



32  
24  
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES "ZARAGOZA"**

**" PROGRAMA DE SIMULACION POR  
COMPUTADORA PARA DETERMINAR LA  
RESPUESTA DINAMICA DE LOS SISTEMAS  
CON CONTROL AUTOMATICO "**

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE**  
**INGENIERO QUIMICO**  
**P R E S E N T A**  
**LUIS MANUEL PEREZ PEREZ**

**DIRECTOR DE TESIS**  
**ING. EDUARDO VAZQUEZ ZAMORA**

**MEXICO, D. F.**

**1995**

**FALLA DE ORIGEN**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS  
SUPERIORES \*ZARAGOZA\*  
JEFATURA DE LA CARRERA  
DE INGENIERIA QUIMICA

OF/JU/12/94

C. LUIS MANUEL PEREZ PEREZ  
P R E S E N T E.

En respuesta a su solicitud de asignación de jurado para el Examen Profesional, le comunico que la Jefatura a mi cargo ha propuesto la siguiente designación:

PRESIDENTE:      ING. EDUARDO VAZQUEZ ZAMORA  
VOCAL:            ING. SALVADOR GALLEGOS RAMALES  
SECRETARIO:      ING. JOSE BENJAMIN RANGEL GRANADOS  
SUPLENTE:        ING. MIGUEL ANGEL VARELA CEDILLO  
SUPLENTE:        ING. JOSE ANTONIO ZAMORA PLATA

A T E N T A M E N T E  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
México, D.F., 25 de noviembre de 1994

  
ING. JOSE BENJAMIN RANGEL GRANADOS  
JEFE DE LA CARRERA DE  
INGENIERIA QUIMICA

Irm

A mis padres.

Rogelio y Angelica,  
que son la más grande  
bendición que Dios me dio.

A mi hermano Javier.

Por que en mi camino  
con su paso fuerte y firme  
siempre estuvo conmigo.

A mis hermanos.

Gustavo, Elvia y Guillermo,  
Por sentir siempre su apoyo  
y cariño.

A mis tíos Román y María  
y a mi prima Alma.

Por que su presencia me trae tranquilidad y alegría.

A mis tíos Tomas y Raquel  
y a mis primas Norma y Sara.

Por esa convivencia y comprensión tan maravillosa.

A mi asesor de tesis,  
Eduardo Vazquez.

Con gratitud por su tiempo y ayuda que dispuso, y  
que nuestra amistad perdure por siempre.

## Resumen.

En esta tesis se abordó el análisis de los sistemas con control automático, se partió de los fundamentos del circuito cerrado de control en el cual con ejemplos de sistemas químicos, que se presentan en figuras, se obtuvieron los parámetros involucrados en el control automático, así como, su modelo matemático que representa al sistema, también se dio importancia al funcionamiento físico de los elementos de control y a sus partes que los componen con diagramas y dibujos para un buen entendimiento, basándose en estos conocimientos se programó en lenguaje "C", una simulación de un reactor con control por retroalimentación, se tomó para la programación un método numérico denominado Runge Kutta de cuarto orden, que sirve para resolver ecuaciones diferenciales, dichas ecuaciones diferenciales aparecen en el modelo matemático de los elementos de control, el programa de simulación del reactor, presenta los datos en forma de tabla que da una buena visión de todas las variables que intervienen en el control, además de gráficas a colores con sonido, que ayudan a tener un criterio rápido de la estabilidad del sistema. La parte fundamental de la tesis fue la programación ya que el resultado de esta debería ser una representación correcta de la respuesta dinámica de las variables del sistema que se entendiera y sirviera como base para la programación de otros sistemas, lo cual se logró ya que el algoritmo y la estructura del programa con unos pocos cambios puede simular otros sistemas autorregulables, esto se puede lograr ya que el lenguaje "C", es un lenguaje estructurado que entendiéndolo es fácil manipularlo, además de ser muy gráfico, y con la ventaja que la programación matemática es sencilla.

# **CONTENIDO.**

---

<b>Introducción.</b>	<b>4</b>
<b>Capítulo 1. Generalidades.</b>	<b>1.</b>
El sistema de control de procesos.	3.
Ejemplo de un circuito de control de un proceso.	5.
Términos importantes del control automático de procesos	9.
Señales de transmisión.	10.
Control por retroalimentación.	10.
Centro de vigilancia del proceso.	12.
Diseño del sistema de regulación.	13.
<b>Capítulo 2. Antecedentes matemáticos necesarios para los sistemas de control.</b>	<b>15.</b>
2.1 La transformada de Laplace.	16.
2.1.1 La transformada inversa de Laplace.	17.
2.2 Propiedades operacionales.	19.
2.2.1 Teorema de traslación real.	19.
2.2.2 Primer teorema de traslación real.	20.
2.2.3 La función escalón unitario.	21.
2.2.4 Pulso de magnitud H y duración T.	23.
2.2.5 Función de impulso unitario.	24.
2.2.6 Derivadas de una transformada.	26.
2.2.7 Teorema de la diferenciación real.	26.
2.2.8 Teorema de la integración real.	27.

2.3 Solución de ecuaciones diferenciales mediante el uso de transformadas de Laplace.	27.
2.4 Función de transferencia.	31.
2.5 Eigenvalores y estabilidad.	33.
Tabla 2.1	34.
<b>Capítulo 3. Sistemas dinámicos de primer orden.</b>	<b>37.</b>
3.1 Proceso térmico.	38.
3.2 Funciones de transferencia y diagramas de bloques.	49.
3.2.1 Funciones de transferencia .	49.
3.2.2 Diagramas de bloques.	50.
3.3 Tiempo muerto.	51.
Tabla 3.1	55.
<b>Capítulo 4. Sistemas dinámicos de orden superior.</b>	<b>57.</b>
4.1 Tanques en serie. (sistema no interactivo).	58.
4.2 Tanques en serie. (sistema interactivo).	68.
<b>Capítulo 5. Instrumentos de control.</b>	<b>73.</b>
5.1 Sensores de temperatura.	78.
5.2 Transmisor.	80.
5.2.1 Transmisor electrónico.	80.
5.3 Controladores.	81.
5.4. Actuadores.	88.
5.4.1 Actuadores de diafragma.	89.
5.4.2 Actuadores eléctricos.	90.
5.5 Válvulas.	91.

5.6 Posicionadores.	92.
<b>Capítulo 6. Sistemas de control por retroalimentación.</b>	<b>95.</b>
6.1 Control de temperatura para un tanque de calentamiento.	96.
6.2 Estabilidad del circuito de control.	106.
6.2.1 Prueba de Routh.	107.
<b>Capítulo 7. Simulación de los sistemas con control automático.</b>	<b>109.</b>
Tanque de reacción con agitación continua.	111.
Resolución por el método numérico de Runge Kutta de cuarto orden para ecuaciones diferenciales.	115.
Método numérico de Runge Kutta de cuarto orden.	118.
Duración de las corridas de simulación.	116.
Algoritmo de resolución del reactor por el método de Runge-Kutta.	166.
Manual de usuario.	119.
Presentación y análisis de resultados.	119.
Programa de simulación.	127.
<b>Conclusiones.</b>	<b>131.</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>133.</b>

esta tesis se ha escrito en un lenguaje sencillo, para que sea entendible por todos los interesados en el tema de control, y para que sea útil a los investigadores que deseen profundizar en el estudio de este tema. El lenguaje utilizado es el más sencillo posible, y se ha procurado que el lector pueda seguir el hilo de la argumentación sin necesidad de recurrir a otros textos. Se ha procurado que el lector pueda seguir el hilo de la argumentación sin necesidad de recurrir a otros textos. Se ha procurado que el lector pueda seguir el hilo de la argumentación sin necesidad de recurrir a otros textos.

---

# ***INTRODUCCION.***

La presente tesis es un trabajo de simulación por computadora que se basa específicamente en un análisis matemático netamente deductivo, que consta de 7 capítulos; el primero es un esbozo general de que es un circuito de control sus bases

y su alcance, así como una presentación sencilla y explicada de su aplicación a nivel industria, pasando por la instrumentación de equipo y llegando hasta el tablero de control; el segundo capítulo son las bases matemáticas que se involucran en el análisis de los sistemas de control automático, donde se explica su comportamiento de las ecuaciones con sus respectivas gráficas, también se introducen el uso de las transformadas de Laplace, para la resolución de las ecuaciones diferenciales; el tercer capítulo, denominado sistemas dinámicos de primer orden, introduce los términos que sirven como parámetros a los circuitos de control y deducción matemática, con la explicación física que le corresponde en dicho sistema; en el capítulo cuatro, se aborda, sistemas más complejos, comunes a los que se encuentran en la industria; el capítulo cinco, explica más detalladamente su función y funcionamiento de los elementos de control; el capítulo seis, presenta un sistema de control por retroalimentación y su solución, aplicando todos los conocimientos aprendidos en los capítulos anteriores; el capítulo siete se encarga de explicar la simulación y su aplicación a un sistema de control, también se presenta el programa de simulación su uso y aplicación a los sistemas con control automático, y se ve como facilita la solución de la respuesta del sistema un buen programa con una buena computadora.

---

# ***CAPITULO 1.***

# ***GENERALIDADES.***

**Para controlar un proceso, el ingeniero debe de entenderlo primero, para ello debe de apoyarse en los principios de balance de materia y energía, el flujo de fluidos, separación y la cinética de la reacción, para poder explicar la naturaleza dinámica del proceso.**

La mayoría de los procesos químicos son de naturaleza dinámica, en ellos siempre ocurren cambios y sino se emprenden las acciones pertinentes, en las variables importantes del proceso, es decir, aquellas que se relacionan con la seguridad, y la calidad del producto, no se cumplirá con las condiciones de diseño.

La regulación conocida también como control, trata del valor que ha de tomar las variables del proceso y su evolución, siga un determinado comportamiento o mantener un valor deseado. Deben de medirse las variables del proceso químico para regularlas con objeto de obtener las condiciones óptimas. Normalmente el comportamiento del proceso se representa mediante una expresión matemática que se conoce como su modelo, que no es una representación exacta, sino simplificada del comportamiento real, válida siempre que el proceso funcione en determinadas condiciones, que se habían considerado invariantes al diseñarlo. El modelo a elaborar debe describir el comportamiento de la salida a lo largo del tiempo, en función de las entradas y perturbaciones que puede recibir el sistema. Estos factores suelen recibir el nombre de perturbaciones, en general, pero el que representa el trabajo a realizar por la operación del proceso y que puede sufrir variaciones (el volumen de líquido contenido en el tanque de calentamiento por ejemplo), se denomina carga del proceso. Todo ello puede hacer que el valor real de salida no sea el deseado. Para la representación del modelo en el caso de ser lineal continuo se suelen usar *la transformada de Laplace*, que consiste en una proyección del sistema sobre un plano complejo, por lo que la ecuación diferencial se convierte en algebraica, función de la variable  $s$  compleja, que transforma las integraciones en divisiones por " $s$ " y las derivadas del tiempo en productos por " $s$ ", facilitando extraordinariamente el cálculo. El proceso como *función de transferencia*, que representa la entrada/salida. De ella se obtienen los parámetros que caracterizan al sistema, *las constantes de tiempo* que indica su velocidad de respuesta en los transitorios, *el tiempo de retardo* que nos informa el tiempo transcurrido desde que se produce una variación en la entrada hasta que se comienza a notar su efecto en la salida, y la *ganancia*, que es la relación entre la variación producida en la salida y la variación de la entrada que la genera. Esta representación del proceso mediante la función de transferencia se conoce como *representación en el dominio de la frecuencia*, ya que, mediante una

sustitución de la variable "s", nos es posible conocer cómo se comporta el sistema frente a señales oscilatorias de distintas frecuencias, y así definir perfectamente las características del sistema. (Figura 1.).

El objetivo del control automático de procesos es mantener en determinado valor de operación las variables del proceso tales como temperatura, presión, flujo y composición. El control de procesos y la automatización, junto con la instrumentación asociada, pueden considerarse como el cerebro y los nervios mecánicos de los procesos químicos modernos.

	REGULACION O CONTROL
PARAMETROS A CONTROLAR.	Valores de las variables
VALORES	Continuos
EQUIPOS	Regulador o controlador
MODELADO	Ecuaciones termodinámicas del sistema, funciones de transferencia y diagrama de bloques.
CALCULO	Ajuste de parámetros del controlador determinación de la estructura del control.

*Figura 1. Esquema de evolución para el diseño del control automático.*

### EL SISTEMA DE CONTROL DE PROCESOS.

Los cinco componentes básicos de todo sistema de control son:

- 1.- Sensor; mide la salida de la variable a controlar en el proceso.
- 2.- Transmisor; lleva la señal medida al controlador.
- 3.- Controlador; compara la señal recibida con la deseada, y registra el error.

manda una señal amplificada al actuador.

- 4.- **Actuador;** da entrada a la señal de error en el proceso, cambia la señal eléctrica a neumática y provoca la apertura de la válvula.
- 5.- **Elemento final de control;** frecuentemente se trata de una válvula de control aunque no siempre, otros elementos de control comúnmente utilizados son, bombas de velocidad variable y los motores eléctricos.

El primer paso es medir la variable a controlar en la salida o entrada de la corriente del proceso, esto se hace mediante un sensor (indicadores de temperatura o presión, medidor registrador de flujo, etc.) se conecta físicamente al transmisor, el cual capta la salida del sensor y lo convierte en una señal lo suficientemente intensa como para transmitirla al controlador. El controlador recibe la señal, la compara con el valor que se desea. Con base en la decisión el controlador envía otra señal al actuador que la convierte en señal neumática, el cual cierra o abre una válvula, por medio de inyección de vapor o controla las revoluciones de una bomba o bien puede ser un interruptor.

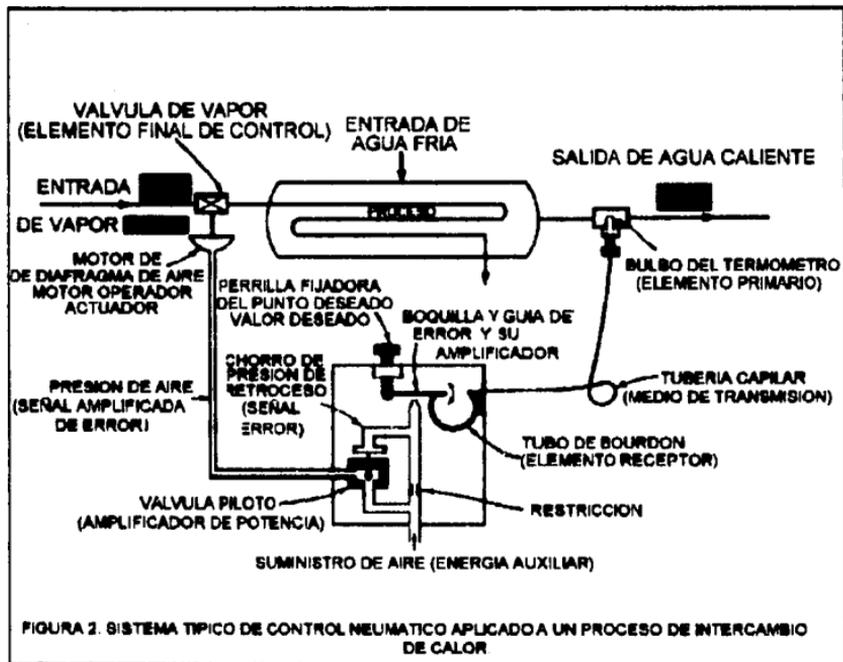
La importancia de estos componentes estriba en que realizan las tres operaciones básicas que deben de estar presentes en todo sistema de control; estas son:

- 1.- **Medición (M):** La medición de la variable que se controla se hace generalmente mediante combinación de sensor y transmisor.
- 2.- **Decisión (D):** Con base en la medición el controlador decide que hacer para mantener la variable en el valor que se desea.
- 3.- **Acción (A):** Como resultado de la decisión del controlador se debe de ejecutar una acción en el sistema, generalmente esta es realizada por el elemento final de control y su actuador.

Estas son las funciones básicas del control de procesos que dan lugar a un circuito cerrado para los sistemas automáticos de control.

### EJEMPLO DE UN CIRCUITO DE CONTROL DE UN PROCESO.

La figura 2 representa esquemáticamente un sistema de regulación operado con aire que trabaja sobre un proceso de calentamiento de agua. Las partes de un sistema de regulación dispuestas en forma de diagrama de cuadros para ilustrar las funciones básicas de control que efectúan cada parte, se muestran en la figura 3.



**MEDIOS DE MEDICION.** El sistema de medición de un control típico consta de tres partes:

- 1.- Un bulbo de termómetro (elemento primario o sensor), Esta es la parte del sistema medidor que está en contacto con la variable controlada (temperatura). El elemento primario convierte la energía del medio controlado (agua caliente) en una señal medible (presión de un fluido).
- 2.- Elemento bourdon de presión (elemento receptor). Esta parte del sistema evalúa la señal del elemento primario y la convierte en una lectura en una escala, un registro en una gráfica y un impulso para el detector de errores.
- 3.- La tubería capilar (medio de transmisión), Esta parte del sistema lleva la señal desde el elemento primario hasta el elemento receptor. En algunos controladores, las tres partes del sistema que se han mencionado se combinan en uno o dos dispositivos.

## **DECISION.**

**ELEMENTO DETECTOR DE ERRORES** (detector sin balancear, punto de excitación o relevador primario). En la figura 2 el detector de errores está formado por la boquilla y la guía. El detector de errores compara el valor medido de la variable a controlar con su valor deseado o establecido, y manda una señal de error cuando aparece alguna desviación. En los siguientes párrafos se da una descripción de como opera el detector de errores.

El valor deseado está representado por la posición del extremo izquierdo de la guía y se determina mediante ajuste manual de la perilla fijadora del punto deseado. El valor medido de la variable a controlar esta representado por la posición del extremo derecho de la guía, que está determinada por la deflexión del tubo de bourdon. Es decir, la guía es el brazo diferencial; la posición de su centro (junto a la

boquilla) representa la desviación (diferencial) o error entre el valor medido y el valor deseado de la variable a controlar. Con objeto de que esta desviación o señal de error tan pequeña, representada por la posición del punto medio de la guía, de intensidad tan débil, pueda utilizarse, deberá medirse y ampliarse. En este controlador esto se lleva a cabo mediante el detector de errores formado por la guía y la boquilla.

El sistema de aire de presión de retroceso está alimentado de forma continua con aire que proviene de la fuente de suministro a través de la restricción y que, una vez que ha pasado por el sistema, sale a la atmósfera a través de la boquilla. Como el centro de la guía (que representa el error) se mueve acercándose o alejándose del chorro de aire que sale por la boquilla, la resistencia al flujo de aire a través de la boquilla varía. Esto cambia la presión del aire dentro de la boquilla en forma proporcional al cambio de posición de la guía, con lo que se mide el valor de la desviación o error y se convierte en presión de retroceso del aire en el sistema o lo que es lo mismo, en una señal amplificada de error. El detector de errores es el corazón de cualquier controlador automático, ya que es la parte que percibe la desviación y que instiga primero a una desviación correctiva.

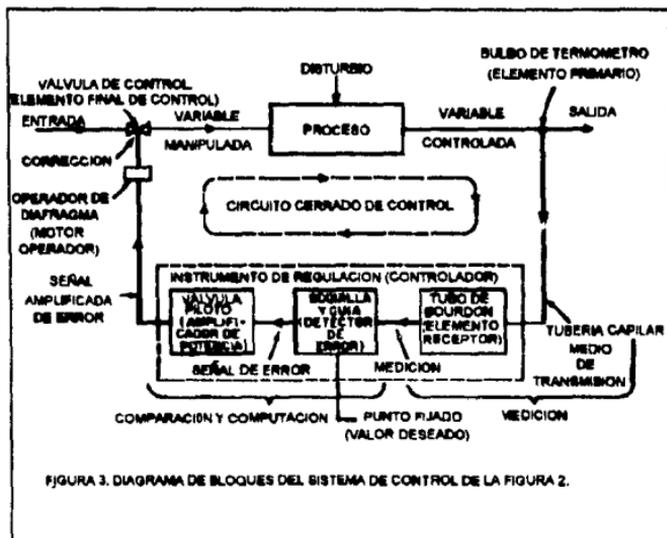
**AMPLIFICADOR.** Con objeto de restringir la sensibilidad o exactitud del sistema medidor, un detector de errores deberá tomar muy poca energía del sistema medidor, por lo que las señales de error suelen ser muy débiles. Para poder operar la mayoría de los elementos de control final, la energía de la señal deberá aumentarse. Por eso, casi todos los controladores automáticos contienen un amplificador de energía que utiliza fuerza auxiliar para aumentar la señal de error. En el controlador operado por aire típico de la figura 2 se obtiene algo de amplificación en el detector de errores de guía y boquilla, que podría considerarse como un amplificador primario. La válvula piloto que podría llamarse amplificador secundario de energía, produce la amplificación necesaria. Ambos pasos usan energía auxiliar suministrada por una fuente de aire a presión. La presión de retroceso dentro de la boquilla (señal de error) del detector de errores va a aplicarse sobre el diafragma de la válvula piloto. Esto hace que la válvula piloto se abra o cierre, para dejar pasar más o menos aire y formar una señal de error amplificada o salida del controlador de aire que sigue

siendo proporcional al error o desviación del punto medio de la guía.

### ACCION.

**MOTOR OPERADOR (ACTUADOR).** La señal de error deberá ser convertida en correcciones de la variable manipulada del proceso. En la mayoría de los sistemas de control, esto supone la necesidad de alguna forma de operador o motor que accione el elemento final de control. En el sistema operado por aire de la figura 2, el motor operador es el motor de diafragma de aire. La presión del aire de salida (señal de error amplificada) de la válvula piloto va a dar al diafragma del motor operador.

**ELEMENTO FINAL DE CONTROL.** El elemento de control final corrige el valor de la variable que se está controlando. En el sistema de control de la figura 2, el elemento final de control es la válvula de vapor, que está en contacto directo con el agente regulador (vapor) y corrige la variable de que se trata (velocidad de flujo del vapor).



## TERMINOS IMPORTANTES DEL CONTROL AUTOMATICO DE PROCESOS.

A continuación se definirán algunos términos que se usan en el control automático de procesos. El primer término es **variable controlada**, ésta es la variable que se debe mantener o controlar dentro de algún valor deseado. En el ejemplo precedente la variable controlada es la temperatura de salida del proceso  $T(t)$ . El segundo término es **punto de control**, el valor que se desea que tenga la variable controlada. La **variable manipulada** es la variable que se utiliza para mantener a la variable controlada en el punto de control, (punto de fijación o de régimen); en el ejemplo las variables manipuladas es el flujo de vapor. Finalmente, cualquier variable que ocasiona que la variable de control se desvíe del punto de control se define como **trastorno o perturbación**; en la mayoría de los procesos existe una cantidad de perturbaciones diferentes, por ejemplo, en el intercambiador de calor de la figura 2, las posibles perturbaciones son la temperatura de entrada del proceso,  $T_1(t)$ , el flujo de proceso,  $q(t)$ , la calidad de la contaminación, etc. Lo importante es comprender que en la industria de proceso, estas perturbaciones son la causa más común de que se requiera control automático de proceso; si no hubiera alteraciones, prevalecerían las condiciones de operación de diseño y no se necesitaría supervisar continuamente el proceso.

Otro término importante es el **control de circuito cerrado** que es cuando el controlador funciona dentro del circuito tomando la decisión, después de recibir y comparar la señal del transmisor.

Ahora se puede definir el objetivo del control automático de procesos, que se puede establecer como sigue:

El objetivo del sistema de control automático de procesos es utilizar la variable manipulada para mantener la variable controlada en el punto de control a pesar de las perturbaciones.

## SEÑALES DE TRANSMISION.

Actualmente se usan tres tipos de señales en la industria de procesos. La primera es la señal neumática o presión de aire, que normalmente abarca entre 3 y 15 psig, con menor frecuencia se usan señales de 6 a 30 psig o de 3 a 27 psig, su representación usual en los diagramas de tubería e instrumentación es  $\text{---//---}$ . La señal eléctrica o electrónica normalmente toma valores entre 4 y 20 mA; el uso de 10 a 50 mA, de 1 a 5 V o de 0 a 10 V es menos frecuente, la representación normal en los DTI's es  $\text{-----}$ . El tercer tipo de señal, el cual se está convirtiendo en el más común, es la señal digital o discreta (unos y ceros, binario), el uso de los sistemas de control con computadoras grandes, minicomputadoras o microprocesadores está forzando el uso de cada vez más el uso de esta señal y su señal es  $\text{---0---0---0---0---}$ .

Frecuentemente es necesario cambiar un tipo de señal por otro, esto se hace mediante un transductor, por ejemplo, cuando se necesita cambiar una señal eléctrica, mA, a una neumática, psig, se utiliza un transductor (I/P) que transforma la señal de la corriente (I) en neumática (P), como se ilustra en la figura 4; la señal de entrada puede ser de 4 a 20 mA y la salida de 3 a 15 psig. Existen otro tipo de transductores: neumáticos a corriente (P/I), voltaje a neumáticos (E/P), neumático a voltaje (P/E), etc.



Figura 4. Transductor I/P.

## CONTROL POR RETROALIMENTACION.

El esquema de control que se muestra en la figura 2 se conoce como control por retroalimentación, también se le llama circuito de control por retroalimentación. En este procedimiento se toma la variable controlada y se retroalimenta al controlador para que éste pueda tomar una decisión. Para ayudar a su comprensión se presenta el esquema del intercambiador de calor de la figura 2.

Si la temperatura de entrada al proceso aumenta y en consecuencia crea una perturbación, su efecto se debe de propagar a todo el intercambiador de calor antes que cambie la temperatura de salida. Una vez que cambie la temperatura de salida, también cambia la señal del transmisor al controlador, en este momento el controlador detecta que debe compensar la perturbación mediante un cambio en el flujo de vapor. En la figura 5 se ilustra gráficamente el efecto de la perturbación y la acción del controlador.

Es interesante hacer notar que la temperatura de salida primero aumenta a causa del incremento en la temperatura de entrada, pero luego desciende incluso por debajo del punto de control y oscila alrededor de éste hasta que se estabiliza. Esta respuesta oscilatoria demuestra que la operación del sistema de control por retroalimentación es esencialmente una operación de prueba y error, es decir, cuando el controlador detecta que la temperatura de salida desciende por debajo del punto de control, al anotar esto, el controlador señala a la válvula que habrá nuevamente un tanto para elevar la temperatura. El ensayo y error continúa hasta que la temperatura alcanza al punto de control donde permanece posteriormente.

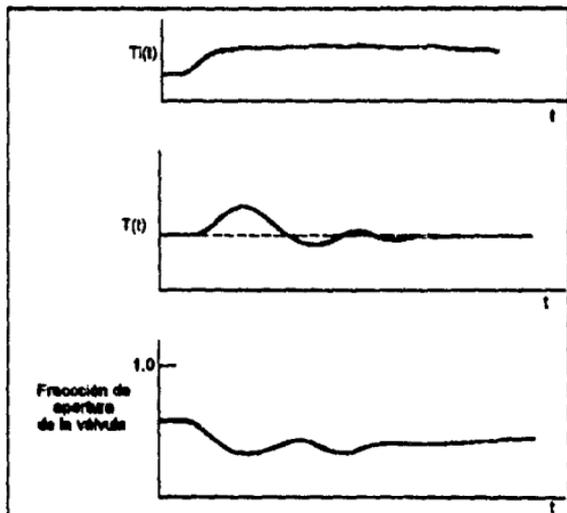
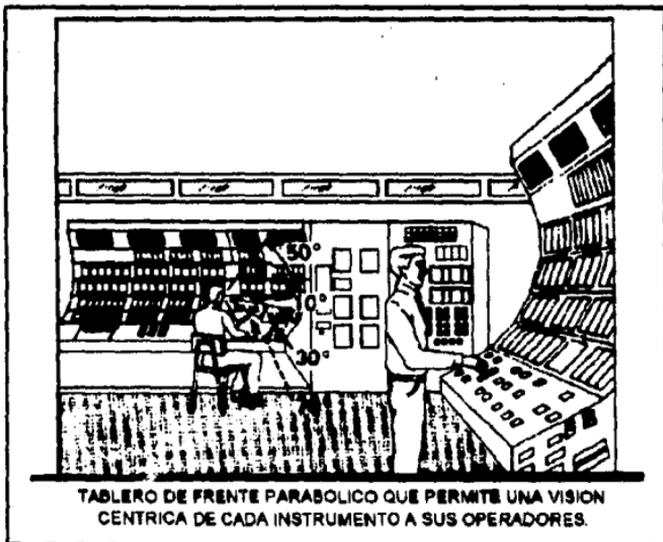


Figura 5. Respuestas dinámicas a un disturbio.

La desventaja del control por retroalimentación estriba en que únicamente puede compensarse la perturbación hasta que la variable controlada se ha desviado del punto de control, esto es, la perturbación se debe propagar por todo el sistema antes de que la puede compensar el control por retroalimentación.

### CENTRO DE VIGILANCIA DEL PROCESO.

En las plantas químicas modernas es típico instalar un cuarto central de vigilancia, desde el cual se operan todos los controladores principales del proceso. Este cuarto aloja al equipo y operación de control, actuando como cerebro de la planta de proceso. Deberá diseñarse de forma que las condiciones de trabajo sean agradables y cómodas. La figra 6 nos muestra la forma típica de un tablero de control.



*Figura 6. Tablero de frente parabólico.*

Dentro de este cuarto de vigilancia están instalados el tablero de vigilancia y el

centro electrónico de cálculo, que son la llave del control automático de procesos. En el diseño convencional de los tableros de vigilancia, los instrumentos se instalan unos muy cerca de otros con objeto de centralizar el área de trabajo; de esta forma el operador tiene a su alcance todos los instrumentos, y el tamaño del cuarto de vigilancia puede reducirse, permitiendo una localización más favorable en el área de proceso.

### **DISEÑO DEL SISTEMA DE REGULACION.**

La centralización de los instrumentos de control en una sola área en la forma descrita es posible únicamente si se usan dispositivos telemétricos (mediciones a larga distancia) y transmisores. La señal del elemento medidor colocado en un punto del proceso es transmitida al cuarto de vigilancia, donde están instalados los elementos indicadores, registradores y controladores primarios. De ahí se manda la señal al elemento regulador final dentro del área de proceso son del tipo electrónico o neumático. Cuando la transmisión debe hacerse desde áreas muy alejadas se utilizan dispositivos telefónicos, alambres o microondas.

El sistema neumático ha sido durante mucho tiempo el sistema normalmente usado en la industria, pero tienen algunas desventajas que deben "rodearse en el diseño", para reducir sus efectos. Las líneas de transmisión de longitud de 100m deben de tener un retransmisor que acelere la señal. El aire necesario para los instrumentos se suelen suministrar mediante un sistema separado de compresión y deshidratación. El aire debe de estar libre de aceite para que no se obstruyan los instrumentos y libre de agua para evitar la congelación de la misma dentro del sistema de trastero.

El sistema electrónico de regulación es el más nuevo de los dos y tiene varias ventajas. Las señales que envían los elementos sensores, del tipo de dispositivos para niveles de líquidos o termopares, son impulsos eléctricos que pueden ser transmitidos después de ampliarse adecuadamente, a distancia prácticamente

limitadas. Esto permite una sensibilidad mucho mayor y elimina los problemas causados por hielo en los sistemas de aire durante la época de frío intenso. La desventaja principal es que debe convertirse la señal proporcional de regulación mediante un sistema de válvulas neumáticas, ya que las válvulas accionadas por motor eléctrico son demasiado lentas y el desgaste que sufre es excesivo. Sin embargo puede usarse una válvula de solenoide operada eléctricamente sin necesidad de conversión de la señal eléctrica a neumática para la regulación del tipo apagado-encendido.

---

## ***CAPITULO 2***

# ***ANTECEDENTES MATEMATICOS NECESARIOS PARA LOS SISTEMAS DE CONTROL.***

Las técnicas de transformada de Laplace y linealización son particularmente útiles para el análisis de la dinámica de los procesos y diseño de los sistemas de control, debido a que proporciona una visión general del comportamiento de gran variedad de procesos e instrumentos. Mediante el método de la transformada de Laplace se puede convertir una ecuación diferencial lineal en una algebraica, que a su vez, permite el desarrollo del útil concepto de función de transferencia. Puesto que las ecuaciones diferenciales que representan la mayoría de los procesos son no lineales, se aplica el método de linealización para aproximar a las ecuaciones diferenciales lineales de manera que se les pueda aplicar la técnica de la transformada de Laplace. El conocimiento de la Transformada de Laplace es esencialmente para entender los fundamentos de la dinámica del proceso y del diseño de los sistemas de control.

## 2.1. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

Las precedentes operaciones lineales de derivación e integración transforman una función en otra expresión. Por ejemplo.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c.$$

El interés se centra específicamente en una integral impropia que transforma una función  $f(t)$  en una función de parámetro "s".

### Definición 2.1.

Sea  $f(t)$  para  $t > 0$ . La integral

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

se llama *transformada de Laplace de f*, siempre que el límite exista. Simbólicamente, la transformada de Laplace de  $f$  se denota por  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ , y puesto que el resultado depende de "s" se tiene  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ .

**Ejemplo 2.1..** Calcule  $\mathcal{L}\{1\}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} (1) dt. \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s} \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Siempre que  $s < 0$ .

### 2.1.1. La transformada inversa de Laplace.

Usando la definición integral de la transformada de Laplace de una función  $f$  determinamos otra función  $F$ , esto es, una función del parámetro " $s$ " de la transformada.

Ahora invirtiendo el problema, es decir, dada  $F(s)$  y se puede escribir  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

#### Definición 2.2.

Suponiendo que la transformada de Laplace inversa es una transformación lineal, esto es, para constantes  $\beta$  y  $\lambda$  cualesquiera, se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\{\beta F(s) + \lambda K(s)\} = \beta \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \lambda \mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}.$$

donde  $F$  son las transformadas de Laplace de las funciones  $f$  y  $k$ .

**Ejemplo 2.2.** Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}$$

**Solución:** Por fracciones parciales:

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{(s+2)^3}$$

de modo que

$$s+1 = As(s+2)^3 + B(s+2)^3 + Cs^2(s+2)^2 + Ds^2(s+2) + Es^2.$$

Haciendo  $s = 0$  y  $s = -2$  resulta,

$$1 = B(2)^3, \quad B = 1/8.$$

$$-1 = E(-2)^3, \quad E = -1/4.$$

respectivamente.

igualando los coeficientes de  $s^4$ ,  $s^3$ , y  $s$  se obtiene

$$0 = A + C.$$

$$0 = 6A + B + 4C + D.$$

$$1 = 8A + 12B.$$

de donde se obtiene que  $A = -1/16$ ,  $C = 1/16$ ,  $D = 0$ . Por lo tanto de la tabla 2.1 se tiene.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{16}}{s} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{(s+2)^3}\right] \\ &= -\frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+2)^3}\right] \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}t + \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{8}t^2e^{-2t} \end{aligned}$$

## 2.2 PROPIEDADES OPERACIONALES.

### 2.2.1. Teorema de Traslación Real.

En este teorema se trabaja con la Traslación de una función en el eje del tiempo, como se ilustra en la figura 2.1. La función trasladada es la función original con retardo en el tiempo. El retardo de transporte ocasiona retardo de tiempo en el proceso; este fenómeno se conoce comúnmente como tiempo muerto.

#### Teorema 2.1.

Si  $t_0$  es cualquier tiempo constante, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0}F(s).$$

**Demostración.** De la definición 2.1 de la transformada de Laplace se tiene.

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} f(t-t_0) e^{-st} dt.$$

Sea  $\tau = t-t_0$ , y  $t = t_0 + \tau$

Sustituyendo:  $t=0$ ,  $\tau = t_0$ ,  $\tau = \infty$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-t_0)\} &= \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} f(\tau) e^{-s(t_0+\tau)} d(t_0+\tau) \\ &= \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} [f(\tau)] e^{-s t_0} e^{-s \tau} d\tau \\ &= e^{-s t_0} F(s). \end{aligned}$$

Nótese que en esta definición se aprovechó el hecho de que:

$$f(\tau) = 0 \text{ para } \tau < 0 \text{ (} \tau < t_0 \text{)}.$$

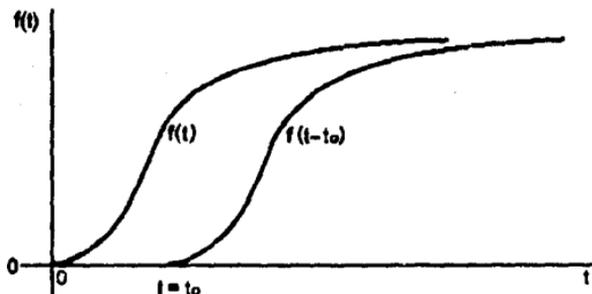


Figura 2.1. La función que se traslada en tiempo es cero para todos los tiempos menores al tiempo de retardo.

### 2.2.2. Primer Teorema de Traslación Real.

#### Teorema 2.2.

Si  $a$  es cualquier número real, entonces

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s-a).$$

**Demostración. De la definición 2.1.**

$$\begin{aligned}\mathcal{L} [e^{-s} f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} f(t) dt. \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt. \\ &= F(s-a).\end{aligned}$$

También se emplea el simbolismo

$$\mathcal{L} [e^{-at} f(t)] = \mathcal{L} [f(t)]_{s \rightarrow s-a}$$

La forma recíproca del teorema 2.2. es

$$e^{-st} f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s-a)]$$

donde

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)].$$

### 2.2.3. La Función Escalón Unitaria.

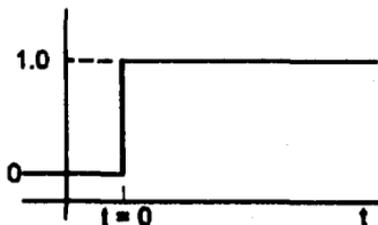
En Ingeniería se encuentra a menudo funciones que pueden "conectarse" o "desconectarse". Por ejemplo una fuerza exterior que actúa sobre un sistema mecánico o un voltaje suministrado a un circuito, un cambio de temperatura en la corriente de salida de un proceso químico, puede ser desconectado o controlado después de un cierto período de tiempo. Es por lo tanto conveniente definir una función especial llamada *función escalón unitaria*. Dicha función se ilustra gráficamente en la figura 2.2.

**Definición 2.3.**

La función  $U(t)$  se define como,

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que definimos  $U(t)$  solamente en el eje positivo ya que con esto basta.



*Figure 2.2. Función escalón unitario,  $U(t)$ .*

Su transformada de Laplace está dada por:

$$\mathcal{L}\{U(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left. \frac{1}{s} e^{-st} \right|_0^{\infty} = -\frac{1}{s}(0 - 1)$$

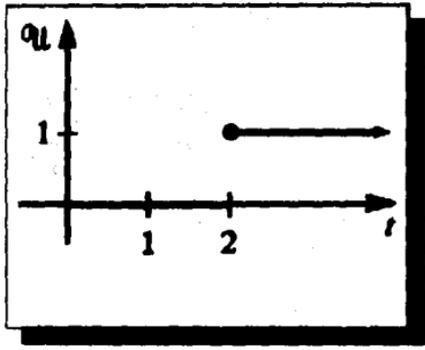
$$\mathcal{L}\{U(t)\} = \frac{1}{s}$$

**Ejemplo 2.3.** Dibuje el gráfico  $U(t-2)$ .

**Solución.**

$U(t-2)$  es la nomenclatura abreviada de

$$U(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

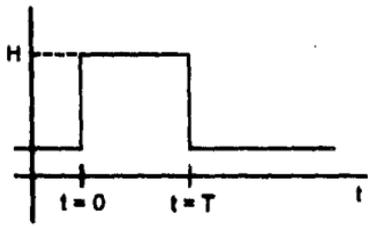


**2.2.4. Pulso de Magnitud H y Duración T.**

El pulso se muestra gráficamente en la figura 2.3.

**Definición 2.4.**

La función pulso se representa como,

$$f(t) = \begin{cases} f & t < 0, \quad t \geq T \\ H & 0 \leq t < T \end{cases}$$


*Figura 2.3. Función pulso.*

Su transformada de Laplace está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^T H e^{-st} dt + \int_T^{\infty} 0 e^{-st} dt \\ &= -\frac{H}{s} e^{-st} \Big|_0^T = -\frac{H}{s} (e^{-sT} - 1). \\ \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{H}{s} (1 - e^{-sT}). \end{aligned}$$

### 2.2.5. Función de Impulso Unitario.

A menudo los sistemas mecánicos y químicos están sometidos a una fuerza exterior de gran magnitud que solamente actúa en un período de tiempo muy corto. Por ejemplo, un peso sujeto a un resorte podría dársele un golpe seco con un martillo, o una entrada de flujo a mayor velocidad que influya en el nivel (carga) del proceso.

Para describir una fuerza violenta y de acción breve, se creó una función llamada *impulso unitario*. Esta función formalmente definida originó un área de la matemática conocido como teoría de las funciones generalizadas o teoría de las distribuciones.

#### Definición 2.5.

Considere la función definida por.

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & t_0 - a < t < t_0 + a, \\ 0 & t \leq t_0 - a, \text{ o } t \geq t_0 + a \end{cases}$$

donde  $a$  es una constante positiva y  $t_0 > 0$ . Para valores pequeños de  $a$ ,  $\delta_a(t - t_0)$  es esencialmente una función constante de gran magnitud que está conectada solo por un corto intervalo de tiempo en torno a  $t_0$ .

El comportamiento de  $\delta_a(t - t_0)$  cuando  $a \rightarrow 0$  se ilustra en la figura 2.4.

**Definición 2.6.**

Se llama impulso unitario o función delta de Dirac a la función definida por el límite.

$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t - t_0)$$

Se podría caracterizar la función delta mediante las dos siguientes propiedades:

(I)  $\delta(t - t_0)$  es infinito para  $t = t_0$  y cero para  $t \neq t_0$ .

(II)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$ .

Su transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}$$

Cuando  $t_0 = 0$  se obtiene.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

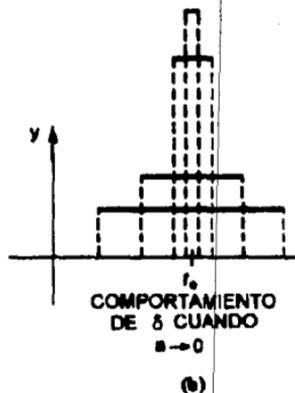
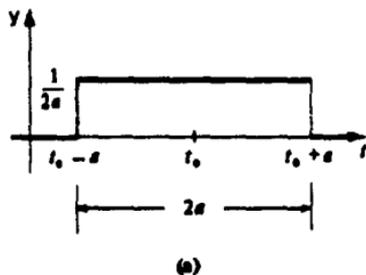


Figura 2.4.

### 2.2.6. Derivadas de una Transformada.

#### Teorema 2.3.

$$\text{Para } n = 1, 2, 3, \dots \quad \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{L}\{f(t)\}}{ds^n} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

### 2.2.7. Teorema de la Diferenciación Real.

Este teorema establece la relación de la transformada de Laplace de una función con la de su derivada.

#### Teorema 2.4.

Sea  $f(t)$  una función, entonces,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0).$$

**Demostración.**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt.$$

$$\begin{aligned} u &= e^{-st} & du &= -se^{-st} \\ dv &= \frac{df(t)}{dt} & v &= f(t) \end{aligned}$$

Integrando por partes:  $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-se^{-st}) dt$

$$= [0 - f(0)] + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$= sF(s) - f(0).$$

La extensión a derivadas de orden superior es directa:

**Teorema 2.5**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} \frac{df}{dt}(0) - \dots - s \frac{d^{n-2}f}{dt^{n-2}}(0) - \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(0)$$

**2.2.8. Teorema de la Integración Real.**

Este teorema establece la relación entre la transformada de una función y la de su integral.

**Teorema 2.6**

La expresión de la transformada de la integral de una función  $f(t)$  es,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

**2.3. SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE EL USO DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE.**

Para ilustrar el uso de la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, considérese la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bx(t).$$

El problema de resolver esta ecuación se puede plantear como sigue: dados los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  y  $b$ , las condiciones iniciales apropiadas y la función  $x(t)$ , encuentrese la función  $y(t)$  que satisfaca la ecuación.

La función  $x(t)$  se conoce generalmente como "función de forzamiento" o variable de entrada, y  $y(t)$  como la "función de salida" o variable dependiente; la variable  $t$ , tiempo, es la variable independiente.

La solución de una ecuación diferencial mediante el uso de la transformada de Laplace implica básicamente tres pasos:

- 1.- Transformación de la ecuación diferencial en una ecuación algebraica con la variable  $s$  de la transformada de Laplace, lo cual se logra al obtener la transformada de Laplace de cada miembro de la ecuación.

$$\mathcal{L}\left\{a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)\right\} = \mathcal{L}\{bx(t)\}.$$

Entonces, al usar la propiedad distributiva de la transformada, y el teorema 2.4 de la diferenciación real, se tiene.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} &= a_2 \left\{s^2 Y(s) - sy(0) - \frac{dy}{dt}(0)\right\} \\ \mathcal{L}\left\{a_1 \frac{dy(t)}{dt}\right\} &= a_1 \{sY(s) - y(0)\} \\ \mathcal{L}\{a_0 y(t)\} &= a_0 Y(s) \\ \mathcal{L}\{bx(t)\} &= bX(s) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se substituyen estos términos en la primera ecuación 2.1 y se reordena:

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) - (a_2 s + a_1)y(0) - a_2 \frac{dy}{dt}(0) = bX(s).$$

Nótese que ésta es una ecuación algebraica y que la variable  $s$  de la transformada de Laplace se puede tratar como cualquier otra cantidad algebraica.

- 2.- Se emplea la ecuación algebraica que se resuelve para la variable de salida  $Y(s)$ , en términos de la variable de entrada y las condiciones iniciales:

$$Y(s) = \frac{bX(s) - (a_2 + a_1)y(0) + a_2 \frac{dy}{dt}(0)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2.2)$$

- 3.- Inversión de la ecuación resultante para obtener la variable de salida en función del tiempo  $y(t)$ :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{bX(s) - (a_2 + a_1)y(0) + a_2 \frac{dy}{dt}(0)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \right\} \quad (2.3)$$

En este procedimiento los dos primeros pasos son relativamente fáciles y directos, todas las dificultades se concentran en el tercer paso. La utilidad de la transformada de Laplace en el diseño de sistemas de control tiene como fundamento el hecho de que rara vez es necesario el paso de inversión, debido a que todas las características de la respuesta en tiempo  $y(t)$  se puede reconocer en los términos de  $Y(s)$ ; en otras palabras, el análisis completo se puede hacer en el dominio de Laplace

o en el "dominio  $s$ ", sin invertir la transformada en el "dominio del tiempo".

Se generaliza la ecuación 2.2. para el caso de una ecuación de orden  $n$ .  
Para la ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  con coeficientes constantes.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t). \quad (2.4)$$

en condiciones iniciales cero.

$$y(0) = 0; \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0; \dots \dots \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) = 0$$

$$x(0) = 0; \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0; \dots \dots \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}}(0) = 0$$

Es fácil demostrar que la ecuación de la transformada de Laplace está dada por

$$Y(s) = \left[ \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \right] X(s). \quad (2.5)$$

El caso de condiciones iniciales cero es el más común en el diseño de sistemas de control, ya que las señales, se definen generalmente, como desviaciones respecto a un estado inicial estacionario.

Cuando se hace esto, el valor inicial de la perturbación, por definición es cero; los valores iniciales de las derivadas del tiempo son también cero, pues se supone, que el sistema está inicialmente en un estado estacionario; es decir, no cambia con el tiempo.

## 2.4 FUNCION DE TRANSFERENCIA.

Si las variables  $X(s)$  y  $Y(s)$  de la ecuación (2.5) son las respectivas transformadas de las señales de entrada y de salida de un proceso, instrumento o sistema de control el término entre corchetes representa por definición, la función de transferencia del proceso, instrumento o sistema de control. Dicha función es la expresión que, al multiplicarse por la transformada de la señal de entrada, da como resultado la transformada de la función de salida.

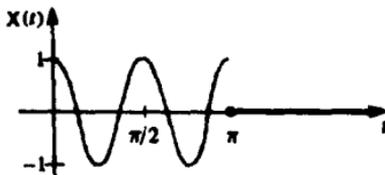
*Ejemplo 2.4* Resuelva  $y'' + 16y = x(t)$ .

Donde:

$$x(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t \leq \pi. \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases} \quad U(t - \pi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \pi. \\ 1, & t \geq \pi. \end{cases}$$

$$y(0) = 0, \text{ y } y'(0) = 0.$$

Solución. la función  $x(t)$  puede ser interpretada como una fuerza exterior (disturbio) que actúa sobre el sistema, solamente por un período corto de tiempo y que después es suprimida.



*Figura 2.5.*

Puesto que se puede escribir:

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos 4t - \cos 4t U(t - \pi) \\ &= \cos 4t - \cos 4(t - \pi) U(t - \pi).\end{aligned}$$

(por la periodicidad del coseno).

(Siendo  $U(t - \pi) = 1$  cuando  $t \geq \pi$  entonces  $f(t) = \cos 4t - \cos 4t = 0$  que cumple la condición, así análogo cuando  $U(t - \pi) = 0$  cuando  $0 \leq t < \pi$ ).

$$\mathcal{L}\{y''\} + 16\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{x(t)\}.$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 16Y(s) = \frac{s}{s^2 + 16} - \frac{ss^{-\pi s}}{s^2 + 16}$$

$$(s^2 + 16)Y(s) = 1 + \frac{s}{s + 16} - \frac{ss^{-\pi s}}{s^2 + 16}$$

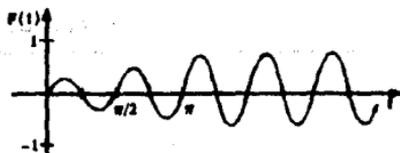
$$Y(s) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2 + 16}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2 + 16)^2}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8ss^{-\pi s}}{(s^2 + 16)^2}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{8}t \sin 4t - \frac{1}{8}(t - \pi) \sin 4(t - \pi) U(t - \pi).$$

Esta última ecuación equivale.

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{8}t \sin 4t, & 0 \leq t < \pi. \\ \frac{2 + \pi}{8}\sin 4t, & t \geq \pi. \end{cases}$$

Del gráfico de  $y(t)$  en la figura 2.6 observe que las amplitudes de oscilación se hacen estacionarias en cuando se suprime el disturbio.



*Figura 2.6*

## 2.5 EIGENVALORES Y ESTABILIDAD.

Al revisar las raíces del denominador de la transformada de Laplace  $Y(s)$  se evidencia que determina la respuesta  $y(t)$ , el denominador de cualquier  $Y(s)$  y por lo tanto sus raíces se obtienen de una ecuación de la forma siguiente:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.6)$$

donde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son las variables dependientes y sus derivadas en la ecuación diferencial.

A la ecuación 2.6 se le llama ecuación característica de la ecuación diferencial y del sistema cuya respuesta dinámica representa sus raíces se conocen como sus eigenvalores (del alemán eigenvalues, que significan valores "característicos" o "propios") de la ecuación diferencial e independientes de la función de forzamiento de entrada.

Se dice que una ecuación diferencial es estable cuando su respuesta en tiempo permanece limitada (finita) para una función de forzamiento limitante.

Tabla 2.1  
Transformadas de Funciones.

$f(t)$ .	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ .
1	$\frac{1}{s}$
$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$
$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\text{senh } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$\text{cosh } \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$t \text{ sen } \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \text{ cos } \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s + a)^{n+1}}$
$e^{-at} \text{ sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \text{ cos } \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$

$f(t)$ .	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ .
$\sin wt - wt \cos wt$	$\frac{2w^3}{(s^2 + w^2)^2}$
$\sin wt + wt \cos wt$ .	$\frac{2w^3}{(s^2 + w^2)^2}$
$\delta(t)$	1
$U(t)$ .	$\frac{1}{s}$
$t$ .	$\frac{1}{s^2}$
$f(t)$ .	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ .
$e^{at} f(t)$ .	$F(s - a)$ .
$f(t - a) U(t - a)$ , $a > 0$ .	$e^{-as} F(s)$ .
$t^n f(t)$ , $n = 1, 2, 3, \dots$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
$f^{(n)}(t)$ , $n = 1, 2, 3, \dots$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$	$F(s) G(s)$ .

# ***CAPITULO 3.***

## ***SISTEMAS DINAMICOS DE PRIMER ORDEN.***

Una forma para analizar y diseñar sistemas de primer orden es a través del estudio de respuestas de éstos. En general la respuesta de un sistema depende de sus

características propias, su estado inicial y el disturbio (excitación externa) o entrada aplicada a este.

Los sistemas de primer orden se caracterizan principalmente por tener un elemento capaz de almacenar energía. Este tipo de sistemas generalmente se representan desde el punto de vista matemático por ecuaciones diferenciales de primer orden. Estos sistemas pueden ser de tipo, eléctrico, mecánico, térmico, hidráulico e híbrido. Su modelo matemático es de la forma:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = X(t).$$

$X(t)$  = Disturbio o entrada aplicada al sistema. Función directora.

$y(t)$  = Variable de interés del sistema. Función de la respuesta del sistema.

Para hacer el modelo de los procesos industriales se comienza con su balance de masa y energía, esto es:

Flujo de masa/energía de entrada al proceso. - Flujo de masa/energía de salida del proceso. = Tasa de acumulación de masa/energía en el proceso.

### 3.1. PROCESO TÉRMICO.

Se tiene interés en conocer la forma en que responde la temperatura de salida,  $T(t)$ , a los cambios en la temperatura de entrada,  $T_i(t)$ , en el tanque con agitación continua ilustrado en la figura 3.1.

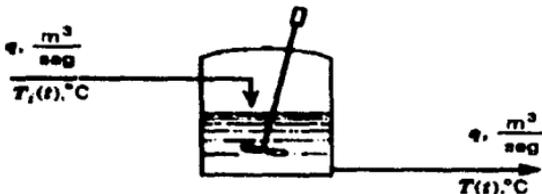


Figura 3.1

Se supone que los flujos volumétricos de entrada y salida, la densidad y la capacidad calorífica de los líquidos son constantes. El líquido en el tanque se mezcla bien y el proceso es adiabático.

Realizando el balance de energía en estado dinámico, del sistema se tiene:

$$q\rho_1 h_1(t) - q\rho h(t) = \frac{d(V\rho u(t))}{dt} \quad (3.1)$$

O, en términos de la temperatura

$$q\rho_1 C_p T_1(t) - q\rho C_p T(t) = \frac{d(V\rho C_v T(t))}{dt}$$

donde:

$\rho_1, \rho$  = Densidad del líquido a la entrada y a la salida, respectivamente, en  $\text{kg/m}^3$ .

$C_{p1}, C_p$  = Capacidad calorífica a presión constante del líquido a la entrada y a la salida respectivamente, en  $\text{J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ .

$C_v$  = Capacidad calorífica a volumen constante del líquido, en  $\text{J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ .

$V$  = Volumen del líquido en el tanque,  $\text{m}^3$ .

$h_1, h$  = Entalpía del líquido a la entrada y a la salida, respectivamente,  $\text{J/kg}$ .

$u$  = Energía interna de el líquido en el tanque,  $\text{J/kg}$ .

Como se supone que la densidad y la capacidad calorífica permanecen constantes, sobre el todo el rango de temperatura de operación, la última ecuación puede escribirse así:

$$q\rho C_p T_i(t) - q\rho C_p T(t) = V\rho C_p \frac{dT(t)}{dt} \quad (3.2)$$

1 ecuación, 1 incógnita ( $T(t)$ ).

Esta es una ecuación diferencial de primer orden. Es importante señalar que en esta ecuación sólo existe una incógnita,  $T(t)$ ; la temperatura de entrada,  $T_i(t)$ , es una variable de entrada y, por tanto, no se considera como incógnita, ya que puede especificar la forma en que cambia, por ejemplo, un cambio en escalón o en rampa. Con la solución de esta ecuación diferencial para cierta temperatura de entrada se obtienen la respuesta de la temperatura de salida como función del tiempo. La temperatura de entrada se conoce como *variable de entrada, también como función directora o de forzamiento*, ya que es la que direcciona o fuerza el cambio en la temperatura de salida, también llamada, *variable de salida o variable de respuesta*, ya que es la que responde a la función directora.

Escribiendo el balance de energía a régimen permanente:

$$q\rho C_p \bar{T}_i - q\rho C_p \bar{T} = 0 \quad (3.3)$$

Al sustituir la ecuación (3.3) de la ecuación (3.2) se tiene

$$q\rho C_p (T_i(t) - \bar{T}_i) - q\rho C_p (T(t) - \bar{T}) = V\rho C_p \frac{d(T(t) - \bar{T})}{dt} \quad (3.4)$$

Se definen las *variables de desviación*.

$$\Gamma(t) = T(t) - \bar{T}$$

$$\Gamma_i(t) = T_i(t) - \bar{T}_i \quad (3.6)$$

donde:

$\bar{T}$ ,  $\bar{T}_i$  = Valores a régimen permanente de la temperatura de entrada y de salida respectivamente, °C.

$\Gamma(t)$ ,  $\Gamma_i(t)$  = Variables de desviación de la temperatura de entrada y de salida, respectivamente, °C.

Se substituye las ecuaciones (3.5) y (3.6) en la (3.4) y se obtiene

$$q\rho C_p \Gamma(t) - q\rho C_p \Gamma_i(t) = V\rho C_v \frac{d\Gamma(t)}{dt} \quad (3.7)$$

La definición y utilización de las *variables de desviación* es muy importante en el análisis y diseño de sistemas de control de proceso. En toda la teoría de control se utilizan casi exclusivamente estas variables. Con su uso se tiene la ventaja de que su valor indica el grado de desviación respecto a algún valor de operación a régimen permanente; en la práctica, este valor estacionario puede ser el valor deseado de la variable.

La ecuación (3.7) se puede reordenar como sigue:

$$\frac{V\rho C_v}{q\rho C_p} \frac{d\Gamma(t)}{dt} + \Gamma(t) = \Gamma_i(t).$$

sea

$$\tau = \frac{V\rho C_v}{q\rho C_p} \quad (3.8)$$

de manera que

$$\tau \frac{d\Gamma(t)}{dt} + \Gamma(t) = \Gamma_i(t). \quad (3.9)$$

Puesto que ésta es una ecuación diferencial lineal, con la utilización de la transformada de Laplace se obtiene

$$\tau s \Gamma(s) - \tau \Gamma(0) + \Gamma(s) = \Gamma_f(s).$$

Pero  $\Gamma(0) = 0$  y por lo tanto, algebraicamente

$$\Gamma(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \Gamma_f(s). \quad (3.10)$$

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma_f(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}. \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) se conoce como *función de transferencia*; es una función de transferencia de primer orden porque se desarrolla a partir de una ecuación diferencial de primer orden. Los procesos que se describen a partir de esta función se denominan *procesos de primer orden*, *sistemas de primer orden*, *retardos de primer orden*, o *sistemas de capacitancia única*, porque la función de transferencia es del mismo tipo que la descrita por un sistema eléctrico con una resistencia y un capacitor (R-C).

Los *elementos resistivos* se caracterizan principalmente por su propiedad o capacidad para disipar energía, esto es, la energía suministrada al sistema se disipa o se transforma a través de ellos.

Los *elementos capacitivos* se caracterizan por la propiedad de almacenar energía que a su vez la suministran a otros elementos del sistema. La rapidez con que ceden energía depende directamente de la capacitancia y del elemento resistivo.

El nombre de *función de transferencia* proviene del hecho de que con la solución de la ecuación se transfiere la entrada o función directora,  $\Gamma_f(t)$ , a la salida o variable de respuesta,  $\Gamma(t)$ .

Si se supone que la temperatura de entrada,  $T_i(t)$ , al tanque se incrementa  $A$  grados  $^{\circ}\text{C}$ , es decir, sufre un cambio en escalón con  $A$  grados de magnitud, esto se expresa matemáticamente como sigue:

$$T_i(t) = \bar{T}_i \quad t < 0$$

$$T_i(t) = \bar{T}_i + A \quad t \geq 0$$

Al obtener la transformada de Laplace se tiene.

$$\Gamma(t) = Au(t).$$

$$\Gamma(s) = \frac{A}{s}$$

De la sustitución en la ecuación (3.10) se obtiene

$$\Gamma(s) = \frac{A}{s(\tau s + 1)}$$

y con el uso de las fracciones parciales para obtener la transformada inversa se llega a

$$\Gamma(t) = A(1 - e^{-t/\tau}) \quad (3.12)$$

$$T(t) = \bar{T} + A(1 - e^{-t/\tau}) \quad (3.13)$$

En la figura 3.2 se ilustra gráficamente la solución de las ecuaciones (3.12) y (3.13).

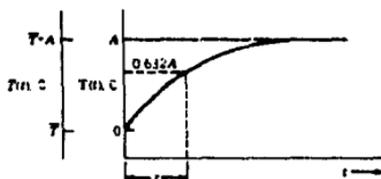


Figura 3.2. Respuesta de un proceso de primer orden a un cambio en escalón de la función de forzamiento - constante de tiempo.

La ecuación (3.12) expresa el significado físico de  $\tau$ , la cual se conoce como *constante de tiempo guarda relación con la velocidad de respuesta del proceso*. Si se hace  $t = \tau$  se tiene

$$\Gamma(\tau) = A(1 - e^{-1}) = A(1 - e^{-1})$$

$$\Gamma(\tau) = 0.632A.$$

Es decir, en una constante de tiempo se alcanza el 63.2 % del cambio total, lo cual se ilustra gráficamente en la figura 3.2; en consecuencia, la *constante de tiempo guarda relación con la velocidad de respuesta del proceso*. Mientras más lenta es la respuesta de un proceso a la función director, cuanto más grande es el valor de  $\tau$ ; tanto, más rápida es la respuesta del proceso a la función de forzamiento, cuanto más pequeño es el valor de  $\tau$ ,  $\tau$  debe de estar en unidades de tiempo; de la ecuación (3.8) se ve que

$$\tau = \frac{[m^3][kg / m^3][J / kg \cdot ^\circ C]}{[m^2 / s][kg / m^3][J / kg \cdot ^\circ C]} = \text{segundos}$$

Es importante darse cuenta que la constante de tiempo se compone con las propiedades físicas y parámetros de operación del proceso, como se observa en la ecuación (3.8); es decir, la constante de tiempo depende del volumen del líquido en el tanque ( $V$ ), de las capacidades caloríficas ( $C_p$  y  $C_v$ ) y del flujo del proceso ( $q$ ). Si alguna de estas características cambia, la constante de tiempo también cambia, y ello se refleja en la velocidad de respuesta del proceso o constante de tiempo.

Otro punto importante es que en este ejemplo el valor de la constante de tiempo permanece constante en todo el rango de operación de  $T(t)$ , lo cual es una propiedad de los sistemas lineales que no se aplica para el caso de los sistemas no lineales.

Ahora, si se elimina la suposición de operación adiabática y se toma en cuenta la pérdida de calor en el balance de energía, se llega a la siguiente ecuación:

$$q\rho C_p T_i(t) - UA[T(t) - T_a(t)] - q\rho C_p T(t) - V\rho C_p \frac{dT(t)}{dt} \quad (3.14)$$

1 ecuación, 1 incógnita ( $T(t)$ ).

donde:

$U$  = Coeficiente global de transferencia de calor,  $J / m^2 \cdot ^\circ K \cdot s$ .

$A$  = Área de transferencia de calor,  $m^2$ .

$T_a(t)$  = Temperatura ambiente,  $^\circ C$ , que es una variable de entrada.

Se escribe el balance de energía a régimen permanente del proceso:

$$q\rho C_p \bar{T}_i - UA[(\bar{T} - \bar{T}_a)] - q\rho C_p \bar{T} = 0 \quad (3.15)$$

Al restar la ecuación (3.15) de la ecuación (3.14), se tiene

$$q\rho C_p (T_i(t) - \bar{T}_i) - UA[(T(t) - \bar{T}) - (T_i(t) - \bar{T}_i)] - q\rho C_p (T(t) - \bar{T}) - V\rho C_p \frac{d(T(t) - \bar{T})}{dt} \quad (3.16)$$

Se define una nueva variable de desviación como:

$$\Gamma_i(t) = T_i(t) - \bar{T}_i \quad (3.17)$$

Al sustituir (3.5), (3.6) y (3.17) en la ecuación (3.16), se llega a

$$q\rho C_p \Gamma_i(t) - UA[\Gamma(t) - \Gamma_i(t)] - q\rho C_p \Gamma(t) - V\rho C_p \frac{d\Gamma(t)}{dt} \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18) es también una ecuación diferencial lineal de primer orden y, aún existe una ecuación con una incógnita,  $\Gamma(t)$ ; la nueva variable,  $\Gamma_i(t)$ , es otra función directora. Conforme cambia la temperatura,  $T_a(t)$ , se afecta la pérdida de calor y, en consecuencia, la temperatura del líquido que se procesa. La ecuación (3.18) se puede reordenar como sigue:

$$\frac{V\rho C_v}{q\rho C_p + UA} \frac{d\Gamma(t)}{dt} + \Gamma(t) = \frac{q\rho C_p}{q\rho C_p + UA} \Gamma_i(t) + \frac{AU}{q\rho C_p + UA} \Gamma_s(t)$$

$$\tau \frac{d\Gamma(t)}{dt} + \Gamma(t) = K_1 \Gamma_i(t) + K_2 \Gamma_s(t) \quad (3.19)$$

donde

$$\tau = \frac{V\rho C_v}{q\rho C_p + UA} \quad \text{segundos.} \quad (3.20)$$

$$K_1 = \frac{q\rho C_p}{q\rho C_p + UA} \quad \text{adimensional.} \quad (3.21)$$

$$K_2 = \frac{UA}{q\rho C_p + UA} \quad \text{adimensional.} \quad (3.22)$$

La transformada de Laplace de la ecuación es

$$\tau s\Gamma(s) - \tau\Gamma(0) + \Gamma(s) = K_1\Gamma_i(s) + K_2\Gamma_s(s).$$

Pero  $\Gamma(0) = 0$ , por lo cual, al reordenar esta ecuación, se tiene

$$\Gamma(s) = \frac{K_1}{\tau s + 1} \Gamma_i(s) + \frac{K_2}{\tau s + 1} \Gamma_s(s) \quad (3.23)$$

Si la temperatura ambiente permanece constante,  $T_s(t) = \bar{T}_s$  y  $\Gamma_s(t) = 0$ , entonces la función de transferencia que relaciona la temperatura del proceso con la del agua que entra es

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma_i(s)} = \frac{k_1}{\tau s + 1} \quad (3.24)$$

Si la temperatura del líquido que entra permanece constante,  $T_i = T_i$  y  $\Gamma_i(t) = 0$ , la función de transferencia que relaciona la temperatura del proceso con la temperatura ambiente es

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma_a(s)} = \frac{K_2}{\tau s + 1} \quad (3.25)$$

Si tanto la temperatura del líquido que entra como la ambiente cambia, entonces la ecuación (3.23) expresa la relación correcta.

En las tres últimas ecuaciones se encuentra un parámetro nuevo y muy importante,  $K$ , que se conoce como la *ganancia del proceso* o *ganancia a régimen permanente*. Para conocer el significado físico de esta ganancia, supongase que la temperatura de entrada se incrementa en  $A$  grados  $^{\circ}\text{C}$ ; entonces la respuesta de la temperatura a esta función directora se expresa mediante

$$\Gamma(s) = \frac{K_1 A}{s(\tau s + 1)}$$

de lo cual

$$\Gamma(t) = K_1 A(1 - e^{-t/\tau}) \quad (3.26)$$

o

$$T(t) = \bar{T} + K_1 A(1 - e^{-t/\tau}) \quad (3.27)$$

La respuesta se ilustra gráficamente en la figura 3.3.,  $K_1 A$  expresa la cantidad total de cambio; la ganancia multiplica el cambio en la función directora o variable de entrada. Se puede decir que la ganancia indica cuanto cambia la variable de salida por unidad de cambio en la función directora, es decir la ganancia define la sensibilidad del proceso.

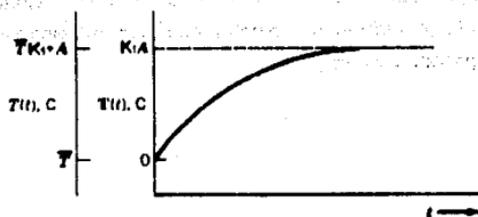


Figura 3.3. Respuesta de un proceso de primer orden al cambio en escala de la función de forzamiento - ganancia de proceso.

La ganancia se define matemáticamente como:

$$K = \frac{\Delta O}{\Delta I} = \frac{\Delta \text{variable de salida}}{\Delta \text{variable de entrada}} \quad (3.26)$$

La ganancia es otro parámetro relacionado con la *sensibilidad del proceso* que se controla y, en consecuencia, depende de las propiedades termodinámicas del proceso.

En este ejemplo existen dos ganancias:  $K_1$ , que relaciona la temperatura de salida con la temperatura de entrada; y  $K_2$ , que relaciona la temperatura de salida con la del ambiente.

Los signos positivos de las ganancias indican que si las temperaturas de entrada y ambiente aumentan también aumenta la temperatura del proceso, lo cual, tiene sentido físico verdadero.

## 3.2. FUNCIONES DE TRANSFERENCIA Y DIAGRAMAS DE BLOQUES.

### 3.2.1 Funciones de Transferencia.

La función de transferencia se definió como la relación de la transformada de Laplace de la salida sobre la transformada de Laplace de entrada.

La función de transferencia se representa generalmente por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + 1)}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + 1} \quad (3.29)$$

donde:

$G(s)$  = Representación general de una función de transferencia.

$Y(s)$  = Transformada de Laplace de la variable de salida.

$X(s)$  = Transformada de Laplace de la función directora o variable de entrada.

$K$   $a$   $s$  y  $b$   $s$  = Constantes.

En la ecuación (3.29),  $K$  representa la ganancia del sistema y tienen como unidades las de  $Y(s)$  sobre las unidades  $X(s)$ . Las otras constantes, las  $a$  y las  $b$ , tienen como unidades (tiempo) <sup>$l$</sup> , donde  $l$  es la potencia de la variable de Laplace,  $s$ , lo que da un término sin dimensiones dentro del paréntesis, ya que la unidad de  $s$  es  $1/\text{tiempo}$ .

La función de transferencia define completamente las características a régimen permanente y dinámico, es decir, la respuesta total de un sistema que se describe mediante una ecuación diferencial lineal. Esta es característica del sistema, y sus términos determina si el sistema es estable o inestable y si su respuesta a una entrada no oscilatoria es oscilatoria o no. Se dice que el sistema del proceso es estable cuando su salida se mantiene limitada (finita) para una entrada limitada.

Las siguientes son algunas propiedades importantes de la función de transferencia:

- 1.- En las funciones de transferencia de los sistemas físicos reales, la potencia más alta de  $s$  en el numerador nunca es mayor a la del denominador; en otras palabras,  $n > m$ .
- 2.- La función de transferencia relaciona las transformadas de las variables de entrada con la de salida, a partir de algún estado inicial estacionario; de lo contrario, las condiciones iniciales que no son cero origina términos adicionales en la transformada de la variable de salida.
- 3.- Para los sistemas estables, la relación a régimen permanente entre el cambio en la variable de entrada y el cambio en la variable de salida se obtiene con

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

Lo cual se deriva del teorema del valor final:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) X(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) X(s) \\ &= \left[ \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \right] \left[ \lim_{s \rightarrow 0} s X(s) \right] \\ &= \left[ \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \right] \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) \end{aligned}$$

Esto significa que el cambio en la variable de salida, después de un tiempo muy largo, si está limitado, se obtiene al multiplicar la función de transferencia con  $s=0$  veces el valor final de cambio en la entrada.

### 3.2.2. Diagrama de Bloques.

En general, los diagramas de bloques constan de cuatro elementos básicos: flechas, puntos de sumatoria, puntos de derivación y bloques; en la figura 3.4 se ilustran estos elementos, de cuya combinación se forman todos los diagramas de bloques. Las

flechas indican, en general, el flujo de información; las variables del proceso o las señales de control; cada punta de flecha indica la dirección del flujo de información. Los circuitos de sumatoria representan la suma algebraica de las flechas que entran ( $E(s) = R(s) - C(s)$ ). El punto de bifurcación es la posición sobre la flecha, en la cual la información sale y va de manera concurrente a otros puntos de sumatoria o bloques. Los bloques representan la operación matemática, en forma de función de transferencia, por ejemplo,  $G_1(s)$ , que se realiza sobre la señal de entrada (flecha) para producir la señal de salida. Las flechas y los bloques de la figura 3.4 representan la siguiente expresión matemática:

$$M(S) = G_1(s)E(s) = G_1(s)R(s) - C(s).$$

Cualquier diagrama de bloques se puede tratar o manejar de manera algebraica; en la tabla 3.1 se muestran algunas reglas del álgebra de los diagramas de bloques, las cuales son importantes.

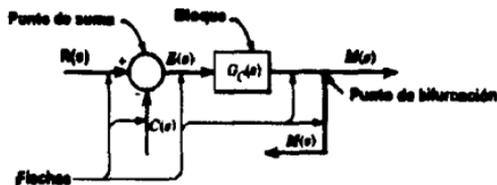


Figura 3.6. Elementos de un diagrama de bloques.

### 3.3. TIEMPO MUERTO.

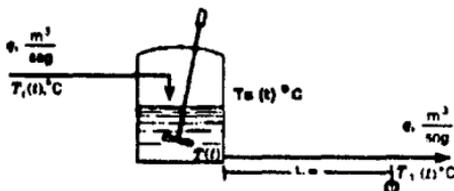


Figura 3.5.

Considérese el proceso que se muestra en la figura 3.5, se quiere conocer cómo responde  $T_1$  a los cambios en la temperatura de entrada y ambiente.

Se hacen las siguientes suposiciones acerca del conducto de salida entre el tanque y punto 1: Primera, el conducto está bien aislado; segunda, el flujo del líquido a través del conducto es altamente turbulento (flujo de acoplamiento), de tal manera que básicamente no hay mezcla de retorno en el líquido.

Bajo estas suposiciones, la respuesta de  $T_1(t)$  a los disturbios  $T_i(t)$  será la misma que  $T(t)$  con la excepción que tienen un retardo de cierto intervalo de tiempo, es decir, existe un lapso finito entre la respuesta de  $T(t)$ , lo cual se ilustra gráficamente en la figura 3.6, para un cambio en escalón de la temperatura de entrada  $T_i(t)$ . El

intervalo entre el momento en que el disturbio entra al proceso y el tiempo en que  $T_1(t)$  empieza a responder se conoce como *tiempo muerto*, retardo de tiempo o retardo de transporte y se representa mediante el término  $t_0$ .

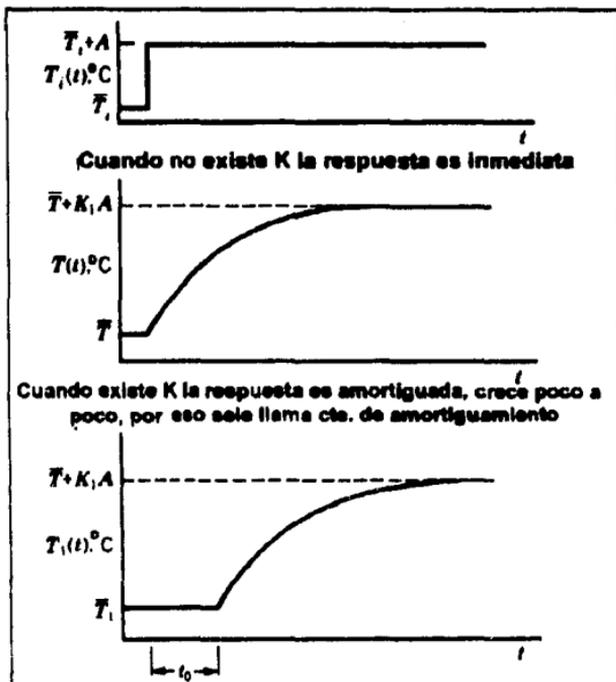


Figura 3.6. Respuesta del proceso térmico a un cambio escalón en la temperatura de entrada.

En este ejemplo en particular el tiempo muerto, puede calcularse de la siguiente manera:

$$t_0 = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{L}{q A_p} = \frac{A_p L}{q} \quad (3.30)$$

donde:

$t_0$  = tiempo muerto, segundos.

$A_p$  = área del conducto,  $m^2$ .

$L$  = longitud del conducto, m.

El tiempo muerto es parte integral del proceso y, consecuentemente, se deben de tomar en cuenta en las funciones de transferencia  $T_1(t)$  con  $T_1(t)$  y  $T_2(t)$ . El teorema 2.1, expresa que la transformada de Laplace de la función con retardo es igual al producto de la transformada de Laplace de la función, sin retardo, por el término  $e^{-s t_0}$ . El término  $e^{-s t_0}$  es la transformada de Laplace del puro tiempo muerto y, por tanto, al lo que interesa es la respuesta de  $T_1(t)$  a los cambios en  $T_1(t)$  y  $T_2(t)$ , se deben multiplicar las funciones de transferencia, ecuación (3.24) y (3.25), por  $e^{-s t_0}$ .

$$\frac{\Gamma_1(s)}{\Gamma_1(s)} = \frac{K_1 e^{-s t_0}}{\tau s + 1} \quad (3.31)$$

y

$$\frac{\Gamma_2(s)}{\Gamma_2(s)} = \frac{K_2 e^{-s t_0}}{\tau s + 1} \quad (3.32)$$

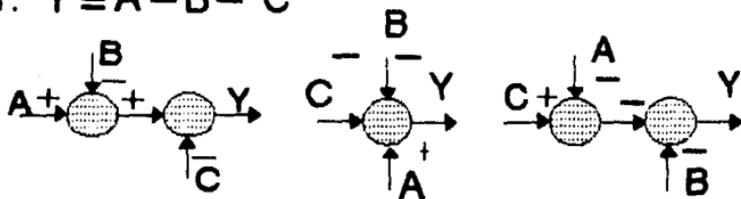
En este ejemplo se desarrolla el tiempo muerto a causa del tiempo que toma que el líquido se mueva desde la salida del tanque hasta el punto 1. Sin embargo, en la mayoría de los procesos el tiempo muerto no se define tan fácilmente, generalmente es inherente y se distribuye a lo largo del proceso, es decir, en el

tanque, el reactor, la columna, etc.; en tales casos el valor numérico no se evalúa tan fácilmente como en el presente ejemplo, sino que requiere un modelo muy detallado o una evaluación empírica.

El tiempo muerto es otro parámetro que ayuda a la definición de la personalidad del sistema. En la ecuación (3.29) se aprecia que  $t_0$  depende de algunas propiedades físicas y características operativas del proceso, como son  $K$  y  $\tau$ . Si cambia cualquier condición del proceso, esa variación se puede reflejar en un cambio de  $t_0$ .

La presencia de una cantidad significativa de tiempo muerto en un proceso, es la peor cosa que le puede ocurrir a un sistema de control; el tiempo muerto afecta severamente el funcionamiento de un sistema de control.

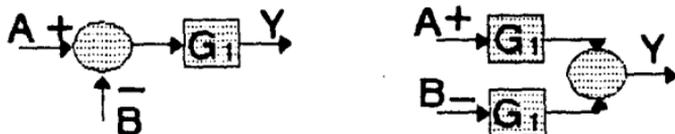
1.  $Y = A - B - C$



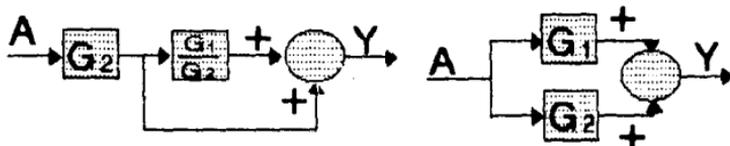
2.  $Y = G_1 G_2 A$



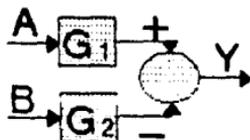
3.  $Y = G_1(A - B)$



4.  $Y = A(G_1 + G_2)$



5.  $Y = G_1 A + G_2 B$



# ***CAPITULO 4.***

## ***SISTEMAS DINAMICOS DE ORDEN SUPERIOR.***

Los sistemas de orden superior pueden ser caracterizados en forma general por contener dos o más elementos capaces de almacenar energía. Son procesos que se describen mediante ecuaciones diferenciales de orden superior. Los sistemas de orden superior pueden ser interactivos o no.

## 4.1 TANQUES EN SERIE - SISTEMA NO INTERACTIVO.

El ejemplo típico de un sistema no interactivo es el sistema de tanques que se muestra en la figura 4.1; se deben de determinar las funciones de transferencia

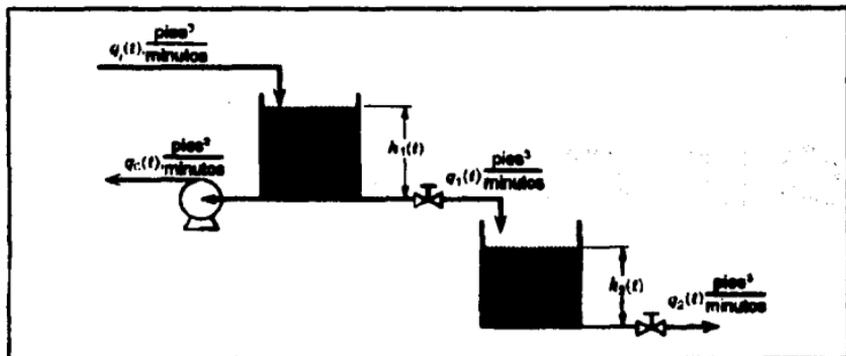


Figura 4.1. Tanques en serie - sistema no interactivo.

que relacionan el nivel del segundo tanque con el flujo de entrada del primero,  $q_1(t)$ , y el flujo de la bomba,  $q_0(t)$ .

En este ejemplo todos los tanques están abiertos a la atmósfera y el proceso es isotérmico. La apertura de la válvula permanece constante y el flujo del líquido a través de las válvulas se expresa mediante:

$$q(t) = \frac{C_v}{7.48} \sqrt{\frac{\delta P(t)}{G}} = \frac{C_v}{7.48} \sqrt{\frac{\rho g h(t)}{144 g_s G}} = C_v \sqrt{h(t)}$$

donde:

$C_v$  = coeficiente de la válvula,  $\frac{\text{gal}}{\text{min}} \sqrt{\text{psi}}$ .

7.48 = factor de conversión de galones a pies cúbicos.

Al escribir el balance de masa en estado dinámico para el primer tanque se tiene.

$$\rho q_1(t) - \rho q_2(t) - \rho q_3(t) = \rho A_1 \frac{dh_1(t)}{dt}$$

1 ecuación, 2 incógnitas ( $q_1(t)$ ,  $h_1(t)$ )

donde:

$$\rho = \text{densidad del líquido} \quad \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$$

$$A_1 = \text{área transversal del tanque 1, ft}^2$$

De la expresión de la válvula se obtiene otra ecuación:

$$q_1(t) = C' v_1 \sqrt{h_1(t)}$$

2 ecuaciones, 2 incógnitas

Con las ecuaciones (4.1) y (4.2) se describe el primer tanque; ahora se procede con el segundo tanque.

El balance en estado dinámico del segundo tanque da:

$$\rho q_1(t) - \rho q_2(t) = \rho A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} \quad (4.3)$$

3 ecuaciones, 4 incógnitas ( $q_1(t)$ ,  $h_1(t)$ )

Se obtiene otra ecuación a partir de la expresión de la válvula:

$$q_2(t) = C' v_2 \sqrt{h_2(t)} \quad (4.4)$$

4 ecuaciones, 4 incógnitas

Con las ecuaciones (4.1) hasta (4.4) se describe el proceso. Se linealizan las ecuaciones (4.2) y (4.4).

De las sustituciones de la ecuación (4.2) en la (4.1), de las ecuaciones (4.2) y (4.4) en la (4.3), y la división de cada ecuación resultante entre la densidad, se obtiene:

$$q_1(t) - C'_{w\sqrt{h_2}(t)} - q_0(t) = A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} \quad (4.5)$$

y

$$C'_{w\sqrt{h_1}(t)} - q_0(t) = A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} \quad (4.6)$$

De la ecuación (4.5), después de linealizar y definir las variables de desviación, se tiene:

$$Q_1(t) - C_1 H_1(t) - Q_0(t) = A_1 \frac{dH_1(t)}{dt} \quad (4.7)$$

donde:

$$C_1 = \frac{\delta q_1(t)}{\delta h_1(t)} \Big|_{\bar{h}_1} = \frac{1}{2} C'_{w\sqrt{h_1}}(\bar{h}_1)^{\frac{1}{2}}$$

y las variables de desviación

$$Q_1(t) = q_1(t) - \bar{q}_1$$

$$Q_0(t) = q_0(t) - \bar{q}_0$$

$$H_1(t) = h_1(t) - \bar{h}_1$$

De la ecuación (4.6) se tiene:

$$C_2 H_1(t) - C_2 H_2(t) = A_2 \frac{dH_2(t)}{dt} \quad (4.8)$$

donde:

$$C_2 = \frac{\delta q_2(t)}{\delta h_2(t)} \Big|_{\bar{h}_2} = \frac{1}{2} C'_{w\sqrt{h_2}}(\bar{h}_2)$$

y

$$H_2(t) = h_2(t) - \bar{h}_2$$

De reordenar las ecuaciones (4.7) y (4.8), se tiene:

$$\tau_1 \frac{dH_1(t)}{dt} + H_1(t) = K_1 Q_i(t) - K_1 Q_o(t) \quad (4.9)$$

y

$$\tau_2 \frac{dH_2(t)}{dt} + H_2(t) = K_2 H_1(t) \quad (4.10)$$

donde:

$$\tau_1 = \frac{A_1}{C_1} \text{ minutos}$$

$$\tau_2 = \frac{A_2}{C_2} \text{ minutos}$$

$$K_1 = \frac{I}{C_1} \text{ ft-min}/\text{ft}^3$$

$$K_2 = \frac{C_1}{C_2} \text{ adimensional}$$

De obtener la transformada de Laplace de las ecuaciones (4.9) y (4.10) y reordenando se tiene:

$$H_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} Q_i(s) - \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} Q_o(s) \quad (4.11)$$

$$H_2(s) = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} H_1(s) \quad (4.12)$$

Con la ecuación (4.11) se relaciona el nivel del primer tanque con los flujos de

entrada y salida; mediante la (4.12) se relaciona el nivel del segundo tanque con el del primero.

Para determinar la función de transferencia que se desea, se substituyen la ecuación (4.11) en la (4.12)

$$H_2 = \frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} (Q_1(s) - Q_0(s)) \quad (4.13)$$

o sea que las funciones de transferencia individuales son:

$$\frac{H_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (4.14)$$

y

$$\frac{H_2(s)}{Q_0(s)} = \frac{-K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (4.15)$$

Las funciones de transferencia que expresan las ecuaciones (4.14) y (4.15) se conocen como *funciones de transferencia de segundo orden o retardos de segundo orden*, y se ve que se forman con dos funciones de transferencia de primer orden en serie.

Como se muestra en la figura 4.2, el diagrama de bloques se puede representar de diferentes formas. A pesar de que en el diagrama de bloques de la figura 4.2a se tiene la mejor descripción de cómo ocurre realmente las cosas, los tres diagramas son válidos.

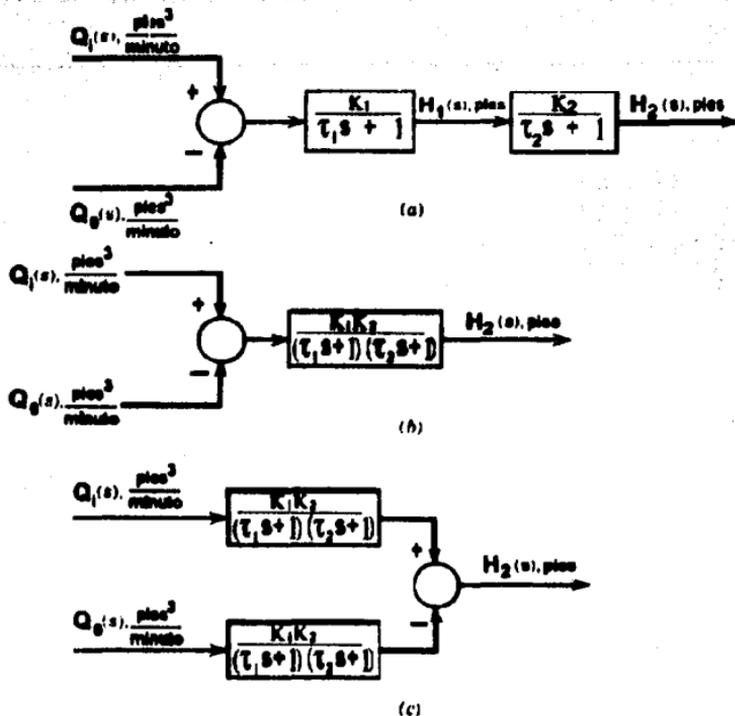


Figura 4.2. Diagrama de bloques de dos tanques no interactivos en serie.

En la figura 4.3 se muestra una forma de extender el proceso mostrado en la figura 4.1 mediante la adición de otro tanque; para este nuevo proceso se determinarán las funciones de transferencia que relacionan el nivel del tercer tanque con el flujo de entrada del primero y el flujo de la bomba.

Puesto que ya se obtuvieron los modelos para los dos primeros tanques, con las ecuaciones (4.1) a (4.4), ahora se hará el modelo del tercer tanque. De escribir el

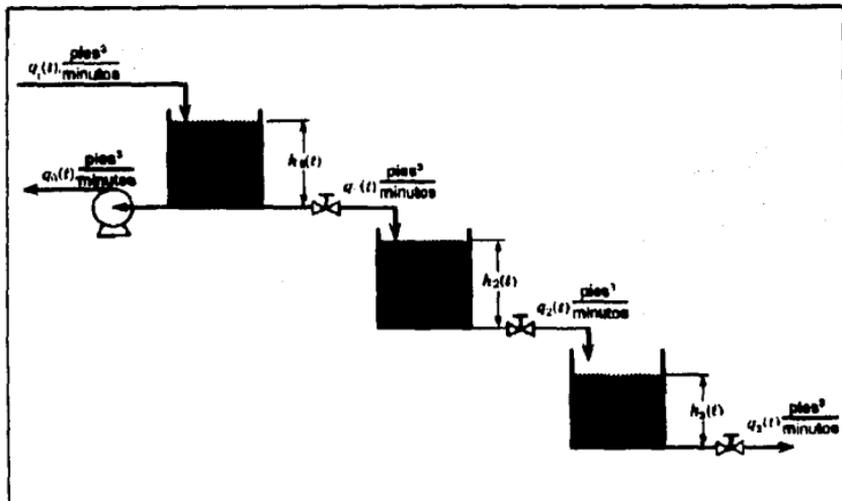


Figura 4.3. Tanques en serie - sistema no interactivo.

balance de masa en estado dinámico para el tercer tanque, resulta:

$$\rho q_2(t) - \rho q_3(t) = \rho A_3 \frac{dh_3(t)}{dt} \quad (4.16)$$

5 ecuaciones, 6 incógnitas ( $q_2(t)$ ,  $h_3(t)$ )

De la expresión de la válvula se obtienen la otra ecuación que se requiere:

$$q_3(t) = C' V_3 \sqrt{h_3(t)} \quad (4.17)$$

6 ecuaciones, 6 incógnitas.

Con las ecuaciones (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.16), (4.17) se tienen el modelo para el nuevo proceso. Al substituir las ecuaciones (4.4) y (4.17) en la ecuación (4.16) y dividir la ecuación resultante entre la densidad, se obtiene:

$$C'V_2\sqrt{h_2(t)} - C'V_3\sqrt{h_3(t)} = A_3 \frac{dh_3(t)}{dt} \quad (4.18)$$

de la cual se tiene

$$C_2 H_2(t) - C_3 H_3(t) = A_3 \frac{dH_3(t)}{dt} \quad (4.19)$$

donde:

$$C_3 = \frac{\partial q_3(t)}{\partial h_3(t)} / \dots = \frac{1}{2} C'_{v_3} (\bar{h}_3)^{\frac{1}{2}}$$

y la variable de desviación es  $H_3(t) = h_3(t) - \bar{h}_3$

Al reordenar la ecuación (4.19) y obtener la transformada de Laplace, se tiene:

$$H_3(s) = \frac{K_3}{\tau_3 s + 1} H_2(s) \quad (4.20)$$

donde:

$$\tau_3 = \frac{A_3}{C_3}, \quad \text{minutos}$$

$$K_3 = \frac{C_2}{C_3}, \quad \text{adimensional}$$

Finalmente, la substitución de la ecuación (4.13) en la (4.20) da

$$H_3(s) = \frac{K_1 K_2 K_3}{(\tau_1 + s)(\tau_2 + s)(\tau_3 + s)} (Q_1(s) - Q_0(s))$$

de la que se determinan las siguientes funciones de transferencia:

$$\frac{H_3(s)}{Q_1(s)} = \frac{K_1 K_2 K_3}{(\tau_1 + s)(\tau_2 + s)(\tau_3 + s)} \quad (4.22)$$

y

$$\frac{H_3(s)}{Q_0(s)} = \frac{-K_1 K_2 K_3}{(\tau_1 + s)(\tau_2 + s)(\tau_3 + s)}$$

(4.23)

Estas dos funciones de transferencia se denominan *funciones de transferencia de tercer orden o retardos de tercer orden*. En la figura 4.4 se ilustran tres diferentes maneras de representar la ecuación (4.21) mediante diagramas de bloques.

La figura 4.4a, ilustra la manera en que las funciones directivas  $Q_1(s)$  y  $Q_0(s)$  afectan a los diferentes niveles.

Notése que estas funciones de transferencia se obtienen mediante la multiplicación de funciones de transferencia de primer orden; es decir:

$$\frac{H_f(s)}{Q_i(s)} = \frac{H_1(s)}{Q_1(s)} \cdot \frac{H_2(s)}{H_1(s)} \cdot \frac{H_3(s)}{H_2(s)}$$

Los sistemas no interactivos en serie se pueden generalizar como sigue:

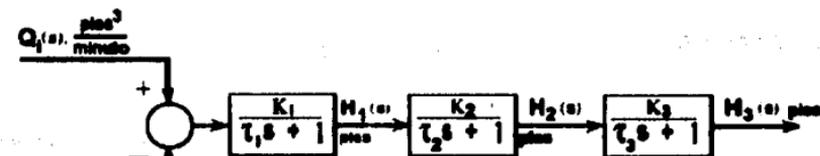
$$G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s) \quad (4.24)$$

donde:

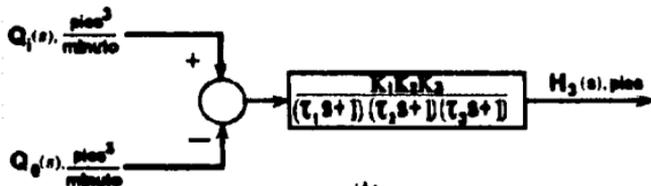
$n$  = cantidad de sistemas no interactivos en serie,

$G(s)$  = función de transferencia que relaciona la salida del último sistema, el sistema  $n$ , con la entrada del primer sistema.

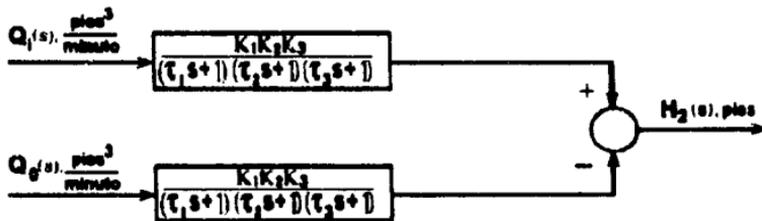
$G_i(s)$  = función de transferencia individual para cada sistema.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.4. Diagrama de bloques de tres tanques no interactivos en serie.

Los procesos que se muestran en las figuras 4.1 y 4.3 se conocen como *sistemas no interactivos*, porque no hay interacción completa entre las variables. El nivel del primer tanque afecta al del segundo; pero el nivel de éste no afecta al del primero; lo mismo es verdad para los niveles del segundo y tercer tanque.

## 4.2 TANQUES EN SERIE - SISTEMA INTERACTIVO.

Si se redistribuyen los tanques de la figura 4.1, el resultado es un sistema interactivo como el mostrado en la figura 4.5.

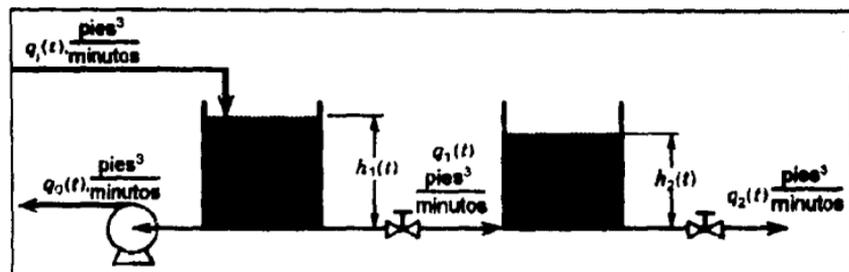


Figura 4.5. Tanques en serie - sistema interactivo.

La interacción entre los tanques se demuestra claramente a partir de la ecuación de la válvula,  $q_1(t)$ , es decir:

$$q_1(t) = \frac{C_v}{7.48} \sqrt{\frac{\Delta P(t)}{G}} = \frac{C_v}{7.48} \sqrt{\frac{\rho g (h_1(t) - h_2(t))}{144 \rho_s G}} = C' v_1 \sqrt{h_1(t) - h_2(t)}$$

En esta ecuación se aprecia que el flujo entre los dos tanques depende del nivel de ambos; el uno afecta al otro.

Se determinarán las dos funciones de transferencia que en el caso del sistema no interactivo:

$$\frac{H_2(s)}{Q_1(s)} \text{ y } \frac{H_2(s)}{Q_0(s)}$$

Escribiendo el balance de masa en estado dinámico para el primer tanque:

$$\rho q_1(t) - \rho q_1(t) - \rho q_0(t) = \rho A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} \quad (4.1)$$

1 ecuación, 2 incógnitas ( $q_1(t)$ ,  $h_1(t)$ )

De la expresión de la válvula se obtienen la siguiente ecuación:

$$q_1(t) = C' \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \quad (4.25)$$

2 ecuaciones, 3 incógnitas ( $h_2(t)$ )

Realizando el balance en estado dinámico del segundo tanque:

$$\rho q_1(t) - \rho q_2(t) = \rho A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} \quad (4.3)$$

3 ecuaciones, 4 incógnitas ( $q_2(t)$ )

El flujo a través de la última válvula se expresa mediante la ecuación (4.4)

$$Q_2(t) = C'_{n_2} \sqrt{h_2(t)}$$

4 ecuaciones, 4 incógnitas.

Ahora se tiene la misma cantidad de ecuaciones independientes que de incógnitas lo cual describe al proceso, es decir, *se tiene el modelo*, ahora sigue la solución.

Se sustituye la ecuación (4.25) en la (4.1) y se divide la ecuación resultante entre la densidad, para obtener:

$$q_1(t) - C'_{n_1} \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - q_0(t) = A_1 \frac{dh_1(t)}{dt}$$

De la cual se obtiene

$$Q_1(t) - C_s H_1(t) + C_s H_2(t) - Q_0(t) = A_1 \frac{dH_1(t)}{dt} \quad (4.26)$$

donde:

$$Q_s = \frac{\delta q_1(t)}{\delta h_1(t)} \Big|_s = \frac{\delta q_1(t)}{\delta h_2(t)} \Big|_s = \frac{1}{2} C'_{n_1} (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)^{-1/2}$$

Al reordenar la ecuación (4.26) y obtener la transformada de Laplace

$$H_1(s) = \frac{K_s}{\tau_s s + 1} Q_1 + \frac{1}{\tau_s s + 1} H_2(s) - \frac{K_s}{\tau_s s + 1} Q_0(s) \quad (4.27)$$

donde:

$$K_s = \frac{Q_s}{Q_1 + Q_2}, \quad \text{adimensional}$$

$$\tau_s = \frac{A_1}{Q_1 + Q_2}, \quad \text{minutos}$$

Se sigue el mismo procedimiento para el segundo tanque y se obtiene

$$H_2(s) = \frac{K_4 K_3}{(\tau_4 s + 1)(\tau_3 s + 1)} (Q_1(s) - Q_0(s)) + \frac{K_3}{(\tau_4 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$$

$$H_2(s) = \frac{K_3 K_4}{\tau_4 \tau_3 s^2 + (\tau_4 + \tau_3)s + (1 - K_3)} (Q_1(s) - Q_0(s))$$

$$H_2(s) = \frac{\frac{K_4 K_3}{1 - K_3}}{\left(\frac{\tau_4 \tau_3}{1 - K_3}\right) s^2 + \left(\frac{\tau_4 + \tau_3}{1 - K_3}\right) s + 1} (Q_1(s) - Q_0(s)) \quad (4.29)$$

A partir de la cual se obtienen las funciones de transferencia que se desean; es decir

$$\frac{H_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{\frac{K_4 K_3}{1 - K_3}}{\left(\frac{\tau_4 \tau_3}{1 - K_3}\right) s^2 + \left(\frac{\tau_4 + \tau_3}{1 - K_3}\right) s + 1} \quad (4.30)$$

y

$$\frac{H_2(s)}{Q_0(s)} = \frac{\frac{K_4 K_3}{1 - K_3}}{\left(\frac{\tau_4 \tau_3}{1 - K_3}\right) s^2 + \left(\frac{\tau_4 + \tau_3}{1 - K_3}\right) s + 1} \quad (4.31)$$

Las funciones de transferencia mostradas aquí son de segundo orden. Los diagramas

de bloques para este proceso interactivo se muestran en la figura 4.6

Al comparar las ecuaciones (4.14) sistema no interactivo y (4.30) sistema interactivo se observa que las ganancias, o sensibilidades, son diferentes en los dos casos; también las constantes de tiempo son diferentes; aún más, para el caso interactivo, la constante de tiempo mayor es más grande que en el caso no interactivo, lo cual da como resultado que el sistema responda más lentamente. Otro hecho acerca de los sistemas interactivos es que la constantes de tiempo "efectivas" son reales.

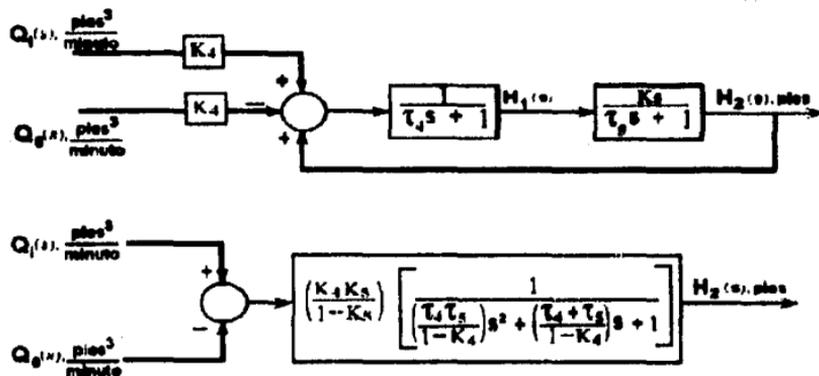


Figura 4.6. Diagrama de bloques de un sistema interactivo de dos tanques.

---

## ***CAPITULO 5.***

# ***INSTRUMENTOS DE CONTROL.***

Los instrumentos de control de proceso dan información acerca del estado y propiedades físicas de los fluidos en los recipientes, tuberías y equipos de procesos. Indican, registran y controlan las variables del proceso como el flujo, nivel del líquido, presión y temperatura.

Cada instrumento tiene una conexión a las tuberías o equipos para percibir el estado o condición física del fluido.

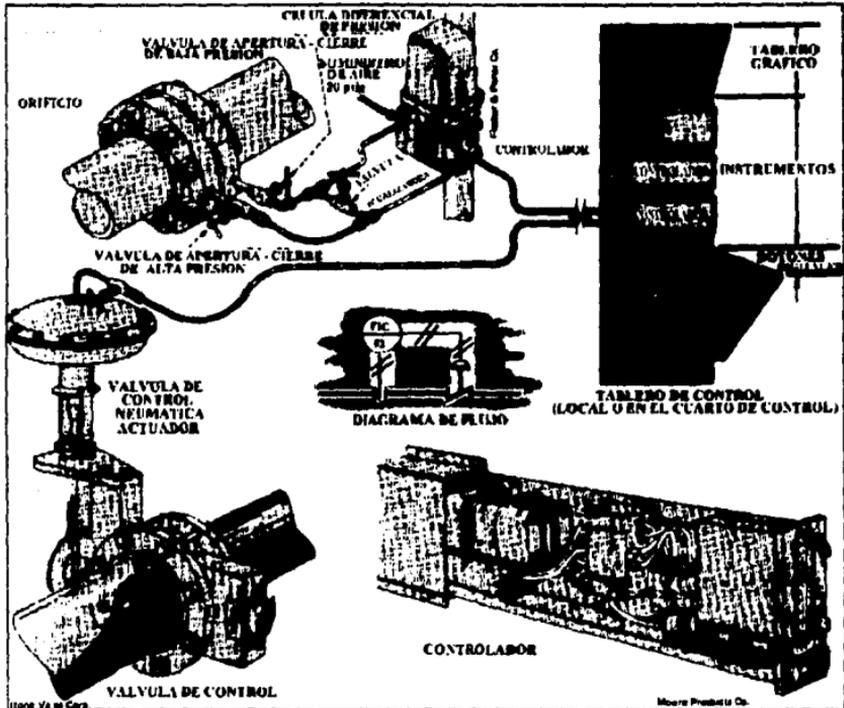


Figura 5.1. Componentes Interconectados para el control automático de flujo.

La figura 5.1, de control automático de flujo muestra el hardware interconectado para controlar el flujo.

Una placa de orificio (sensor de flujo), mide el flujo que lleva el oleoducto, debido a la variación de presión (caída de presión) que se presenta, antes y después de la placa de orificio.

El instrumento de aire de la tubería conectada a el transmisor (célula diferencial de presión), da la señal al controlador / registrador y este envía a la vez, una señal de acción de aire al actuador neumático de la válvula de control.

En la figura 5.1, los instrumentos de control son:

**El orificio.** Un orificio puede solamente operar bien si el flujo lo inunda completamente. Esto es también verdad para todos los demás elementos receptores (sensores) de flujo, como boquillas de flujo, tubos venturí y pitot, tubos de vibración y rotámetros.

**El transmisor.** El transmisor diferencial de presión (figura 5.2) consiste de un diafragma, un pivote incluido de enlaces, y un relevador de presión.

En todos los transmisores neumáticos se utilizan un arreglo de mariposa y boquilla para producir una señal de salida proporcional a la salida del sensor.

La cápsula de diafragma gemelo es el sensor con que se detecta la diferencia de presión entre el lado de alta y el lado de baja presión. El diafragma se une a una barra de fuerza mediante una conexión flexible; la barra de fuerza se conecta al cuerpo del transmisor mediante un diafragma de acero inoxidable (pivote), el cual sirve como sello de la cavidad de medición y también como apoyo firme para la barra de fuerza. La parte superior de la barra de fuerza se conecta a la barra de rango mediante una tira de flexión, la barra de rango se apoya en la rodaja de rango. En la parte inferior de la barra de rango se encuentra un resorte de retroalimentación y un ajuste a cero. (el resorte semeja una cápsula corujado hecha de algún material elástico, por ejemplo, acero inoxidable o latón; al variar la presión el resorte se expande o se contrae). Arriba de la barra de rango se encuentra un arreglo de mariposa boquilla y un relevador neumático de presión y, como se observa la mariposa se conecta a la combinación barra de fuerza y barra de rango.

Cuando en la cápsula del diafragma se detecta una diferencia de presión, se crea una tensión o fuerza en la parte inferior de la barra de fuerza; más

específicamente, se puede suponer que la presión en la parte superior se incrementa, con lo que se crea una fuerza que tira de la barra de fuerza, de lo cual resulta un movimiento en el extremo externo de la barra, con lo que la mariposa se acerca a la boquilla, en cuyo caso se incrementa la salida del relevador y con ello se incrementa la fuerza que se ejerce sobre la barra de rango mediante el fuelle de retroalimentación, con esta fuerza se balancea la fuerza del diferencial de presión presente en la cápsula de diafragma; del balance de estas fuerzas resulta la señal de salida del transmisor, al controlador, la cual es proporcional a la diferencia de presión.

El suministro de presión que se recomienda para la mayoría de los instrumentos neumáticos es entre 20 y 25 psig. ya que con esto se asegura el funcionamiento adecuado con un nivel de salida de 15 psig. Para calibrar estos instrumentos se requiere ajustar el cero y la escala, (o rango); en la célula diferencial, esto se hace mediante un tornillo externo de ajuste a cero y con la rodaja de rango.

El controlador, frecuentemente combina un indicador y un registrador, esta construido generalmente sobre un tablero, que está montado localmente, o alejado en la sala de control central.

El actuador en este caso es neumático pero puede ser de otro tipo, como se verá posteriormente.

El último elemento de control es la válvula que se abre o cierra en el oleoducto, proporcional a la señal de error recibida.

Después de observar la interacción que tienen los instrumentos de control o componentes básicos de control, como se vio en la figura 2 del capítulo 1 y en la figura 5.1, se analizará ahora el sentido físico de los sensores, transmisores, controladores, actuadores y válvulas de control.

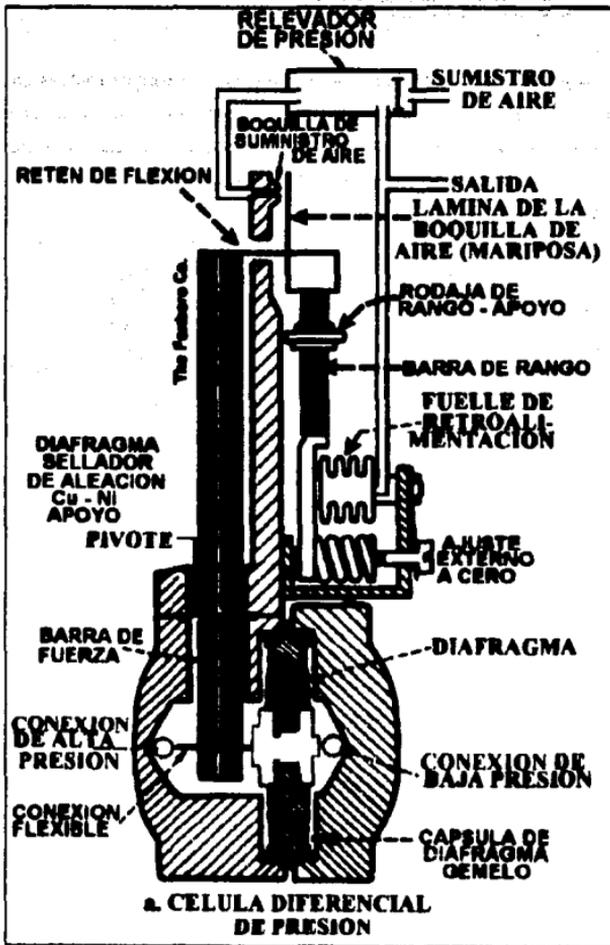
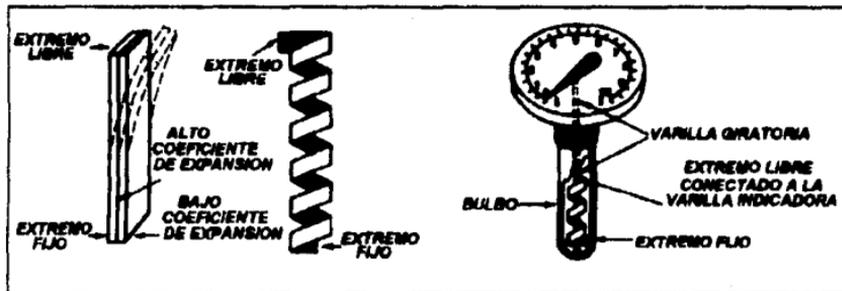


Figura 5.2. Transmisor diferencial de presión para medir el flujo.

## 5.1. SENSORES DE TEMPERATURA.

La temperatura junto con el flujo es la variable que con mayor frecuencia se mide en la industria de proceso, una razón simple es que casi todos los fenómenos físicos se ven afectados por está. La temperatura frecuentemente se utilizan para inferir otras variables de proceso, dos de los ejemplos más comunes son los reactores y las torres de destilación.



**FIGURA. 5.3.** Termómetro de tira bimetalico.

Comúnmente en las columnas de destilación se utiliza la temperatura para inferir la pureza de las corrientes existentes; en los reactores químicos la temperatura se utilizan como un indicador de la extensión de la conversión o reacción.

A causa de los múltiples efectos que se producen con la temperatura, se han desarrollado numeros dispositivos para medirla, como ejemplo están los termómetros de tira bimetalica trabajan con el principio de que los metales se expanden con la temperatura y que los coeficientes de expansión no son los mismos para todos los metales; en la figura 5.3 se ilustra un termómetro de tira bimetalico típico. El elemento sensitivo de temperatura se componen de dos metales diferentes que se unen en una tira, el coeficiente de expansión de uno de los metales es alto y el del otro es bajo, y por esta razón la tira metálica se enrolla en forma espiral tende a combarse hacia el lado del metal con bajo coeficiente térmico.

En la figura 5.4 se muestra los elementos de un termómetro de sistema lleno, el líquido del sistema se expande o se contrae con las variaciones de la temperatura, la cual se detecta mediante el resorte de Bourdon y se transmite a un indicador o transmisor. A causa de la simplicidad de su diseño, confiabilidad, bajo costo relativo y seguridad inherente, estos elementos son populares en la industria de proceso.

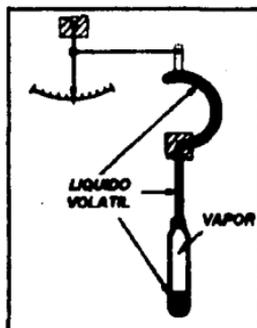


FIGURA 5.4. Termómetro de sistema lleno.

Los termómetros de dispositivos resistivos (TDR) son elementos que lo usan en el principio de que las resistencias eléctricas se puede medir con bastante precisión, esto proporciona un medio para medir la temperatura con mucha precisión. Los metales que se utilizan comúnmente son platino, níquel, tungsteno y cobre. En la figura 5.5 se muestra el esquema de un TDR típico.

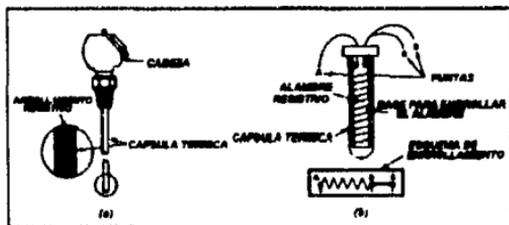


Figura 5.5 Termómetro de resistencia.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

## 5.2. TRANSMISOR.

Como se mencionó anteriormente el propósito del transmisor es convertir la salida del sensor en una señal lo suficientemente intensa como para que se pueda transmitir a un controlador o a cualquier otro dispositivo receptor.

### 5.2.1. Transmisor electrónico.

En la figura 5.6 se muestra el diagrama simplificado de un transmisor simplificado de un transmisor electrónico de diferencial de presión del tipo movimiento balance y se utilizará para ilustrar los principios de trabajo de la instrumentación electrónica típica.

Con un incremento en el diferencial de presión se accionan los diagramas del elemento de medición y se desarrolla una fuerza con la que se mueve la parte inferior de la barra de fuerza hacia la izquierda. Este movimiento se transfiere a la unidad de medición de la fuerza de deformación a través de un alambre de conexión; en la unidad de medición de la fuerza de medición se tiene cuatro medidores de fuerza que se conectan en configuración puente; con el movimiento de la barra de fuerza se causa un cambio de resistencia en los medidores de fuerza, mediante el cual se produce una señal diferencial proporcional al diferencial de presión que entra, mismas que se aplican a las entradas del amplificador de entrada; un lado de la señal se aplica a las entrada del amplificador con inversión, a través de una red de cero, con la cual se obtiene el ajuste a cero del transmisor.

Con la señal que sale del amplificador de entrada se maneja el regulador de corriente de salida, por medio del cual se controla la corriente de salida del transmisor a través de la red de escala y el circuito sensor de corriente de salida. Con la red de escala se obtiene el ajuste de escala del transmisor; la señal de esta red se retroalimenta al circuito de entrada mediante un amplificador con almacenamiento (buffer) y se utiliza para controlar la ganancia del circuito de entrada. Si la corriente de salida del transmisor se incrementa más allá de 20 mA C. D., al voltaje que pasa a

través de la resistencia de detección de corriente de salida, con el cual se limita la salida.

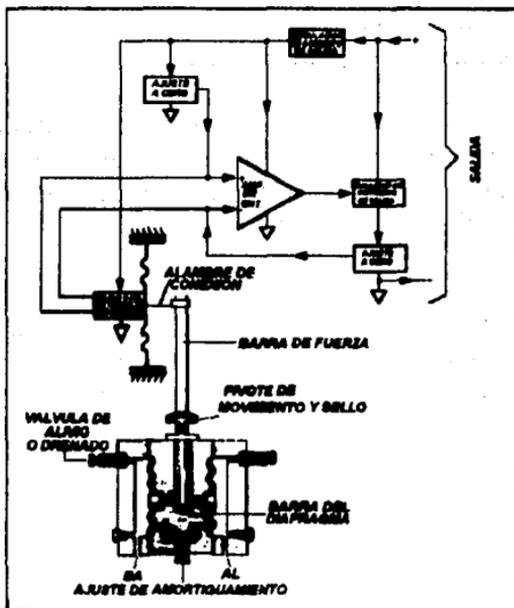


FIGURA 5.6. Transmisor electrónico.

### 5.3 CONTROLADORES.

De acuerdo con su acción de control se pueden clasificar los controles automáticos industriales en:

- 1.- Control de dos posiciones apagado/encendido.

- 2.- Control proporcional.
- 3.- Control integral.
- 4.- Control proporcional integrativo.
- 5.- Control proporcional derivativo.
- 6.- Control proporcional integrativo derivativo.

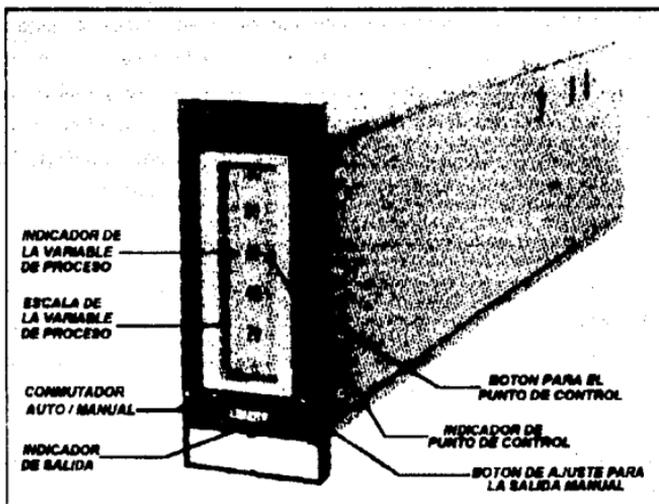
La mayoría de los controles automáticos usan como fuente de potencia, electricidad o un fluido en presión que puede ser aceite o aire. También se pueden clasificar los controles automáticos según el tipo de energía usada, en su funcionamiento, en controles neumáticos, hidráulicos o electrónicos.

Un control automático efectúa la amplificación de la potencia de la señal de error actuante, la que a su vez opera sobre el actuador. (Frecuentemente se usa un amplificador con algún circuito de retroalimentación adecuado, para modificar la señal de error actuante amplificándola y a veces derivándola o integrándola para lograr una señal mejor).

El controlador es el "cerebro" del circuito de control; es el dispositivo que toma la decisión en el sistema de control y, para hacerlo, el controlador:

- 1.- Compara la señal del proceso que llega del transmisor, la variable que se controla, contra el punto de control y
- 2.- Envía la señal apropiada a la válvula de control, o cualquier otro elemento final de control, para mantener la variable que se controla en el punto de control.

En la figura 5.7 se muestran diferentes tipos de controladores, nótese las diferentes perillas, selectores y botones con los que se hace el ajuste del punto de control, la lectura de la variable que se controla, el cambio entre el modo manual y el automático y el ajuste y lectura de la señal de salida del controlador; en la mayoría de los controladores estos selectores se encuentran en el panel frontal, para facilitar la operación.



**FIGURA 5.7 a.** Controlador de proceso.

Un selector interesante es el auto / manual, con este se determina el modo de operación del controlador. Cuando el selector está en la posición auto (automático), el controlador decide y emite la señal apropiada hacia el elemento final de control, para mantener la variable que se controla en el punto de control; cuando el selector está en la posición manual, el controlador cesa de decidir y "congela" su salida, entonces el operador o el ingeniero puede cambiar manualmente la salida del controlador mediante el disco, rueda o botón de salida manual, el controlador cesa de decidir. Si un controlador se pone en manual, no hay necesidad de tenerlo, sus beneficios son en posición automática.

Una de las opciones de la figura 5.7 b, es la elección entre la operación remota o local del punto de control; si el punto de control lo controla el personal de operación desde el frente del panel, entonces se elige la opción local; esto se logra generalmente mediante el accionamiento de una perilla o interruptor. Si el punto de

filación lo controla otro dispositivo, controlador, computador o algo semejante, entonces se elige la opción remota; cuando la perilla selectora se posiciona en remoto, la perilla de punto de control ubicada en el frente del panel no tiene ningún efecto sobre el punto de control del controlador; en este caso el controlador espera que el punto de control le llegue en forma de una señal desde otro dispositivo, y dicha señal generalmente se conecta al panel posterior del controlador.

La manera como los controles por retroalimentación toman una decisión para mantener el punto de control, es mediante el cálculo de la salida con base entre la diferencia entre la variable que se controla y el punto de control, por lo que se abordará los tipos más comunes de controladores, por medio del estudio de las ecuaciones con que se describen su operación.

Controlador proporcional (P). La ecuación con que se describe su funcionamiento es la siguiente:

$$m(t) = \bar{m} + K_c(r(t) - c(t))$$

$$m(t) = \bar{m} + K_c e(t)$$

donde:

$m(t)$  = salida del controlador, paig o mA.

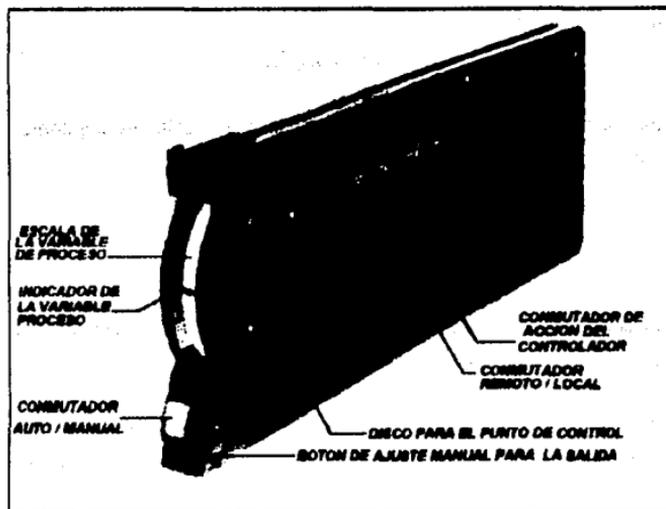
$r(t)$  = punto de control, paig o mA.

$c(t)$  = variable que se controla, paig o mA; ésta es la señal que llega del transmisor.

$e(t)$  = señal de error, paig o mA; ésta es la diferencia entre el punto de control y la variable que se controla.

$K_c$  = ganancia del controlador. paig / paig o mA / mA.

$\bar{m}$  = valor base, paig o mA. El significado de este valor es la salida del controlador cuando el error es cero; generalmente se fija durante la calibración del controlador, en el medio de escala, 9 paig o 12 mA.



**FIGURA 6.7 b. Controlador de proceso.**

Puesto que los rangos de entrada y salida son los mismos (3 - 15 psig o 4 - 20 mA), algunas veces las señales de entrada y salida, así como el punto de control se expresan en porcentaje o fracción de rango.

Para obtener la función de transferencia del controlador proporcional, la ecuación se puede escribir como

$$m(t) - \bar{m} = K_C(e(t) - 0)$$

Se definen las dos variables de desviación:

$$M(t) = m(t) - \bar{m}$$

$$E(t) = e(t) - 0$$

Entonces

$$M(t) = K_C E(t).$$

Se obtiene la transformada de Laplace, y de ahí resulta la siguiente función de transferencia:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_C$$

Los controladores proporcionales son los más simples, con la ventaja de que sólo tienen un parámetro de ajuste,  $K_C$ .

Controlador proporcional Integral (PI). La mayoría de los procesos no se pueden controlar con una desviación, es decir, se deben controlar en el punto de control, y en este caso se debe añadir inteligencia en el controlador proporcional, para eliminar la desviación. Esta nueva inteligencia o nuevo modo de control es la acción integral o reajuste y en consecuencia, el controlador se convierte en un controlador proporcional Integral. Su ecuación es la siguiente:

$$m(t) = \bar{m} + K_C [r(t) - c(t)] + \frac{K_C}{\tau_I} \int [r(t) - c(t)] dt$$

$$m(t) = \bar{m} + K_C e(t) + \frac{K_C}{\tau_I} \int e(t) dt$$

donde  $\tau_I$  = tiempo de integración o reajuste minutos/repetición. Por lo tanto el controlador PI tiene dos parámetros,  $K_C$  y  $\tau_I$ , que se deben de ajustar para obtener un control satisfactorio. De la ecuación se nota que, mientras está presente el término de error, el controlador se mantienen cambiando su respuesta y, por lo tanto, integrando el error, para "eliminarlo"; ya que la Integración también quiere decir sumatoria.

Para obtener la función de transferencia del controlador PI, la ecuación se escribe:

$$m(t) - \bar{m} = K_C [e(t) - 0] + \frac{K_C}{\tau_I} \int [e(t) - 0] dt$$

La función de transferencia es, ya sustituyendo las variables de desviación y obteniendo su transformada de Laplace:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_C \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)$$

Controlador proporcional integral derivativo. (PID). Algunas veces se añade otro modo de control al controlador PI, este nuevo modo de control es la acción derivativa que también se conoce como rapidez de derivación; tiene como propósito anticipar hacia dónde va el proceso, mediante la observación de la rapidez para el cambio del error, su derivada. La ecuación es la siguiente:

$$m(t) - \bar{m} = K_C e(t) + \frac{K_C}{\tau_I} \int e(t) dt + K_C \tau_D \frac{de(t)}{dt}$$

donde  $\tau_D$  = rapidez de derivación en minutos.

La ecuación de transferencia de un controlador PID "ideal" se obtiene de:

$$m(t) - \bar{m} = K_C [e(t) - 0] + \frac{K_C}{\tau_I} \int [e(t) - 0] dt + K_C \tau_D \frac{d[e(t) - 0]}{dt}$$

Su función de transferencia es, siguiendo los métodos descritos anteriores:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_C \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

Esta función de transferencia se conoce como ideal porque en la práctica es imposible implantar el cálculo de la derivada, por lo cual se hace una aproximación mediante la utilización de un adelanto/retardo, de lo que resulta la función de transferencia real:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_C \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \left( \frac{\tau_D s + 1}{\alpha \tau_D s + 1} \right)$$

Los valores típicos de  $\alpha$  están entre 0.05 y 0.1.

## 5.4 ACTUADORES.

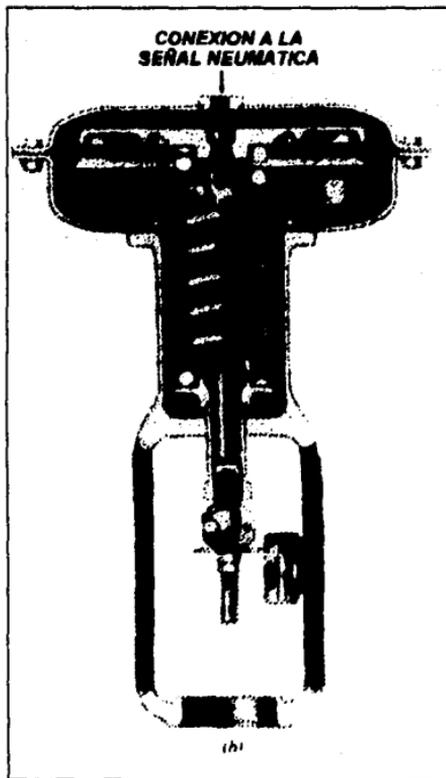
Por lo general el último paso en la especificación de la válvula es seleccionar el actuador, quien recibe la señal del controlador. Es parte integrante de todo sistema de control automático y produce la fuerza motriz requerida para ubicar el elemento de control final. Dado que la estabilidad y funcionamiento del sistema se basan en la acción del actuador, este debe de poder controlar las muchas variables de fuerzas estáticas y dinámicas creadas por la válvula.

Hay cuatro tipos básicos de actuadores para controlar la estrangulación de las válvulas; 1. resorte y diafragma, 2. pistón neumático, 3. motor eléctrico, 4. hidráulico o electrohidráulico.

### 5.4.1 Actuadores de diafragma.

El actuador neumático de resorte y diafragma, muy común y muy sencillo (figura 5.8) es de bajo costo y muy confiable. Estos actuadores suelen funcionar con aire a presiones entre 3 y 15 psi o entre 6 y 30 psi. Por ello suelen ser adecuados para servicio de estrangulación mediante señales directas desde los instrumentos. Los tipos disponibles incluyen resortes ajustables o una amplia selección de resortes para adaptar el actuador a la aplicación.

La mayor ventaja de estos actuadores, es que son de falla sin peligro. Cuando se aplica aire en la cubierta del actuador el diafragma mueve la válvula y comprime el resorte. La energía del resorte mueve la válvula otra vez a su posición original cuando se corta el aire.

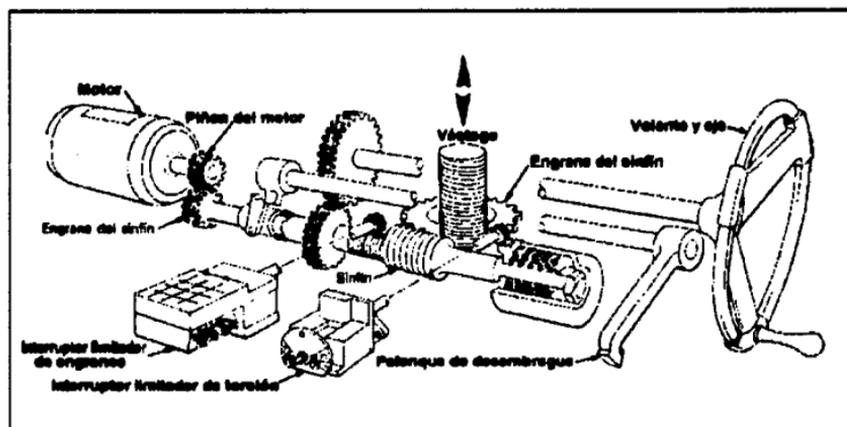


**FIGURA 5.8. Actuador neumático.**

### 5.4.2 Actuadores eléctricos.

Los solenoides son actuadores eléctricos y constan de núcleo de hierro blando que se mueve dentro de un campo eléctrico producido por una bobina que lo circunda. Se utilizan mucho para apertura y cierre de válvulas de globo pequeñas, en especial para cierre de emergencia.

El actuador con motor eléctrico y engranes es una buena selección por su gran adaptabilidad. En su forma más sencilla, consta de un motor eléctrico conectado por una caja de engranes con el vástago de la válvula (Figura 5.9) pero hay tipos más complejos para casi todas las clases de trabajo. Uno de los principales del actuador eléctrico es que se puede equipar con un interruptor limitador de torsión que controla



**FIGURA 5.9. Actuador eléctrico.**

la intensidad de la fuerza para asentamiento. Esto produce un empuje constante de asentamiento para cierre hermético y, al mismo tiempo, proteger las piezas de la válvula contra sobrecarga; el interruptor limitador de torsión se puede ajustar cuando

cambian las condiciones del servicio.

Los actuadores tienen también interruptores limitadores de engranes para controlar la cámara del disco mientras abre y cierra, y también cuenta con luces indicadoras. Todos los componentes eléctricos alojados en cubierta a prueba de intemperie, sumergibles o a prueba de explosión.

La impulsión del motor se puede desacoplar con el volante para tener accionamiento manual.

La experiencia ha demostrado que estos actuadores son de construcción fuerte y confiable. Una ventaja es que el tren de engranes se puede fijar en cualquier posición.

## 5.5 VALVULAS.

Las válvulas de control son los elementos finales de control más usuales y se encuentran en plantas de proceso donde manejan los flujos para mantener en los puntos de control las variables que se deben controlar.

El que una válvula vaya a ser de accionamiento manual o con actuador, no influye en la selección del tipo para un servicio.

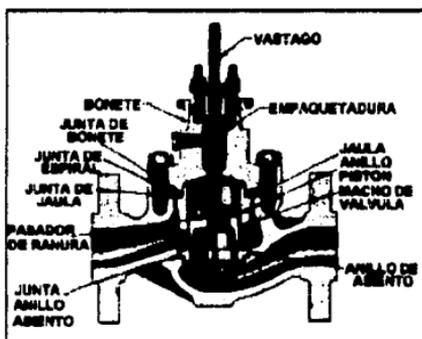


FIGURA 8.10. Válvula de control.

Las funciones de la válvula se pueden definir como sigue:

- 1.- Servicio de paso y cierre.
- 2.- Servicio de estrangulación.
- 3.- Evitar flujo inverso (retención).
- 4.- Control de presión.
- 5.- Funciones especiales:
  - a. Dirigir el flujo.
  - b. Servicio de muestreo.
  - c. Limitación de flujo.
  - d. Cerrar salida de recipientes o tanques.

En la figura 5.10 se muestra una válvula de control, la cual no tiene el volante en la parte superior porque lleva actuador. Como se ve en la figura 5.11.

## 5.6 POSICIONADORES.

Existen varios dispositivos que se conocen como accesorios y que generalmente se asocian con la válvula de control, uno de ellos es el posicionador que es un dispositivo cuya acción es semejante a la de un controlador, con el posicionador se añade o elimina aire de la válvula hasta que se logra la posición correcta; es decir, cuando es importante posicionar el vástago de la válvula con precisión, normalmente se utiliza un posicionador.

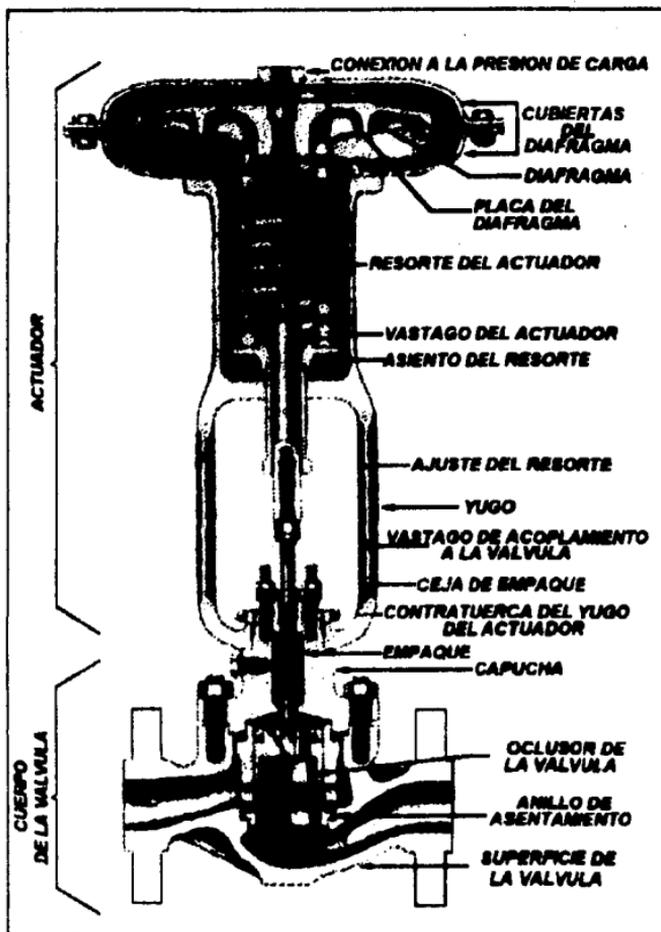


FIGURA 5.11

Wash. D.C. 20540

Dear Mr. [Name]:

[Text]

---

# ***CAPITULO 6.***

## ***SISTEMAS DE CONTROL POR RETROALIMENTACION.***

Los parámetros importantes para el diseño de sistemas de control son; la ganancia de estado estacionario y las constantes de tiempo muerto.

El término retroalimentación proviene del hecho de que se mide la variable controlada, y dicha medición es alimentada hacia atrás para reajustarla con el elemento

final de control, lo cual ocasiona que las variaciones de la señal se muevan alrededor del circuito cerrado de control.

Las descripciones de la figura 2 y la figura 5.2, son explicaciones de sistemas de control automático por retroalimentación.

A continuación se analizará un circuito cerrado de control por retroalimentación, y con ello se mostrará como abordar un sistema de control automático.

## 6.1. CONTROL DE TEMPERATURA PARA UN TANQUE DE CALENTAMIENTO.

El tanque con agitación que se ilustra en la figura 6.1 se utiliza para calentar una corriente de proceso, de manera que se logre una composición uniforme de los componentes premezclados. El control de temperaturas es importante porque con una alta temperatura se tiende a descomponer el producto, mientras que, con una temperatura baja, la mezcla resulta incompleta. El tanque se calienta mediante el vapor que se condensa en un serpentín; se utiliza un controlador proporcional integral derivativo (PID) para controlar la temperatura en el tanque, mediante el manejo de la posición de la válvula de vapor. Se obtendrá el diagrama de bloques completo y la ecuación característica del circuito para los siguientes datos de diseño.

### Proceso.

La densidad de alimentación  $\rho = 68 \text{ lb / ft}^3$

Capacidad calorífica  $C_p = 0,80 \text{ Btu / lb } ^\circ \text{F}$ .

Volumen del líquido constante en el tanque  $V = 120 \text{ ft}^3$ .

Longitud del serpentín = 205 ft acero, calibre 40, Peso = 10,8 lb / ft.

Diametro externo  $D_{o,x} = 7.5 \text{ in}$ .

Coefficiente total de transferencia de calor  $U = 2,1 \text{ Btu} / \text{min} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{°F}$ .

Vapor saturado a presión de 30 psia.

Calor latente de vaporización  $\lambda = 986 \text{ Btu} / \text{lb}$ .

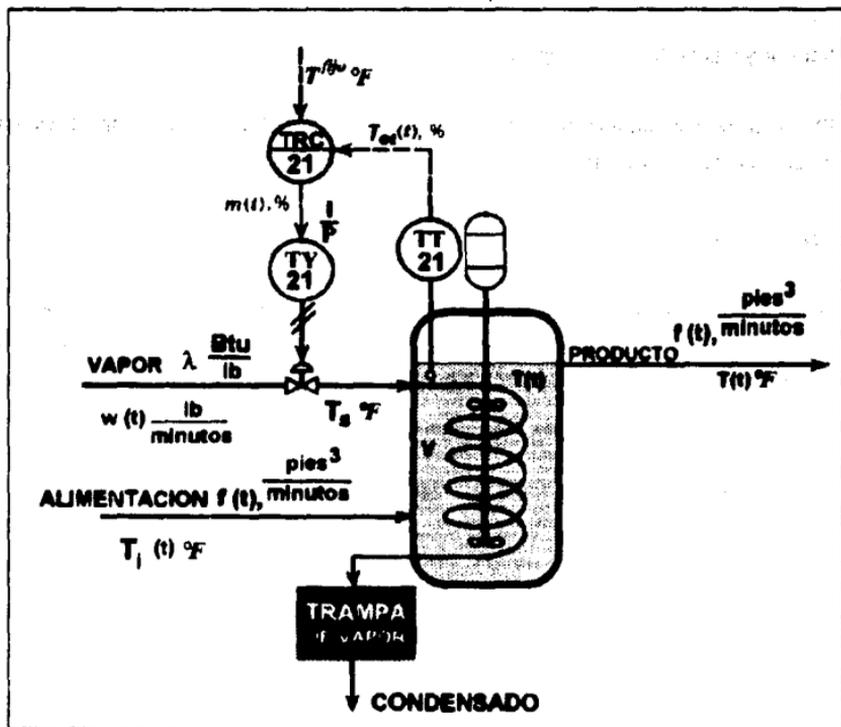


Figura 6.1 Tanque de calentamiento con agitación continua.

**Condiciones de diseño.**

En las condiciones de diseño, el flujo de alimentación  $f$  es de  $15 \text{ ft}^3 / \text{min.}$  a una temperatura  $T_i$  de  $100 \text{ }^\circ\text{F.}$  El contenido del tanque se debe de mantener a una temperatura  $T$  de  $150 \text{ }^\circ\text{F.}$  Las posibles perturbaciones son cambios en flujo de alimentación y en la temperatura.

**Sensor y transmisor de temperatura.**

El sensor de temperatura se calibra para un rango de  $100$  a  $200 \text{ }^\circ\text{F}$  y una constante de tiempo  $\tau$ , de  $0.75 \text{ min.}$

**Válvula de control.**

La válvula de control se diseña con una sobre capacidad del  $100 \%$ , y las variaciones en la caída de presión se pueden despreciar. La válvula es de igual porcentaje, con un parámetro de ajuste de rango de  $50$ ; la constante de tiempo  $\tau$ , del actuador es de  $0.20 \text{ min.}$

**Solución.** El método que se utiliza es obtener primeramente las ecuaciones con que se describen el comportamiento dinámico del tanque, la válvula de control, el sensor - transmisor y el controlador; entonces se linealiza y se obtienen su transformada de Laplace, para obtener el diagrama de bloques del circuito.

**Proceso.**

Del balance de energía para el líquido en el tanque.

Acumulación	Entrada	Energía de calentamiento	Salida
		$T_s(t) > T(t)$	
$V \rho C_p \frac{dT(t)}{dt} = f(t) \rho C_p T_i(t) + UA [T_s(t) - T(t)] - f(t) \rho C_p T(t)$			

1 ecuación, 2 incógnitas ( $T$ ,  $T_s$ )

$A$  = Área de transferencia de calor,  $\text{ft}^2$ .

$T_s(t)$  = Temperatura del vapor saturado  $^{\circ}\text{F}$ .

Del balance de energía en el serpentín, si se supone que el metal del serpentín está a la misma temperatura que el vapor saturado.

$$C_M \frac{dT_s(t)}{dt} = w(t) \lambda - UA [T_s(t) - T(t)]$$

2 ecuaciones, 3 incógnitas ( $w$ ).

$w(t)$  = Gasto de vapor másico,  $\text{lb} / \text{min}$ .

$C_M = C_p$  del metal del serpentín,  $\text{Btu} / ^{\circ}\text{F}$ .

Puesto que el gasto de vapor es la salida de la válvula de control y una entrada al proceso, el modelo del proceso queda completo.

Válvula de control.

La ecuación para la válvula de porcentaje igual con presión de entrada y caída de presión constante, se puede escribir como.

$$w(t) = W_{\max} \alpha^{(V_p(t) - 1)}$$

$W_{\max}$  = Flujo máximo a través de la Válvula.

$\alpha$  = Parámetro de ajuste en rango de porcentaje igual.

$V_p(t)$  = Posición de la válvula en escala de 0 a 1. %

El actuador de la válvula se puede modelar mediante un retardo de primer orden:

$$VP(s) = \frac{1/100}{\tau_v s + 1} M(s)$$

4 ecuaciones, 5 incógnitas ( $M$ ).

$M(s)$  = Señal de salida del controlador.

**Controlador con retroalimentación. (TRC21).**

La función de transferencia del controlador PID es,

$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_D s \right) = \frac{M(s)}{R(s) - T_d(s)}$$

5 ecuaciones, 6 incógnitas. ( $T_d$ ).

$T_d$  = Transformada de Laplace de la señal de salida del transmisor, %

$K_c$  = Ganancia del controlador.

$\tau_i$  = Tiempo de integración.

$\tau_D$  = Tiempo de derivación.

**Sensor - transmisor. (TT21)**

Se puede representar mediante un retardo de primer orden:

$$\frac{T_d}{T(s)} = \frac{K_T}{\tau_i s + 1}$$

6 ecuaciones, 6 incógnitas.

$K_T$  = Ganancia del transmisor.

Con esto se completa la obtención de la ecuación para el circuito de control de temperatura. El siguiente paso es linealizar las ecuaciones del modelo y sus transformadas de Laplace para obtener el diagrama de bloques del circuito de control.

### Linealización y transformadas de Laplace.

Mediante los métodos que se mencionaron anteriormente, se obtienen las ecuaciones del modelo del tanque en forma lineal y en términos de las variables de desviación,

$$V\rho C_p \frac{dT(t)}{dt} = \dot{\rho} C_p (\bar{T}_i(t) + \bar{T})F(t) + UAT_s(t) - (UA + \dot{\rho} C_p)T(t)$$

$$C_M \frac{dT_s(t)}{dt} = \lambda W(t) - UAT_s(t) + UAT(t)$$

donde  $T(t)$ ,  $T_s(t)$ ,  $F(t)$ ,  $T_i(t)$  y  $W(t)$  son las variables de desviación.

Se obtiene la transformada de Laplace de estas ecuaciones y se reordena, para tener,

$$T(s) = \frac{K_F}{\tau s + 1} F(s) + \frac{K_I}{\tau s + 1} T_i(s) + \frac{K_s}{\tau s + 1} T_s(s)$$

$$T_s(s) = \frac{1}{\tau_s s + 1} T(s) + \frac{K_w}{\tau_s s + 1} W(s)$$

donde:

$$\tau = \frac{V\rho C_p}{UA + \dot{\rho} C_p} \quad \tau_c = \frac{C_M}{\lambda U}$$

$$K_F = \frac{\dot{\rho} C_p (\bar{T}_i - \bar{T})}{UA + \dot{\rho} C_p} \quad K_I = \frac{\dot{\rho} C_p}{UA + \dot{\rho} C_p}$$

$$K_s = \frac{\lambda U}{UA + \dot{\rho} C_p} \quad K_w = \frac{\lambda}{\lambda U}$$

De linealizar la ecuación de la válvula, resulta

$$\begin{aligned} W(t) &= W_{\max}(\ln \alpha) \alpha^{(VP-1)} VP(t) \\ &= \bar{W}(\ln \alpha) VP(t) \end{aligned}$$

Su transformada de Laplace es

$$W(s) = \bar{W}(\ln \alpha) VP(s)$$

Al combinar está ecuación con la función de transferencia del actuador, se llega a

$$\begin{aligned} \frac{W(s)}{M(s)} &= \frac{K_v}{\tau_s s + 1} \\ K_v &= \frac{\bar{W}(\ln \alpha)}{100} \end{aligned}$$

Se determina la ganancia del transmisor

$$K_t = \frac{100 - 0}{200 - 100} = 1.0 \% / ^\circ F$$

En la figura 6.2 aparece el diagrama de bloques completo del circuito; todas las funciones de transferencia que se obtuvieron arriba.

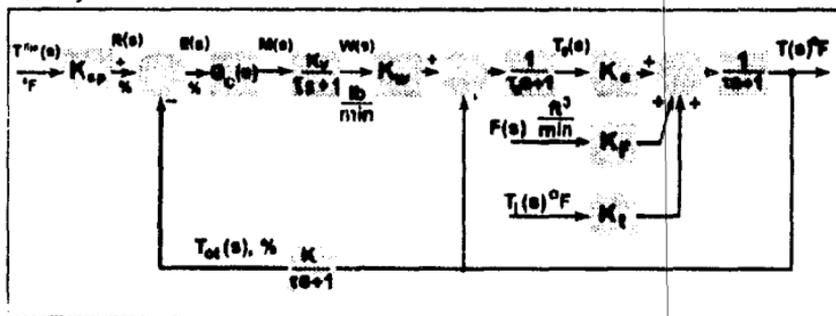


Figure 6.2. Diagrama de bloques del circuito de control de temperatura.

Utilizando reglas para manejo de diagramas de bloques para simplificar el diagrama a la forma que aparece en la figura 6.3. Las funciones de transferencia que aparecen en el diagrama son

$$G_r(s) = \frac{K_r(\tau_c + 1)}{(\tau s + 1)(\tau_c + 1) - K_r}$$

$$G(s) = \frac{K(\tau_c + 1)}{(\tau s + 1)(\tau_c + 1) - K}$$

$$G_3(s) = \frac{K_w K_o}{(\tau s + 1)(\tau_c + 1) - K_o}$$

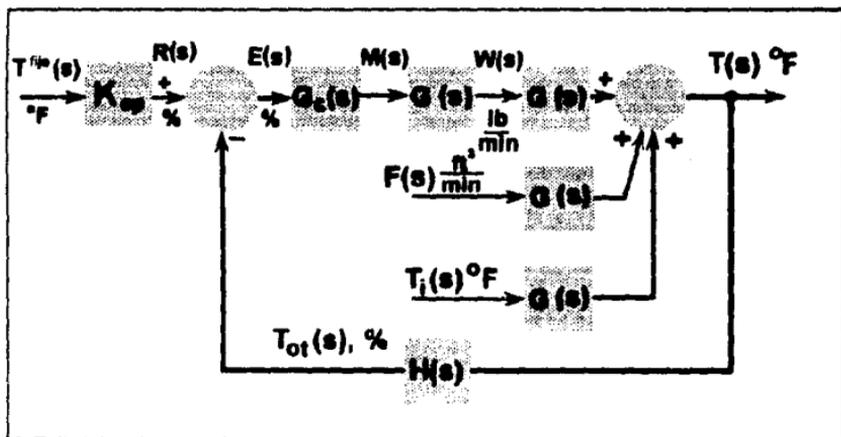


Figura 6.3. Diagrama de bloques simplificado del circuito de control de temperatura.

Las funciones de transferencia de circuito cerrado para cada una de las entradas son

$$\frac{T(s)}{T^{\circ}(s)} = \frac{K_p G_1(s) G_2(s) G_3(s)}{1 + H(s) G_1(s) G_2(s) G_3(s)}$$

$$\frac{T(s)}{T_1(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + H(s) G_1(s) G_2(s) G_3(s)}$$

$$\frac{T(s)}{F(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + H(s) G_1(s) G_2(s) G_3(s)}$$

donde

$$G_1(s) = \frac{K_c}{\tau_1 s + 1}$$

$$H(s) = \frac{K_f}{\tau_f s + 1}$$

La ecuación característica del circuito es

$$1 + \frac{K_c}{\tau_1 s + 1} K_p \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_D s \right) \frac{K_c}{\tau_1 s + 1} \frac{K_c K_o}{(\tau_o + 1)(\tau_o + 1)} - K_o = 0$$

Obteniendo los valores numéricos de:

$$K_p = K_c = 1.0 \% / ^{\circ}F \quad \tau_i = 0.75 \text{ min.} \quad \tau_f = 3.20 \text{ min.}$$

De la descripción del serpentín, se tiene

$$A = (205 \text{ ft}) \pi \left( \frac{4.5}{12} \text{ ft} \right) = 241.5 \text{ ft}^2$$

$$G_M = (205 \text{ ft}) \left( 10.8 \frac{\text{lb}}{\text{ft}} \right) \left( 0.12 \frac{\text{Btu}}{\text{lb} \cdot ^\circ\text{F}} \right) = 296.7 \frac{\text{Btu}}{^\circ\text{F}}$$

$$\tau = \frac{(120)(68)(0.8)}{(2.1)(241.5) + (15)(68)(0.8)} = 4.93 \text{ min.}$$

$$\tau_c = \frac{285.7}{(2.1)(241.5)} = 0.524 \text{ min}$$

$$K_F = \frac{(68)(0.8)(100 - 150)}{(2.1)(241.5) + (15)(68)(0.8)} = -2.06^\circ\text{F} \frac{\text{min}}{\text{ft}^3}$$

$$K_V = \frac{(15)(68)(0.8)}{(2.1)(241.5) + (15)(68)(0.8)} = 0.617^\circ\text{F} / ^\circ\text{F}$$

$$K_G = \frac{(2.1)(241.5)}{(2.1)(241.5) + (15)(68)(0.8)} = 0.363^\circ\text{F} / ^\circ\text{F}$$

$$K_w = \frac{966}{(2.1)(241.5)} = 1.905^\circ\text{F} / (\text{lb} / \text{min})$$

Dimensionando la válvula de control se tiene

$$\dot{\rho} C_p \bar{T}_i + UA (\bar{T}_s - \bar{T}) - \dot{\rho} C_p \bar{T} = 0$$

$$W\lambda - UA (\bar{T}_s - \bar{T}) = 0$$

$$\bar{T}_s = \frac{(15)(680.81)(30 - 100)}{(2.1)(241.5)} + 150 = 230^\circ\text{F}$$

$$\bar{W} = \frac{(2.1)(241.5)(230 - 150)}{966} = 42.2 \frac{\text{lb}}{\text{min}}$$

$$K_v = \frac{(42.2)(\ln 50)}{100} = 1.652 \frac{\text{lb}_m}{\text{min} \%}$$

$$W_{\text{max}} = 2\bar{W} = 84.4 \frac{\text{lb}}{\text{min}}$$

con estos números la ecuación característica es

$$0.387s^3 + 3.272s^2 + 7.859s + (6.043 + 1.205K_c\tau_D)s^2 + (0.617 + 1.205K_c)s + 1.205\frac{K_c}{\tau_I} = 0$$

A partir de la ecuación característica se puede estudiar la estabilidad del circuito y, con base en las funciones de transferencia de circuito cerrado a varias funciones directoras de entrada, para diferentes valores de los parámetros de ajuste del controlador  $K_c$ ,  $\tau_I$  y  $\tau_D$ .

## 6.2. ESTABILIDAD DEL CIRCUITO DE CONTROL.

Un sistema es estable si su salida permanece limitada para una entrada limitada.

Para que el circuito con retroalimentación sea estable, todas las raíces de su ecuación característica deben ser números reales negativos o números complejos con partes reales negativas.

Si ahora se define el plano complejo  $s$  como una gráfica de dos dimensiones, con el eje horizontal para la parte real de las raíces y el vertical para la parte imaginaria, se puede hacer el siguiente enunciado gráfico del criterio de estabilidad.

Para que el circuito de control con retroalimentación sea estable, todas las raíces de su ecuación característica, deben caer en la mitad izquierda del plano  $s$ , que también se conoce como plano izquierdo.

### 6.2.1 Prueba de Routh.

Es un procedimiento para determinar el número de raíces de un polinomio con parte real positiva sin necesidad de encontrar realmente sus raíces. Puesto que para que un sistema sea estable se requiere que ninguna de las raíces de su ecuación característica tenga parte real positiva, la prueba de Routh es útil para determinar la estabilidad. Ayuda también a determinar los límites de un parámetro específico del circuito - generalmente la ganancia del controlador - dentro de los cuales el circuito es estable, y la prueba de Routh es de lo más útil para resolver dicho problema.

La mecánica de la prueba de Routh se puede presentar como sigue: dado un polinomio de grado  $n$ ,

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

donde  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ , son los coeficientes del polinomio; se deben determinar cuantas raíces tienen parte real positiva.

Para realizar la prueba primero se debe preparar el siguiente arreglo:

fila	1	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$	$a_1$	0
fila	2	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$	$a_0$	0
fila	3	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	0	0
fila	4	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	0	0
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
fila	$n$	$d_1$	$d_2$	0	$\dots$	0	0
fila	$n+1$	$e_1$	0	$c$	$\dots$	0	0

en el cual los datos de la fila 3 a la  $n + 1$  se calculan mediante

$$b_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad b_2 = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad \text{etc.}$$

$$c_1 = \frac{b_n a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1} \quad \text{etc.}$$

y así, sucesivamente. El proceso continúa hasta que todos los términos nuevos sean cero. Una vez que se completa el arreglo, se puede determinar el número de raíces con parte real positiva del polinomio, mediante el conteo de la cantidad de *cambios de signo* en la columna extrema izquierda del arreglo; en otras palabras, para que todas las raíces del polinomio estén en el plano  $s$  izquierdo, todos los términos en la columna izquierda del arreglo deben tener el mismo signo.

---

## ***CAPITULO 7.***

# ***SIMULACION DE LOS SISTEMAS CON CONTROL AUTOMATICO.***

Se entiende por simulación la representación de un proceso por un modelo matemático que se resuelve para obtener información acerca del comportamiento del proceso. El modelo matemático es usualmente un programa de computó constituido por un conjunto de ecuaciones que reproducen en forma aproximada el comportamiento de un equipo.

Este programa está organizado por un conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de un proceso determinado y cuya aplicación es particular a un sistema específico.

Los tres pasos a seguir para realizar la simulación dinámica de un proceso son:

- 1.- Describir las ecuaciones de balance.
- 2.- Contabilizar las variables (incógnitas) que aparecen en cada ecuación de manera que se tenga los antecedentes de la cantidad de variables y ecuaciones.
- 3.- Se introducen ecuaciones hasta que se tiene, la misma cantidad de ecuaciones y variables y se toma en cuenta todas las variables de interés.
- 4.- Se programa en un lenguaje de computadora.

El orden en que se escriben las ecuaciones de balance es el siguiente:

- .- Balance total.
- .- Balance por componentes.
- .- Balance de energía.
- .- Balance de energía mecánica. (Si acaso es necesario).

El lenguaje con que se programo fue con "C", que es un lenguaje que va a la vanguardia; el cual como se verá es un lenguaje gráfico y estructurado, con el cual se a programado ambientes gráficos como Windows y bases de datos como Dbase.

Como ejemplo para la simulación por computadora se tomará el siguiente sistema:

### TANQUE DE REACCION CON AGITACION CONTINUA.

En la figura 7.1 se presenta el reactor con chaqueta, si se supone que el reactor y la chaqueta están combinados perfectamente, que los volúmenes y las propiedades físicas son constantes y que las pérdidas de calor se desprecian, las ecuaciones del modelo son:

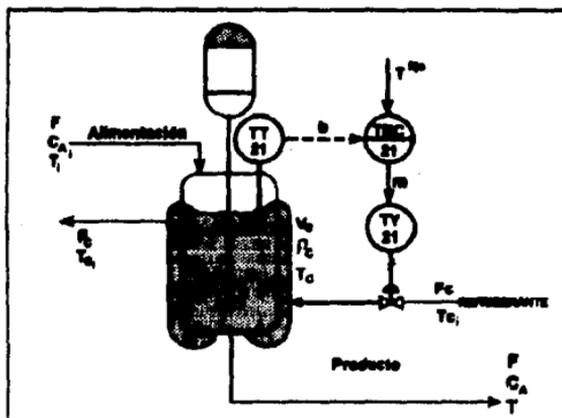


Figura 7.1. Tanque de reacción con agitación continua.

Balances de masa del reactivo A.

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{V} (C_{A1} - C_A) - KC_A^2$$

Balace de energía en el contenido del reactor.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F}{V}(T_i - T) - \frac{\Delta H_R}{\rho C_p} k C_A^2 - \frac{UA}{V\rho C_p}(T - T_c)$$

Balace de energía en la chaqueta.

$$\frac{dT_c}{dt} = \frac{AU}{V_c \rho_c C_{pc}}(T - T_c) - \frac{F_c}{V_c}(T_c - T_{c,i})$$

Coefficiente de razón de reacción.

$$k = k_0 e^{-\frac{E}{R(T - 273.15)}}$$

Retardo en el sensor de temperatura. (TT21).

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{\tau_T} \left( \frac{T - T_M}{\Delta T_T} - b \right)$$

Control proporcional - integral con retroalimentación (TTC21).

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\tau_I} (m - y)$$

$$m = y + K_c \left( \frac{T^{sp} - T_M}{\Delta T_T} - b \right)$$

Válvula de control de porcentaje igual (aire para cerrar).

$$F_c = F_{c,max} a^{-m}$$

donde:

$C_A$  = Concentración del reactivo en el reactor,  $\text{kgmol} / \text{m}^3$ .

$C_{A,i}$  = Concentración del reactivo en la alimentación,  $\text{kgmol} / \text{m}^3$ .

$T$  = Temperatura en el reactor,  $^{\circ}\text{C}$ .

$T_i$  = Temperatura de alimentación,  $^{\circ}\text{C}$ .

$T_c$  = Temperatura de la chaqueta,  $^{\circ}\text{C}$ .

$T_{c,i}$  = Temperatura de entrada del refrigerante,  $^{\circ}\text{C}$ .

- $b$  = Señal del transmisor.  
 $F$  = Flujo de alimentación,  $m^3 / s$ .  
 $V$  = Volumen del reactor,  $m^3$ .  
 $k$  = Coeficiente de reacción,  $m^3 / kgmol \cdot s$ .  
 $\Delta H_r$  = Calor de reacción,  $J / kgmol$ .  
 $\rho$  = Densidad del contenido del reactor,  $kgmol / m^3$ .  
 $C_p$  = Calor específico de los reactivos,  $J / kgmol \cdot ^\circ C$ .  
 $U$  = Coeficiente de transferencia total de calor,  $J/s \cdot m^2 \cdot ^\circ C$ .  
 $A$  = Área de transferencia de calor,  $m^2$ .  
 $V_c$  = Volumen de la chaqueta,  $m^3$ .  
 $\rho_r$  = Densidad del refrigerante,  $kg / m^3$ .  
 $C_{p,r}$  = Calor específico del refrigerante,  $J / kgmol \cdot ^\circ C$ .  
 $\Delta T_r$  = Rango calibrado del transmisor,  $^\circ C$ .  
 $F_c$  = Flujo del refrigerante,  $m^3 / s$ .  
 $T_{u,i}$  = Límite inferior del rango del transmisor,  $^\circ C$ .  
 $\tau_T$  = Constante de tiempo del sensor de temperatura,  $^\circ C$ .  
 $\tau_I$  = Tiempo de integración del controlador,  $s$ .  
 $y$  = Variable de retroalimentación de reajuste del controlador.  
 $m$  = Señal de salida del controlador.  
 $K_c$  = Ganancia del controlador; adimensional.  
 $k_a$  = Parámetro de la frecuencia de Arrhenius,  $m^3 / s \cdot kgmol$ .  
 $E$  = Energía de activación de la reacción,  $J / kgmol$ .  
 $R$  = Constante de los gases ideales,  $8314.39 J / kgmol \cdot ^\circ C$ .

Para hacer la simulación del reactor se deben de determinar los parámetros del modelo y las condiciones iniciales. En la práctica, los parámetros del modelo se obtienen a partir de las especificaciones del equipo y de los diagramas de tubería e instrumentación. A continuación se dan dichos parámetros del reactor:

$$V = 7.08 \text{ m}^3, \quad \rho = 19.2 \text{ kgmol} / \text{m}^3, \quad C_p = 1.815 \text{ E}+5. \text{ J} / \text{kgmol} \cdot ^\circ C.$$

$$\begin{aligned}
 A &= 5.40 \text{ m}^2 & \rho_C &= 1000 \text{ kgmol} / \text{m}^3 & k_0 &= 0.0744 \text{ m}^3 / \text{s} - \text{kgmol} \\
 V_0 &= 1.82 \text{ m}^3 & F_{C_{\max}} &= 0.020 \text{ m}^3 / \text{s} & \Delta H_T &= -9.86 \text{ E}+7. \text{ J} / \text{kgmol} \\
 \alpha &= 50. & C_{p_C} &= 4184 \text{ J} / \text{kg} - ^\circ\text{C} & E &= 1.282 \text{ E}+7. \text{ J} / \text{kgmol} \\
 T_M &= 80^\circ\text{C} & \tau_T &= 20 \text{ s} & \Delta T_T &= 20^\circ\text{C} & U &= 3550 \text{ J} / \text{s} - \text{m}^2 - ^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

Si el propósito de la simulación es ajustar el controlador a las condiciones de operación de diseño, las condiciones iniciales se toman en el punto de operación de diseño. Un requisito importante es que con las condiciones iniciales se deben de satisfacer las ecuaciones del modelo en estado estacionario; esto es, todas las derivadas que se calculan con base en las ecuaciones del modelo deben ser exactamente cero en los valores iniciales de las variables de estado. En este ejemplo las variable de entrada y las condiciones de diseño son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 F &= 7.5 \text{ E-3 m}^3 / \text{s} & T^{11b} &= 88.0^\circ\text{C} \\
 C_{A1} &= 2.88 \text{ kgmol} / \text{m}^3 & T_1 &= 66.0^\circ\text{C} & T_{01} &= 27.0^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

Ahora se puede utilizar las ecuaciones del modelo para calcular los demás valores iniciales y las variables auxiliares. El orden de los cálculos es el que se muestra en el cuadro siguiente.

Cálculos
$b = \frac{T^{11b} - T_M}{\Delta T_T} = 0.40$
$T = b \Delta T_T + T_M = 88.0^\circ\text{C}$
$k = 1.451 \text{ E-3 m}^3 / \text{kgmol} - \text{s}$
$C_A = 1.133 \text{ kgmol} / \text{m}^3$
$T_C = 50.5^\circ\text{C}$
$F_C = 7.392 \text{ E-3 m}^3 / \text{s}$
$m = 0.2544 \text{ adimensional}$
$y = 0.2544 \text{ adimensional}$

Una vez que se tienen las ecuaciones del modelo, el valor de los parámetros y las condiciones iniciales, se programara en la computadora.

**Resolución por el método numérico de Runge Kutta de cuarto orden para ecuaciones diferenciales.**

Se empleo el método de Runge Kutta de cuarto orden para resolver las ecuaciones diferenciales que se presentan en el modelo matemático del reactor; la ventaja del Runge-Kutta de cuarto orden para resolver ecuaciones diferenciales con respecto a los métodos de Runge-Kutta de menor orden y Euler y Euler-Gauss, consiste en que el primero cuenta con un orden de error menor. Con respecto a la serie de Taylor, este método tiene la ventaja de que no requiere evaluar ninguna derivada, sino únicamente a la función  $f(x,y)$ .

**Método numérico de Runge Kutta de cuarto orden.**

Las expresiones del método son:

$$y_{j+1} = y_j + h\phi(x_j, y_j) \\ i = 0, 1, 2, \dots$$

donde

$$\phi(x_j, y_j) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

siendo

$$k_1 = f(x_j, y_j) \\ k_2 = f(x_j + h/2, y_j + 1/2 hk_1) \\ k_3 = f(x_j + h/2, y_j + 1/2 hk_2) \\ k_4 = f(x_j + h, y_j + hk_3)$$

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx}$$

En el intervalo de  $t_0 < x < t_{max}$ ,  $0 < x < 1140$  s. para las gráficas y  $0 < x < 1200$  s. para la tabla donde  $x$  es el tiempo, con un incremento  $h = 30$  s., para el ejemplo del reactor.

#### Duración de las corridas de simulación.

En la mayoría de las simulaciones el tiempo inicial  $t_0$  se puede fijar en cero. Una vez que se fija el valor de  $t_0$ , la duración de cada corrida de simulación se determina con  $t_{max}$ ; dicha duración debe ser lo suficientemente larga para que se complete la respuesta del sistema. Estrictamente hablando se determina, con el eigenvalor dominante, es decir, el recíproco de la constante de tiempo más larga del proceso. Desgradadamente, el eigenvalor es difícil de determinar en modelos de proceso complejos no lineales como los que se desarrollaron anteriormente. Por otro lado, algunas veces es posible estimar la constante de tiempo más larga, ya sea con base en la familiaridad con procesos similares o en la intuición ingenieril; por ejemplo para el reactor que se considera aquí, la constante de tiempo más larga es probablemente del orden de magnitud del tiempo de residencia del reactor,  $V/F$ , o alrededor de 1000 segundos.

#### Algoritmo de Resolución del Reactor por el Método de Runge-Kutta.

El algoritmo es el siguiente:

- 1.- Se alimentan los datos de propiedades termodinámicas que son constantes para cada ecuación presentada en el modelo matemático.
- 2.- Con las variables en estado permanente de cada ecuación se comienza la evaluación.
- 3.- La ecuación diferencial del contenido del reactor se resuelve primero por el método numérico de Runge Kutta de cuarto orden y se obtiene una temperatura  $T$ , (Se comienza con una temperatura de  $66$  °C a la entrada, la temperatura a

controlar es la que se presenta dentro del reactor)

- 4.- Teniendo una secuencia de resolución por orden como sigue; la temperatura calculada con la ecuación del balance del contenido del reactor influye en la ecuación de arrhenius para determinar el coeficiente de reacción que sirve para calcular la composición de la sustancia "A" que esta en el reactor apoyandose en la ecuación de balance de masa de la sustancia "A", la concentración  $C_A$  pasa directamente a la ecuación del balance de energía del contenido del reactor, está misma temperatura sirve para resolver la ecuación diferencial del sensor transmisor por el método Runge Kutta (R-K), obteniendo una respuesta "b" que es un parámetro de retardo del sensor transmisor, que influye en el cálculo de la ecuación del controlador (se linealizó) en la cual se obtiene un valor "m" de respuesta, la ecuación de la válvula de control (lineal) utiliza el valor "m" para determinar el flujo a través de la válvula  $F_c$ , y por último se resuelve la ecuación de balance de la chaqueta por R-K la cual da el valor de la temperatura dentro de la chaqueta  $T_c$ , este valor sirve para calcular "T" en la ecuación de balance del contenido del reactor. Este procedimiento se representa en la figura 7.2.
- 5.- Cada ecuación da el valor nuevo de su variable que la toma la precedente ecuación.
- 6.- Como se puede apreciar en la figura 7.1 primero se toma la temperatura T del reactor por el sensor, esta llega al transmisor y él manda una señal b al controlador la recibe y como es una variable independiente para resolver la señal de salida del controlador m, se resuelve su ecuación y está se va a la ecuación de la válvula de control, que nos va a proporcionar el flujo de refrigerante a entrar, el cuál va directamente a la ecuación de temperatura del reactor generando otro valor de T.
- 7.- Este procedimiento se repite tomando cada ecuación los valores generados y así interactúan para controlar el sistema; como se ve el algoritmo lleva la misma secuencia que el circuito de control.

# DIAGRAMA DE FLUJO DE LA SIMULACION DEL REACTOR

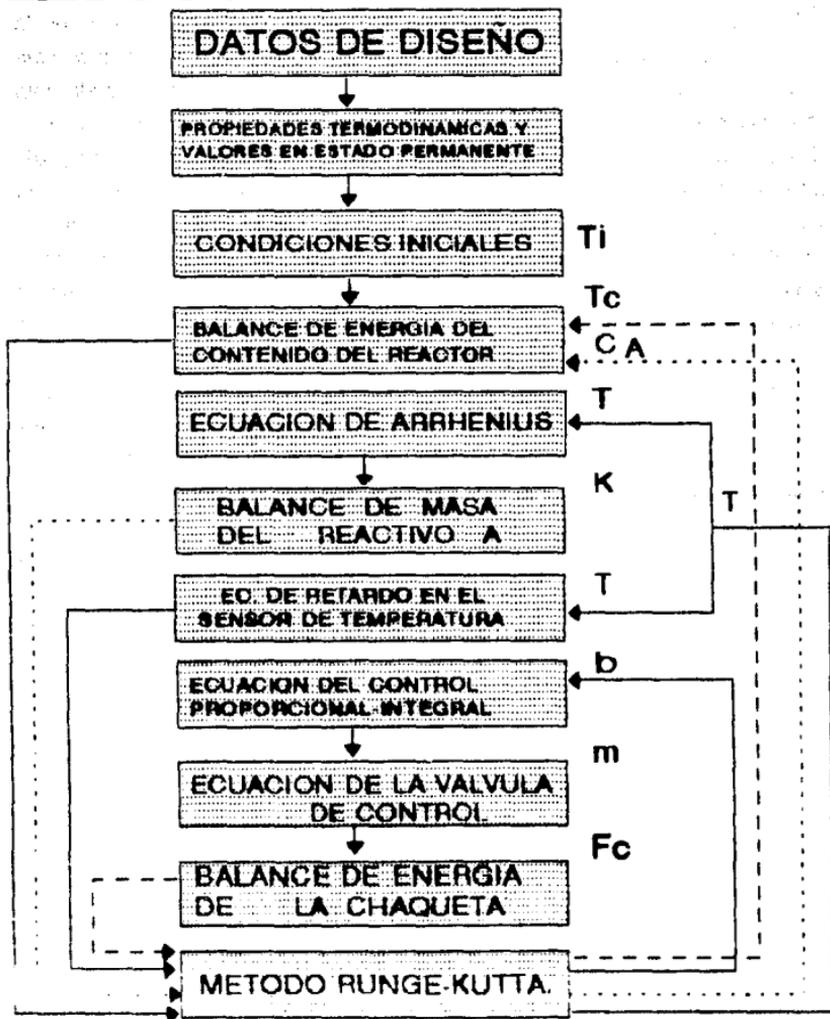


Figura 7.2

## Manual de usuario.

En el disco de la tesis se encuentran; un archivo llamado reactor.bat, el cual es un ejemplo de la simulación del sistema de reacción presentado en este capítulo, para su ejecución se recomienda hacerlo, en una computadora con; microprocesador 386 o 486, coprocesador matemático y monitor VGA, SVGA o CGA a color, y en Windows desde el administrador de archivos (aunque se puede ejecutar desde el prom dando el nombre de reactor), ya que el ambiente gráfico de dicho paquete ayuda a una buena corrida del programa, este programa presenta; 15 pantallas gráficas en total, 5 pantallas de presentación que se ejecutan solas, no es conveniente preionar alguna tecla, una de diálogo y otra de datos, una tabla que contiene las variables de estado y la de control comparadas contra el tiempo y 3 gráficas de temperatura del reactor, de la señal de salida del controlador y de composición de A contra el tiempo, para pasar de gráfica debe preionar una tecla, aparecera también otra simulación con diferente energía de activación, la que contendra una pantalla de análisis y dos pantallas con graficas de temperatura y composición contra tiempo; hay otro archivo con nombre de testetu que pide los datos como se presenta en la pantalla 7 del archivo reactor.bat, que despliega una tabla parecida a la de reactor.bat, y por último otro archivo llamado gráfica, que pide los mismos datos pero genera una gráfica como las presentadas en reactor.bat.

## Presentación y Análisis de Resultados.

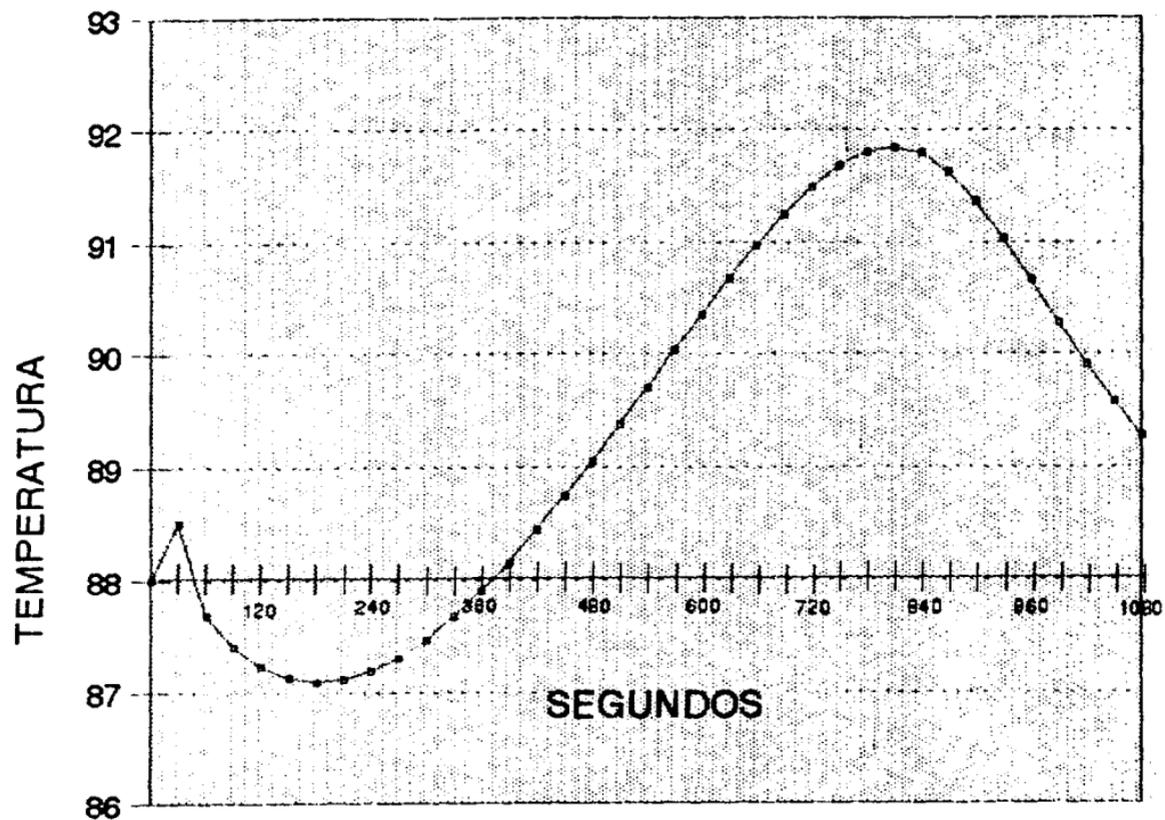
Se presenta a continuación los resultados en forma de tabla de la corrida de reactor.bat, de tiempo, temperatura, señal de salida del controlador, flujo de la válvula de control y composición de la sustancia A, Las gráficas se podrán ver en el programa y en las siguientes páginas con su respectivo set point, representado con una línea horizontal y su valor correspondiente, donde se verá gráficamente el comportamiento de la respuesta del circuito de control, con cada variable que interviene en el proceso.

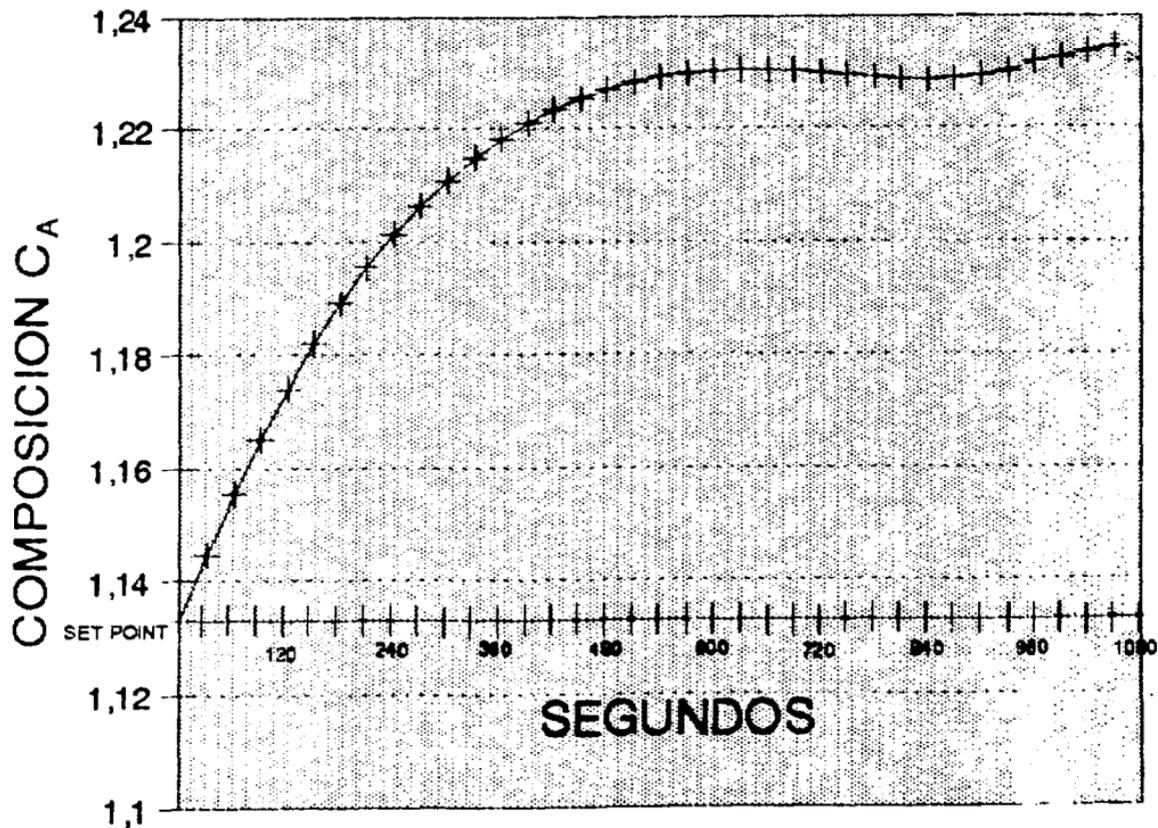
Tiempo s.	Temperatura xC.	M.	Fc.m <sup>3</sup> /s.	CA, l/mol/m <sup>3</sup> .
0	88.00	0.2544	7.3920e-03	1.1330
30	88.05	1.0000	0.0000e+00	1.1447
60	87.68	0.9910	4.0000e-04	1.1554
90	87.41	1.0594	4.1430e-04	1.1652
120	87.23	1.0746	3.1704e-04	1.1740
150	87.13	1.1057	2.9880e-04	1.1820
180	87.09	1.1158	2.6493e-04	1.1892
210	87.11	1.1246	2.5027e-04	1.1957
240	87.19	1.1322	2.4567e-04	1.2014
270	87.31	1.1136	2.4802e-04	1.2065
300	87.47	1.0965	2.5647e-04	1.2109
330	87.67	1.0724	2.7422e-04	1.2148
360	87.90	1.0409	3.0134e-04	1.2182
390	88.16	1.0025	3.4091e-04	1.2210
420	88.44	0.9575	3.9609e-04	1.2234
450	88.74	0.9063	4.7236e-04	1.2254
480	89.05	0.8492	5.7719e-04	1.2270
510	89.37	0.7867	7.2164e-04	1.2285
540	89.70	0.7194	9.2142e-04	1.2292
570	90.03	0.6479	1.1990e-03	1.2298
600	90.35	0.5730	1.5859e-03	1.2302

Presione una tecla para continuar.

Tiempo s.	Temperatura xC.	M.	Fc.m <sup>3</sup> /s.	CA, l/mol/m <sup>3</sup> .
630	90.67	0.4958	2.1255e-03	1.2304
660	90.97	0.4177	2.8748e-03	1.2304
690	91.25	0.3403	3.9030e-03	1.2302
720	91.49	0.2662	5.2822e-03	1.2299
750	91.68	0.1984	7.0596e-03	1.2295
780	91.80	0.1410	9.2038e-03	1.2291
810	91.84	0.0987	1.1523e-02	1.2287
840	91.79	0.0768	1.3594e-02	1.2284
870	91.63	0.0778	1.4809e-02	1.2282
900	91.37	0.1098	1.4639e-02	1.2282
930	91.04	0.1633	1.3017e-02	1.2284
960	90.66	0.2408	1.0476e-02	1.2288
990	90.28	0.3284	7.7968e-03	1.2293
1020	89.91	0.4202	5.5344e-03	1.2300
1050	89.57	0.5093	3.8655e-03	1.2308
1080	89.28	0.5910	2.7270e-03	1.2317
1110	89.04	0.6617	1.9814e-03	1.2326
1140	88.86	0.7195	1.5024e-03	1.2336
1170	88.73	0.7671	1.1987e-03	1.2345
1200	88.65	0.7921	1.0107e-03	1.2357
1230	88.63	0.8067	9.0210e-04	1.2361
1260	88.64	0.8071	8.5210e-04	1.2368
1290	88.70	0.7940	8.5074e-04	1.2373

Presione una tecla para continuar.





En la tabla de la corrida del programa se tabulan valores cada 30 segundos, dándose el caso que a los primeros 480 segundos baja la temperatura del contenido del reactor y de manera similar baja el flujo de alimentación del refrigerante a la chaqueta de enfriamiento con un leve incremento en la composición de la sustancia A, después de 510 a 980 segundos se incrementa la temperatura y lo mismo sucede con el flujo de alimentación del refrigerante ya presentándose un descenso de la composición de A acercándose a su condición de composición de diseño y por último de 990 a 1290 segundos la temperatura baja acercándose mucho a su set point o punto de control con su respectivo decremento de flujo de refrigerante. El punto mínimo de temperatura que alcanza es de  $88.39^{\circ}\text{C}$  y su punto máximo es de  $91.78^{\circ}\text{C}$  que digamos está entre  $\pm 3.5^{\circ}\text{C}$  que es un error aceptable. Como se logra notar en la tabla y en la gráfica, el controlador proporcional integral con retroalimentación funciona correctamente ya que a mayor temperatura manda una señal de apertura a la válvula para que deje entrar más flujo de refrigerante, también a menor temperatura manda la señal de cierre a la válvula, además que logra controlar la temperatura en un tiempo aproximado de 1290 segundos o 21.5 minutos casi llegando al set point con lo que se cumple con el teorema de valor final, base de los circuitos de control automático, también se ve que la composición de la sustancia A se controla con una composición de  $1.235\text{ Kg/mol} / \text{m}^3$  y no tiende a cambiar lo que representa un incremento de  $0.01\text{ Kg/mol} / \text{m}^3$  referente a la condición de diseño de  $1.330\text{ kg/m}^3$ , pero que es aceptable en el proceso, además que se logra su permanencia en dicho valor que se logra ver más claramente en su gráfica del programa, que también cumple con el teorema de valor final.

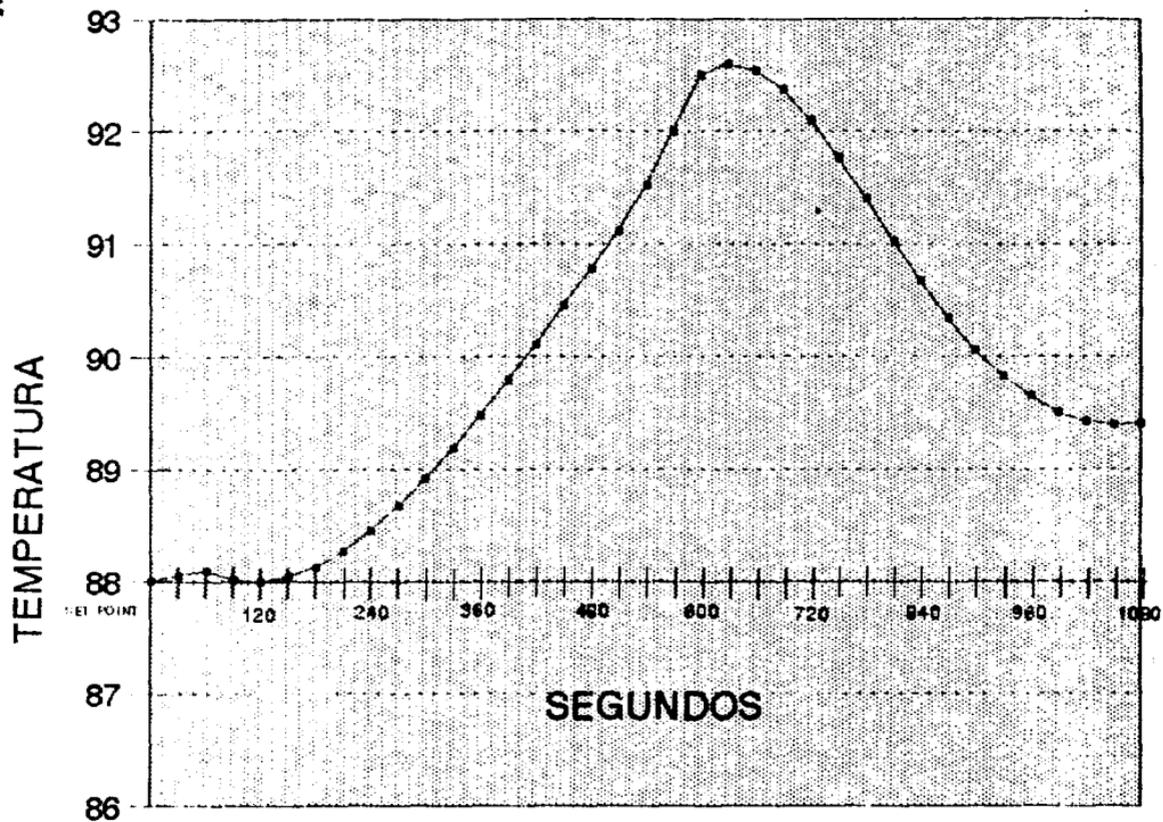
A continuación se presenta una simulación más la cual cambio la energía de activación de  $1.282 \times 10^7\text{ J/kgmol}$  a  $1.182 \times 10^7\text{ J/kgmol}$ .

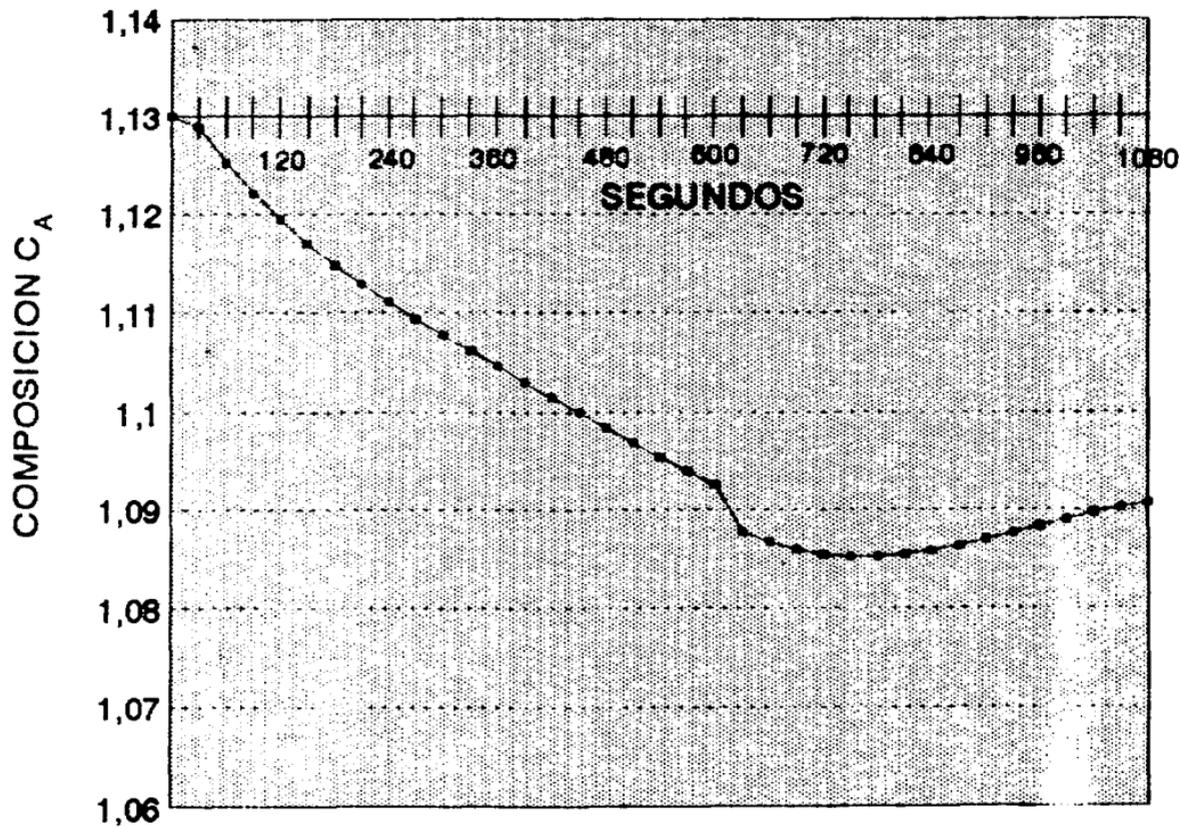
Tiempo s.	Temperatura xC.	M.	Fc,m3/s.	CA, kmol/m3.
0	88.00	0.2544	7.3920e-02	1.1330
30	88.05	1.0000	2.0000e-02	1.1289
60	88.10	0.9910	4.0000e-04	1.1252
90	88.01	0.9881	4.1430e-04	1.1221
120	87.99	1.0040	4.1903e-04	1.1194
150	88.04	0.9990	3.9371e-04	1.1170
180	88.13	0.9936	4.0160e-04	1.1148
210	88.27	0.9772	4.1010e-04	1.1129
240	88.45	0.9554	4.3729e-04	1.1111
270	88.67	0.9254	4.7627e-04	1.1094
300	88.91	0.8889	5.3559e-04	1.1077
330	89.19	0.8453	6.1785e-04	1.1061
360	89.48	0.7954	7.3262e-04	1.1046
390	89.79	0.7393	8.9056e-04	1.1030
420	90.11	0.6776	1.1090e-03	1.1015
450	90.45	0.6109	1.4117e-03	1.1000
480	90.78	0.5398	1.8331e-03	1.0984
510	91.11	0.4653	2.4209e-03	1.0969
540	91.43	0.3887	3.2399e-03	1.0954
570	91.72	0.3116	4.3722e-03	1.0939
600	91.99	0.2362	5.9114e-03	1.0925

Presione una tecla para continuar.

Tiempo s.	Temperatura xC.	M.	Fc,m3/s.	CA, kmol/m3.
630	92.20	0.1656	7.9379e-03	1.0911
660	92.35	0.1034	1.0465e-02	1.0898
690	92.42	0.0545	1.3344e-02	1.0886
720	92.39	0.0238	1.6161e-02	1.0876
750	92.26	0.0162	1.8219e-02	1.0868
780	92.02	0.0342	1.8771e-02	1.0863
810	91.70	0.0769	1.7493e-02	1.0860
840	91.33	0.1393	1.4803e-02	1.0859
870	90.95	0.2140	1.1598e-02	1.0861
900	90.58	0.2937	8.6575e-03	1.0864
930	90.25	0.3720	6.3400e-03	1.0869
960	89.95	0.4445	4.6661e-03	1.0875
990	89.71	0.5077	3.5146e-03	1.0882
1020	89.52	0.5596	2.7443e-03	1.0889
1050	89.38	0.5986	2.2406e-03	1.0896
1080	89.30	0.6243	1.9228e-03	1.0902
1110	89.26	0.6364	1.7390e-03	1.0908
1140	89.28	0.6351	1.6587e-03	1.0913
1170	89.33	0.6209	1.6672e-03	1.0917
1200	89.42	0.5946	1.7623e-03	1.0920
1230	89.54	0.5571	1.9534e-03	1.0922
1260	89.68	0.5097	2.2618e-03	1.0923
1290	89.85	0.4538	2.7229e-03	1.0923

Presione una tecla para continuar.





Los datos y gráficas anteriores corresponden a un ejemplo del mismo reactor de la figura 7.1 pero ahora con una energía de activación de  $1.182 \times 10^7$  J/kmol, que como la corrida anterior a mayor temperatura se incrementa el flujo del refrigerante, pero la diferencia de energía de activación hace que se presente una variación de temperatura que no es más baja que su set point de  $86^\circ\text{C}$ , lo contrario va ha suceder con la composición de la sustancia "A", su composición no sube más allá de su composición de diseño de  $1.1330$  kgmol/m<sup>3</sup>, la temperatura a los 1200 segundos 21.5 minutos es  $80.27^\circ\text{C}$ , obteniéndose un error de  $2.27^\circ\text{C}$  del 2.5%, pero lográndose estabilizar en  $90^\circ\text{C}$  como se observa en la gráfica, la composición de la sustancia "A", se logra estabilizar a los 1200 segundos 21.5 minutos en  $1.0815$  kgmol/m<sup>3</sup>, representando una variación de  $-0.0415$  kgmol/m<sup>3</sup> o del 3.6%, pero que tiende a llegar a su composición de diseño. Si se compara las dos corridas se nota que en la primera se logra controlar en su set point y en la segunda con una variación de aproximadamente  $+2^\circ\text{C}$ . El error de la composición de "A" es dos veces mayor en la primera que en la segunda, siendo la variable más importante la composición. Este ejemplo nos muestra que el cálculo de las propiedades termodinámicas y cinéticas es importante ya que una variación lleva a resultados distintos.

### Programa de Simulación.

El programa se realizó en lenguaje "C", que como se puede notar es un lenguaje gráfico, la estructura de su programación esta hecha por bloques, la programación matemática comparada con el Fortran 77, a juicio del autor es más sencilla en "C". Por lo que considero al lenguaje "C" como la programación a seguir a futuro, con una fuerte tendencia a imponerse a los demás lenguajes de programación. Se presenta a continuación el listado del programa de simulación del reactor, el cual tiene una estructura muy similar a la del circuito de control de la figura 7.1.

```
/*Simulación de un reactor con control automático
por el método de Runge Kutta de cuarto orden.*/
```

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>
#include <graphics.h>
#include <process.h>

#define N 43

float Y(float T[],float b,float C_A[],float k,float Fc[],float Tc[],int z);
float RK(float T[],float b,float C_A[],float k,float Fc[],float Tc[],int z);
float R_K(float T[],float b,float C_A[],float Tc[],float Teta,int x);

int q,h=30,i;

/*Valores termodinamicos de las propiedades de las ecuaciones*/
float V=7.08,rho=19.2,Cp=1.815e+3,A=3.4,rho_c=1000,Tc1=27,
ko=0.0744,tau_T=20,alfa=50,DM_R=-9.86e+7,U=3550,Vc=1.82,
E=1.282e+7,Fc_max=0.02,T_M=80,DT_T=20,F=7.0e-3,C_A1=2.88,
Ti=66,R=8314.47,Kc=2,tau_l=600,T_fijo=88.0,Cpc=4184,s=.2544;

void main() (
{
int dispgraf=DETECT,modograf,coderror;
int midy,maxx,i,y;
char msg[80];

initgraph(&dispgraf,&modograf,"");

coderror=graphresult();
if (coderror !=grOk) {
printf ("error en la funci"n gr fica: %s\n",
grapherrormsg(coderror));
printf ("pulse una tecla para parar");
getch();
exit(1);
}
}
setbkcolor (1);

/* Funciones de T*/
float Teta,k,Fc[N],m[N],b,T[N],C_A[N],Tc[N];

/*Valores en estado estacionario t=0 T*/
k=1.451e-3;
C_A[q]=1.133;
Tc[q]=50.5;
b=0.40;
T[q]=88.0;
Fc[q]=7.392e-3;

printf("\n");
printf(" Tiempo s. Temperatura xC. \t M. \t\t Fc,m3/s. \tCA, fmo/m3.\n");
printf("\n");
printf (" %4d\t\t%5.2f\t\t%5.4f",i,T[q],s);
printf (" \t\t%1.4e\t %5.4f\n",Fc[q],C_A[q]);
```

```

for(i=h1;k=h*N;i+=h) {
    /*Ecuacion diferencial del contenido del reactor*/
    Teta=RK(T,b,C_A, k,Fc,Tc,1);
    Tlq+1=R_K(T,b,C_A,Tc,Teta,1);
    /*Ec. del sensor-transmisor*/
    Teta=RK(T, b, C_A, k,Fc,Tc,2);
    b=R_K(T,b,C_A,Tc,Teta,2);
    /*Ec. de la respuesta del controlador*/
    m[q+1]=(1/tau_1+1)*((T_fijo-T_M)/DT_T-b)*kc+1;
    /*Ec. de la valvula de control*/
    Fc[q+1]=Fc_max*pow(alfa,-m[q]);
    /*Ec. del coeficiente de reaccion*/
    k=ko*exp(-(E/(R*(Tlq+1)+273.16))));
    /*Balance del reactivo A*/
    Teta=RK(T, b, C_A, k,Fc,Tc,3);
    C_A[q+1]=R_K(T,b,C_A,Tc,Teta,3);
    /*Balance de la chaqueta*/
    Teta=RK(T, b, C_A, k, Fc, Tc,4);
    Tc[q+1]=R_K(T,b,C_A,Tc,Teta,4);
    printf (" %4d\t\t%5.2f\t\t%5.4f", i, Tlq+1, m[q+1]);
    printf ("\t\t%1.4e\t\t %5.4f\n", Fc[q+1], C_A[q+1]);
    if (q==19) {
        printf ("\n");
        printf ("\t\t\tPresione una tecla para continuar.\n");
        getch();
    }
    printf("\n");
    printf(" Tiempo s. Temperatura xC. \t M. \t\t Fc,m3/s.\tCA, kmol/m3.\n");
    printf("\n");
    }
    if (q==42) {
        printf ("\n\n");
        printf ("\t\t\tPresione una tecla para continuar.\n");
        getch();
    }
    }
    q++;
}
closegraph();
}
float RK(float T[],float b,float C_A[],float k,float Fc[],float Tc[],int n)
{
    float w,Te,K1,k2,k3,K4;
    switch (n) {
        case 1: w=T[q];
            break;
        case 2: w=b;
            break;
        case 3: w=C_A[q];
            break;
        case 4: w=Tc[q];
            break;
    }
    K1=Y(T, b, C_A, k, Fc, Tc,n);
    w+=0.5*h*K1;
    K2=Y(T, b, C_A, k, Fc, Tc,n);
    w+=0.5*h*K2;
    K3=Y(T, b, C_A, k, Fc, Tc,n);
    w+=0.5*h*K3;
    K4=Y(T, b, C_A, k, Fc, Tc,n);
    Te=(1+2*w2+2*w3+4)/6;
    return (Te);
}
float Y(float T[],float b,float C_A[],float k,float Fc[],float Tc[],int n)
{
    float D;

```

```

switch (z) {
case 1:
DT=F*(T1-T[q])/V-DH_R*k*pow(C_A[q],2)/(rho*Cp)-U*A*(T[q]-Tc[q])/(V*rho*Cp);
break;
case 2: DT=1/tau_T*((T[q]-T_M)/DT_T -b);
break;
case 3: DT=F*(C_A1-C_A[q])/V-k*pow(C_A[q],2);
break;
case 4: DT=U*A*(T[q]-Tc[q])/(Vc*rho_c*Cpc)-Fc[q]*(Tc[q]-Tci)/Vci;
break;
}
return (DT);
}
float R_K(float T[],float b,float C_A[],float Tc[],float Teta,int x) {
float Kut;
switch (x) {
case 1: Kut=T[q]+Teta*h;
break;
case 2: Kut=b+Teta*h;
break;
case 3: Kut=C_A[q]+Teta*h;
break;
case 4: Kut=Tc[q]+Teta*h;
break;
}
return (Kut);
}

```

---

# ***CONCLUSIONES.***

La simulación por computadora se ha convertido en una herramienta importante, debido al gran avance que se ha dado en el hardware y en el software (lenguajes de programación), esto lleva a que casi siempre sea un preudio en el diseño de equipo y de plantas ya sea piloto o industriales.

En esta ocasión se simuló un reactor con circuito de control, lo cual el algoritmo que se siguió para resolver el modelo matemático es el correcto, así como la aplicación del método numérico Runge - Kutta de cuarto orden que es de gran

ayuda para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales, la programación se hizo en lenguaje C, que tiene grandes ventajas respecto a la mayoría de los otros lenguajes de programación y que dio una estructura al programa en bloques semejante a la forma real de funcionamiento del circuito de control.

El programa también funciona para un intercambiador de calor dando valores de cero a los valores de la cinética de reacción y la composición de la sustancia A.

Después de estudiar todo el análisis matemático de resolución de problemas de circuitos de control automático por transformadas de Laplace y su ecuación característica así como sus funciones de transferencia y estabilidad, y estudiar los métodos numéricos y el lenguaje de programación, y haciendo una comparación, se da cuenta que la ayuda de una buena computadora, un vanguardista paquete de programación como lo es el Borland C++, y un algoritmo correcto de cálculo así como la ayuda de los métodos numéricos, se facilita mucho las cosas para una simulación, ya que se logra representar la respuesta del sistema casi en forma real, o sea respuesta con tiempo real, como si fuera una computadora analógica matemáticamente se diría puntual.

En esta tesis se combinaron tres campos de la Ingeniería que avanzan a pasos agigantados, que son la Ingeniería Química, los sistemas autorregulables, pues la tendencia de la industria química es a automatizarse, y la programación por computadora que en el caso de la simulación, tiende a llegar a sustituir una gran parte de los proyectos con plantas piloto.

## BIBLIOGRAFIA.

José Giral, Francisco Barrés, Alejandro Ramírez. Ingeniería de Procesos, Manual para el Diseño de Procesos Químicos Aprovechados para Países en Desarrollo. Ed UNAM, México 1977.

Francisco J. Rodríguez Ramírez. Apuntes de Sistemas Dinámicos. Ed UNAM. Facultad de Ingeniería. México 1986.

Carlos A. Smith, Armando B. Corripio. Principles and practice of automatic process control. Ed. John Wiley & Sons Inc, United States of America 1985.

Katsuhiko Ogata. Ingeniería de Control Moderna, Ed. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. México 1980.

José No Sánchez de León, José Ma. Angulo Uastegui. Control de Procesos Industriales por Computador. Ed. Paraninfo. Madrid, España 1987.

Dennis G. Zill. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones, Primer Curso. Ed. Wadsworth Internacional / Iberoamérica. EE.UU. 1982.

Earl W. Swokowski, Cálculo con Geometría analítica. Ed. Wadsworth Internacional / Iberoamérica. EE.UU. 1984.

Rafael Iriarte V. Balderrama, Hugo E. Borrás García, Rosaynela Barón Cuevas. Apuntes de Métodos Numéricos. Ed. UNAM. Facultad de Ingeniería. México 1984.

Rafael Iriarte V. Balderrama, Hugo E. Borrás García. Ejercicios de Métodos Numéricos. Ed UNAM. Facultad de Ingeniería. México 1984.

Chris H. Pappas, William H. Murray, III. Borland C++ Handbook, 3ra Edición. Ed. McGraw Hill, USA. 1993.

Herbert Schildt. Programación en Turbo C / C++, Manual de referencia, Segunda edición. Ed. Borland Osborne / McGraw Hill, España 1992.

Francisco Javier Ceballos. Curso de programación con C. Ed. Macrobit, México 1990.

Edward J. Raemissen. Alarm And Shutdown Devices Protect Process Equipment. Chemical Engineering, 12 de mayo de 1975.

John A. Masek. How to Design Control Panels. Chemical Engineering. 3 de abril de 1978.

James A. Carey Donn Hammitt. How to select liquid flow control valves. Chemical Engineering, 13 de abril de 1978.

Robert Kam. Instrument arrangements for ease of maintenance and convenient operation. Chemical Engineering. 10 de Abril de 1978.

Arkadi Pikulik. Válvulas de operación manual. Chemical Engineering. 13 de abril de 1978.

Edward Lawson, y W. J. Denkowski. Actuadores Mecánicos para Válvulas. Chemical Engineering. 11 de octubre de 1971.

KEY System Corp. New Genius Scanner C.105, User's Guide. Ed. KEY System Corp. Taiwan 1992.

System Inc. N-Lead. IPhoto Deluxe User Guide. Ed. System Inc. N-Lead. Taiwan 1992.