



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

13

ZED

COMENTARIOS Y EJEMPLOS DEL CAPITULO DE  
CONCRETO PRESFORZADO DE LAS NORMAS  
TECNICAS COMPLEMENTARIAS DEL  
REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES  
DEL DISTRITO FEDERAL

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

**INGENIERIO CIVIL**

P R E S E N T A :

**ALEJANDRO ANGELES RAMIREZ**

Director de Tesis: Ing. Eduardo A. Guzmán Escudero



México, D. F.

1995

FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIRECCION  
60-1-119/94

Señor  
**ALEJANDRO ANGELES RAMIREZ**  
Presente.

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **ING. EDUARDO A. GUZMAN ESCUDERO**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

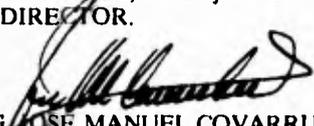
**"COMENTARIOS Y EJEMPLOS DEL CAPITULO DE CONCRETO  
PRESFORZADO DE LAS NORMAS TECNICAS COMPLEMENTARIAS DEL  
REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES DEL DISTRITO FEDERAL"**

- . **INTRODUCCION**
- I. ANTECEDENTES**
- II. COMENTARIOS A LAS NORMAS**
- III. EJEMPLOS DE APLICACION**
- V. CONCLUSIONES**
- BIBLIOGRAFIA**

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Cd. Universitaria, a 7 de julio de 1994.  
EL DIRECTOR.

  
ING. JOSÉ MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

JMCS/RCR\*nl1

**A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

Que me brindó la oportunidad de alcanzar  
una formación profesional.

**A los profesores de la FACULTAD DE  
INGENIERIA**

Por su invaluable aporte académico.

**Al Ing. Eduardo A. Guzmán Escudero**

Que con su experiencia, dedicación y apoyo  
logró conducirme a la meta anhelada.

**Gracias.**

**A mis padres:**

Catalina y Enrique, con cariño y agradecimiento por haber hecho posible mi formación profesional.

**A mis hermanos:**

Norma, Enrique, Teresa, Elizabeth, Antonio, Guadalupe, Oscar, Mónica, Catalina y Rocío, con afecto y cariño.

**A mis amigos:**

Quienes a través de su amistad incondicional han contribuido a mi superación en varios aspectos de mi vida.

A todas aquellas personas que con su cariño, confianza y estímulo, contribuyeron al logro de todas las metas que durante mi formación profesional se fueron presentando.

**Gracias.**

**Alejandro Angeles Ramírez.**

# I N D I C E

	<b>Pag.</b>
<b>1. INTRODUCCION.</b>	<b>1</b>
<b>2. ANTECEDENTES.</b>	<b>4</b>
<b>3. COMENTARIOS A LAS NORMAS.</b>	<b>6</b>
3.1 Presfuerzo Parcial y Presfuerzo Total.	6
3.2 Revisión de los Estados Límite de Falla.	6
3.3 Revisión de los Estados Límite de Servicio.	10
3.4 Perdidas de Presfuerzo.	12
3.5 Requisitos Complementarios.	13
<b>4. EJEMPLOS DE APLICACION.</b>	<b>20</b>
4.1 Resistencia a Flexión. Aplicación de las Ecuaciones de Equilibrio y Compatibilidad de Deformaciones.	20
4.2 Límites de la Cuantía para el Acero de Presfuerzo en Elementos Sujetos a Flexión.	25
4.3 Resistencia a Flexión, Método Simplificado.	29
4.4 Diseño por Cortante. Viga con Presfuerzo Total.	32
4.5 Cálculo de Los Esfuerzos en la Transferencia del Presfuerzo y Bajo Cargas de Servicio. Viga de Sección Simple.	40
4.6 Cálculo de Los Esfuerzos en la Transferencia del Presfuerzo y Bajo Cargas de Servicio. Viga de Sección Compuesta.	47
4.7 Cálculo de las Deflexiones en una Viga de Sección Simple.	54
4.8 Cálculo de las Deflexiones en una Viga de Sección Compuesta.	62
4.9 Evaluación de las Perdidas de Presfuerzo.	72
<b>5. CONCLUSIONES.</b>	<b>79</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.</b>	<b>81</b>

## 1. INTRODUCCION.

El objetivo de esta tesis es el de ilustrar la aplicación, en la práctica profesional, de las recomendaciones del capítulo de Concreto Presforzado de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal; para lo que se presentan comentarios referentes al Reglamento así como también diversos ejemplos de aplicación.

En los últimos años se ha incrementado notablemente el uso del concreto presforzado debido a las grandes ventajas que ofrece este, sobre el concreto reforzado, ya que con el primero pueden librarse claros mayores con secciones más esbeltas e incluso también se pueden reducir los tiempos de construcción de estructuras al utilizar elementos prefabricados.

En los elementos de concreto presforzado se inducen esfuerzos de compresión en el concreto para reducir los esfuerzos de tensión que les producen las cargas aplicadas, estos esfuerzos de compresión en el concreto se introducen por medio de cables o tendones de presfuerzo ( torones o alambres de acero de alta resistencia ) y no sólo disminuyen las tensiones sino que también contribuyen a mejorar el comportamiento general del elemento.

El presfuerzo se utiliza para controlar no solamente el estado de agrietamiento sino también el estado de deformación. De acuerdo con los criterios modernos de diseño, incluso no se considera imprescindible eliminar totalmente el agrietamiento; es decir, se permite un cierto nivel de esfuerzos de tensión en el concreto.

Dependiendo del procedimiento constructivo a emplear existen fundamentalmente dos formas o métodos para presforzar elementos de concreto.

- a) Pretensado. En este método los tendones se tensan antes del colado del concreto. El acero se ancla inicialmente en los mueros de anclaje, cuando el concreto ha alcanzado suficiente resistencia, se cortan los tendones, provocando la acción del presfuerzo sobre el elemento, la cual resulta ser interna debido a que el anclaje de los tendones en el concreto es mediante adherencia.

Con frecuencia, se flexiona el acero en uno o dos puntos, a fin de mejorar su excentricidad, la cual se encuentra cerca del centro del claro, para así mantener esfuerzos aceptables en los extremos de la viga. Esto se puede lograr también haciendo que el acero que se encuentra cerca de los extremos de la viga no quede adherido ( enductado o engrasado de tendones ).

Por lo general los elementos pretensados son siempre prefabricados.

- b) Postensado. En este sistema se efectúa primero el colado del concreto, una vez que éste ha adquirido su resistencia se procede al tensado de los tendones. Los tendones se alojan dentro de ductos colocados en forma conveniente, que evitan que queden adheridos al concreto durante la operación de tensado. Una vez tensados los elementos, en la mayoría de los casos se inyecta lechada en los ductos para que en condiciones de servicio exista adherencia entre los tendones y el concreto. El mecanismo de anclaje es a través de accesorios metálicos.

Con frecuencia, al acero se le da la forma de curva parabólica, de tal forma que su trayectoria se ajuste a las necesidades de momento en la forma más eficiente posible; sin embargo, puede usarse también el enductado o engrasado de los tendones para lograr este objetivo.

Los elementos postensados pueden ser prefabricados o colados en sitio.

En ambos casos el Reglamento requiere del cumplimiento de los requisitos de resistencia y serviciabilidad, es decir, estados límite de falla y estados límite de servicio.

Existen ciertos aspectos estructurales que en particular resulta importante considerar en el diseño de elementos de concreto presforzado tales como la revisión de las diferentes etapas de carga y presfuerzo, por ejemplo las etapas de transporte y montaje para elementos prefabricados; adicionalmente hay otros aspectos que el proyectista debe de tomar en cuenta y que dependen de la solución estructural que en particular se halla elegido, por ejemplo la compatibilidad de deformaciones entre los elementos presforzados y la estructura que los sustenta, es decir, el acortamiento

axial de las trabes o del sistema de piso debido al presfuerzo puede introducir momentos adicionales en las columnas.

En resumen, no es sólo por la mejoría del comportamiento bajo carga de servicio, por el control del agrietamiento y la deflexión, por lo que el concreto presforzado representa actualmente una alternativa conveniente, sino también porque permite la utilización de materiales eficientes de alta resistencia. Pueden usarse miembros de menores dimensiones y más ligeros. Se reduce la relación de la carga muerta a la carga viva, se aumentan los claros y se amplía considerablemente la gama de aplicaciones posibles del concreto estructural.

## 2. ANTECEDENTES.

El inicio del empleo del presfuerzo puede situarse en Europa, en los años 500-1500, en donde el presfuerzo se aplicaba a barriles de madera; sin embargo la primera proposición para aplicar el presfuerzo al concreto se hizo en el año de 1886, en San Francisco California ( Estados Unidos ) por P.H. Jackson, quien planteaba el empleo de barras de acero apretadas para soportar arcos de concreto para formar losas.

En 1888, en Alemania, C.E.W. Dohering presenta la patente para concreto reforzado con acero tensado, aplicado antes de las cargas de las losas.

En 1911, en Francia, Eugene Freyssinet inicia el estudio sobre los efectos dependientes del tiempo ( contracción y flujo plástico ) que reducen la fuerza de tensado del acero de presfuerzo. En 1928, Freyssinet propone emplear aceros de alta resistencia anclados al concreto mediante adherencia. Y más tarde en 1939, desarrolla anclajes con cuñas cónicas para anclar los tendones de presfuerzo y gatos de tensado de doble acción que además de tensar los alambres, introducen el cono macho en el cono hembra anclando de esta manera a los tendones.

En Europa, en los años de 1945-1950, debido a la aguda escases de materiales que siguió a la Segunda Guerra Mundial y a la necesidad de optimizar diseños para reconstruir a Europa, obliga al desarrollo notable del presfuerzo. Freyssinet y otros pioneros, como Finsterwalter y Magnel, demostraron las posibilidades de este nuevo concepto de diseño y establecieron la etapa del desarrollo que había de tener lugar en los años siguientes.

Principalmente por razones económicas, la evolución del concreto presforzado ha tenido lugar en Estados Unidos. Hasta tiempos recientes, el interés principal había estado en elementos precolados pretensados, que podían llevarse a producción en masa con grandes economías en los costos de mano de obra.

Sin embargo, en la actualidad se están dando cambios importantes en la práctica. La mano de obra de construcción no es tan escasa como antes, los costos de los materiales están aumentando constantemente, y existe una seria preocupación por la conservación de los recursos. En tales circunstancias, resulta indispensable que se

**consideren la adecuabilidad de diseños más elaborados, que exploten en forma más completa la capacidad del presforzado.**

**Ante tales condiciones de cambio, ha surgido la necesidad de lograr una mejor comprensión y aplicación de los principios fundamentales del comportamiento, análisis y diseño de los elementos de concreto presforzado.**

### **3. COMENTARIOS A LAS NORMAS.**

#### **3.1 PRESFUERZO PARCIAL Y PRESFUERZO TOTAL.**

Quando surgió la teoría del concreto presforzado únicamente existía el concepto de "presfuerzo total" con el cual se eliminaban todos los esfuerzos de tensión en los elementos estructurales; con el paso del tiempo se encontró que existe una alternativa intermedia entre el concreto reforzado y el concreto con presfuerzo total, es decir, el presfuerzo parcial.

Con el presfuerzo parcial se logra mejorar el comportamiento general de los elementos estructurales, ya que permite un control más sencillo de la deflexiones iniciales (contraflechas) debidas al presfuerzo, así como del agrietamiento por tensión en el concreto durante la transferencia del presfuerzo; además los elementos con presfuerzo parcial tienden a ser más dúctiles y menos resistentes que los elementos con presfuerzo total, lo que reduce la posibilidad de tener una falla frágil.

Puesto que resulta un tanto subjetivo el definir, de acuerdo con su comportamiento, si un elemento de concreto es parcial o totalmente presforzado, por facilidad el Reglamento define el índice de presfuerzo como la relación entre el momento resistente proporcionado por el presfuerzo y el momento resistente total de la sección, asumiendo que esta relación de resistencia es compatible con el comportamiento típico de un elemento parcial o totalmente presforzado ( figura 3.1 ).

#### **3.2 REVISION DE LOS ESTADOS LIMITE DE FALLA.**

Como lo indica el Reglamento deberán verificarse ciertos requisitos de resistencia y seguridad en los elementos de concreto presforzado; ya que en cualquier elemento que este sujeto a diversas sollicitaciones pueden llegar a presentarse situaciones tales como el colapso, la inestabilidad, la fatiga o algún otro daño irreversible, si la resistencia del elemento no es la adecuada; a través de los requisitos que establece el Reglamento se procura que el elemento observe una respuesta adecuada en cuanto a resistencia se refiere.

### 3.2.1 FLEXION Y FLEXOCOMPRESION.

Apartir de las condiciones de equilibrio y aplicando las hipótesis generales descritas en el Reglamento, puede evaluarse la resistencia a flexión y carga axial en elementos de concreto presforzado y parcialmente presforzado; sin embargo tienen que hacerse las siguientes consideraciones adicionales:

- a) Los cables y alambres de presfuerzo carecen de un esfuerzo de fluencia bien definido, como ocurre en el caso del acero de refuerzo ordinario; por lo tanto, es necesario conocer el comportamiento del acero de presfuerzo a emplear, es decir, conocer la curva esfuerzo-deformación. La ASTM considera como esfuerzo de fluencia teórico, el correspondiente a la deformación del 1%, por lo que comúnmente se utiliza este valor en el diseño.
- b) A diferencia del acero de refuerzo, el acero de presfuerzo es sometido a un esfuerzo de tensión previo a la transferencia del presfuerzo, de tal manera que al efectuarse esta y ocurrir parte de las pérdidas de tensión, el acero de presfuerzo presentará una deformación inicial efectiva que deberá tomarse en cuenta para el cálculo de las deformaciones unitarias ( figura 3.2 ).

#### A) Esfuerzo en el acero de presfuerzo en elementos a flexión.

Para conocer el esfuerzo en el acero de presfuerzo cuando se alcanza la resistencia a flexión, en elementos total y parcialmente presforzados, deberá usarse un análisis de compatibilidad de deformaciones; aunque alternativamente puede calcularse de manera aproximada dicho esfuerzo, en elementos con presfuerzo adhéndo, mediante la siguiente expresión:

$$f_{sp} = f_{sr} \left[ 1 - \frac{\gamma}{\alpha} \left( P_p \frac{f_{sr}}{f'_{cc}} + \frac{d}{d_p} (q - q') \right) \right]$$

En donde:

$\gamma$  = Factor que depende del tipo de acero de presfuerzo.

$\alpha$  = Esfuerzo promedio del concreto a compresión.

Si asumimos que  $d = d_p$ ;  $\gamma = 0.4$  para torones y alambres en los que  $f_{yp} = 0.85 f_{sr}$  y  $\alpha = 0.8$  para  $f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$ , la expresión anterior se reduce a:

$$f_{sp} = f_{sr} \left[ 1 - 0.5 \left( P_p \frac{f_{sr}}{f'_c} + q - q' \right) \right]$$

Sin embargo, esta fórmula puede subestimar el valor del esfuerzo  $f_{sp}$  en elementos con altos porcentajes de acero de refuerzo; cuando el término  $( P_p \frac{f_{sr}}{f'_c} + q - q' )$  es muy pequeño o el valor de  $d'$  es grande, el acero en compresión no desarrolla su esfuerzo de fluencia dada su cercanía al eje neutro, por esta razón la aplicación de esta fórmula se limita a secciones en las que  $d'$  sea menor a  $0.15 d$  y el valor del término  $( P_p \frac{f_{sr}}{f'_c} + q - q' )$  no deberá tomarse menor a  $0.17$ .

#### **B) Refuerzo mínimo en elementos a flexión.**

Al igual que en el caso de secciones de concreto reforzado, es necesario asegurar que el momento resistente de las secciones con presfuerzo total o parcial sea suficientemente mayor a su momento de agrietamiento, ya que cuando ocurre el agrietamiento se produce un cambio en la rigidez del elemento, lo que provoca un incremento en los esfuerzos tanto en el acero de presfuerzo como en el acero de refuerzo a tensión; si la resistencia se alcanza inmediatamente después del agrietamiento se genera la rotura de los cables de presfuerzo, lo que produce una falla subita del elemento, en cambio, si la resistencia se alcanza para un momento considerablemente mayor al momento de agrietamiento ocurrirá un incremento gradual en la deflexión del elemento permitiendo esto prevenir la falla.

#### **C) Refuerzo máximo en elementos a flexión.**

Para garantizar que los elementos tengan un comportamiento dúctil, se establece que la deformación en el acero de presfuerzo cuando se alcance la resistencia exceda siempre a su deformación de fluencia, por lo que deberá cumplirse la siguiente condición:

$$\varepsilon_{sp} > \frac{\varepsilon_{sp}}{0.75}$$

En cuanto al acero de refuerzo a tensión, en general su deformación excederá a su correspondiente esfuerzo de fluencia; de esta forma, se limita la cantidad de acero de presfuerzo y de refuerzo a tensión a un valor menor que el requerido para la falla balanceada.

Las condiciones en que se define la falla balanceada de la sección se muestran en la figura 3.3. Este criterio es general y aplicable a secciones de cualquier forma con o sin acero de refuerzo a compresión.

### 3.2.2 FUERZA CORTANTE.

Debido a la escasa resistencia del concreto a tensión y a la presencia de una fuerza cortante en vigas de concreto presforzado, se generan fundamentalmente dos tipos de agrietamiento inclinado ( figura 3.4 ):

- a) Grietas de cortante, estas aparecen en regiones de cortante alto y momento pequeño, se originan cerca del centroide de la sección transversal como resultado de la combinación de los esfuerzos cortantes máximos y se extienden en dirección diagonal.
- b) Grietas de cortante flexión, las cuales aparecen en zonas donde simultáneamente la flexión y el cortante son significativos, se inician a partir del agrietamiento por flexión; la presencia del agrietamiento por flexión provoca un incremento de los esfuerzos cortantes en la zona de concreto situada arriba de la grieta inicial de flexión, produciéndose así en estas zonas un agrietamiento inclinado como extensión de las grietas de flexión.

Para diseño la resistencia a fuerza cortante proporcionada por el concreto  $V_{CR}$ , se considera igual a la fuerza cortante que provoca un agrietamiento inclinado significativo; en lo que respecta al acero de refuerzo por cortante (estribos), tiene

la misma función que en el caso de elementos de **concreto reforzado**, es decir, **aportar resistencia y ductilidad**.

### **3.2.3 PANDEO DEBIDO AL PRESFUERZO.**

Esta sección se refiere principalmente al caso de elementos de **concreto postensado**, donde los cables presforzados **están en contacto intermitente con el concreto**, también a **almas ó patines esbeltos si están sujetos a esfuerzos importantes de compresión**. Sin embargo, si se tienen los cables presforzados en **contacto con el concreto a lo largo del elemento de tal manera que la transferencia del presfuerzo sea sensiblemente uniforme**, el efecto del pandeo se reduce considerablemente.

### **3.3 REVISION DE LOS ESTADOS LIMITE DE SERVICIO.**

Adicionalmente a los requisitos de resistencia, los **elementos de concreto presforzado** deberán de tener un comportamiento satisfactorio bajo aquellas **condiciones de carga** que pudieran resultar críticas, en cuanto a que produzcan **agrietamientos o deflexiones (flechas y contraflechas) excesivas**. Dentro de este contexto resulta importante considerar las **diferentes etapas de carga y presfuerzo a las que el elemento estará sujeto conforme a su proceso de construcción**.

Los límites establecidos para los esfuerzos tanto en el **concreto como en el acero de presuerzo**, durante las diferentes etapas de **carga y presfuerzo**, proporcionan un método indirecto de controlar algunos **aspectos importantes en el comportamiento del elemento**, considerando en cada caso la naturaleza de las **cargas y su compatibilidad con los requisitos de una respuesta adecuada**.

#### **3.3.1 ELEMENTOS CON PRESFUERZO TOTAL Y ELEMENTOS CON PRESFUERZO PARCIAL.**

Con base en la **teoría elástica del concreto**, el Reglamento especifica **revisar cuando menos dos condiciones de carga y presfuerzo**:

1. En condiciones de servicio.
2. Durante la transferencia del presfuerzo.

En ambos casos se limitan los esfuerzos en el concreto y el acero. Sin embargo, debido a que pueden resultar críticas otras condiciones de carga como el izaje o el montaje (en el caso de elementos prefabricados), deberán de analizarse todas las etapas de carga para determinar cuales son críticas.

#### **A) Esfuerzos permisibles en el concreto.**

En forma inmediata a la transferencia del presfuerzo los elementos quedan sometidos a las cargas de presfuerzo y de su peso propio, puesto que en esta etapa aun no han sido aplicadas las cargas muertas y vivas de servicio, resultando así que en algunas zonas los esfuerzos de tensión en el concreto originados por el presfuerzo constituyen un aspecto crítico en lo que al agrietamiento se refiere; en esta etapa la fuerza de presfuerzo está reducida por la caída de la tensión originada por las pérdidas instantáneas, acortamiento elástico del concreto, corrimiento del anclaje, parte de la relajación del acero y fricción en el caso de elementos postensados; por lo tanto son en especial críticas las secciones extremas de los elementos pretensados y la sección al centro del claro en elementos postensados.

Al aplicar la totalidad de la carga muerta y viva de servicio, en algunas zonas del elemento los esfuerzos de tensión pueden llegar a exceder a los esfuerzos de compresión proporcionados por el presfuerzo; en esta etapa existe una reducción adicional en la fuerza de presfuerzo debida a los efectos de contracción y flujo plástico del concreto, que tienen lugar através del tiempo; bajo esta condición de carga las secciones que resultan críticas son las de máximo momento.

#### **B) Esfuerzos en el acero de presfuerzo.**

Se limitan los esfuerzos en el acero de presfuerzo a efecto de evitar una falla por rotura de los cables o alambres durante su tensado, debido a que el tensado inicial en el acero de presfuerzo presenta la condición crítica; y para de esta

forma controlar la relajación del acero. Debido a que el esfuerzo en el acero inmediato a la transferencia puede regir durante un tiempo considerable, la caída de tensión debido a las pérdidas solamente mejorará esta condición.

#### **C) Deflexiones.**

Independientemente de que el elemento cumpla con los requisitos mencionados, de acuerdo con el Reglamento se deberá revisar que las deflexiones permanezcan dentro de los límites tolerables; en este contexto se deberán de considerar también las diferentes etapas de carga y presfuerzo a las que el elemento estará sujeto tomando en cuenta la naturaleza de las cargas y los cambios que se presenten en las características de los materiales a través del tiempo.

#### **D) Agrietamiento.**

Es recomendable que el acero de refuerzo se coloque tan cerca como sea posible a la zona extrema en tensión, con el fin de evitar que se presente el agrietamiento o en su defecto de disminuir el ancho de grieta, ya que son bien conocidos los efectos desfavorables de las grietas sobre la apariencia y durabilidad de los elementos de concreto.

### **3.4 PERDIDAS DE PRESFUERZO.**

Un factor de gran importancia que debe considerarse en el diseño de elementos de concreto presforzado es la pérdida o caída de tensión en el acero de presfuerzo, debida a factores tales como: acortamiento elástico del concreto, corrimiento de los anclajes, relajación del acero, fricción, contracción y flujo plástico del concreto, estos efectos producen una disminución en la fuerza de presfuerzo originalmente aplicada al elemento y tienen lugar, en parte de manera inmediata a la aplicación del presfuerzo y en parte a través del tiempo.

La variación en la fuerza de presfuerzo debida a las pérdidas puede afectar significativamente el comportamiento del elemento en condiciones de servicio o

durante la transferencia del presfuerzo, en tanto que su estimación difiera de los valores reales, sin embargo, las pérdidas de presfuerzo no tienen influencia sobre la resistencia.

El cálculo de las pérdidas de presfuerzo implica la determinación de un número considerable de parámetros relacionados tanto con las características de los materiales, como de las condiciones ambientales e historia de carga del elemento, por mencionar algunos; sin embargo, existe evidencia física que permite establecer un rango razonable para acotar los parámetros más importantes.

Dependiendo de las condiciones específicas en que se encuentre el elemento a diseñar, el Reglamento presenta una guía formada por tres métodos alternativos para calcular las pérdidas de presfuerzo, de acuerdo con el rango de aproximación requerido.

El proyectista deberá evitar en lo posible, que la distribución y cantidad de presfuerzo condicionen un comportamiento del elemento que sea sensible a la variación de la fuerza de tensión originada por las pérdidas de presfuerzo, puesto que resulta igualmente inadecuada una subestimación como una sobrestimación en lo que a comportamiento se refiere.

En elementos postensados será necesario incluir en los planos respectivos los coeficientes de fricción adoptados en el cálculo, a efecto de su verificación física durante el tensado, se debe incluir también el deslizamiento de los anclajes y la fuerza de tensión en los cables al anclar; de igual forma cuando se pretenda compensar parte de las pérdidas mediante un tensado adicional deberán incluirse en los planos tanto el valor de esta tensión como el orden de aplicación en los diferentes cables.

### **3.5 REQUISITOS COMPLEMENTARIOS.**

En los elementos presforzados es fundamental revisar las zonas y dispositivos de anclaje para el acero de presfuerzo. Al actuar la fuerza de presfuerzo se generan esfuerzos de gran magnitud en las zonas de anclaje y si no se toman las debidas precauciones dichos esfuerzos pueden originar fallas en el elemento, por lo general

**estas fallas se manifiestan a través de grietas longitudinales en los extremos de las piezas.**

**Se muestran en las figuras 3.5, 3.6 y 3.7, los principales requisitos que deben cumplir los elementos presforzados en lo que respecta al anclaje del acero de presfuerzo.**

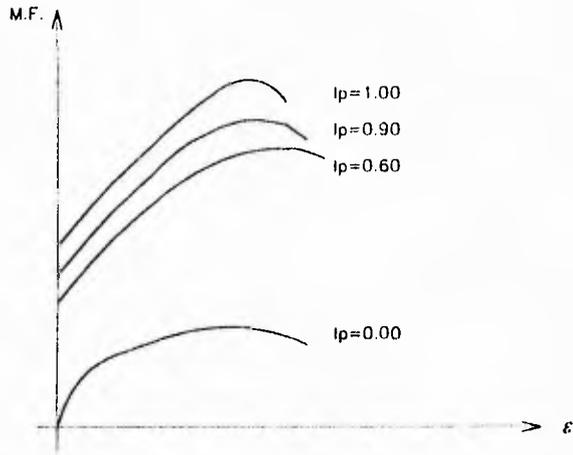


FIG. 3.1 CURVAS ESFUERZO-DEFORMACION PARA SECCIONES CON DIFERENTE INDICE DE PRESFUERZO

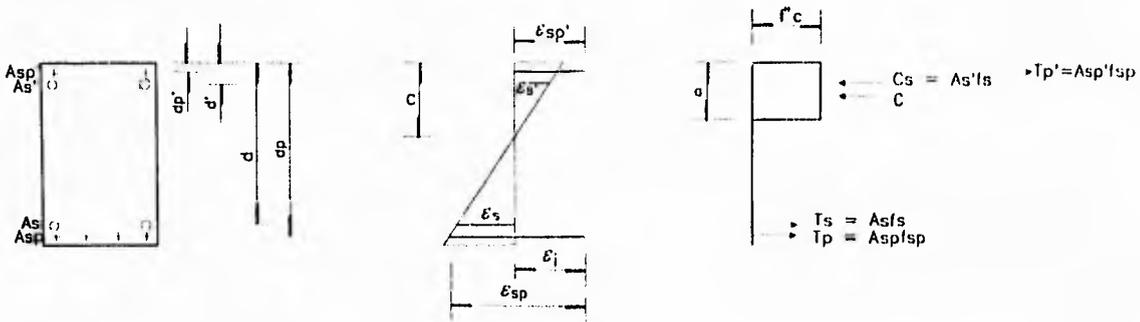


FIG. 3.2 APLICACION DE LAS HIPOTESIS Y DE LA CONDICIONES DE EQUILIBRIO PARA CALCULAR RESISTENCIAS A UNA SECCION RECTANGULAR

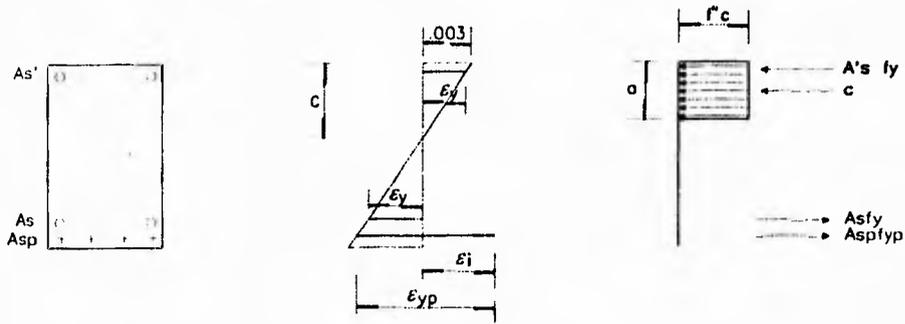


FIG. 3.3 CONDICIONES DE FALLA BALANCEADA DE UNA SECCION PRESFORZADA.

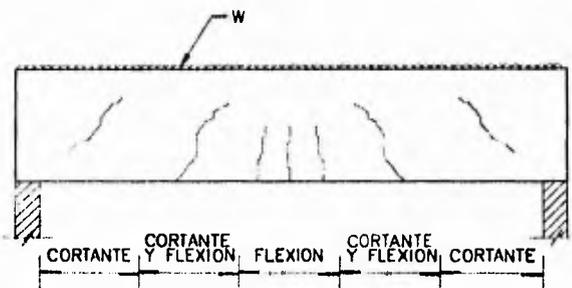
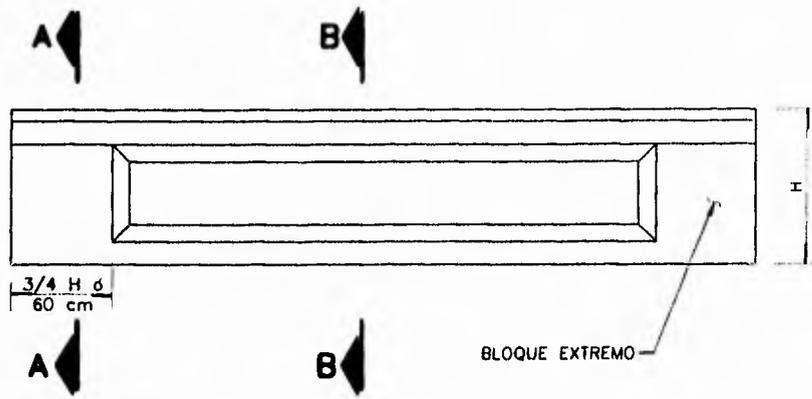
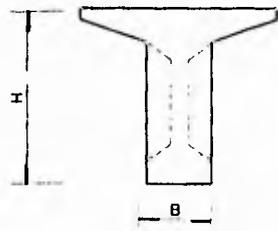


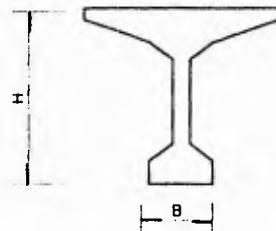
FIG. 3.4 TIPOS DE GRIETAS QUE SE PRESENTAN EN VIGAS DE CONCRETO PRESFORZADO.



**VIGA PRESFORZADA**

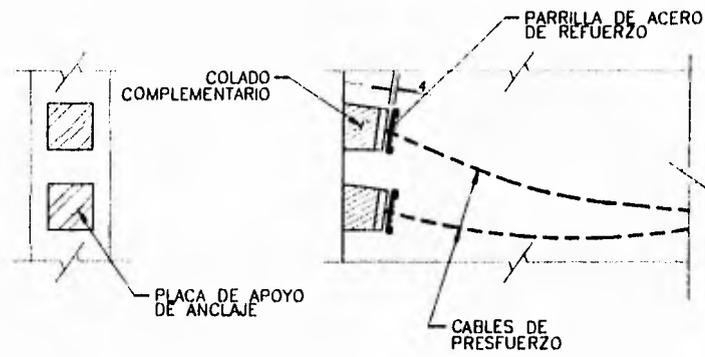


**CORTE A-A**

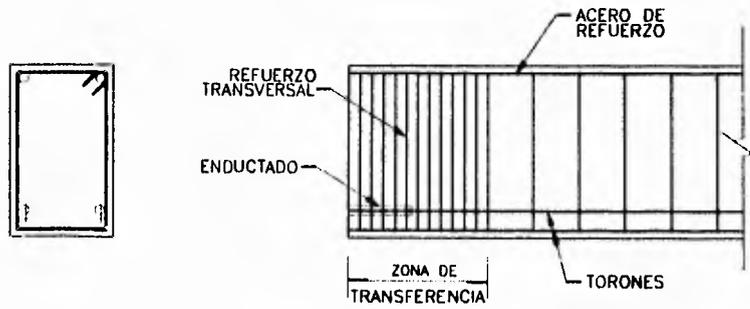


**CORTE B-B**

FIG 3.5 GEOMETRIA DE LAS ZONAS DE ANCLAJE



**VIGAS POSTENSADAS**



**VIGAS PRETENSADAS**

FIG. 3.6 REFUERZO DE LAS ZONAS DE ANCLAJE

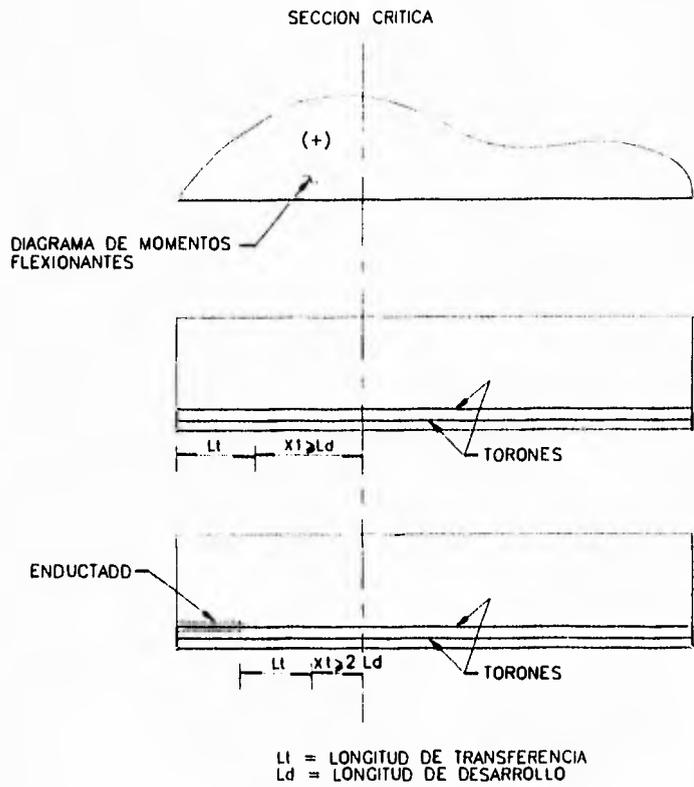
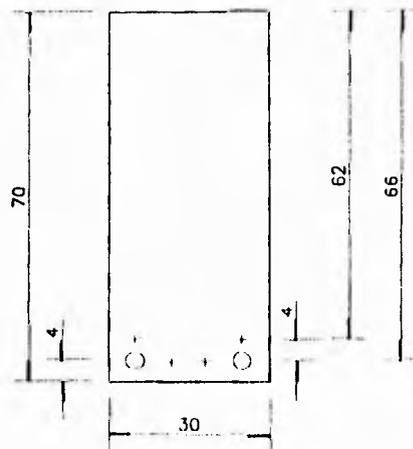


FIG. 3.7 ANCLAJE DE ACERO DE PRESFUERZO EN ELEMENTOS PRETENSADOS

#### 4. EJEMPLOS DE APLICACION.

##### 4.1 RESISTENCIA A FLEXION. APLICACION DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES.

Calcular el momento resistente de la sección mostrada en la figura, empleando las hipótesis generales enunciadas en las N.T.C. sección 2.1.1.



• PRESFUERZO  
○ REFUERZO

$$A_s \text{ refuerzo} = 2 \# 6 = 5.74 \text{ cm}^2$$

$$A_{sp} \text{ presfuerzo} = 4 \text{ Tor } \phi \frac{1}{2}'' = 3.96 \text{ cm}^2$$

Constantes de diseño:

$$f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$f''_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'_c = 231 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Grado duro)}$$

$$f_{sr} = 18900 \text{ kg/cm}^2 \text{ (270 K)}$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{sp} = 1.9 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

Pérdidas: 20 %

Tensión inicial: 74 %

##### 1. Cálculo de la deformación inicial efectiva en el acero de presfuerzo:

El esfuerzo efectivo en el acero de presfuerzo  $f_{pe}$  es:

$$f_{pe} = k_1 k_2 f_{sr}$$

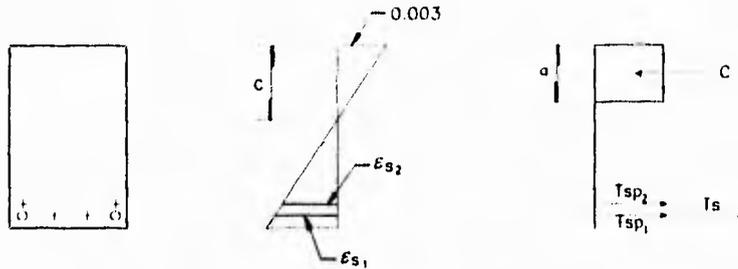
$$k_1 = 1 - 0.2 = 0.8 \text{ (20 \% pérdidas)}$$

$$k_2 = 0.74 \text{ (tensado inicial al 74 \%)}$$

$$\therefore f_{pe} = (0.8)(0.74)(18900) = 11189 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_{pi} = 11189 / (1.9 \times 10^6) = 0.0059$$

2. Diagrama de deformaciones para el Momento Resistente. ( Se asume una deformación máxima a compresión del concreto de 0.003 )



3. Obtención de deformaciones, se supone  $c = 15$  y se valúa  $\epsilon_{sp}$  y  $\epsilon_s$ .

Expresión general para deformaciones:

$$\epsilon_{si} = 0.003 \frac{(h - y_i) - c}{c}$$

siendo  $y_i$  la altura de la base al lecho en cuestión.

$$\text{para } y_i = 4 \quad \epsilon_{s1} = 0.003 \frac{(70 - 4) - 15}{15} = 0.0102$$

$$\text{para } y_i = 8 \quad \epsilon_{s2} = 0.003 \frac{(70 - 8) - 15}{15} = 0.0094$$

Deformaciones totales:

$$\epsilon_{sp1} = 0.0059 + 0.0102 = 0.0161$$

$$\epsilon_{sp2} = 0.0059 + 0.0094 = 0.0153$$

$$\epsilon_s = 0.0102$$

4. Obtención de  $f_s$  y  $f_{sp}$ .

$$f_s = f_y \quad \epsilon_s > \epsilon_y = 0.002$$

$$f_{sp1} = 17800 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{sp2} = 17590 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Se obtienen de la gráfica esfuerzo - deformación del acero de presfuerzo. fig. A).}$$

5. Obtención de  $T_s$  y  $T_{sp}$ .

$$T_s = 5.74 \times 4200 = 24108 \text{ kg}$$

$$T_{sp1} = 1.98 \times 17800 = 35244 \text{ kg}$$

$$T_{sp2} = 1.98 \times 17590 = 34828 \text{ kg}$$

$$T = 24108 + 35244 + 34828 = 94180 \text{ kg}$$

6. Obtención de  $C$ .

$$a = 0.8 c = 0.8 (15) = 12 \text{ cm}$$

$$C = a b f'_c = 12 (30) (231) = 83160 \text{ kg}$$

$$\therefore T \neq C$$

7. Como no se cumple el equilibrio dado que  $C < T$ , se aumenta el valor de "c" y se repite el proceso.

1.  $c = 17 \text{ cm}$

2.  $\epsilon_{s1} = 0.0086$                        $\epsilon_{sp1} = 0.0145$                        $\epsilon_s = 0.0086$   
 $\epsilon_{s2} = 0.0079$                        $\epsilon_{sp2} = 0.0138$

3. Obtención de  $f_s$  y  $f_{sp}$ .

$$f_s = f_y \quad \epsilon_s > \epsilon_y = 0.002$$

$$f_{sp1} = 17510 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{sp2} = 17400 \text{ kg/cm}^2 \text{ (de gráfica, ver fig.A)}$$

4. Obtención de  $T_s$  y  $T_{sp}$ .

$$T_s = 5.74 \times 4200 = 24108 \text{ kg}$$

$$T_{sp1} = 1.98 \times 17510 = 34670 \text{ kg}$$

$$T_{sp2} = 1.98 \times 17400 = 34452 \text{ kg}$$

$$T = 24108 + 34670 + 34452 = 93230 \text{ kg}$$

5. Obtención de  $C$ .

$$a = 0.8 (17) = 13.6 \text{ cm}$$

$$C = 13.6 (30) (231) = 94248 \text{ kg}$$

6. Se tiene que  $C > T$ ; por tanto, se propone un nuevo valor de " $c$ " y se sigue la secuencia indicada. A continuación se presentan los resultados en la siguiente tabla.

$c$	$\epsilon_{sp}, \epsilon_s$	$f_{sp}, f_s$	$T$ (kg)	$C$ (kg)
16.80	0.0147	17550	34749	93139
	0.0140	17420	34492	
	0.0088	4200	24108	
			<u>93349</u>	
16.85	0.01465	17530	34709	93416
	0.01393	17410	34472	
	0.00875	4200	24108	
			<u>93289</u>	

$$\therefore C \cong T$$

Finalmente el Momento Resistente se obtiene por suma de momentos con respecto a un punto de la sección. En este caso se obtiene con respecto al acero de refuerzo.

$$M_R = 0.9 [ 93416 (66 - 0.5 \times 13.48) - 34472 \times 4 ]$$

$$M_R = 48.58 \text{ T}\cdot\text{m}$$

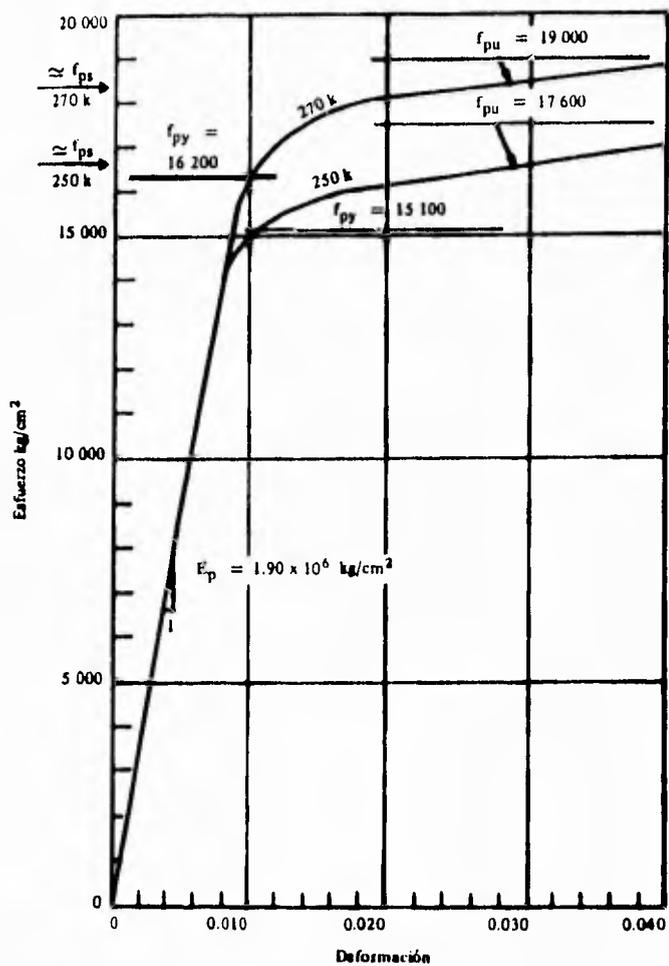
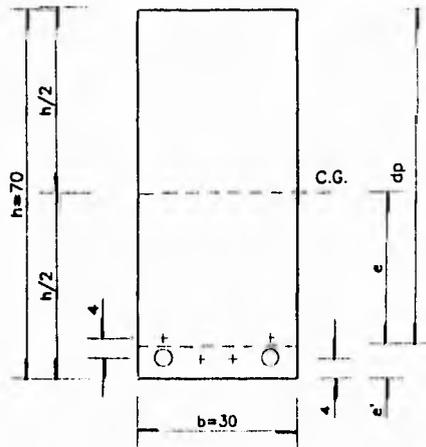


FIG. A Curvas características de esfuerzo-deformación, para torones de presfuerzo de 250 K (17600  $\text{kg/cm}^2$ ) y de 270 K (19000  $\text{kg/cm}^2$ ).

#### 4.2 LIMITES PARA LA CUANTIA DEL ACERO DE PRESFUERZO EN ELEMENTOS SUJETOS A FLEXION.

Para la sección del Ejemplo 4.1 revisar los requisitos de acero mínimo y máximo.



Acero de refuerzo:

$$A_s = 2 \# 6 = 5.74 \text{ cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Acero de presfuerzo:

$$A_{sp} = 4 \text{ Tor } \phi \frac{1}{2}'' = 3.96 \text{ cm}^2$$

$$f_{sr} = 18900 \text{ kg/cm}^2$$

Concreto:

$$f_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

† PRESFUERZO  
 ( ) REFUERZO

#### A) Acero mínimo.

$$M_R \geq (1.5 - 0.3 I_p) M_{AG}$$

Siendo:

$M_R$  = Momento Resistente.

$M_{AG}$  = Momento de Agrietamiento.

$I_p$  = Índice de Presfuerzo.

Índice de Presfuerzo:

$$I_p = \frac{A_{sp} f_{sp}}{A_{sp} f_{sp} + A_s f_y}$$

Del ejemplo 4.1, el esfuerzo en el acero de presfuerzo cuando se alcanza la resistencia es:

$$f_{sp} = 17410 \text{ kg/cm}^2$$

$$\therefore I_p = \frac{3.96 \times 17410}{3.96 \times 17410 + 5.74 \times 4200} = 0.74$$

**Momento de agrietamiento:**

$$M_{AG} = \left( \bar{f}_i + \frac{P}{A} \right) S_i + Pe$$

En donde:

$\bar{f}_i$  = Resistencia del concreto a tensión.

$P$  = Presfuerzo efectivo.

$A$  = Area de la sección.

$S_i$  = Módulo de sección inferior.

$e$  = Excentricidad del presfuerzo.

Del Ejemplo 4.1, el esfuerzo efectivo en el acero de presfuerzo es:

$$f_{se} = 11189 \text{ kg/cm}^2$$

$$\therefore P = A_{sp} f_{se} = 3.96 \times 11189 = 44308 \text{ kg}$$

$$\bar{f}_i = 2 \sqrt{f'_c} = 2 \sqrt{350} = 37.42 \text{ kg/cm}^2$$

$$A = 2100 \text{ cm}^2$$

$$S_i = 24500 \text{ cm}^3$$

$$e = h/2 - e' = 29 \text{ cm}$$

$$\therefore M_{AG} = \left( 37.42 + \frac{44308}{2100} \right) 24500 + 44308 \times 29 = 2718648 \text{ kg-cm}$$

$$M_{AG} = 27.18 \text{ T-m}$$

$$\therefore (1.5 - 0.3 I_p) M_{AG} = (1.5 - 0.3 \times 0.74) 27.18 = 34.74 \text{ T-m}$$

Del Ejemplo 4.1:  $M_R = 48.58 \text{ T-m}$

$$\therefore M_R > (1.5 - 0.3 I_p) M_{AG}$$

**B) Acero máximo.**

$$\epsilon_{sp} \geq \frac{\epsilon_{yp}}{0.75}$$

Del Ejemplo 4.1, la deformación en el acero de presfuerzo cuando se alcanza la resistencia es:

$$\epsilon = 0.01393$$

y suponiendo que la deformación de fluencia para el acero de presfuerzo es :

$$\epsilon_{yp} = 0.01$$

Se tiene:

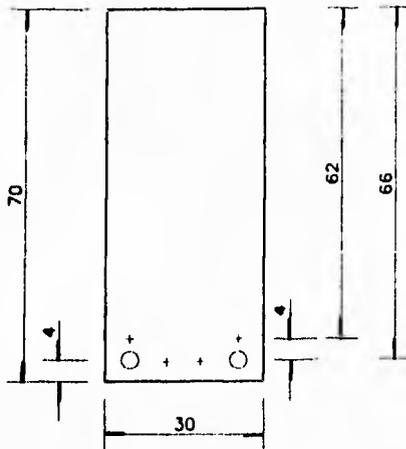
$$\frac{\epsilon_{yp}}{0.75} = \frac{0.01}{0.75} = 0.0133$$

Por tanto resulta que:

$$\varepsilon_{sp} > \frac{\varepsilon_y}{0.75}$$

#### 4.3 RESISTENCIA A FLEXION. METODO SIMPLIFICADO.

Calcular el Momento Resistente de la sección mostrada en la figura empleando las expresiones propuestas en las NTC sección 7.3.1 a). La sección es parcialmente presforzada.



$A_s$  refuerzo = 2 Vars. # 6 = 5.74 cm<sup>2</sup>  
 $A_{sp}$  presfuerzo = 4 Tor.  $\phi$  1/2" = 3.96 cm<sup>2</sup>  
 $f_c = 350$  kg/cm<sup>2</sup>  
 $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup>  
 $f_{sr} = 18900$  kg/cm<sup>2</sup>  
 Pérdidas: 20 %  
 Tensado inicial: 74 %

Condiciones de aplicación:

- $f_c \leq 350$  kg/cm<sup>2</sup>
- $f_{se}$  (Presfzo. efectivo)  $\geq \frac{1}{2} f_{sr}$

+ PRESFUERZO  
 ○ REFUERZO

Donde:  $f_{se} = k_1 k_2 f_{sr}$   
 $k_1 = 1 - 0.2 = 0.8$  (20 % de pérdidas)  
 $k_2 = 0.74$  (tensado inicial)

Por tanto:

$$f_{se} = 0.8 \times 0.74 \times 18900 = 11189 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{se} > 0.5 f_{sr} = 0.5 \times 18900 = 9450 \text{ kg/cm}^2$$

∴ Se cumplen las condiciones.

El esfuerzo en el acero de presfuerzo cuando se alcanza la resistencia es  $f_{sp}$  ( para secciones con presfuerzo parcial ).

$$f_{sp} = f_{sr} \left[ 1 - 0.5 \left( P_p \frac{f_c}{f''_c} + q - q' \right) \right]$$

Donde:

$$P_p = \frac{A_{sp}}{bd_p}$$

$$q = \frac{pf_y}{f''_c}$$

$$q' = p' \frac{f_y}{f''_c}$$

$$p = \frac{A_s}{bd}$$

Siendo:

$$f''_c = 231 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$d = 66 \text{ cm}$$

$$d_p = 64 \text{ cm}$$

$$f_{sr} = 18900 \text{ kg/cm}^2$$

$$P_p = \frac{A_{sp}}{bd_p} = \frac{3.96}{(30)(64)} = 0.0021$$

$$p = \frac{A_s}{bd} = \frac{5.74}{(30)(66)} = 0.0029$$

$$p' = 0 \quad q' = 0$$

$$q = \frac{pf_y}{f''_c} = \frac{0.0029 \times 4200}{231} = 0.0527$$

$$f_{sp} = 18900 \left[ 1 - 0.5 \left( 0.0021 \times \frac{18900}{231} + 0.0527 \right) \right]$$

$$f_{sp} = 16778 \text{ kg/cm}^2$$

$$T_p = A_{sp} f_{sp} = 3.96 \times 16778 = 66441 \text{ kg}$$

$$T_s = A_s f_y = 5.74 \times 4200 = 24108 \text{ kg}$$

Por equilibrio:

$$C = T_p + T_s = 66441 + 24108 = 90549 \text{ kg}$$

$$a b f'_c = T_p + T_s$$

$$a = \frac{T_p + T_s}{b f'_c} = \frac{90549}{(30)(231)} = 13.07 \text{ cm}$$

Tomando momentos con respecto al acero de refuerzo:

$$M_R = F_R [ C (d - a/2) - T_p (d - d_p) ]$$

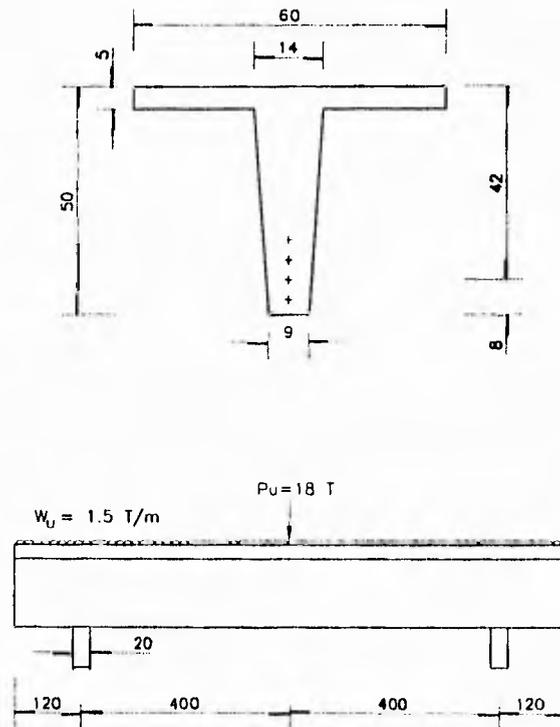
$$M_R = 0.9 [ 90549 (66 - 13.07/2) - 66441 (66 - 64) ]$$

$$M_R = 4726452 \text{ kg-cm}$$

$$M_R = 47.26 \text{ T-m}$$

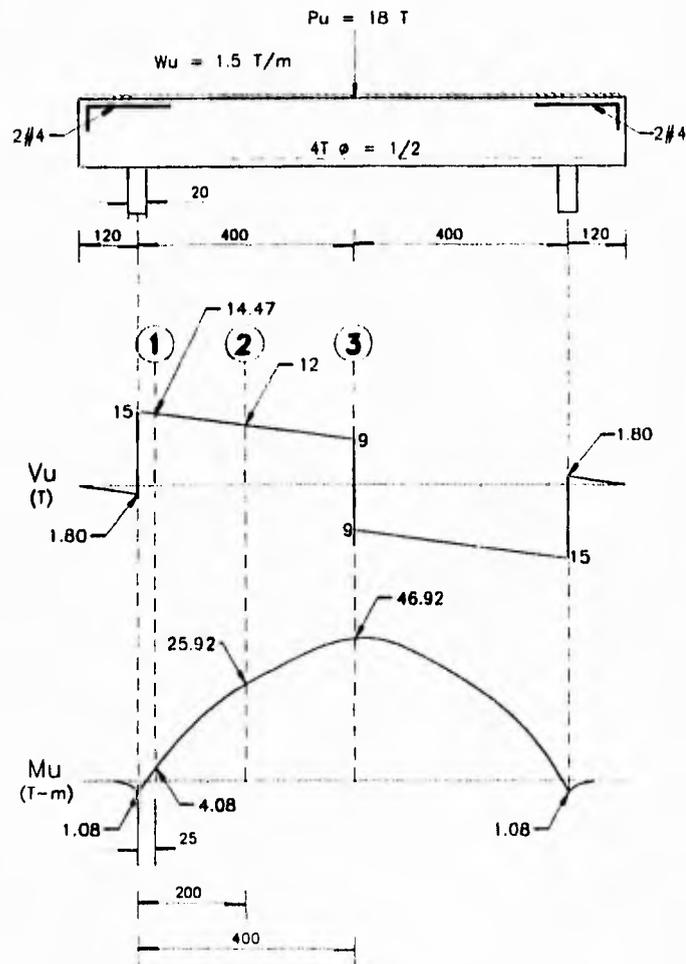
#### 4.4 DISEÑO POR CORTANTE VIGA CON PRESFUERZO TOTAL.

Calcular el refuerzo por cortante para la viga de sección " T " que se muestra en la figura. El presfuerzo es adherido con una longitud de transferencia de 1 metro a partir de los extremos. La carga uniforme incluye el peso propio de la viga.



#### Materiales:

$$\begin{aligned}f_c &= 350 \text{ kg/cm}^2 \\f_{sr} &= 18900 \text{ kg/cm}^2 \\f_y &= 4200 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Estribos)} \\A_{sp} &= 4 \text{ Torones } \phi \frac{1}{2}''\end{aligned}$$



A) Sección 1 a medio peralte del plano de apoyo:

$$V_u = 14.47 \text{ T} ; \quad M_u = 4.08 \text{ T-m}$$

Cortante resistente del concreto.

Condiciones de presfuerzo: Torones adheridos fuera de la zona de transferencia.

Por lo tanto, es aplicable la fórmula 2-19, que para el caso de vigas " T " queda:

$$V_{CR} = F_R (b'd + t^2) \left( 0.15 \sqrt{f^*c} + 50 \frac{Vd_p}{M} \right)$$

Pero:

$$V_{CR} \geq 0.5 F_R b d \sqrt{f^*c} \quad y \quad V_{CR} \leq 1.3 F_R b d \sqrt{f^*c}$$

Siempre que se cumpla:

$$h < 70 \text{ cm} \quad y \quad \frac{h}{b'} < 6$$

Sustituyendo:

$$F_R = 0.8$$

$$b' = (9 + 14) / 2 = 11.5 \text{ cm}$$

$$d = 0.8 h = 0.8 \times 50 = 40 \text{ cm}$$

$$t = 5 \text{ cm}$$

$$f^*c = 0.8 f''c = 0.8 \times 350 = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_u = 14.47 \text{ T}$$

$$M_u = 4.08 \text{ T-m}$$

$$d_p = 42 \text{ cm}$$

Por tanto:

$$V_{CR} = 0.8 (11.5 \times 40 + 5^2) \left( 0.15 \sqrt{280} + 50 \frac{14.47 \times 0.42}{4.08} \right) = 29871 \text{ kg}$$

$$0.5 F_R b d \sqrt{f^* c} = 0.5 \times 0.8 \times 11.5 \times 40 \sqrt{280} = 3078 \text{ kg}$$

$$1.3 F_R b d \sqrt{f^* c} = 1.3 \times 0.8 \times 11.5 \times 40 \sqrt{280} = 8005 \text{ kg}$$

$$V_{CR} = 8.00 T$$

Puesto que:

$$h = 50 \text{ cm} < 70 \quad \text{y} \quad h/b' = 50/11.5 = 4.34 < 6$$

Cálculo del refuerzo:

Con estribos del N° 2.5 2 ramas  $A_v = 0.98 \text{ cm}^2$  a  $90^\circ$

$$S = \frac{F_R A_v f_y d}{V_u - V_{CR}} \leq \frac{F_R A_v f_y}{3.5b}$$

Como:

$$S = \frac{F_R A_v f_y d}{V_u - V_{CR}} = \frac{0.8 \times 0.98 \times 4200 \times 40}{(14.47 - 8.0)10^3} = 20.35 \text{ cm}$$

$$\frac{F_R A_v f_y}{3.5b} = \frac{0.8(0.98)4200}{3.5(11.5)} = 81.8 \text{ cm}$$

Puesto que:

$$1.5 F_R b d \sqrt{f^* c} = 1.5 \times 0.8 \times 11.5 \times 40 \sqrt{280} = 9236 \text{ kg} < V_u$$

$$\text{y } 2.5 F_R b d \sqrt{f^* c} = 2.5 \times 0.8 \times 11.5 \times 40 \sqrt{280} = 15394 \text{ kg} > V_u$$

$$S_{\text{máx}} = 0.37 h = 0.37 \times 50 = 18.5 \text{ cm}$$

$$\therefore S = 18 \text{ cm}$$

B) Sección 2 al cuarto del claro:

$$V_u = 12.0 T ; \quad M_u = 25.92 T\cdot m$$

Sustituyendo en:

$$V_{CR} = F_R (b' d + t^2) (0.15 \sqrt{f'_c} + 50 \frac{V d_p}{M})$$

$$F_R = 0.8$$

$$b' = 11.5 \text{ cm}$$

$$d = 40 \text{ cm}$$

$$d_p = 42 \text{ cm}$$

$$t = 5 \text{ cm}$$

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_u = 12 T$$

$$M_u = 25.92 T\cdot m$$

Resulta:

$$V_{CR} = 0.8 (11.5 \times 40 + 5^2) (0.15 \sqrt{280} + 50 \frac{12 \times 0.42}{25.92}) = 4746 \text{ kg}$$

$$0.5 F_R \sqrt{f'_c} b d = 3078 \text{ kg}$$

$$1.3 F_R \sqrt{f'_c} b d = 8005 \text{ kg}$$

$$\therefore V_{CR} = 4.74 T$$

Siendo:

$$S = \frac{F_R A_s f_y d}{V_u - V_{CR}} = \frac{0.8 \times 0.98 \times 4200 \times 40}{(12.0 - 4.74)10^3} = 18.14 \text{ cm}$$

Puesto que:

$$\frac{F_R A_v f_y}{3.5b} = 81.8 \text{ cm}$$

$$y \quad 1.5 F_R \sqrt{f^* c} < V_u < 2.5 F_R \sqrt{f^* c}$$

$$S_{\text{máx}} = 0.37 h = 0.37 \times 50 = 18.5 \text{ cm}$$

$$\therefore S = 18 \text{ cm}$$

C) Sección 3 al centro del claro:

$$V_u = 9.0 \text{ T} ; \quad M_u = 46.92 \text{ T}\cdot\text{m}$$

Sustituyendo en:

$$V_{CR} = F_R (b' d + t^2) \left( 0.15 \sqrt{f^* c} + 50 \frac{V d_p}{M} \right)$$

$$F_R = 0.8$$

$$b' = 11.5 \text{ cm}$$

$$t = 5 \text{ cm}$$

$$f^* c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_u = 9.0 \text{ T}$$

$$M_u = 46.92 \text{ T}\cdot\text{m}$$

$$d_p = 42 \text{ cm}$$

Se tiene:

$$V_{CR} = 0.8 (11.5 \times 40 + 5^2) \left( 0.15 \sqrt{280} + 50 \frac{9 \times 0.42}{46.92} \right) = 2536 \text{ kg}$$

$$V_{CR} \geq 0.5 F_R h d \sqrt{f^* c} = 3078 \text{ kg}$$

$$V_{CR} = 3.078 T$$

Con estribos N° 2.5 dos ramas:

$$S = \frac{F_R A_s f_y d}{V_u - V_{CR}} = \frac{0.8 \times 0.98 \times 4200 \times 40}{(8 - 3.078)10^3} = 22.24 \text{ cm} < \frac{F_R A_s f_y}{3.5b}$$

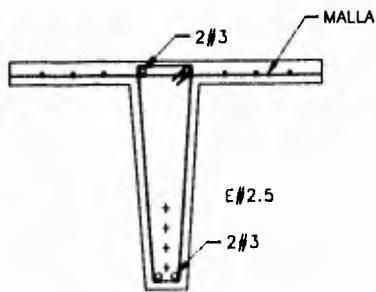
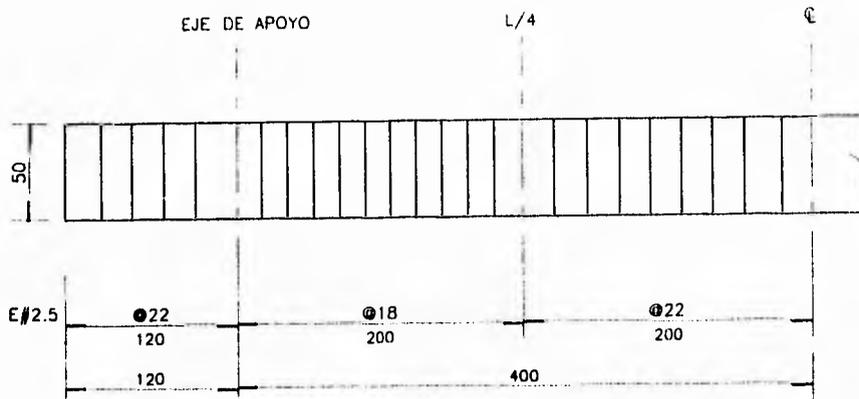
$$\text{como } V_u < 1.5 F_R b d \sqrt{f^* c}$$

$$S_{\text{máx}} = 0.75 h = 37 \text{ cm}$$

$$\therefore S = 22 \text{ cm}$$

Puesto que en los volados ocurre la transferencia del presfuerzo, estos tramos deben tratarse como reforzados; es decir, en estas zonas no se considera efectiva la participación del presfuerzo. Por lo tanto, en los volados se puede colocar el acero transversal mínimo y por facilidad se pondrá el mismo refuerzo ( N° 2.5 en dos ramas ) a la separación máxima correspondiente  $S = d / 2 = 22 \text{ cm}$ .

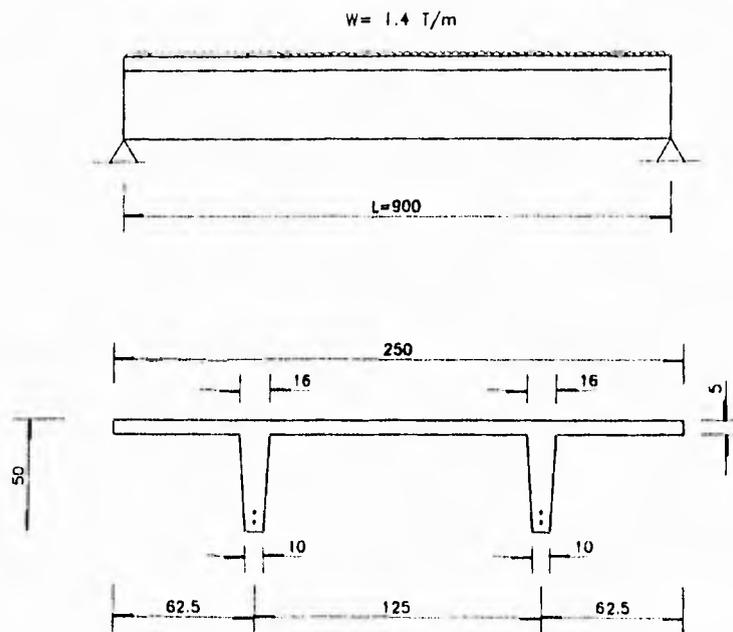
Finalmente, el refuerzo transversal teórico se muestra en la siguiente figura:



**SECCION TIPO**

#### 4.5 CALCULO DE ESFUERZOS EN LA TRANSFERENCIA DEL PRESFUERZO Y BAJO CARGAS DE SERVICIO. VIGA DE SECCION SIMPLE.

Revisar los esfuerzos en el concreto durante la transferencia del presfuerzo y bajo cargas de servicio para la viga de sección " T " simplemente apoyada que se muestra en la figura. La carga indicada es de servicio y no incluye su peso propio.



**Materiales:**

*Acero: 4 Tor.  $\phi \frac{1}{2}$ "*

*Concreto:  $f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$*

*Al detensar:  $f'_{ci} = 0.8 f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$*

*Acero de refuerzo:  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$*

Acero de presfuerzo:  $f_{sr} = 18900 \text{ kg/cm}^2$

Tensado inicial:  $74 \% f_{sr}$

Pérdidas instantáneas:  $5 \%$

Total de pérdidas a largo plazo:  $20 \%$

Propiedades:

$$A = 2420 \text{ cm}^2 \qquad y_l = 36.25 \text{ cm} \qquad S_l = 14448 \text{ cm}^3$$

$$I = 523760 \text{ cm}^4 \qquad y_s = 13.75 \text{ cm} \qquad S_s = 38092 \text{ cm}^3$$



Esfuerzos permisibles en el concreto:

En la transferencia:

$$\text{Tensión } \sqrt{f'c_i} = \sqrt{280} = 16.73 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Compresión } 0.6 f'c_i = 168 \text{ kg/cm}^2$$

Bajo cargas de servicio:

$$\text{Tensión: } 1.6 \sqrt{f'c} = 1.6 \sqrt{350} = 29.93 \text{ kg/cm}^2$$

$$3.2 \sqrt{f'_c} = 3.2 \sqrt{350} = 59.86 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Siempre que se justifique que el comportamiento del elemento es el adecuado).}$$

$$\text{Compresión: } 0.45 f'_c = 157.5 \text{ kg/cm}^2$$

**Esfuerzos permisibles en el acero de presfuerzo:**

$$\text{Debidos a la fuerza aplicada por el gato} = 0.8 f_{sr}$$

$$\text{Inmediatamente después de la transferencia} = 0.7 f_{sr}$$

**A) Cálculo de esfuerzos bajo cargas de servicio:**

$$\text{Cargas: } \omega = 1.40 \text{ T/m}$$

$$\omega_{\text{propio}} = 0.58 \text{ T/m}$$

$$\omega_T = 1.98 \text{ T/m}$$

**Momento al centro del claro:**

$$M = \omega \frac{L^2}{8} = \frac{1.98(9)^2}{8} = 20.04 \text{ T-m} = 20.04 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$\text{Tensión inicial en el acero de presfuerzo} = 0.74 \times 18900 = 13986 \text{ kg/cm}^2$$

**Presfuerzo efectivo ( para 20 % de pérdidas a largo plazo ):**

$$f_{pe} = 0.8 \times 13986 = 11189 \text{ kg/cm}^2$$

$$P = A_{sp} f_{pe} = 3.96 \times 11189 = 44307 \text{ kg ( 4 toneladas )}$$

Excentricidad.

$$e = y_i - e' = 36.25 - 7.5 = 28.75 \text{ cm}$$

Esfuerzo en la fibra inferior ( tensión ):

$$f_i = -\frac{P}{A} - \frac{Pe}{S_i} + \frac{M}{S_i} = -\frac{44307}{2420} - \frac{44307(28.75)}{14448} + \frac{20.04 \times 10^5}{14448}$$

$f_i = 32.27 \text{ kg/cm}^2 > 29.93$  valor que excede ligeramente al esfuerzo permisible de  $29.93 \text{ kg/cm}^2$ . Sin embargo, como resulta muy inferior a  $59.86 \text{ kg/cm}^2$  puede considerarse que este esfuerzo es aceptable y asumir que esta diferencia no tiene influencia significativa en el comportamiento del elemento. Es recomendable, en general, como medida preventiva, colocar algo de acero de refuerzo en la fibra extrema de la zona precomprimida.

Esfuerzo en la fibra superior ( compresión ):

$$f_s = -\frac{P}{A} + \frac{Pe}{S_s} - \frac{M}{S_s} = -\frac{44307}{2420} + \frac{44307(28.75)}{38092} - \frac{20.04 \times 10^5}{38092}$$

$$f_s = -37.47 \text{ kg/cm}^2 \therefore 37.47 < 157.5 \text{ kg/cm}^2$$

B) Cálculo de esfuerzos en la transferencia:

$$\text{Tensado inicial} = 0.74 f_{sr}$$

Presfuerzo inicial ( 5 % de pérdidas instantáneas )

$$f_{pi} = 0.95 \times 0.74 f_{sr} = 0.70 f_{sr} = 0.70 \times 18900 = 13230 \text{ kg/cm}^2$$

Sección en el extremo:

$$P = A_{sp} f_{pi} = 3.96 \times 13230 = 52391 \text{ kg}$$

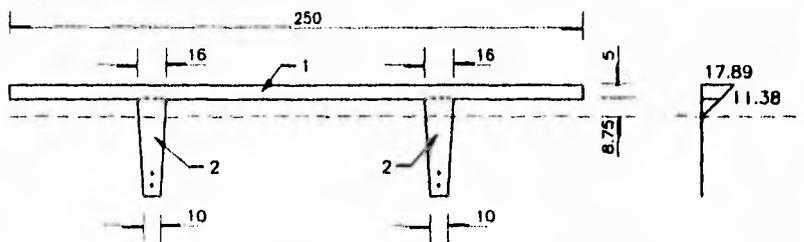
$$e = y_i - e' = 28.75 \text{ cm}$$

Esfuerzo en la fibra superior ( se considera  $M = 0$  ) ( Tensión ):

$$f_i = -\frac{P}{A} + \frac{Pe}{S_i} = -\frac{52391}{2420} + \frac{52391(28.75)}{38092} = 17.89 > 16.73 \text{ kg/cm}^2$$

∴ Se colocará acero de refuerzo:

$$\text{Suponiendo } f_s = 0.6 f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$$



$$T_1 = \frac{17.89 + 11.38}{2} \times 250 \times 5 = 18294 \text{ kg}$$

$$T_2 = \frac{11.38}{2} \times 25 \times 8.75 = 1224 \text{ kg}$$

$$T = 19518 \text{ kg}$$

$$A_s = \frac{T}{f_s} = \frac{19518}{2530} = 7.71 \text{ cm}^2 \quad 4 \text{ Vars. Núm. 5} \quad A_s = 7.92 \text{ cm}^2$$

**Esfuerzo en la fibra inferior ( $M = 0$ ) (Compresión):**

$$f_i = -\frac{P}{A} - \frac{Pe}{S_i} = -\frac{52391}{2420} - \frac{52391(28.75)}{14448} = -125.89 \text{ kg/cm}^2$$

$$\therefore 125.89 \text{ kg/cm}^2 < 168 \text{ kg/cm}^2$$

**Sección al centro del claro:**

$$\omega_{\text{papo}} = 0.58 \text{ T/m}$$

$$M = \frac{\omega L^2}{8} = \frac{0.58(9)^2}{8} = 5.87 \text{ T-m}$$

**Esfuerzo en la fibra superior (Tensión):**

$$f_i = -\frac{P}{A} + \frac{Pe}{S_i} - \frac{M}{S_i} = -\frac{52391}{2420} + \frac{52391(28.75)}{38092} - \frac{5.87 \times 10^5}{38092} = 2.48 \text{ kg/cm}^2$$

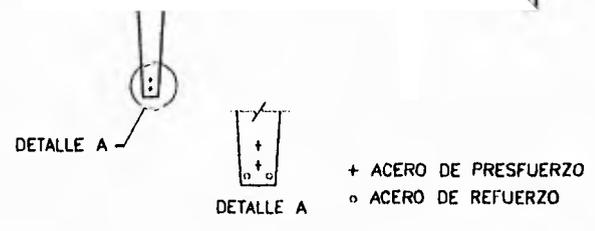
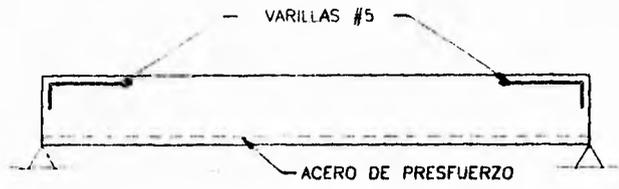
$$f_s = 2.48 \text{ kg/cm}^2 < 16.73 \text{ kg/cm}^2$$

**Esfuerzo en la fibra inferior (Compresión):**

$$f_i = -\frac{P}{A} - \frac{Pe}{S_i} + \frac{M}{S_i} = -\frac{52391}{2420} - \frac{52391(28.75)}{14448} + \frac{5.87 \times 10^5}{14448} = -85.27 \text{ kg/cm}^2$$

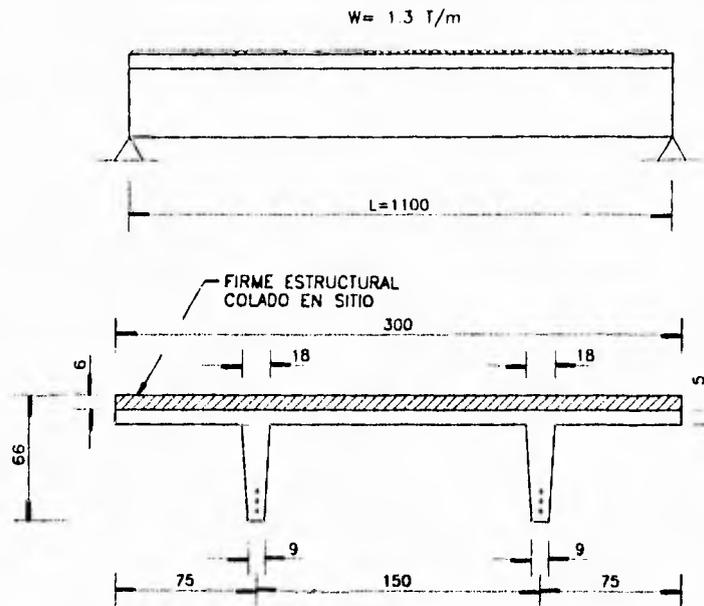
$$f_i = 85.27 \text{ kg/cm}^2 < 168 \text{ kg/cm}^2$$

**Finalmente queda:**



#### 4.6 CALCULO DE LOS ESFUERZOS EN LA TRANSFERENCIA DEL PRESFUERZO Y BAJO CARGAS DE SERVICIO. VIGA DE SECCION COMPUESTA.

Para la viga doble "T" de sección compuesta que se muestra en la figura, revisar los esfuerzos en el concreto durante la transferencia del presfuerzo y bajo cargas de servicio. La carga indicada es de servicio y no incluye  $P_0P_0$ .



Constantes de diseño:

Concreto prefabricado:  $f_{c1} = 350 \text{ kg/cm}^2$  (clase 1)

Al detensar:  $f_{ci1} = 0.8 f_{c1} = 280 \text{ kg/cm}^2$

Concreto colado en sitio:  $f_{c2} = 250 \text{ kg/cm}^2$  (clase 1)

Acero de presfuerzo:  $f_{sr} = 18900 \text{ kg/cm}^2$

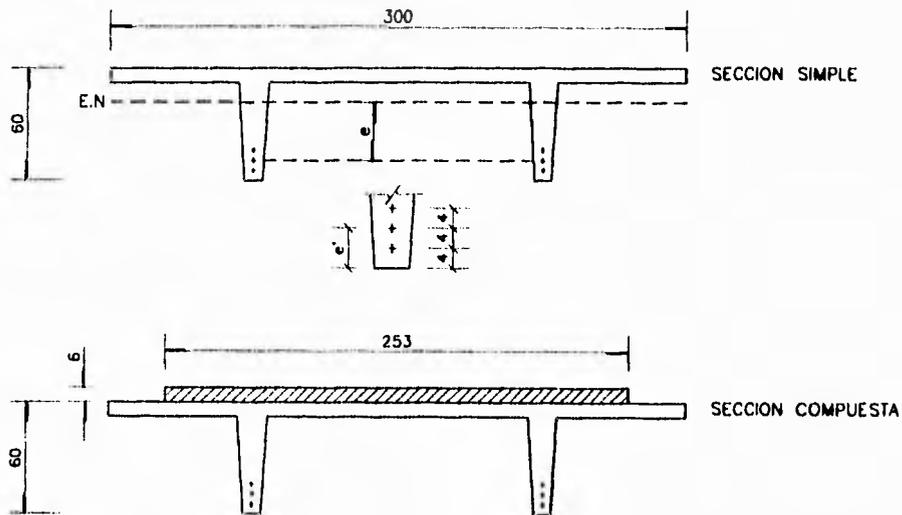
$$A_{sp} = 6 \text{ torones } \phi 1.2'' = 5.94 \text{ cm}^2$$

Pérdidas instantáneas: 5 %

Total de pérdidas a largo plazo: 20 %

Tensión inicial: 74 %

Propiedades de la sección:

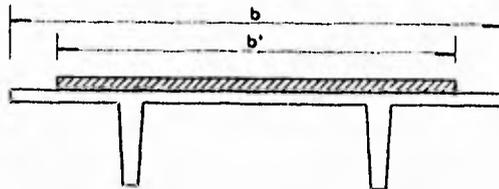


Sección transformada:

$$b' = \eta b$$

$$\eta = \frac{E_{c2}}{E_{c1}} = \frac{k \sqrt{f'_{c2}}}{k \sqrt{f'_{c1}}}$$

$$\therefore b' = b \sqrt{f'_{c2} / f'_{c1}}$$



$$b' = 300 \sqrt{250/350} = 253 \text{ cm}$$

**Sección simple**

$$A_{ss} = 2985 \text{ cm}^2$$

$$I_{ss} = 905370 \text{ cm}^4$$

$$y_{iss} = 44.10 \text{ cm}$$

$$y_{sss} = 15.90 \text{ cm}$$

$$S_{iss} = 20532 \text{ cm}^3$$

$$S_{sss} = 56925 \text{ cm}^3$$

**Sección compuesta**

$$A_{sc} = 4503 \text{ cm}^2$$

$$I_{sc} = 1270391 \text{ cm}^4$$

$$y_{isc} = 50.47 \text{ cm}$$

$$y_{iss} = 15.53 \text{ cm}$$

$$S_{isc} = 25172 \text{ cm}^3$$

$$S_{iss} = 81793 \text{ cm}^3$$

**Esfuerzos permisibles en el concreto:**

**Bajo cargas de servicio:**

$$\text{Compresión} = 0.45 f'_{c2} = 0.45 (250) = 112.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Tensión} = 1.6 \sqrt{f'_{c1}} = 1.6 \sqrt{350} = 29.93 \text{ kg/cm}^2$$

**En la transferencia:**

$$\text{Compresión} = 0.6 f'_{c1} = 0.6 (280) = 168 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Tensión} = \sqrt{f'_{c1}} = \sqrt{280} = 16.73 \text{ kg/cm}^2$$

**Esfuerzos en el acero de pretensado:**

$$\text{Tensión inicial} = 0.74 f_{sr} = 0.74 (18900) = 13986 \text{ kg/cm}^2$$

$$\begin{aligned} \text{Inmediatos a la transferencia (5 \% de pérdidas)} &= \\ &= 0.74 \times 0.95 f_{sr} = 0.70 \times 18900 = 13286 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

A) Cálculo de esfuerzos bajo cargas de servicio:

1a. Etapa. Sección simple:

Cargas de  $P_oP_o$  y firme

<i>Firme</i>	= 144 kg/m <sup>2</sup>	
<i>CM adicional</i>	= 20 kg/m <sup>2</sup>	(Reglamento)
	= 164 kg/m <sup>2</sup>	
<i>Ancho tributario</i>	= 3.0 m	
	= 492 kg/m	
	$\omega_{P_oP_o} = 716 \text{ kg/m}$	
	= 1208 kg/m = 1.208 T/m	

$$M = \frac{\omega_s L^2}{8} = \frac{1.208(11)^2}{8} = 18.271 \text{ T}\cdot\text{m}$$

Presfuerzo efectivo ( para 20% de pérdidas a largo plazo ).

$$f_{pe} = 0.8 \times 0.74 \times 18900 = 11189 \text{ kg/cm}^2$$

$$P = A_{sp} f_{pe} = (5.94) (11189) = 66463 \text{ kg}$$

Excentricidad:

$$e = y_i - e' = 44.10 - 8 = 36.10 \text{ cm}$$

Esfuerzo en la fibra inferior:

$$f_{i133} = -\frac{P}{A_m} - \frac{Pe}{S_{i133}} + \frac{M}{S_{i133}} = -\frac{66463}{2985} - \frac{66463(36.10)}{20532} + \frac{1827100}{20532}$$

$$f_{i133} = -50.14 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Compresión)}$$

Esfuerzo en la fibra superior:

$$f_{s133} = -\frac{P}{A_m} + \frac{Pe}{S_{s133}} - \frac{M}{S_{s133}} = -\frac{66463}{2985} + \frac{66463(36.10)}{56925} - \frac{1827100}{56925}$$

$$f_{s133} = -12.21 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Compresión)}$$

2a. Etapa. En sección compuesta:

$$a_{sc} = 1.3 \text{ T/m}$$

$$M = \frac{a_{sc}L^2}{8} = \frac{1.3(11)^2}{8} = 19.662 \text{ T-m}$$

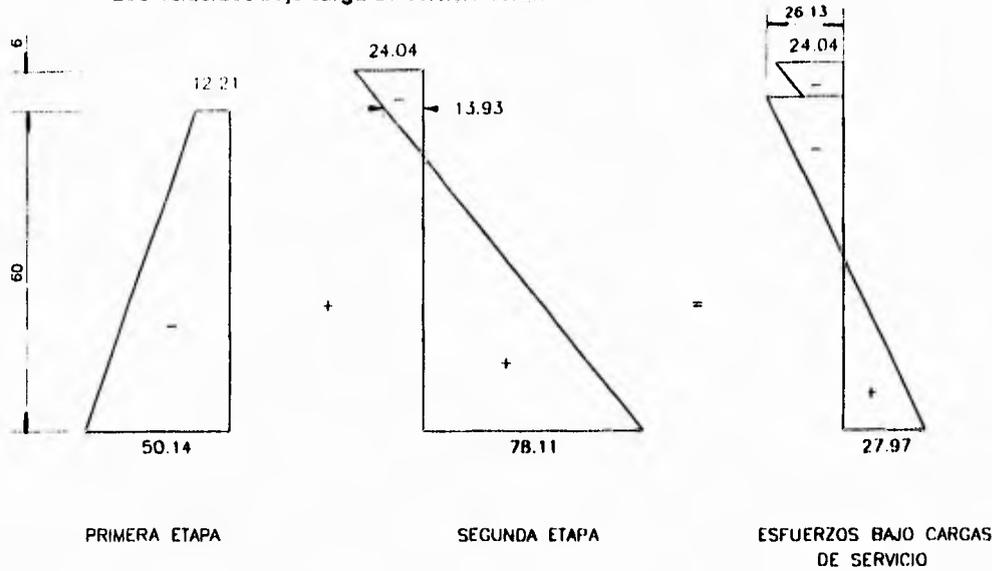
Esfuerzo en la fibra inferior:

$$f_{isc} = \frac{M}{S_{i133}} = \frac{1966200}{25172} = 78.11 \text{ kg/cm}^2$$

Esfuerzo en la fibra superior:

$$f_{ssc} = -\frac{M}{S_{xx}} = -\frac{1966200}{81793} = -24.04 \text{ kg/cm}^2$$

Los esfuerzos bajo carga de servicio serán:



En compresión:  $f_c = 26.13 \text{ kg/cm}^2 < 112.5 \text{ kg/cm}^2$

En tensión:  $f_t = 27.97 \text{ kg/cm}^2 < 29.93 \text{ kg/cm}^2$

**B) Cálculo de esfuerzos en la transferencia:**

**Presfuerzo inicial ( 5 % de pérdidas instantáneas )**

$$f_{pi} = 0.95 \times 0.74 \times 18900 = 13287 \text{ kg/cm}^2$$

**Sección en el extremo:**

$$P = (0.99) (6) (13287) = 78925 \text{ kg}$$

$$e = 36.10 \text{ cm}$$

**Esfuerzo en la fibra inferior:**

$$f_{i33} = -\frac{P}{A_{ii}} - \frac{Pe}{S_{i33}} = -\frac{78925}{2985} - \frac{78925(36.10)}{20532} = -165.21 \text{ kg/cm}^2$$

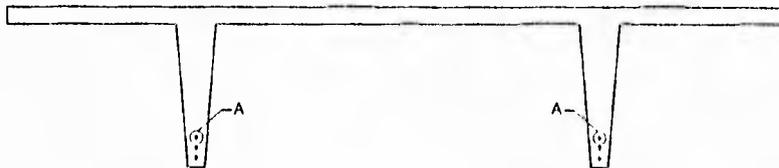
$$f_{i33} = 165.21 \text{ kg/cm}^2 < 0.6 f'_{ci1} = 168 \text{ kg/cm}^2$$

**Esfuerzo en la fibra superior:**

$$f_{s33} = -\frac{P}{A_{ss}} + \frac{Pe}{S_{s33}} = -\frac{78925}{2985} + \frac{78925(36.10)}{56925} = 23.61 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s33} = 23.61 \text{ kg/cm}^2 > \sqrt{f'_{ci1}} = 16.73 \text{ kg/cm}^2$$

Puesto que el esfuerzo de tensión en la fibra superior debido al presfuerzo excede al admisible, se enductarán 2 torones en esta zona, reduciendo de esta manera los esfuerzos de tensión a  $11.5 \text{ kg/cm}^2$ .



**Torones "A" enductos 190 cm en ambos extremos**

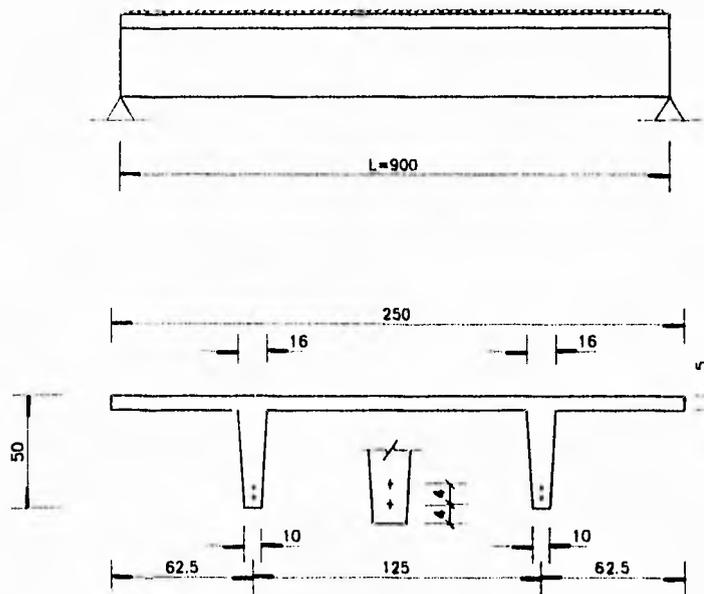
#### 4.7 CALCULO DE DEFLEXIONES EN UNA VIGA DE SECCION SIMPLE.

Para la viga que se muestra en la siguiente figura, se pide calcular:

- La deflexión inmediata.
- La deflexión diferida.
- La deflexión total.

Se supone que el 50% de la carga viva actúa de manera permanente. Las cargas indicadas son de servicio.

CM = 0.4 T/m (NO INCLUYE PESO PROPIO)  
CV = 0.8 T/m



$4 T \phi 1/2''$ ,  $e' = 6$  cm

**Materiales:**

Concreto clase 1:

$$f_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_c = 14000 \sqrt{f_c} = 14000 \sqrt{350} = 261916 \text{ kg/cm}^2$$

$$C_f = 2.4 \text{ (coeficiente de flujo plástico)}$$

$$\gamma_c = 2.4 \text{ (peso específico)}$$

**Acero de presfuerzo:**

$$A_{sp} = 4 \text{ Torones } \phi \frac{1}{2}'' = 3.96 \text{ cm}^2$$

$$f_{sr} = 18900 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Esfuerzo de tensión inicial en el acero: } 0.74 f_{sr}$$

$$E_{sp} = 1.9 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

**Constantes de Cálculo**

**Pérdidas de presfuerzo:**

*Instantáneas:* 5 %

*A largo plazo:* 20 %

$$\begin{aligned} \text{Esfuerzo en el acero inmediato a la transferencia} &= \\ &= 0.74 \times 0.95 f_{sr} = 0.7 f_{sr} = 13286 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Esfuerzo efectivo en el acero de presfuerzo} &= \\ &= 0.74 \times 0.8 f_{sr} = 11189 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

**Propiedades de la sección:**

$$A = 2420 \text{ cm}^2$$

$$y_i = 36.25 \text{ cm}$$

$$y_s = 13.75 \text{ cm}$$

$$I = 523760 \text{ cm}^4$$

$$S_i = 14448 \text{ cm}^3$$

$$S_s = 38092 \text{ cm}^3$$

**Carga de corta duración:**

$$\omega_i = \omega_{CM} + \omega_{PoPo} + \omega_{CV}$$

$$\omega_{PoPo} = \gamma_c A_c = (2.4)(0.242) = 0.58 \text{ T/m}$$

$$\omega_i = 0.4 + 0.58 + 0.8 = 1.78 \text{ T/m}$$

**Carga permanente:**

$$\omega_o = \omega_{CM} + \omega_{PoPo} + 0.5 \omega_{CV}$$

$$\omega_o = 0.4 + 0.58 + 0.5(0.8)$$

$$\omega_o = 1.38 \text{ T/m}$$

**A) Cálculo de la deflexión inmediata.**

$$\Delta_i = \Delta_{aM} - \Delta_{pi}$$

$\Delta_{aM}$  = Deflexión debida a las cargas de corta duración.

$\Delta_{pi}$  = Deflexión debida al presfuerzo inmediato a la transferencia.

$$\Delta_{ax} = \frac{5}{384} \frac{\omega_i L^4}{E I_e}$$

donde:

- $\omega_i$  = Carga de corta duración.
- $L$  = Longitud de la viga.
- $E_c$  = Módulo de elasticidad del Concreto.
- $I_e$  = Momento de inercia equivalente.

El momento de inercia equivalente se expresa:

$$I_e = \left( \frac{M_{ag}}{M_{máx}} \right)^3 I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{ag}}{M_{máx}} \right)^3 \right] I_{ag}$$

Donde:

- $M_{ag}$  = Momento de agrietamiento.
- $I_g$  = Momento de inercia de la sección total.
- $M_{máx}$  = Momento máximo.
- $I_{ag}$  = Momento de inercia de la sección transformada agrietada.

Para el caso particular en que el esfuerzo de tensión en la zona precomprimida sea menor o igual al módulo de ruptura del concreto, el momento de inercia de la sección total es igual al momento de inercia equivalente; es decir:

$$\text{Si } f_t \leq 2 \sqrt{f'c}$$

$$\text{Entonces: } M_{máx} \leq M_l \text{ y } I_e = I_g$$

Cálculo del momento de inercia equivalente:

Módulo de ruptura:

$$\bar{f}_t = 2 \sqrt{f'c} = 2 \sqrt{350} = 37.41 \text{ kg/cm}^2$$

Presfuerzo efectivo:

$$P = 3.96 \times 11189 = 44308 \text{ kg}$$

Excentricidad del presfuerzo:

$$e = y_i - e' = 36.25 - 6 = 30.25 \text{ cm}$$

El esfuerzo de tensión al ocurrir el agrietamiento será:

$$f_t = -\frac{P}{A} + \frac{M_{ag} - Pe}{S_i}$$

Despejando  $M_{ag}$  se tiene:

$$M_{ag} = \left( f_t + \frac{P}{A} \right) S_i + Pe$$

Sustituyendo:

$$M_{ag} = \left( 37.41 + \frac{44308}{2420} \right) 14448 + 44308 \times 30.25 = 2145346 \text{ kg-cm}$$

$$M_{ag} = 21.45 \text{ T-m}$$

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{\alpha L^2}{8} = \frac{1.78(9)^2}{8} = 18.02 \text{ T-m}$$

$$\therefore M_{m\acute{a}x} < M_{ag} ; \quad I_e = I_g$$

$$\Delta_{ax} = \frac{5}{384} \frac{\omega L^4}{E_c I_e} = \frac{5 \times 17.8 \times 900^4}{384 \times 14000 \sqrt{350} \times 523760} = 1.11 \text{ cm} \downarrow$$

$$\omega_i = 1.78 \text{ T/m} = 17.80 \text{ kg/cm}$$

$$L = 900 \text{ cm}$$

$$E_c = 14000 \sqrt{350} = 261916 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_e = 523760 \text{ cm}^4$$

Por otra parte, si se admite un diagrama uniforme de curvaturas igual a  $P_i e / EI$  la deflexión debida al presfuerzo estará dada por:

$$\Delta_{pi} = \frac{P_i e L^2}{8 E_c I_e}$$

En donde:

$$P_i = \text{Presfuerzo inicial} = 13286 \times 3.96 = 52612 \text{ kg}$$

$$e = \text{excentricidad del presfuerzo} = y_1 - e' = 36.25 - 6 = 30.25 \text{ cm}$$

Por tanto:

$$\Delta_{pi} = \frac{52612 \times 30.25 (900)^2}{8 \times 14000 \sqrt{350} \times 523760}$$

$$\Delta_{pi} = 1.17 \text{ cm} \uparrow$$

Por tanto, la deflexión inmediata es:

$$\Delta_i = 1.11 - 1.17$$

$$\Delta_i = -0.06 \text{ cm} \uparrow$$

B) Cálculo de la deflexión diferida.

La deflexión diferida está dada por la expresión:

$$\Delta_o = \Delta_{abo} - \Delta_{po}$$

$$\Delta_{abo} = \lambda \frac{5}{384} \frac{\alpha \omega L^4}{EI_s}$$

$$\omega_o = 1.38 \text{ T/m}$$

$$\lambda = \frac{2}{1+50p'}$$

$p' = 0$  (no se considera acero de refuerzo en compresión)

$$\therefore \lambda = 2$$

Sustituyendo se tiene:

$$\Delta_{abo} = (2) \frac{5 \times 13.8(900)^4}{384 \times 14000 \sqrt{350 \times 523760}}$$

$$\Delta_{abo} = 1.72 \text{ cm} \downarrow$$

por otra parte:

$$\Delta_{po} = \frac{\Delta_w + \Delta_p}{2} C_f - (\Delta_w - \Delta_p)$$

$$\Delta_{po} = \frac{eL^2}{8EI_s} \left[ \left( \frac{P_1 + P}{2} \right) C_f - (P_1 - P) \right]$$

En donde:

$$P_i = 52612 \text{ kg}$$

$$P = 44308 \text{ kg}$$

$$C_f = 2.4$$

$$\therefore \Delta_{po} = \frac{30.25 \times 900^2}{8 \times 14000 \sqrt{350} \times 523760} \left[ \frac{52612 + 44308}{2} \times 2.4 - (52612 - 44308) \right] =$$

$$= 2.41 \text{ cm } \uparrow$$

$$\Delta_o = \Delta_{ax} - \Delta_{po}$$

$$\Delta_o = 1.72 - 2.41 = -0.69 \text{ cm } \uparrow$$

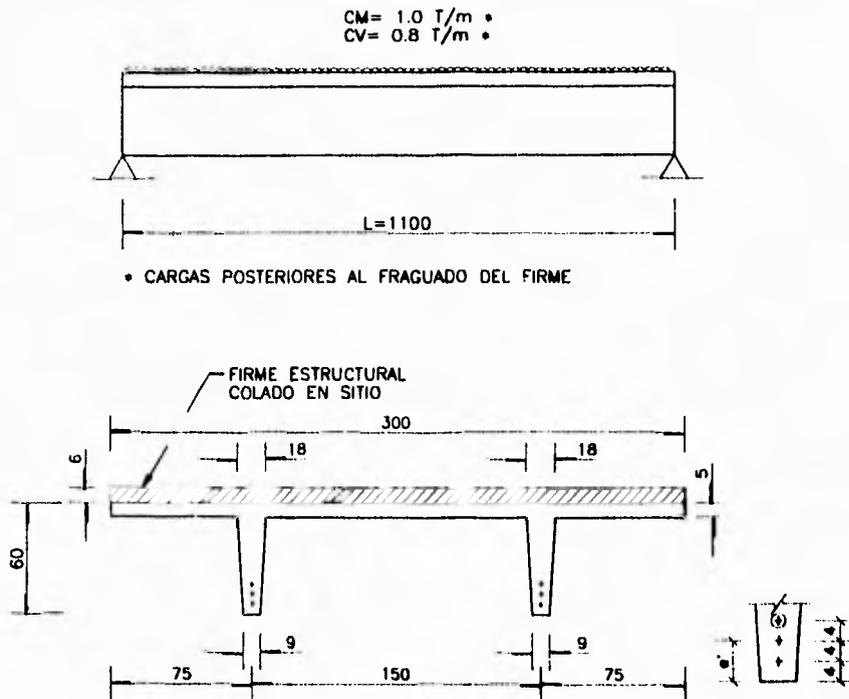
C) Cálculo de la deflexión total.

$$\Delta_T = \Delta_i + \Delta_o$$

$$\Delta_T = -0.06 - 0.69 = -0.75 \text{ cm } \uparrow$$

#### 4.8 CALCULO DE DEFLEXIONES EN UNA VIGA DE SECCION COMPUESTA.

La viga de sección doble " T " que se muestra en la figura trabaja en sección compuesta para las cargas vivas y muertas posteriores al fraguado del firme. Calcular su deflexión y compararla con la admisible, las cargas indicadas son de servicio.



$$A_{sp} = 6 T \phi \frac{1}{2}'' = 5.94 \text{ cm}^2, \quad e' = 8 \text{ cm}$$

2 Torones enductados 1.5 m ambos extremos

**Materiales:**

**Concreto prefabricado clase 1:**

$$f_{c1} = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{c1} = 14000 \sqrt{f'_{c1}} = 261916 \text{ kg/cm}^2$$

$$C_f = 2.4$$

**Concreto colado en sitio clase 1:**

$$f_{c2} = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{c2} = 14000 \sqrt{f'_{c2}} = 221359 \text{ kg/cm}^2$$

$$C_f = 2.4$$

**Acero de presfuerzo:**

$$f_{sr} = 18900 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Esfuerzo al detensar: } = 0.74 f_{sr}$$

**Pérdidas de presfuerzo:**

*Instantáneas: 5 %*

*A largo plazo: 20 %*

*Esfuerzo inicial de presfuerzo:*

$$= 0.74 \times 0.95 \times 18900 = 13286 \text{ kg/cm}^2$$

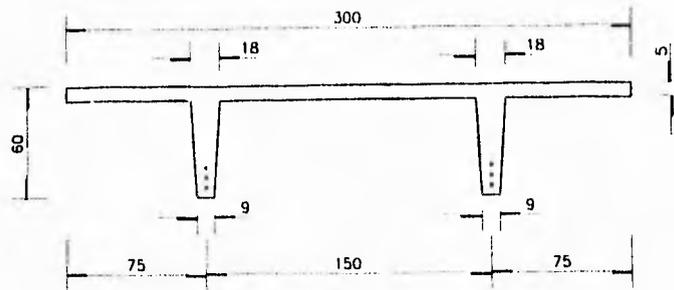
*Esfuerzo de presfuerzo efectivo =*

$$= 0.74 \times 0.8 \times 18900 = 11189 \text{ kg/cm}^2$$

**Propiedades:**

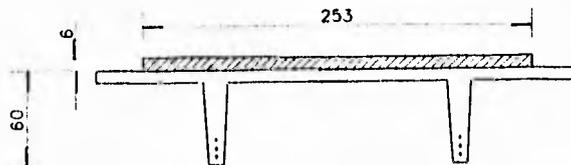
**Sección simple:**

$$\begin{aligned} A_{ss} &= 2985 \text{ cm}^2 & y_{sss} &= 15.90 \text{ cm} \\ I_{gss} &= 905419 \text{ cm}^4 & S_{iss} &= 20533 \text{ cm}^3 \\ y_{iss} &= 44.10 \text{ cm} & S_{sss} &= 56928 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



**Sección compuesta:**

$$\begin{aligned} A_{sc} &= 4503 \text{ cm}^2 & y_{ssc} &= 15.53 \text{ cm} \\ I_{gsc} &= 1270391 \text{ cm}^4 & S_{isc} &= 25172 \text{ cm}^3 \\ y_{isc} &= 50.47 \text{ cm} & S_{ssc} &= 81793 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



**Etapas de carga:**

**Cargas en sección simple:**

$$w_{poPo} = 0.2985 \times 2400 = 716 \text{ kg/m}$$

$$\omega_{firme} = 0.06 \times 3 \times 2400 = 432 \text{ kg/m}$$

$$\omega_{ss} = \omega_{PoPo} + \omega_{firme} = 716 + 432 = 1148 \text{ kg/m} = 1.15 \text{ T/m}$$

$$\therefore M = \frac{\omega L^2}{8} = 1.15 (11)^2 / 8 = 17.39 \text{ T-m}$$

**Cargas en sección compuesta:**

$$\omega_{sc} = CM + CV = 1.0 + 0.8 = 1.8 \text{ T/m}$$

$$\therefore M = 1.8 (11)^2 / 8 = 27.22 \text{ T-m}$$

**Cálculo del momento de inercia equivalente**

$$I_e = \left( \frac{M_{ag}}{M_{máx}} \right)^3 I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{ag}}{M_{máx}} \right)^3 \right] I_{ag} \leq I_g$$

**Momento de agrietamiento:**

**Sección simple:**

$$M_{agss} = \left( \bar{f}_i + \frac{P}{A_{ss}} \right) S_{iss} + Pe$$

$$\bar{f}_i = 2 \sqrt{f'c_i} = 2 \sqrt{350} = 37.41 \text{ kg/cm}^2$$

$$P = 5.94 \times 0.74 \times 0.8 \times 18900 = 66461 \text{ kg}$$

$$A_{ss} = 2985 \text{ cm}^2$$

$$S_{iss} = 20532 \text{ cm}^3$$

$$e = y_i - e' = 44.10 - 8 = 36.10 \text{ cm}$$

$$M_{agss} = \left( 37.41 + \frac{66461}{2985} \right) 20532 + 66461 \times 36.10$$

$$M_{agss} = 3624509 \text{ kg-cm} = 36.24 \text{ T-m} > 17.39 \text{ T-m}$$

Como  $M_{ag} > M_{m\acute{a}x}$ ,  $I_{ess} = I_{gss}$

**Sección compuesta:**

$$\bar{f}_i = -\frac{P}{A_u} - \frac{Pe}{S_{iu}} + \frac{M_{ss}}{S_{iu}} + \frac{M_{agsc} - M_u}{S_{iuc}}$$

$$M_{agsc} = M_u + \left( \bar{f}_i + \frac{P}{A_u} \right) S_{iuc} + \frac{Pe S_{iuc}}{S_{iu}} - \frac{M_u S_{iuc}}{S_{iu}}$$

**Siendo:**

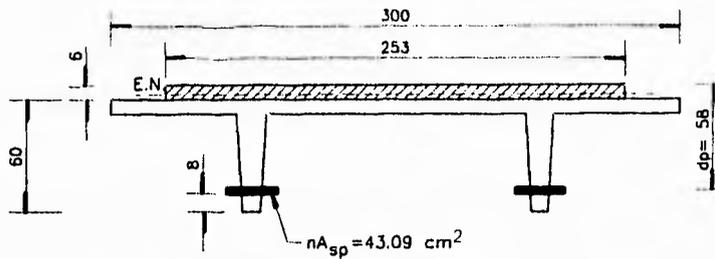
$M_{ss}$  = momento en la sección simple.

$$M_{agsc} = 17.39 \times 10^5 + \left( 37.41 + \frac{66461}{2985} \right) 25172 + \frac{66461 \times 36.10 \times 25172}{20532} -$$

$$\frac{17.39 \times 10^5 \times 235172}{25172}$$

$$M_{agsc} = 4050613 \text{ kg-cm} = 40.50 \text{ T-m}$$

$$M_{m\acute{a}x} = 17.39 + 27.22 = 44.61 \text{ T-m} > M_{ag}$$



**Sección transformada agrietada**

$$\eta = \frac{E_{sp}}{E_c} = \frac{1.9 \times 10^6}{14000 \sqrt{350}} = 7.25$$

$$\eta A_{sp} = 7.25 \times 5.94 = 43.09$$

$$\frac{b c^2}{2} = \eta A_{sp} (d_p - c)$$

$$\frac{253 c^2}{2} = 43.09 (58 - c) \quad \therefore c = 4.28 \text{ cm}$$

$$I_{ag} = \frac{253(4.28)^3}{3} + 43.09 (58 - 4.28)^2 = 130962 \text{ cm}^2$$

$$I_{asc} = \left(\frac{40.50}{44.61}\right)^3 1270391 + \left[1 - \left(\frac{40.50}{44.61}\right)^3\right] 130962$$

$$I_{asc} = 983582 \text{ cm}^4$$

**Cálculo de la deflexión instantánea:**

**Sección simple:**

$$\Delta_{iss} = \Delta_{wiss} - \Delta_{pi}$$

$$\Delta_{wiss} = \frac{5}{384} \frac{\omega_{ss} L^3}{E_{c1} I_{ss}} = \frac{5 \times 11.50 \times 1100^3}{384 \times 14000 \sqrt{350} \times 905419} = 0.92 \text{ cm} \downarrow$$

$$\omega_{ss} = 1.15 \text{ T/m} = 11.50 \text{ kg/cm}$$

$$L = 1100 \text{ cm}$$

$$E_{c1} = 14000 \sqrt{350} = 261916 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_{ss} = 905419 \text{ cm}^4$$

#### Torones sin enductado

$$\Delta_{pi1} = \frac{P_{11} e_1 L_1^2}{8 E_{c1} I_{ss}} = \frac{52612 \times 38.10 \times 1100^2}{8 \times 14000 \sqrt{350} \times 905419} = 1.28 \text{ cm} \uparrow$$

$$P_{11} = 4 (0.99) 13286 = 52612 \text{ kg}$$

$$e_1 = 44.10 - 6 = 38.10 \text{ cm}$$

$$L_1 = 1100 \text{ cm}$$

#### Torones enductados

$$\Delta_{pi2} = \frac{P_{12} e_2 L_2^2}{8 E_{c1} I_{ss}} = \frac{26306 \times 32.10 \times 800^2}{8 \times 14000 \times \sqrt{350} \times 905419} = 0.28 \text{ cm} \uparrow$$

$$P_{12} = 2 (0.99) 13286 = 26306 \text{ kg}$$

$$e_2 = 44.10 - 12 = 32.10 \text{ cm}$$

$$L_2 = 1100 - 2(150) = 800 \text{ cm}$$

$$\therefore \Delta_{pl} = 1.28 + 0.28 = 1.56 \text{ cm } \uparrow$$

$$\Delta_{iss} = 0.92 - 1.56 = -0.64 \text{ cm } \uparrow$$

### Sección compuesta

$$\Delta_{isc} = \Delta_{i\omega sc}$$

$$\Delta_{i\omega sc} = \frac{5}{384} \frac{\omega sc L^4}{E_{el} I_{sc}} = \frac{5 \times 18 \times 1100^4}{384 \times 14000 \sqrt{350} \times 983582} = 1.33 \text{ cm } \downarrow$$

$$\omega_{sc} = 1.8 \text{ T/m} = 18 \text{ kg/cm}$$

$$L = 1100 \text{ cm}$$

$$E_{el} = 14000 \sqrt{350} = 261916 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_{sc} = 983582 \text{ cm}^4$$

$$\therefore \Delta_l = \Delta_{iss} + \Delta_{isc} = -0.64 + 1.33 = 0.69 \text{ cm } \downarrow$$

Cálculo de la deflexión a largo plazo:

$$\Delta_o = \Delta_{\omega o} - \Delta_{po}$$

$$\Delta_{\omega o} = \lambda (\Delta_{\omega iss} + \Delta_{\omega isc})$$

$$\lambda = \frac{2}{1 + 50p'}$$

$$p' = 0 \quad \therefore \lambda = 2$$

$$\Delta_{ax} = 2(0.92 + 1.33) = 4.50 \text{ cm} \downarrow$$

$$\Delta_{po} = \frac{\Delta_{pi} + \Delta_p}{2} C_f - (\Delta_{pi} - \Delta_p)$$

$$\Delta_{pi} = 1.56 \text{ cm} \uparrow$$

$$\Delta_p = \frac{P_1 e_1 L_1^2}{8 E_{c1} I_{ess}} + \frac{P_2 e_2 L_2^2}{8 E_{c1} I_{ess}}$$

$$P_1 = 4 \times 0.99 \times 11189 = 44308 \text{ kg}$$

$$e_1 = 38.10 \text{ cm}$$

$$L_1 = 1100 \text{ cm}$$

$$E_{c1} = 14000 \sqrt{350} = 261916 \text{ kg/cm}^2$$

$$P_2 = 2 \times 0.99 \times 11189 = 22154 \text{ kg}$$

$$e_2 = 32.10 \text{ cm}$$

$$L_2 = 800 \text{ cm}$$

$$I_{ess} = 905419 \text{ cm}^4$$

$$\Delta_p = \frac{44308 \times 38.10 \times 1100^2}{8 \times 14000 \sqrt{350} \times 905419} + \frac{22154 \times 32.10 \times 800^2}{8 \times 14000 \sqrt{350} \times 905419}$$

$$\Delta_p = 1.32 \text{ cm} \uparrow$$

$$C_f = 2.4$$

$$\Delta_{po} = \left( \frac{1.56 + 1.32}{2} \right) 2.4 - (1.56 - 1.32) = 3.22 \text{ cm } \uparrow$$

$$\therefore \Delta_o = 4.50 - 3.22 = 1.28 \text{ cm } \downarrow$$

$$\Delta_T = \Delta_i + \Delta_o$$

$$\Delta_T = 0.69 + 1.28 = 1.97 \text{ cm } \downarrow$$

**Deflexión permisible:**

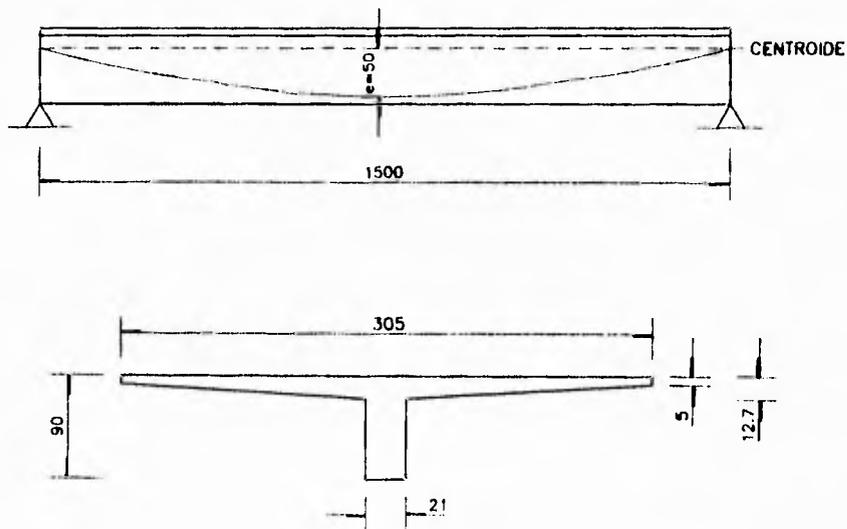
$$\Delta_{per} = \frac{L}{240} + 0.5$$

$$\Delta_{per} = \frac{1100}{240} + 0.5 = 5.08 \text{ cm } > 1.97 \text{ cm}$$

$$\therefore \Delta_{per} > \Delta_T$$

#### 4.9 PERDIDAS DE PRESFUERZO.

La viga que se muestra a continuación debe postensarse usando un cable formado por 12 torones de 1/2 pulgada de diámetro grado 270 en un ducto flexible. La tensión total del gato es de 168 T y se aplicará cuando el concreto tenga 28 días. El tensado sólo se hará desde un extremo y se ha previsto mediante pruebas que en el anclaje puede existir un deslizamiento de 0.254 cm. Hallar por separado las pérdidas de presfuerzo al final de un periodo de 5 años, durante el cual se pueden tomar en cuenta las cargas sostenidas como el peso propio de la viga.



Datos:

$$A_{sp} = 12 \times 0.99 = 11.88 \text{ cm}^2$$

$$A_c = 4403.4 \text{ cm}^2$$

$$I_c = 3049748 \text{ cm}^4$$

$$r^2 = 692.59 \text{ cm}^2$$

$$E_c = 261916 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_{sp} = 1.9 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$C_f = 2.4$$

A) Pérdidas por deslizamiento en el anclaje.

$$\Delta f_{ancl} = \frac{\Delta L}{L} E_{sp}$$

donde  $\Delta L = 0.254 \text{ cm}$   
 $L = 1500 \text{ cm}$

$$\Delta f_{ancl} = \frac{0.254}{1500} (1.9 \times 10^6) = 321 \text{ kg/cm}^2$$

B) Pérdidas por acortamiento elástico.

Con los 12 cables tensados simultáneamente con un solo gato, el acortamiento elástico del concreto ocurrirá durante la operación de tensado y se compensará totalmente mediante una tensión adicional aplicada por el gato; por tanto, la pérdida por acortamiento elástico es:

$$\Delta f_{el} = 0$$

C) Pérdidas por fricción.

De manera aproximada  $\alpha = \frac{8e}{L}$

Siendo:

$\alpha$  = Desviación del cable en radianes.

$e$  = Excentricidad al centro del claro.

$L$  = Claro.

$$\alpha = \frac{8 \times 50}{1500} = 0.27 \text{ radianes}$$

De la tabla para obtener los valores de  $K$  y  $\mu$  se obtiene para el torón de 7 alambres los siguientes valores representativos:

$$K = 0.004 ; \quad \mu = 0.20$$

$$\therefore (KL + \mu\alpha) = (0.004 \times 15 + 0.20 \times 0.27) = 0.114 < 0.30$$

Lo cual nos permite utilizar la siguiente ecuación aproximada:

$$P_o = P_x (1 + KL + \mu\alpha)$$

que puede escribirse:

$$P_o - P_x = P_x (KL + \mu\alpha)$$

$$\Delta P_{fr} = P_o - P_x = P_x (KL + \mu\alpha)$$

El esfuerzo de tensión en el gato:

$$f_{po} = \frac{168000}{11.88} = 14141 \text{ kg/cm}^2$$

El esfuerzo en el acero de tensión en el extremo del gato en este estado es igual a la tensión en el gato menos la pérdida por deslizamiento en el anclaje:

$$f_s = 14141 - 321 = 13820 \text{ kg/cm}^2$$

Aplicando la ecuación:

$$\Delta f_{fr} = f_s (KL + \alpha\mu)$$

$$\Delta f_{fr} = 13820 (0.114) = 1575 \text{ kg/cm}^2$$

Por tanto, el esfuerzo inicial en el acero después de ocurridas todas las pérdidas instantáneas es:

$$f_{pi} = f_{po} - \Delta f_{anel} - \Delta f_{el} - \Delta f_{fr}$$

$$f_{pi} = 14141 - 321 - 0 - 1575 = 12245 \text{ kg/cm}^2$$

Lo que corresponde a una fuerza pretensora inicial de :

$$P_i = 12245 \times 11.88 = 145.47 \text{ T}$$

#### D) Pérdidas por flujo plástico.

La pérdida de tensión por flujo plástico del concreto se calculará para la sección de máximo momento (centro del claro) para la condición de presfuerzo más peso propio. Con objeto de tomar en cuenta de manera aproximada la reducción gradual de la fuerza pretensora debida al flujo plástico, la fuerza pretensora a usarse en los cálculos se reducirá a  $0.90 P_i$ .

Máximo momento producido por el peso propio de la viga:

$$M_o = \frac{\omega L^2}{8} = \frac{2.4 \times 0.44034(15)^2}{8} = 29.72 \text{ T-m}$$

Por tanto, el esfuerzo de compresión del concreto a nivel del centroide del acero es:

$$f_{cs} = -\frac{0.9 P_i}{A_c} \left( 1 + \frac{e^2}{r^2} \right) + \frac{M_{\alpha e}}{L}$$

$$f_{cs} = -\frac{0.9 \times 145470}{4403} \left( 1 + \frac{50^2}{692.59} \right) + \frac{29.72 \times 10^5 \times 50}{3049748}$$

$$f_{cs} = -88.34 \text{ kg/cm}^2$$

La pérdida por flujo plástico viene dado por:

$$\Delta f_{fp} = \eta_p f_{cs} C_f$$

$$\Delta f_{fp} = \frac{E_{sp}}{E_c} f_{cs} C_f$$

Donde:

$$C_f = 2.4 \text{ (Valor recomendado cuando no se dispone de más datos)}$$

$$\Delta f_{fp} = \frac{1.9 \times 10^6}{261916} \times 88.34 \times 2.4 = 1538 \text{ kg/cm}^2$$

$$\therefore \Delta f_{fp} = 1538 \text{ kg/cm}^2$$

E) Pérdidas por contracción.

$$\Delta f_{ct} = E_{sp} \epsilon_{ct}$$

Se tomará un valor de  $\epsilon_{ct} = 0.001$  que es el recomendable para concreto curado con humedad ante la ausencia de datos específicos para calcular este valor.

$$\therefore \Delta f_{ct} = 1.9 \times 10^6 \times 0.001 = 1900 \text{ kg/cm}^2$$

**F) Pérdidas por relajamiento.**

Se tomará en cuenta los efectos combinados de flujo plástico, contracción y relajamiento empleando un valor reducido de la fuerza pretensora igual a  $0.90 P_i$ .

Por tanto, el esfuerzo correspondiente en el acero es:

Tomando como esfuerzo de fluencia para cables grado 270:

$$f_{pi} = 0.9 \times \frac{145470}{11.88} = 11020 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{py} = 15675 \text{ kg/cm}^2$$

$$\therefore \Delta f_{rel} = f_{pi} \frac{\log t}{10} \left( \frac{f_{pi}}{f_{py}} - 0.55 \right)$$

donde  $t = 44000 \text{ horas} = 5 \text{ años}$ .

Sustituyendo valores:

$$\Delta f_{rel} = 11020 \times \frac{\log 44000}{10} \left( \frac{11020}{15675} - 0.55 \right)$$

$$\Delta f_{rel} = 783 \text{ kg/cm}^2$$

**Resumen de pérdidas:**

<i>Fuente</i>	<i>Pérdidas (kg/cm<sup>2</sup>)</i>	<i>Porcentaje de pérdida de <math>f_{pi}</math></i>
<i>Deslizamiento en anclaje</i>	321	2.26
<i>Acortamiento elástico</i>	0	0
<i>Fricción</i>	1575	11.11
<i>Flujo plástico</i>	1538	10.86
<i>Contracción</i>	1900	13.40
<i>Relajamiento</i>	783	5.52

## 5. CONCLUSIONES.

Cuando se lleva a cabo el diseño de una estructura siempre se pretende llegar a obtener resultados que contemplen la compatibilidad entre la funcionalidad, estética y costo de la estructura, preestableciendo que cada elemento estructural cumple con los requisitos de seguridad y servicio establecidos en los reglamentos; estos resultados dependen en gran medida del sistema estructural empleado, ya que por lo general siempre existirán dos o más alternativas de entre las cuales habrá que elegir alguna que se ajuste a nuestras necesidades.

Al hacer la elección del sistema estructural deberán de tomarse en cuenta las ventajas y desventajas que ofrece un sistema sobre otro; por ejemplo, entre las ventajas que ofrece el concreto presforzado sobre el concreto reforzado se encuentran las siguientes:

- Se tiene mayor capacidad a flexión para una misma sección y claro.
- Se obtienen secciones más esbeltas para una misma carga.
- Mejora el comportamiento del elemento ( Deflexiones y Agrietamiento ).
- Reducción en los consumos de acero gracias a la alta resistencia de los aceros de presfuerzo.
- Disminución de los tiempos de fabricación de estructuras, debido al uso de elementos prefabricados.

Dentro de las desventajas pueden citarse las siguientes:

- Se incrementa el costo del diseño.
- Se requiere equipo especializado.
- Deberá de existir una supervisión estricta en las etapas de fabricación, transporte y montaje.
- Se requiere de mano de obra especializada.

Sin embargo, el concreto presforzado puede concebirse simplemente como una modalidad del concreto reforzado ordinario, considerando a la fuerza de presfuerzo como una sollicitación artificial que el proyectista introduce por considerarlo ventajoso.

Una vez que se ha optado por un sistema estructural a base de elementos de concreto presforzado, no deberán de perderse de vista durante el diseño características propias de este sistema que influyen en el comportamiento de la estructura en conjunto, como puede ser el hecho de que el índice de ductilidad es menor que en el caso de elementos de concreto reforzado.

La elección del sistema de presfuerzo, ya sea pretensado, postensado o incluso algún tipo de presfuerzo especial, estará condicionado por consideraciones técnicas y económicas dependiendo además de las circunstancias particulares de cada caso.

El Reglamento en sus Normas Técnicas Complementarias establece los estados límite de falla y de servicio para elementos de concreto presforzado, mismos que deberán de cumplirse con la finalidad de que la estructura tenga una respuesta adecuada ante las solicitaciones a las que se pueda estar sujeta durante su vida útil.

En los capítulos anteriores se han descrito las disposiciones reglamentarias del capítulo de Concreto Presforzado de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, a través de comentarios y ejemplos de aplicación; por lo que se puede decir que este trabajo representa una herramienta de interpretación y aplicación del Reglamento y sus Normas Técnicas Complementarias.

## **BIBLIOGRAFIA.**

1. **Eduardo Guzmán E. Manual de Diseño. Estructuras de Concreto Presforzado. FI UNAM.**
2. **Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. Gaceta oficial del Departamento de D.F. 1987.**
3. **Arthur H. Nilson. Diseño de Estructuras de Concreto Presforzado. Ed. Limusa.**
4. **Dan E. Branson. Diseño de Vigas de Concreto Presforzado. IMCYC.**
5. **José Ma. Rioboo. Concreto Presforzado. IMCYC**