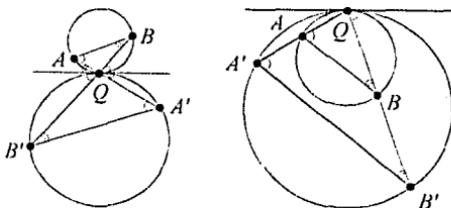


FIGURA 2.6. Casos en que los segmentos son paralelos.



Caso 3: Sean P el punto de intersección de las rectas AB y $A'B'$ y Q el punto de intersección de las rectas AA' y BB' . Sea O el centro de la rotación dilatada que manda al segmento AB en el segmento $A'B'$. Basta demostrar que $\angle AQB = \angle AOB = \angle A'OB'$ (ver Figura ??).

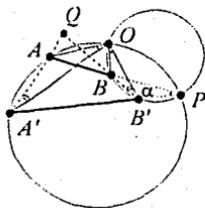


FIGURA 2.7. Segunda forma de encontrar el centro de una rotación dilatada.

Sabemos que $\angle AOA' = \angle BOB' = \alpha$ lo cual implica que $\angle AOB = \angle AOA' + \angle A'OB = \alpha + \angle A'OB = \angle A'OB + \angle BOB' = \angle A'OB'$ y $\angle OA'Q = \angle OA'A = \angle OPA = \angle OPB = \angle OB'B = \angle OB'Q$. Esto quiere decir que el cuadrilátero $OQ A' B'$ es cíclico por lo que $\angle A'Q B' = \angle A'OB' = \angle AOB$. \square

Lema 4 Supongamos que la figura F se mueve de tal manera que en todo momento es semejante a su posición original dejando siempre un punto O fijo y que otro punto A de F describe en dicho movimiento una cierta curva γ . Entonces cualquier punto en F diferente de O describe una curva semejante a γ .

Demostración: Sean F_1 la posición inicial y F_2 cualquier otra posición de la figura F . Sean $A_1, B_1 \in F_1$ y $A_2, B_2 \in F_2$ puntos correspondientes. Como F_1 y F_2 son semejantes y O quedó fijo bajo la transformación que lleva F_1 a F_2 entonces

los triángulos OA_1B_1 y OA_2B_2 son semejantes lo cual implica que los ángulos A_1OB_1 y A_2OB_2 son iguales y $\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2}$. Denotemos por α al ángulo A_1OB_1 y sea $k = \frac{OB_1}{OA_1}$. Así tenemos que $D_{(k,\alpha,O)}(B_2) = A_2$.

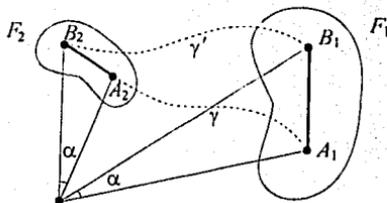


FIGURA 2.8. Las curvas descriptas por A y B son semejantes.

Como F_2 fue una posición arbitraria de F entonces la rotación dilatada $D_{(k,\alpha,O)}$ manda a la curva γ' descrita por B a la curva γ descrita por A por lo que γ' y γ son dos curvas semejantes (ver Figura 2.8).

Teorema 7 (I.M. Yaglom)[4] *Si la figura F se mueve de tal manera que todas las posiciones son semejantes a la posición original y tres puntos A , B y C de la figura describen tres líneas rectas no concurrentes, entonces todo punto de la figura describe una línea recta.*

Demostración: Veamos primero el caso en que las tres líneas se intersectan por pares.

Demostraremos que cualesquiera dos posiciones de F tienen el mismo centro de rotación, es decir, que algún punto O del plano



queda fijo conforme F se mueve. A partir de ésto deduciremos que todos los puntos de F describen curvas similares a la curva descrita por A (ver Lema 4), ésto es, líneas rectas.

Denotemos por P , Q y R a los puntos de intersección de las rectas descritas por los puntos A , B y C (ver figura 2.9).

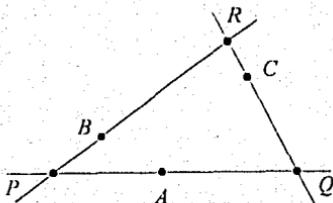


FIGURA 2.9. Todas las posiciones de A , B y C son semejantes. A se mueve en PQ , B en PR y C en RQ .

Sean F_1 y F_2 dos posiciones de la figura F y sean A_1 , B_1 , $C_1 \in F_1$ y A_2 , B_2 , $C_2 \in F_2$ puntos correspondientes. El centro de rotación O de las figuras F_1 y F_2 es también el centro de rotación de los segmentos A_1B_1 y A_2B_2 ; A_1C_1 y A_2C_2 .

Además por los Lemas 2 y 3 el centro de rotación de los segmentos A_1B_1 y A_2B_2 está sobre los círculos circunscritos a los triángulos A_1B_1P y A_2B_2P . Es decir, O es el punto de intersección de los círculos circunscritos a los triángulos A_1B_1P , B_1C_1Q y C_1A_1R . Claramente O no depende de una posición particular de la figura F . Por lo tanto cualesquiera dos posiciones de F tienen el mismo centro de rotación.

Parte II

Cubiertas Universales de Conjuntos Finitos

Cubiertas Bajo Congruencia

Definición 13 Un conjunto A en el plano es una cubierta universal para n puntos si:

- i) A es cerrado.
- ii) A no tiene discos arbitrariamente grandes.
- iii) Para cualesquiera n puntos Q en el plano existe una transformación rígida del plano Φ_Q tal que $\Phi_Q(Q) \subset A$.

Denotaremos por F_n al conjunto de las cubiertas universales para n puntos. Veamos algunos ejemplos:



FIGURA 3.1. Cubiertas para 2 puntos.

Ejemplo 2 Cualquier línea es cubierta universal para dos puntos (Figura 3.1).



Ejemplo 3 El conjunto que consta de una recta y un rayo de línea con un punto de la recta como origen es cubierta universal para tres puntos (Figura 3.2).

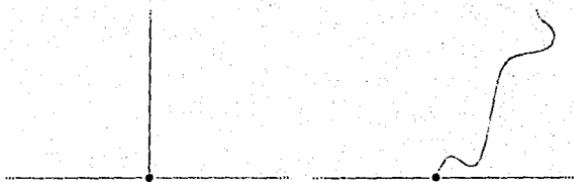


FIGURA 3.2. Cubiertas para 3 puntos.

Ejemplo 4 Si A es el conjunto que consta de dos rayos formando un ángulo de longitud α entonces:

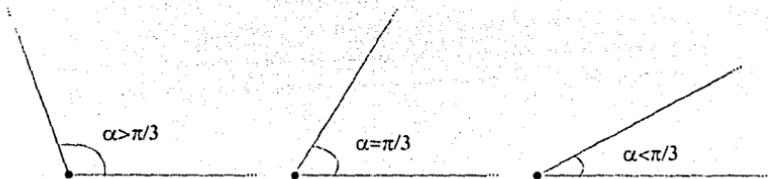


FIGURA 3.3. Cubiertas para 3 puntos formadas por rectas.

i) Si $\alpha > \frac{\pi}{3}$ entonces A no es cubierta universal para tres puntos porque no cubre triángulos equiláteros.

ii) Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ entonces A es cubierta universal para tres puntos y es maximal en el sentido que existe una única forma de cubrir los triángulos equiláteros.

iii) Si $\alpha < \frac{\pi}{3}$ entonces A es cubierta universal para tres puntos (Figura 3.3).

Observación 1 $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$, es decir, si $A \in F_n$ entonces $A \in F_m$ para toda $m \leq n$ y si $A \notin F_n$ entonces $A \notin F_m$ para toda $m \geq n$.

Observación 2 Si $A \subseteq B$, B cerrado, B no contiene abiertos arbitrariamente grandes y $A \in F_n$ entonces $B \in F_n$ y si $B \subseteq A$ y $A \notin F_n$ entonces $B \notin F_n$.

Observación 3 Si A es un conjunto no vacío, cerrado y no contiene discos de tamaño arbitrario entonces $A \in F_1$.

Observación 4 Si A es un conjunto no vacío, cerrado, no acotado, conexo y no contiene discos de tamaño arbitrario entonces $A \in F_2$.

Demostración: Basta ver que A admite cuerdas de cualquier longitud.

Sea l un número real positivo. Como A no es acotado, dado $P \in A$ existe $Q \in A$ tal que la distancia de P a Q es mayor o igual a l .

Sean C el conjunto de puntos en A que distan a lo más l de P y D el conjunto de puntos en A que distan por lo menos l de P , es decir, $C = \{T \in A \mid d(P, T) \leq l\} = A \cap D_l(P)$ y $D = \{T \in A \mid d(P, T) \geq l\} = A \cap B_l^c(P)$.

C y D son no vacíos (pues $P \in C$ y $Q \in D$), cerrados (pues son la intersección de dos cerrados) y cumplen que $A = C \cup D$.



Como A es conexo existe $R \in C \cap D \subseteq A$. Por lo tanto la cuerda RP tiene longitud l . \square

Algunos problemas relacionados con cubiertas universales encontrados en [1] son:

Teorema 8 *Si una recta es cubierta por dos conjuntos cerrados, entonces por lo menos uno de ellos es tal que sus pares de puntos realizan todas las distancias en el intervalo $(0, \infty)$ (Problema 57).*

Demostración: Sean A y B dos conjuntos cerrados cuya unión cubre a la recta y supongamos que ninguno de éstos es tal que sus pares de puntos realizan todas las distancias en el intervalo $(0, \infty)$. Sean a y b distancias en dicho intervalo no realizadas por pares de puntos en los conjuntos A y B respectivamente. Como la recta es conexa existe un punto $R \in A \cap B$. Sean S, P, Q puntos a la derecha de R tales que $d(S, R) = a + b$, $d(P, R) = a$ y $d(Q, R) = b$. Como $R \in A$ entonces $P \in B$ por lo que $S \in A - B$; análogamente como $R \in B$ entonces $P \in A$ y así $S \in B - A$, es decir, $S \in (A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto alguno de los conjuntos A o B es tal que sus pares de puntos realizan todas las distancias en el intervalo $(0, \infty)$. \square

Teorema 9 *Si el plano es cubierto por tres conjuntos cerrados, entonces al menos uno de ellos es tal que sus pares de puntos realizan todas las distancias en el intervalo $(0, \infty)$ (Problema 59).*

Demostración: Sean A_1, A_2 y A_3 tres conjuntos cerrados cuya unión cubre el plano y supongamos que ninguno de éstos es tal que sus pares de puntos realizan todas las distancias en el intervalo $(0, \infty)$. Sean $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ distancias en dicho

intervalo no realizadas por pares de puntos en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 respectivamente. Sea $O \in A_3$ (si $A_3 = \emptyset$ entonces tomamos cualquier punto O) entonces la circunferencia $C(O, d_3)$ está cubierta por los conjuntos A_1 y A_2 . Como la circunferencia $C(O, d_3)$ es conexa existe un punto $R \in A_1 \cap A_2 \cap C(O, d_3)$. Sean $S, P, Q \in C(O, d_3)$ puntos a la derecha de R en el sentido contrario al que siguen las manecillas del reloj tales que $d(S, R) = d_1 + d_2, d(P, R) = d_1$ y $d(Q, R) = d_2$. Como $R \in A_1$ entonces $P \in A_2$, por lo que $S \in A_1 - A_2$; análogamente como $R \in A_2$ entonces $Q \in A_1$ y así $S \in A_2 - A_1$, es decir, $S \in (A_1 - A_2) \cap (A_2 - A_1) = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto alguno de los conjuntos A_1, A_2 ó A_3 es tal que sus pares de puntos realizan todas las distancias en el intervalo $(0, \infty)$. \square

Corolario 9.1 *Si el plano es cubierto por tres conjuntos cerrados A, B y C que no contienen discos arbitrariamente grandes entonces $A \in F_2, B \in F_2$ ó $C \in F_2$.*

Teorema 10 *Si un conjunto cerrado es tal que el plano puede ser cubierto por cinco copias congruentes a éste, entonces sus pares de puntos realizan todas las distancias en el intervalo $(0, \infty)$ (Problema 60).*

Corolario 10.1 *Si un conjunto cerrado que no contiene discos arbitrariamente grandes es tal que el plano puede ser cubierto por cinco copias congruentes a éste, entonces es cubierta para dos puntos.*

Teorema 11 *Si el plano es cubierto por dos conjuntos cerrados, cada triángulo puede ser colocado de tal manera que sus vértices queden en el mismo conjunto (Problema 61).*



El teorema anterior no nos asegura que alguno de los dos conjuntos sea cubierta para tres puntos, pero podemos rescatar el siguiente corolario.

Corolario 11.1 *Si el plano es cubierto por dos copias de un conjunto cerrado que no contiene discos arbitrariamente grandes, entonces dicho conjunto es cubierta para tres puntos.*

Ejemplo 5 *Consideremos el conjunto A formado por franjas cerradas verticales de ancho $x > 0$ con longitud de separación x entre franjas consecutivas (ver Figura 3.4). Dicho conjunto es cerrado, no contiene discos arbitrariamente grandes y el plano puede ser cubierto por dos copias de A . Entonces $A \in F_3$.*



FIGURA 3.4. Otra cubierta universal para tres puntos.

Las siguientes cubiertas muestran que:

- 1) $F_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Dada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A \in F_n$ que no contiene discos de radio ε .

Ejemplo 6 *Si A_3 es una lattice cuadrángular entonces $A_3 \in F_3$ (ver Observación 4).*

Ejemplo 7 Si A_4 está formado por una lattice cuadrángular que incluye el interior de uno de sus cuadrados (ver Figura 3.5a) entonces $A_4 \in F_4$.

Demostración: Como $A_3 \subseteq A_4$ entonces $A_4 \in F_3$. Sea C un conjunto de 4 puntos entonces alguna transformación en H coloca a C sobre A_4 , quedando quizás un punto de C fuera de A_4 . Con traslaciones horizontales o verticales podemos colocar a dicho punto sobre el cuadrado cuyo interior pertenece a A_4 . \square

Ejemplo 8 Si A_5 es el conjunto formado por una lattice cuadrángular que incluye el interior de una franja vertical y otra horizontal (ver Figura 3.5b) entonces $A_5 \in F_5$.

Demostración: Como $A_4 \subseteq A_5$ entonces $A_5 \in F_4$. Sea C un conjunto de 5 puntos entonces alguna transformación en H coloca a C sobre A_5 , quedando quizás un punto de C fuera de A_5 . Con traslaciones horizontales o verticales podemos colocar a dicho punto sobre alguna de las franjas cuyo interior pertenece a A_5 . \square

Ejemplo 9 Si A_6 es el conjunto formado por una lattice cuadrángular que incluye el interior de franjas alternadas verticales y horizontales (ver Figura 3.5c) entonces $A_6 \in F_6$.

Demostración: Como $A_5 \subseteq A_6$ entonces $A_6 \in F_5$. Sea C un conjunto de 6 puntos entonces alguna transformación en H coloca a C sobre A_6 , quedando quizás un punto de C fuera de A_6 . Con traslaciones horizontales o verticales podemos colocar a dicho punto sobre alguna de las franjas cuyo interior pertenece a A_6 . \square

Ejemplo 10 Si A_7 es el conjunto formado por la unión de A_6 y el interior de alguno de los cuadrados que aún no estaban

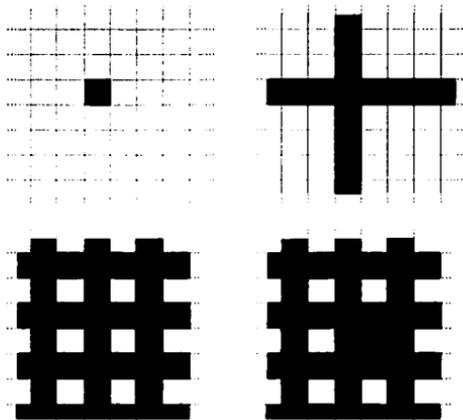


FIGURA 3.5. Cubiertas universales para 4, 5, 6 y 7 puntos.

contenidos en A_6 (ver Figura 3.5d) entonces $A_7 \in F_7$.

Demostración: Como $A_6 \subseteq A_7$ entonces $A_7 \in F_6$. Sea C un conjunto de 7 puntos entonces alguna transformación en H coloca a C sobre A_7 , quedando quizás un punto de C fuera de A_7 . Con traslaciones horizontales o verticales podemos colocar a dicho punto sobre el cuadrado cuyo interior acabamos de agregar a A_6 para formar A_7 . \square

De esta forma podemos construir inductivamente un conjunto A_n que pertenezca a F_n . Como en ningún momento tomamos en cuenta la longitud de los lados de los cuadrados que forman la lattice inicial entonces podemos suponer que miden $x > 0$.

Notemos que A_4, A_5 y A_6 contienen discos de radio a lo más $\frac{x}{2}$, es decir, el disco inscrito al cuadrado de lado x ; A_7, A_8 y A_9 contienen discos de radio a lo más $\frac{3x}{2}$; A_{10}, A_{11} y A_{12} contienen discos de radio a lo más $\frac{3^2x}{2}$ y en general A_{3n-2}, A_{3n-1} y A_{3n} contienen discos de radio a lo más $\frac{3^{n-1}x}{2}$; por lo que A_n contiene discos de radio a lo más $3\left\lceil\left\lceil\frac{n-1}{3}\right\rceil\right\rceil\frac{x}{2}$.

Dado $\varepsilon > 0$ cualquier $x_\varepsilon < \frac{2\varepsilon}{3\left\lceil\left\lceil\frac{n-1}{3}\right\rceil\right\rceil}$ cumple que si A_n está construida a partir de la lattice inicial formada por cuadrados de lado x_ε entonces $A_n \in F_n$ y A_n no contiene discos de radio ε .

Observación 5 *La lattice inicial de la familia de cubiertas $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots\}$ puede estar formada por cualquier paralelogramo.*

Teorema 12 *Si $A \in F_n$ y algún conjunto Q de $n-1$ puntos puede ser cubierto por A a lo más de una cantidad numerable de formas, entonces $A^\circ \neq \emptyset$.*

Demostración: Sean $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ las únicas posibles isometrías tales que la imagen de Q bajo dichas transformaciones esté contenida en A . Sea D un disco cerrado tal que $D \cap Q = \emptyset$. Como A es cubierta para n puntos entonces cualquier conjunto de la forma $Q \cup \{x\}$ con $x \in D$ puede ser cubierto por A , es decir, para toda $x \in D$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_i(Q \cup \{x\}) \subset A$.

Así tenemos que $D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [\phi_i^{-1}(\phi_i(Q \cup D) \cap A)]$. Por el Teorema de la Categoría de Baire tenemos que $(\phi_i(Q \cup D) \cap A)^\circ \neq \emptyset$ para alguna $i \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $A^\circ \neq \emptyset$. \square

En particular, si A es una lattice rectangular entonces $A \in F_3$, $A^\circ = \emptyset$ y los triángulos equiláteros pueden ser cubiertos por A en una cantidad numerable de formas. De esta manera y utilizando



el teorema anterior podemos concluir que $A \notin F_1$ y si $A \cup B \in F_1$ para algún conjunto B , entonces $B^\circ \neq \emptyset$.

Teorema 13 Sea $A \in F_n$ con la propiedad de que para algún disco D existe un $(n+1)$ -ágono regular arbitrariamente grande tal que cualesquiera n vértices del polígono no pueden ser colocados utilizando transformaciones de semejanza sobre $A \cap D^\circ$. Si $A \cup S \in F_{n+1}$ entonces S no es acotado.

Demostración: Supongamos que $A \cup S \in F_{n+1}$ y que S es acotado. Sea D' un disco que contenga a $D \cup S$ y P un $(n+1)$ -ágono regular tal que:

- i) puede tener a lo más un vértice en D' y
- ii) puede tener n vértices sobre $A \cap D'^\circ$.

Entonces P no puede colocarse sobre $A \cup S$. \square

Corolario 13.1 Si A_1 es el miembro de F_1 dado en el ejemplo 7 y $A_1 \cup S \in F_3$, entonces S no es acotado.

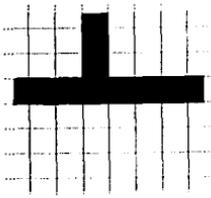


FIGURA 3.6. Una cubierta más pequeña para cinco puntos.



3.1 Una Cubierta Universal para todo Conjunto Finito de Puntos

En esta sección daremos una cubierta universal para cualquier conjunto finito de puntos construida a partir de una unión de Conjuntos de Cantor (ver sección ??).

Lema 5 *Dado un número natural N existe un conjunto cerrado C_N contenido en el intervalo $[0, N + 1]$ tal que no contiene intervalos y para toda sucesión de números reales positivos d_1, d_2, \dots, d_k con $k \leq N$ y $\sum_{i=1}^k d_i \leq N$ existen $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ en C_N tales que $x_{i+1} - x_i = d_{i+1}$ con $i = 0, 1, \dots, k - 1$.*

Demostración: Sea b un número mayor que $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ y sea B_N el conjunto de Cantor formado a partir del intervalo cerrado $[0, 1]$ quitando los intervalos abiertos de puntos cuya representación en base b contenga a $b-1$ como dígito (los extremos de los intervalos tales como $0.(b-1)000\dots = 0.(b-2)(b-1)(b-1)\dots$ permanecen en B_N). Entonces B_N contiene a todos los números cuya representación en base b no tiene al dígito $b-1$.

Demostraremos que $C_N = \cup_{i=1}^N (i + B_N)$ tiene la propiedad requerida por el Lema. Como C_N es la unión de un número finito de intervalos cerrados que no contienen intervalos, entonces C_N tiene las mismas características, es decir, es cerrado y no contiene intervalos.

Ahora demostraremos que es posible construir q_i de forma que $0.q_1q_2q_3\dots$ es la representación en base b de x_0 , entonces $x_0, x_1 = x_0 + d_1, x_2 = x_0 + d_1 + d_2, \dots, x_k = x_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_k$ estén en C_N .

Supongamos que

$$\begin{aligned}d_1 - \llbracket d_1 \rrbracket &= .d_{11}d_{12}\dots(\text{base } b) \\d_2 - \llbracket d_2 \rrbracket &= .d_{21}d_{22}\dots(\text{base } b) \\&\dots \\d_k - \llbracket d_k \rrbracket &= .d_{k1}d_{k2}\dots(\text{base } b)\end{aligned}$$

en donde $\llbracket x \rrbracket$ denota a la parte entera de x . Sabemos ya que $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subset [0, N+1]$ pues $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k = x_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_k < x_0 + \sum_{i=1}^k d_i \leq x_0 + N < 1 + N$. Como C_N está formado por la unión de copias de $B_N \subset [0, 1]$ colocadas en cada uno de los intervalos $[0, 1], [1, 2], \dots, [N, N+1]$ entonces sólo falta ver que las partes fraccionarias de cada uno de los x_i 's, es decir, $x_1 - \llbracket x_1 \rrbracket, x_2 - \llbracket x_2 \rrbracket, \dots, x_k - \llbracket x_k \rrbracket$, pertenecen a B_N para poder concluir que x_0, x_1, \dots, x_k pertenecen a C_N .

Para ésto es suficiente escoger q_s de tal manera que los números

$$\begin{aligned}& q_s \\& q_s + d_{1s} + d_{1s} + 1 \\& q_s + d_{1s} + d_{2s} + d_{1s} + d_{2s} + 1, q_s + d_{1s} + d_{2s} + 2 \\& \dots \\& q_s + d_{1s} + d_{2s} + \dots + d_{ks}, q_s + d_{1s} + \dots + d_{ks} + 1, \dots, q_s + d_{1s} + \dots + d_{ks} + k\end{aligned}$$

no sean congruentes con $b-1 \pmod{b}$, pues por ejemplo



$$\begin{aligned}
 x_0 + d_1 &= \begin{array}{cccc} 0 & q_1 & q_2 & \dots \\ & [[d_1]] & d_{11} & d_{12} & \dots \end{array} \\
 &= ([[d_1]] \text{ ó } [[d_1]] + 1) \cdot (q_1 + d_{11} \text{ ó } q_1 + d_{11} + 1) (q_2 + d_{12} \text{ ó } q_2 + d_{12} + 1) \dots \\
 x_0 + d_1 + d_2 &= \begin{array}{cccc} 0 & q_1 & q_2 & \dots \\ & [[d_1]] & d_{11} & d_{12} & \dots \\ & & [[d_2]] & d_{21} & d_{22} & \dots \end{array} \\
 &= ([[d_1]] + [[d_2]] \text{ ó } [[d_1]] + [[d_2]] + 1 \text{ ó } [[d_1]] + [[d_2]] + 2) \cdot \\
 &\quad (q_1 + d_{11} + d_{12} \text{ ó } q_1 + d_{11} + d_{12} + 1 \text{ ó } q_1 + d_{11} + d_{12} + 2) \dots
 \end{aligned}$$

(el número 1 algunas veces debe ser sumado a $q_n + d_{1n}$ cuando estamos sumando $x_0 + d_1$ porque puede ser el "acarreo" de la suma anterior $q_{n+1} + d_{1(n+1)}$ y de igual forma los números 1 y 2 algunas veces deberán ser sumados a $q_n + d_{1n} + d_{2n}$ pues como ahora estamos sumando tres cifras el "acarreo" puede ser 1 ó 2).

Es posible escoger q_s porque en la lista anterior hay a lo más $\frac{(N+1)(N+2)}{2} < b$, es decir, los residuos correspondientes a los números $(b-1), ((b-1) - d_1), ((b-1) - d_1 - 1) \dots ((b-1) - d_{1s} - \dots - d_{ks} - k)$ módulo b no agotan la lista completa de residuos $0, 1, 2, \dots, b-2, b-1$ módulo b y de esta forma por lo menos un residuo módulo b queda libre para asignárselo a q_s .

Por último, la elección de q_s puede ser hecha independientemente de la elección de q_m para $s \neq m$ por lo que existe una cantidad a lo más numerable de formas de elegir x_0 . \square

Teorema 14 Existe un conjunto A con $A \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i^N$ y $A^0 = \emptyset$.

Demostración: Sea $\{N_i\}$ una sucesión creciente de números naturales con bases correspondientes b_i y coloquemos trasladados de C_{N_i} uno tras otro sobre el eje real positivo. Llamemos a este conjunto C y sea $A = C \times \{\mathbb{R}\}$. Entonces para todo conjunto Q con r puntos consideremos las distancias d_1, d_2, \dots, d_{r-1} entre proyecciones consecutivas de puntos en Q sobre el eje horizontal

, en donde alguna d_i posiblemente sea 0. Además para alguna N_i , $r - 1 < N_i$ y $\sum_{i=1}^k d_i \leq N_i$. Por el Lema anterior tenemos que una traslación horizontal coloca a Q sobre A . \square

Observación 9 *La única transformación requerida para cubrir cualquier conjunto finito Q con A es una traslación horizontal y ésto puede ser hecho de una cantidad numerable de formas.*

Observación 10 *Podemos reemplazar a $C \times \{R$ por $C \times C$ obteniendo una cubierta totalmente discreta. Para cubrir cualquier conjunto finito Q con esta nueva cubierta necesitaremos una traslación horizontal y una vertical.*



Cubiertas bajo Semejanza

Denotaremos por H al conjunto de transformaciones del plano que son resultado de composiciones de isometrías y homotecias.

Definición 14 *Un conjunto A en el plano es una semicubierta universal para n puntos si:*

i) A es cerrado.

ii) A° es vacío.

iii) *Para cualesquiera n puntos Q en el plano existe Φ_Q un elemento de H tal que $\Phi_Q(Q) \subset A$.*

Denotaremos por S_n al conjunto de las semicubiertas universales para n puntos.

Veamos algunos ejemplos sencillos:

Ejemplo 11 *La letra " Γ^n " es un elemento de S_3 .*

Ejemplo 12 *Una lattice¹ (ver Figura 4.1) es una semicubierta para cuatro puntos.*

¹Dadas dos rectas no paralelas l_1 y l_2 y dos números reales x_1 y x_2 podemos construir una lattice tomando al conjunto formado por todas las rectas paralelas a l_1 y l_2 que estén a distancia un múltiplo entero de x_1 y x_2 respectivamente.

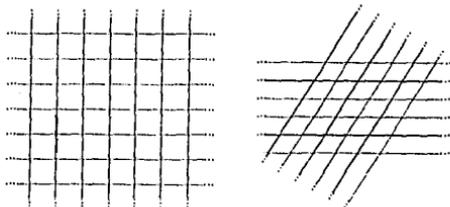


FIGURA 4.1. Ejemplos de latices en el plano.

Ejemplo 13 Demostración: Sean L_1 y L_2 los dos conjuntos de rectas paralelas que forman la red infinita. Dado Q un conjunto de cuatro puntos, podemos colocar dos de ellos sobre alguna recta de L_1 ; con traslaciones en la dirección de esta recta podemos colocar al tercer punto; sobre alguna recta en L_2 y con transformaciones de semejanza podemos colocar al cuarto punto sobre alguna recta en L_1 . \square

Ejemplo 14 Una parábola con un conjunto infinito de rectas equidistantes, paralelas entre sí y no paralelas al eje de la parábola es una semicubierta para tres puntos (ver 4.2).

Ejemplo 15 El conjunto formado por una circunferencia y su radio es una semicubierta para cuatro puntos.

Demostración: Sea A el conjunto formado por la circunferencia $C(O, r)$ y alguno de sus radios. Dado Q un conjunto de cuatro puntos, existe un disco cerrado que los contiene y cuya frontera contiene a tres de ellos (ver 6). De esta manera podemos encontrar un conjunto semejante a Q tal que tres de sus

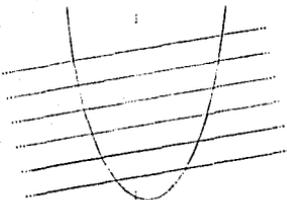


FIGURA 4.2. Una semicubierta para tres puntos formada por una parábola y rectas.

puntos estén sobre la circunferencia $C(O, r)$ y utilizando rotaciones con centro en O podemos colocar al cuarto punto sobre el radio contenido en A (ver 4.3). \square

Ejemplo 16 El conjunto formado por la espiral logarítmica y una recta que pase por su centro es una semicubierta para cuatro puntos.

Observación 11 Si $A \in F_n$ y $A^\circ = \emptyset$ entonces $A \in S_n$. Ninguna de las inclusiones $F_n \subseteq S_n, S_n \subseteq F_n$ es cierta, pues si A es la cubierta para cuatro puntos mostrada en la Figura ?? y B es la cubierta mostrada en la Figura 4.3 entonces $A \in F_4, A \notin S_4, B \in S_4$ y $B \notin F_4$.

Observación 12 $S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$, es decir, si $A \in S_n$ entonces $A \in S_m$ para toda $m \leq n$ y si $A \notin S_n$ entonces $A \notin S_m$ para toda $m \geq n$.

Observación 13 Si $A \subseteq B, B$ cerrado, $B^\circ = \emptyset$ y $A \in S_n$ entonces $B \in S_n$ y si $B \subseteq A$ y $A \notin S_n$ entonces $B \notin S_n$.

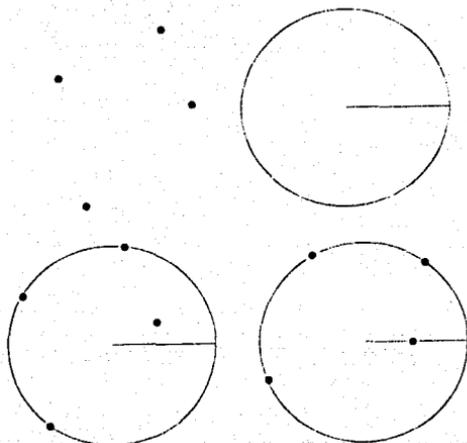


FIGURA 4.3. Una semicubierta para cuatro puntos.

Observación 14 Si A es un conjunto no vacío, cerrado y A° es vacío entonces $A \in S_1$.

Observación 15 Si A es un conjunto con por lo menos dos puntos, cerrado y A° es vacío entonces $A \in S_2$.

Teorema 15 (S. Fernández) Si $A \in S_n$ entonces para todo conjunto P de $n-1$ puntos en el plano se tiene que el conjunto $B = \{\sigma \in H \mid \sigma(P) \subseteq A\}$ es no numerable, es decir, $|B| > \aleph_0$.

Demostración: Sean P un conjunto de $n - 1$ puntos en el plano y $B = \{\sigma \in H \mid \sigma(P) \subseteq A\}$. Supongamos que B es a lo más numerable y denotemos por σ_i con $i \in \mathbb{N}$ a los elementos de B (si B tiene n elementos entonces pensaremos a B como el conjunto $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ y para toda $i \geq n$, $\sigma_i = \sigma_n$).

Sea x_1 un punto que no esté en el conjunto P ni en el conjunto A . Como A^c es abierto entonces ²existe ε_1 en el intervalo abierto $(0, 1)$ tal que $B_{\varepsilon_1}[\sigma_1(x_1)]$ es subconjunto de A^c .

Sea $C_1 = \sigma_1^{-1}(B_{\varepsilon_1}[\sigma_1(x_1)])$. Consideremos el conjunto $\sigma_2(C_1)$. Como A^c es vacío entonces tenemos que existen y_2 en A^c y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $B_{\varepsilon_2}[y_2]$ está contenido en la intersección de A^c y $\sigma_2(C_1)$.

Sea $C_2 = \sigma_2^{-1}(B_{\varepsilon_2}[y_2])$. En general consideremos el conjunto $\sigma_n(C_{n-1})$. Como A^c es vacío entonces tenemos que existen y_n en A^c y $\varepsilon_n > 0$ tales que $B_{\varepsilon_n}[y_n]$ está contenido en la intersección de A^c y $\sigma_n(C_{n-1})$. Sea $C_n = \sigma_n^{-1}(B_{\varepsilon_n}[y_n])$.

De esta forma tenemos una sucesión de esferas cerradas anidadas $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_{n-1} \supseteq C_n \supseteq \dots$ en el plano. El Teorema de las Esferas Anidadas (ver Teorema 4) nos garantiza que $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ es no vacía.

Sea y un elemento de $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$. Entonces para cualquier número natural i tenemos que $\sigma_i(y)$ está en A^c , lo cual implica que para toda $\sigma \in H$, $\sigma[P \cup \{y\}]$ no es subconjunto de A y $P \cup \{y\}$ tiene exactamente n elementos (es decir A no cubre a $P \cup \{y\}$) lo que contradice nuestra hipótesis $A \in S_n$.

Por lo tanto el conjunto B es no numerable. \square

²Como A^c es abierto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{\epsilon}(\sigma_1(x_1)) \subseteq A^c$. Sea $\epsilon_1 = \min\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$. Entonces $B_{\epsilon_1}[y_1] \subseteq A^c$.



Definición 15 Sea A un subconjunto del plano. Decimos que dos elementos σ y φ son A -equivalentes ($\sigma \sim_A \varphi$) si existe $h \in H$ tal que $h(A) = A$ y $\varphi = h \circ \sigma$.

Proposición 4 \sim_A es relación de equivalencia.

Demostración: i) Si $\sigma \in H$ entonces $\sigma \sim_A \sigma$ pues $\sigma = Id \circ \sigma$ y $Id \in H$.

ii) Si $\sigma \sim_A \varphi$ entonces existe $h \in H$ tal que $h(A) = A$ y $\varphi = h \circ \sigma$ lo cual implica que $h^{-1}(A) = A$ (pues h es biyectiva) y $\sigma = h^{-1} \circ \varphi$. Por lo tanto $\varphi \sim_A \sigma$.

iii) Si $\varphi \sim_A \sigma$ y $\sigma \sim_A \psi$ entonces existen h y g en H tales que $h(A) = g(A) = A$, $\varphi = h \circ \sigma$ y $\sigma = g \circ \psi$ lo cual implica que $h \circ g \in H$, $h \circ g(A) = h(g(A)) = A$ y $\varphi = (h \circ g) \circ \psi$. Por lo tanto $\varphi \sim_A \psi$. \square

Denotemos por $H \sim_A$ al conjunto de clases de equivalencia en H bajo \sim_A y por $[\varphi]$ a la clase de equivalencia que contiene a φ .

Teorema 16 (Generalización Teorema 15) Sea $A \in S_n$, entonces para todo conjunto P de $n - 1$ puntos se tiene que el conjunto $\{[\varphi] \in H \sim_A \mid \varphi(P) \subseteq A\}$ es no numerable.

Demostración: Sea $A \in S_n$ y supongamos que existe un conjunto P de $n - 1$ puntos tal que el conjunto $D = \{[\varphi] \in H \sim_A \mid \varphi(P) \subseteq A\}$ es a lo más numerable.

Sean $[\varphi_1], [\varphi_2], \dots, [\varphi_n], \dots$ los elementos de D (si D tiene sólo n elementos $[\varphi_1], [\varphi_2], \dots, [\varphi_n]$ entonces pensaremos $[\varphi_m] = [\varphi_n]$ para toda $m \geq n$).

Como A es cerrado y no contiene discos de tamaño arbitrario entonces existen $x_1 \in A^c$ y $\varepsilon_1 > 0$ tales que el disco cerrado con centro en x_1 y radio ε_1 está contenido en A^c , es decir, $D_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq A^c$.

Sea D_1 la imagen inversa del disco $D_{\varepsilon_1}(x_1)$ bajo φ_1 ($D_1 = \varphi_1^{-1}[D_{\varepsilon_1}(x_1)]$). Como φ_1 es continua, entonces D_1 es un disco cerrado.

Si $\sigma_1 \underset{A}{\sim} \varphi_1$ entonces existe $h_1 \in H$ tal que $h_1(A) = A$ y $\sigma_1 = h_1 \circ \varphi_1$. Como $\varphi_1(P) \subseteq A$ entonces $\sigma_1(P) = h_1 \circ \varphi_1(P) \subseteq h_1(A) = A$ y $\sigma_1(D_1) \subseteq A^c$, pues x está en la intersección de $\sigma_1(D_1)$ y A . Todo lo anterior implica que $x = \sigma_1(y) = h_1 \circ \varphi_1(y) = h_1(\varphi_1(y)) \in A$ para alguna $y \in D_1$, es decir, $\varphi_1(y) \in A$ lo cual contradice que $\varphi_1(y) \in A^c$.

Definiremos D_{n+1} recursivamente:

Si $D_n = \varphi_{n-1}[D_{\varepsilon_n}(x_n)]$ entonces $\varphi_{n+1}(D_n)$ no está contenido en A (pues A tiene interior vacío). Como A es cerrado y no contiene discos de tamaño arbitrario entonces existen $x_{n+1} \in \varphi_{n+1}(D_n)$ y $\varepsilon_{n+1} > 0$ tales que el disco cerrado con centro en x_{n+1} y radio ε_{n+1} está contenido en A^c , es decir, $D_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq A^c$.

Sea D_{n+1} la imagen inversa del disco $D_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})$ bajo φ_{n+1} ($D_{n+1} = \varphi_{n+1}^{-1}[D_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})]$). Entonces D_{n+1} es un disco cerrado contenido en D_n . Además, utilizando el mismo argumento que en (??) si $\sigma_{n+1} \underset{A}{\sim} \varphi_{n+1}$ entonces $\sigma_{n+1}(D_{n+1}) \subseteq A^c$.

Así $D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_n \supset D_{n+1} \supset \dots$ es una sucesión de cerrados anidados, no vacíos y así, por el Teorema de las Esferas Anidadas, tenemos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i \neq \emptyset$. Sea $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$. Si $\sigma(P) \subseteq A$ entonces $\sigma \underset{A}{\sim} \varphi_n$ para algún número natural n . Como $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$, $x \in D_n$ y así tenemos que $\sigma(x) \notin A$.



De lo anterior concluimos que para toda $\sigma \in H$ se tiene que $\sigma(P \cup \{x\})$ no está contenido en A , es decir, $A \notin S_n$ (pues A no cubre al conjunto de n puntos $P \cup \{x\}$). \square

4.1 Cubiertas Formadas por Rectas

Los siguientes teoremas dan información general sobre conjuntos de rectas en el plano.

Observación 16 *Si A está formado por n rectas o segmentos de recta entonces:*

i) Si $n \geq 1$ entonces $A \in S_1$ y $A \in S_2$.

ii) Si $n \geq 2$ entonces $A \in S_3$.

Teorema 17 (S. Fernández) *Si A está formado por n rectas o segmentos de recta que se intersectan en pares y no tres de ellos concurrentes, entonces A no es cubierta universal para m puntos para toda $m \geq 5$.*

Demostración: Sea $A = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ un conjunto de n rectas que se intersectan en pares, no tres de ellas concurrentes; sea $A' = \{p \in l_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ y sea $P = \{P_{rs} = l_r \cap l_s \mid 1 \leq r < s \leq n\}$.

Sean $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ diferentes entre sí y R un rectángulo con vértices A, B, C y D . Si $\sigma \in H$ y $\{\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C), \sigma(D)\} \subseteq A'$ entonces tenemos dos casos:

1. Sin perder generalidad $\sigma(A) \in l_i, \sigma(B) \in l_j, \sigma(C) \in l_k$.

2. Sin perder generalidad $\sigma(A), \sigma(B) \in l_i, \sigma(C), \sigma(D) \in l_j$.

Caso 1: Si $H_R = \{\sigma \in H \mid \sigma(A) \in l_i, \sigma(B) \in l_j, \sigma(C) \in l_k\}$ entonces $L_R(i, j, k) = \{\sigma(D) \mid \sigma \in H_R\}$ es una recta (ver Teorema 7).

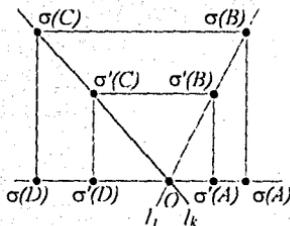


FIGURA 4.4. A, B y C se mueven en rectas diferente

a) Si $L_R(i, j, k)$ es paralela a l_i entonces $L_R(i, j, k) \notin \mathcal{A}$ o $L_R(i, j, k) = l_i$. Pero $L_R(i, j, k) = l_i$ implica l_i, l_j, l_k concurrentes lo cual es una contradicción pues dadas σ, σ' en H_R tenemos que el triángulo $\sigma(D)\sigma(A)\sigma(B)$ es semejante al triángulo $\sigma'(D)\sigma'(A)\sigma'(B)$ y el triángulo $\sigma(D)\sigma(A)\sigma(C)$ es semejante al triángulo $\sigma'(D)\sigma'(A)\sigma'(C)$ ambas parejas con centro de homotecia $O = l_i \cap l_j = l_i \cap l_k$ lo cual implica que l_i, l_j, l_k son concurrentes. Por lo tanto $L_R(i, j, k) \notin \mathcal{A}$ (ver Figura 4.4).

b) Supongamos que $L_R(i, j, k)$ no es paralela a l_i y l_k es perpendicular a l_i .

Sean $D_R = L_R(i, j, k) \cap l_i$ y $\sigma_R \in H_R$. Como el ángulo $\sigma_R(D)\sigma_R(A)\sigma_R(B) = \frac{\pi}{2}$ con $\sigma_R(A) \in l_i, \sigma_R(C) \in l_j$ y l_i perpendicular a l_k entonces tenemos que $D_R = l_i \cap l_k$. Todo lo



anterior implica que $L_R(i, j, k) \notin A$ (pues $L_R(i, j, k)$, l_i y l_k son concurrentes) o $L_R(i, j, k) = l_k$ pero si esto último fuera cierto tendríamos que para toda $\sigma \in H_R$ $\sigma(D) = D_R$ (ver figura 4.5).

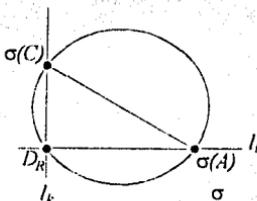


FIGURA 4.5. El punto de ..

Por otra parte, dadas σ, σ' en H_R tenemos que el triángulo $\sigma(D)\sigma(A)\sigma(B)$ es semejante al triángulo $\sigma'(D)\sigma'(A)\sigma'(B)$ y el triángulo $\sigma(D)\sigma(A)\sigma(C)$ es semejante al triángulo $\sigma'(D)\sigma'(A)\sigma'(C)$ ambas parejas con centro de homotecia $D_R = \sigma(D) = \sigma'(D)$ lo cual implicaría que l_i, l_j y l_k son concurrentes. Por lo tanto $L_R(i, j, k) \notin A$ (ver Figura 4.6).

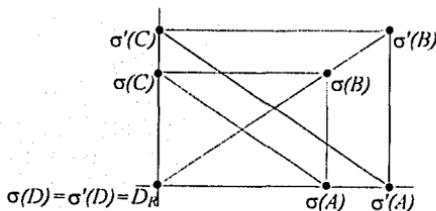


FIGURA 4.6. Las rectas son concurrentes...

c) Supongamos que $L_R(i, j, k)$ no es paralela a l_i y l_k no es perpendicular a l_i .

Dado $D' \in l_i$ existe un único rectángulo $R_{D'}$ con vértices A' , B' , C' y D' tal que $A' \in l_i$, $B' \in l_j$, $C' \in l_k$ y $D' \in l_i$. Si $D' \neq D''$ y $R_{D'} \neq R_{D''}$ entonces $\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{B'C'}{B''C''}$ implica l_i, l_j y l_k son concurrentes, o bien, $\frac{A'B'}{B''C''} = \frac{B'C'}{A''B''}$ (ver Figura 4.7).

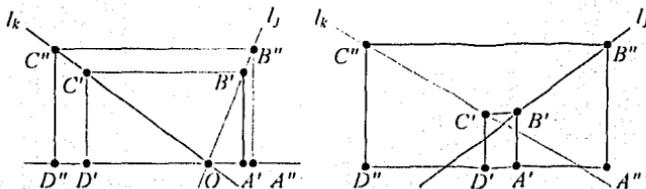


FIGURA 4.7. Primer caso lado izquierdo, segundo caso lado derecho.

Es decir, dado $D' \in l_i$ a lo más existe un punto $D'' \in l_i - \{D'\}$ tal que $R_{D'}$ es semejante a $R_{D''}$ de lo cual podemos deducir que a lo más un número finito de rectángulos R no semejantes entre sí cumplen que $D_R \in P$, es decir, el conjunto $\{\{R\} \in \mathfrak{R} \mid D_R \in P\}$ ³ es finito. Por lo tanto el conjunto $\{\{R\} \in \mathfrak{R} \mid L_R(i, j, k) \in A \text{ con } 1 \leq i, j, k \leq n\}$ es finito.

De estos tres incisos a), b) y c) concluimos que el conjunto de “clases” de rectángulos, cuyo conjunto de transformaciones en H que mandan sus vértices a A' es finito; es decir,

³Si R es un rectángulo entonces denotamos por $[R]$ al conjunto de todos los rectángulos semejantes a R .

\mathfrak{R} es el conjunto de todas las clases de equivalencia $[R]$.



$$\left\{ \left\{ [R] \in \mathfrak{R} \mid \text{si } A, B, C \text{ y } D \text{ son los v\u00e9rtices de } R \text{ entonces} \right. \right. \\ \left. \left. \mid \left\{ \sigma \in H \mid \{\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C), \sigma(D)\} \subset A'\right\} > \aleph_0 \right\} \right\} <$$

Caso 2: Este caso s\u00f3lo se da cuando el \u00e1ngulo formado por l_i y l_j es el mismo que el formado por las diagonales de R , es decir, a lo m\u00e1s un n\u00famero finito de "clases" de rect\u00e1ngulos $[R] \in \mathfrak{R}$ cumplen con \u00e9ste (ver Figura 4.8).

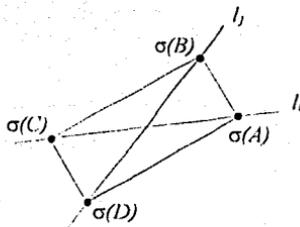


FIGURA 4.8. Caso 2

De los casos 1 y 2 concluimos que existe por lo menos un rect\u00e1ngulo R con v\u00e9rtices A, B, C, D (m\u00e1s a\u00fan, existe una infinidad no numerable de rect\u00e1ngulos semejantes por parejas) tal que el conjunto $\{\sigma \in H \mid \{\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C), \sigma(D)\} \subset A'\}$ es finito. Por lo tanto (ver Teorema 15) $A \notin S_5$ y de esta forma (ver Teorema 12) para toda $m \geq 5$ tenemos que $A \notin S_m$.

Por \u00faltimo, si B es un conjunto formado por n rectas o segmentos de recta que se intersectan en pares y no tres de ellos concurrentes, entonces a B lo podemos ver como subconjunto de un conjunto B' formado por n rectas (extendiendo a rectas los segmentos de B). Como ya sabemos que para toda $m \geq 5$

se tiene que $B' \notin S_m$ y $B \subseteq B'$ entonces (ver Teorema 13) para toda $m \geq 5$ se tiene que $B \notin S_m$. \square

Corolario 17.1 Si A está formado por $n \geq 3$ rectas o segmentos de recta que se intersectan en pares y no tres de ellos concurrentes, entonces A es cubierta para 4 puntos.

Teorema 18 Si A está formado por n rectas paralelas, entonces para toda $m \geq 4$ se tiene que A no es cubierta para m puntos.

Demostración: Sea $A = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ un conjunto de n rectas paralelas en el plano y $A' = \{P \in l_r \mid 1 \leq r \leq n\}$. Veamos que $A' \notin S_4$ de lo cual concluiremos directamente que $A' \notin S_m$ para toda $m \geq 4$.

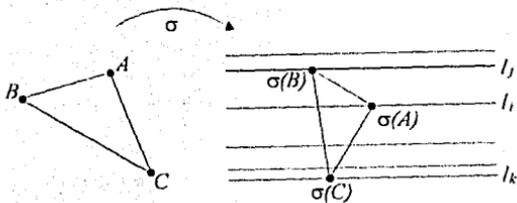


FIGURA 4.9. a) Tres puntos no colineales y n rectas paralelas. b) Una transformación que lleva a los tres puntos sobre tres rectas fijas.

Sean A , B y C tres puntos cualesquiera no colineales en el plano y sea $H(i, j, k) = \{\sigma \in H \mid \sigma(A) \in l_i, \sigma(B) \in l_j, \sigma(C) \in l_k\}$ con $1 \leq i < j < k \leq n$, es decir, el conjunto de transformaciones en H que llevan a A sobre l_i , a B sobre l_j y a C sobre l_k con i, j y k fijas (ver Figura 4.9).



Notemos que el conjunto $C(i, j, k) = \bigcup_{\sigma \in H(i, j, k)} \sigma^{-1}[A'] = \sigma_0^{-1}[A']$ para cualquier $\sigma_0 \in H(i, j, k)$, pues toda $\sigma \in H(i, j, k)$ cumple que $\sigma = \tau \circ \sigma_0$ en donde τ es una traslación en la dirección de las rectas de A (ver Figura 4.10).

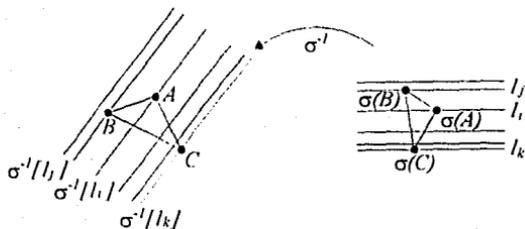


FIGURA 4.10. Utilizando la transformación inversa.

Entonces $C(i, j, k)$ está formado por n rectas lo cual implica que $C = \bigcup_{1 \leq i < j < k \leq n} C(i, j, k)$ es un conjunto de a lo más n^3 rectas (ver Figura 4.11).

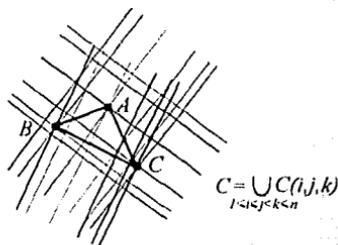


FIGURA 4.11. Al final tenemos un numero finito de rectas

Como C es un conjunto finito de rectas entonces hay puntos que no están en C . Sea D un punto que no esté en C entonces para toda σ_0 en $\cup_{1 \leq i \leq j < k \leq n} H(i, j, k)$ tenemos que $\sigma_0(D) \notin A'$, pues $\sigma_0 \in \cup_{1 \leq i \leq j < k \leq n} H(i, j, k)$ implica que $\sigma_0 \in H(i, j, k)$ para algunas $1 \leq i \leq j < k \leq n$ y si $\sigma_0(D)$ estuviera en A' tendríamos que $D \in \sigma_0^{-1}[A'] \subseteq \cup_{\sigma \in H(i, j, k)} \sigma^{-1}[A'] = C(i, j, k) \subseteq \cup_{1 \leq i \leq j < k \leq n} C(i, j, k) = C$ lo cual es una contradicción al hecho de que D no estaba en C .

Por lo tanto ninguna σ que manda a A, B y C en A' manda a D en A' , es decir, para toda $\sigma \in H$ el conjunto $\{\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C), \sigma(D)\}$ no está totalmente contenido en A' y de esta manera $A' \notin S_A$. \square

4.2 Cubiertas Formadas por Círculos

Al igual que en la sección anterior analizaremos conjuntos formados por círculos y veremos que condiciones deben cumplir para asegurar que sean o no semicubiertas de conjuntos finitos.

4.3 Cubiertas Formadas por Curvas Simples

En esta sección utilizaremos curvas que sean la imagen de parametrizaciones del intervalo cerrado $[0, 1]$.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**



4.4 Una Posible Semicubierta Interesante para Cinco Puntos

El siguiente conjunto está construido a partir del conjunto de Cantor base tres.

4.5 Semi-cubiertas Universales Formadas por Círculos

Teorema 19 *Sean P un punto, $C_r(O)$ una circunferencia de radio r y centro en O y ABC un triángulo con $AB = 1$, $AC = k$ y $\angle BAC = \alpha$. Para cada punto Q en $C_r(O)$ sea R_Q el punto tal que los triángulo ABC y PQR_Q son semejantes y tienen la misma orientación. Entonces el lugar geométrico de los puntos R_Q es una circunferencia de radio rk y centro en $R_{(P,\alpha,k)}(O)$, es decir,*

$$\{R_Q \mid Q \in C_r(O)\} = R_{(P,\alpha,k)}(C_r(O))$$

Demostración: Como los triángulos ABC y PQR_Q son semejantes y tienen la misma orientación entonces $\angle PQR_Q = \angle BAC = \alpha$ y $\frac{PR_Q}{PQ} = \frac{AC}{AB} = k$, es decir, $R_{(P,\alpha,k)}(Q) = R_Q$. Por lo tanto para toda $Q \in C_r(O)$ se tiene que $R_Q \in R_{(P,\alpha,k)}(C_r(O))$.

Por otro lado, si $S \in R_{(P,\alpha,k)}(C_r(O))$ entonces existe $S' \in C_r(O)$ tal que $\frac{PS'}{PS} = k = \frac{AC}{AB}$ y $\angle S'PS = \alpha = \angle BAC$ por lo tanto los triángulos ABC y $S'PS$ son semejantes y tienen la misma orientación, es decir $S = R_{S'}$.

Por lo tanto

$$\{R_Q \mid Q \in C_r(O)\} = R_{(P,\alpha,k)}(C_r(O))$$

es decir, el lugar geométrico de los puntos R_Q es una circunferencia de radio rk y centro en $R_{(P,\alpha,k)}(O)$. \square

Teorema 20 Sean $C_r(O)$ y $C_R(P)$ dos circunferencias y sea ABC un triángulo con $AB = l$, $BC = l$, $AC = k$ y $\angle BAC = \alpha$. Para cada punto A' en $C_r(O)$ y para cada punto B' en $C_R(P)$ sea $R_{A'B'}$ el punto tal que los triángulos ABC y $A'B'R_{A'B'}$ son semejantes y tienen la misma orientación. Entonces el lugar geométrico de los puntos $R_{A'B'}$ es

$$C_{rk+l}(R_{(O,\alpha,k)}(P)) - C_{|rk-l|}(R_{(O,\alpha,k)}(P))$$

Demostración: Sea T un punto tal que los triángulos OPT y ABC son semejantes y tienen la misma orientación. Sea $A' \in C_r(O)$ entonces para $B' \in C_R(P)$ se tiene que

$$\{R_{A'B'} \mid B' \in C_R(P)\} = R_{(A',\alpha,k)}(C_R(P))$$

es decir, el lugar geométrico de los puntos $R_{A'B'}$ cuando variamos B' en $C_R(P)$ es una circunferencia con centro en $R_{(A',\alpha,k)}(P)$ y radio Rk . Además

$$R_{(A',\alpha,k)}(P) = R_{(P,\beta,l)}(A')$$

Ahora bien si para cada A' en $C_r(O)$ dibujamos el lugar geométrico de los puntos $R_{A'B'}$ variando B' en $C_R(P)$, es decir, los círculos con centro en $R_{(A',\alpha,k)}(P) = R_{(P,\beta,l)}(A')$ y radio Rk , obtendremos un anillo con radio interior $rk - Rl$ y radio exterior $rk + Rl$ y centro en T . \square

Teorema 21 Sea C un conjunto formado por un número finito de círculos no tangentes por pares. Entonces C no es cubierta bajo semejanza para 5 puntos.



Demostración: Sea S un conjunto formado por la unión de las circunferencias $C_{r_1}(O_1), C_{r_2}(O_2), \dots, C_{r_n}(O_n)$. Sea $D_w(D)$ un disco que contenga a S y para $1 \leq i < j \leq n$ sea L_{ij} la mediatriz del segmento $O_i O_j$.

Consideremos al triángulo isósceles T_k con base $AB = 1$ y lados iguales $BC = CA = k$ entonces el lugar geométrico de los puntos C' tales que $A' \in C_{r_i}(O_i), B' \in C_{r_j}(O_j)$ y los triángulos T_k y $A'B'C'$ son semejantes y tienen la misma orientación es un anillo A_k con radio interior $rk - Rl$ y radio exterior $rk + Rl$ y centro en $R_{(O_i, \arccos \frac{1}{2k}, k)}$

Para cada Q en la recta L_{ij} sea $w_Q = d(D, Q)$, utilizando la desigualdad del triángulo tenemos que

$$w_D \geq d(Q, O_i) - d(D, O_i)$$

además el máximo círculo que contiene a A_k tiene radio

$$\frac{(r + R)d(Q, O_i)}{d(O_i, O_j)} = R_Q$$

y lo que haremos es buscar para que Q los discos $D_{R_Q(Q)}$ y $D_w(D)$ son ajenos. Para ésto necesitamos que

$$w_D > w + R_Q$$

4.6 Una Semi-Cubierta para Cinco Puntos

En esta sección daremos una semi-cubierta acotada para cinco puntos. Su construcción está basada en la cubierta para cuatro puntos dada en el Ejemplo ??.

Lema 6 Si f es una función continua, cerrada e inyectiva entonces la imagen de cualquier conjunto d.n.p bajo f es d.n.p.

Demostración: Sean f una función continua, cerrada e inyectiva y $D \neq \emptyset$ un conjunto d.n.p. contenido en el dominio de f , es decir, $D^{-\circ} = \emptyset$.

Supongamos que $x \in f(D)^{-\circ}$ entonces existe un conjunto abierto V tal que $x \in V \subseteq f(D)^-$, por lo cual tenemos que $V \cap f(D) \neq \emptyset$. Como f es cerrada entonces $f(D^-)$ es cerrado, además $D \subseteq D^-$ implica que $f(D) \subseteq f(D^-)$ y como el mínimo cerrado que contiene a $f(D)$ es $f(D)^-$ entonces $f(D)^- \subseteq f(D^-)$.

Sea $y \in f(D)$ entonces existe $d \in D$ tal que $f(d) = y \in V$, es decir, $d \in f^{-1}(V) = U$. Como f es continua y V es abierto entonces U es también un abierto.

Veamos que $U \subseteq D^-$.

Sea $w \in U$ entonces $f(w) \in V$ (pues f es inyectiva y $f^{-1}(V) = U$) y como $V \subseteq f(D)^- \subseteq f(D^-)$ tenemos que $f(w) \in f(D^-)$, es decir, $w \in D^-$ (pues f es inyectiva). Por lo tanto $U \subseteq D^-$.

Ahora bien, como $d \in U \subseteq D^-$ y U es abierto entonces $d \in D^{-\circ} = \emptyset$ lo cual claramente es una contradicción. por lo tanto $f(D)^{-\circ} = \emptyset$, es decir, la imagen de cualquier conjunto d.n.p. bajo f es d.n.p. \square

Recordemos que cada $x \in [0, 1]$ puede ser escrita como

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$$

en donde cada x_i es igual a 0, 1 ó 2, es decir, $x = (x_1 x_2 \dots x_n \dots)_3$.

Si $x \notin C_3$ (Conjunto Clásico de Cantor) entonces sea $N_x = \min \{n \mid x_n = 1\}$.



En base a esto podemos definir la función $\mathfrak{S} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de la siguiente forma:

$$\mathfrak{S}(x) = \begin{cases} x \tan \left[\frac{\pi}{4} \left(\sum_{i=1}^{N_x-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N_x}} \right) \right] & \text{si } x \notin C_3 \\ x \tan \left[\frac{\pi}{4} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} \right) \right] & \text{si } x \in C_3 \end{cases}$$

Lema 7 *La imagen de cualquier conjunto d.n.p. bajo la función \mathfrak{S} es d.n.p.*

Demostración: Veamos que la función \mathfrak{S} es continua, cerrada e inyectiva. Sean

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = \tan \left(\frac{\pi}{4} x \right) & \\ \sum_{i=1}^{N_x-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N_x}} & \text{si } x \notin C_3 \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} & \text{si } x \in C_3 \end{cases} \\ h(x) = x$$

entonces $\mathfrak{S}(x) = h(x) \cdot f \circ g(x)$.

Como f y h son continuas entonces para ver que sólo hace falta ver que g es continua para poder asegurar que \mathfrak{S} también lo es.

Veamos primero que g es creciente.

Supongamos que $x, y \in [0, 1]$ cumplen que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{3^i} = y$$

entonces para alguna $m \in \mathbf{N}$ tenemos que $x_m < y_m$ y para toda $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, $x_{m-i} = y_{m-i}$.

Si algún $m-i = 1$ (para alguna $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$) entonces $N_x = N_y$ y así

$$g(x) = \sum_{i=1}^{N_x-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N_x}} = \sum_{i=1}^{N_y-1} \frac{y_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N_y}} = g(y)$$

Si para toda $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ tenemos que $m-i \neq 1$ entonces

Caso 1: Si $x_m = 0$ entonces $y_m = 1$ ó $y_m = 2$ lo cual quiere decir $\langle g(x) \rangle_2$ y $\langle g(y) \rangle_2$ coinciden en los primeros $m-1$ dígitos, el m -ésimo dígito de $\langle g(x) \rangle_2$ es 0 y el m -ésimo dígito de $\langle g(y) \rangle_2$ es 1 por lo que $g(x) < g(y)$.

Caso 2: Si $x_m = 1$ entonces $y_m = 2$ lo cual implica que $\langle g(x) \rangle_2$ y $\langle g(y) \rangle_2$ coinciden en los primeros $m-1$ dígitos, el m -ésimo dígito de $\langle g(x) \rangle_2$ es 1, para toda $k \in \mathbf{N}$ el $(m+k)$ -ésimo dígito de $\langle g(x) \rangle_2$ es 0, el m -ésimo dígito de $\langle g(y) \rangle_2$ es 1 y

i) Si para toda $k \in \mathbf{N}$ se cumple que $y_{m+k} = 0$ entonces para toda $k \in \mathbf{N}$ el $(m+k)$ -ésimo dígito de $\langle g(y) \rangle_2$ es 0 y por lo tanto $g(x) = g(y)$.

ii) Si existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $y_{m+k} \neq 0$ entonces para toda $k \in \mathbf{N}$ el $(m+k)$ -ésimo dígito de $\langle g(y) \rangle_2$ es 1 y por lo tanto $g(x) < g(y)$.

De todo lo anterior concluimos que g es creciente en $[0, 1]$.

Como f y h también son crecientes en $[0, 1]$ entonces $\mathfrak{S} = h \circ (f \circ g)$ también lo es.

Por otro lado g es una función suprayectiva pues si $w \in [0, 1]$ y $w = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{w_i}{2^i}$ entonces $g\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2w_i}{3^i}\right) = w$.



Como $\mathfrak{I} : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ es continua, $[0, 1]$ es compacto y de Hausdorff entonces \mathfrak{I} es cerrada.

Además \mathfrak{I} es inyectiva pues si $x, y \in [0, 1]$ y $x < y$ entonces $g(x) \leq g(y)$ (pues g es creciente en $[0, 1]$), $f \circ g(x) \leq f \circ g(y)$ (pues f es creciente en $[0, 1]$) y como $0 < x < y < 1$ entonces

$$\mathfrak{I}(x) = x(f \circ g)(x) < y(f \circ g)(x) \leq y(f \circ g)(y) = \mathfrak{I}(y)$$

es decir, $\mathfrak{I}(x)$ es estrictamente menor que $\mathfrak{I}(y)$.

Por último utilizando el Lema anterior tenemos que la imagen de cualquier conjunto d.n.p. bajo \mathfrak{I} es d.n.p. \square

Corolario 21.1 $\mathfrak{I}(C_3)$ es d.n.p. (en donde C_3 es el conjunto ternario de Cantor) y por lo tanto $\mathfrak{I}(C_3) \cup C_3$ en d.n.p.

Como $\mathfrak{I} = h \circ (f \circ g)$ y $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, $f : [0, 1] \longrightarrow [0, \frac{\pi}{4}]$ son funciones suprayectivas entonces el conjunto de pendientes de rectas que unen al punto $(x, 0)$ con el punto $(0, \mathfrak{I}(x))$ en donde $x \in C_3$ contiene todos los posibles valores en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ (pues la pendiente de la recta que une a $(x, 0)$ con $(0, \mathfrak{I}(x))$ es igual a $f \circ g(x)$).

Sea $r \in [0, 1]$ y tracemos la recta que une a los puntos $P = (1, 0)$ y $Q = (0, r)$. Como la pendiente m de esta recta está en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ entonces existe $b \in C_3$ tal que la recta que une a los puntos $R = (b, 0)$ y $S = (0, \mathfrak{I}(b))$ tiene pendiente m , es decir, las rectas PQ y RS son paralelas. Por lo tanto si $O = (0, 0)$ entonces los triángulos PQO y RSO son semejantes y de esta forma $\frac{1}{b} = \frac{r}{\mathfrak{I}(b)}$ lo cual implica que $\mathfrak{I}(b) = rb$.

Sea $B = (\mathfrak{I}(C_3) \cup C_3)^-$ entonces

i) B es cerrado.

ii) $B^\circ = \emptyset$.

iii) Para toda $r \in [0, 1]$ existe $b \in B$ tal que $rb \in B$.

Teorema 22 *El conjunto S formado por la familia de círculos concéntricos con radios $x \in B$ y uno de los radios del mayor de estos círculos es una semi-cubierta para cinco puntos (ver Figura ??).*

Demostración: Sea $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ un conjunto de cinco puntos. Entonces existe $\sigma \in H$ tal que, sin perder generalidad, $\sigma(A_1), \sigma(A_2)$ y $\sigma(A_3)$ estén sobre el círculo de radio 1 contenido en S y $\sigma(A_4), \sigma(A_5)$ estén en el interior del mismo. Digamos que el centro de los círculos de S es O . Sea $r = d(A_1, O) \in [0, 1]$ entonces existe $b \in B$ tal que $rb \in B$. Hagamos una homotecia con centro en O y razón b entonces $H_{(O,b)}(\{\sigma(A_1), \sigma(A_2), \sigma(A_3), \sigma(A_4)\})$ está contenido en el conjunto de círculos de S y si α es el ángulo formado por el radio de longitud 1 que está contenido en S y el segmento $O(H_{(O,b)} \circ \sigma(A_5))$ entonces $R_{(O,\alpha)} \circ H_{(O,b)} \circ \sigma(A) \subset S$. Por lo tanto S es una semi-cubierta para cinco puntos. \square

+

Bibliografia

- [1] H. Hadwiger, H. Debrunner, "Combinatorial Geometry in the Plane", *Holt, Rinehart and Winston* (1964).
- [2] H. L. Royden, "Real Analysis", *Macmillan* (1988).
- [3] C.G. Wastum. "Universal Covers of Finite Sets", *Journal of Geometry* **32** (1988).
- [4] I. M. Yaglom, "Geometric Transformations II", *Random House and the L. W. Singer Company* **21**. New Mathematical Library. The Mathematical Association of America.