

28
2EJ



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

**ANALISIS DE DEFORMACIONES
EN LOS SUELOS**

T E S I S
Que para obtener el Título de
I N G E N I E R O C I V I L
P r e s e n t a n
GERARDO ALBERTO CABADA HUERTA
ALEJANDRO VALLARINO MARUSICH



DIRECTOR DE TESIS: M. en I. AGUSTIN DEMENEGHI COLINA

FALLA DE ORIGEN

México, D. F.

1995



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-1-004/93

Señores:
CABADA HUERTA GERARDO ALBERTO
VALLARINO MARUSICH ALEJANDRO
Presente.

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **M.I. AGUSTIN DEMENEGHI COLINA**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrollen ustedes como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

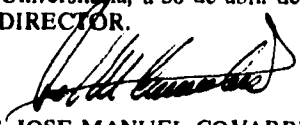
"ANALISIS DE DEFORMACIONES EN LOS SUELOS"

- I. INTRODUCCION.**
- II. FUNDAMENTOS DEL COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES.**
- III. ELEMENTOS DE MECANICA DE LOS SUELOS.**
- IV. DEFORMACIONES EN SUELOS GRANULARES.**
- V. DEFORMACIONES EN SUELOS COHESIVOS.**
- VI. INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA.**
- VII. CONCLUSIONES.**

Ruego a ustedes cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo les recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberán prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 30 de abril de 1993.
EL DIRECTOR.


ING. JOSE MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

JMCS/RCR*nl

A mis padres:

**ING. GERARDO CABADA LAGUNES
LIC. MARINEYLA HUERTA DELGADO**

**Por que sin su gran amor y apoyo,
hubiera sido imposible llegar a
este momento.**

A mis hermanas:

**Marineyla, Nayelli y Zucil, por el
simple hecho de estar siempre a mi
lado.**

A Norma:

***por ser la principal inspiración
para llegar a este momento.***

***A mis profesores, por todas las enseñanzas
que me proporcionaron.***

Con especial agradecimiento a:

M. en I. Agustín Demenoghi Colina.

Ing. Héctor Saugines García.

Ing. Ricardo Padilla Velázquez.

Ing. Héctor A. Logorrata Cuevas.

A mis compañeros y amigos.

A los Códores:

***por ser parte esencial de mi formación
y proporcionarme a los mejores amigos
de mi vida.***

***A mi Universidad y Facultad de Ingeniería,
por la inmejorable formación que he recibido.***

DEDICATORIAS

A DIOS: Por darme la oportunidad de estar en este mundo y tratar de ser un hombre honesto, de bien y provecho.

A MAMA (q.e.p.d): Por darme la vida y la más importante educación, mis principios y moral, por enseñarme los buenos sentimientos de la vida, por seguir siendo uno de mis apoyos principales, por seguir sintiendo su amor, cariño y cuidado en todo momento, por el gran esfuerzo que hizo al estar sola logrando salir adelante los tres y por seguir cuidandome e intercediendo por mi desde alla arriba.

A MIS PADRES (Don Pablo y Doña Titi): Por seguir con mi educación y darme todas las herramientas para enfrentarme a la vida, por los buenos principios, por estar presentes siempre, por su apoyo en las buenas y en las malas, por todo su amor y por el increíble esmero que ponen para lograr que yo llegue a este momento tan importante y ser todo lo que soy.

MARIA: Por ser mi apoyo principal desde aquel día, por estar conmigo y ayudarme a ser mucho de lo que soy, por escucharme y aconsejarme incondicionalmente, por hacerme ver mis defectos y a corregirlos, pero principalmente por quererme como tú lo haces.

A MIS TIOS (Esperanza y Alfredo, Ma.del Carmen, Pablo y Norma, Antonio y Estela, Lourdes, Eduardo y Marcela): Por ser un hijo más para ustedes, por apoyarme y aconsejarme en cualquier circunstancia, contribuyendo así con mi educación y por el gran cariño que me dan.

A MIS PRIMOS: (Espe, Luli, Juanpa, Paola, Toño, Estela, Caro, Andrés y Marcelita): Por ser como mis hermanos y por el gran cariño que me han brindado.

RAUL: Por cuidar a Maria, por tu amistad, consejos y cariño en todo momento.

AL ING. JOSÉ MANUEL COVARRUBIAS SOLÍS: Por todo su apoyo, por su gran ayuda, por tantos consejos para tratar de formar a un buen Ingeniero y principalmente por su amistad.

A TODOS MIS MAESTROS: Ing. Ana Aurora Aburto, Lic. Ma.de la Luz Covarrubias, Ing. Agustín Demeneghi, Ing. Margarita Puebla, Ing. Francisco Gómez Vega, Ing. Hector Legorreta, Ing. Ricardo Padilla, Ing. Humberto Puebla, Ing. Hector Sanginés, Ing. Luis Zárate, etc. Por darme su saber, apoyo y amistad.

A MIS COMPAÑEROS Y AMIGOS: Armando y Sandra, Humberto, Oscar, Tony, Juan, Tatiana y Dunia; Por todas las largas jornadas de estudio, por su amistad y todos los buenos momentos.

AL FOOTBALL AMERICANO: Por enseñarme lo que es disciplina, responsabilidad y por darme tantas satisfacciones.

A LOS CÓNDORES 1990, 1991, 1992 y 1993: Por su amistad y cariño, por esos dos campeonatos nacionales y por su apoyo en mis lesiones.

A TODOS MIS COACHES: Por todos los cousejos, por enseñarme a tratar de ser el número 1, por su apoyo y amistad.

A TODAS LAS FAMILIAS (Cabada Huerta, Cajiga Castillo, Diaz-Infante Chapa, Ibarrola Díaz, Rangel de la Garza): Por su gran ayuda y cariño a lo largo de la carrera.

A LA FACULTAD DE INGENIERÍA: Por la hospitalidad de sus aulas, laboratorios.

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO: Por ser mi Alma Mater, por dejarme ser uno más de sus hijos, transmitiéndome todo sus conocimientos, tradiciones, la mística y el amor a mi país para poder servirle a la sociedad con honestidad y rectitud, y por permitirme representarla con honor en lo académico y en lo deportivo.

A MI PAÍS: Por darme el orgullo de sentir sus raíces y tradiciones motivandome a ser mejor día con día y comprometerme así a ayudar a su progreso, crecimiento y desarrollo para poder vivir en un México mucho mejor.

A LA INGENIERIA: Por permitirme comprender la función del Ingeniero dentro de la sociedad, de ver el compromiso que se adquiere con la misma, de entender como los conocimientos físico-matemáticos y la técnica son las herramientas bases para lograr un mejor aprovechamiento de los recursos para bien y provecho del ser humano.

AGRADECIMIENTOS ESPECIALES

FAMILIA SUÁREZ OLIVARES: Por ser como mi segundo hogar, por todos los buenos consejos, por considerarme un hermano más, por su cariño, apoyo y amistad incondicional. **GRACIAS**

SRA. CARMEN REYES: Por la gran ayuda, por tu cariño, apoyo y consejos en todo momento. **GRACIAS**

LIC. HUGO CAJIGA CASTILLO: Por la amistad de tantos años. **GRACIAS**

A MIS ALUMNAS Y ALUMNOS DE LA UNIVERSIDAD ANAHUAC: Por permitir que les transmitiera algunos conocimientos y brindarme su amistad. **GRACIAS**

SR. ANTONIO DORANTES LINO Y SR. ALBERTO LÓPEZ DÍAZ: Por sus enseñanzas en el laboratorio. **GRACIAS**

C.P. MANUEL RANGEL Y SRA.: Por todo su apoyo durante mi carrera como jugador y estudiante, por el gran cariño y preocupación que han mostrado en todo momento y principalmente por su amistad. **GRACIAS**

C.P. CARLOS MACHORRO: Por su apoyo, amistad y gran ayuda en cualquier circunstancia. **GRACIAS**

PATRONATO ORGANIZACION CONDORES U.N.A.M.: Por todo el apoyo que me brindaron a lo largo de mi carrera, por el premio CONDOR EJEMPLAR 1993. GRACIAS

DR. ANTONIO MALDONADO TAPIA: Por su gran cariño, apoyo y cuidado en los buenos y malos momentos. GRACIAS

ING. GERARDO CABADA LAGUNES: Por el gran apoyo, por sus conocimientos y ayuda a lo largo de este trabajo. GRACIAS

GERARDO: Por tú amistad desde el primer día de clases, por ser un buen compañero, verdadero amigo y un gran hermano dentro de la universidad y en el football americano, por tú apoyo y consejos en las buenas y en las malas, pero principalmente por que sin tu apoyo, paciencia y conocimientos no hubiera sido posible éste trabajo. GRACIAS

A GRUPO SWMA, S.A. de C.V.: Por permitir empezar mi desarrollo en la ingeniería civil. GRACIAS

A todas las personas que de alguna manera u otra me han apoyado a lo largo de mi vida y que por descuido no menciono. GRACIAS

**ANALISIS DE DEFORMACIONES
EN LOS SUELOS**

La Ingeniería Civil tiene por finalidad proveer, a los individuos y a la sociedad, de satisfactores útiles, económicos y seguros, que tienden a mejorar su calidad de vida. Para alcanzar esta meta utiliza tanto el medio ambiente -al que modifica- y las ciencias exactas y sociales, como el ingenio, el sentido común y la experiencia de quien la profesa.

INDICE

CAPITULO I	INTRODUCCION	1
CAPITULO II	FUNDAMENTOS DEL COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES	4
II.1	Estado de Deformación	4
II.2	Estado de Esfuerzo	8
II.3	Solución Gráfica de Otto Mohr	32
II.4	Tensores Esférico y Desviador	42
II.5	Teoría de la Elasticidad	44
II.6	Modelos Reológicos	52
II.7	Histéresis y fatiga	67
CAPITULO III	ELEMENTOS DE MECANICA DE LOS SUELOS .	70
III.1	El Suelo y la Mecánica de Suelos	70
III.2	Estructuras de los Suelos	71
III.3	Incremento de Esfuerzo en la masa de Suelo ocasionado por una carga repartida aplicada en la superficie	78
III.4	Solución Bousinesq	80

III.5	Solución de Westergaard	90
III.6	Fórmulas para calcular deformaciones angulares	90
CAPTULO IV	DEFORMACIONES EN SUELOS GRANULARES . .	92
IV.1	Ecuación Constitutiva para Suelos Friccionantes	92
IV.2	Analogía con la Teoría del Dr. Eulalio Juárez Badillo	102
CAPTULO V	DEFORMACIONES EN SUELOS COHESIVOS . .	110
V.1	Deformaciones Instantáneas	110
V.2	Deformaciones Diferidas	119
V.3	Determinación de Parámetros (Métodos de Ajuste)	145
CAPTULO VI	INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA	163
VI.1	Análisis Estructural	164
VI.2	Deformación del terreno de Cimentación	184
VI.3	Compatibilidad de deformaciones	186
VI.4	Elementos Mecánicos	187

CAPITULO VII	CONCLUSIONES	213
BIBLIOGRAFIA		219

CAPITULO I

INTRODUCCION

Se define como suelo a todo material no cementado de la corteza terrestre que se encuentra sobre roca fija, independientemente de que posea o no material orgánico y cuyas partículas individuales tengan como máximo dos dimensiones menores a tres pulgadas; partículas mayores a éstas se consideran fragmentos de roca.

La mecánica de suelos es la rama de la ingeniería civil que estudia el comportamiento físico de los suelos, en cuanto a esfuerzos o deformaciones, a su relación esfuerzo-deformación y a sus características hidráulicas. También estudia la variación de estas propiedades con el tiempo, a fin de lograr que las obras sean estables, seguras y funcionales durante su vida útil.

Todas las estructuras de ingeniería civil están íntimamente ligadas con el suelo, ya sea que éste forme parte de las mismas, como terraplenes, presas de tierra o enrocamiento, canales, o bien que sirva de soporte a las estructuras, o de relleno como en muros de retención.

El Ingeniero Civil, al trabajar con el suelo se encuentra con dos problemas fundamentales en torno a los que puede decirse que giran todos los demás.

El primero es encontrar su resistencia, que según la teoría de Mohr-Coulomb, puede medirse por el esfuerzo cortante máximo que puede soportar ese material que, a su vez, es función del esfuerzo normal actuante en el plano en que ocurre la falla. En las obras de ingeniería civil, el criterio de resistencia es el estado límite de falla, el cual busca que los esfuerzos actuantes no sobrepasen a los esfuerzos que pueden resistir el suelo. A la relación de esfuerzo resistente entre esfuerzo actuante se le llama factor de seguridad y se recomienda que en general sea mayor a 2.

El otro problema es calcular las deformaciones que experimenta el suelo debido al cambio en sus condiciones de esfuerzo, tanto en lo que se refiere a la intensidad o nivel de los esfuerzos, como a la manera en que se ejerzan, incluyendo su velocidad de aplicación.

En los suelos las deformaciones se refieren a los hundimientos o expansiones que experimenta, en la mayoría de las veces éstas no se presentan simultáneamente, sino que están en función del tiempo, por lo que es posible que el agrietamiento de una estructura se presente años más tarde de su construcción. En las obras de ingeniería civil el criterio de deformación es el estado límite de servicio, en el cual se busca que las deformaciones que sufra el suelo no sean excesivas, ya que si esto ocurriera la estructura podría verse afectada en su funcionamiento.

El estudio presentado en este trabajo abarca el análisis de las deformaciones en suelos granulares y cohesivos, así como la utilización de éstas en la relación con la estructura, en el fenómeno de interacción suelo-estructura.

La técnica de interacción suelo-estructura nos ayuda a obtener las reacciones que se generan en un medio compresible y las deformaciones que en ese medio se puedan presentar al ser sometido a solicitaciones de cargas estáticas, a través de vigas de

rigidez variable, las cuales reposan libremente en el suelo.

La solución al problema de interacción suelo-estructura consiste en realizar un análisis tanto de la estructura como de los asentamientos del suelo, haciendo una combinación de ambos en forma adecuada, para llegar al resultado del problema.

En los capítulos II y III se presentan las herramientas que se utilizan en este tipo de cálculo: El comportamiento de los materiales y los elementos de la mecánica de suelos.

En el capítulo IV se muestra la ecuación constitutiva para el cálculo de las deformaciones en los suelos granulares.

En el capítulo V se muestra la ecuación constitutiva para el cálculo de las deformaciones instantáneas en los suelos cohesivos, así como la teoría de consolidación primaria y consolidación secundaria para el cálculo de las deformaciones diferidas.

El capítulo VI muestra el método de interacción suelo-estructura, así como las herramientas de análisis estructural necesarias para la aplicación del método.

Finalmente, en el capítulo VII se presentan las conclusiones de este trabajo.

CAPITULO II

FUNDAMENTOS DEL COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES

Este capítulo tiene la finalidad de hacer un repaso de los conceptos del comportamiento físico de los materiales que se deben tener presentes para la perfecta comprensión de los siguientes temas de este trabajo.

II.1 ESTADO DE DEFORMACION.

Convención de signos para fuerzas y deformaciones.

- a) Para las fuerzas: Se consideran positivas a aquellas con sentido saliente del centro del cuerpo esforzado (tensión) en la dirección del eje analizado.**

Se considera negativa a aquella con sentido entrante hacia el centro del cuerpo esforzado (compresión) en la dirección del eje analizado (figura 2.1).

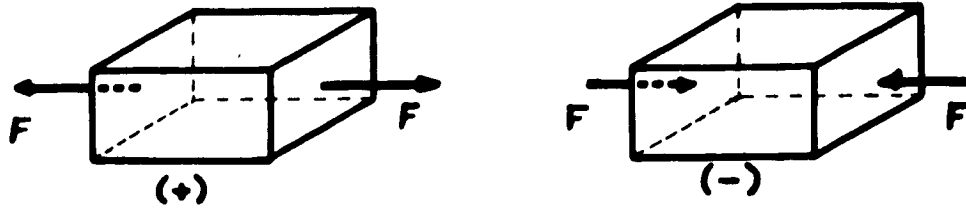


Figura 2.1

b) Para las deformaciones: Se tienen deformaciones positivas cuando se incrementa la dimensión inicial de un cuerpo, medida en la dirección del eje en estudio.

Se tienen deformaciones negativas cuando se disminuye la dimensión inicial de un cuerpo medida en la dirección del eje en estudio.

Observese que:

Fuerza positiva	->	Deformación positiva
Fuerza negativa	->	Deformación negativa

Esta convención en mecánica de suelos es contraria, puesto que la mayoría de las deformaciones que se presentan en los suelos son compresiones.

Para estudiar el estado de deformación en los materiales cabe mencionar que se hará desde el punto de vista de análisis uniaxial.

Existen dos criterios de Deformación Unitaria:

1.- Según Cauchy: (deformación común)

$$\epsilon_c = \frac{\delta}{L_0} = \frac{L_f - L_0}{L_0}$$

este es el criterio más usado en la ingeniería (figura 2.2).

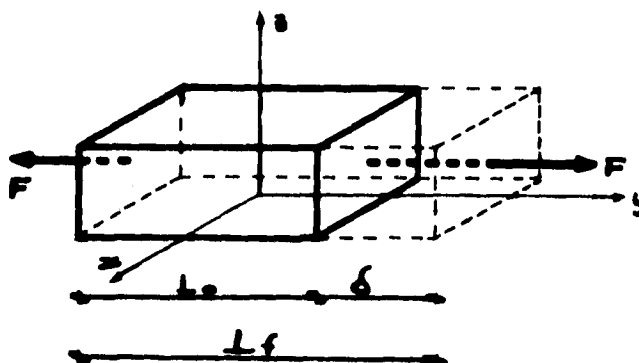


Figura 2.2

2.- Según Hencky: (deformación natural).

$$\epsilon_H = \int \frac{dl}{l} = \ln \frac{L_f}{L_0} \quad 2.2$$

Relación Cauchy-Hencky.

$$\epsilon_c = \frac{L_f}{L_0} - 1 \quad ; \quad \epsilon_H = \frac{L_f}{L_0} \quad 2.3$$

$$\text{si } e^{\epsilon_H} = \frac{L_f}{L_0}$$

sustituyendo (2.3) en ϵ_c .

$$\epsilon_c = e^{\epsilon_H} - 1 \rightarrow e^{\epsilon_H} = \epsilon_c + 1$$

por lo tanto:

$$\epsilon_H = \ln(\epsilon_c + 1)$$

2.4

graficando.

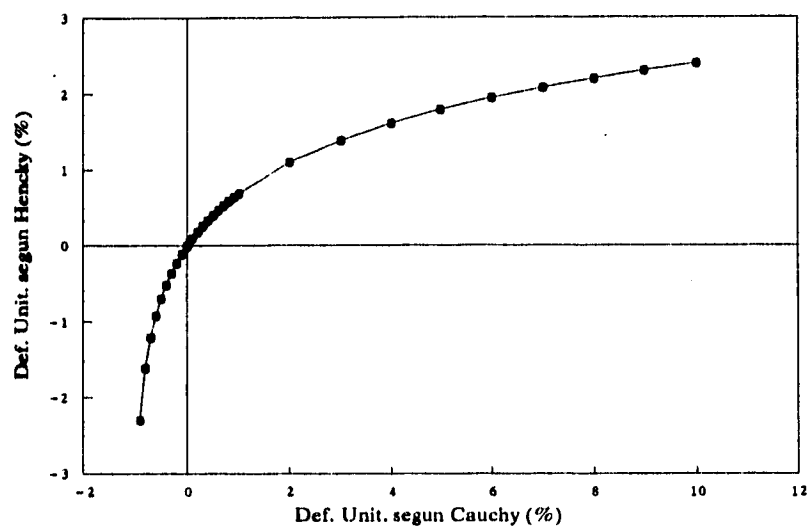


Figura 2.3

Se puede demostrar que si:

$$\epsilon_{cx} = \frac{X_f - X_0}{X_0} = \frac{X_f}{X_0} - 1$$

$$\epsilon_{cy} = \frac{Y_f - Y_0}{Y_0} = \frac{Y_f}{Y_0} - 1$$

$$\epsilon_{cz} = \frac{Z_f - Z_0}{Z_0} = \frac{Z_f}{Z_0} - 1$$

$$\epsilon_{cv} = \frac{V_f - V_o}{V_o} = \frac{V_f}{V_o} - 1$$

La deformación unitaria volumétrica desde el punto de vista de Cauchy (ϵ_{cv}) es:

$$\epsilon_{cv} = \epsilon_{cx} + \epsilon_{cy} + \epsilon_{cz} \quad 2.5$$

la ecuación anterior es válida cuando las deformaciones son pequeñas (ϵ_{cx} , ϵ_{cy} y ϵ_{cz} son menores al 1%).

Con el criterio de Hencky:

$$\epsilon_{Hv} = \frac{V_f}{V_o}$$

$$\epsilon_{Hv} = \ln \frac{X_f + Y_f + Z_f}{X_o + Y_o + Z_o}$$

por lo tanto:

$$\epsilon_{Hv} = \epsilon_{Hx} + \epsilon_{Hy} + \epsilon_{Hz}$$

válida para una deformación grande o pequeña.

II.2 ESTADO DE ESFUERZO.

Si a un sistema como el mostrado en la figura 2.4 se le somete a las sollicitaciones que se proponen, se deforma hasta cierto límite. Si el material del cuerpo se supone elástico, la deformación se estabiliza debido a que las fuerzas internas entran en juego y adquieren un valor capaz de equilibrar a las fuerzas externas.

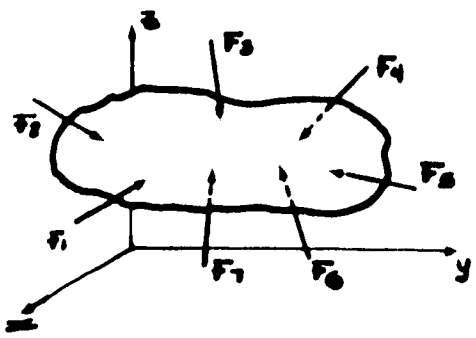


Figura 2.4

Si se hace un corte imaginario en el sistema (Fig. 2.5), se obtiene el diagrama de cuerpo libre del subsistema izquierdo.(Fig. 2.6).

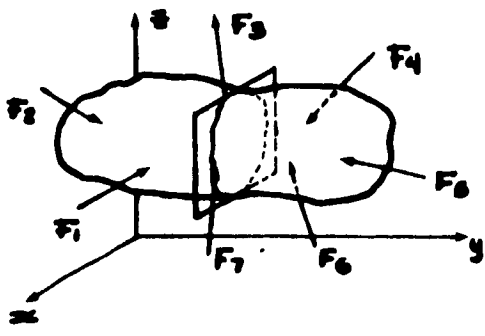


Figura 2.5

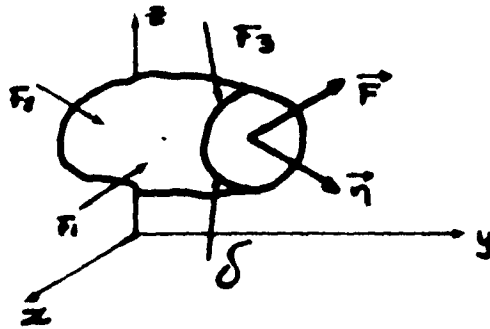


Figura 2.6

donde:

\bar{F} , es la fuerza que equilibra a las fuerzas externas.

\bar{n} , es el versor (vector unitario normal a un plano) del plano δ .

Dividiendo la fuerza \bar{F} entre el área transversal (A) del corte (figura 2.6) obtiene un esfuerzo medio definido como:

$$\bar{S}_m = \frac{\bar{F}}{A}$$

Considerando ahora una fracción de área menor al plano de corte y alrededor del punto "o" (figura 2.7).

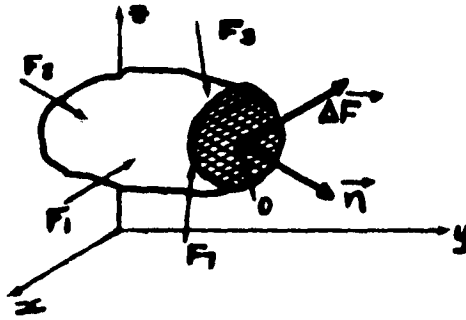


Figura 2.7

Se define al vector esfuerzo \vec{S} actuando en el punto "o" sobre el plano δ , de la siguiente manera:

$$\vec{S} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA}$$

El versor por ser unitario se define por sus cosenos directores (figura 2.8).

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$$

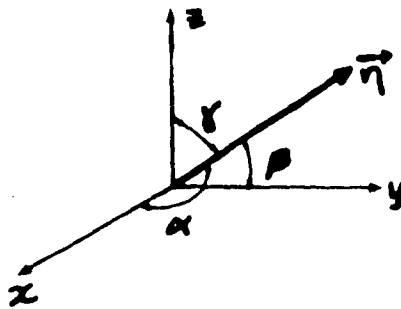


Figura 2.8

en donde:

$$\bar{n}_x = \bar{n} \cos\alpha$$

$$\bar{n}_y = \bar{n} \cos\beta$$

$$\bar{n}_z = \bar{n} \cos\gamma$$

α, β, γ , son los ángulos directores, que como se sabe, siempre cumplirán lo siguiente:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad 2.8$$

El vector esfuerzo (figura 2.9) se puede expresar como:

$$\bar{S} = \bar{S}_x + \bar{S}_y + \bar{S}_z$$

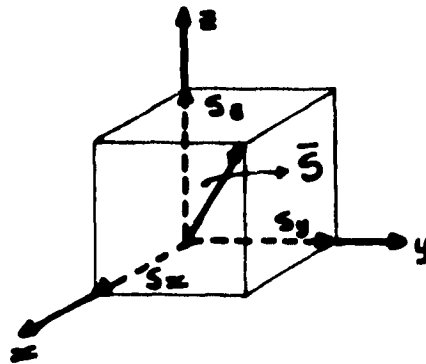


Figura 2.9

En algunos casos particulares la dirección de \bar{S} y \bar{n} coinciden (figura 2.10).

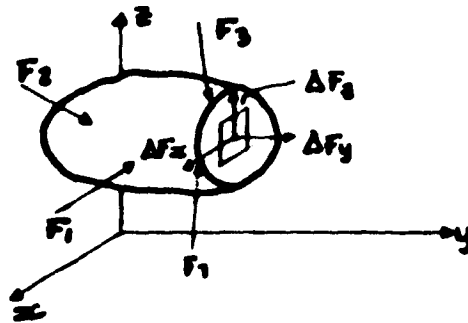


Figura 2.10

Tomando como referencia el sistema propuesto anteriormente (fig. 2.10) se tiene que:

$$\Delta \bar{F} = \Delta \bar{F}_x + \Delta \bar{F}_y + \Delta \bar{F}_z$$

Con base en lo anterior se define lo siguiente:

Para el esfuerzo Normal:

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_{yy} = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}_y}{\Delta A_y}$$

Para el esfuerzo Cortante:

$$\bar{\tau}_{yx} = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}_x}{\Delta A_y}$$

Finalmente en el punto "o" se tienen a los esfuerzos como se muestran en la figura 2.11.

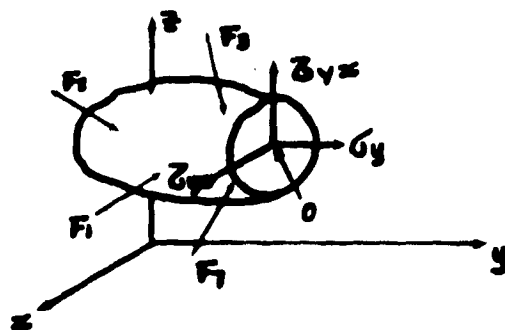


Figura 2.11

De modo que el vector esfuerzo también se puede expresar en este caso como:

$$\bar{S}_y = \bar{\tau}_{yxi} + \bar{\sigma}_{yj} + \bar{\tau}_{ykh} \quad 2.10$$

El esfuerzo depende de la dirección en la que se mide.

II.2.1 NATURALEZA TENSORIAL DEL ESFUERZO.

FUNCION VECTORIAL DE VARIABLE VECTORIAL.

No se puede hablar solamente de esfuerzo en un punto del material, sino que debemos especificar el plano al que esta asociado dicho esfuerzo.

$$\bar{S} = F(\bar{n})$$

en donde:

\bar{S} , es el vector esfuerzo

F, es una fuerza

\bar{n} , es un versor

Esta ecuación se puede hacer equivalente en el espacio con las tres ecuaciones algebraicas siguientes:

$$S_x = a_{11} n_x + a_{12} n_y + a_{13} n_z$$

$$S_y = a_{21} n_x + a_{22} n_y + a_{23} n_z$$

$$S_z = a_{31} n_x + a_{32} n_y + a_{33} n_z$$

o en notación matricial

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

Para interpretar a los componentes de la matriz coeficiente se hará coincidir a \bar{n} sucesivamente con los ejes coordenados del sistema de referencia.

Haciendo coincidir a \bar{n} con el eje X tenemos:

$$\bar{n} = \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$S_x = a_{111}$$

$$S_y = a_{211}$$

$$S_z = a_{311}$$

por lo tanto:

$$S = S_{xi} + S_{yj} + S_{zk}$$

$$S = a_{11i} + a_{21j} + a_{31k}$$

$$S = \sigma_{xi} + \tau_{xyj} + \tau_{xzk}$$

por lo tanto

$$a_{11} = \sigma_x$$

$$a_{21} = \tau_{xy}$$

$$a_{31} = \tau_{xz}$$

Ahora haciendo coincidir n con los ejes Y y Z de igual manera se tendrá:

$$a_{12} = \sigma_{yx}$$

$$a_{22} = \sigma_y$$

$$a_{32} = \tau_{yz}$$

$$a_{13} = \tau_{zx}$$

$$a_{32} = \tau_{xy}$$

$$a_{33} = \sigma_z$$

de acuerdo con lo cual el vector \bar{S} será:

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

en forma simplificada:

$$\{\bar{S}\} = [T] \{\bar{n}\}$$

2.12

donde $[T]$ es el Tensor Esfuerzo.

Con 3 planos ortogonales se puede formar un cubo, si el cubo se hace diferencial, se tendrá la representación en el espacio de los esfuerzos en un punto orientados con respecto a los ejes de referencia X, Y, Z.

II.2.2 DEFINICION DE LAS CARAS POSITIVAS EN UN CUBO DIFERENCIAL.

Se definirán caras positivas de un cubo diferencial a aquéllas por donde salen los ejes del sistema de referencia, si se situara su origen en el centro del cubo (figura 2.12).

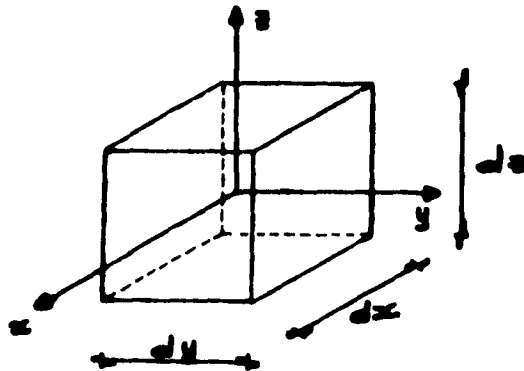


Figura 2.12

CONVENCION DE SIGNOS PARA ESFUERZOS NORMALES Y CORTANTES.

Se define como esfuerzo positivo, a aquél que actuando en cara positiva, se presenta con el mismo sentido que el de su eje paralelo de referencia (figura 2.13).

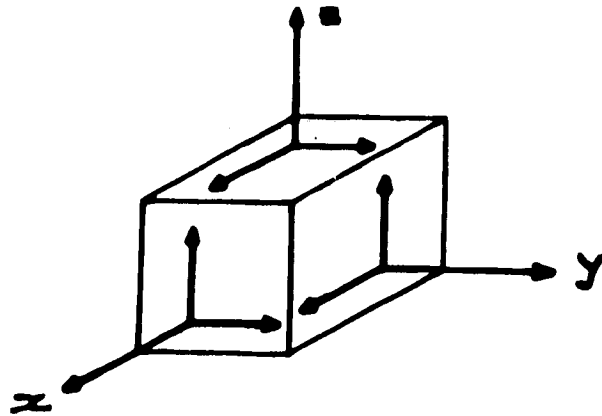


Figura 2.13

II.2.3 ANALISIS DEL EQUILIBRIO DEL CUBO DIFERENCIAL.

Caras positivas:

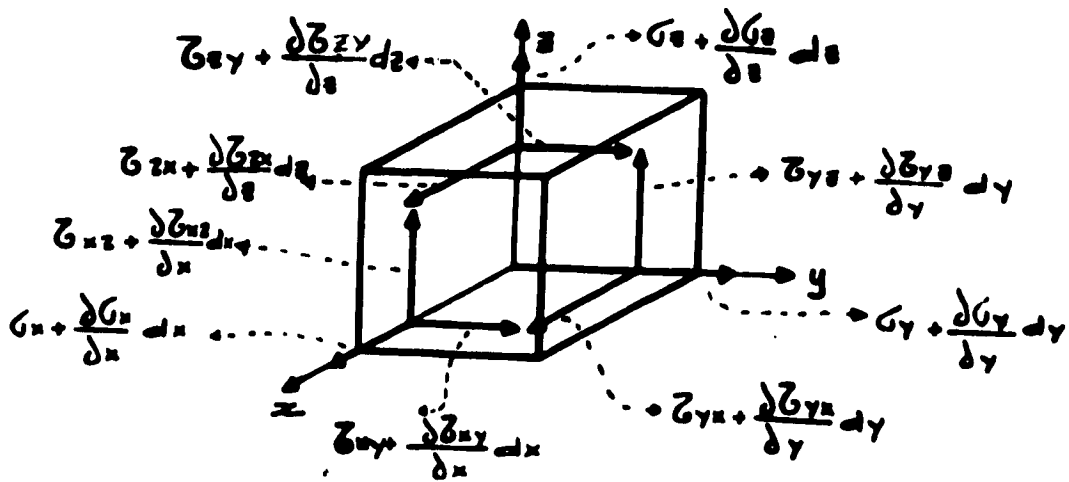


Figura 2.14

Caras negativas:

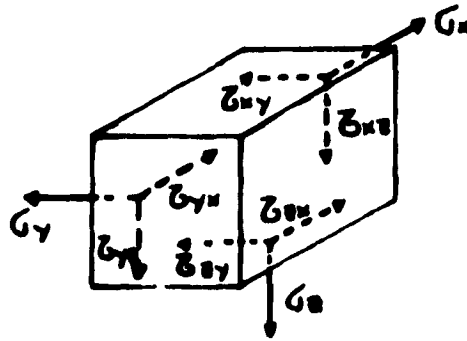


Figura 2.15

Las condiciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

Este análisis se hace suponiendo que el origen del sistema X, Y, Z está en el centro del cubo.

Haciendo entonces:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} dz \right) dx dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx \right) dy dz$$

$$- \sigma_x dx dy dz - \tau_{yx} dz dx dy - \tau_{zx} dx dy dz - \rho g dx dy dz = 0$$

finalmente se tiene la ecuación 3 de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \rho g = 0 \quad 2.13$$

Ahora, haciendo:

$$\Sigma M_z = 0$$

$$\tau_{zy} dydzdx + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} dx dy dz \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dx dz dy - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz \frac{dy}{2} = 0$$

Pero considerando que:

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{2} = 0, \text{ por ser cantidades muy pequeñas,}$$

Entonces la ecuación anterior nos queda de la siguiente manera:

$$\tau_{zy} dx dy dz - \tau_{yx} dx dy dz = 0$$

Por lo tanto

$$\tau_{zy} = \tau_{yx} \quad 2.14$$

Y esta es la ecuación 6 de equilibrio.

De igual manera pero haciendo la $\Sigma M_x = 0$ y $\Sigma F_x = 0$, así como la $\Sigma M_y = 0$ y $\Sigma F_y = 0$; se obtienen las ecuaciones 1, 2 y 4, 5 de equilibrio que a continuación se presentan:

Ecuación 1 de equilibrio.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad 2.15$$

Ecuación 2 de equilibrio.

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad 2.16$$

Ecuación 4 de equilibrio.

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad 2.17$$

Ecuación 5 de equilibrio.

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad 2.18$$

II.2.4 DETERMINACION DE LAS COMPONENTES NORMAL Y TANGENCIAL DEL VECTOR ESFUERZO EN UN PLANO δ DEFINIDO POR \bar{n} .

Para determinar dicho componente se realizarán los siguientes pasos:

- 1.- Obtención del tensor [T]
- 2.- Obtención del versor \bar{n} en el plano de analisis δ .
- 3.- Se operan matricialmente [T] y \bar{n} para obtener el vector esfuerzo:

$$\bar{S} = [T] \bar{n}$$

- 4.- Para obtener el valor del esfuerzo normal se efectua el producto punto entre \bar{S} y \bar{n} :

$$\sigma = \bar{S} \cdot \bar{n} = [\bar{n}]^T [S] = [S] [\bar{n}]$$

5.- El vector esfuerzo normal se obtiene como sigue:

$$\bar{\sigma} = \sigma (\bar{n})$$

6.- El valor de τ se obtiene por medio del teorema de Pitágoras:

$$\tau = \pm \sqrt{|\bar{S}|^2 - \sigma^2}$$

$$\tau = \pm \sqrt{|\bar{S}_x|^2 + |\bar{S}_y|^2 + |\bar{S}_z|^2 - \sigma^2}$$

7.- El vector esfuerzo cortante se obtiene:

$$\bar{S} = \bar{\tau} + \bar{\sigma}$$

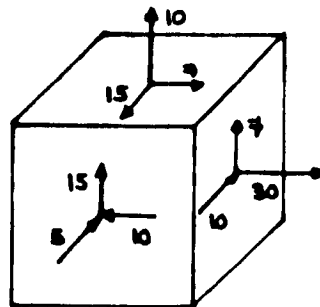
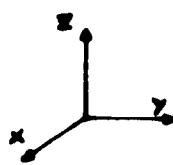
$$\bar{\tau} = \bar{S} - \bar{\sigma}$$

8.- Se verifica la ortogonalidad de $\bar{\sigma}$ y $\bar{\tau}$, sabiendo que debe cumplirse que el producto punto de $\bar{\sigma}$ y $\bar{\tau}$ debe ser igual a 0.

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{\tau} = 0$$

Ejemplo Ilustrativo:

Para el siguiente cubo diferencial mostrado y el vector propuesto normal a δ , obtenga el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante.



kpa

Vector normal a δ

$$\bar{n} = 3i + 4j + 5k$$

Paso 1:

Siguiendo la forma de [T] tenemos:

$$T = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 15 \\ -10 & 30 & 7 \\ 15 & 7 & 10 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

Paso 2:

$$\bar{n} = \frac{\bar{V}}{|\bar{V}|} = \frac{3i + 4j + 5k}{\sqrt{50}} = \frac{3}{\sqrt{50}}i + \frac{4}{\sqrt{50}}j + \frac{5}{\sqrt{50}}k$$

por lo tanto

$$\bar{n} = \frac{3}{5\sqrt{2}}i + \frac{4}{5\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k$$

Paso 3.

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 15 \\ -10 & 30 & 7 \\ 15 & 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5\sqrt{2} \\ 4/5\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{4}{\sqrt{2}}i + \frac{25}{\sqrt{2}}j + \frac{24.6}{\sqrt{2}}k$$

Paso 4.

$$\sigma = \left[\frac{4}{\sqrt{2}}i + \frac{25}{\sqrt{2}}j + \frac{24.6}{\sqrt{2}}k \right] \cdot \left[\frac{3}{5\sqrt{2}}i + \frac{4}{5\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k \right]$$

$$\sigma = \frac{6}{5} + 10 + 12.3 = 23.5 \text{ kPa.}$$

$$\sigma = 23.5 \text{ kPa}$$

Paso 5.

$$\vec{\sigma} = 23.5 \times \left[\frac{3}{5\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{4}{5\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k} \right]$$

Por lo tanto

$$\vec{\sigma} = \frac{14.1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{18.8}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{23.5}{\sqrt{2}} \mathbf{k}$$

Paso 6.

$$\tau = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{4}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{25}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{24.6}{\sqrt{2}} \right)^2 - 23.5^2 \right]}$$

$$\tau = 8.41 \text{ kPa}$$

Paso 7.

$$\vec{\tau} = \left[\frac{4}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{25}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{24.6}{\sqrt{2}} \mathbf{k} \right] - \left[\frac{14.1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{18.8}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{23.5}{\sqrt{2}} \mathbf{k} \right]$$

$$\vec{\tau} = \frac{10.1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{6.2}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{1.1}{\sqrt{2}} \mathbf{k}$$

Paso 8

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\tau} = \left[\frac{14.1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{18.8}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{23.5}{\sqrt{2}} \mathbf{k} \right] \cdot \left[\frac{10.1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{6.2}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{1.1}{\sqrt{2}} \mathbf{k} \right]$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\tau} = -71.205 + 58.28 + 12.925 = 0$$

II.2.5 ESFUERZOS PRINCIPALES.

Los esfuerzos principales actúan en planos donde no existen esfuerzos cortantes y a los planos donde estos actúan se les llama principales.

Para cualquier estado de esfuerzos en el espacio, deben existir 3 esfuerzos principales de modo que siempre se debe cumplir la siguiente condición:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad 2.19$$

En donde:

σ_1 , es el Esfuerzo Principal mayor.

σ_2 , es el Esfuerzo Principal intermedio.

σ_3 , es el Esfuerzo Principal menor.

En el plano principal δ se debe cumplir que:

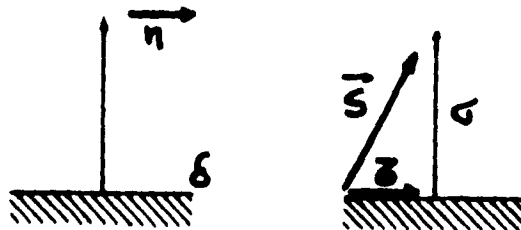


Figura 2.16

$$\bar{S} = \lambda \bar{n} \quad 2.20$$

donde:

- a) λ , tiene dimensión de esfuerzo por que \bar{n} es adimensional.
- b) λ , es un parámetro por determinar, llamado valor característico.

II.2.6 CALCULO DE ESFUERZOS PRINCIPALES Y VECTORES ASOCIADOS.

La forma algebraica de la ecuación 2.20 es:

$$\begin{aligned} S_x &= \lambda n_x \\ S_y &= \lambda n_y \\ S_z &= \lambda n_z \end{aligned} \quad 2.21$$

pero sabiendo que :

Ecuaciones de Cauchy:

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad 2.22$$

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{bmatrix} \quad 2.23$$

De las ecuaciones 2.20 y 2.23 se tiene:

$$\begin{bmatrix} \lambda n_x \\ \lambda n_y \\ \lambda n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{bmatrix} \quad 2.24$$

si se iguala a 0

$$(\sigma_x - \lambda) n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = 0 \quad 2.25$$

$$\tau_{yx} n_x + (\sigma_y - \lambda) n_y + \tau_{zy} n_z = 0 \quad 2.26$$

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + (\sigma_z - \lambda) n_z = 0 \quad 2.27$$

Mediante este sistema de ecuaciones se pretende determinar a los versores característicos de los planos principales, aunque haciendo uso solamente de las ecuaciones 2.25, 2.26 y 2.27 se llega a la solución trivial, donde:

$$n_x = 0 \quad ; \quad n_y = 0 \quad ; \quad n_z = 0$$

Esta solución no es admisible ya que se debe cumplir con:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

Si la solución no trivial existe, se puede obtener la ecuación característica, por medio de un teorema de sistemas de ecuaciones lineales y homogéneas, cuya ecuación característica es:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

en donde:

I_1 , es el Primer Invariante (lineal).

I_2 , es el Segundo Invariante (cuadrático).

I_3 , es el Tercer Invariante (cúbico).

I_1 , I_2 , I_3 , se obtienen a partir del tensor [T] de la siguiente forma:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \det \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \sigma_y & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \det [T]$$

Instrucciones:

- 1.- Las soluciones de la ecuación característica son los esfuerzos principales, en orden aleatorio.
- 2.- Para identificar a los esfuerzos principales se les acomoda de modo que cumplan la siguiente condición.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

- 3.- Llevando sucesivamente cada esfuerzo principal a las ecuaciones 2.25, 2.26, 2.27, eligiendo dos de estas ecuaciones y considerando además que:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

Se determinan los versores característicos respectivos, los cuales se acomodan de modo que se tenga un sistema de referencia principal derecho como se muestra a continuación.

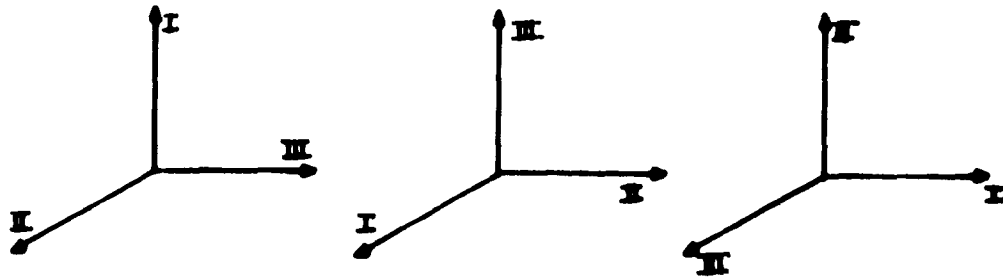


Figura 2.17

Ejemplo Ilustrativo:

Obtener la Ecuación característica, Esfuerzos principales, Versores principales, del Tensor [T].

$$T = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

1) **Obtención de los tres invariantes.**

$$\begin{aligned} I_1 &= 6 + 6 + 8 = 20 \text{ MPa} \\ I_2 &= 27 + 48 + 48 = 123 \text{ MPa}^2 \\ I_3 &= 216 \text{ MPa}^3 \end{aligned}$$

2) **Obtención de la ecuación característica.**

$$\lambda^3 - 20 \lambda^2 + 123 \lambda - 216 = 0$$

resolviendo

$$\lambda_1 = 8 \quad \lambda_2 = 9 \quad \lambda_3 = 3$$

y sabiendo que:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad 9 > 8 > 3$$

por lo tanto los Esfuerzos Principales son:

$$\sigma_1 = 9 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 8 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = 3 \text{ MPa}$$

Obtención de n_1 .

Si $\sigma_1 = \sigma_2 = 8 \text{ MPa}$, entonces:

$$\begin{aligned} (6 - 9) n_x + (-3) n_y + 0 n_z &= 0 & \rightarrow & -3n_x - 3n_y + 0n_z = 0 \\ (-3) n_x + (6-9) n_y + 0n_z &= 0 & \rightarrow & -3n_x - 3n_y + 0n_z = 0 \\ 0 n_x + 0 n_y + (6-9) n_z &= 0 & \rightarrow & 0n_x + 0n_y - 3n_z = 0 \end{aligned}$$

resolviendo las ecuaciones

$$n_x = 0 \quad n_z = -n_y$$

sustituyendo en $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

$$(-n_y)^2 + (n_y)^2 + 0 = 1$$

resolviendo

$$n_y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por lo tanto

$$\bar{n}_I = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}j \pm \frac{1}{\sqrt{2}}j + 0k$$

Obtención de \bar{n}_{II} .

$$\begin{aligned}(6-8)n_x - 3n_y + 0n_z = 0 &\rightarrow -2n_x - 3n_y + 0n_z = 0 \\ -3n_x + (6-8)n_y + 0n_z = 0 &\rightarrow -3n_x - 2n_y + 0n_z = 0 \\ 0n_x + 0n_y + (8-8)n_z = 0 &\rightarrow 0n_x + 0n_y + 0n_z = 0\end{aligned}$$

resolviendo el sistema

$$n_x = \pm 1$$

por lo tanto

$$\bar{n}_{II} = 0i = 0j \pm k$$

Obtención de \bar{n}_{III} .

$$\begin{aligned}(6-3)n_x - 3n_y + 0n_z = 0 &\rightarrow 3n_x - 3n_y + 0n_z = 0 \\ -3n_x + (6-3)n_y + 0n_z = 0 &\rightarrow -3n_x + 3n_y + 0n_z = 0 \\ 0n_x + 0n_y + (8-3)n_z = 0 &\rightarrow 0n_x + 0n_y + 5n_z = 0\end{aligned}$$

resolviendo el sistema

$$n_x = 0 \quad n_x = n_y$$

sustituyendo en la ecuación de cosenos directores

$$(n_x)^2 + (n_x)^2 = 1$$

resolviendo

$$n_x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por lo tanto

$$\bar{n}_{III} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i \pm \frac{1}{\sqrt{2}}j + 0k$$

Revisando la ortogonalidad:

$$\begin{aligned}\bar{n}_I \cdot \bar{n}_{II} &= 0 \\ \bar{n}_{II} \cdot \bar{n}_{III} &= 0 \\ \bar{n}_{III} \cdot \bar{n}_I &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0\end{aligned}$$

Graficando los resultados anteriores.

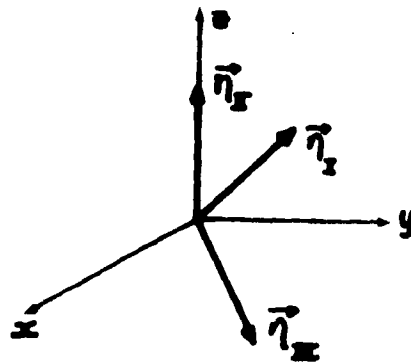


Figura 2.18

II.3 SOLUCION GRAFICA DE OTTO MOHR.

Otto Mohr generó el plano coordenado (σ, τ) , con lo cual quedó establecida la correspondencia entre versores que pasan por el punto P en estudio, con el punto $R(\sigma, \tau)$ de dicho plano (figura 2.19).

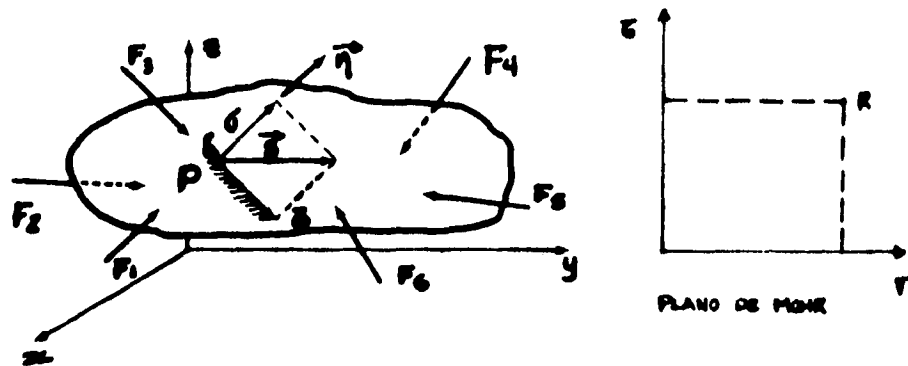


Figura 2.19

Procedimiento del trazo del Circulo de Mohr (figura 2.20).

- 1.- Se elige una escala adecuada.
- 2.- Se define la región de Mohr, ubicando las posiciones de σ_1 , σ_2 , y σ_3 .
- 3.- Se localizan los centros de los círculos mediante las siguientes fórmulas:

$$C_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} ; C_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} ; C_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

- 4.- Se trazan los círculos correspondientes mediante sus respectivos radios:

$$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} ; R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} ; R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

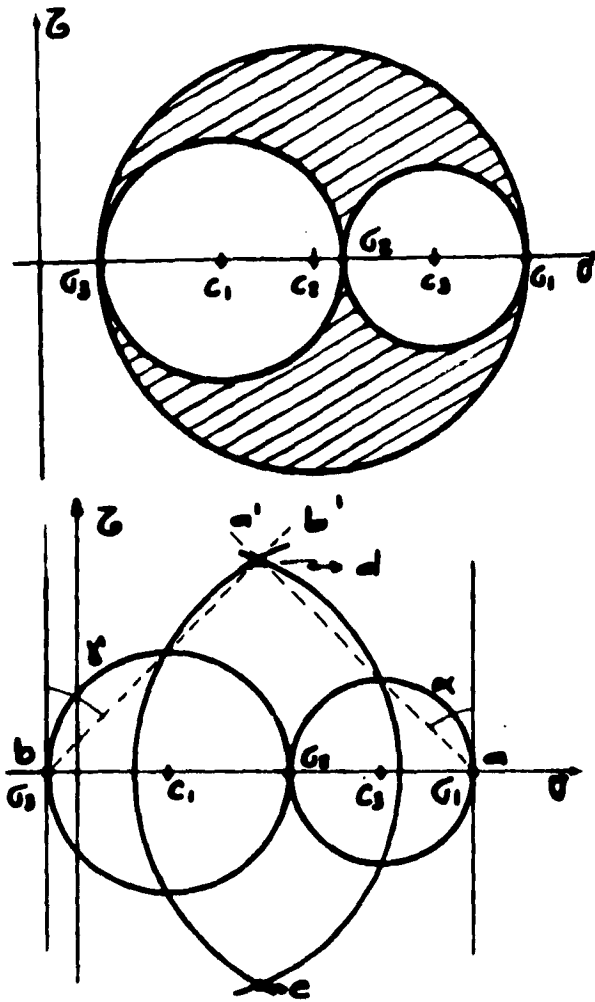


Figura 2.20

5.- Se obtienen los esfuerzos σ y τ realizando los siguientes pasos:

a) Se trazan rectas paralelas al eje de los esfuerzos cortantes, en el lado positivo de éstos y que pasen por σ_1 y σ_3 .

b) A partir de la recta anterior que pasa por σ_1 , se traza una recta (a-a'), que con la primera forme un ángulo α , teniendo ambas como vértice a σ_1 , ($\alpha = \arccos n_x$).

c) Se produce en forma similar pero ahora a partir de la recta que pasa por σ_3 , trazando una recta (b-b') que con la anterior forme un ángulo γ , teniendo ambas como vértice a σ_3 , ($\gamma = \arccos n_x$).

d) Haciendo centro en C_1 , se traza un arco de círculo que pase por los puntos donde la recta (a-a') intersecta a los círculos que no son $n_x = 0$.

e) Haciendo centro en C_3 , se traza un arco de círculo que pase por los puntos donde la recta (b-b') intersecta a los círculos que no son $n_x = 0$.

Las intersecciones de los arcos anteriores de los puntos (d) y (e) definen los dos posibles puntos que son la solución buscada $R_1 (\sigma + \tau)$ y $R_2 (\sigma - \tau)$.

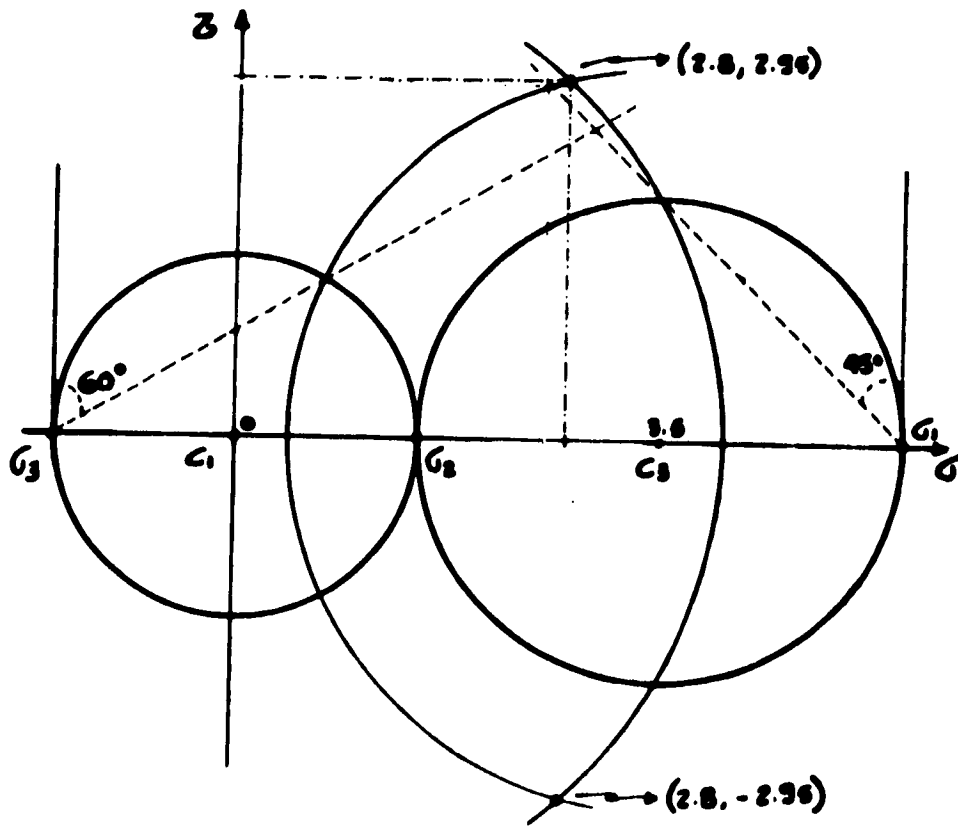
Estos puntos representan a los esfuerzos σ y τ actuantes en el plano cuyo versor es \bar{n} .

Ejemplo Ilustrativo:

Dado el tensor [T] y el versor que define al plano δ , obtenga gráficamente por medio del círculo de Mohr los valores de σ y τ actuante en el plano propuesto.

$$T = \begin{bmatrix} 5.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$$

Solución:



II.3.1 Método para dibujar el círculo de Mohr, a partir de un tensor dado, cumpliendo las siguientes condiciones:

$$\sigma_y = 0 \quad \text{ó} \quad \sigma_y = \sigma_x \quad \text{ó} \quad \sigma_y = \sigma_z.$$

1.- Dado el tensor
$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

- 2.- Se utiliza una escala adecuada.
- 3.- Se localizan los puntos correspondientes a los valores de σ_x y σ_z sobre el eje σ .
- 4.- Se ubica el valor del esfuerzo cortante en líneas perpendiculares al eje σ y que pasen por σ_x y σ_z , aplicando las siguientes reglas:
 - a) Asociado el cortante a σ_x (τ_{xz}), se traza con signo cambiado al que tiene en el [T].
 - b) Asociado a σ_z (τ_{zx}), se traza con su mismo signo.
- 5.- Definidos los puntos:

$$[\sigma_x, -(\tau_{xz})] \quad \text{y} \quad [\sigma_z, \tau_{zx}]$$

se unen con una línea recta. Al punto donde esta línea corta al eje σ , se toma como centro y como diámetro a la distancia entre los puntos definidos.

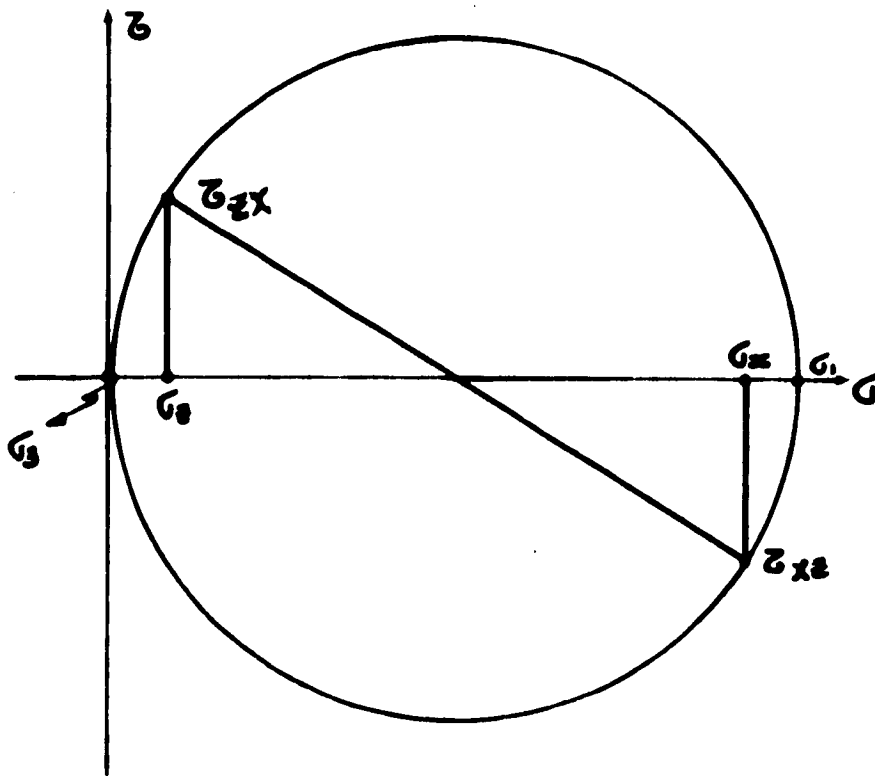


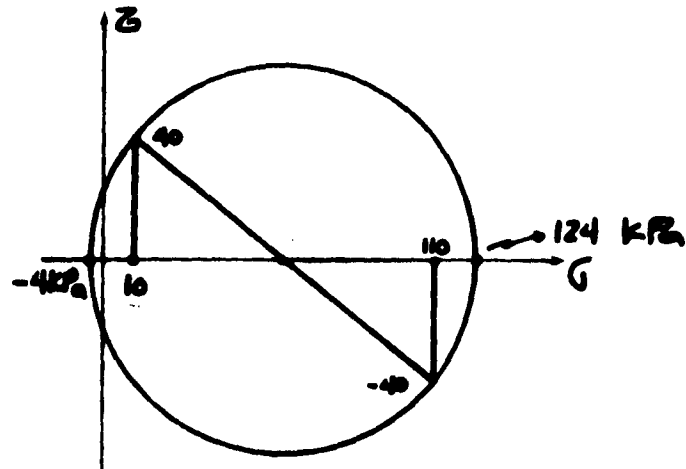
Figura 2.21

Ejemplo Ilustrativo:

Dibuje el círculo que corresponde al Tensor [T] dado:

$$[T] = \begin{bmatrix} 10 & -40 \\ -40 & 110 \end{bmatrix}$$

Solución:



II.3.2 Método del Polo Fijo.

Este método fue propuesto por el Dr. Dagoberto de la Serna. Ver figura 2.22.

Procedimiento:

- 1.- Dibuje el círculo a partir del tensor principal.
- 2.- Donde el círculo cruza a σ se ubican σ_1 y σ_3 , pudiendo conocer su valor.
- 3.- En este método el polo siempre se ubica en el punto que representa a σ_3 .

Este punto será el origen de los sistemas de referencia derecho.

- 4.- En este método siempre se aloja la dirección del esfuerzo principal mayor (I) sobre el eje σ y con el mismo sentido.
- 5.- Perpendicular al eje σ y teniendo como origen al polo, siempre se aloja la dirección del esfuerzo principal menor (III) con sentido contrario al eje τ .
- 6.- Se une la coordenadas $(\sigma_x, -\tau_{xy})$ con una línea recta al polo, esta línea nos representa la dirección del eje x , sin definir su sentido.
- 7.- Se traza otra línea que pase por el polo y se une con la coordenada (σ_x, τ_{xy}) esta línea representa al eje Z aunque todavía no se tenga sentido.
- 8.- Se definen los sentidos de los ejes XZ de modo que se forme un sistema derecho y centrado con los primeros cuadrantes del sistema en uso.
- 9.- Si se quieren obtener σ y τ con su signo correcto y para cualquier plano propuesto, basta con orientar al versor \bar{n} a partir del polo, en la misma forma del cuadrado diferencial, con la única condición de que cruce el círculo. Lo anterior permite definir cual de los dos versores \bar{n} , que definen al plano se eligen.
- 10.- El punto que resulta de la intersección del versor \bar{n} con el círculo nos indican σ y τ buscados y con su signo correcto.

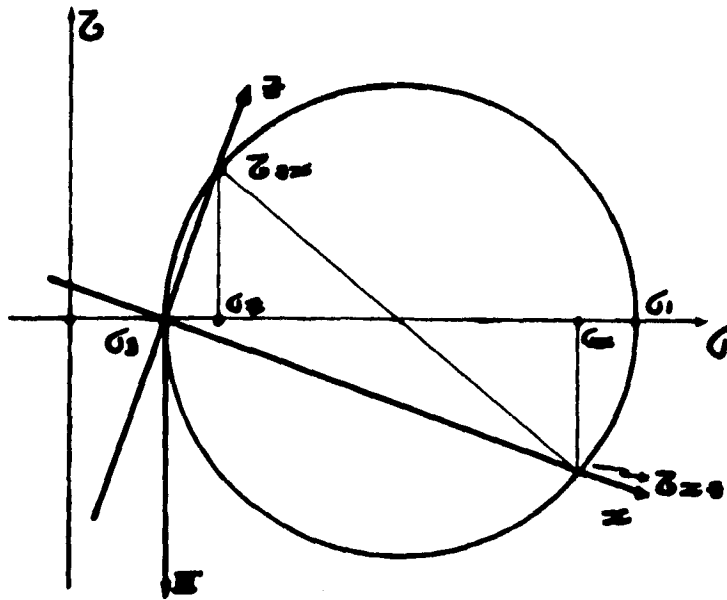
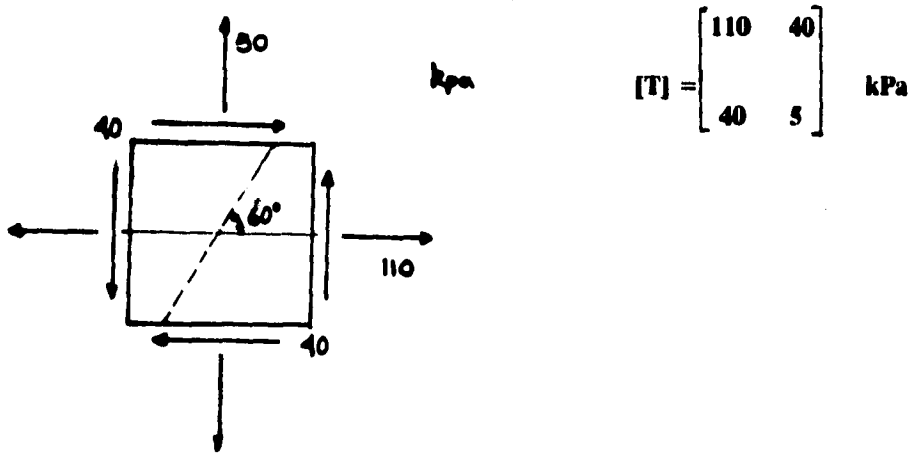


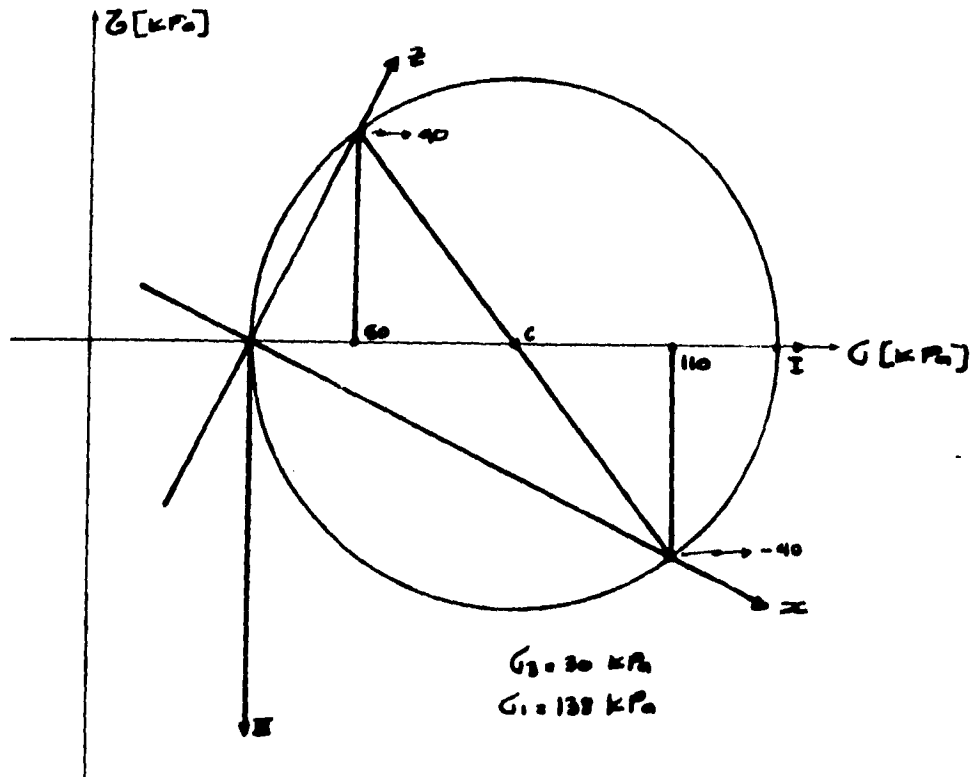
Figura 2.22

Ejemplo Ilustrativo:

Obtenga σ y τ en el plano propuesto (δ) y para el elemento mostrado:



Solución:



II.4 TENSORES ESFERICO Y DESVIADOR.

El tensor esfuerzo se puede descomponer en sus partes esférica y desviadora.

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Se puede escribir:

$$[T] = [T_s] + [T_d]$$

donde:

$[T_s] =$ Tensor esférico

$[T_d] =$ Tensor desviador

donde:

$$[T_s] = \begin{bmatrix} \sigma_{oct} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{oct} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{oct} \end{bmatrix}$$

y denominando a σ_{oct} como Esfuerzo octaédrico.

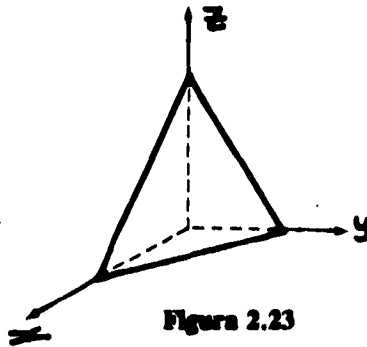


Figura 2.23

El plano octaédrico está definido por iguales cosenos directores.

Sea el versor $\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} i + \frac{1}{\sqrt{3}} j + \frac{1}{\sqrt{3}} k$ que representa al plano octaédrico.

Si sabemos que:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1/\sqrt{3} \\ \sigma_2/\sqrt{3} \\ \sigma_3/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{oct} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \begin{bmatrix} \sigma_1/\sqrt{3} \\ \sigma_2/\sqrt{3} \\ \sigma_3/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1}{3} + \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{3}$$

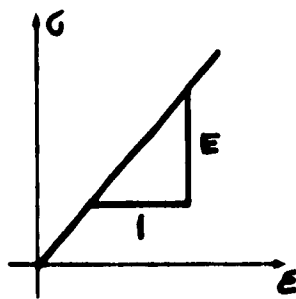
$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\sigma_{oct} = \frac{I_1}{3}$$

II.5 TEORIA DE LA ELASTICIDAD.

Es importante mencionar y demostrar los parámetros de la elasticidad lineal o de Hooke.

II.5.1 Módulo de Young.



E = Módulo de Young.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

$\sigma = E \cdot \epsilon$, Ec. constitutiva de la elasticidad lineal.

Figura 2.24

II.5.2 Módulo de Poisson.

En un experimento de tensión en una probeta, se observa que:
(En análisis plano).

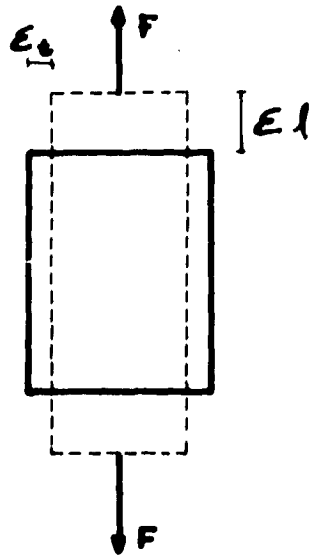


Figura 2.25

ϵ_l = Deformación unitaria longitudinal.

ϵ_t = Deformación unitaria transversal.

El módulo de Poisson se define como:

$$\nu = - \frac{\epsilon_t}{\epsilon_l}$$

donde:

ν , siempre es positiva.

II.5.3 Módulo de rigidez a la torsión (análisis plano).

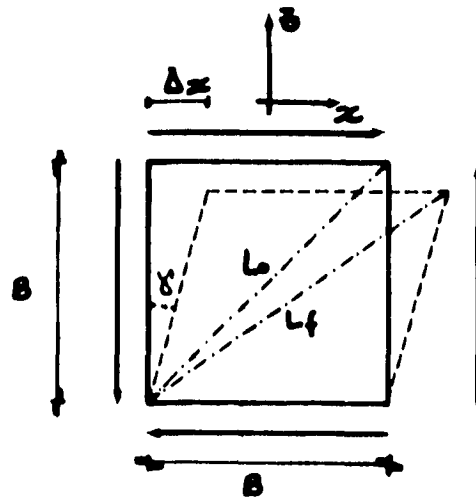


Figura 2.26

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta l}{L_o} = \frac{L_f - L_o}{L_o} = \frac{L_f}{L_o} - 1$$

para cortante puro se tiene que:

Del círculo de Mohr:

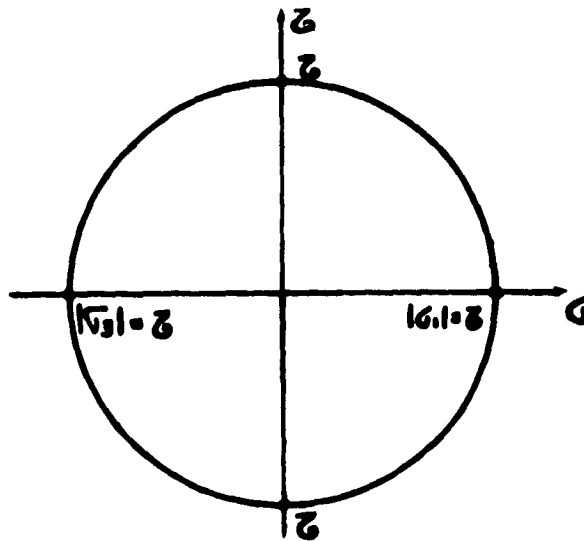


Figura 2.27

De aquí se puede decir que si:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_1 + \nu \epsilon_3 \\ \epsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} + \nu \frac{\sigma_3}{E} \end{aligned}$$

Pero por lo anterior se puede escribir:

$$\epsilon_1 = \frac{\tau}{E} + \nu \frac{\tau}{E} \tag{2.28}$$

De la figura 2.26 se deduce lo siguiente:

$$Lf^2 = B^2 + (B + \Delta_x)^2 = B^2 + B^2 + 2B\Delta_x + (\Delta_x)^2$$

por tener deformaciones pequeñas se desprecia el último término, así que:

$$Lf^2 = 2B^2 + 2B\Delta_x = 2B^2 \left(1 + \frac{\Delta_x}{B}\right)$$

y

$$Lf = \sqrt{2B^2 (1 + \Delta_x/B)} = \sqrt{2} B \sqrt{1 + \Delta_x/B}$$

pero

$$Lo^2 = 2B^2 \rightarrow Lo = \sqrt{2}B$$

recordando que:

$$\epsilon_1 = \frac{Lf}{Lo} - 1 = \frac{\sqrt{2} B \sqrt{1 + \Delta_x/B}}{\sqrt{2} B} - 1 = \sqrt{1 + \Delta_x/B} - 1$$

por lo tanto

$$\epsilon_1 = \sqrt{1 + \Delta_x/B} - 1$$

De la fórmula del binomio para exponente n:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 \dots \text{etc.}$$

pero despreciando desde el tercer término:

$$\sqrt{1 + \Delta_x/B} = (1)^{1/2} + 1/2 (1)^{1/2-1} \frac{\Delta_x}{B} = 1 + 1/2 \frac{\Delta_x}{B}$$

así que:

$$\varepsilon_1 = 1 + 1/2 \frac{\Delta_x}{B} - 1$$

$$\varepsilon_1 = 1/2 \frac{\Delta_x}{B} \quad 2.29$$

igualando las ecuaciones 2.28 y 2.29

$$1/2 \frac{\Delta_x}{B} = \frac{\tau}{E} (1 + \nu)$$

$$\gamma = \frac{\Delta_x}{B} = \frac{\tau}{E} 2(1 + \nu)$$

por lo que

$$\gamma = \frac{\tau}{\frac{E}{2(1+\nu)}}$$

donde se definirá G como:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

de modo que:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

donde:

G, es el módulo de rigidez a la torsión.

como γ es adimensional G tiene dimensiones de esfuerzo.

II.5.4 Módulo de Compresibilidad Volumétrica.

Recordando que para deformaciones pequeñas se acepta que:

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

y que en análisis tridimensional se acepta para esfuerzos y deformaciones triaxiales que:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

por lo tanto se obtiene que:

$$\epsilon_v = \frac{1}{E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_v = \frac{1}{E} [(1 - 2\nu) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)]$$

sabiendo que:

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1}{3} + \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}$$

se tiene que:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3 \sigma_{oct}$$

sustituyendo este termino en la fórmula de ϵ_v ,

$$\epsilon_v = \frac{1}{E} [(1 - 2\nu) 3 \sigma_{\text{act}}]$$

$$\epsilon_v = \frac{3(1 - 2\nu) \sigma_{\text{act}}}{E}$$

$$\epsilon_v = \frac{\sigma_{\text{act}}}{\frac{E}{3(1 - 2\nu)}}$$

en donde:

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

k , es el módulo de compresibilidad volumétrica (Bulk modulus).

finalmente la deformación volumétrica unitaria queda de la siguiente manera:

$$\epsilon_v = \frac{\sigma_{\text{act}}}{k}$$

obsérvese que si se tiene un material con $\nu = 0.5$, implica que k debe ser ∞ (infinito) y por lo tanto:

$$\epsilon_v = 0$$

esto quiere decir que para un suelo con una variación volumétrica nula se tiene que:
 $\nu = 0.5$

II.6 MODELOS REOLOGICOS.

También llamados modelos de relación esfuerzo-deformación, deformación-tiempo.

Se ha dicho con anterioridad que todo cuerpo cargado se deforma; también se ha establecido que los cuerpos tienen ciertas características internas o de estado de agregación que originan que al deformarse se comporten de ciertas maneras típicas.

A continuación se exponen algunos casos de comportamiento típicos y muy significativos para propósitos posteriores; se considera como sistema mecánico, a un cuerpo material real al que como acción se le aplica una fuerza.

Si el material es sólido, el efecto se mide en términos de la deformación total producida por la fuerza.

Si el material es fluido, el efecto correspondiente se medirá en una cierta rapidez de flujo (velocidad de deformación).

II.6.1 RELACION LINEAL.

En este modelo, el efecto es directamente proporcional a la fuerza, con dos modalidades:

II.6.1.1 Respuesta lineal elástica.

Su efecto físico que ejemplificaremos con la acción de un resorte helicoidal (figura 2.28).

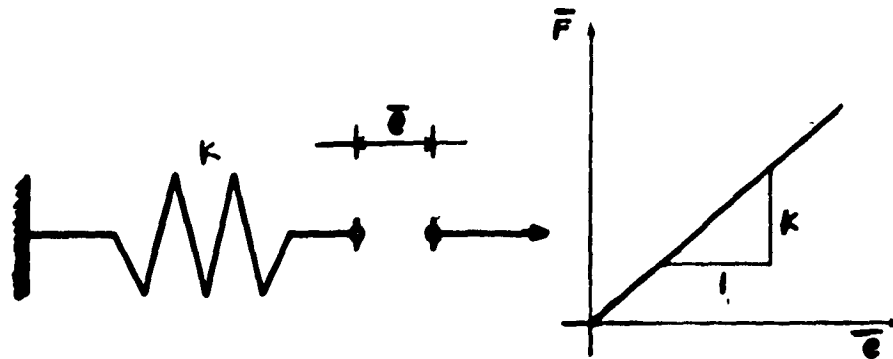


Figura 2.28

Este modelo corresponde a un "sólido elástico"; k es la constante elástica del resorte expresada como fuerza por unidad de deformación total.

II.6.1.2 Respuesta lineal viscosa.

Su efecto físico lo podemos ejemplificar con un amortiguador hidráulico lineal (figura 2.29).

Donde η es el coeficiente de viscosidad expresado como fuerza por unidad de rapidez de la deformación total.

II.6.1.3 Respuesta visco-elástica (Modelo de Maxwell).

Su efecto físico se ejemplifica con un resorte y un amortiguador "en serie" (figura 2.30).

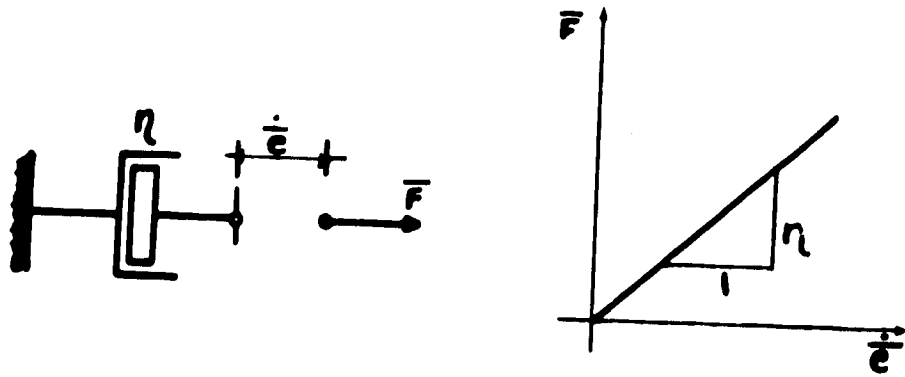


Figura 2.29

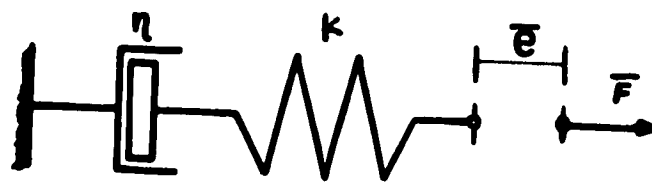


Figura 2.30

II.6.1.4 Respuesta visco-elástica (Modelo de Voigt).

Se puede ejemplificar con un resorte y un amortiguador "en paralelo" (figura 2.31).

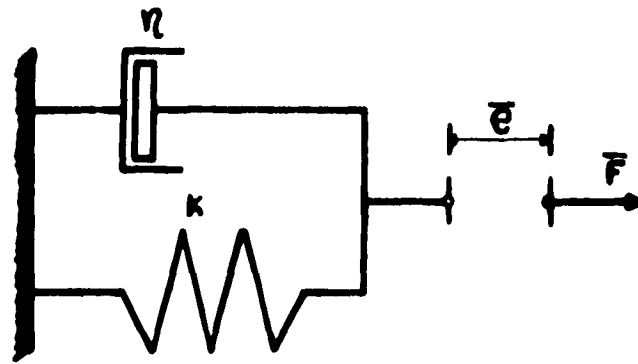


Figura 2.31

II.6.1.5 Respuesta lineal estándar.

Que se puede ejemplificar como sigue (figura 2.32).

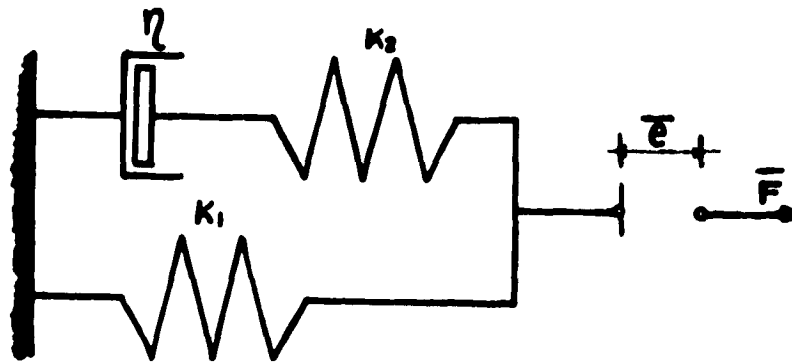


Figura 2.32

La diferencia fundamental entre los modelos 1, 2, 3, 4 y 5, estriba en que, en éstos, los efectos dependen de la historia de la carga, o sea que para diferentes funciones de carga $F(t)$, se producen diferentes funciones de deformación $e(t)$.

El efecto de flujo es la respuesta de deformación total dependiendo del tiempo, para una carga constante.

El efecto de relajación es la respuesta de carga pendiente del tiempo para una deformación total constante.

En el modelo de Maxwell, el resorte responde instantáneamente a una aplicación o supresión repentina de la carga, en tanto que el amortiguador responde (fluye) lentamente con el tiempo.

Por otra parte, para una deformación total constante, la fuerza decrece (se relaja) exponencialmente caracterizando el factor n/k la rapidez de decrecimiento.

El modelo lineal estándar tiene una respuesta elástica instantánea seguida por un flujo o relación exponencial.

Gráficamente, los distintos comportamientos se pueden visualizar como sigue:

a) Si cargamos:

MODELO DE MAXWELL

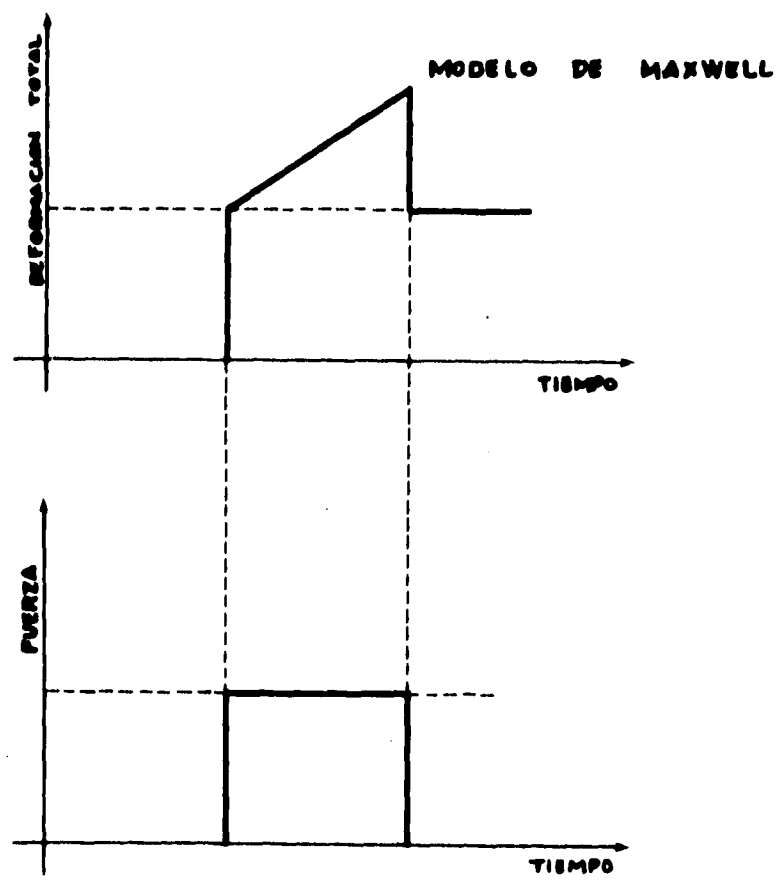


Figura 2.33

MODELO DE VOIGT

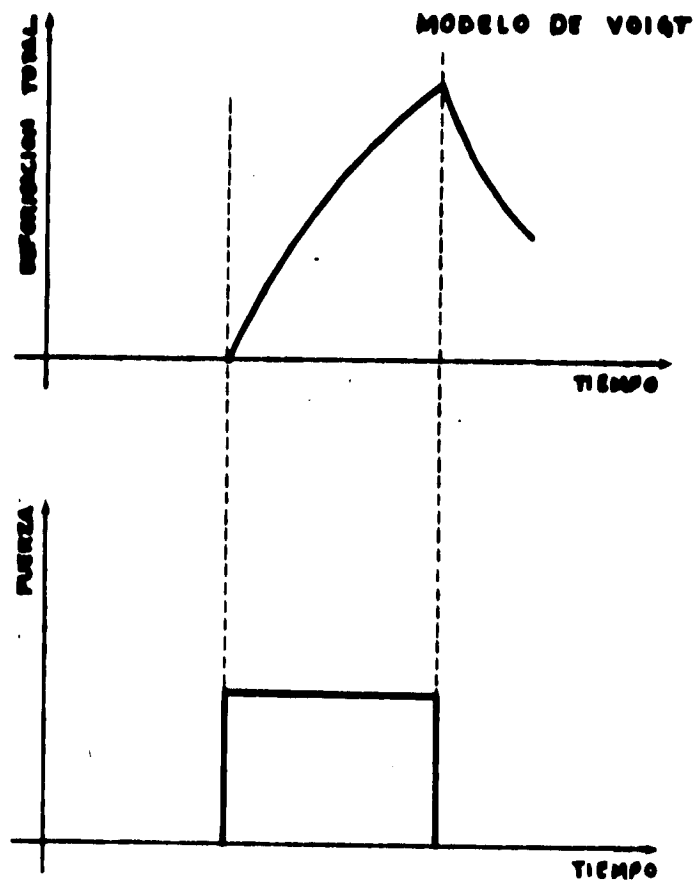


Figura 2.34

MODELO LINEAL ESTANDAR

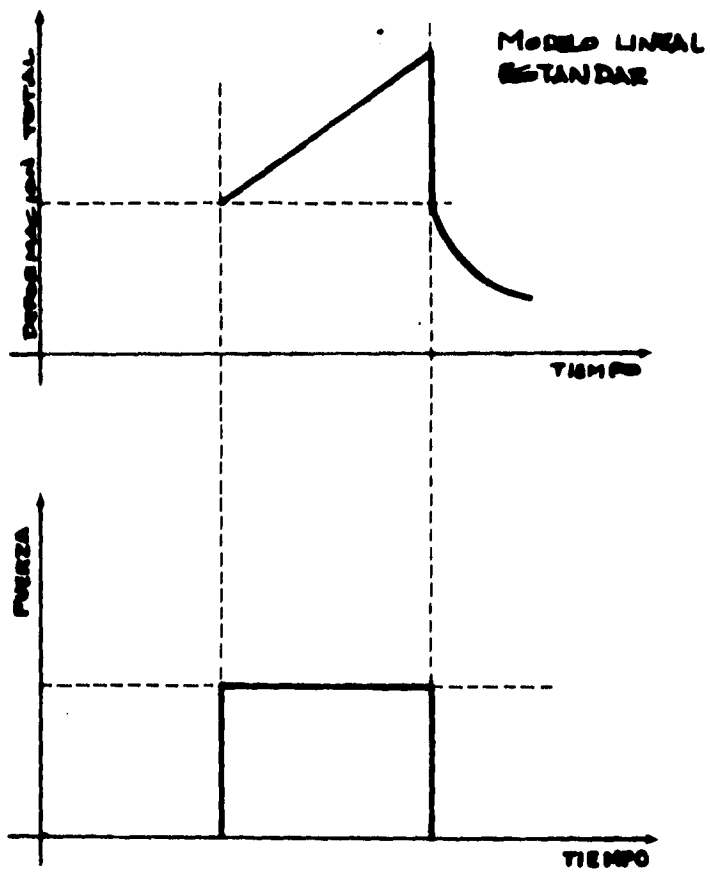


Figura 2.35

b) Si deformamos

MODELO DE MAXWELL

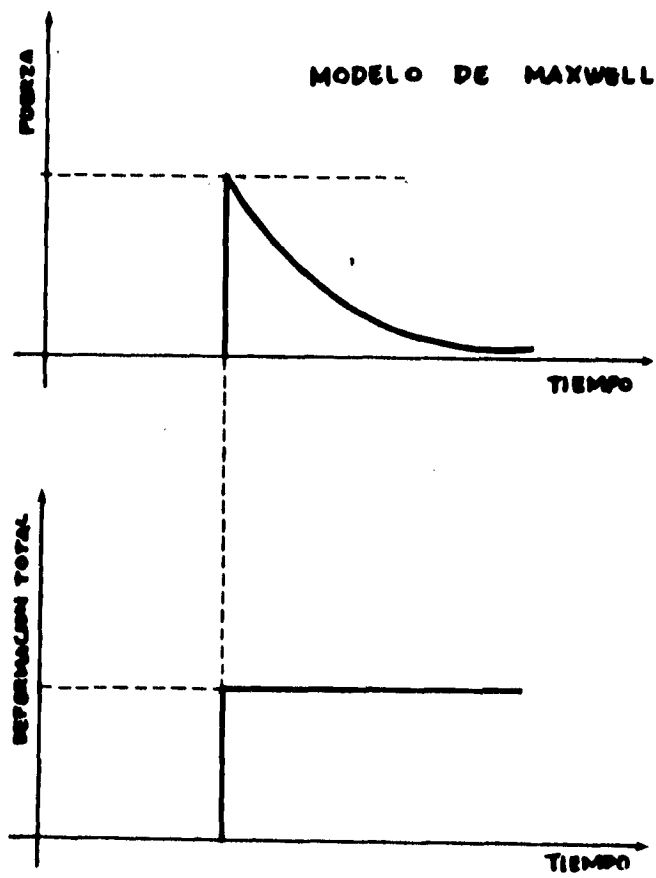


Figura 2.36

MODELO DE VOIGT

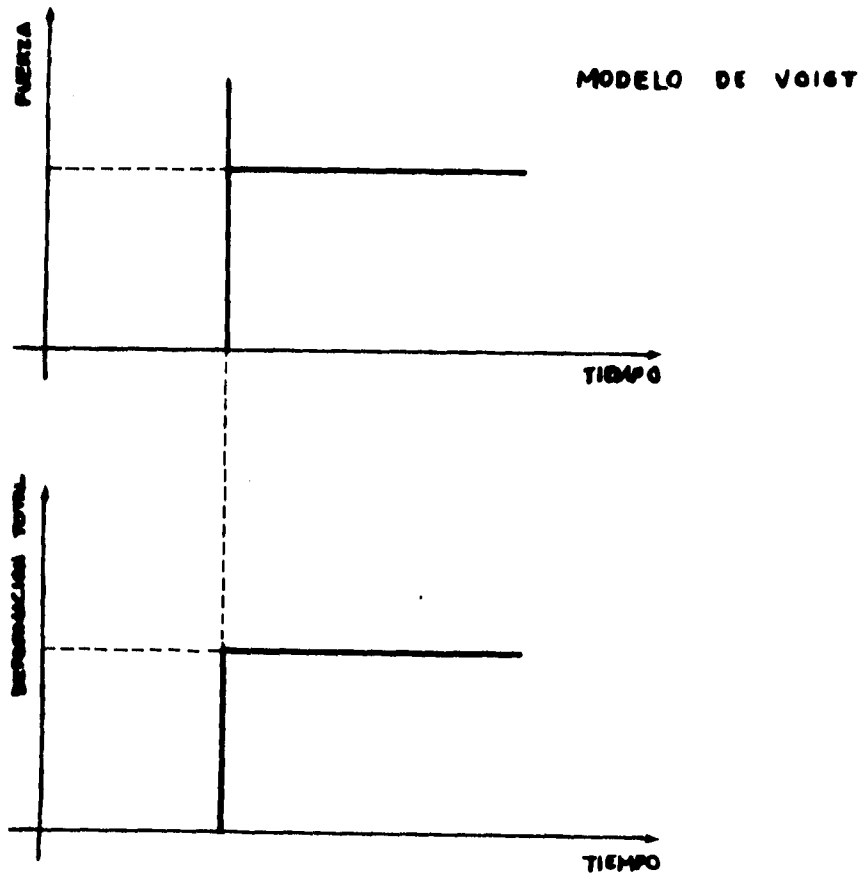


Figura 2.37

MODELO LINEAL ESTANDAR

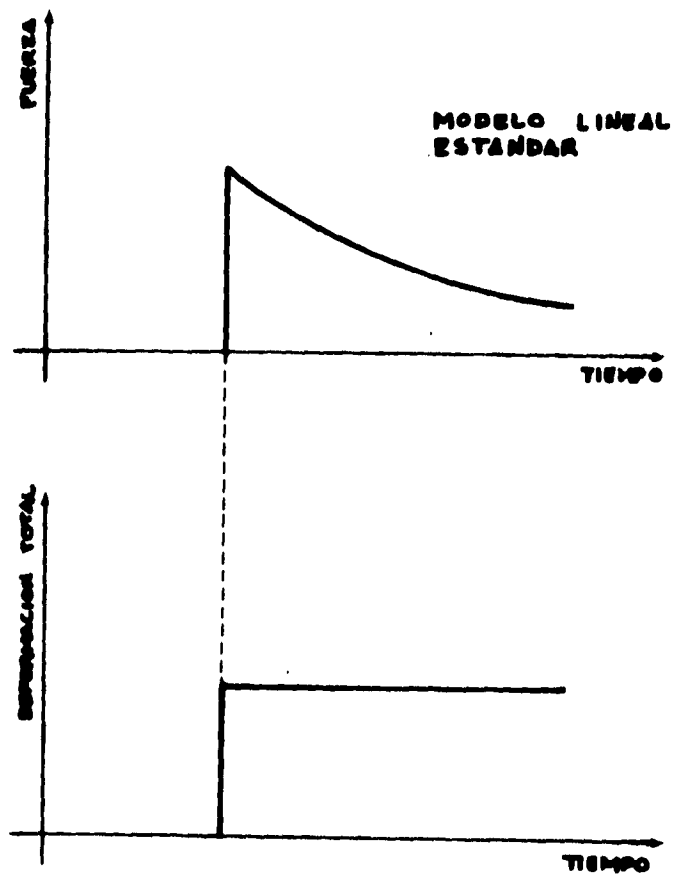


Figura 2.38

Los modelos anteriores, formados a base de resortes y amortiguadores son lineales, es decir, las deformaciones totales son proporcionales a las fuerzas. En realidad, las cosas no son así de simples; la modelización puede llegar a ser muy complicada. Si introducimos el elemento fricción podemos llegar a representaciones más apegadas a casos reales.

II.6.2 RELACION NO LINEAL.

II.6.2.1 Respuesta de fricción (Modelo de Coulomb).

Se puede ejemplificar con un bloque en reposo sobre una superficie áspera la cual se le aplica una fuerza creciente (figura 2.39).

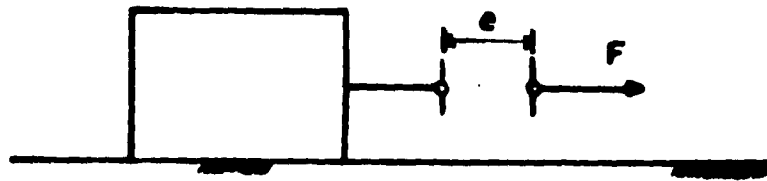


Figura 2.39

Sabemos por la teoría de la fricción que el cuerpo no se moverá hasta que la fuerza sea lo suficientemente grande para vencer la resistencia debida a la fricción estática.

La relación fuerza desplazamiento es:

$$\begin{aligned} e &= 0 \text{ si } F \leq F_c \\ e &\neq 0 \text{ ai } F > F_c \end{aligned}$$

Siendo F_c el valor límite de F antes de que se produzca el movimiento (figura 2.40).

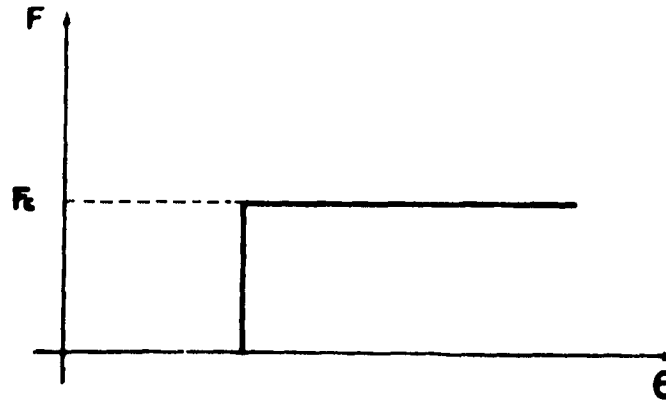


Figura 2.40

Entendemos por **deformación irrecuperable** aquella deformación que permanece después de ser removido el esfuerzo que la produjo.

Si combinamos este tipo de elementos con resortes y amortiguadores obtendremos respuestas no lineales.

II.6.2.2 Respuesta parcialmente elástica y parcialmente irrecuperable.

La respuesta será lineal cuando la fuerza en el resorte alcance el valor F_c y el bloque comience a deslizarse sin que aumente la fuerza. Si la carga se suprime el resorte se contrae pero el sistema no regresa a su posición original y conserva una deformación permanente (figura 2.42).

II.6.2.3 Respuesta no lineal en general.

Hay muchas maneras de combinar elementos de fricción con amortiguadores y resortes; estos nos darán respuestas muy diversas, por ejemplo (figuras 2.41 y 2.42).

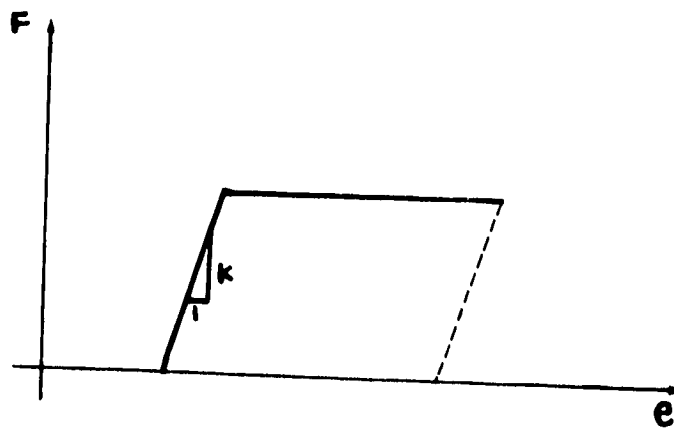
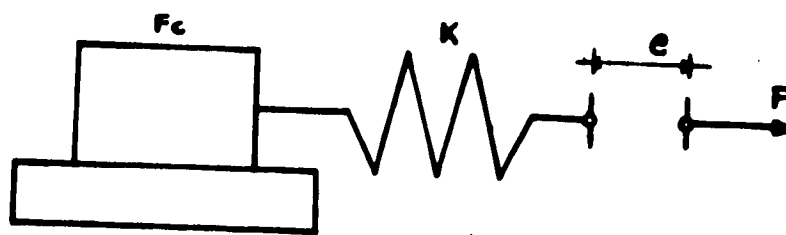


Figura 2.41

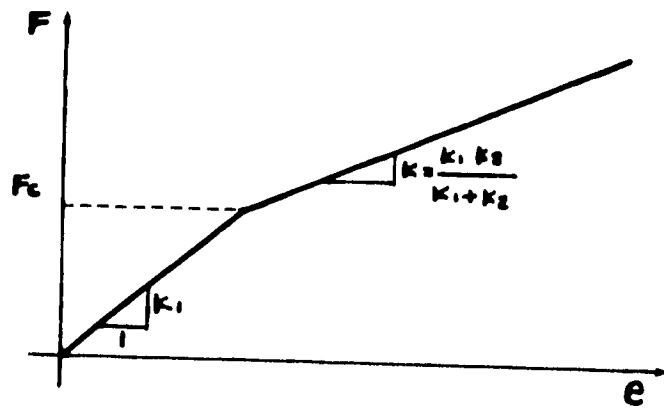
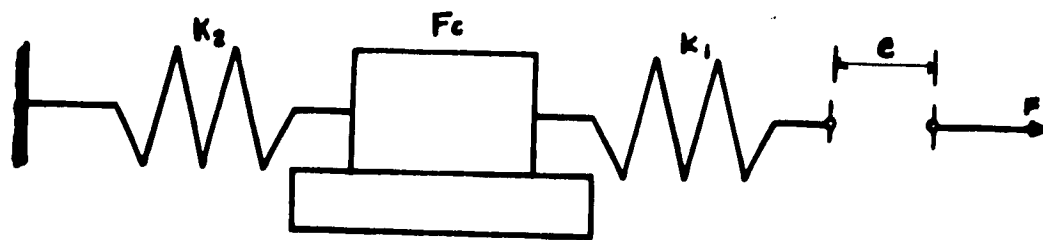


Figura 2.42

II.7 HISTERESIS Y FATIGA.

La influencia del endurecimiento por alargamiento en frío o endurecimiento por esforzamiento, que consiste en cargar el material inicialmente más allá del esfuerzo de fluencia, modifica la relación esfuerzo deformación subsecuente. Por ejemplo, si una probeta es esforzada más allá del límite de fluencia, figura 2.44, hasta el punto B, descargada entonces hasta C y vuelta a cargar, la resistencia a la fluencia aumenta de un valor en A hasta uno en D. Como consecuencia entonces de varios actos de descarga y carga, incrementarán la resistencia a la fluencia. Al cargar hasta B, descargar a C y volver a cargar a D, una cierta cantidad de energía de deformación es disipada en forma de calor producido por la fricción interna. Esta energía que se desprende queda representada por el área sombreada en la figura 2.43.

La pérdida de energía de deformación se conoce como histéresis mecánica y el diagrama de la figura se conoce como rizo de histéresis (bucle o loop).

Al descargar hasta C, hay una deformación elástica C' , recuperable representada por CG y una deformación permanente $\epsilon_p = OC$. O sea, que para cualquier punto sobre el diagrama esfuerzo deformación, la deformación puede ser considerada como formada por dos partes; una elástica y una irrecuperable.

Hay algunos efectos posteriores que modifican la relación esfuerzo deformación. Esto es, si en el rango elástico una carga es aplicada súbitamente se produce una deformación instantánea ϵ_i (figura 2.44). Luego, con una carga constante, resulta una deformación residual durante un tiempo t .

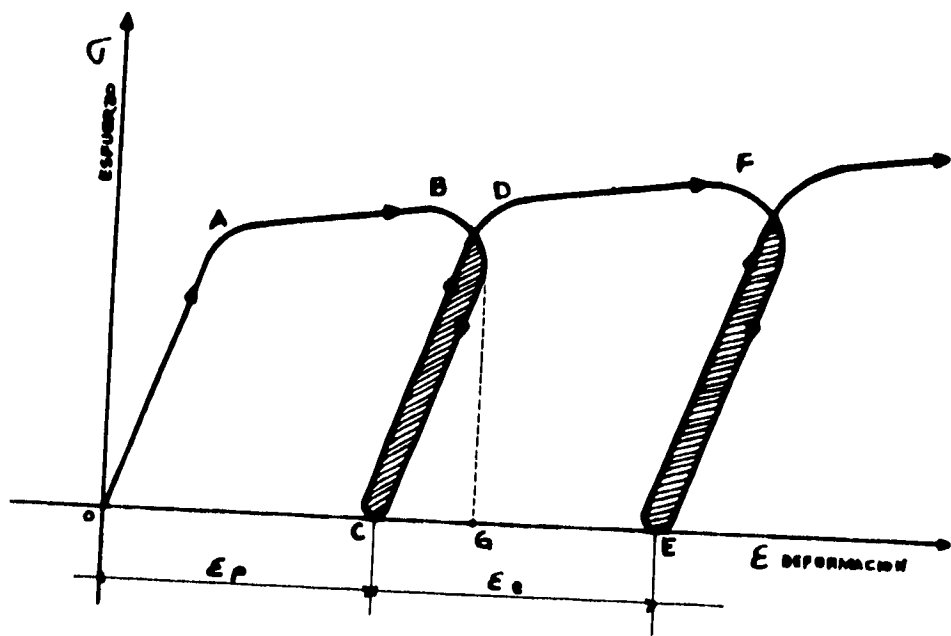


Figura 2.43

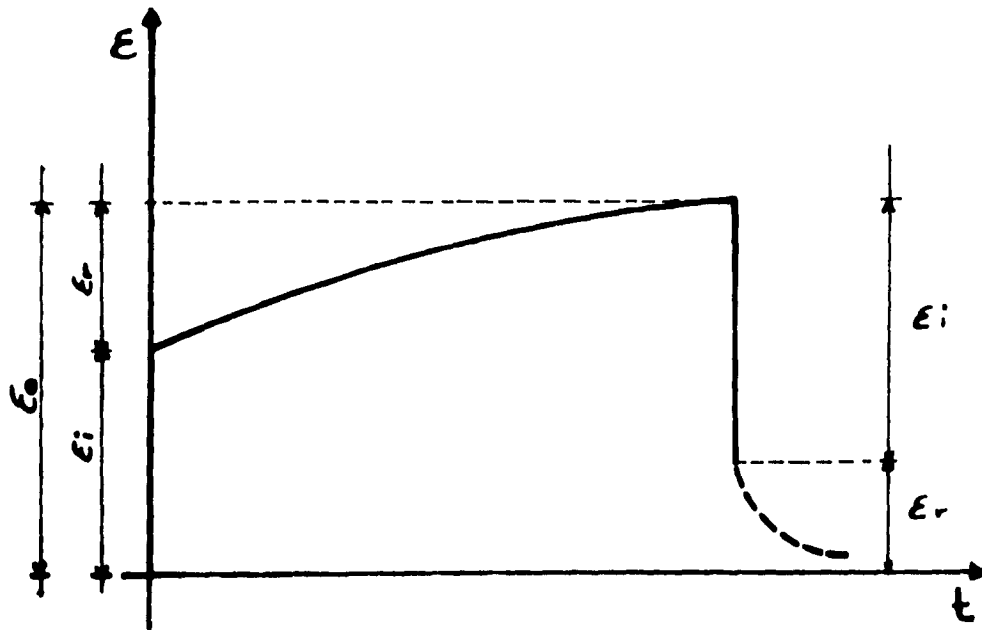


Figura 2.44

La deformación ϵ_r varía con el logaritmo del tiempo; más aún, la deformación ϵ_r es igual a un número constante de veces la deformación total ϵ_0 , donde:

$$\epsilon_0 = \epsilon_r + \epsilon_i$$

Se considera que un material tiene una cierta resistencia para una carga dada; sometiendo a este mismo material a cargas cíclicas menores que su resistencia, puede llegar a fallar después de un cierto número de ciclos de carga y descarga. Al fenómeno consistente en la falla de un material sujeto a ciclos de carga y descarga se le conoce como fatiga.

CAPITULO III

ELEMENTOS DE MECANICA DE LOS SUELOS.

III.1 EL SUELO Y LA MECANICA DE SUELOS.

El recuerdo de la persona que utilizó por primera vez el suelo como un material de construcción se encuentra perdido en la antigüedad. Por años, el arte de la ingeniería de suelos estuvo basado únicamente en la experiencia transmitida y adquirida de generación a generación. Con el crecimiento de la ciencia y la tecnología, la necesidad por mejorar y hacer más económicos los diseños estructurales y los procedimientos constructivos fue una meta primordial. Esto condujo a un estudio detallado de la naturaleza y propiedades del suelo relacionadas con la ingeniería durante los primeros años del siglo XX. La publicación de Erdbaumechanik por Karl Terzaghi en 1925, fue el punto de partida de la moderna mecánica de suelos, en esta obra se presentaron los principios fundamentales de la mecánica de suelos en los cuales muchos de los

estudios avanzados se encuentra basados.

Desde un punto de vista ingenieril, el suelo es definido como un agregado no cementado de partículas de mineral y materia orgánica en descomposición (partículas sólidas) junto con el líquido y/o gas que ocupan los espacios vacíos entre las partículas sólidas.

También al suelo se le define como el material formado por partículas minerales (producto de la descomposición y/o desintegración de las rocas) y vacíos (que pueden o no estar ocupados por agua). El suelo es usado como un material de construcción en varias obras de ingeniería civil y soporta estructuras con diferentes tipos de cimentaciones. Por ello, la ingeniería civil debe estudiar las propiedades del suelo como son: su origen, la distribución granulométrica, capacidad para drenar agua, compresibilidad, resistencia al corte, capacidad de carga, etc.

La mecánica de suelos es la rama de la ciencia que estudia las propiedades físicas del suelo y el comportamiento de las masas de suelo sujetas a varios tipos de fuerzas.

El término de ingeniería geotécnica está definido como la ciencia y práctica de la parte de la ingeniería civil que involucra los materiales naturales localizados cerca de la superficie de la tierra. En un sentido general, esto incluye la aplicación de los principios fundamentales de la mecánica de suelos y la mecánica de rocas a problemas enfocados al diseño de cimentaciones.

III.2 ESTRUCTURAS DE LOS SUELOS.

Se define como estructura de un suelo a la ubicación, arreglo y orientación de sus partículas minerales. También se define como el arreglo geométrico de las partículas de suelo con respecto a otras. Entre los muchos factores que afectan la estructura de un suelo están la forma y tamaño de las partículas, y la composición del agua según el tamaño de las mismas, los suelos pueden ser divididos según el tamaño de sus

partículas en dos grandes grupos: suelo grueso y suelo fino.

Las partículas del suelo se disponen siempre en forma organizada, siguiendo algunas leyes fijas y según la acción de fuerzas naturales susceptibles de análisis. En suelos formados por partículas relativamente grandes (gravas y arenas) las fuerzas que intervienen para formar la estructura son bastante bien conocidas y sus efectos son relativamente simples de calificar; por ésto, prácticamente no hay discusión respecto al mecanismo de estructuración que, por otra parte, es verificable a simple vista. Por el contrario, en los suelos formados por partículas muy pequeñas (limos y arcillas), las fuerzas que intervienen en los procesos de estructuración son de un carácter mucho más complejo y las estructuras resultantes son sólo parcialmente verificables por métodos indirectos, relativamente complicados y algunos de ellos en etapa de desarrollo.

Las formaciones estructurales más conocidas de los suelos son:

III.2.1 ESTRUCTURA SIMPLE.

Es aquélla producida cuando las fuerzas debidas al campo gravitacional terrestre son claramente predominantes en la disposición de las partículas; por lo tanto, es típica de suelos de partículas gruesas (gravas y arenas limpias) de masa comparativamente importante. Las partículas se disponen apoyándose directamente unas en otras y cada partícula posee varios puntos de apoyo (figura 3.1).

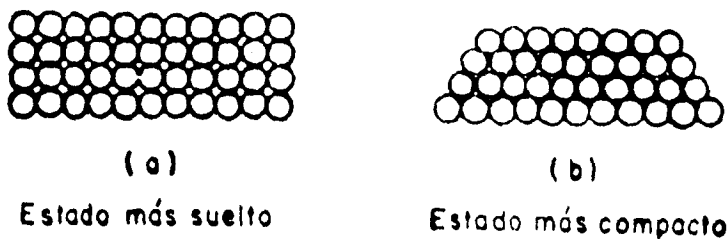


Figura 3.1

Desde un punto de vista ingenieril, el comportamiento mecánico e hidráulico de un suelo de estructura simple, queda definido principalmente por dos características: la compacidad del manto y la orientación de sus partículas. El término Densidad o Compacidad Relativa es usado para indicar que tan suelto o denso está un material granular y se define como:

$$Dr(\%) = \frac{e_{max} - e_{nat}}{e_{max} - e_{min}} (100)$$

donde:

Dr , es la densidad relativa, expresada en porcentaje

e_{nat} , es la relación de vacíos del suelo in situ

e_{max} , es la relación de vacíos de la condición más suelta

e_{min} es la relación de vacíos en la condición más compacta

El rango de valores de Dr puede variar desde un valor mínimo de cero para un suelo muy suelto, a un máximo de 1 para un suelo compacto. Con base en la densidad relativa los depósitos de materiales granulares se pueden clasificar de la siguiente manera:

Densidad Relativa (%)	Descripción del depósito de suelo
0 - 15	Muy suelto
15 - 20	Suelto
50 - 70	Medio
70 - 85	Denso
85 - 100	Muy denso

Valores de la compacidad relativa superiores al 50% suelen considerarse de un suelo compacto y este valor se menciona frecuentemente como límite de seguridad razonable en problemas prácticos, tales como cimentaciones en suelos gruesos, posibilidades de licuación en mantos de arena y limos no plásticos, etc.

III.2.2 ESTRUCTURA PANALOIDE.

Esta estructura se considera típica en partículas de tamaño pequeño (0.002 mm de diámetro o algo menores) que se depositan en un medio continuo generalmente agua y en ocasiones aire. En estas partículas la gravitación ejerce un efecto que hace que tiendan a sedimentarse, pero dada su pequeña masa, otras fuerzas naturales pueden hacerse de magnitud comparable; concretamente, si la partícula antes de llegar al fondo del depósito toca a otra partícula ya depositada, la fuerza de adherencia desarrollada entre ambas puede neutralizar al peso, haciendo que la partícula quede tendida antes de completar su carrera pudiendo añadirse otra partícula y así sucesivamente, y el conjunto de ellas podrá llegar a formar una celda con cantidad importante de vacíos a modo de panal (figura 3.2).

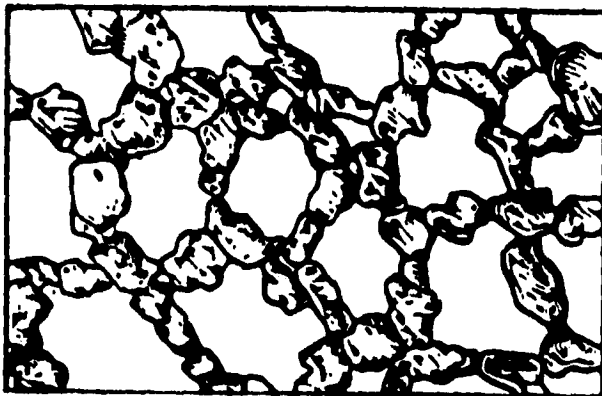


Figura 3.2

III.2.3 ESTRUCTURA FLOCULENTA.

Cuando en el proceso de sedimentación dos partículas de diámetros menores a 0.02 mm llegan a tocarse, se adhieren con fuerza y se sedimentan juntas; así, otras

partículas pueden unirse al grupo formando un grumo con estructura similar a un panal. Cuando estos grumos llegan al fondo forman a su vez panales cuyas bóvedas no están ya formadas por partículas individuales, sino por lo grumos mencionados. El mecanismo anterior produce una estructura muy blanda y suelta, con gran volumen de vacíos llamada floculenta, a veces, panaloide de orden superior.

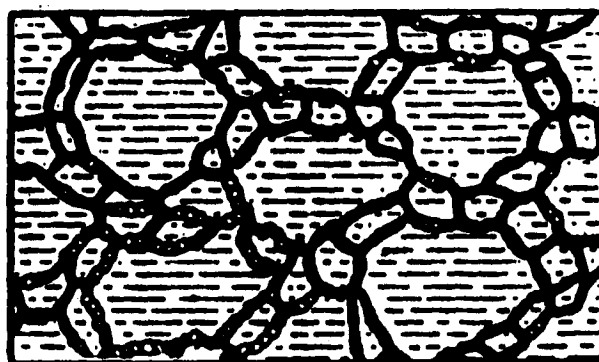


Figura 3.3

III.2.4 ESTRUCTURA COMPUESTA.

Se considera que las estructuras anteriores rara vez se presentan puras en la naturaleza, pues la sedimentación comprende partículas de todos los tamaños y tipos, para las que rigen las leyes de la naturaleza de modo diferente. En estas formaciones se define un esqueleto constituido por los granos gruesos y por masas coloidales de floculos que proporcionan nexo entre ellos (figura 3.4).

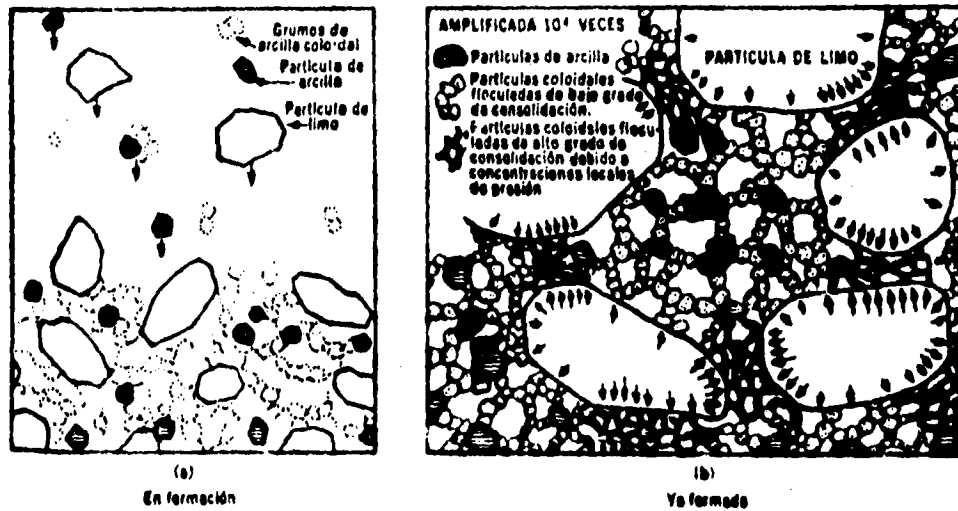


Figura 3.4

III.2.5 ESTRUCTURA EN "CASTILLO DE NAIPES".

Algunos investigadores han sugerido una interpretación diferente sobre la génesis de una estructura flocculenta y la estructura resultante en sí. Según sus ideas la forma laminar típica de los minerales de arcilla es fundamental en la estructuración resultante para los suelos finos. Las mismas investigaciones han dado a luz que, si bien la partícula de suelo posee carga negativa, parece cierto que en sus aristas existe una concentración de carga positiva que hace que esa zona localizada se atraiga con la superficie de cualquier partícula vecina, formándose una estructura denominada como castillo de naipes o flocculada característica de las arcillas. Es conveniente hacer notar que según estas hipótesis de estructuración estos tipos de suelos presentan un importante volumen de vacíos (figura 3.5).

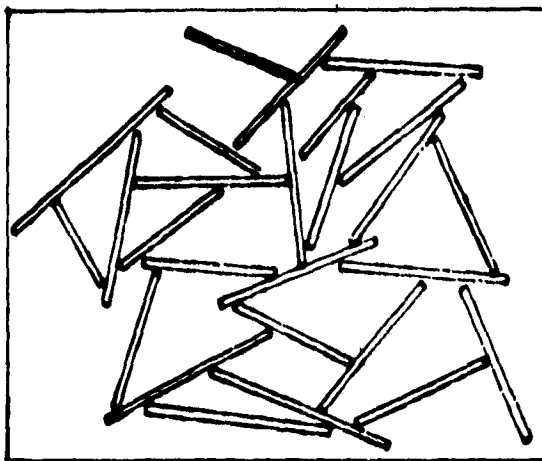


Figura 3.5

III.2.6 ESTRUCTURA DISPERSA.

Algunas investigaciones modernas han indicado que una hipótesis estructural del tipo "castillo de naipes", en la cual las partículas tienen contactos mutuos; si bien puede aceptarse como real en muchos casos, quizá no es la más estable en la que pudiera pensarse.

Cualquier perturbación que puede existir como deformación por esfuerzo cortante, tiende en general a disminuir los ángulos entre las diferentes láminas de material. Conforme esto sucede actúan entre las partículas presiones osmóticas inversamente proporcionales al espaciado entre ellas. Las presiones osmóticas tienden a hacer que las partículas se separen y adopten una posición casi paralelas entre ellas (figura 3.6).

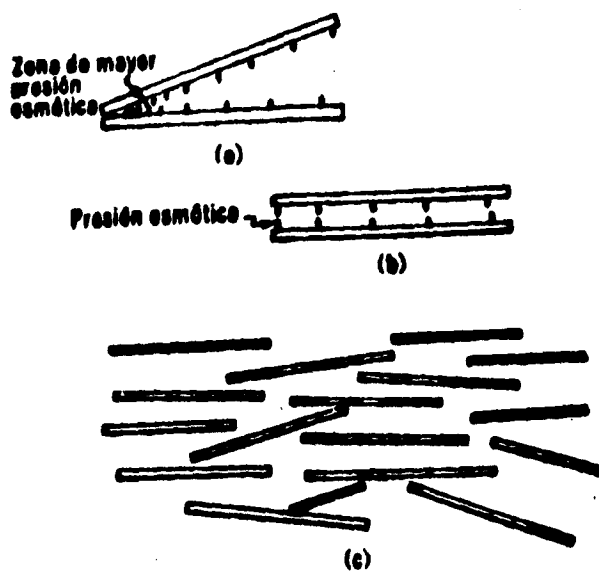


Figura 3.6

El conjunto de estructuras descritas someramente para los suelos finos no constituye una serie de posibilidades reales en la naturaleza, si no simplemente, son el fruto de las diferentes hipótesis que han formulado los distintos investigadores dedicados a estos estudios y que de alguna y otro manera, aunque con ciertas discrepancias son aceptadas actualmente.

III.3 INCREMENTOS DE ESFUERZO EN LA MASA DE SUELO OCASIONADOS POR UNA CARGA REPARTIDA APLICADA EN LA SUPERFICIE.

III.3.1 AREA RECTANGULAR UNIFORMEMENTE CARGADA.

Las expresiones para determinar los esfuerzos normales verticales bajo la esquina de un rectángulo sometido a una carga uniforme "p" aplicada en la superficie (figura 3.7), son las siguientes:

1.- Ecuación de Julio Dany Ríos:

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} \right) \frac{xyz}{A} + \tan^{-1} \frac{xy}{zA} \right] \quad 3.1$$

2.- Ecuaciones de Dashkó y Kagán para σ_x y σ_y

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(x^2 + z^2)A} \cdot \tan^{-1} \frac{zA}{xy} + (1 - 2\nu) \left(\tan^{-1} \frac{y}{x} - \tan^{-1} \frac{yA}{xz} \right) \right] \quad 3.2$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(y^2 + z^2)A} \cdot \tan^{-1} \frac{zA}{xy} + (1 - 2\nu) \left(\tan^{-1} \frac{x}{y} - \tan^{-1} \frac{xA}{yz} \right) \right] \quad 3.3$$

donde $A = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

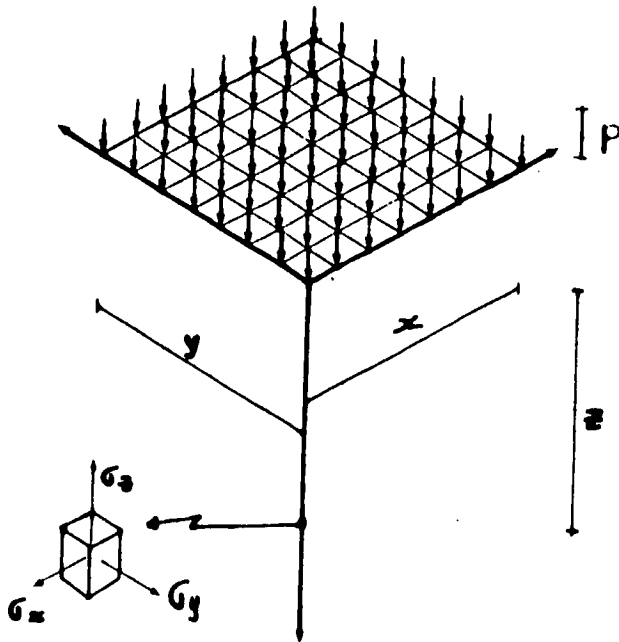
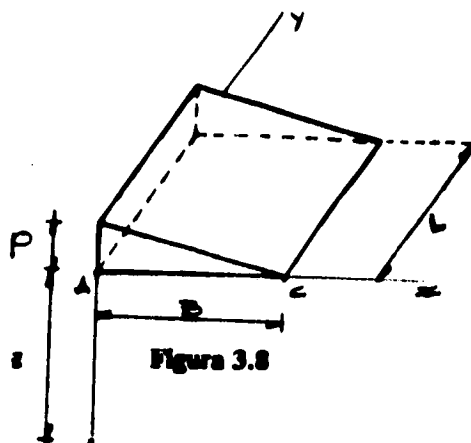


Figura 3.7

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

III.3.2 CARGA TRIANGULAR.

Se utilizan las fórmulas de Hamilton Gray.



1.- Bajo el punto A.

$$\sigma_{zA} = \left[\frac{P L}{2\pi B} \right] \left[\frac{z \sqrt{(L^2 + B^2 + z^2)}}{L^2 + z^2} - \frac{z}{\sqrt{(L^2 + z^2)}} \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{B}{L} \operatorname{sen}^{-1} \frac{B L}{\sqrt{(B^2 L^2 + B^2 z^2 + L^2 z^2 + z^4)}} \right] \quad 3.4$$

2.- Bajo el punto C.

$$\sigma_{zB} = \left[\frac{P L}{2\pi B} \right] \left[\frac{z}{\sqrt{(L^2 + z^2)}} - \frac{z^3}{(B^2 + z^2) \sqrt{(L^2 + B^2 + z^2)}} \right] \quad 3.5$$

III.4 SOLUCION DE BOUSSINESQ.

HIPOTESIS:

- A) Medio Semi-Infinito.
- B) Medio linealmente elástico (La relación σ - ϵ es lineal y se utiliza E y ν).
- C) Medio Homogéneo.
- D) Medio Isótropo.

E) Medio con desplazamientos pequeños.

III.4.1 Carga Concentrada.

Los Esfuerzos que en una sola carga vertical concentrada actuante en la superficie horizontal de un medio semi-infinito, induce en los puntos de cualquier carga vertical trazada en el medio, se calcularon en 1883 por Boussinesq (figura 3.9).

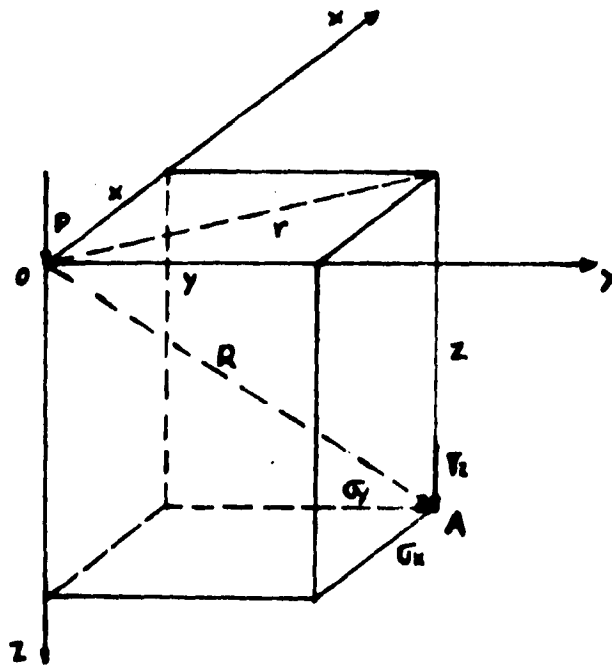


Figura 3.9

De la figura 3.9 se puede observar que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad L = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Si ν , es la relación de Poisson.

Los esfuerzos en el punto A pueden escribirse como:

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{3x^2z}{L^3} - (1-2\nu) \left[\frac{x^2 - y^2}{Lr^2(L+z)} + \frac{y^2z}{L^3r^2} \right] \right\} \quad 3.6$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{3y^2z}{L^3} - (1-2\nu) \left[\frac{y^2 - x^2}{Lr^2(L+z)} + \frac{x^2z}{L^3r^2} \right] \right\} \quad 3.7$$

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{L^3} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad 3.8$$

Nótese que las ecuaciones para encontrar los esfuerzos horizontales, son dependientes de la relación de Poisson. Sin embargo, la expresión para el esfuerzo normal vertical, es independiente de dicha relación y la expresión para calcular σ_z puede escribirse como sigue:

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi} \left(\frac{3}{2\pi} \left[\frac{1}{(r/z)^2 + 1} \right]^{3/2} \right)$$

Ahora, igualando

$$P_o = \frac{3}{2\pi} \left[\frac{1}{(r/z)^2 + 1} \right]^{3/2}$$

se obtiene que:

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi} P_o$$

En la Tabla III.1, se presentan valores de P_o .

III.4.2 DISTRIBUCION DE ESFUERZOS CON CARGA LINEAL DE LONGITUD FINITA.

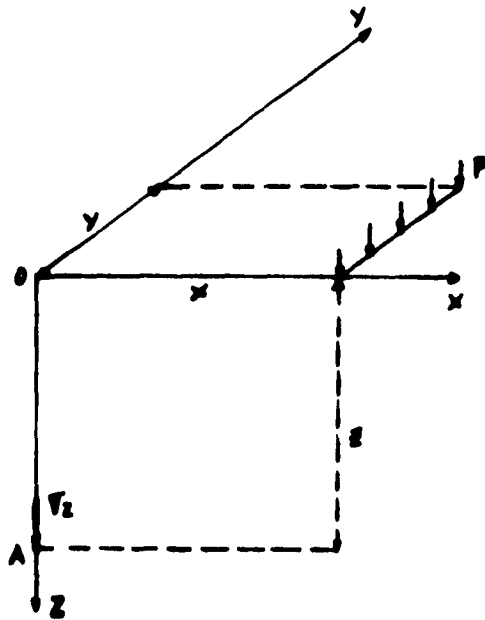


Figura 3.10

en donde:

P, es la unidad de fuerza, por unidad de longitud.

El valor de σ_z en un punto "O" puede obtenerse de la manera siguiente:

$$d \sigma_z = \frac{3dP}{2\pi} \frac{z^3}{(z^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \quad 3.9$$

en donde:

$$dP = P dy$$

Integrando la ecuación 3.9

$$\sigma_s = \int_0^y \frac{3Pdy}{2\pi} \frac{z^3}{(z^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

resulta lo siguiente:

$$\sigma_s = \frac{P}{2\pi} \frac{y z^3}{(x^2 + z^2) \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{2}{x^2 + z^2} \right) \quad 3.10$$

Ahora, igualando

$$m = \frac{x}{z} \quad y \quad n = \frac{y}{z}$$

la ecuación 3.10 queda de la siguiente manera:

$$\sigma_s = \frac{P}{z} \frac{1}{2\pi} \frac{n}{(m^2 + 1) \sqrt{(m^2 + n^2 + 1)}} \left(\frac{1}{m^2 + n^2 + 1} + \frac{2}{m^2 + 1} \right)$$

y se puede escribir así:

$$\sigma_s = \frac{P}{z} P_0$$

El valor de P_0 fue tabulado para diferentes valores de m y n por R.E. Fadum. (Figura 3.11).

Si se usa la gráfica propuesta, el sistema coordenado ortogonal de referencia debe escogerse de modo, que el eje Y sea paralelo a la carga lineal y el eje X normal a ella, por su extremo.

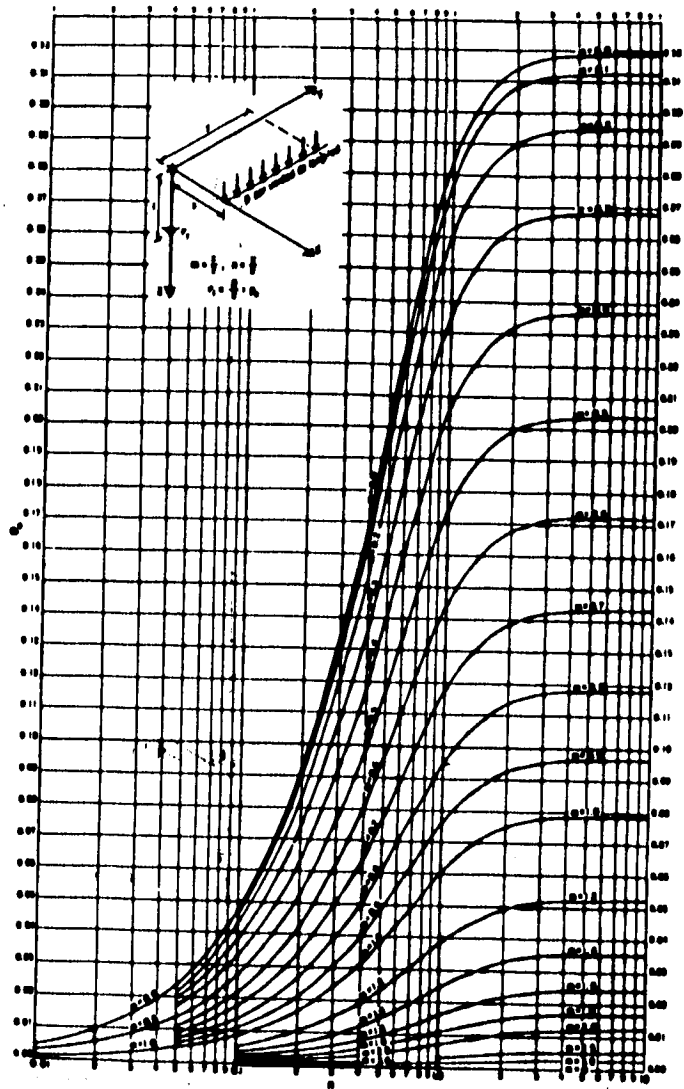


Figura 3.11

III.4.3 DISTRIBUCION DE ESFUERZOS BAJO EL CENTRO DE UNA SUPERFICIE CIRCULAR UNIFORMEMENTE CARGADA.

El esfuerzo σ , en cualquier punto de la carga vertical bajada por el centro del círculo cargado puede obtenerse de la siguiente manera:

De la figura 3.12 tenemos que:

$$\Delta A = r \Delta \rho \Delta \theta$$

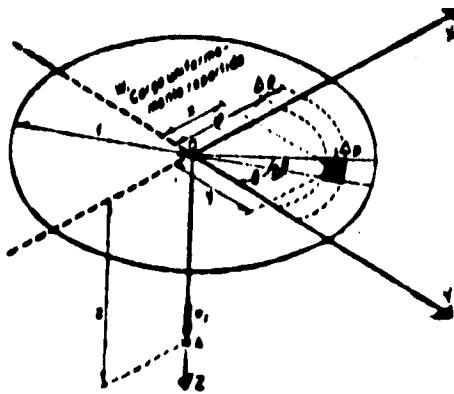


Figura 3.12

por lo tanto :

$$\Delta P = \sigma \Delta \rho \Delta \theta \tag{3.11}$$

Sustituyendo 3.11 entre 3.9 se tiene que:

$$d\sigma_z = \frac{3\omega}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2+z^2)^{3/2}} \rho \Delta\rho \Delta\theta$$

Agrupando :

$$d\sigma_z = \frac{3\omega}{2\pi} z^3 \frac{\rho}{(r^2+z^2)^{3/2}} \Delta\rho \Delta\theta \quad 3.12$$

Integrando 3.12 para toda la superficie, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_z = \frac{3\omega z^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{\rho d\rho}{(r^2+z^2)^{3/2}} \quad 3.13$$

$$\sigma_z = \frac{3\omega z^3}{2\pi} (2\pi) \left[-\frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{(r^2+z^2)^{3/2}} \right]_0^r$$

$$\sigma_z = \omega \left\{ 1 - \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2} \right]^{3/2} \right\} \quad 3.14$$

Lo anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\sigma_z = \omega \cdot \omega_0$$

Los valores de ω_0 pueden tabularse en función de los correspondientes de r/z . En la tabla III.2 se presenta la tabulación en cuestión.

Selección de Bases de

o. = m. m.

r/s	m.	r/s	m.	r/s	m.	r/s	m.
1.00	-0.00000	1.00	-0.12120	1.00	-0.30000	1.00	-0.20000
1	-0.00010	1	-0.12200	1	-0.27811	1	-0.20000
2	-0.00020	2	-0.12300	2	-0.25622	2	-0.20000
3	-0.00030	3	-0.12400	3	-0.23433	3	-0.20000
4	-0.00040	4	-0.12500	4	-0.21244	4	-0.20000
5	-0.00050	5	-0.12600	5	-0.19055	5	-0.20000
6	-0.00060	6	-0.12700	6	-0.16866	6	-0.20000
7	-0.00070	7	-0.12800	7	-0.14677	7	-0.20000
8	-0.00080	8	-0.12900	8	-0.12488	8	-0.20000
9	-0.00090	9	-0.13000	9	-0.10299	9	-0.20000
10	-0.00100	10	-0.13100	10	-0.08110	10	-0.20000
11	-0.00110	11	-0.13200	11	-0.05921	11	-0.20000
12	-0.00120	12	-0.13300	12	-0.03732	12	-0.20000
13	-0.00130	13	-0.13400	13	-0.01543	13	-0.20000
14	-0.00140	14	-0.13500	14	0.00646	14	-0.20000
15	-0.00150	15	-0.13600	15	0.02749	15	-0.20000
16	-0.00160	16	-0.13700	16	0.04852	16	-0.20000
17	-0.00170	17	-0.13800	17	0.06955	17	-0.20000
18	-0.00180	18	-0.13900	18	0.09058	18	-0.20000
19	-0.00190	19	-0.14000	19	0.11161	19	-0.20000
20	-0.00200	20	-0.14100	20	0.13264	20	-0.20000
21	-0.00210	21	-0.14200	21	0.15367	21	-0.20000
22	-0.00220	22	-0.14300	22	0.17470	22	-0.20000
23	-0.00230	23	-0.14400	23	0.19573	23	-0.20000
24	-0.00240	24	-0.14500	24	0.21676	24	-0.20000
25	-0.00250	25	-0.14600	25	0.23779	25	-0.20000
26	-0.00260	26	-0.14700	26	0.25882	26	-0.20000
27	-0.00270	27	-0.14800	27	0.27985	27	-0.20000
28	-0.00280	28	-0.14900	28	0.30088	28	-0.20000
29	-0.00290	29	-0.15000	29	0.32191	29	-0.20000
30	-0.00300	30	-0.15100	30	0.34294	30	-0.20000
31	-0.00310	31	-0.15200	31	0.36397	31	-0.20000
32	-0.00320	32	-0.15300	32	0.38500	32	-0.20000
33	-0.00330	33	-0.15400	33	0.40603	33	-0.20000
34	-0.00340	34	-0.15500	34	0.42706	34	-0.20000
35	-0.00350	35	-0.15600	35	0.44809	35	-0.20000
36	-0.00360	36	-0.15700	36	0.46912	36	-0.20000
37	-0.00370	37	-0.15800	37	0.49015	37	-0.20000
38	-0.00380	38	-0.15900	38	0.51118	38	-0.20000
39	-0.00390	39	-0.16000	39	0.53221	39	-0.20000
40	-0.00400	40	-0.16100	40	0.55324	40	-0.20000
41	-0.00410	41	-0.16200	41	0.57427	41	-0.20000
42	-0.00420	42	-0.16300	42	0.59530	42	-0.20000
43	-0.00430	43	-0.16400	43	0.61633	43	-0.20000
44	-0.00440	44	-0.16500	44	0.63736	44	-0.20000
45	-0.00450	45	-0.16600	45	0.65839	45	-0.20000
46	-0.00460	46	-0.16700	46	0.67942	46	-0.20000
47	-0.00470	47	-0.16800	47	0.70045	47	-0.20000
48	-0.00480	48	-0.16900	48	0.72148	48	-0.20000
49	-0.00490	49	-0.17000	49	0.74251	49	-0.20000
50	-0.00500	50	-0.17100	50	0.76354	50	-0.20000
51	-0.00510	51	-0.17200	51	0.78457	51	-0.20000
52	-0.00520	52	-0.17300	52	0.80560	52	-0.20000
53	-0.00530	53	-0.17400	53	0.82663	53	-0.20000
54	-0.00540	54	-0.17500	54	0.84766	54	-0.20000
55	-0.00550	55	-0.17600	55	0.86869	55	-0.20000
56	-0.00560	56	-0.17700	56	0.88972	56	-0.20000
57	-0.00570	57	-0.17800	57	0.91075	57	-0.20000
58	-0.00580	58	-0.17900	58	0.93178	58	-0.20000
59	-0.00590	59	-0.18000	59	0.95281	59	-0.20000
60	-0.00600	60	-0.18100	60	0.97384	60	-0.20000
61	-0.00610	61	-0.18200	61	0.99487	61	-0.20000
62	-0.00620	62	-0.18300	62	1.01590	62	-0.20000
63	-0.00630	63	-0.18400	63	1.03693	63	-0.20000
64	-0.00640	64	-0.18500	64	1.05796	64	-0.20000
65	-0.00650	65	-0.18600	65	1.07899	65	-0.20000
66	-0.00660	66	-0.18700	66	1.09902	66	-0.20000
67	-0.00670	67	-0.18800	67	1.11905	67	-0.20000
68	-0.00680	68	-0.18900	68	1.13908	68	-0.20000
69	-0.00690	69	-0.19000	69	1.15911	69	-0.20000
70	-0.00700	70	-0.19100	70	1.17914	70	-0.20000
71	-0.00710	71	-0.19200	71	1.19917	71	-0.20000
72	-0.00720	72	-0.19300	72	1.21920	72	-0.20000
73	-0.00730	73	-0.19400	73	1.23923	73	-0.20000
74	-0.00740	74	-0.19500	74	1.25926	74	-0.20000
75	-0.00750	75	-0.19600	75	1.27929	75	-0.20000
76	-0.00760	76	-0.19700	76	1.29932	76	-0.20000
77	-0.00770	77	-0.19800	77	1.31935	77	-0.20000
78	-0.00780	78	-0.19900	78	1.33938	78	-0.20000
79	-0.00790	79	-0.20000	79	1.35941	79	-0.20000
80	-0.00800	80	-0.20100	80	1.37944	80	-0.20000
81	-0.00810	81	-0.20200	81	1.39947	81	-0.20000
82	-0.00820	82	-0.20300	82	1.41950	82	-0.20000
83	-0.00830	83	-0.20400	83	1.43953	83	-0.20000
84	-0.00840	84	-0.20500	84	1.45956	84	-0.20000
85	-0.00850	85	-0.20600	85	1.47959	85	-0.20000
86	-0.00860	86	-0.20700	86	1.49962	86	-0.20000
87	-0.00870	87	-0.20800	87	1.51965	87	-0.20000
88	-0.00880	88	-0.20900	88	1.53968	88	-0.20000
89	-0.00890	89	-0.21000	89	1.55971	89	-0.20000
90	-0.00900	90	-0.21100	90	1.57974	90	-0.20000
91	-0.00910	91	-0.21200	91	1.59977	91	-0.20000
92	-0.00920	92	-0.21300	92	1.61980	92	-0.20000
93	-0.00930	93	-0.21400	93	1.63983	93	-0.20000
94	-0.00940	94	-0.21500	94	1.65986	94	-0.20000
95	-0.00950	95	-0.21600	95	1.67989	95	-0.20000
96	-0.00960	96	-0.21700	96	1.69992	96	-0.20000
97	-0.00970	97	-0.21800	97	1.71995	97	-0.20000
98	-0.00980	98	-0.21900	98	1.73998	98	-0.20000
99	-0.00990	99	-0.22000	99	1.75901	99	-0.20000
100	-0.01000	100	-0.22100	100	1.77904	100	-0.20000

r/s	m.	r/s	m.	r/s	m.	r/s	m.
1.00	-0.70000	1.00	-0.40000	1.00	-0.20000	1.00	-0.00000
1	-0.70147	1	-0.40147	1	-0.20147	1	-0.00147
2	-0.70294	2	-0.40294	2	-0.20294	2	-0.00294
3	-0.70441	3	-0.40441	3	-0.20441	3	-0.00441
4	-0.70588	4	-0.40588	4	-0.20588	4	-0.00588
5	-0.70735	5	-0.40735	5	-0.20735	5	-0.00735
6	-0.70882	6	-0.40882	6	-0.20882	6	-0.00882
7	-0.71029	7	-0.41029	7	-0.21029	7	-0.01029
8	-0.71176	8	-0.41176	8	-0.21176	8	-0.01176
9	-0.71323	9	-0.41323	9	-0.21323	9	-0.01323
10	-0.71470	10	-0.41470	10	-0.21470	10	-0.01470
11	-0.71617	11	-0.41617	11	-0.21617	11	-0.01617
12	-0.71764	12	-0.41764	12	-0.21764	12	-0.01764
13	-0.71911	13	-0.41911	13	-0.21911	13	-0.01911
14	-0.72058	14	-0.42058	14	-0.22058	14	-0.02058
15	-0.72205	15	-0.42205	15	-0.22205	15	-0.02205
16	-0.72352	16	-0.42352	16	-0.22352	16	-0.02352
17	-0.72499	17	-0.42499	17	-0.22499	17	-0.02499
18	-0.72646	18	-0.42646	18	-0.22646	18	-0.02646
19	-0.72793	19	-0.42793	19	-0.22793	19	-0.02793
20	-0.72940	20	-0.42940	20	-0.22940	20	-0.02940
21	-0.73087	21	-0.43087	21	-0.23087	21	-0.03087
22	-0.73234	22	-0.43234	22	-0.23234	22	-0.03234
23	-0.73381	23	-0.43381	23	-0.23381	23	-0.03381
24	-0.73528	24	-0.43528	24	-0.23528	24	-0.03528
25	-0.73675	25	-0.43675	25	-0.23675	25	-0.03675
26	-0.73822	26	-0.43822	26	-0.23822	26	-0.03822
27	-0.73969	27	-0.43969	27	-0.23969	27	-0.03969
28	-0.74116	28	-0.44116	28	-0.24116	28	-0.04116
29	-0.74263	29	-0.44263	29	-0.24263	29	-0.04263
30	-0.74410	30	-0.44410	30	-0.24410	30	-0.04410
31	-0.74557	31	-0.44557	31	-0.24557	31	-0.04557
32	-0.74704	32	-0.44704	32	-0.24704	32	-0.04704
33	-0.74851	33	-0.44851	33	-0.24851	33	-0.04851
34	-0.74998	34	-0.44998	34	-0.24998	34	-0.04998
35	-0.75145	35	-0.45145	35	-0.25145	35	-0.05145
36	-0.75292	36	-0.45292	36	-0.25292	36	-0.05292
37	-0.75439	37	-0.45439	37	-0.25439	37	-0.05439
38	-0.75586	38	-0.45586	38	-0.25586	38	-0.05586
39	-0.75733	39	-0.45733	39	-0.25733	39	-0.05733
40	-0.75880	40	-0.45880	40	-0.25880	40	-0.05880
41	-0.76027	41	-0.46027	41	-0.26027	41	-0.06027
42	-0.76174	42	-0.46174	42	-0.26174	42	-0.06174
43	-0.76321	43	-0.46321	43	-0.26321	43	-0.06321
44	-0.76468	44	-0.46468	44	-0.26468	44	-0.06468
45	-0.76615	45	-0.46615	45	-0.26615	45	-0.06615
46	-0.76762	46	-0.46762	46	-0.26762	46	-0.06762
47	-0.76909	47	-0.46909	47	-0.26909	47	-0.06909
48	-0.77056	48	-0.47056	48	-0.27056		

III.5. SOLUCION DE WESTERGAARD.

Westergaard propone esta solución para el caso de un suelo muy estratificado, como sería el caso de unos estratos de arcilla con pequeños estratos de arena intercalados.

$$\sigma_z = \frac{P \eta}{2\pi z^2} \frac{1}{[\eta^2 + (r/z)^2]^{3/2}} \quad 3.15$$

donde:

P , es la carga uniformemente repartida

ν , es la relación de Poisson

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}}$$

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

III.6 FORMULAS PARA CALCULAR DEFORMACIONES ANGULARES.

III.6.1 Círculo Cargado:

En un círculo de radio "R" sometido a una carga uniforme "P" en su superficie, el asentamiento bajo el centro está dado por la siguiente ecuación (Zeevaert 1973).

$$\delta = \frac{\pi (1 - \nu^2) R P}{2 e}$$

El giro del círculo ocasionado por un momento M vale, según Richart:

$$\theta = \frac{3 (1 - \nu) M}{8 G R^3}$$

en donde:

G , es el módulo de rigidez a la Torsión, y está dado por la siguiente expresión:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Con estas expresiones, podemos conocer las rigideces lineal y angular de un cimiento de planta circular.

La rigidez lineal se define como la carga vertical entre el asentamiento que produce:

$$K_1 = \frac{Q}{\delta} = \frac{2 E R}{(1 - \nu)^2}$$

Mientras que la rigidez angular se define como el cociente del momento entre el giro que produce:

$$K_2 = \frac{M}{\theta} = \frac{8 G R^3}{3(1 - \nu)}$$

III.6.2 Rectángulo Cargado.

El radio de giro se obtiene con la siguiente expresión:

$$R = \left[\frac{4 I_r}{\pi} \right]^{1/4}$$

sustituyendo este valor en la siguiente fórmula:

$$\theta = \frac{3(1 - \nu) M}{8 G R^3}$$

se obtiene el giro del rectángulo.

CAPITULO IV

DEFORMACIONES EN SUELOS GRANULARES

IV.1 ECUACION CONSTITUTIVA PARA SUELOS FRICCIONANTES.

Existen dos tipos de deformaciones en los suelos:

- a) **Deformaciones Instantáneas:** Son las que se presentan inmediatamente después de que se aplica la carga o la descarga.
- b) **Deformaciones Diferidas:** Son las que se presentan a largo plazo después de que se aplica la carga o la descarga.

En los suelos granulares sólo se presentan las deformaciones de tipo instantáneo. Ya que éstas dependen de la compacidad relativa (D_r) y de su estado de esfuerzos, no se puede utilizar una relación esfuerzo-deformación lineal para calcularlas, como lo propone la ley de Hooke. Por lo tanto se tiene que tomar en cuenta una relación esfuerzo-deformación no lineal.

La compacidad relativa (D_r) cuya fórmula se presentó en el capítulo III depende de la relación de vacíos en una relación inversa, es decir, al ser grande la relación de vacíos se disminuye su compacidad relativa, y al ser baja la relación de vacíos la compacidad relativa aumenta.

En el primer caso, las partículas tienen mayor oportunidad al acomodamiento ya que tienen mayor espacio para moverse, y la fricción entre las partículas no es muy grande por lo tanto su rigidez es baja, en diferencia con el segundo caso; la rigidez de la masa de suelos aumenta.

El estado de esfuerzos también influye en la deformabilidad ya que éste se produce por confinamiento (figura 4.1).

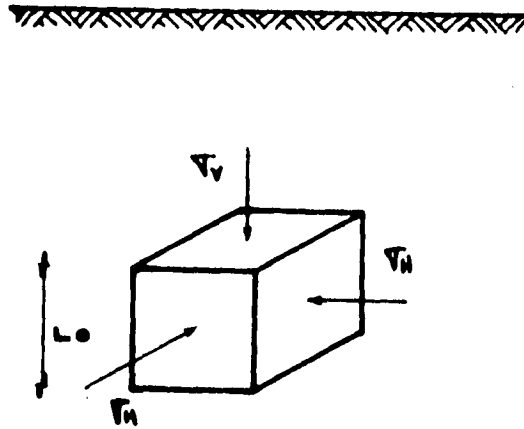


Figura 4.1

Como se puede observar en la figura 4.1 el elemento de suelo se encuentra confinado por los tres esfuerzos axiales σ_v , σ_H y σ_H . Ya que es difícil manejar para fines de cálculo este estado real del suelo, se puede representar como una presión de confinamiento P_∞ y su valor es el del esfuerzo normal al plano octaédrico, o sea, el promedio de los tres esfuerzos principales.

$$P_\infty = \frac{1}{3} (\sigma_v + \sigma_H + \sigma_H)$$

La deformabilidad es inversamente proporcional a esta presión de confinamiento. Por estas causas, como se mencionó, se tiene que utilizar una relación esfuerzo-deformación no lineal del suelo, esto se intenta lograr creando una ecuación constitutiva donde intervengan las siguientes variables: incremento vertical de esfuerzo y presión de confinamiento.

Esta ecuación debe tomar en cuenta dos aspectos:

- 1) Que hay una relación directa entre deformación y esfuerzo, es decir, a mayor incremento de esfuerzo mayor deformación y viceversa.
- 2) Que hay una relación inversa entre la deformación y la presión de confinamiento, es decir, a mayor P_∞ menor deformación y viceversa.

Entonces, considerando un elemento de suelo granular de espesor h_e sometido a una presión de confinamiento P_∞ , como lo muestra la figura 4.2, al darle un incremento de esfuerzo debido a una sobrecarga, la presión de confinamiento actuante se incrementa en un valor ΔP_c .

$$P_c = P_\infty + \Delta P_c \quad 4.1$$

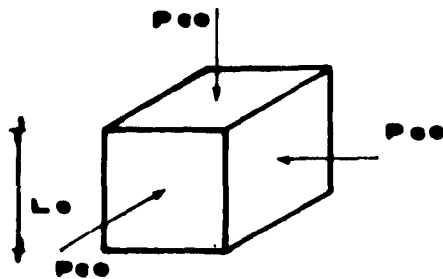


Figura 4.2

El valor ΔP_c se toma como el incremento del esfuerzo normal al plano octaédrico, es decir, es igual al promedio de los incrementos de esfuerzos. Tomando σ_z , σ_x y σ_y como los incrementos de esfuerzos, se tiene que:

$$\Delta P_c = \frac{1}{3} (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y)$$

$$\Delta P_c = \frac{1}{3} \sigma_z + \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y)$$

Para fines prácticos ΔP_c puede escribirse de la siguiente forma:

$$\Delta P_c = b_1 \sigma_z + b_2 (\sigma_x + \sigma_y) \quad 4.2$$

en donde $b_1 = b_2 = \frac{1}{3}$

Suponiendo el espesor h_0 del elemento de suelo lo suficientemente pequeño para que la relación del esfuerzo vertical al horizontal sea constante, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\sigma_x}{\sigma_z} & \sigma_x &= a_1 \sigma_z \\
 a_2 &= \frac{\sigma_y}{\sigma_z} & \sigma_y &= a_2 \sigma_z
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

sustituyendo las ecuaciones 4.3 en ecuación 4.2:

$$\begin{aligned}
 \Delta P_c &= b_1 \sigma_z + b_2 (a_1 \sigma_z + a_2 \sigma_z) \\
 \Delta P_c &= [b_1 + b_2 (a_1 + a_2)] \sigma_z \\
 \Delta P_c &= c \sigma_z
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

en donde $c = [b_1 + b_2 (a_1 + a_2)]$

sustituyendo 4.4 en 4.1 se tiene que:

$$P_c = P_{co} + c \sigma_z \tag{4.5}$$

Con la expresión 4.5 podemos concluir que la presión de confinamiento no es constante y que tiene una relación directamente proporcional con el incremento de esfuerzo.

Por otro lado se sabe que debido al incremento en σ_z , σ_x y σ_y , el elemento h_0 sufre una deformación vertical, ocasionada por un esfuerzo resultante σ_c , que está dado por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_c &= \sigma_z - \nu \sigma_y - \nu \sigma_x \\
 \sigma_c &= \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

donde ν es la relación de Poisson.

sustituyendo las ecuaciones 4.3 en la ecuación 4.6 se obtiene lo siguiente:

$$\sigma_c = \sigma_z - \nu (a_1 \sigma_x + a_2 \sigma_y)$$

$$\sigma_c = \sigma_z [1 - \nu (a_1 + a_2)]$$

$$\sigma_c = f \sigma_z \quad 4.7$$

donde $f = [1 - \nu (a_1 + a_2)]$

La expresión 4.7 indica que el esfuerzo resultante es función directa del incremento de esfuerzo vertical.

Teniendo las expresiones 4.5 y 4.7 se trata de obtener una relación esfuerzo deformación aplicable a los suelos. Esta relación se hace mediante una ecuación constitutiva en forma diferencial, dando incrementos diferenciales $d\sigma_z$, $d\sigma_x$ y $d\sigma_y$, como se muestra en la figura 4.3.

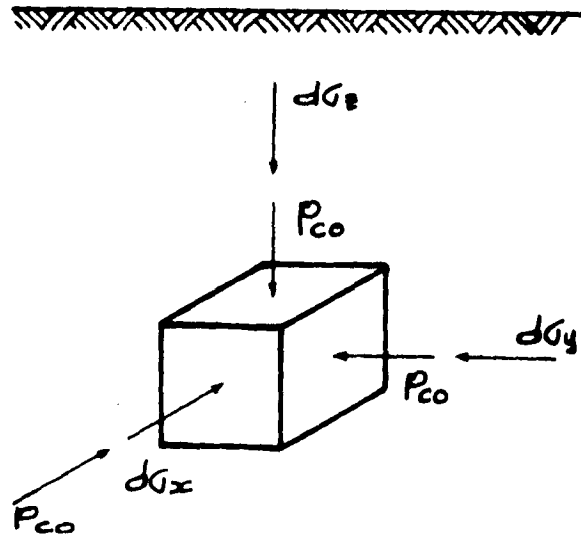


Figura 4.3

Tomando en cuenta lo anterior se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{dh}{h} = -M \frac{\sigma_c^r}{P_c^s} d\sigma_c$$

$$\frac{dh}{h} = -M \frac{\sigma_c^r d\sigma_c}{(P_{\infty} + \Delta P)^s} \quad 4.8$$

sustituyendo las ecuaciones 4.5 y 4.7 en la 4.8:

$$\frac{dh}{h} = -M \frac{(f\sigma_c)^r d(f\sigma_c)}{(P_{\infty} + c\sigma_c)^s} \quad 4.9$$

$$\frac{dh}{h} = -M \frac{f^{r+1} \sigma_c^r d\sigma_c}{(P_{\infty} + c\sigma_c)^s}$$

En donde M, r, s son módulos a determinar del suelo. Por la dificultad que presenta la ecuación 4.9 para integrarse, sobre todo si r y s no son enteros, se puede usar otra expresión similar que represente el mismo fenómeno, pero fácil de integrar. Tomando la consideración anterior se llega a:

$$\frac{dh}{h} = -M \frac{\sigma_c^{r-1} d\sigma_c}{[a^r + b_3(P_{\infty} + c^r \sigma_c^r)]} \quad 4.10$$

En la ecuación 4.10 se suprimió el módulo s por los módulos a y b₃, estos a su vez son parámetros que dependen del tipo de suelo y se definen más adelante.

Sustituyendo la ecuación 4.7 en la 4.10, se tiene que:

$$\frac{dh}{h} = -M \frac{(f\sigma_c)^{r-1} d(f\sigma_c)}{[a^r + b_3(P_{\infty}^r + c^r \sigma_c^r)]}$$

$$\frac{dh}{h} = -M \frac{r \sigma_z^{r-1} d\sigma_z}{[a^r + b_3(P_{co}^r + c^r \sigma_z^r)]} \quad 4.11$$

Al variar el esfuerzo vertical de cero a σ_z , el elemento de suelo disminuye su espesor h del valor inicial h_0 al valor h_f , por lo tanto, para encontrar la deformación total del elemento debemos integrar la ecuación 4.11 de h_0 a h_f en el primer miembro y de cero a σ_z en el segundo miembro.

Integrando la ecuación 4.11 directamente tenemos que:

$$u = a^r + b_3(P_{co}^r + c^r \sigma_z^r)$$

$$u = a^r + b_3 P_{co}^r + b_3 c^r \sigma_z^r$$

$$du = b_3 c^r r \sigma_z^{r-1} d\sigma_z$$

completando la diferencial

$$\frac{dh}{h} = \frac{M r}{b_3 c^r r} \frac{b_3 c^r r \sigma_z^{r-1} d\sigma_z}{[a^r + b_3(P_{co}^r + c^r \sigma_z^r)]}$$

$$\frac{dh}{h} = \frac{M r}{b_3 c^r r} \frac{b_3 c^r r \sigma_z^{r-1} d\sigma_z}{[a^r + b_3(P_{co}^r + c^r \sigma_z^r)]}$$

$$\ln h \Big|_{h_0}^{h_f} = - \frac{M r}{b_3 c^r r} \ln [a^r + b_3(P_{co}^r + c^r \sigma_z^r)] \Big|_0^{\sigma_z}$$

Evaluando los límites y tomando en cuenta que $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

$$\ln \frac{h_f}{h_0} = - \frac{M r}{b_3 c^r r} \ln \frac{a^r + b_3(P_{co}^r + c^r \sigma_z^r)}{a^r + b_3 P_{co}^r}$$

$$\ln \frac{h_f}{h_0} = \ln \left\{ \left[\frac{a^r + b_3(P_{co}^r + c^r \sigma_z^r)}{a^r + b_3 P_{co}^r} \right]^{-\frac{M r}{b_3 c^r r}} \right\}$$

$$\frac{h_f}{h_o} = \left[\frac{a^r + b_3(P_{co}^r + c^r \sigma_z^r)}{a^r + b_3 P_{co}^r} \right] - \frac{M^r}{b_3 c^r r} \quad 4.12$$

de la teoría de la elasticidad tenemos que:

$$\begin{aligned} \delta &= h_o - h_f \\ h_f &= h_o - \delta \end{aligned}$$

dividiendo entre h_o

$$\frac{h_f}{h_o} = \frac{h_o}{h_o} - \frac{\delta}{h_o}$$

si sabe que por Cauchy $\varepsilon = \frac{\delta}{h_o}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{h_f}{h_o} &= 1 - \varepsilon \\ \varepsilon &= 1 - \frac{h_f}{h_o} \end{aligned} \quad 4.13$$

sustituyendo la ecuación 4.12 en la 4.13, se tiene que:

$$\varepsilon = 1 - \left\{ \left[\frac{a^r + b_3(P_{co}^r + c^r \sigma_z^r)}{a^r + b_3 P_{co}^r} \right] - \frac{M^r}{b_3 c^r r} \right\} \quad 4.14$$

Utilizando la ecuación 4.14 se observo que los resultados diferían un poco de realidad, por lo cual se introdujo un factor de ajuste empírico f en donde:

$$f = e^{-\alpha P_{cm}}$$

donde P_{cm} es la presión media de confinamiento, la cual vale:

$$P_{cm} = P_{co} + \frac{1}{2} \Delta P_c$$

$$P_{cm} = P_{co} + \frac{c \sigma_z}{2} \quad 4.15$$

Este factor de ajuste empírico se introduce a la ecuación de la manera siguiente:

$$\varepsilon = 1 - \left\{ \left[\frac{a' + b_3(P_{co}' + c' \sigma_z')}{a' + b_3 P_{co}'} \right] - \frac{M e^{\alpha P_{cm}}}{b_3 c' r} \right\} \quad 4.16$$

si $\varepsilon = \frac{\delta}{h_0}$ entonces:

$$\delta = \varepsilon h_0$$

por lo tanto:

$$\delta = \left\{ 1 - \left[\left(\frac{a' + b_3(P_{co}' + c' \sigma_z')}{a' + b_3 P_{co}'} \right) - \frac{M r}{b_3 c' r} \right] \right\} h_0 \quad 4.17$$

- δ , La deformación vertical de un elemento de suelo de espesor h_0 .
- M , Un módulo el cual mide la deformabilidad de la masa de suelo a medida que el material es más deformable el valor de M es mayor.
- r , El módulo de esfuerzo que toma en cuenta la influencia del esfuerzo vertical σ_z ; al aumentar r se incrementa el efecto de σ_z sobre la deformación vertical.
- α , El módulo de confinamiento, siendo inversamente proporcional al confinamiento y directamente proporcional a la deformabilidad del material.
- a , Es un módulo que representa la resistencia al esfuerzo confinante de tensión de un suelo. Tiene un valor diferente de cero para aquellos materiales en que existe

un volumen inicial para presión de confinamiento nula, como ocurre en los suelos granulares con cierta cohesión o en los materiales cohesivos; para suelos puramente friccionantes a es igual a 0.

b₃, Coeficiente empírico que toma en cuenta la influencia del esfuerzo de confinamiento.

IV.2 ANALOGIA CON LA TEORIA DEL DR. EULALIO JUAREZ BADILLO.

La Teoría de Compresibilidad del Dr. Juárez Badillo se basa en el comportamiento de los gases ideales en proceso isotérmico, es decir, a temperatura constante. Si V es el volumen de un gas sometido a una presión isotrópica σ al variar cualquiera de las dos se tiene que:

$$\sigma \cdot V = \text{cte} \quad 4.18$$

derivando la ecuación 4.18

$$\sigma \cdot dV + V \cdot d\sigma = 0$$

$$\frac{dV}{V} = - \frac{d\sigma}{\sigma} \quad 4.19$$

Tomando en cuenta que al variar el esfuerzo de σ_0 a σ , el volumen varía de V_0 a V, por lo tanto para encontrar el cambio de volumen integramos la ecuación 4.19 de V_0 a V en el primer miembro y de σ_0 a σ en el segundo miembro.

$$\ln V \Big|_{V_0}^V = - \ln \sigma \Big|_{\sigma_0}^{\sigma}$$

$$\ln \frac{V}{V_0} = - \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

$$\ln \frac{V}{V_0} = \ln \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{-1}$$

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{-1} \quad 4.20$$

La ecuación anterior muestra que cuando se duplica el esfuerzo el volumen se disminuye a la mitad, esta relación es propia de los gases y la ocasiona el exponente -1.0. En los suelos la ecuación 4.19 queda de la siguiente manera:

$$\frac{dV}{V_0} = -\gamma \frac{d\sigma}{\sigma_0} \quad 4.21$$

Siendo γ un coeficiente de proporcionalidad, que puede tener los siguientes valores:

$$0 < \gamma < 1$$

Integrando la ecuación 4.21 y evaluando en los límites:

$$\ln \frac{V}{V_0} = -\gamma \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{-\gamma} \quad 4.22$$

En esta ecuación V_0 y σ_0 representan el volumen y el esfuerzo isotrópico en las condiciones iniciales. Haciendo una analogía con la ecuación 4.12.

$$\frac{h_f}{h_0} = \left[\frac{a^r + b_3(P_{co}^r + c^r \sigma_r)}{a^r + b_3 P_{co}^r} \right]^{-\frac{M r}{b_3 c^r r}} \quad 4.12$$

Los primeros miembros representan una deformación. En la ecuación 4.12 con una relación de alturas, y en la ecuación 4.22 con una relación de volúmenes. Los denominadores de los segundos miembros representan el confinamiento inicial. Sólo que en la ecuación 4.12 éste se afecta por los módulos a y b_3 .

Los numeradores del segundo miembro representan el esfuerzo isotrópico final, sólo que en la Ecuación 4.12 está en función del incremento de esfuerzo vertical. Por último, los dos exponentes del segundo miembro son módulos que dependen del tipo de suelo.

En la práctica resulta necesario determinar las propiedades de deformación mediante pruebas de campo o laboratorio. Para el caso de ensayos de laboratorio, el módulo no lineal de deformación M se obtiene a partir de pruebas triaxiales de deformación. Ilustremos este procedimiento con los siguientes resultados de una prueba triaxial de deformación: (Arena compacta con $Dr = 80\%$).

Etapa	Presión de confinamiento P_{co}' (kg/cm ²)	Esfuerzo desviador σ_1 (kg/cm ²)	Deformación unitaria ϵ
1	0.3	0.3705	0.00135
2	0.4	0.494	0.00141
3	0.5	0.6585	0.00158

De la ecuación 4.17 despejamos M :

$$M = \frac{b_3 r \log(1-\epsilon)}{\left(\frac{f}{c}\right)^r \exp(\alpha P_{cm}) \log \left[\frac{a' + b_3 (P_{co}' + c' \sigma_1')}{a' + b_3 P_{co}'} \right]} \quad 4.23$$

En la tabla IV.1 vemos que una arena compacta con $Dr = 80\%$ tiene un valor de $r = 1.5$ y un $\alpha = 0.27 \text{ cm}^2/\text{kg}$. Además $b_1 = b_2 = 1/3$ y $b_3 = 1$.

Sustituyendo valores en la ecuación 4.23 obtenemos.

Etapa	P_{cm} kg/cm	M
1	0.36175	0.00151
2	0.48233	0.00153
3	0.60970	0.00152

La magnitud de M para este suelo es el promedio de valores de las etapas de la prueba triaxial de deformación. Así en esta arena, $M = 0.00152$.

T A B L A IV.1 VALORES APROXIMADOS DE PROPIEDADES DE DEFORMACION EN SUELOS FRICCIONANTES.						
Estado	Densidad relativa	N	e_c como	M	r	σ cm/kg
Muy suelto	<0.2	<4	<20	>0.0047	1.8	<0.18
Suelto	0.2 - 0.4	4-10	20-40	0.0047-0.0036	1.7	0.18-0.21
Medio compacto	0.4 - 0.6	10-30	40-120	0.0036-0.0024	1.6	0.21-0.24
Compacto	0.6 - 0.8	30-50	120-400	0.0024-0.0013	1.5	0.24-0.27
Muy compacto	>0.8	>50	>400	<0.0013	1.40	>0.27

Coefficiente Adicionales $b_1 = b_2 = 1/3$ y $b_3 = 1.8$

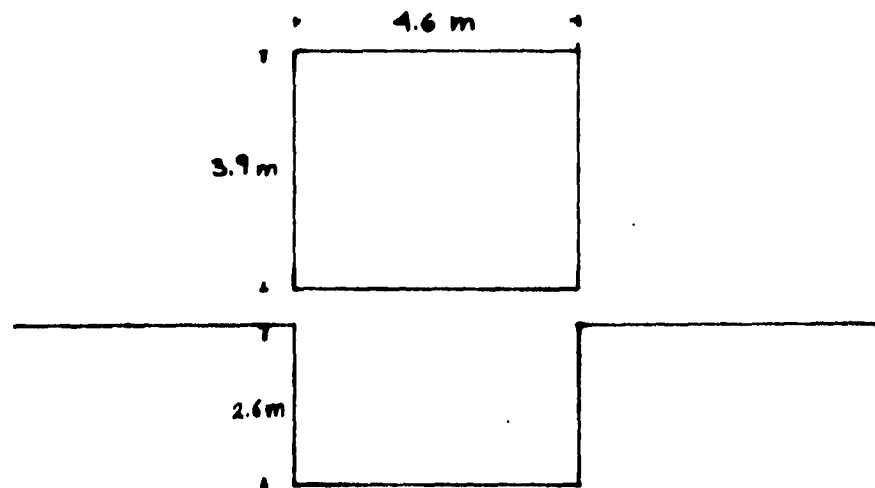
T A B L A IV.2 RELACION DE POISSON (ZEEVAERT 1973)	
TIPO DE SUELO	RELACION DE POISSON ν
Polvo volcánico suelto	0.30
Limos compactos, sedimentos eólicos finos, Sedimentos volcánicos semcompactos, Aluviones finos.	0.30 a 0.25
Arena, limos compactos, suelos aluviales, Sedimentos compactos bien graduados	0.25
Arena con grava. Sedimentos aluviales compactos, cementados y bien graduados	0.25

Ejemplo Ilustrativo

Considérese el siguiente perfil

0.m	Arcilla de alta plasticidad (CH)	$\gamma = 2 \text{ T/m}^3$
2 m	Limo arenoso (MH), café claro N = 21 golpes	$\gamma = 1.7 \text{ T/m}^3$
4.6 m	Arena limosa (SM), café claro muy compacta N = 52 golpes	$\gamma = 1.8 \text{ T/m}^3$
5.9 m	Arena limo-arcillosa, café claro compacta N = 38 golpes	$\gamma = 1.8 \text{ T/m}^3$
7.7 m		

Calcular el asentamiento de una zapata de 3.9 m de ancho por 4.6 m de longitud desplantada a 2.6 m de profundidad, que transmite al terreno de cimentación una presión media de contacto de 15.6 T/m².



Cálculo de las presiones en el terreno (P_{z_0})

P_{z_0}	=	$h (\gamma)$	
$P_{z_0 (2.0 \text{ m})}$	=	$2(2) = 4 \text{ T/m}^2$	
$P_{z_0 (2.6 \text{ m})}$	=	$4 + 0.6 (1.7) = 5.02 \text{ T/m}^2$	
$P_{z_0 (3.6 \text{ m})}$	=	$5.02 + 1.0 (1.7) = 6.72 \text{ T/m}^2$	A
$P_{z_0 (4.6 \text{ m})}$	=	$6.72 + 1.0 (1.7) = 8.42 \text{ T/m}^2$	
$P_{z_0 (5.25 \text{ m})}$	=	$8.42 + 0.65 (1.8) = 9.59 \text{ T/m}^2$	B
$P_{z_0 (5.9 \text{ m})}$	=	$9.59 + 0.65 (1.8) = 10.76 \text{ T/m}^2$	
$P_{z_0 (6.8 \text{ m})}$	=	$10.76 + 0.9 (1.8) = 12.38 \text{ T/m}^2$	C
$P_{z_0 (7.7 \text{ m})}$	=	$12.38 + 0.9 (1.8) = 14 \text{ T/m}^2$	

Las presiones que utilizaremos para el cálculo son A, B, y C ya que necesitamos la

presión a la mitad del estrato.

Los coeficientes de presión (k_0) que utilizaremos dadas las características del terreno son:

Estrato 2.- $K_0 = 0.5$

Estrato 3.- $k_0 = 0.5$

Estrato 4.- $k_0 = 0.6$

Cálculo de (P_{co}).-

$$\begin{aligned} P_{co} &= P_{so} (1/3 (1 + 2k_0)) \\ P_{co(3.6 \text{ m})} &= 6.72 (1/3(1+2(0.5))) = 4.48 \text{ T/m}^2 \\ P_{co(5.25 \text{ m})} &= 9.59 (1/3(1+(+2(0.5)))) = 6.39 \text{ T/m}^2 \\ P_{cu(6.8 \text{ m})} &= 12.38 (1/3(1+2(0.6))) = 9.08 \text{ T/m}^2 \end{aligned}$$

El cálculo de σ_x , σ_y , y σ_z lo realizaremos con las fórmulas vistas en el capítulo III. Para facilidad de cálculo realizaremos una tabla donde asentaremos todos los cálculos del procedimiento. Ver Tabla IV.3.

E	H _e (m)	r (T/m ²)	P _u (T/m ²)	h _e	P _u (T/m ²)	σ ₁ (T/m ²)	σ ₂ (T/m ²)	σ ₃ (T/m ²)	z (m)
1	2	2	4						
2	1.6	1.7	6.72	0.5	4.48	7.733	7.66	15.45	1
2	1	1.7	8.42						
3	0.65	1.8	9.59	0.5	6.39	2.852	3.284	13.70	2.65
3	0.65	1.8	10.76						
4	0.9	1.8	12.38	0.5	9.08	0.877	1.241	10.952	4.2
4	0.9	1.8	14						
α	M	r (m)	h _e	α ₁	α ₂	c	f	P _u (T/m ²)	δ (m)
0.0226	0.003	1.6	2	0.5	0.495	0.665	0.665	0.665	0.0088
0.027	0.0013	1.4	1.3	0.208	0.239	0.482	0.888	9.691	0.0026
0.0252	0.0017	1.5	1.8	0.08	0.113	0.397	0.951	11.25	0.0029
								SUM	0.0144

TABLE IV.3

CAPITULO V

DEFORMACIONES EN SUELOS COHESIVOS.

V.1 DEFORMACIONES INSTANTANEAS.

Al igual que en los suelos friccionantes se propone una ecuación constitutiva, la cual relacione la deformación directamente proporcional al esfuerzo resultante e inversamente proporcional a la presión efectiva de confinamiento.

Se supone un elemento de suelo cohesivo totalmente saturado sometido a una presión de confinamiento P_{co}' y a los incrementos de esfuerzos σ_z , σ_x y σ_y como lo muestra la figura 5.1.

El espesor h_0 es lo suficientemente pequeño para que la relación del esfuerzo horizontal al vertical sea constante, así tenemos que:

$$a_1 = \frac{\sigma_x}{\sigma_z}$$

$$a_2 = \frac{\sigma_y}{\sigma_z}$$

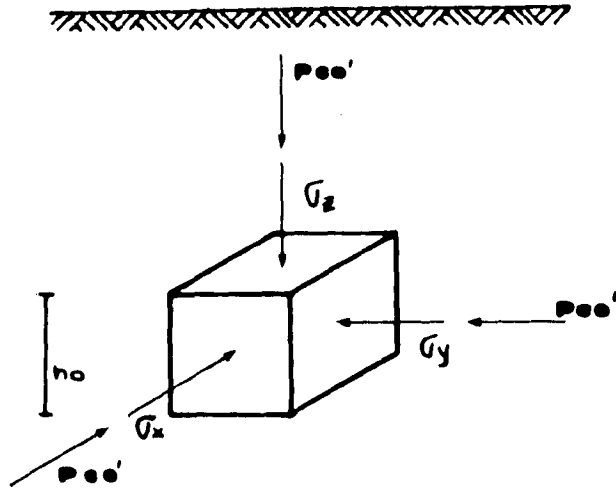


Figura 5.1

despejando σ_x y σ_y ,

$$\sigma_x = a_1 \sigma_z$$

$$\sigma_y = a_2 \sigma_z$$

La deformación instantánea del estrato es ocasionada por el esfuerzo resultante σ_c de los incrementos σ_x , σ_y y σ_z . Este esfuerzo resultante está dado por:

$$\sigma_c = \sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y = \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad 5.2$$

en donde ν es la relación de Poisson, sustituyendo 5.1 en 5.2 tenemos que:

$$\sigma_c = \sigma_z - \nu(a_1 \sigma_z + a_2 \sigma_z)$$

$$\sigma_c = [1 - \nu(a_1 + a_2)] \sigma_z$$

$$\sigma_c = f \sigma_z \quad 5.3$$

en donde:

$$f = [1 - \nu(a_1 + a_2)]$$

Como se mencionó anteriormente se plantea una ecuación constitutiva donde se cumpla que la variación de h sea directamente proporcional a P_{co} , en forma diferencial.

Así se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dh}{h} = \frac{-M \sigma_c^{r-1} d\sigma_c}{a^r + b_3 (P_{co})^r} \quad 5.4$$

sustituyendo 5.3 en 5.4

$$\frac{dh}{h} = \frac{-M (f\sigma_z)^{r-1} f d\sigma_z}{a^r + b_3 (P_{co})^r}$$

haciendo operaciones

$$\frac{dh}{h} = \frac{-M f^r \sigma_z^{r-1} d\sigma_z}{a^r + b_3 (P_{co})^r} \quad 5.5$$

Al variar el esfuerzo vertical de 0 a σ_z el elemento de suelo disminuye su espesor h del valor h_0 a h_r . Por lo tanto para encontrar la variación volumétrica se tiene que integrar la ecuación 5.5 de h_0 a h_r el primer miembro, y de 0 a σ_z el segundo.

$$\int_{h_0}^{h_r} \frac{dh}{h} = \int_0^{\sigma_z} \frac{-M f^r \sigma_z^{r-1}}{a^r + b_3 (P_{co})^r} d\sigma_z$$

$$\int_{h_0}^{h_r} \frac{dh}{h} = \frac{-M f^r}{a^r + b_3 (P_{co})^r} \int_0^{\sigma_z} \sigma_z^{r-1} d\sigma_z$$

$$\ln h \Big|_{h_0}^{h_r} = \left[\frac{-M f^r}{a^r + b_3 (P_{co})^r} \frac{\sigma_z^r}{r} \right]_0^{\sigma_z}$$

$$\frac{h_f}{h_0} = e \left[\frac{-M f^r}{r} \frac{\sigma_z^r}{a^r + b_3 (P_{co}^r)^r} \right] \quad 5.6$$

De la teoría de la elasticidad se sabe que:

$$\delta = h_0 - h_f$$

por lo tanto:

$$h_f = h_0 - \delta$$

dividiendo todo entre h_0 se tiene que:

$$\frac{h_f}{h_0} = 1 - \frac{\delta}{h_0} \quad 5.7$$

sustituyendo 5.7 en 5.6

$$1 - \frac{\delta}{h_0} = e \left[\frac{-M f^r}{r} \frac{\sigma_z^r}{a^r + b_3 (P_{co}^r)^r} \right]$$

despejando δ

$$\delta = \left\{ 1 - e \left[\frac{-M f^r}{r} \frac{\sigma_z^r}{a^r + b_3 (P_{co}^r)^r} \right] \right\} h_0 \quad 5.8$$

Por Cauchy se sabe que:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{h_0}$$

por lo tanto:

$$\varepsilon = \left\{ 1 - e^{-\left[\frac{M r}{a^r + b_3 (P_{co}')^r} \right]} \right\} \quad 5.9$$

Camblando el módulo de deformabilidad M por el módulo de rigidez $A = 1/M$ las ecuaciones 5.8 y 5.9 quedan de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \left\{ 1 - e^{-\left[\frac{r}{A r} \frac{\sigma_z'}{a^r + b_3 (P_{co}')^r} \right]} \right\} \quad 5.10$$

por lo tanto:

$$\delta = \left\{ 1 - e^{-\left[\frac{r}{A r} \frac{\sigma_z'}{a^r + b_3 (P_{co}')^r} \right]} \right\} h_0 \quad 5.11$$

en donde:

P_{co}' , es la presión de confinamiento efectiva inicial y se calcula de la siguiente manera:

$$P_{co}' = \frac{(1 + 2k_0) \sigma_z'}{3}$$

a , es la presión de confinamiento equivalente que le proporciona la cohesión al material (confinamiento intrínseco).

b_3 , es el coeficiente empírico que mide la influencia el esfuerzo de confinamiento inicial efectivo.

r , Coeficiente que toma en cuenta la influencia del esfuerzo vertical σ_z .

M , es el módulo de deformabilidad del suelo.
 A , es el módulo de rigidez del suelo. $A = 1/M$

Para la Arcilla de la ciudad de México se obtienen los siguientes promedios estadísticos de propiedades de deformación:

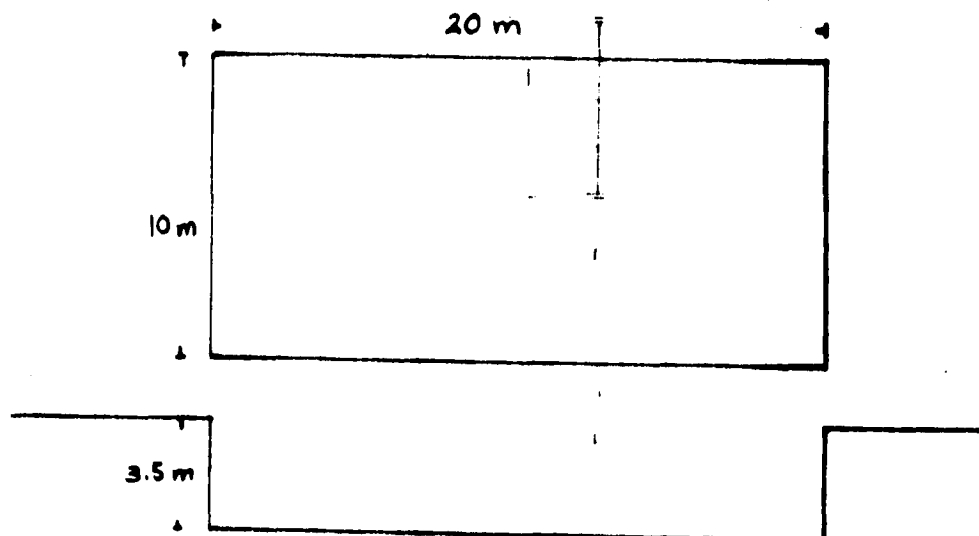
Deformación	r	M	A	a t/m ²	b_3	k_0	ν
Elasto plástica	1.15	0.0059	170	0.5	0.5	0.5	0.45
Elástica	1.25	0.0037	270	0.5	0.5	0.5	0.45

El módulo de rigidez A se puede calcular despejando la ecuación 5.11.

$$A = \left[\frac{-f \sigma_z^r}{r[a^r + b_3 (P_{co})^r] \ln(1-\epsilon)} \right] \quad 5.12$$

Los parámetros que aparecen en la ecuación 5.12 se obtienen en la práctica con pruebas de compresión simple o compresión triaxial.

Ejemplo Ilustrativo:



Calcular la expansión que sufre un suelo al ser excavado 3.5 m de profundidad, la excavación tiene en planta 10 m x 20 m.

Si la estratigrafía y propiedades del subsuelo son las siguientes:

Estrato	Profundidad	Características	
1	0 m	Limo Areno-arcilloso $c = 2.5 \text{ T/m}^2$ $E_s = 72.6 \text{ kg/cm}^2$ $G_{DIN} = 38.1 \text{ kg/cm}^2$	$\gamma = 1.52 \text{ T/m}^3$ $w = 79.9\%$ $E_r = 51.4 \text{ kg/cm}^2$
	4.6 m	-----	
2	4.6 m	Limo Arcilloso $c = 2.0 \text{ T/m}^2$ $E_s = 56.1 \text{ kg/cm}^2$ $G_{DIN} = 38.1 \text{ kg/cm}^2$	$\gamma = 1.14 \text{ T/m}^3$ $w = 360.2\%$ $E_c = 34.9$
	7.8 m	-----	
3	7.8 m	Limo Arcilloso $c = 1.5 \text{ T/m}^2$ $E_s = 50.5 \text{ kg/cm}^2$ $G_{DIN} = 35.8 \text{ kg/cm}^2$	$\gamma = 0.6 \text{ T/m}^3$ $w = 470.4\%$ $E_c = 34.9 \text{ kg/cm}^2$
	9.6 m	-----	
4	9.6 m	Arena Limosa $N = 18 \text{ golpes}$ $E_s = 120 \text{ kg/cm}^2$ $G_{DIN} = 69.2 \text{ kg/cm}^2$	$\gamma = 0.6 \text{ T/m}^3$ $w = 64.1 \%$ $E_c = 85.1 \text{ kg/cm}^2$
	10.6 m	-----	
5	10.6 m	Limo Arcilloso $c = 2.0 \text{ T/m}^2$ $E_s = 51 \text{ kg/cm}^2$ $G_{DIN} = 30 \text{ kg/cm}^2$	$\gamma = 1.18 \text{ T/m}^3$ $w = 270.5\%$ $E_c = 36.4 \text{ kg/cm}^2$
	11.4 m	-----	

donde:

- w, es el contenido de agua, en %.
- γ , es el peso volumétrico, en ton/m^3
- c, es la cohesión determinada en prueba triaxial rápida, en ton/m^2

E_e , es el módulo de rebote elástico, determinado en pruebas de compresión, en **kg/cm²**

E_c , es el módulo de elastoplástico, determinado en pruebas de compresión, en **kg/cm²**

G_{DIN} , es el módulo de rigidez al cortante, determinado en el Péndulo de Torsión, en **kg/cm²**

N, es el número de golpes. determinado en prueba de penetración estándar.

Sabiendo que:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\delta = \varepsilon h_0$$

$$q_{TERR} = v \cdot \gamma \quad \text{donde: } V, \text{ Volumen excavado}$$

γ , Peso volumétrico del suelo.

$$q_{DESQ} = 3.5 \times 1.52$$

$$q_{DESQ} = 5.32 \text{ t/m}^2$$

E	Z (m)	X (m)	Y (m)	q (T/m ²)	σ_z (T/m ²)	σ_x (T/m ²)
1	0.55	5	10	5.32	5.316	3.98
2	2.7	5	10	5.32	5.04	1.73
3	5.21	5	10	5.32	4.17	0.69
4	6.6	5	10	5.32	3.64	0.17
5	7.5	5	10	5.32	3.32	0.26

E	σ_y (T/m ²)	E_c (T/m ²)	ν	ϵ	H_0 (m)	δ (m)
1	3.455	726	0.3	0.00425	1.1	0.004675
2	2.161	561	0.3	0.006903	3.2	0.02209
3	1.5	505	0.4	0.006523	1.8	0.011741
4	0.658	1200	0.25	0.002861	1.0	0.002861
5	0.772	510	0.4	0.0057	0.8	0.00456

SUMA	0.045927
------	----------

De la estratigrafía del ejemplo anterior, calcular el asentamiento que produce el edificio con un incremento neto de presión de 2 T/m^2

q (T/m ²)	σ_1 (T/m ²)	σ_2 (T/m ²)	σ_3 (T/m ²)	E_c (T/m ²)	ν	ϵ	H_c (m)	P_{1z} (T/m ²)	P_{2z} (T/m ²)
2	1.99	1.49	1.29	514	0.3	0.0029	1.1		
2	1.89	0.65	0.812	393	0.3	0.0035	3.2		
2	1.57	0.27	0.52	349	0.4	0.0036	1.8		
2	1.37	0.063	0.247	851	0.25		1	1.007	1.286
2	1.24	0.099	0.289	364	0.4	0.0024	0.8		
M	R	a_1	a_2	c	f	P_m (T/m ²)	h_c	α	δ (m)
									0.002
									0.0012
									0.0036
0.00312	1.6	0.04656	0.1806	0.409	0.943	1.518	0.5	0.022	0.0025
									0.0023
SUMA									0.0156

$$\Delta H_{exp} = 4.6 \text{ cm}$$

$$\Delta H_{net} = 1.6 \text{ cm}$$

$$\Delta H_{tot} = 6.2 \text{ cm}$$

V.2 DEFORMACIONES DIFERIDAS.

Estas deformaciones toman en cuenta la variable tiempo. Un asentamiento puede en ocasiones durar años si la capa compresible es de gran espesor y de permeabilidad baja. El estudio de la velocidad con que se producen los asentamientos presenta una importancia práctica considerable.

A un proceso de disminución de volumen que tenga lugar en un lapso de tiempo, provocado por un aumento de las cargas sobre el suelo, se le llama proceso de consolidación.

Normalmente en estos procesos la posición relativa de las partículas sólidas sobre un mismo plano horizontal permanece esencialmente igual, así, el movimiento de las partículas del suelo puede ocurrir sólo en dirección vertical; A este proceso se le llama Consolidación Unidireccional o Unidimensional.

Sobre una curva representativa de la prueba del odómetro (Asentamiento - Logaritmo del tiempo) se pueden distinguir dos ramas sensiblemente rectilíneas cuyas prolongaciones se cortan en un punto A (figura 5.2). La rama de la izquierda (BC) representa lo que se llama CONSOLIDACION PRIMARIA, la resistencia ofrecida a la expulsión del agua sobrante es la única causa de este fenómeno. Por el contrario la rama de la derecha (CD) representa la CONSOLIDACION SECUNDARIA, más lenta, que parece ser el resultado de una reordenación progresiva de la estructura del terreno, unida a las deformaciones debidas a las capas absorbidas. Se trata de un flujo viscoso que aumenta el asentamiento en tanto se ejerce la sobrecarga, por lo tanto las arcillas se comportan como cuerpos visco-elásticos.

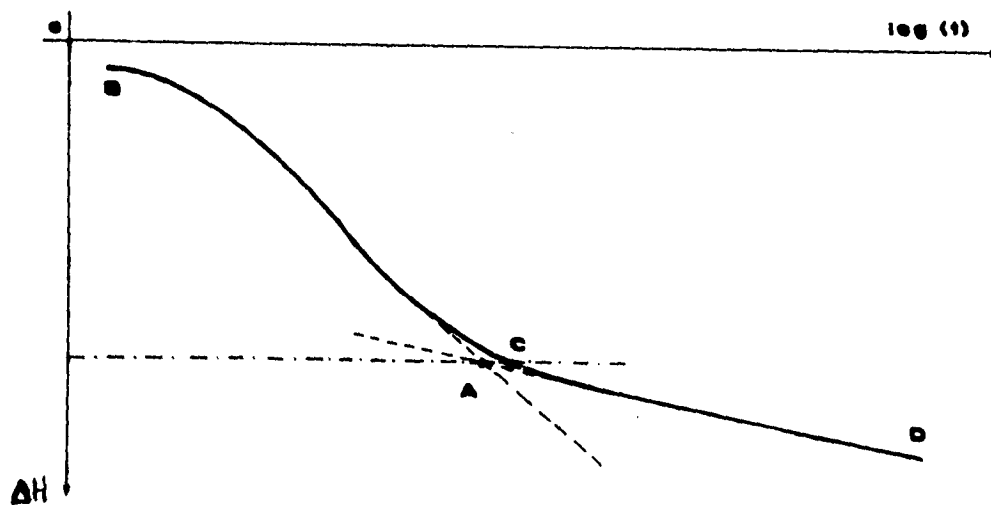


Figura 5.2

V.2.1 Consolidación Primaria.

La Consolidación primaria, como ya se mencionó, es un proceso de disminución de volumen debido a la expulsión de agua de los vacíos del suelo debido a una sobrecarga. Este proceso puede compararse con un modelo mecánico propuesto por Terzaghi, que es una modificación del modelo reológico de Kelvin.

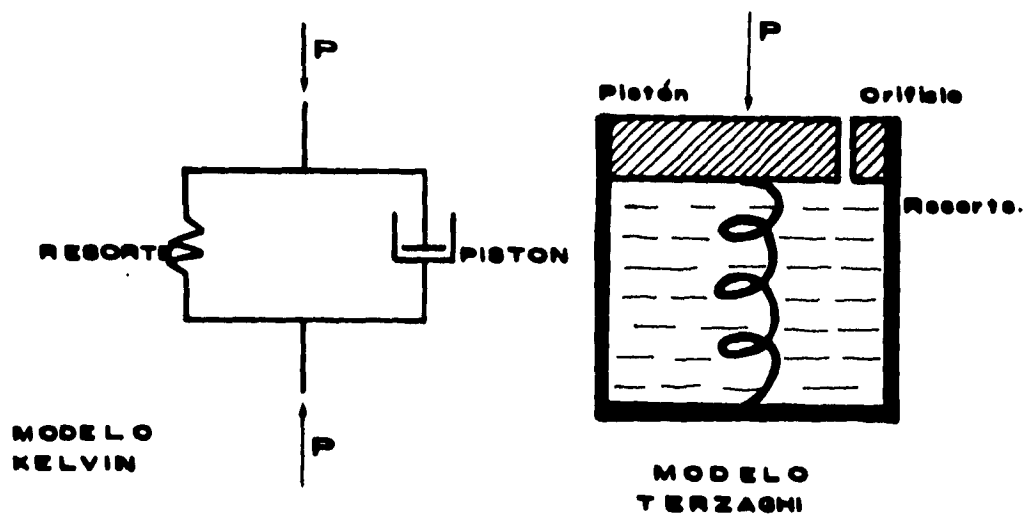


Figura 5.3

El fluido es incompresible, así, cuando se aplica una carga P y el orificio está completamente cerrado, el resorte no se deforma nada y todo el incremento de presión lo toma el fluido. Pero si se permite que el fluido salga, habrá una transferencia gradual de la carga del fluido al resorte.

Como existe una diferencia de presión igual a P/A , se genera el gradiente hidráulico necesario para que el fluido salga por el orificio, permitiendo la deformación del resorte, que tomará la carga de acuerdo con la ley de Hooke. La velocidad de

transferencia depende del tamaño del orificio y de la viscosidad del fluido.

Ahora tomando varios cilindros comunicados, como se muestra en la figura 5.4, la distribución inicial de presiones del agua es lineal. No habrá tendencia a moverse en el fluido si se desprecia el peso propio de los pistones y resorte o si se considera que el dispositivo llegó al equilibrio en el comienzo del experimento.

Si se aplica bruscamente una carga P al primer pistón, el fluido en primera instancia deberá soportarla totalmente, generándose en él una presión hidrostática en exceso, que se transmite con igual valor a cualquier profundidad. En ese momento no existe un gradiente hidráulico que produzca movimiento en el fluido, en un instante de tiempo después habrá diferencia de presiones en el primer orificio creando un gradiente hidráulico que produce un flujo en el fluido hacia afuera de la primera cámara, tan pronto como se inicia ese flujo, la presión en el fluido de la primera cámara disminuye, transfiriéndose simultáneamente una parte de la carga al resorte.

Esta reducción de presión en el fluido de la primera cámara causa, por diferencia con la segunda, un desnivel de presiones en el segundo orificio por lo cual el fluido tenderá a pasar de la segunda a la primera cámara. Como consecuencia, disminuye también la presión del fluido en la segunda cámara, transmitiéndose así la tendencia al flujo en las cámaras inferiores. El fin del proceso será el momento cuando la presión del fluido vuelva a la condición hidrostática estando la carga (P) totalmente soportada por los resortes.

En cualquier instante (t) después de la aplicación de la carga (P), la distribución de presiones del fluido y los resortes (U y P respectivamente), es la que se indica con la línea quebrada que aparece en la figura 5.4. Si se considera el volumen de las cámaras muy pequeño y el número de ellas es muy grande, el modelo se acercará a la condición que prevalece en los suelos y la línea quebrada que representa la distribución de presión en un número pequeño de cámaras tenderá a convertirse en una curva continua a medida que el número de cámaras aumente. En el suelo, la

estructuración de las partículas sólidas puede considerarse representada por los resortes del modelo, el agua intersticial libre por el fluido incompresible de las cámaras y los canalículos capilares por los orificios de los émbolos.

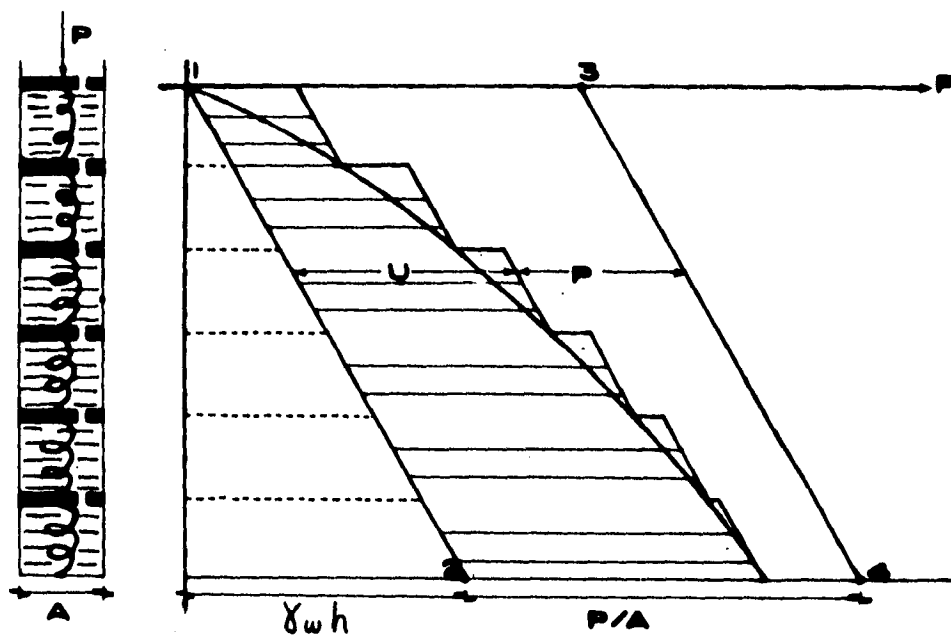


Figura 5.4

En un proceso de consolidación unidimensional, se tiene lo siguiente:

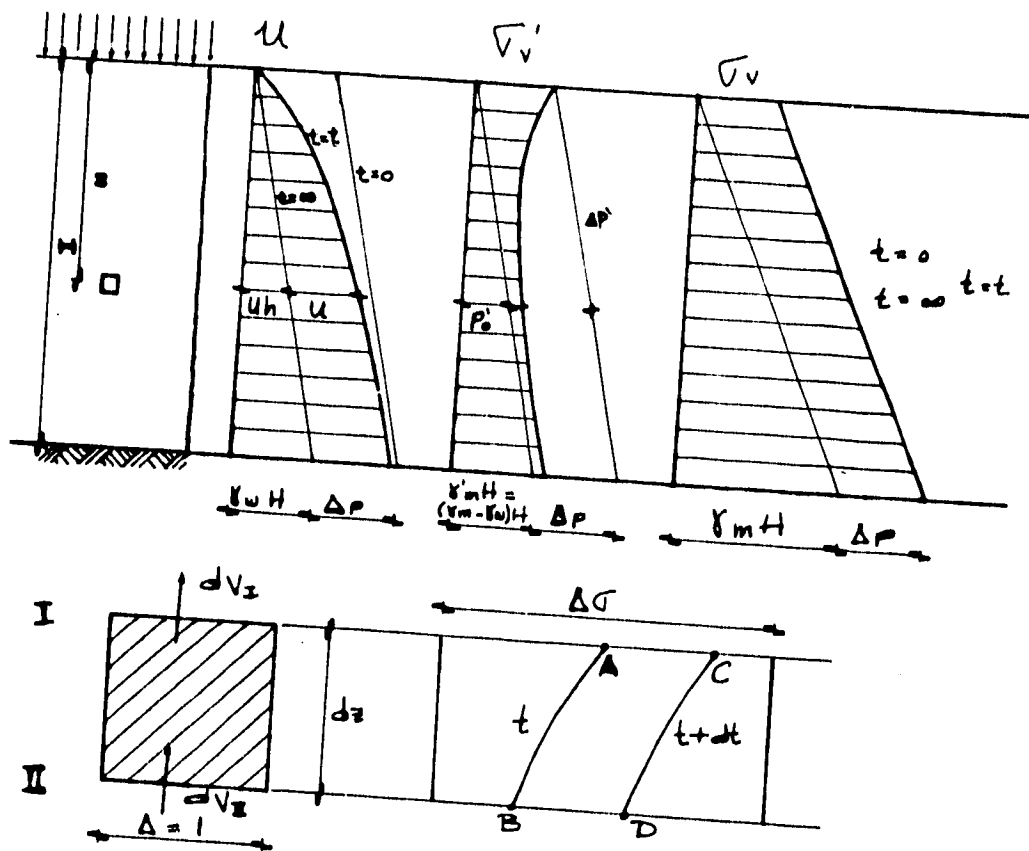


Figura 5.5

La presión de poro en los puntos A, B, C y D son los siguientes:

$$U_A = U$$

$$U_B = U_A + \frac{\partial U_A}{\partial z} dz = U + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

$$U_C = U_A + \frac{\partial U_A}{\partial t} dt = U + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

$$U_D = U_C + \frac{\partial U_C}{\partial z} dz = U + \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial z} dt dz$$

entonces los gradientes hidráulicos (pérdida de carga por unidad de longitud) en los puntos A y B son:

$$i_A = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$i_B = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(U + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right)$$

Aplicando la Ley de Darcy, la cantidad de agua que sale de la cara I y la que entra por la cara II, son las siguientes:

$$dV_I = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial U}{\partial z} dt A$$

$$dV_{II} = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(U + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) dt A$$

Por lo tanto la cantidad de agua que sale del elemento es:

$$\Delta dV = dV_I - dV_{II}$$

sustituyendo y haciendo operaciones, se tiene que:

$$\Delta dV = - \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} dzdt \quad 5.13$$

por otro lado, según Terzaghi, se sabe que:

$$a_v = \frac{\Delta e}{\Delta \sigma'} \quad \text{y} \quad m_v = \frac{a_v}{1+e}$$

donde:

a_v , es el coeficiente de compresibilidad.

m_v , es el coeficiente de variación volumétrica.

por lo tanto:

$$m_v = \frac{\Delta e}{(1+e) \Delta \sigma'} = \frac{e_v}{\Delta \sigma'}$$

$$m_v = \frac{\frac{\Delta v}{v}}{\Delta \sigma'}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = m_v \Delta \sigma'$$

$$\Delta v = m_v \Delta \sigma' v \quad 5.14$$

También se tiene, de la ecuación fundamental de mecánica de suelos que:

$$\Delta \sigma = U + \Delta \sigma'$$

diferenciando la ecuación con respecto al tiempo, se obtiene lo siguiente:

$$dU + d\Delta\sigma' = 0$$

$$d\Delta\sigma' = -dU$$

tomando en cuenta la diferencia de presiones entre A y C (figura 5.5)

$$d\Delta\sigma' = -\frac{\partial U}{\partial t} dt \quad 5.15$$

diferenciando 5.14 y sustituyendo en 5.15 se obtiene lo siguiente:

$$\Delta dV = m, \left(-\frac{\partial U}{\partial t} dt\right) dV$$

pero:

$$dV = A dz$$

por lo tanto:

$$\Delta dV = m, \left(-\frac{\partial U}{\partial t} dt\right) A dz \quad 5.16$$

donde:

A, es el área transversal ($A = 1$)

Ahora igualando 5.13 y 5.16, se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k}{\gamma_w m_v} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

donde:

k_v es el coeficiente de Permeabilidad del suelo

γ_w es el peso específico del agua.

De la expresión anterior se puede definir como Coeficiente de Consolidación C_v , a:

$$C_v = \frac{k}{\gamma_w m_v}$$

Se define como grado de consolidación o Porcentaje de Consolidación del suelo a una profundidad "z" y en un instante "t", a la relación entre la consolidación que ya ha tenido lugar a esa profundidad y a la consolidación total que ha de producirse bajo el incremento de carga impuesto. Se representa por U(%) y está dada por la siguiente ecuación:

$$U(\%) = 100 \left[1 - \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 T}{4}} \right]$$

Cabe aclarar que "e" es la base de los logaritmos Neperianos, y "T" es el factor tiempo y está dado por la siguiente ecuación.

$$T = \frac{C_v t}{H^2} = \frac{k(1+e)}{a_v \gamma_w} \frac{t}{H^2}$$

A continuación se muestra una tabla que muestra la relación teórica U(%) - T.

**RELACION ENTRE EL PORCENTAJE DE CONSOLIDACION Y EL FACTOR
TIEMPO**

U (%)	T
0	0.000
10	0.008
15	0.018
20	0.031
25	0.049
30	0.071
35	0.096
40	0.126
45	0.159
50	0.197
55	0.238
60	0.287
65	0.342
70	0.405
75	0.477
80	0.565
85	0.684
90	0.848
95	1.127
100	∞

El asentamiento total debido a consolidación primaria, se deduce de la siguiente manera:

teniendo que:

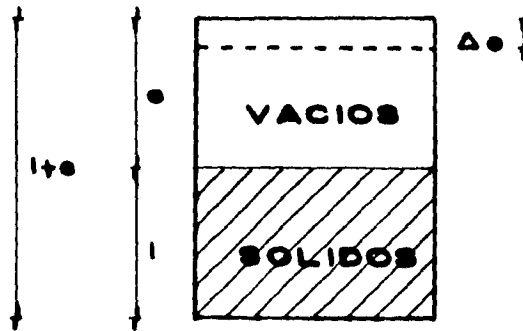


Figura 5.6

Donde Δe representa la disminución del espesor $1 + e$

Por la ley de Hooke sabemos que:

$$\epsilon = \frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta e}{1+e}$$

por lo tanto

$$\Delta H = \frac{\Delta e}{1+e} H$$

utilizando a_v y m_v , se obtiene lo siguiente:

$$\Delta H = \frac{a_v}{1+e} \Delta \sigma' H = m_v \Delta \sigma' H \quad 5.17$$

Esta ecuación representa los asentamientos por consolidación debido a un incremento de esfuerzo efectivo $\Delta \sigma'$.

En el estrato real también se admite que las deformaciones son proporcionales al grado de consolidación, así tenemos que:

$$\frac{S_t}{\Delta H} 100 = U(\%)$$

$$S_t = \Delta H \frac{U(\%)}{100}$$

por lo tanto:

$$S_t = m, \Delta \sigma' H \frac{U(\%)}{100}$$

siendo S_t el asentamiento ocurrido en un tiempo t .

V.2.2 CONSOLIDACION SECUNDARIA

En una curva de consolidación se pueden distinguir dos partes: la primaria (que es la estudiada bajo el título de consolidación unidimensional) y la secundaria, la cual será tratada a continuación.

Podemos considerar que la consolidación primaria es un fenómeno de tipo hidrodinámico, que implica la expulsión de agua. Si lo expresamos mediante una analogía física, ésta sería la Analogía Mecánica de Terzaghi.

La consolidación secundaria, por su parte, es un fenómeno de tipo viscoso que se atribuye al agua que rodea a las partículas de arcilla. Se considera que, en un cierto momento, las partículas "resbalan" unas sobre otras (como si patinaran); debido a lo anterior, el suelo se sigue deformando aunque la mayor parte del agua ya haya salido de él. Cabe recalcar que, si bien es cierto que disminuye el volumen del suelo, la cantidad de agua que sale durante este fenómeno es muy poca, en comparación con la que se expulsa durante la consolidación primaria.

Actualmente existen diferentes teorías para el cálculo de la consolidación secundaria, en este trabajo se tratará la del Dr. Zeevaert.

V.2.2.1 Teoría de Zeevaert (1966) de Consolidación Secundaria.

Sea el siguiente modelo físico, formado por una Unidad de Kelvin y una Unidad de Zeevaert (figura 5.7).

Observando la Unidad de Kelvin, vemos que está compuesta por un resorte y un amortiguador lineal, estando el resorte sujeto a la Ley de Hooke y el amortiguador a la Ley de Newton.

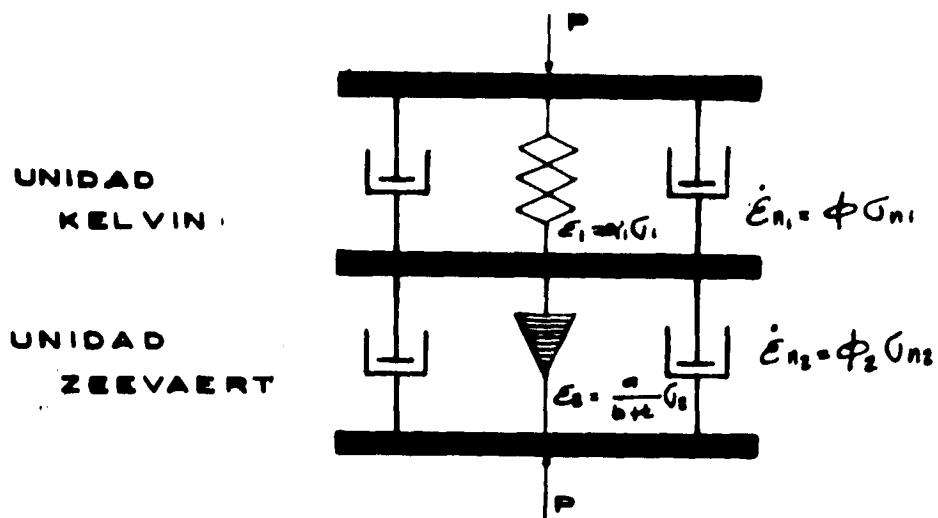


Figura 5.7

De la ley de Hooke tenemos que:

$$\epsilon_1 = \alpha_1 \sigma_1 \quad 5.18$$

donde:

- ϵ_1 , es la deformación unitaria.
- α_1 , es el coeficiente de Proporcionalidad.
- σ_1 , es el esfuerzo en el resorte

y por la Ley de Newton: $\dot{\epsilon}_{N1} = \frac{d\epsilon_{N1}}{dt} = \phi_1 \sigma_{N1}$ 5.19

donde:

$\dot{\epsilon}_{N1}$, es la velocidad de deformación del amortiguador lineal.

La Unidad de Kelvin es el modelo del émbolo que representa a la consolidación unidimensional de Terzaghi, siendo los sólidos del suelo representados por el resorte y el agua representada por el amortiguador lineal.

Del equilibrio estático se deduce que:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_{N1} \quad 5.20$$

De la deformación volumétrica se tiene que:

$$\epsilon_{v1} = \epsilon_1 = \epsilon_{N1} \quad 5.21$$

De la ecuaciones 5.18 y 5.19 se concluye lo siguiente:

$$\sigma_1 = \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \quad \text{y} \quad \sigma_{N1} = \frac{\dot{\epsilon}_{N1}}{\phi_1}$$

Sustituyendo en 5.20 se tiene que:

$$\sigma = \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} + \frac{\dot{\epsilon}_{N1}}{\phi_1}$$

Por lo tanto:

$$\phi_1 \sigma = \frac{\phi_1}{\alpha_1} \varepsilon_1 + \dot{\varepsilon}_{N1}$$

Cumpliendo la ecuación 5.21 se concluye que:

$$\dot{\varepsilon}_{v1} + \frac{\phi_1}{\alpha_1} \varepsilon_{v1} = \phi_1 \sigma \quad 5.22$$

Integrando la ecuación 5.22 se llega a:

$$\varepsilon_{v1} = \sigma \alpha_1 \left(1 - e^{-\frac{\phi_1}{\alpha_1} t} \right)$$

Si se considera un número grande de unidades, la ecuación anterior queda:

$$\varepsilon_{v1} = \alpha \sigma \left(1 - \Sigma \frac{\alpha_1}{\alpha} e^{-\frac{\phi_1}{\alpha_1} t} \right) \quad 5.23$$

En donde $\Sigma \alpha_1 = \alpha$, representa la compresibilidad del suelo.

Por otro lado, el grado de consolidación de la teoría de Terzaghi muestra que:

$$\varepsilon_{v1} = m_v \sigma \left(1 - \Sigma \frac{2}{M} e^{-MT^v} \right) \quad 5.24$$

donde $T_v = \frac{C_v t}{H^2}$, es el factor tiempo y $M = \frac{(2m - 1)^2 \pi^2}{4}$

Ahora si comparamos las ecuaciones 5.23 y 5.24 se obtiene lo siguiente:

$$\alpha = m_v \frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{2}{M} \quad \text{y} \quad \frac{\phi_1}{\alpha_1} = M \frac{C_v}{H^2} \quad 5.25$$

Las ecuaciones 5.23 y 5.24 representan el mismo fenómeno y correlacionándolas con las equivalencias 5.25, se obtiene la deformación volumétrica representada por la unidad Kelvin.

$$\varepsilon_{v1} = m_v \sigma F(T_v)$$

La Unidad de Zeevaert está constituida por un amortiguador lineal y por otro amortiguador no lineal. El amortiguador lineal está gobernado por la Ley de Newton y el no lineal, por la Ley de Zeevaert.

Ley de Zeevaert: $\dot{\varepsilon}_v = \frac{a}{(b+t)} \sigma_v$

en donde:

$\dot{\varepsilon}_v$, es la velocidad de deformación.

a y b, son coeficientes

t, es el tiempo transcurrido desde el instante en que se aplica la carga al instante en que se mide la deformación.

σ_v , es el esfuerzo normal vertical.

La Unidad de Zeevaert representa a la consolidación secundaria.

Ahora consideraremos detalladamente el modelo de Zeevaert (figura 5.8).

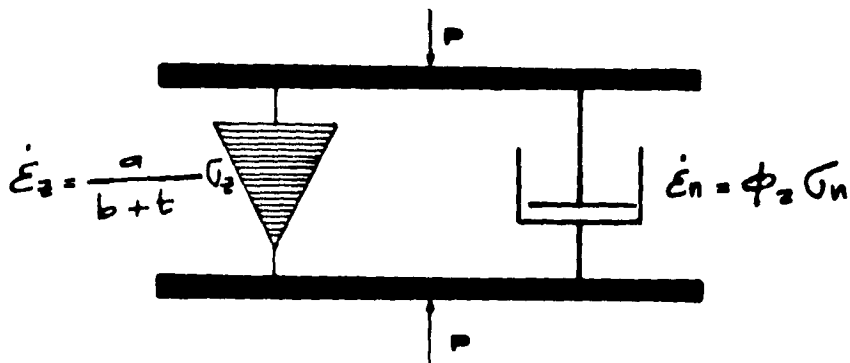


Figura 5.8

Al someter a la Unidad de Zeevaert al efecto de una carga P , se considera que dicha carga se distribuye entre el amortiguador lineal y el no lineal:

$$P = P_l + P_n$$

Así pues, se tiene que:

$$\frac{P}{A} = \frac{P_l}{A} + \frac{P_n}{A}$$

y por ello:

$$\sigma = \sigma_l + \sigma_n$$

Por otra parte, considerando que la deformación unitaria en la Unidad de Zeevaert, es la misma en ambos amortiguadores, se cumple que:

$$\varepsilon = \varepsilon_n = \varepsilon_l$$

Ahora bien, considerando las velocidades de deformación, tenemos que:

$$\dot{\varepsilon}_n = \phi_2 \sigma_n \quad 5.26$$

en donde:

ϕ_2 es la fluidez del agua viscosa del suelo, σ_n es el esfuerzo normal y $\dot{\varepsilon}_n$ es la velocidad de deformación en el amortiguador lineal.

La velocidad de deformación en el amortiguador no lineal, por su parte, está gobernada por la Ley de Zeevaert:

$$\dot{\varepsilon}_l = \frac{a}{(b+t)} \sigma_l$$

Despejando los valores de σ_n y σ_t de las expresiones anteriores, tenemos que:

$$\sigma_n = \frac{1}{\phi_2} \dot{\epsilon}_n$$

$$\sigma_t = \frac{b+t}{a} \dot{\epsilon}_t$$

Recordando que el esfuerzo en la Unidad de Zeevaert se reparte entre el amortiguador lineal y el amortiguador no lineal, de modo que:

$$\sigma = \sigma_t + \sigma_n$$

Substituyendo, se tiene que:

$$\sigma = \frac{b+t}{a} \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{1}{\phi_2} \frac{d\epsilon}{dt}$$

$$\sigma = \left[\frac{b+t}{a} + \frac{1}{\phi_2} \right] \frac{d\epsilon}{dt}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\frac{b+t}{a} + \frac{1}{\phi_2}}$$

Integrando y considerando que σ es constante se tiene que:

$$\epsilon = a\sigma \ln = \frac{b + \frac{a}{\phi_2} + t}{b + \frac{a}{\phi_2}} + C$$

Considerando las condiciones iniciales, que indican que para un tiempo igual a cero la deformación es igual a cero, se tiene que:

$$0 = a\sigma \ln = \frac{b + \frac{a}{\phi_2} + 0}{b + \frac{a}{\phi_2}} + C$$

por lo tanto $c = 0$, esto nos conduce a:

$$\varepsilon = a\sigma \ln = \frac{b + \frac{a}{\phi_2} + t}{\frac{a}{\phi_2}} \quad 5.27$$

Para encontrar el valor de b , se procede de la siguiente forma:

Si sabemos que:

$$\sigma_n = \frac{1}{\phi_2} \dot{\varepsilon}_n \quad \text{y} \quad \varepsilon_n = \varepsilon_1 = \varepsilon \quad 5.28$$

y además, si

$$\dot{\varepsilon}_n = \frac{a\sigma}{[b + \frac{a}{\phi_2} + t]} \quad 5.29$$

se concluye que:

$$\sigma_n = \frac{a\sigma}{\phi_2 [b + \frac{a}{\phi_2} + t]}$$

Para un tiempo igual a cero, todo el esfuerzo normal lo toma el amortiguador lineal, es decir, para $t = 0$, $\sigma_n = \sigma$, por lo tanto:

$$\sigma = \frac{a\sigma}{\phi_2 [b + \frac{a}{\phi_2}]}$$

Lo cual sólo se cumple, si $b = 0$

Finalmente, la ecuación 5.27 queda:

$$\varepsilon = a\sigma \ln = \frac{\frac{a}{\phi_2} + t}{\frac{a}{\phi_2}}$$

$$\varepsilon = a\sigma \ln \left[1 + \frac{\phi_2}{a} t \right]$$

Ahora bien, dado que:

$$\ln x = 2.31 \log_{10} x = 2.31 \log x$$

$$\varepsilon = 2.31 a\sigma \log \left[1 + \frac{\phi_2}{a} t \right]$$

La expresión anterior es válida para una sola Unidad de Zeevaert, pero en el suelo se tiene un número muy grande de Unidades de Zeevaert. Por esa razón se trabaja con la siguiente expresión:

$$\varepsilon = 2.31 \bar{a}\sigma \log \left[1 + \frac{\phi_2}{\bar{a}} t \right]$$

donde \bar{a} es el promedio de todas las a del suelo.

La expresión anterior se puede presentar de la manera siguiente:

$$\varepsilon = 2.31 \bar{a} \sigma \log \left\{ 1 + \frac{\phi_2}{\bar{a}} \frac{\alpha}{\phi_1} \left(\frac{\phi_1}{\alpha} t \right) \right\}$$

Si hacemos que:

$$2.31 \bar{a} = m_1$$

y también:

$$\alpha = m_v \quad \text{y} \quad \frac{\phi_1}{\alpha} = \frac{2C_v}{H^2}$$

la ecuación queda como:

$$\varepsilon_{vp} = m_1 \sigma \log \left\{ 1 + 4.62 \frac{m_v \phi_2}{m_1 \phi_1} \left(\frac{C_v t}{H^2} \right) \right\}$$

en la cual:

$$\frac{C_v t}{H^2} = T_v$$

es el factor tiempo de consolidación primaria, y llamando a la relación:

$$\frac{m_i}{m_v} = \beta$$

tenemos que:

$$\varepsilon_{vp} = m_i \sigma \log \left\{ 1 + \frac{4.61}{\beta} \frac{\phi_2}{\phi_1} T_v \right\}$$

Esta ecuación representa la variación volumétrica durante el fenómeno de viscosidad intergranular. Consideramos β , ϕ_2 y ϕ_1 como valores constantes para niveles de esfuerzos específicos y llamamos:

$$\frac{4.61}{\beta} \frac{\phi_2}{\phi_1} = \xi$$

ε_{vp} , Es la deformación viscoplastica, la cual corresponde a la consolidación secundaria.

m_i y ξ , son función de las curvas de consolidación y se obtienen en el laboratorio.

Los valores típicos para la arcilla de la ciudad de México, son aproximadamente:

$$0.3 \leq \xi \leq 0.4$$

$$0.003 \leq m_i \leq 0.004 \text{ (cm}^2\text{/kg)}$$

Finalmente, la consolidación total (deformación total ε) es la suma de la deformación elastoplástica ε_{ep} (consolidación primaria) y la deformación viscoplastica ε_{vp} (consolidación secundaria).

$$\varepsilon = \varepsilon_{ep} + \varepsilon_{vp} \quad 5.30$$

De acuerdo con la ecuación anterior podemos escribir en forma adimensional:

$$\frac{\varepsilon}{m, \sigma} = \Omega$$

donde:

$$\Omega = F(T, \sigma) + \beta \log (1 + \xi T, \sigma)$$

Esta ecuación representa el comportamiento de deformación volumétrica-tiempo.

Ahora bien, para trabajar en forma integral las consolidaciones primaria y secundaria se usará la expresión 5.30.

Así pues en la Teoría de Terzaghi para la consolidación primaria se tiene que:

$\Delta H = m, \sigma H$, que corresponde al asentamiento total.

$S_t = \Delta H U = m, \sigma H U$, siendo S_t el asentamiento, para un tiempo t y U el porcentaje de consolidación, que depende del factor tiempo "T".

Esto se puede expresar en la siguiente forma:

$$\delta_{ep} = m, \sigma H U \quad 5.31$$

Por otra parte se sabe que:

$\varepsilon_{vp} = m, \sigma \log (1 + \xi T)$, que corresponde a la deformación viscoplástica según Zeevaert.

Ahora bien, dado que por definición:

$$\varepsilon_{vp} = \frac{\delta_{vp}}{H}$$

por lo tanto:

$$\delta_{vp} = [m_i \sigma \log (1+\xi T)]H \quad 5.32$$

Sumando los efectos elastoplásticos y viscoplástico tenemos que:

$$\delta_{total} = \delta_i = \delta_{ep} + \delta_{vp} = m_i \sigma H U + [m_i \sigma \log (1+\xi T)] H$$

por lo tanto:

$$\delta_i = \sigma H \{ (m_i U) + [m_i \log (1+\xi T)] \} \quad 5.33$$

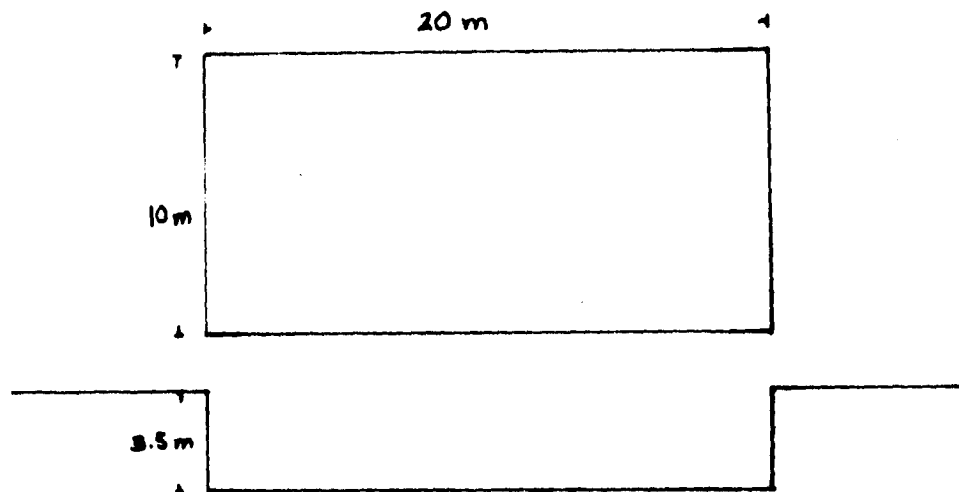
donde:

$$T = (C_v t) / H_v^2$$

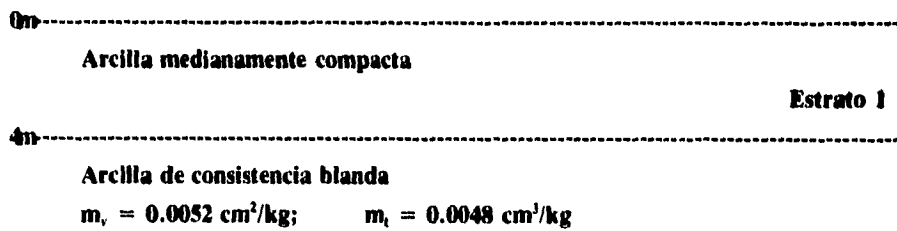
Las ecuaciones 5.31, 5.32 y 5.33 son las que se emplean para el cálculo de asentamientos por consolidación primaria y secundaria.

Ejemplo Ilustrativo:

Determinar el asentamiento a 2, 5 y 10 años, del edificio de la figura 5.9, debidos a la consolidación primaria y secundaria del estrato de arcilla de consistencia blanda sabiendo que $q = 6 \text{ t/m}^2$.



La estratigrafía del subsuelo es la siguiente:



$$\xi = 0.46$$

$$C_v = 2.7 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{seg}$$

Estrato 2

An-----

Arena medianamente compacta

Estrato 3

SOLUCION:

Empleando la teoría de Boussinesq se obtiene el esfuerzo normal a la mitad del estrato de arcilla.

$$\sigma_z = 4.58 \text{ t/m}^2 = \Delta p$$

Si el tiempo es de 2 años, se debe convertir a segundos para hacerlo compatible con los coeficientes obtenidos en el laboratorio:

$$t = 2 \text{ años}$$

$$t = 2 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 6.3072 \times 10^7 \text{ seg}$$

obteniendo el factor tiempo:

$$T = (C_v t) / (H_{ef}^2) = [(2.7 \times 10^{-4}) (6.3072 \times 10^7)] / 150^2$$

$$T = 0.757$$

H_{ef} es en centímetros

Se tiene que, para $T = 0.757 \rightarrow U = 0.872$

Además: $4.58 \text{ ton/m}^2 \times 1000 \text{ kg/ton} \times 1 \text{ m}^2/10000 \text{ cm}^2 = 0.458 \text{ kg/cm}^2$.

Substituyendo en las ecuaciones 5.31, 5.32 y 5.33 tenemos:

$$\delta_{ep} = (0.0052) (0.458) (300) (0.872)$$

$$\delta_{ep} = 0.623 \text{ cm}$$

$$\delta_{vp} = (0.0048) (0.458) (300) \log [1 + 0.46 (0.757)]$$

$$\delta_{vp} = 0.086 \text{ cm}$$

$$\delta_i = (0.458)(300) \{ (0.0052) (0.872) + 0.0048 \log [1 + 0.46 (0.757)] \}$$

$$\delta_i = 0.709 \text{ cm}$$

Procediendo de manera análoga se obtienen los hundimientos para 5 y 10 años.

t años	t segundos	T	U	δ_{ep} cm	δ_{vp} cm	δ_i cm
2	6.30×10^7	0.757	0.872	0.623	0.086	0.709
5	1.60×10^8	1.892	1.000	0.714	0.179	0.893
10	3.20×10^8	3.784	1.000	0.714	0.289	1.003

V.3 DETERMINACION DE PARAMETROS (METODOS DE AJUSTE).

Del estudio del comportamiento esfuerzo-deformación-tiempo, se pueden reconocer dos casos típicos, para los cuales se debe determinar sus parámetros.

Caso 1: Cuando la teoría de consolidación puede ser aplicada en conjunción con el fenómeno de viscosidad intergranular. Esta condición requiere, como

lo asume la teoría de la consolidación, un material homogéneo.

Caso 2: Cuando la consolidación se lleva a cabo rápidamente debido a las características de permeabilidad. La deformación elasto-plástica toma lugar tan rápidamente, como es aplicada el incremento de esfuerzo. Sin embargo, la saturación retrasa el fenómeno de viscosidad intergranular.

V.3.1 CASO 1:

En este caso se pueden encontrar dos tipos de curvas de consolidación.

Para bajos niveles de esfuerzo, en la rama de recompresión en las curvas de compresibilidad, las curvas de consolidación muestran una línea recta en toda la parte de consolidación secundaria. (Ver figura 5.9). A estas curvas las llamamos TIPO I.

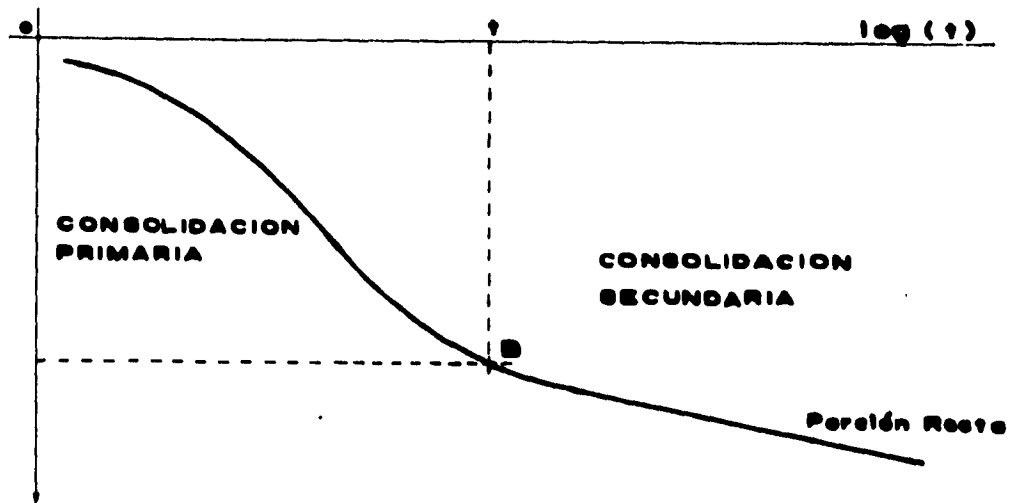


Figura 5.9

Para altos niveles de esfuerzos, en la franja de recompresión en la curva de compresibilidad y cerca del esfuerzo crítico, las curvas de consolidación, presentan en la rama de consolidación secundaria, una configuración convexa y al pasar el tiempo se vuelve línea recta (Ver figura 5.10). A este tipo de curvas las llamaremos TIPO II.

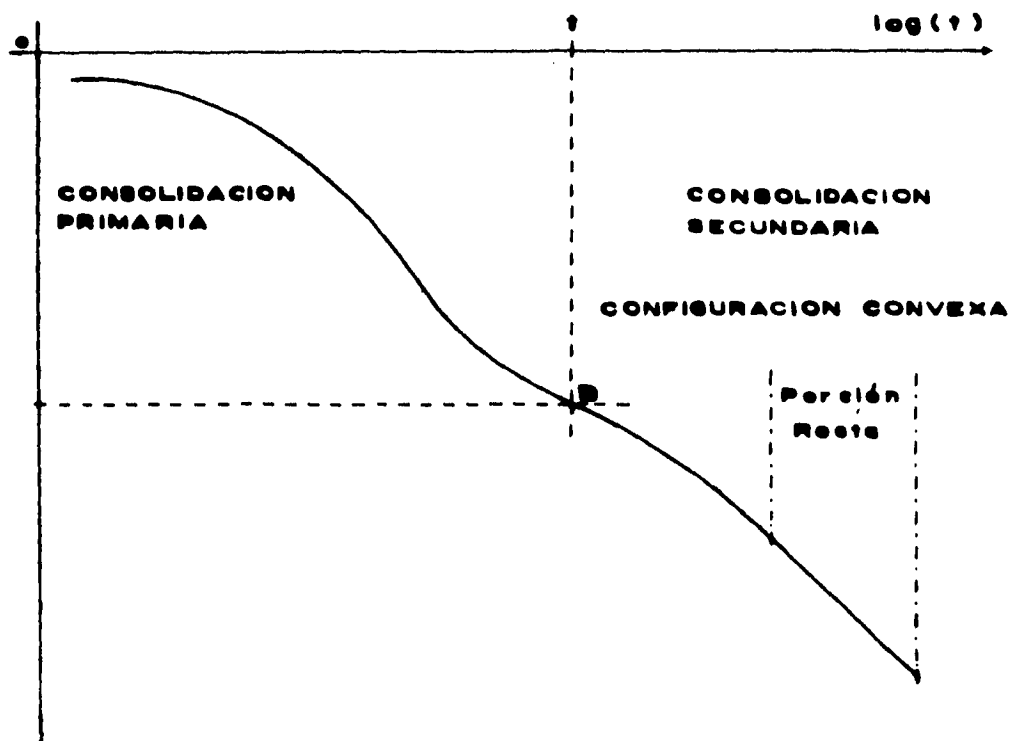


Figura 5.10

V.3.1.1 CURVA TIPO I.

Graficando de la fórmula $\Omega = F(T_v) + \beta \log(1 + \xi T_v)$ se concluye que el valor límite de ξ , para el cual las curvas muestran un comportamiento logarítmico recto después del punto de quiebra en la curva de consolidación es de $\xi = 5$, por lo tanto las curvas tipo I tendrán el siguiente comportamiento:

$$\Omega = F(T_v) + \beta \log(1 + 5T_v) \quad 5.34$$

En términos de δ contra t , la ecuación teórica para las curvas de consolidación, de acuerdo con la ecuación 5.34, se puede escribir:

$$\delta = \delta_v + C_v \log(1 + 5T_v) \quad 5.35$$

En el cual δ_v , C_v y el coeficiente de consolidación (C_v), son determinados a cada nivel de esfuerzos e incrementos de presión (ΔP).

Para encontrar los parámetros de las ecuaciones de las curvas TIPO I:

Primero determinamos el valor de C_v , seleccionando dos puntos con valores grandes de t en la porción recta de la curva, y así:

$$\delta_2 - \delta_1 = C_v \log \frac{t_2}{t_1} \quad 5.36$$

Tomando un ciclo en la escala logarítmica por lo tanto $Ct = t_2/t_1 = 1$, por lo tanto $C_v = \delta_2 - \delta_1$ el valor de δ_v es determinado seleccionando un punto B, inmediatamente después del punto de quiebra en la curva de consolidación sus coordenadas δ_b , t_b , para los cuales se puede asumir que $F(T_v) = 1$ y $T_v = 2$, por lo tanto:

$$\delta_b = \delta_v + C_v \log(1 + 5.2) \quad 5.37$$

por consiguiente:

$$\delta_v = \delta_B - 1.04 C_v \quad 5.38$$

El coeficiente de consolidación (C_v) se encuentra de la intersección con la curva de compresión primaria a $\delta_v/2$, por lo que $T_v = 0.2$, de la ecuación 5.35, se obtiene que:

$$\delta_{50} = \frac{1}{2} \delta_v + 0.3 C_v \quad 5.39$$

En la curva de consolidación obtenemos el t_{50} para un δ_{50} y con este dato obtenemos:

$$C_v = \frac{0.2 H^2}{t_{50}} \quad 5.40$$

En el cual $2H$ es el espesor del espécimen al cual se le aplica el incremento de carga:

Ejemplo Caso 1 Curva Tipo 1:

De la figura 5.11 tenemos que:

$$\begin{aligned} \delta_B &= 0.18 \text{ mm} \\ \delta_1 &= 0.205 \text{ mm} \\ \delta_2 &= 0.216 \text{ mm} \\ 2H &= 19.655 \text{ mm} \\ t_B &= 500 \text{ s} \\ t_1 &= 20000 \text{ s} \\ t_2 &= 60000 \text{ s} \\ H &= 9.82775 \text{ mm} \end{aligned}$$

Si sabemos que

$$\delta_2 - \delta_1 = C_v \log \frac{t_2}{t_1}$$

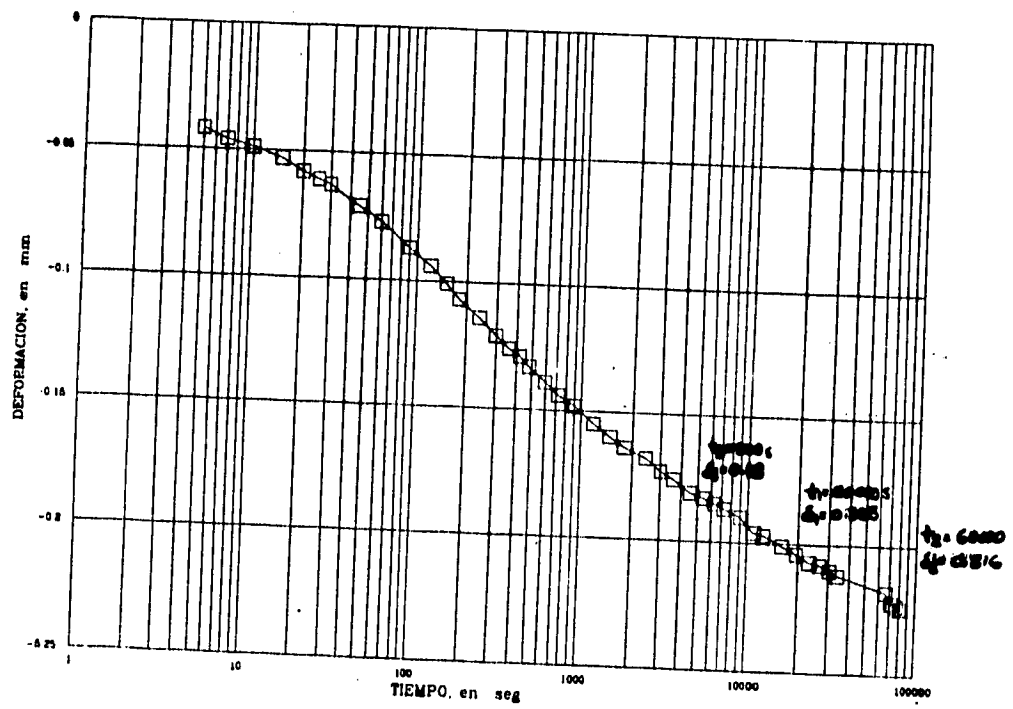


Figura 5.11

por lo tanto

$$(0.216 - 0.205) = C_1 \log \frac{60000}{20000}$$

$$0.011 = 0.477 C_1$$

$$C_1 = 0.02305$$

Ahora de:

$$\delta_v = \delta_n - 1.04 C_1$$

$$\delta_v = 0.18 - 1.04 (0.02305)$$

$$\delta_v = 0.18 - 0.023972$$

$$\delta_v = 0.156023 \text{ mm}$$

y de:

$$\delta_{50} = \frac{1}{2} \delta_v + 0.3 C_1$$

$$\delta_{50} = 0.5 (0.156023) + 0.3 (0.02305)$$

$$\delta_{50} = 0.084926 \text{ mm}$$

por lo tanto:

$$t_{50} = 80 \text{ s}$$

Ahora de:

$$C_v = \frac{0.2 H^2}{t_{50}}$$
$$C_v = \frac{0.2(0.98275)^2}{80}$$
$$C_v = 2.4145 \times 10^{-3} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

por lo tanto, la ecuación teórica queda de la siguiente manera:

$$\delta = (0.156023) F(T_v) + (0.02305) \log (1+5T_v)$$

V.3.1.2 CURVA TIPO 2.

De la ecuación 5.35, se sabe que:

$$\delta = \delta_0 F(T_v) + C_v \log (1+5T_v)$$

El valor C_v es determinado como se describió previamente para las curvas Tipo 1, donde el comportamiento logarítmico llega a ser una línea recta. El valor de ξ es determinado seleccionando un punto B junto después del punto de quiebra de la curva de consolidación, en donde $T_v = 1$. Las coordenadas en este punto son δ_b , t_b . Otro punto, en la porción recta, se selecciona para el máximo tiempo observado, con coordenadas δ_r , t_r . Nótese que el valor $\xi C_v/H^2$, representa un tiempo τ , por lo tanto:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\xi C_v}{H^2} \text{ y } \xi = \frac{H^2}{\tau C_v} \quad 5.41$$

El problema es encontrar el valor de τ para la ecuación 5.41.

Escribiendo la siguiente ecuación:

$$\delta_B - \delta_t = C_v \log \frac{\tau + t_B}{\tau + t_t} \quad 5.42$$

y despejando τ , tenemos que:

$$\tau = \frac{e^{\frac{\delta_B - \delta_t}{C_v}} t_t - t_B}{1 - e^{\frac{\delta_B - \delta_t}{C_v}}} \quad 5.43$$

en la que

$$a = \frac{2.303 (\delta_B - \delta_t)}{C_v} \quad 5.44$$

Con $\delta_t/2$ obtenemos, en la curva de consolidación un t_{50} como primera aproximación para 50% de consolidación primaria, y calculamos C_v , para un valor mejorado del coeficiente de consolidación, usamos la siguiente ecuación:

$$\delta_{50} = \frac{1}{2} \delta_t + C_v \log \left(1 + 0.2 \frac{H^2}{\tau C_v} \right) \quad 5.45$$

Con este valor se determina en la curva un nuevo t_{50} , con este nuevo t_{50} se recalculan C_v , ξ y τ ; estos últimos valores, substituidos en la ecuación 5.45 nos da un nuevo t_{50} . Repetimos el procedimiento hasta que C_v y ξ no varíen demasiado, por lo tanto el valor obtenido de ξ , satisface la ecuación teórica 5.41.

Ejemplo: Caso 1, curva Tipo 2, de la figura 5.12 tenemos que:

$$\begin{aligned} \delta_B &= 0.1445 \text{ mm} = 0.01445 \text{ cm} & \delta_1 &= 0.1825 \text{ mm} = 0.01825 \text{ cm} \\ \delta_2 &= 0.257 \text{ mm} = 0.0257 \text{ cm} & \delta_t &= 0.27 \text{ mm} = 0.027 \text{ cm} \\ t_B &= 4 \text{ min} = 240 \text{ seg.} & t_1 &= 6000 \text{ seg} & t_2 &= 60000 \text{ seg} \\ t_t &= 90000 \text{ seg} & 2H &= 1.97 \text{ cm} \end{aligned}$$

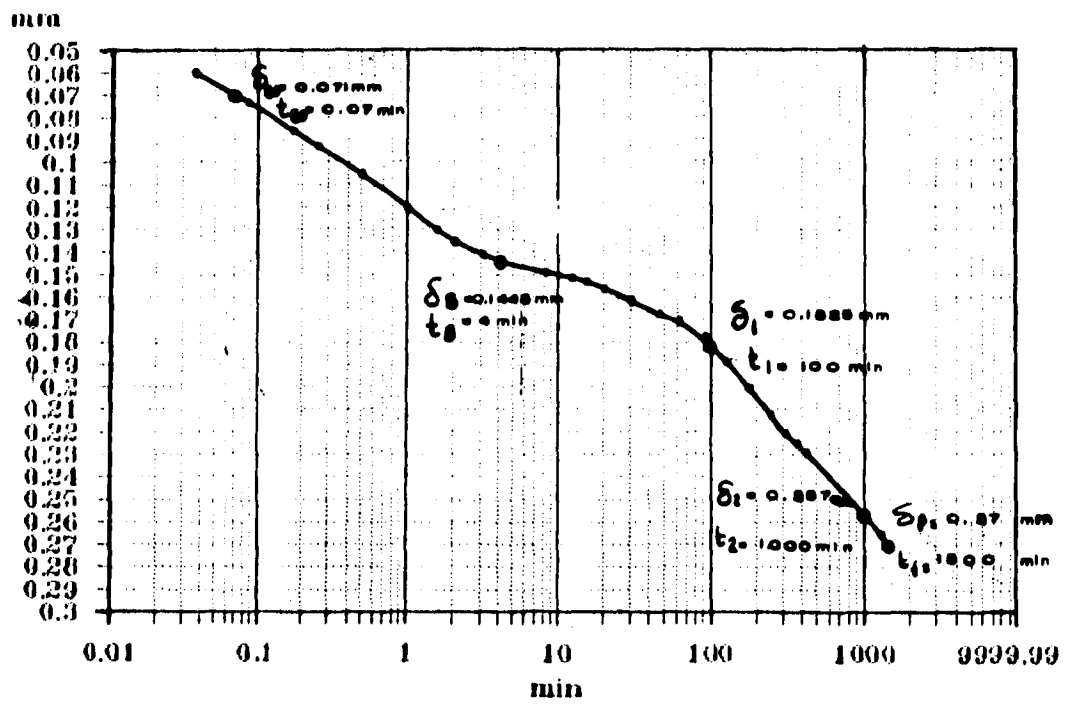


Figure 5.12

de

$$\delta_2 - \delta_1 = C_i \log \frac{t_2}{t_1}$$

$$(0.0257 - 0.01825) = C_i \log \frac{60000}{6000}$$

$$C_i = 0.0075$$

de

$$\tau = \frac{(e^a t_f) - t_p}{1 - e^a}$$

$$a = \frac{2.303 (\delta_p - \delta_f)}{C_i}$$

$$a = \frac{2.303(0.01445 - 0.027)}{0.0075} = -3.853$$

$$\tau = \frac{(e^{-3.853} 90000) - 240}{1 - e^{-3.853}}$$

$$\tau = 1704.261 \text{ seg}$$

de

$$\delta_v = \delta_p - C_i \log \left(1 + \frac{t_p}{\tau} \right)$$

$$\delta_v = 0.01445 - 0.0075 \log \left(1 + \frac{240}{1704.26} \right)$$

$$\delta_v = 0.014021 \text{ cm}$$

$$\frac{\delta_v}{2} = 0.00701 \text{ cm}$$

por lo tanto

$$t_{50} = 0.07 \text{ min} = 4.2 \text{ seg}$$

entonces, si:

$$C_v = \frac{0.2 H^2}{t_{50}}$$

$$C_v = \frac{0.2 (0.985)^2}{4.2}$$

$$C_v = 0.0462$$

por lo tanto

$$\xi = \frac{(0.985)^2}{(1704.261) (0.0462)}$$

$$\xi = 0.01232 \text{ cm}^2/\text{seg}$$

de

$$\delta = \delta_v F(T_v) + C_v \log(1 + \xi T_v)$$

$$\delta_{50} = 0.00701 + (0.0075) \log(1 + (0.01232) (0.2))$$

$$\delta_{50} = 0.007018 \text{ cm}$$

por lo tanto como no hay variación, la ecuación queda:

$$\delta = 0.014024 F(T_v) + (0.0075) \log \left(1 + \frac{t}{1704.261} \right)$$

V.3.2. CASO 2.

En este caso la consolidación primaria toma lugar rápidamente debido a la expulsión de agua de la estructura semi-impermeable del suelo.

El final de este fenómeno es registrado en el punto B como un rápido y suave punto de quiebra en la curva de consolidación, después del cual el fenómeno de viscosidad intergranular se presenta claramente, y puede ser interpretada por la ley vista anteriormente:

$$C_v \log \frac{\tau_1 + \tau}{\tau_1}$$

La determinación de C_v y τ_1 puede obtenerse de las pruebas de consolidación como lo muestra la figura 5.13 llamemos t_B el tiempo en el cual toma lugar el cambio de curvatura en la curva de consolidación, para el cual podemos asumir que $F(T_v) = 1$, por lo tanto:

$$\delta_B = \delta_v' + \delta_v'' + C_v \log \frac{\tau_1 + t_B}{\tau_1}$$

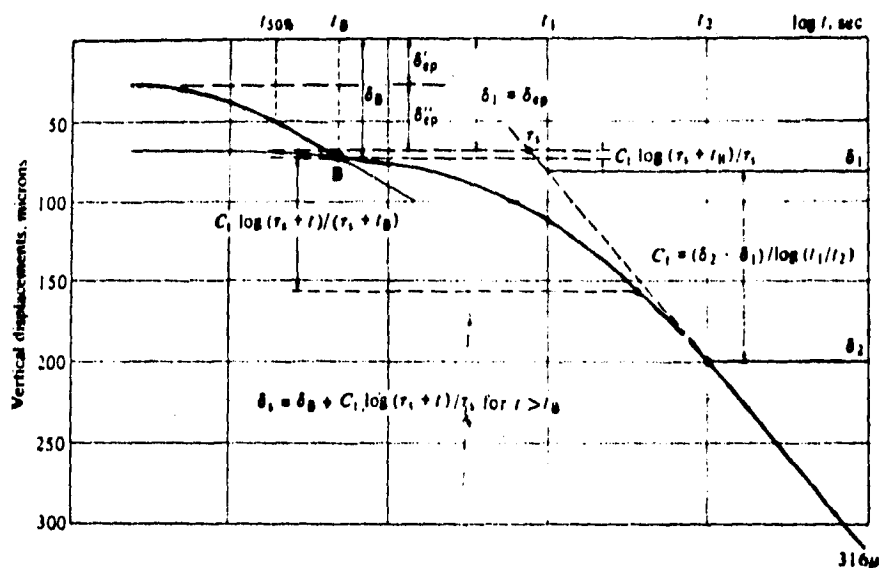


Figura 5.13

De la figura 5.13 podemos observar que el valor $(\delta_v' + \delta_v'')$ se obtiene en un tiempo muy corto.

Por lo tanto, para valores de $t > t_0$ se puede escribir sin error apreciable:

$$\delta = \delta_B + C_1 \log \frac{\tau_s + t}{\tau_s}$$

Los parámetros para estas condiciones son m_v , β , C_v . Para determinar el valor de m_v y τ_s se continúa la línea recta de la parte de consolidación secundaria y se intercepta con una línea horizontal que pasa a través del punto de quiebra mostrado en la curva de consolidación, obteniendo el valor de τ_s . La línea recta tiene una pendiente de:

$$C_1 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\log \frac{t_2}{t_1}}$$

De la cual el valor de m_1 es calculado. El espesor del espécimen al comienzo del incremento de esfuerzo $\Delta\sigma$ es $2H$. Además, la deformación δ , en el punto de quiebra se asume que la deformación elasto-plástica toma lugar rápidamente después de la aplicación de la carga, debido a las características de permeabilidad del estrato, así que:

$$m_1 = \frac{\delta_v}{2H (\Delta\sigma)}$$

del cual

$$\xi = \frac{m_1}{m_2}$$

El parámetro τ_1 bajo condiciones de campo es calculado para el problema específico tomando en cuenta las condiciones de drenaje en los límites del estrato en la naturaleza. Para la mismas condiciones de drenaje en los límites tenemos que:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{(2H_1)^2}{(2H_2)^2}$$

Cuando las condiciones de campo muestran drenaje por un solo lado:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{H_1^2}{(2H_2)^2}$$

El valor del coeficiente aparente de consolidación del fenómeno de viscosidad intergranular es:

$$C_{vp} = \frac{\beta}{4.62} \frac{H_1^2}{\tau_1}$$

Ejemplo Caso 2: De la figura 5.14

$\delta_1 = 0.075 \text{ mm} = 0.0075 \text{ cm}$ $\delta_2 = 0.125 \text{ mm} = 0.0125 \text{ cm};$
 $t_1 = 10000 \text{ seg}; t_2 = 60000 \text{ seg};$ $\delta_3 = .011 \text{ mm} = 0.0011 \text{ cm};$
 $2H = 18.8627 \text{ mm} = 1.88627 \text{ cm}; \tau_s = 880 \text{ seg}; \Delta\sigma = 0.2 \text{ kg/cm}^2$

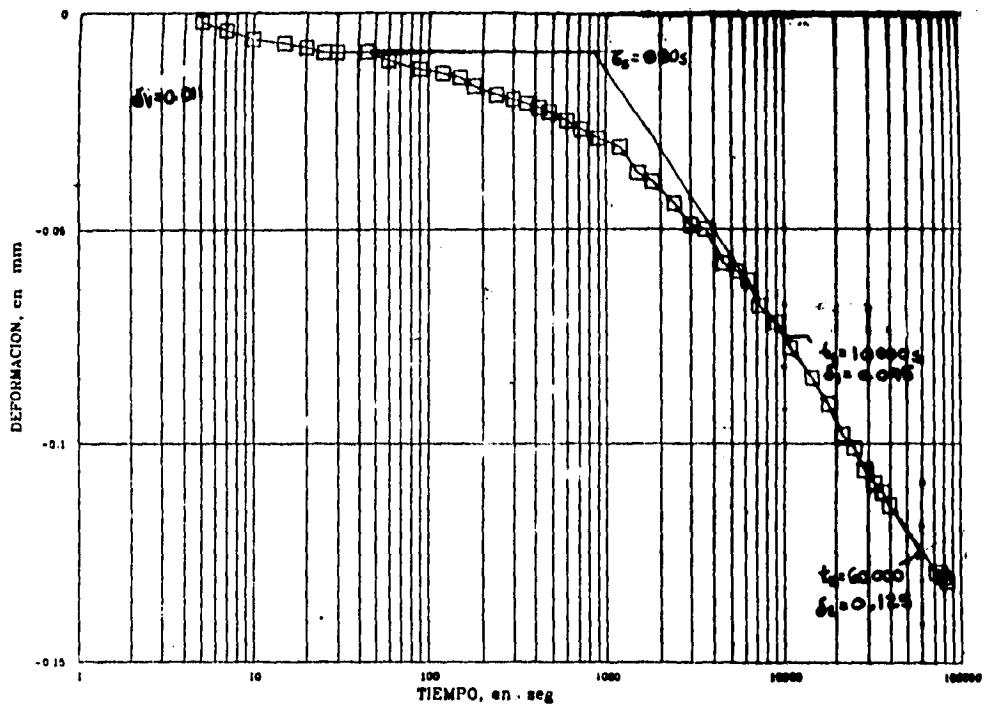


Figura 5.14

si

$$C_i = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\log \frac{t_2}{t_1}}$$

entonces:

$$C_i = \frac{(0.125) - (0.075)}{\log \frac{60000}{10000}} = 0.0642548 \text{ mm}$$

$$C_i = 0.0642548 \text{ mm}$$

De la gráfica (figura 5.14) tenemos que:

$$m_v = \frac{\delta_v}{2H (\Delta\sigma)}$$

$$m_v = \frac{0.001 \text{ cm}}{(1.88627 \text{ cm}) (0.2)}$$

$$m_v = 0.00265 \text{ cm}^2/\text{kg}$$

si

$$m_i = \frac{C_i}{2H \Delta\sigma}$$

$$m_i = \frac{0.00642548 \text{ mm}}{(1.88627) (0.2)}$$

$$m_i = 0.017032 \text{ cm}^2/\text{kg}$$

sabiendo que:

$$\beta = \frac{m_l}{m_v}$$

$$\beta = \frac{0.0170320 \text{ cm}^2/\text{kg}}{0.002650 \text{ cm}^2/\text{kg}}$$

$$\beta = 6.427$$

por lo tanto

$$C_{vp} = \frac{\beta}{4.62} \frac{H_s^2}{\tau_s}$$

$$C_{vp} = \frac{6.427}{4.62} \frac{0.8895}{880}$$

$$C_{vp} = 1.40645 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$$

CAPITULO VI

INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA.

Toda obra de Ingeniería Civil transmite su carga finalmente al subsuelo. Por lo tanto, la estabilidad y comportamiento de la obra completa (estructura-subsuelo) dependerá del efecto recíproco entre estructura y subsuelo (interacción).

Generalmente en el cálculo de asentamientos se considera la carga flexible uniformemente distribuida en toda el área. Sin embargo, en la interfase suelo-cimentación, la carga no puede considerarse flexible debido a la rigidez de la cimentación y deberá presentarse una distribución no uniforme de las reacciones. Esta distribución de presiones de contacto esta en función de la rigidez del suelo y la cimentación, por lo cual se debe establecer la compatibilidad de formaciones entre estructura de cimentación y el subsuelo.

Ultimamente se han desarrollado técnicas de interacción suelo-estructura muy útiles pero muchas de estas técnicas se aplican en dos dimensiones, de manera que el análisis estructural se realiza en un plano, lo cual hace perder la visualización del fenómeno

tridimensional. En este capítulo se presenta un método de interacción tridimensional que toma en cuenta toda la estructura y todos los estratos del subsuelo.

El método de interacción suelo-estructura que aquí se presenta consiste en tomar en cuenta la reacciones del terreno de cimentación como carga sobre la estructura manejándolas como incógnitas. Después se calculan los hundimientos del suelo en función de las cargas sobre él. Finalmente se establece la compatibilidad de deformaciones entre la estructura y suelo, lo que equivale a igualar los desplazamientos entre ambos medios, así entonces se resuelve el problema, obteniendo las reacciones de la estructura y los hundimientos del suelo.

Para llegar a la solución del método de interacción suelo-estructura se tiene que seguir la metodología que se presenta a continuación.

VI.1 ANALISIS ESTRUCTURAL.

Para la técnica de interacción suelo-estructura se utilizará el método de rigideces. Para la aplicación de este método se tienen que definir algunos términos como: momento de empotramiento, rigidez lineal y rigidez angular.

Momento de empotramiento.

Es el momento en el extremo de una barra aislada considerada ésta como empotrada debido a una carga externa.

Rigidez lineal.

Es la fuerza necesaria para producir, en el extremo de la barra, un desplazamiento unitario.

Rigidez angular.

Es el momento requerido para producir en el extremo de una barra un giro unitario. En el extremo opuesto aparece un momento inducido que depende del tipo de apoyo.

Las rigideces anteriormente descritas dependen de las condiciones en los apoyos de los elementos y de que tipo de deformación sufran los mismos.

Por ejemplo, si a una viga doblemente empotrada se le permite un giro en uno de sus extremos (figura 6.1), el cálculo de sus rigideces angulares se obtienen de la siguiente manera:

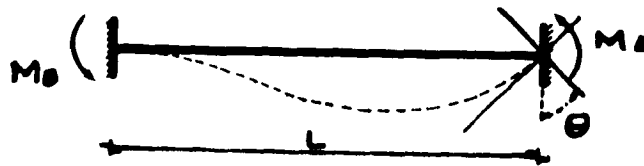


Figura 6.1

Por el método de la viga conjugada se tiene que:

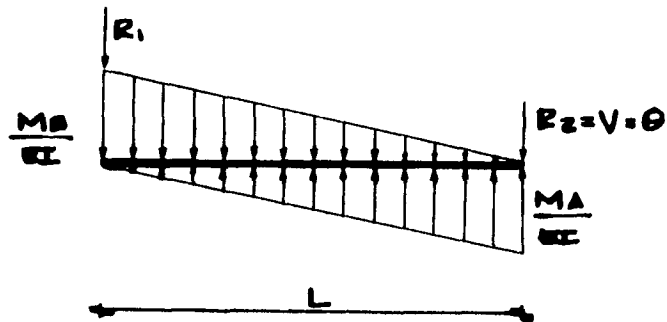


Figura 6.2

$$\Sigma M_A = 0$$

$$\left(-\frac{M_B L}{2 EI}\right) \left(\frac{2}{3} L\right) + \left(-\frac{M_A L}{2 EI}\right) \left(\frac{L}{3}\right) = 0$$

$$M_B = \frac{M_A}{2}; \quad M_A = 2 M_B$$

De lo anterior se concluye que al provocar un giro o momento unitario en el extremo A (M_A) se genera $M_B = M_A/2$, es decir existe un factor de transporte de 1/2. O de otra forma: en una viga doblemente empotrada al aplicar un giro en uno de sus extremos, el otro extremo recibe la mitad del efecto aplicado.

Ahora aplicando el giro unitario θ (figura 6.1) se tiene que:

El cortante en A es el valor del giro en ese punto: $R_2 = \theta$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$L\left(-\frac{M_B}{2EI}\right)\left(\frac{L}{3}\right) - L\left(-\frac{M_A}{2EI}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)L + LR_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{M_A}{2EI}\right)\left(\frac{L^2}{3}\right) - \left(-\frac{M_A}{2EI}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)L^2 + LR_2 = 0$$

$$-\frac{M_A L^2}{4EI} + LR_2 = 0$$

$$R_2 = \frac{M_A L}{4EI}$$

$$M_A = \frac{4EI}{L} \theta$$

Si $\theta = 1$

$$M_A = \frac{4EI}{L} ; M_B = \frac{2EI}{L}$$

Siendo M_A y M_B las rigideces angulares de una viga doblemente empotrada debido a un giro unitario.

Si la viga esta empotrada en uno de sus extremos y simplemente apoyada en el otro, la rigidez angular se obtiene de la siguiente manera:

En la siguiente viga, aplicando un giro o momento unitario en el apoyo B (figura 6.3) se tiene que:

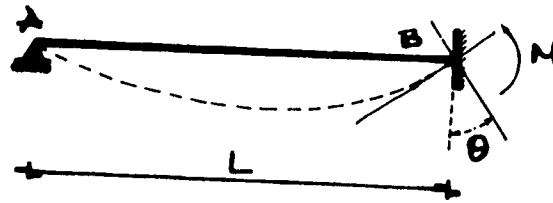


Figura 6.3

Nuevamente por el método de la viga conjugada.

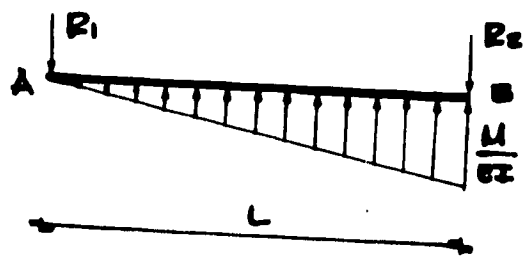


Figura 6.4

$$\Sigma M_A = 0$$

$$LR_2 - \frac{ML}{2EI} \left(-\frac{2}{3}L\right) = 0$$

$$R_2 = \frac{ML}{3EI} ; \quad M = \frac{3EI\theta}{L}$$

Si $\theta = 1$

$$M = \frac{3EI}{L}$$

Siendo M la rigidez angular debido a un giro unitario.

Las rigideces angulares y lineales debidas a un desplazamiento unitario en una viga doblemente empotrada, se muestran en la figura 6.5.

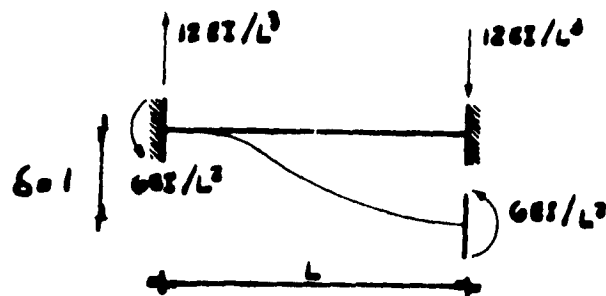


Figura 6.5

Las rigideces lineales y angulares debidas a un desplazamiento unitario en una viga empotrada en uno de sus extremos y simplemente apoyada en el otro, se muestran en la figura 6.6

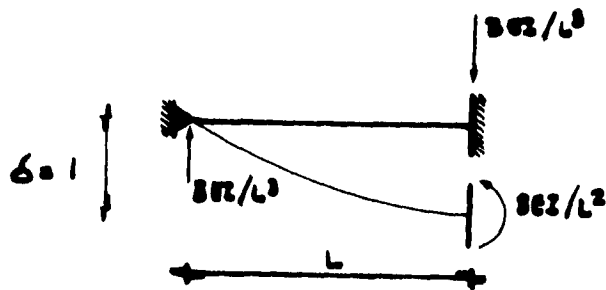


Figura 6.6

VI.1.1 METODO DE LAS RIGIDECES.

Este método consiste en conocer los valores de los desplazamientos lineales y angulares de los nudos, para que con estos se puedan calcular las fuerzas internas de la estructura.

Los desplazamientos de los nudos son el número de grados de libertad o el grado de indeterminación cinemática de la estructura; por ejemplo en la Fig. 6.7 muestra un marco que tiene 7 grados de libertad si se consideran acortamientos o alargamientos de los miembros, o sólo 4 si no se consideran acortamientos o alargamientos.

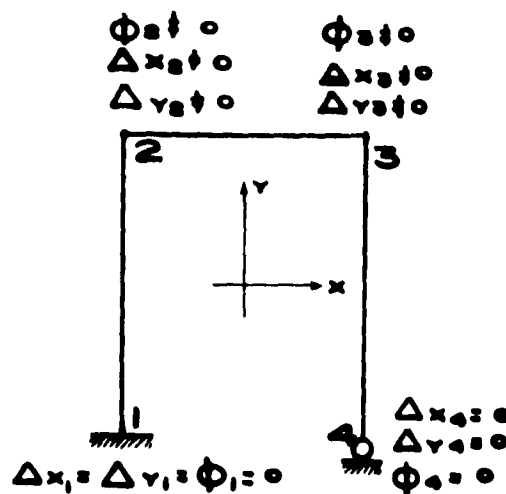


Figura 6.7

Al no considerarse los acortamientos o alargamientos de los miembros tenemos:

$$\Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta, \phi_4 \neq 0, \phi_3 \neq 0, \phi_2 \neq 0, \Delta y_2 = \Delta y_3 = 0$$

El método requiere del valor del momento de empotramiento en las vigas causado por las acciones, a continuación se muestran algunos casos:

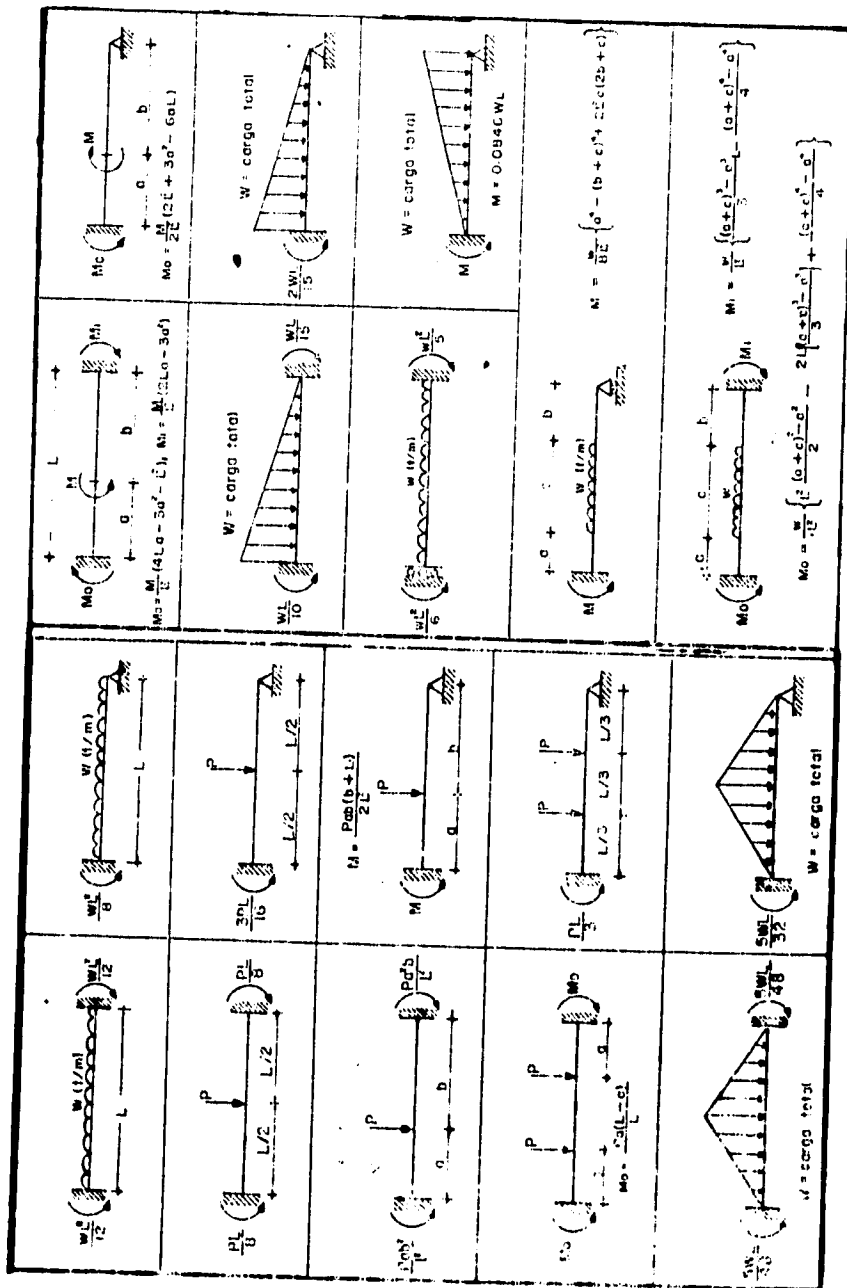


Figura 6.8

Primeramente se deben restringir todos los desplazamientos desconocidos en los nudos, esto nos conduce a trabajar con vidas doblemente empotradas.

Una vez restringidos los nudos se liberan uno por uno y se provocan desplazamientos unitarios, es decir, traslaciones o rotaciones unitarias; que a su vez producirán acciones como: fuerzas o momentos. Estas acciones, causadas por los desplazamientos unitarios, serán las rigideces.

El método es aplicable a estructuras linealmente elásticas con pequeños desplazamientos, estos últimos son las incógnitas.

A continuación se analizará una estructura para expresar claramente los conceptos anteriores.

Sea la siguiente estructura:

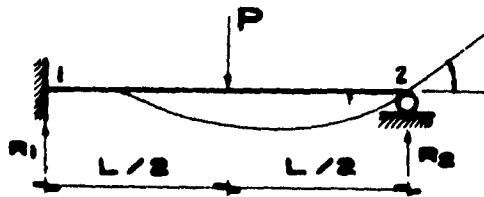


Figura 6.9

Su grado de libertad es 1, ya que el extremo B gira un ángulo θ ; la translación horizontal no se considera ya que se desprecian los alargamientos o acortamientos axiales

Primero se obtiene una estructura estáticamente determinada, o sea que se eliminan los desplazamientos empotrando la viga en ambos extremos, como se muestra en la figura 6.10. A esta etapa se le conoce como solución particular.

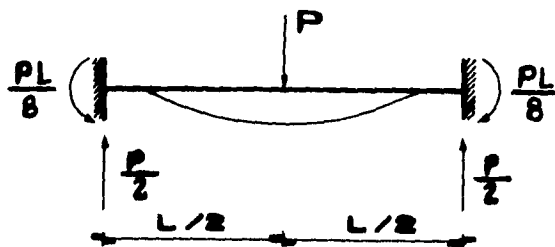


Figura 6.10

El extremo B, en el cual se ha restringido la rotación, sí gira, como ocurre realmente, por lo tanto habrá que suponer una condición de carga que considere el giro real del nudo B.

Por comodidad se da un valor unitario al desplazamiento desconocido. (A esta etapa se le conoce como solución complementaria)

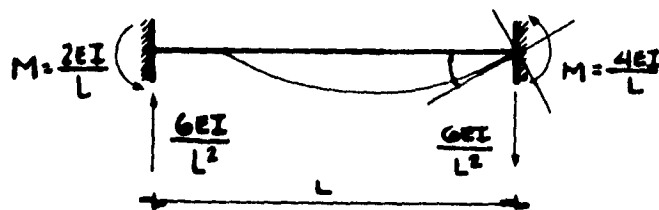


Figura 6.11

Ahora se plantea la ecuación de equilibrio (superposición de etapas).

$$\frac{PL}{8} - \frac{4EI}{L} \theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{PL^2}{32EI}$$

$$R_1 = \frac{P}{2} + \frac{6EI}{L^2} \theta$$

Sustituyendo θ

$$R_1 = \frac{P}{2} + \frac{6EI}{L^2} \cdot \frac{PL^2}{32EI}$$

$$R_1 = \frac{P}{2} + \frac{6}{32} P$$

$$R_1 = 0.6875 P$$

$$M_1 = -\frac{PL}{8} - \frac{2EI}{L} \cdot \frac{PL^2}{32EI}$$

$$M_1 = -0.1875 PL$$

Ejemplo ilustrativo.

Resolver la siguiente estructura.

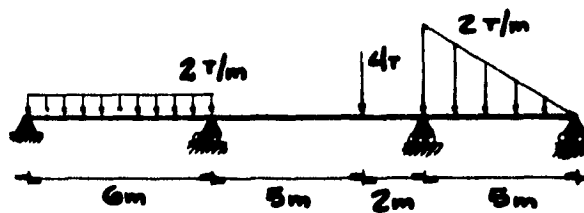


Figura 6.12

La estructura tiene 4 grados de libertad, pero si no fijamos los nudos 1 y 4 encontramos las incógnitas θ_2 y θ_3 , con las cuales es suficiente para determinar los

momentos 2 y 3.

Consideraremos para los claros 1-2 y 3-4 los momentos de empotramiento y las rigideces correspondientes.

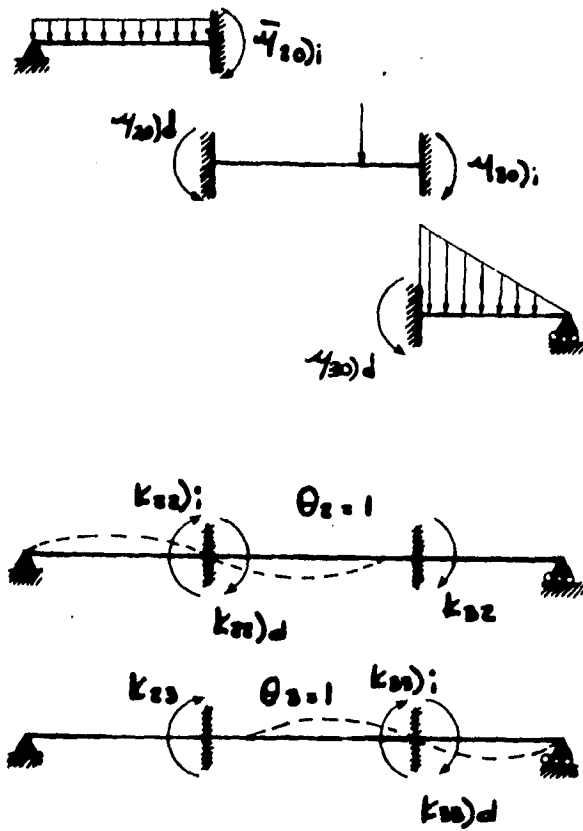


Figura 6.13

$$\mu_{20)i} = \frac{WL^2}{8} = 9 \text{ T-m}$$

$$\mu_{20)d} = \frac{Pa b^2}{L^2} = 1.6326 \text{ T-m}$$

$$\mu_{20} = 7.3674 \text{ T-m}$$

$$\mu_{30)i} = \frac{Pa b^2}{L^2} = 4.0816 \text{ T-m}$$

$$\mu_{30)d} = \frac{WL^2}{15} = 3.33 \text{ T-m}$$

$$\mu_{30} = 0.7486 \text{ T-m}$$

$$k_{22)i} = \frac{3EI}{L_1} = 0.5 EI$$

$$k_{22)d} = \frac{4EI}{L_2} = 0.5714 EI$$

$$k_{22} = 1.071 EI$$

$$k_{32} = \frac{2EI}{L_2} = 0.2857 EI$$

$$k_{23} = \frac{2EI}{L_2} = 0.2857 EI$$

$$k_{33)i} = \frac{4EI}{L_2} = 0.5714 EI$$

$$k_{33)d} = \frac{3EI}{L_3} = 0.6 EI$$

$$k_{33} = 1.171EI$$

Realizando la superposición o ecuación de equilibrio:

$$\mu_{20} + k_{22}\theta_2 + k_{23}\theta_3 = 0$$

$$\mu_{30} + k_{32}\theta_2 + k_{33}\theta_3 = 0$$

$$7.3674 + 1.0714 EI \theta_2 + 0.2857 EI \theta_3 = 0$$

$$0.7486 + 0.2857 EI \theta_2 + 1.1714 EI \theta_3 = 0$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones tenemos:

$$\theta_2 = -\frac{7.1725}{EI} \quad \text{y} \quad \theta_3 = \frac{1.1103}{EI}$$

Cabe aclarar que el signo (-) de θ_2 significa que el sentido del giro es contrario al supuesto.

Momentos Reales:

$$M_{21} = \mu_{20} + k_{22}\theta_2$$

$$M_{21} = 9 + 0.5(-7.1725) = 5.414 \text{ T-m}$$

$$M_{23} = \mu_{20} + k_{22}\theta_2 + k_{23}\theta_3$$

$$M_{23} = -1.6326 + 0.5714(-7.1725) + 0.2857(1.1103) = -5.414 \text{ T-m}$$

$$M_{32} = \mu_{30} + k_{32}\theta_2 + k_{33}\theta_3$$

$$M_{32} = 4.0816 + 0.2857(-7.1725) + 0.5714(1.1103) = 2.667 \text{ T-m}$$

$$M_{34} = \mu_{34}d + k_{33}d \theta_3$$

$$M_{34} = -3.333 + 0.6 (1.1103) = -2.667 \text{ T-m}$$

Las ecuaciones de equilibrio se pueden expresar matricialmente como en el ejemplo siguiente:

Considere el siguiente marco

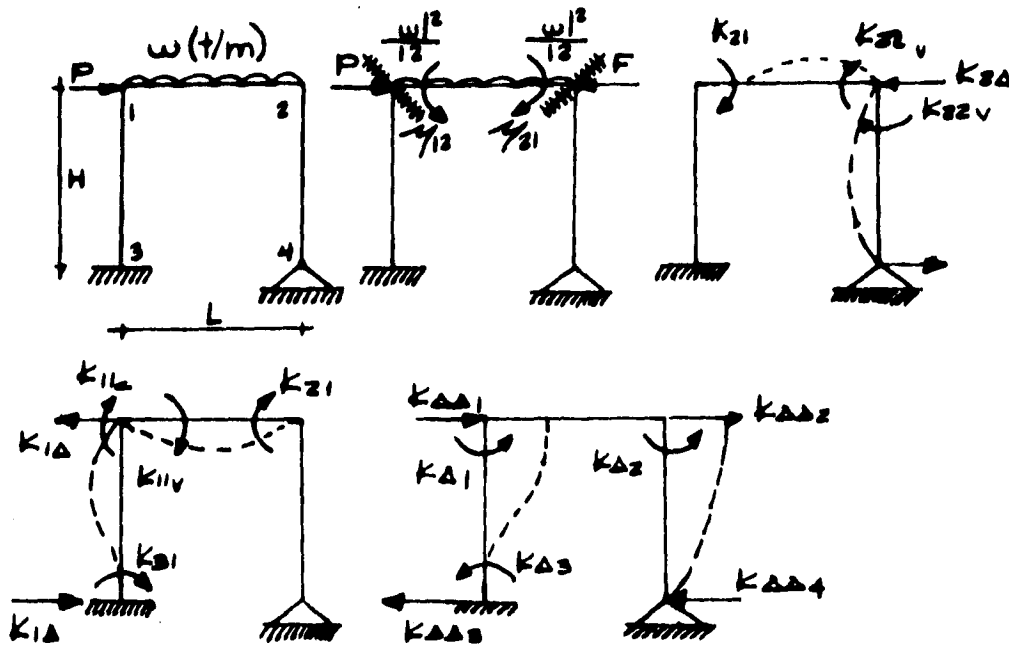


Figura 6.14

$$k_{11} = \frac{4EI}{H} + \frac{4EI}{L} \quad k_{12} = \frac{2EI}{L} \quad k_{1\Delta} = -\frac{6EI}{H^2}$$

$$k_{22} = \frac{4EI}{L} + \frac{3EI}{H} \quad k_{21} = \frac{2EI}{L} \quad k_{2\Delta} = -\frac{3EI}{H^2}$$

$$k_{\Delta\Delta} = \frac{12EI}{H^3} + \frac{3EI}{H^3} \quad k_{\Delta 1} = -\frac{6EI}{H^2} \quad k_{\Delta 2} = -\frac{3EI}{H^2}$$

De lo anterior se obtiene que:

$$M_1 + k_{11} \theta_1 + k_{12} \theta_2 + k_{1\Delta} \Delta = 0$$

$$M_2 + k_{21} \theta_1 + k_{22} \theta_2 + k_{2\Delta} \Delta = 0$$

$$P + k_{\Delta 1} \theta_1 + k_{\Delta 2} \theta_2 + k_{\Delta\Delta} \Delta = 0$$

Que matricialmente se representa de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{1\Delta} \\ k_{21} & k_{22} & k_{2\Delta} \\ k_{\Delta 1} & k_{\Delta 2} & k_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_1 \\ -M_2 \\ -P \end{bmatrix}$$

$$k \delta = F$$

donde:

K, Matriz de rigidez

La matriz **[K]** es aquella que multiplicada por el vector de desplazamiento **{δ}** proporcionara el vector de fuerzas **{F}**. Esta matriz es cuadrada y simétrica.

Del ejemplo anterior podemos concluir que la ecuación general de equilibrio de cualquier estructura está dada por:

$$k\delta + P_e + P_c = 0$$

6.1

donde:

- K,** es la matriz de rigideces de la estructura
- δ ,** es el vector de desplazamientos
- P_e ,** es el vector de cargas o momentos de empotramiento
- P_c ,** es el vector de cargas concentradas

La matriz de rigideces de toda la estructura se puede obtener mediante la suma de matrices de rigideces de toda y cada una de las barras que forman la estructura.

A continuación presentamos las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento para las siguientes condiciones de apoyo:

- a) Barra con una articulación a la izquierda y un apoyo continuo a la derecha.
- b) Barra con una articulación a la derecha y un apoyo.
- c) Barra con dos apoyos continuos.

Es importante mencionar que para la determinación de los vectores de empotramiento en las vigas de la estructura de cimentación consideramos una carga uniformemente repartida de un extremo hasta la mitad de la barra y otra carga del mismo tipo de la mitad hasta el otro extremo de la barra.

Para la convención de signos utilizaremos el siguiente cuadro:

SENTIDO	GIRO	DESPLAZAMIENTOS	MOMENTO	FUERZA CONSTANTE
Horario	Negativo		Positivo	
Antihorario	Positivo		Negativo	
Arriba		Negativo		Positivo
Abajo		Positivo		Negativo
Izquierda		Positivo		Negativo
Derecha		Negativo		Positivo

A) Barra con una articulación a la izquierda y un apoyo continuo a la derecha.

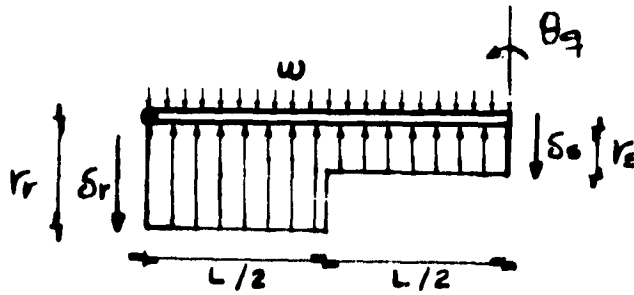


Figura 6.15

La matriz de rigidez está dada por:

$$K_m = \begin{bmatrix} 3EI/L & -3EI/L^2 & 3EI/L^2 \\ -3EI/L^2 & 3EI/L^3 & -3EI/L^3 \\ 3EI/L^2 & -3EI/L^3 & 3EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix}$$

El vector de cargas de empotramiento vale:

$$P_m^e = \begin{Bmatrix} -wL^2/8 + (7/128)L^2 r_r + (9/128)L^2 r_s \\ -3wL/8 + (41/128)L r_r + (7/128)L r_s \\ -5wL/8 + (23/128)L r_r + (57/128)L r_s \end{Bmatrix}$$

B) Barra con una articulación a la derecha y un apoyo continuo a la izquierda.

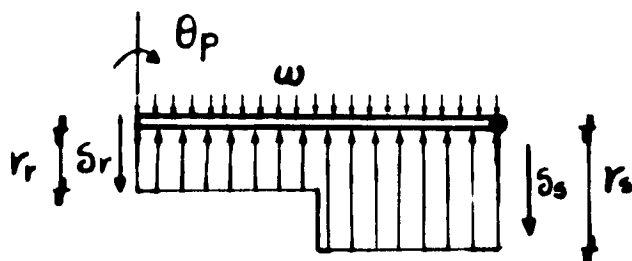


Figura 6.16

La matriz de rigidez está dada por:

$$K_m = \begin{bmatrix} \theta_p & \delta_r & \delta_s \\ 3EI/L & -3EI/L^2 & 3EI/L^2 \\ -3EI/L^2 & 3EI/L^3 & -3EI/L^3 \\ 3EI/L^2 & -3EI/L^3 & 3EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix}$$

El vector de cargas de empotramiento vale:

$$P_m^e = \begin{bmatrix} -wL^2/8 - (9/128)L^2 r_r - (7/128)L^2 r_s \\ -5wL/8 + (57/128)L r_r + (23/128)L r_s \\ -3wL/8 + (7/128)L r_r + (41/128)L r_s \end{bmatrix}$$

C) Barra con dos apoyos continuos.

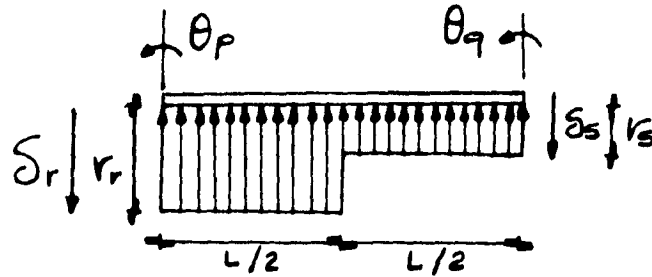


Figura 6.17

La matriz de rigidez está dada por:

$$\underline{K}_m = \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix}$$

El vector de cargas de empotramiento vale:

$$\underline{P}_m^e = \begin{bmatrix} wL^2/12 - (11/192)L^2r_r - (5/192)L^2r_s \\ -wL^2/12 + (5/192)L^2r_r + (11/192)L^2r_s \\ -wL/2 + (13/32)Lr_r + (3/32)Lr_s \\ -wL/2 + (3/32)Lr_r + (13/32)Lr_s \end{bmatrix}$$

Como indicamos antes, la matriz de rigideces de toda la estructura es la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras de la estructura. El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura se obtiene sumando los vectores de

cargas de empotramiento de todas las barras que componen a la estructura. El vector de cargas concentradas se determina asignando a cada grado de libertad la carga concentrada que actúa sobre él.

VI.2. DEFORMACIONES DEL TERRENO DE CIMENTACION.

En este inciso se consideran las cargas que transmite la estructura sobre el terreno de apoyo, las cuales son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura, por la tercera ley de Newton. En función de dichas cargas se calcularán los asentamientos del terreno de cimentación.

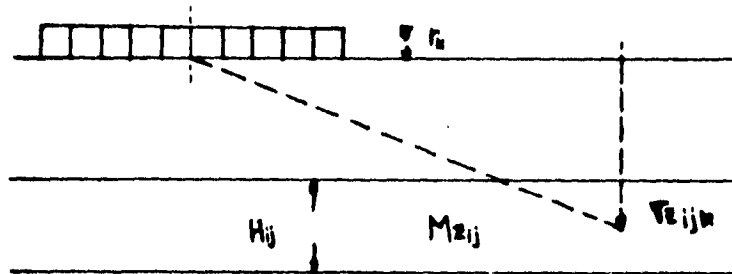


Figura 6.18

Considerando una reacción r_k actuando en la superficie (figura 6.18); la presión vertical vale:

$$\frac{r_k l_k}{a_k}$$

donde:

l_k , es la longitud en la que actúa la carga.

a_k , es el área en la que actúa la carga.

La deformación del estrato de espesor H_{ij} , debida a la carga r_k vale:

$$\delta_{ijk} = Mz_{ij} H_{ij} \sigma_{z_{ijk}}$$

Pero:

$$\sigma_{z_{ijk}} = I_{ijk} r_k \frac{l_k}{a_k}$$

donde:

I_{ijk} , es el valor de influencia, el cual está dado por el esfuerzo normal vertical en el punto ij , producido por una presión unitaria actuando en el área a_k .

Mz_{ij} , es el módulo lineal de deformación, el cual se define como el cociente de la deformación vertical del estrato, entre el esfuerzo normal vertical que la ocasiona.

En consecuencia

$$\delta_{ijk} = Mz_{ij} H_{ij} I_{ijk} r_k \frac{l_k}{a_k}$$

La deformación del estrato, debida a todas las cargas vale:

$$\delta_U = Mz_U H_U \sum_{j=1}^{n_r} I_{Uk} r_k \frac{l_k}{a_k}$$

donde:

n_r , es el número total de cargas r_k .

El asentamiento bajo el punto i vale:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n_e} Mz_{Uj} H_{Uj} \sum_{k=1}^{n_r} I_{Ujk} r_k \frac{l_k}{a_k} \quad 6.2$$

donde:

n_e , es el número total de estratos.

En la ecuación anterior los hundimientos del terreno quedan en función de las cargas r_k .

VI.3 COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES.

En esta etapa se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo de cimentación, lo que equivale a considerar que tanto los desplazamientos de la estructura como los del terreno son iguales, es decir, que el suelo no se despega de la estructura.

Analíticamente esto se alcanza sustituyendo los valores dados por la ecuación 6.2 en la ecuación 6.1. Así desaparecen como incógnitas los desplazamientos lineales y quedan únicamente como incógnitas los giros en los nudos y las reacciones del terreno.

En el sistema que queda, el número de ecuaciones es el mismo que el de incógnitas, por lo cual se puede resolver el sistema de ecuaciones y despejar los giros y las reacciones.

Empleando la ecuación 6.2, ya conocidas las reacciones, se pueden determinar también los hundimientos del terreno de apoyo.

VI.4 ELEMENTOS MECANICOS.

Ahora entonces, los elementos mecánicos sobre los diferentes grados de libertad de la estructura se pueden hallar en función de los resultados de la interacción suelo-estructura.

Para ello, emplearemos las expresiones siguientes, que nos proporcionan los elementos mecánicos de barra sobre nudo, que transmite la barra al grado de libertad correspondiente.

A) Barra con una articulación a la izquierda y un apoyo continuo a la derecha. (figura 6.15)

$$M_q = -\frac{wL^2}{8} + \frac{7}{128} L^2 r_r + \frac{9}{128} L^2 r_s + \frac{3EI}{L} \theta_q - \frac{3EI}{L^2} \delta_r + \frac{3EI}{L^2} \delta_s \quad 6.3$$

$$V_r = -\frac{3wL}{8} + \frac{41}{128} L r_r + \frac{7}{128} L r_s - \frac{3EI}{L^2} \theta_q + \frac{3EI}{L^3} \delta_r - \frac{3EI}{L^3} \delta_s \quad 6.4$$

$$V_s = -\frac{5wL}{8} + \frac{23}{128} L r_r + \frac{57}{128} L r_s + \frac{3EI}{L^2} \theta_q - \frac{3EI}{L^3} \delta_r + \frac{3EI}{L^3} \delta_s \quad 6.5$$

B) Barra con una articulación a la derecha y un apoyo continuo a la izquierda. (figura 6.16).

$$M_p = \frac{wL^2}{8} - \frac{9}{128} L^2 r_r - \frac{7}{128} L^2 r_s + \frac{3EI}{L} \theta_p - \frac{3EI}{L^2} \delta_r + \frac{3EI}{L^2} \delta_s, \quad 6.6$$

$$V_r = -\frac{5wL}{8} + \frac{57}{128} L r_r + \frac{23}{128} L r_s - \frac{3EI}{L^2} \theta_p + \frac{3EI}{L^3} \delta_r - \frac{3EI}{L^3} \delta_s, \quad 6.7$$

$$V_s = -\frac{3wL}{8} + \frac{7}{128} L r_r + \frac{41}{128} L r_s + \frac{3EI}{L^2} \theta_p - \frac{3EI}{L^3} \delta_r + \frac{3EI}{L^3} \delta_s, \quad 6.8$$

C) Barra con dos apoyos continuos. (figura 6.17)

$$M_p = \frac{wL^2}{12} - \frac{11}{192} L^2 r_r - \frac{5}{192} L^2 r_s + \frac{4EI}{L} \theta_p + \frac{2EI}{L} \theta_q - \frac{6EI}{L^2} \delta_r + \frac{6EI}{L^2} \delta_s, \quad 6.9$$

$$M_q = -\frac{wL^2}{12} + \frac{5}{192} L^2 r_r + \frac{11}{192} L^2 r_s + \frac{2EI}{L} \theta_p + \frac{4EI}{L} \theta_q - \frac{6EI}{L^2} \delta_r + \frac{6EI}{L^2} \delta_s, \quad 6.10$$

$$V_r = -\frac{wL}{2} + \frac{13}{32} L r_r + \frac{3}{32} L r_s - \frac{6EI}{L^2} \theta_p + \frac{6EI}{L^2} \theta_q + \frac{12EI}{L^3} \delta_r - \frac{12EI}{L^3} \delta_s, \quad 6.11$$

$$V_s = -\frac{wL}{2} + \frac{3}{32} L r_r + \frac{13}{32} L r_s + \frac{6EI}{L^2} \theta_p + \frac{6EI}{L^2} \theta_q - \frac{12EI}{L^3} \delta_r + \frac{12EI}{L^3} \delta_s, \quad 6.12$$

Las ecuaciones quedan de la siguiente manera:

$$M_p = \frac{wL^2}{12} - \frac{4EI}{L} \theta_p + \frac{2EI}{L} \theta_q - \frac{6EI}{L^2} \delta_r + \frac{6EI}{L^2} \delta_s, \quad 6.13$$

$$M_q = -\frac{wL^2}{12} + \frac{2EI}{L} \theta_p + \frac{4EI}{L} \theta_q - \frac{6EI}{L^2} \delta_r + \frac{6EI}{L^2} \delta_s, \quad 6.14$$

$$V_r = -\frac{wL}{2} - \frac{6EI}{L^2} \theta_p - \frac{6EI}{L^2} \theta_q + \frac{12EI}{L^3} \delta_r - \frac{12EI}{L^3} \delta_s \quad 6.15$$

$$V_s = -\frac{wL}{2} + \frac{6EI}{L^2} \theta_p + \frac{6EI}{L^2} \theta_q - \frac{12EI}{L^3} \delta_r + \frac{12EI}{L^3} \delta_s \quad 6.16$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO:

Determine las reacciones, hundimientos y los elementos mecánicos en la siguiente estructura. Se trata de una losa de cimentación de planta cuadrada de 8.6 m de lado (Figura 6.19).

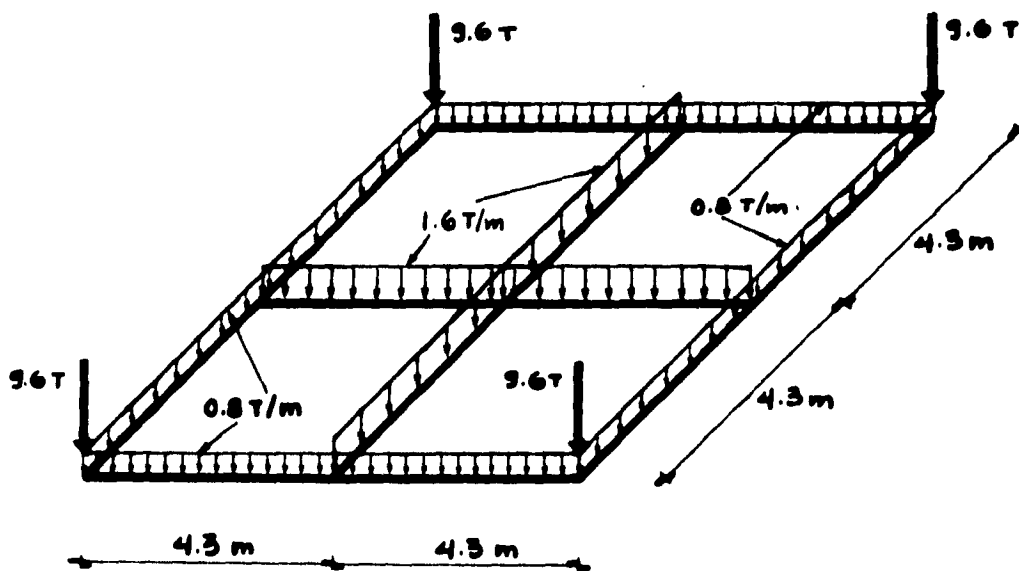
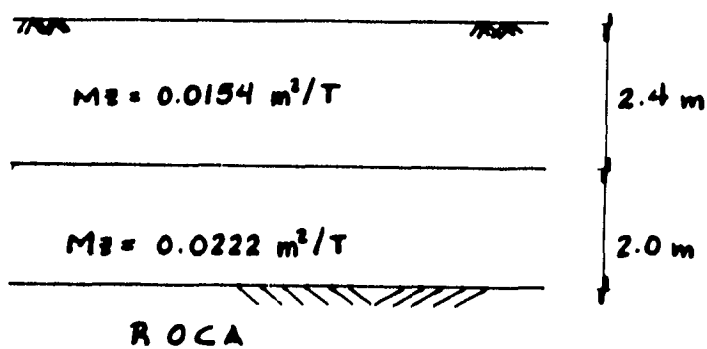


Figura 6.19

Propiedades del suelo en estudio:



Areas para el cálculo de valores de influencia y reacciones:

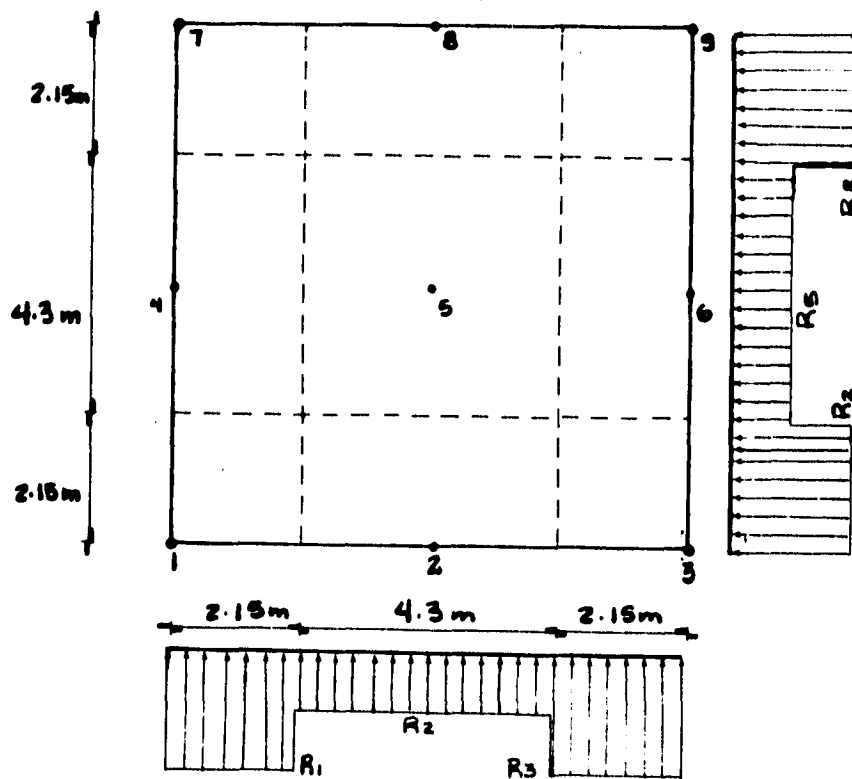


TABLA DE CALCULO DE LOS VALORES DE INFLUENCIA I.

PUNTO	ESTADO	INDICADOR	x	y	z	σ_x (10 ⁻²)	σ_y (10 ⁻²)	σ_z (10 ⁻²)	σ_{xy} (10 ⁻⁴)	σ_{xz} (10 ⁻⁴)	σ_{yz} (10 ⁻⁴)	σ_{xy} (10 ⁻⁴)	σ_{xz} (10 ⁻⁴)	σ_{yz} (10 ⁻⁴)	σ_{xyz} (10 ⁻⁶)	σ_{xy} (10 ⁻⁴)	σ_{xz} (10 ⁻⁴)	σ_{yz} (10 ⁻⁴)	σ_{xyz} (10 ⁻⁶)	
1	1	1	2.15	2.15	1.2	0.271	0.271	0.271												
1	2	1	2.15	2.15	3.4	0.118	0.118	0.118												
1	1	2	6.6	2.15	1.2	0.236	0.236	0.236												
1	2	2	6.6	2.15	3.4	0.158	0.158	0.158												
1	1	1	3.8	2.15	1.2	0.236	0.236	0.236												
1	2	3	3.8	2.15	3.4	0.188	0.188	0.188												
1	1	4	6.6	2.15	1.2	0.236	0.236	0.236												
1	2	4	6.6	2.15	3.4	0.158	0.158	0.158												
1	1	5	6.6	6.6	1.2	0.288	0.288	0.288												
1	2	5	6.6	6.6	3.4	0.238	0.238	0.238												
1	1	6	3.8	6.6	1.2	0.288	0.288	0.288												
1	2	6	3.8	6.6	3.4	0.238	0.238	0.238												
1	1	7	3.8	3.8	1.2	0.288	0.288	0.288												
1	2	7	3.8	3.8	3.4	0.238	0.238	0.238												
1	1	8	3.8	6.6	1.2	0.288	0.288	0.288												
1	2	8	3.8	6.6	3.4	0.238	0.238	0.238												
1	1	9	3.8	3.8	1.2	0.288	0.288	0.288												
1	2	9	3.8	3.8	3.4	0.238	0.238	0.238												
2	1	1	4.3	2.15	1.2	0.271	0.271	0.271												
2	2	1	4.3	2.15	3.4	0.118	0.118	0.118												
2	1	2	2.15	2.15	1.2	0.271	0.271	0.271												
2	2	2	2.15	2.15	3.4	0.118	0.118	0.118												
2	1	3	4.3	2.15	1.2	0.271	0.271	0.271												
2	2	3	4.3	2.15	3.4	0.118	0.118	0.118												
2	1	4	4.3	6.6	1.2	0.284	0.284	0.284												
2	2	4	4.3	6.6	3.4	0.234	0.234	0.234												
2	1	5	2.15	6.6	1.2	0.284	0.284	0.284												
2	2	5	2.15	6.6	3.4	0.234	0.234	0.234												
2	1	6	4.3	6.6	1.2	0.284	0.284	0.284												
2	2	6	4.3	6.6	3.4	0.234	0.234	0.234												
2	1	7	4.3	3.8	1.2	0.284	0.284	0.284												
2	2	7	4.3	3.8	3.4	0.234	0.234	0.234												
2	1	8	4.3	3.8	1.2	0.284	0.284	0.284												
2	2	8	4.3	3.8	3.4	0.234	0.234	0.234												
2	1	9	4.3	3.8	1.2	0.284	0.284	0.284												
2	2	9	4.3	3.8	3.4	0.234	0.234	0.234												

Este ejemplo se resolverá mostrando la metodología que se debe seguir para la resolución del método de interacción suelo-estructura.

1.- Análisis Estructural.

Primeramente numeraremos las barras y los grados de libertad de la estructura, como se indica en la figura 6.20

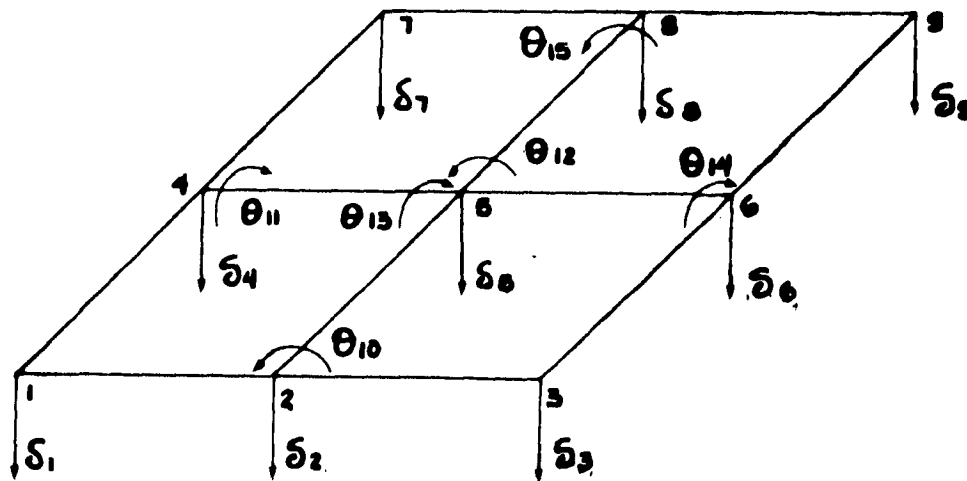


Figura 6.20

Barra	θ_p	θ_q	δ_r	δ_s
1	-	θ_{10}	δ_1	δ_2
2	-	θ_{12}	δ_4	δ_5
3	-	θ_{15}	δ_7	δ_8
4	-	θ_{11}	δ_7	δ_4
5	-	θ_{13}	δ_8	δ_5
6	-	θ_{14}	δ_9	δ_6
7	θ_{10}	-	δ_2	δ_3
8	θ_{12}	-	δ_5	δ_6
9	θ_{15}	-	δ_8	δ_9
10	θ_{11}	-	δ_4	δ_1
11	θ_{13}	-	δ_5	δ_2
12	θ_{14}	-	δ_6	δ_3

1.1.- Matrices de Rigideces de cada una de las barras.

Barra 1

$$K_1 = \begin{bmatrix} & \theta_{10} & & & \\ & & \delta_1 & & \\ & & & \delta_2 & \\ 1786.898 & -415.558 & & & \\ -415.558 & & 96.641 & & \\ 415.558 & & -96.641 & & 96.641 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{10} \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

Barra 2

$$K_2 = \begin{bmatrix} & \theta_{12} & & & \\ & & \delta_4 & & \\ & & & \delta_5 & \\ 400.397 & -93.116 & & & \\ -93.116 & & 21.655 & & \\ 93.116 & & -21.655 & & 21.655 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{12} \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{matrix}$$

Barra 3

$$K_3 = \begin{bmatrix} & \theta_{15} & & & \\ & & \delta_7 & & \\ & & & \delta_8 & \\ 1786.898 & -415.558 & & & \\ -415.558 & & 96.641 & & \\ 415.558 & & -96.641 & & 96.641 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{15} \\ \delta_7 \\ \delta_8 \end{matrix}$$

Barra 4

$$\underline{K}_4 = \begin{matrix} & \theta_{11} & \delta_7 & \delta_4 & \\ \begin{bmatrix} 1786.898 & -415.558 & 415.558 \\ -415.558 & 96.641 & -96.641 \\ 415.558 & -96.641 & 96.641 \end{bmatrix} & \theta_{11} \\ & \delta_7 \\ & \delta_4 \end{matrix}$$

Barra 5

$$\underline{K}_5 = \begin{matrix} & \theta_{13} & \delta_1 & \delta_5 & \\ \begin{bmatrix} 400.397 & -93.116 & 93.116 \\ -93.116 & 21.655 & -21.655 \\ 93.116 & -21.655 & 21.655 \end{bmatrix} & \theta_{13} \\ & \delta_1 \\ & \delta_5 \end{matrix}$$

Barra 6

$$\underline{K}_6 = \begin{matrix} & \theta_{14} & \delta_9 & \delta_6 & \\ \begin{bmatrix} 1786.898 & -415.558 & 415.558 \\ -415.558 & 96.641 & -96.641 \\ 415.558 & -96.641 & 96.641 \end{bmatrix} & \theta_{14} \\ & \delta_9 \\ & \delta_6 \end{matrix}$$

Barra 7

$$\underline{K}_7 = \begin{matrix} & \theta_{10} & \delta_2 & \delta_3 & \\ \begin{bmatrix} 1786.898 & -415.558 & 415.558 \\ -415.558 & 96.641 & -96.641 \\ 415.558 & -96.641 & 96.641 \end{bmatrix} & \theta_{10} \\ & \delta_2 \\ & \delta_3 \end{matrix}$$

Barra 8

$$\underline{K}_8 = \begin{matrix} & \theta_{12} & \delta_5 & \delta_6 & \\ \begin{bmatrix} 400.397 & -93.116 & 93.116 \\ -93.116 & 21.655 & -21.655 \\ 93.116 & -21.655 & 21.655 \end{bmatrix} & \theta_{12} \\ & \delta_5 \\ & \delta_6 \end{matrix}$$

Barra 9

$$\underline{K}_9 = \begin{matrix} & \theta_{15} & \delta_8 & \delta_9 & \\ \begin{bmatrix} 1786.898 & -415.558 & 415.558 \\ -415.558 & 96.641 & -96.641 \\ 415.558 & -96.641 & 96.641 \end{bmatrix} & \theta_{15} \\ & \delta_8 \\ & \delta_9 \end{matrix}$$

Barra 10

$$\underline{K}_{10} = \begin{matrix} & \theta_{11} & \delta_4 & \delta_1 \\ \begin{bmatrix} 1786.898 & -415.558 & 415.558 \\ -415.558 & 96.641 & -96.641 \\ 415.558 & -96.641 & 96.641 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \theta_{11} \\ \delta_4 \\ \delta_1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 11

$$\underline{K}_{11} = \begin{matrix} & \theta_{13} & \delta_5 & \delta_2 \\ \begin{bmatrix} 400.397 & -93.116 & 93.116 \\ -93.116 & 21.655 & -21.655 \\ 93.116 & -21.655 & 21.655 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \theta_{13} \\ \delta_5 \\ \delta_2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 12

$$\underline{K}_{12} = \begin{matrix} & \theta_{14} & \delta_6 & \delta_3 \\ \begin{bmatrix} 1786.898 & -415.558 & 415.558 \\ -415.558 & 96.641 & -96.641 \\ 415.558 & -96.641 & 96.641 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \theta_{14} \\ \delta_6 \\ \delta_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

1.2.- Matriz de rigidez de toda la estructura.

La matriz de rigidez de toda la estructura queda de la siguiente forma:

M A T R I Z D E R I G I D E C E S.

i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7	i_8	i_9	i_{10}
193.202	-96.641	0	-96.641	0	0	0	0	0	0
-96.641	214.937	-96.641	0	-21.655	0	0	0	0	0
0	-96.641	193.202	0	0	-96.641	0	0	0	0
-96.641	0	0	214.937	-21.655	0	-96.641	0	0	0
0	-21.655	0	-21.655	86.62	-21.655	0	-21.655	0	0
0	0	-96.641	0	-21.655	214.937	0	0	-96.641	0
0	0	0	-96.641	0	0	193.202	-96.641	0	0
0	0	0	0	-21.655	0	-96.641	214.937	-96.641	0
0	0	0	0	0	-96.641	0	-96.641	193.202	0

1.3.- Vectores de cargas de Empotramiento de cada una de las barras.

Barra 1

$$\underline{P}_1^e = \begin{Bmatrix} -1.849 + 1.0112r_1 + 1.3r_2 \\ -1.29 + 1.3773r_1 + 0.2352r_2 \\ -2.15 + 0.7727r_1 + 1.9148r_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_{10} \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

Barra 2

$$\underline{P}_2^e = \begin{Bmatrix} -3.698 + 1.0112r_4 + 1.3r_5 \\ -2.58 + 1.3773r_4 + 0.2352r_5 \\ -4.30 + 0.7727r_4 + 1.9148r_5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_{12} \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{matrix}$$

Barra 3

$$\underline{P}_3^e = \begin{Bmatrix} -1.849 + 1.0112r_7 + 1.3r_8 \\ -1.29 + 1.3773r_7 + 0.2352r_8 \\ -2.15 + 0.7727r_7 + 1.9148r_8 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_{15} \\ \delta_7 \\ \delta_8 \end{matrix}$$

Barra 4

$$\underline{P}_4^e = \begin{Bmatrix} -1.849 + 1.0112r_7 + 1.3r_4 \\ -1.29 + 1.3773r_7 + 0.2352r_4 \\ -2.15 + 0.7727r_7 + 1.9148r_4 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_{11} \\ \delta_7 \\ \delta_4 \end{matrix}$$

Barra 5

$$\underline{P}_5^e = \begin{Bmatrix} -3.698 + 1.0112r_8 + 1.3r_5 \\ -2.58 + 1.3773r_8 + 0.2352r_5 \\ -4.30 + 0.7727r_8 + 1.9148r_5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_{13} \\ \delta_8 \\ \delta_5 \end{matrix}$$

Barra 6

$$\underline{P}_6^e = \begin{Bmatrix} -1.849 + 1.0112r_9 + 1.3r_4 \\ -1.29 + 1.3773r_9 + 0.2352r_4 \\ -2.15 + 0.7727r_9 + 1.9148r_4 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_{14} \\ \delta_9 \\ \delta_4 \end{matrix}$$

Barra 7

$$\underline{P}_7^e = \begin{Bmatrix} 1.849 - 1.3r_2 - 1.0112r_3 \\ -2.15 + 1.9148r_2 + 0.7727r_3 \\ -1.29 + 0.2352r_2 + 1.3773r_3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_{10} \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

Barra 8

$$\underline{P}_8^e = \begin{Bmatrix} 3.698 - 1.3r_3 - 1.0112r_6 \\ -4.30 + 1.9148r_3 + 0.7727r_6 \\ -2.58 + 0.2352r_3 + 1.3773r_6 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_{12} \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{matrix}$$

Barra 9

$$\underline{P}_9^e = \begin{Bmatrix} 1.849 - 1.3r_4 - 1.0112r_9 \\ -2.15 + 1.9148r_4 + 0.7727r_9 \\ -1.29 + 0.2352r_4 + 1.3773r_9 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_{15} \\ \delta_4 \\ \delta_9 \end{matrix}$$

Barra 10

$$\underline{P}_{10}^e = \begin{Bmatrix} 1.849 - 1.3r_4 - 1.0112r_1 \\ -2.15 + 1.9148r_4 + 0.7727r_1 \\ -1.29 + 0.2352r_4 + 1.3773r_1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_{11} \\ \delta_4 \\ \delta_1 \end{matrix}$$

Barra 11

$$\underline{P}_{11}^e = \begin{Bmatrix} 3.698 - 1.3r_3 - 1.0112r_2 \\ -4.30 + 1.9148r_3 + 0.7727r_2 \\ -2.58 + 0.2352r_3 + 1.3773r_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_{13} \\ \delta_5 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

Barra 12

$$\underline{P}_{12}^e = \begin{Bmatrix} 1.849 - 1.3r_6 - 1.0112r_3 \\ -2.15 + 1.9148r_6 + 0.7727r_3 \\ -1.29 + 0.2352r_6 + 1.3773r_3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_{14} \\ \delta_6 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

1.4.- Vector de cargas de Empotramiento de toda la estructura.

Tomando en cuenta la simetría que hay en la estructura.

$$r_1 = r_3 = r_7 = r_9$$

$$r_2 = r_4 = r_6 = r_8$$

por lo tanto

$$\underline{P}_m^e = \left\{ \begin{array}{l} -2.58 + 2.7546r_1 + 0.2352r_2 + 0.2352r_4 \\ -6.88 + 0.7727r_1 + 5.2069r_2 + 0.7727r_3 + 0.2352r_5 \\ -2.58 + 0.2352r_2 + 2.7546r_3 + 0.2352r_6 \\ -6.88 + 0.7727r_1 + 5.2069r_4 + 0.2352r_5 + 0.7727r_7 \\ -17.2 + 0.7727r_2 + 0.7727r_4 + 7.66r_5 + 0.7727r_6 + 0.7727r_8 \\ -6.88 + 0.7727r_3 + 0.2352r_5 + 5.2069r_6 + 0.7727r_9 \\ -2.58 + 0.2352r_4 + 2.7546r_7 + 0.2352r_8 \\ -6.88 + 0.2352r_5 + 0.7727r_7 + 5.2069r_8 + 0.7727r_9 \\ -2.58 + 0.2352r_6 + 0.2352r_8 + 2.7546r_9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

1.5.- Vector de cargas concentradas.

$$\underline{P}_c = \left\{ \begin{array}{l} -9.6 \\ 0 \\ -9.6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -9.6 \\ 0 \\ -9.6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

1.6.- Sustituyendo valores en la ecuación (6.1), y tomando en cuenta que por simetría:

$$\delta_1 = \delta_3 = \delta_7 = \delta_9$$

$$\delta_2 = \delta_4 = \delta_6 = \delta_8$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que representan el equilibrio de cortantes o de momentos en el grado de libertad correspondiente:

GRADO DE LIBERTAD 1

$$193.282\delta_1 - 193.282\delta_2 + 2.7546r_1 + 0.4704r_2 - 2.58 - 9.6 = 0 \quad 6.23$$

GRADO DE LIBERTAD 2

$$-193.282\delta_1 + 214.937\delta_2 - 21.655\delta_3 + 1.5454r_1 + 5.2069r_2 + 0.2352r_3 - 6.88 = 06.24$$

GRADO DE LIBERTAD 5

$$-86.62\delta_2 + 86.62\delta_3 + 3.0896r_2 + 7.6592r_3 - 17.20 = 0 \quad 6.25$$

2.- Análisis de deformaciones del terreno de cimentación.

Recordando la siguiente ecuación:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n_c} Mz_j H_j \sum_{k=1}^{n_r} I_{jk} r_k \frac{l_k}{a_k}$$

y haciendo $i = 1$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \delta_1 = Mz_1 (H_1) & \left(\frac{I_{111}r_1l_1}{a_1} + \frac{I_{112}r_2l_2}{a_2} + \dots + \frac{I_{119}r_9l_9}{a_9} \right) \\ & + \left(\frac{I_{121}r_1l_1}{a_1} + \frac{I_{122}r_2l_2}{a_2} + \dots + \frac{I_{129}r_9l_9}{a_9} \right) \end{aligned} \quad 6.26$$

Sustituyendo valores en la ecuación 6.26

$$\delta_1 = 0.0154 (2.4) \left(\frac{0.2271(4.3)r_1}{4.6225} + \frac{0.009375(6.45)r_2}{9.245} + \frac{0.0001528(4.3)r_3}{4.6225} \right)$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{0.009375(6.45)r_4}{9.245} + \frac{0.002988(8.60)r_5}{18.49} + \frac{0.0001625(6.45)r_6}{9.245} \\
& + \frac{0.0001528(4.3)r_7}{4.6225} + \frac{0.0001625(6.45)r_8}{9.245} + \frac{0.00002823(4.3)r_9}{4.6225} \\
& + 0.0222 (2) \left(-\frac{0.1139(4.3)r_1}{4.6225} + \frac{0.0441(6.45)r_2}{9.245} + \frac{0.002283(4.3)r_3}{4.6225} \right. \\
& + \frac{0.04406(6.45)r_4}{9.245} + \frac{0.02802(8.60)r_5}{18.49} + \frac{0.002638(6.45)r_6}{9.245} \\
& \left. + \frac{0.002283(4.3)r_7}{4.6225} + \frac{0.002638(6.45)r_8}{9.245} + \frac{0.0005157(4.3)r_9}{4.6225} \right)
\end{aligned}$$

En forma análoga se obtienen δ_2 y δ_3 .

$$\delta_1 = 0.012733r_1 + 0.0033854r_2 + 0.00063012r_3 \quad 6.27$$

$$\delta_2 = 0.0036877r_1 + 0.020326r_2 + 0.0021424r_3 \quad 6.28$$

$$\delta_3 = 0.0028714r_1 + 0.010629r_2 + 0.025023r_3 \quad 6.29$$

3.- Compatibilidad de deformaciones.

La compatibilidad de deformaciones entre la estructura y el terreno de cimentación se logra sustituyendo las ecuaciones 6.27, 6.28 y 6.29 en las ecuaciones 6.23, 6.24, y 6.25; así, se obtiene lo siguiente:

GRADO DE LIBERTAD 1.

$$\begin{aligned}
& 193.282(0.012733r_1 + 0.0033854r_2 + 0.00063012r_3) \\
& - 193.282 (0.0036877r_1 + 0.020326r_2 + 0.0021424r_3) \\
& + 2.7546r_1 + 0.4704r_2 - 2.58 - 9.6 = 0
\end{aligned}$$

simplificando, tenemos:

$$4.5029 r_1 - 2.8039 r_2 - 0.2923 r_3 = 12.18 \quad 6.30$$

GRADO DE LIBERTAD 2.

$$\begin{aligned} & -193.282(0.0036877r_1 + 0.020326r_2 + 0.0021424r_3) \\ & + 214.937(0.0036877r_1 + 0.020326r_2 + 0.0021424r_3) \\ & - 21.655(0.0028714r_1 + 0.010629r_2 + 0.025023r_3) \\ & + 1.5454r_1 + 5.2066r_2 + 0.2352r_3 - 6.88 = 0 \end{aligned}$$

simplificando, tenemos:

$$0.1852 r_1 + 8.6912 r_2 + 0.03202 r_3 = 6.88 \quad 6.31$$

GRADO DE LIBERTAD 5.

$$\begin{aligned} & - 86.62(0.0036877r_1 + 0.020326r_2 + 0.0021424r_3) \\ & + 86.62(0.0028714r_1 + 0.010629r_2 + 0.025023r_3) \\ & + 3.092r_2 - 7.66r_3 - 17.2 = 0 \end{aligned}$$

simplificando, tenemos:

$$-0.07071 r_1 + 2.2496 r_2 + 9.6411 r_3 = 17.2 \quad 6.32$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones

$$r_1 = 3.3430 \text{ t/m}$$

$$r_2 = 0.8569 \text{ t/m}$$

$$r_3 = 1.6090 \text{ t/m}$$

Cabe aclarar que los valores de θ_{10} , θ_{11} , θ_{12} , θ_{13} , θ_{14} y θ_{15} valen 0 por simetría en la estructura.

Sustituyendo los datos en las ecuaciones 6.30 , 6.31 y 6.32, tenemos:

$$\delta_1 = 0.04650 \text{ m}$$

$$\delta_2 = 0.03320 \text{ m}$$

$$\delta_3 = 0.05900 \text{ m}$$

4.- Elementos mecánicos.

Sustituyendo los valores obtenidos en las ecuaciones 6.5 a 6.8 se obtienen los elementos mecánicos sobre las barras de la estructura. A continuación se presentan los resultados de la aplicación de estas expresiones para las barras 1, 2, 7, 8.

Barra 1 = Barra 3 = Barra 4 = Barra 6. Sustituyendo en las ecs. 6.3 a 6.5:

$$M_{21} = -2.8815 \text{ T-m}$$

$$V_2 = 0.7885 \text{ T.}$$

$$V_1 = 4.8001 \text{ T.}$$

Barra 7 = Barra 9 = Barra 10 = Barra 12. Sustituyendo en las ecs. 6.6 a 6.8:

$$M_{23} = 2.8815 \text{ T-m}$$

$$V_3 = 4.8001 \text{ T.}$$

$$V_2 = 0.7885 \text{ T.}$$

Barra 2 = Barra 5. Sustituyendo en las ecs. 6.3 a 6.5:

$$M_{34} = 1.6574 \text{ T-m}$$

$$V_4 = -1.5790 \text{ T.}$$

$$V_5 = 0.0000 \text{ T.}$$

Barra 8 = Barra 11. Sustituyendo en las ecs. 6.6 a 6.8:

$$M_{34} = -1.6574 \text{ T-m.}$$

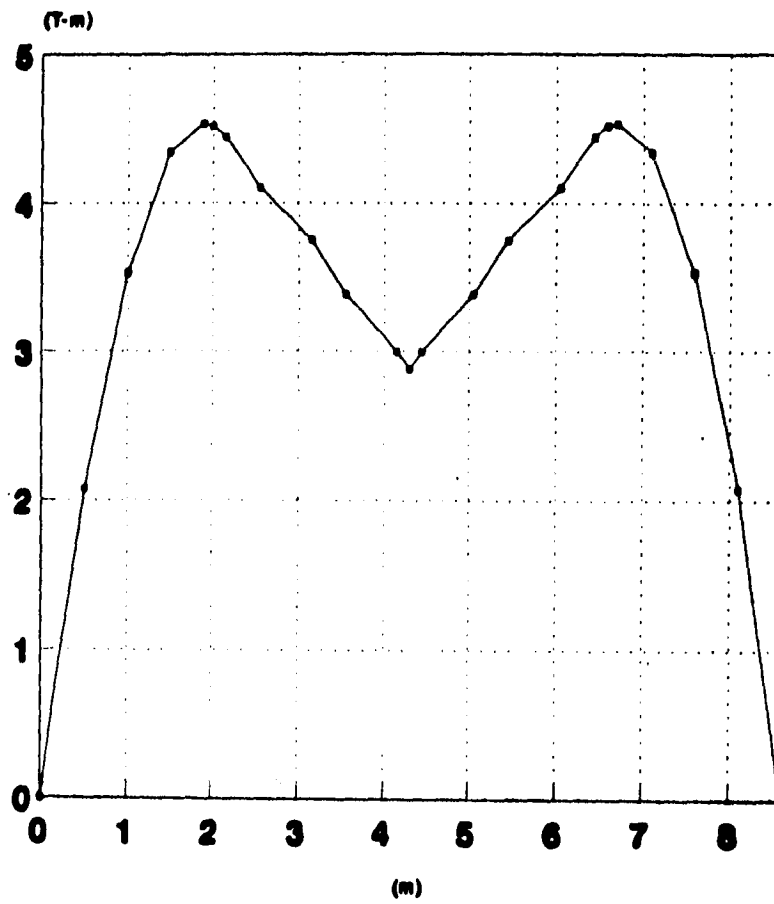
$$V_5 = 0.0000 \text{ T.}$$

$$V_4 = -1.5790 \text{ T.}$$

A continuación se muestran los diagramas de momento flexionante y fuerza cortante de la barra 1-3, tomando en cuenta que se cambian los signos de los valores obtenidos, ya que estos son elementos mecánicos de barra sobre apoyo y en los diagramas se utilizan los elementos mecánicos de apoyo sobre barra.

NOTA: Es importante mencionar que cuando el Momento flexionante provoque compresión en las fibras superiores de la viga el signo del mismo será positivo.

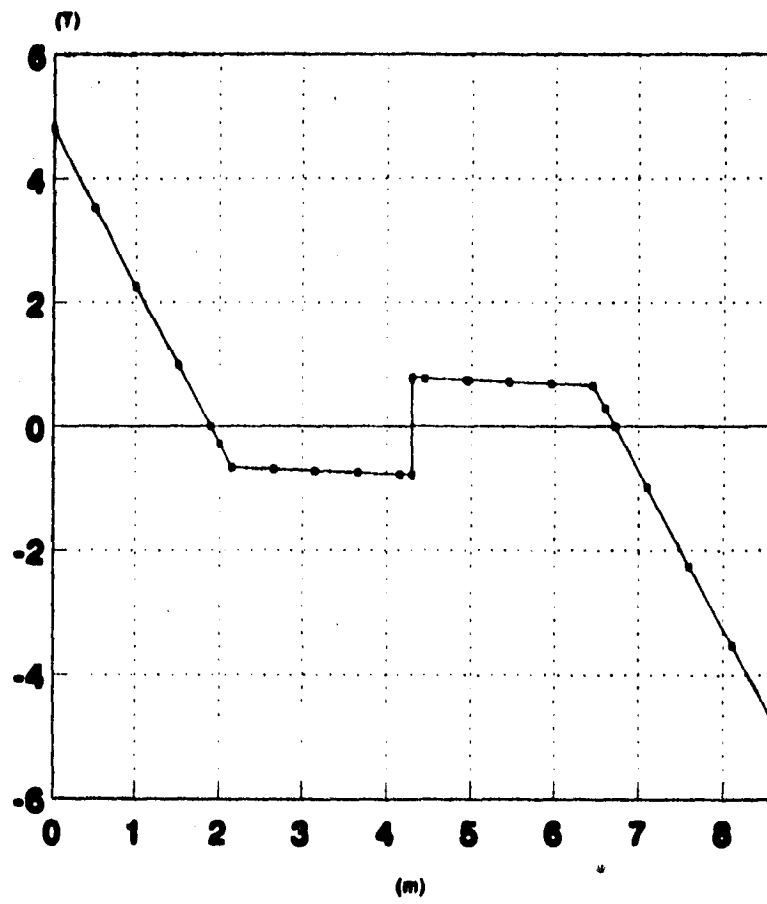
**Diagrama de Momento Flexionante viga 1-3
debido a la interac. suelo-estructura.**



→ **Momento flexionante**

Figura 6.21

**Diagrama de Fuerza Cortante viga 1-3
debido a la Interac. suelo-estructura.**



→ Fuerza Cortante

Figura 6.22

A continuación se obtienen los valores del momento flexionante y fuerza cortante sin tomar en cuenta interacción suelo-estructura de la barra 1-3 con sus respectivos diagramas .

Barra 1 = Barra 3 = Barra 4 = Barra 6.

$$M_{21} = 1.849 \text{ T-m.}$$

$$V_{21} = 2.15 \text{ T.}$$

$$V_1 = 1.29 \text{ T.}$$

Barra 7 = Barra 9 = Barra 10 = Barra 12.

$$M_{23} = - 1.849 \text{ T-m.}$$

$$V_3 = 1.29 \text{ T.}$$

$$V_{23} = 2.15 \text{ T.}$$

Barra 2 = Barra 5.

$$M_{34} = 3.698 \text{ T-m.}$$

$$V_4 = 2.58 \text{ T.}$$

$$V_{34} = 4.30 \text{ T.}$$

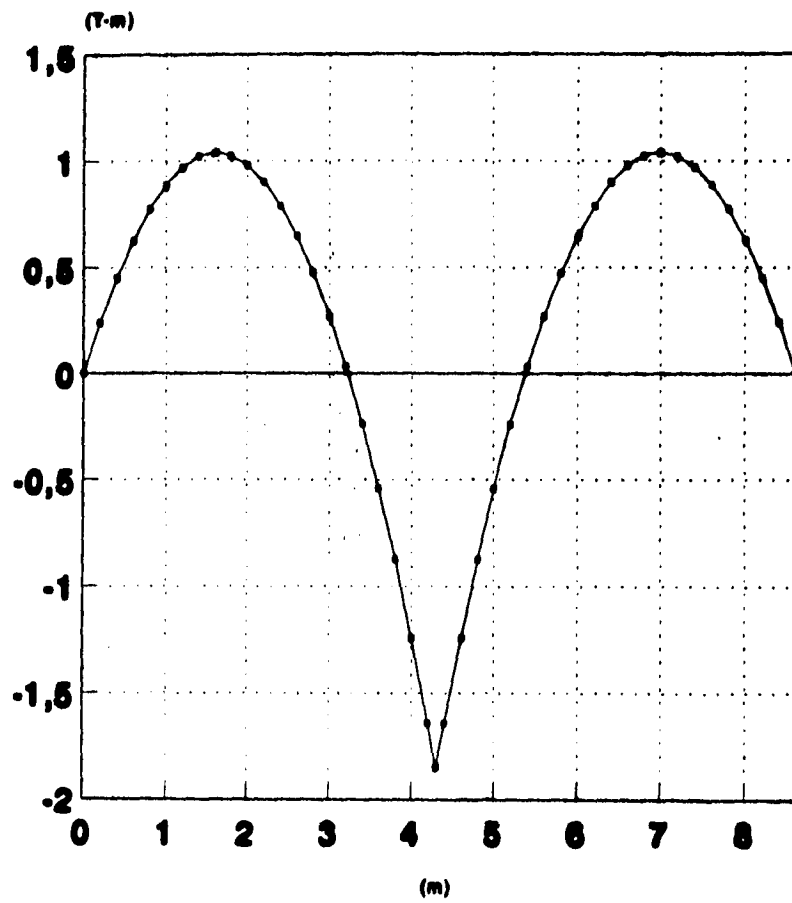
Barra 8 = Barra 11.

$$M_{8s} = - 3.698 \text{ T-m.}$$

$$V_{8s} = 4.58 \text{ T.}$$

$$V_{8e} = 2.58 \text{ T.}$$

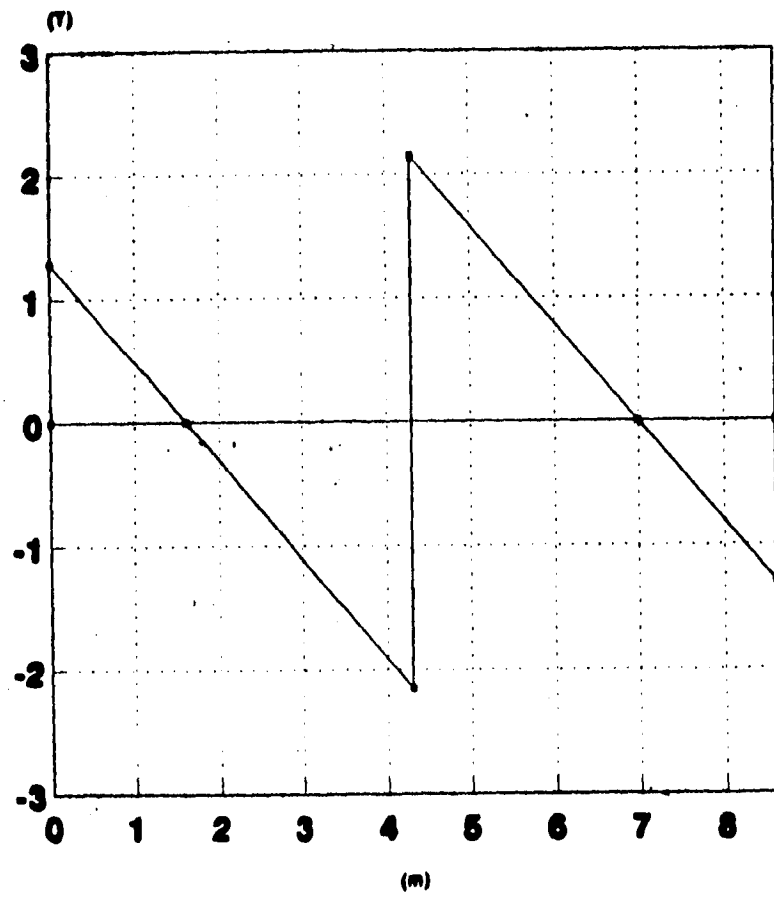
Diagrama de Momento Flexionante viga 1-3



→ Momento flexionante

Figura 6.23

Diagrama de Fuerza Cortante viga 1-3



→ **Fuerza Cortante**

Figura 6.24

CAPITULO VII

CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado las ecuaciones constitutivas para el cálculo de deformaciones instantáneas en suelos granulares y cohesivos, y el método de interacción suelo-estructura propuestos por el M. en I. Agustín Demeneghi Collna, así como la teoría de consolidación secundaria del Dr. Leonardo Zeevaert. De lo anterior se puede concluir lo siguiente:

- 1. Existen varias teorías para el cálculo de los esfuerzos que actúan en la masa de suelo, la utilización de cada una de ellas depende del tipo de problema que se presente. Por ejemplo, la teoría de Westergaard es válida cuando el suelo contiene laminaciones de material más grueso que acentúe grandemente la condición no isotrópica. La teoría de Boussinesq, por el contrario, asume que el medio es homogéneo y semi-infinito. La teoría de Fröhlich es la más general, en la cual variando un coeficiente en su fórmula se toman en cuenta diferentes estratificaciones.**
- 2. El estado de esfuerzo inicial, en una masa de suelo, provoca una presión de confinamiento inicial, la cual va aumentando a medida que se incrementa la**

presión vertical, provocando una disminución de la deformación del suelo; esto quiere decir que al aumentar la presión de confinamiento en la masa de suelo, ésta adquiere mayor rigidez.

3. En los suelos cohesivos se presentan asentamientos a largo plazo, que hay que tomar en cuenta para la determinación de asentamientos totales, estas deformaciones diferidas se deben a dos fenómenos, la consolidación primaria y consolidación secundaria. Para encontrar las ecuaciones de consolidación, Terzaghi y Zeevaert simularon el comportamiento del suelo con modelos reológicos; esto demuestra la gran ayuda de estos últimos en el desarrollo de la mecánica de suelos.
4. Es importante mencionar que las teorías de consolidación asumen la condición de que el material es homogéneo y saturado, ya que es la condición más crítica. En suelos no saturados la compresión elasto-plástica se lleva a cabo al mismo tiempo en el que se está aplicando la carga.
5. Los métodos de ajuste y determinación de parámetros de las curvas de consolidación permiten tener una evaluación correcta de los asentamientos en cualquier tiempo debido a un incremento de presión dado.
6. Generalmente en el cálculo de asentamientos se considera la carga flexible uniformemente distribuida en toda el área, sin embargo, en la interfase suelo-cimentación, la carga no puede considerarse flexible debido a la rigidez de la cimentación y se presenta una distribución no uniforme de las reacciones.

Esta distribución de presiones de contacto es función de la rigidez del suelo y de la cimentación, para lo cual debe establecerse la compatibilidad de deformaciones entre subestructura y subsuelo.

7. Los métodos de interacción suelo-estructura pueden tomar en cuenta

deformaciones instantáneas y diferidas; en el método expuesto en este trabajo se utilizó la siguiente ecuación para el cálculo de deformaciones

$$\delta = M_s H \sigma_s = M_s H \frac{I r l}{a}$$

en donde:

El parámetro M_s es un módulo de deformabilidad del suelos; éste varía si la deformación es instantánea o diferida.

I , es el valor de influencia de la carga unitaria en el punto donde se mide la deformación; éste varía según las teorías (Boussinesq, Westergard, Fröhlich, etc.)

l y a , son propiedades geométricas de la carga.

H , es la profundidad del punto.

r , es el valor de la reacción; ésta se maneja como incógnita.

Una de las ventajas de la ecuación anterior es que las deformaciones quedan en función de las reacciones del terreno.

8. Con el método de interacción suelo-estructura obtenemos los valores de los momentos flexionantes y fuerzas cortantes de los elementos, que la mayoría de las veces son diferentes a los obtenidos por un método de análisis tradicional. Por ejemplo:

Cuando los momentos flexionantes y fuerzas cortantes calculados por un método de análisis tradicional son mayores a los obtenidos con la técnica de

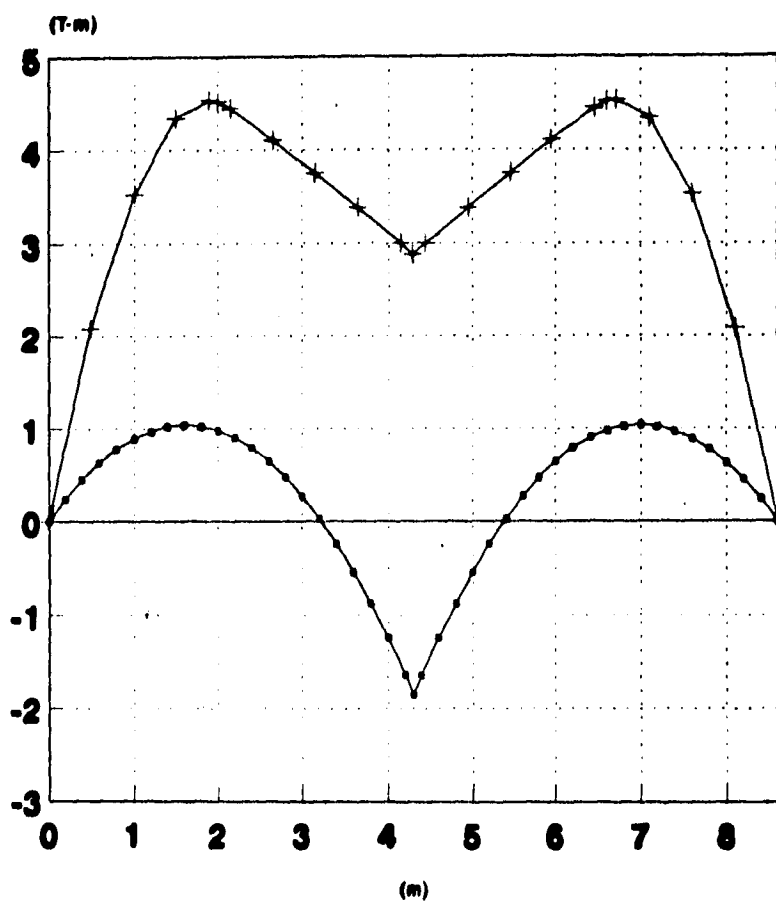
interacción suelo-estructura, la diferencia es favorable en el sentido de la seguridad, pero puede ser desfavorable en el sentido de lo económico.

Otra situación desfavorable sería que los valores tengan signos contrarios, esto haría que el diseño del elemento fuera totalmente erróneo, puesto que el acero se colocaría en el lugar equivocado. Este caso se muestra en los diagramas de momento flexionante y fuerza cortante del ejemplo ilustrativo de interacción suelo-estructura del capítulo VI. El diagrama de momento flexionante obtenido sin interacción suelo-estructura, nos muestra que existen momentos negativos, al contrario de lo obtenido utilizando interacción, puesto que en éste todos los momentos son positivos. Una situación muy parecida muestran los diagramas de fuerza cortante, en algunos puntos es más grande una que otra, por lo tanto, habrá disparidad en los diagramas.

Para ilustrar lo anterior, más adelante se muestran las superposiciones de los diagramas de dicho ejemplo.

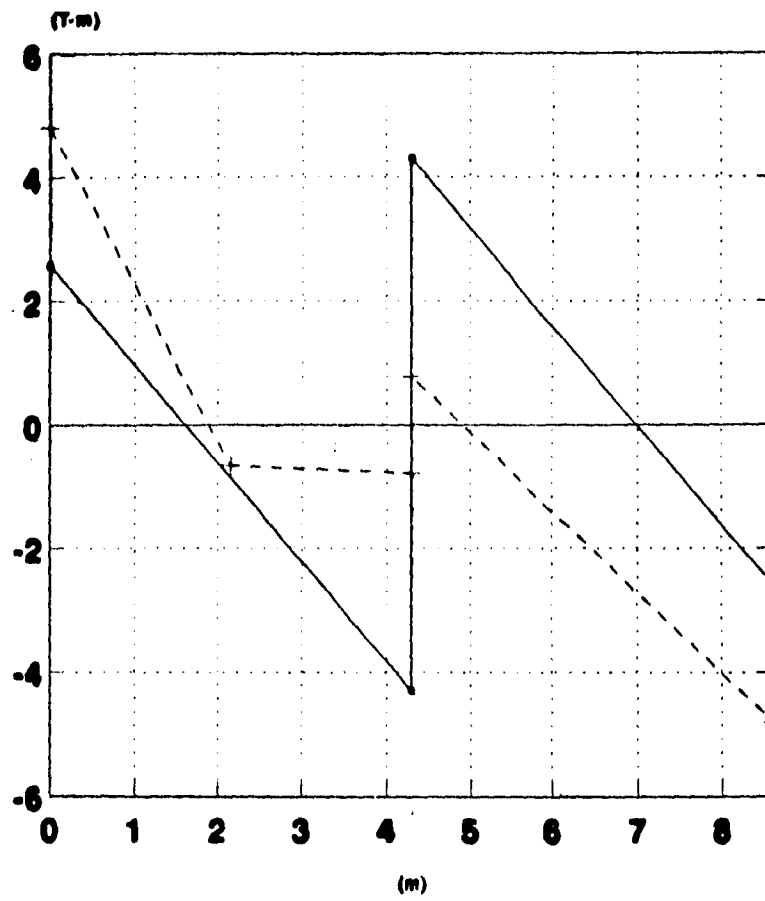
Finalmente se puede concluir que con los elementos de Mecánica de Materiales, Mecánica de Suelos, Deformaciones en Suelos y Análisis Estructural, se llega a conformar una técnica de interacción suelo-estructura que permite mostrar el comportamiento real de todo el conjunto (estructura, cimentación y terreno de cimentación); permitiendo así diseñar correctamente, optimizando todos los recursos sin dejar a un lado la seguridad, que son los objetivos principales de las obras de Ingeniería Civil.

Superposicion de diagramas de Momento Flexionante.



→ Mom.Flex.s/Inter. + Mom.Flex.c/Inter.

Superposicion de diagramas de Fuerza Cortante.



→ Fza.Cort.s/inter. - - Fza.Cort.c/inter.

BIBLIOGRAFIA

1. **"Mecánica de Suelos" Tomo I.- Juárez Badillo y Rico Rodríguez.- Editorial Limusa.- México, 1990.**
2. **"Mecánica de Suelos".- T. Willian Lambe y Robert V. Whitman.- Editorial Limusa.- México, 1981.**
3. **"Geología para Ingenieros".- Joseph M. Trefethen.- Editorial C.E.C.S.A.- México, 1967.**
4. **"Introducción al Comportamiento de los Materiales".- Agustín Demeneghi Colina, Roberto Magaña del Toro y Héctor Sangines García.- Facultad de Ingeniería UNAM 1986.**
5. **"Mecánica de Suelos" Tomo II.- Juárez Badillo y Rico Rodríguez.- Editorial Limusa.- México, 1979.**
6. **"Soil Mechanics in Engineering Practice".- Karl Terzaghi y Ralph B. Peck.- Editorial John Wiley and Sons.- E.U.A. 1967.**
7. **"Introducción a la Mecánica de Suelos y Cimentaciones".- George B. Sowers y George F. Sowers.- Editorial Limusa.- México, 1975.**
8. **"Mecánica de Suelos".- R.F. Craig.- Logos Consorcio Editorial.- México, 1976.**
9. **"Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions".- Leonardo Zeevaert.- Editorial Van Nostrand Reinhold Co.- E.U.A. 1973**

10. **"Interacción Suelo-Estructura de Cimentación".- Leonardo Zeevaert.- Editorial Limusa.- México, 1991.**
11. **"Un método para el cálculo de deformación en los suelos".- Agustín Demeneghi Colina.- Facultad de Ingeniería UNAM.**
12. **"Consolidation In the Intergranular Viscosity of Highly Comproisible Soils".- Leonardo Zeevaert.- Consolidation of Soils: Testing and Evaluation. ASTM STP 892. R.N. Yong and F.C. Townsend, EDS, American Society for Testing and Materials.- E.U:A. 1986**
13. **"Consolidación Secundaria".- Agustín Demeneghi Colina y Margarita Puebla Cadena.- Facultad de Ingeniería, UNAM.**
14. **"Apuntes de Análisis Estructural".- José Luis Camba .- Facultad de Ingeniería. UNAM.**
15. **"Interacción Estática Suelo-Estructura.- Análisis Tridimensional".- Agustín Demeneghi Colina.- Revista Ingeniería Vol. LXII Núm. 4.- Facultad de Ingeniería UNAM., Octubre-Diciembre 1992.**
16. **Apuntes de la Materia "Introducción al Comportamiento de Materiales", impartida por el Ing. Ricardo Padilla Velázquez.- Facultad de Ingeniería UNAM.**
17. **Apuntes de la Materia "Comportamiento de los Suelos", impartida por el Ing. Ricardo Padilla Velázquez.- Facultad de Ingeniería UNAM.**
18. **Apuntes de la Materia "Comportamiento de los Suelos", impartida por el Ing. Héctor A. Legorreta Cuevas.- Facultad de Ingeniería, UNAM.**

19. **Apuntes de la Materia "Dinámica de Suelos", impartida por el M, en I. Agustín Demeneghi Colina e Ing. Héctor Sangines García.- Facultad de Ingeniería, UNAM.**