00365
1
1 ej.

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

2

EL TEOREMA DE DIEUDONNE - SCHWARTZ SOBRE CONJUNTOS ACOTADOS EN LIMITES INDUCTIVOS

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

T E S I S

Que para obtener el Grado de
MAESTRO EN CIENCIAS (Matemáticas)
P r e s e n t a

EMMA LAM OSNAYA

EJEMPLAR UNICO

México, D. F. 2002

Agradecimientos.

Agradezco profundamente al Dr. Carlos Bosch Giral la dirección de este trabajo, así como la ayuda y el apoyo que me ha brindado durante los últimos años, tanto en lo profesional como en lo personal.

Al Dr. Jan Kučera el haberme proporcionado incluso los manuscritos de sus últimas investigaciones.

Asimismo quiero hacer patente mi agradecimiento a la Srita. Verónica del Pilar Esteve Hdz., quien amablemente realizara el trabajo mecanográfico.

INDICE

CAPITULO I

Para hablar del teorema de Dieudonné-Schwartz, es indispensable pensar en la Teoría de Distribuciones, con la cual no es difícil justificar el por qué de las hipótesis de dicho teorema, independientemente por supuesto, de la importancia que tal teoría tiene por sí misma. Por tal motivo, dedicaremos este breve capítulo a la construcción del espacio de distribuciones en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $K \subset \Omega$ compacto, definimos:

$$D_K(\Omega) = \{f: \Omega \to \mathbb{C},\quad f \in C^\infty \quad \text{Sopf} \subset K\},$$

así, si $f \in D_K(\Omega)$, f se anula fuera de K.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea:

$$P_{K,m}(f) = \sup_{\substack{x \in K \\ |S| \leq m}} \{|D^S f(x)|\}$$

donde $S = (S_1,\ldots,S_n)$ $|S| = S_1+\ldots+S_n$ y $D^S = \partial^{S_1}\ldots\partial^{S_n} =$
$= \dfrac{\partial^{|S|}}{\partial x_1^{S_1}\ldots\partial x_n^{S_n}}$, $(D^\circ f = f)$.

Cada $P_{K,m}$ es una seminorma. Damos a $D_K(\Omega)$ la topología inducida por esta familia, es decir, la topología que tiene como sistema fundamental de vecindades del cero a los conjuntos $V_{P_{K,m}}\varepsilon = \{f \in D_K(\Omega);\ P_{K,m}(f) \leq \varepsilon\}$ con la cual $D_K(\Omega)$ es un espacio metrizable y completo.

Ahora bien, si $K \subset K' \subset \Omega$, K' compacto, entonces la inclusión $i: D_K(\Omega) \to D_{K'}(\Omega)$ es continua pues si $f \in D_K(\Omega)$

$$P_{K',m}(f) = P_{K,m}(f).$$

Tomemos la sucesión de conjuntos compactos definida como sigue:

$$K_i = \{x \in \Omega;\ d(x,\Omega^c) \geq \frac{1}{i},\quad d(x,0) < i\} \quad i \geq 1$$

con esto, cualquier subconjunto compacto de Ω está contenido en algún K_i.

Entonces se puede construir

$D(\Omega) = \lim_K \text{ind}\ D_K(\Omega)$, el límite inductivo de los $D_K(\Omega)$.

Es decir, nos fijamos en la sucesión de conjuntos compactos ordenados por inclusión, tomamos $\bigcup_{K\subset\Omega} D_K(\Omega)$ y le damos la topología más fina que haga continuas a las inclusiones.

$$i: D_K(\Omega) \to \cup D_K(\Omega).$$

Definimos el espacio de distribuciones en Ω como el dual $D'(\Omega)$ de $D(\Omega)$.

Ahora bien, para obtener información acerca de $D'(\Omega)$ y en particular para poder definir en $D'(\Omega)$ la topología de convergencia uniforme en acotados, es importante conocer a los acotados de $D(\Omega)$. Un resultado sumamente importante en este sentido es el siguiente. Un conjunto en $D(\Omega)$ es acotado si y sólo si está contenido en algún $D_K(\Omega)$ y es acotado ahí.

Este es, como veremos más adelante, en el caso de los conjuntos $\{D_K(\Omega)\}$, el Teorema de Dieudonné-Schwartz. Hay, en el caso de los espacios $D_K(\Omega)$ dos observaciones que debemos tomar en cuenta:

1°) Si $K \subset K' \subset \Omega$, la topología de $D_K(\Omega)$ coincide con la inducida por $D_{K'}(\Omega)$.

2°) $D_K(\Omega)$ es completo en $D_{K'}(\Omega)$, el cual es Hausdorff, enton ces $D_K(\Omega)$ es cerrado en $D_{K'}(\Omega)$. Las observaciones anteriores fueron utilizadas por Dieudonné y Schwartz para obtener el teorema que lleva sus nombres:

Consideremos una sucesión $\{(E_n , \tau_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de espacios localmente convexos tales que $E_n \subset E_{n+1}$, de manera que las inclusiones sean continuas.

Sea $E = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} \text{ind}\, E_n$ el límite inductivo de los E_n. El Teorema de Dieudonné-Schwartz afirma que si:

1) Cada E_n es cerrado en E_{n+1} y

2) $\tau_{n+1}\big|_{E_n} = \tau_n$

entonces todo conjunto B acotado en E está contenido y es acotado en algún E_n.

Obsérvese que este teorema parece estar hecho para el espacio de distribuciones, las condiciones 1) y 2) efectivamente se cumplen en ese caso. Más aún, ninguna de las condiciones 1) y 2) es suficiente para que el teorema se cumpla. Una prueba de la afirmación anterior la dan los ejemplos 5.5 y 5.7, en el primero se satisface 1), en el segundo 2) y por supuesto en ningún caso se cumple la conclusión del teorema.

CAPITULO II

Sea $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$ una sucesión de espacios localmente convexos, Hausdorff tales que la función identidad

$$\text{id}: E_n \to E_{n+1} \quad \text{es continua para todo} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{y}$$

$$E = \lim_{n} \text{ind } E_n .$$

Damos a E la topología inductiva, es decir, la topología mas fina que hace continuas a las inclusiones: $\text{id}: E_n \to E$.

El problema que se quiere resolver es el siguiente:

¿Bajo qué condiciones un conjunto $B \subset E$ acotado está contenido y es acotado en algún E_n?

J. Dieudonné y L. Schuartz prueban en [5] que si (E_n, τ_n) es localmente convexo entonces las condiciones:

i) E_n es cerrado en E_{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) La topología de cada E_n es igual a la topología inducida en E_n por E_{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$ son suficientes.

Claramente se desea encontrar condiciones necesarias y suficientes, condiciones más débiles que sigan siendo suficientes, o bien condiciones de las cuales se obtenga cuando menos que todo conjunto acotado en E está contenido en E_n para algún $n \in \mathbb{N}$, aún sin garantizar que sea acotado en él.

Daremos a continuación una lista con la notación que utilizaremos en lo sucesivo. Asimismo mencionamos resultados a partir de los cuales se desarrolla todo el trabajo, estos pueden ser encontrados en su forma original en [9] y [10], un trabajo que desarrolla [9] y [10] es [15].

(H-1) E_n es cerrado en E_{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$.

(H-2) La topología de cada E_n es igual a la topología inducida en E_n por E_{n+1}.

(H-3) E_n es cerrado en E para todo $n \in \mathbb{N}$.

(H-4) Todo conjunto convexo y cerrado en E_n es cerrado en E_{n+1}.

(H-5) Para cada conjunto B acotado y convexo en E_n, $\bar{B}^E$ está contenido y es acotado en E_{n+p} para algún $p \in \mathbb{N}$ ($\bar{B}^E$ denota la cerradura de B en E).

(H-6) Para cada conjunto B acotado y convexo en E_n, $\bar{B}^E$ está contenido en E_{n+p} para algún $p \in \mathbb{N}$.

(H-7) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{E_n}^E \subset E_{n+p}$ para algún $p \in \mathbb{N}$.

(H-8) Para cada hiperplano cerrado F en E_n, $(E_n \setminus F) \cap \overline{F}^{E_{n+1}} = \phi$

(H-9) Todo conjunto acotado, convexo y cerrado en E_n es cerrado en E_{n+1}.

DS : Todo conjunto acotado en E está contenido en E_n para algún $n \in \mathbb{N}$.

TDS: Todo conjunto acotado en E está contenido y es acotado en algún E_n.

N : E_n es normado para todo $n \in \mathbb{N}$.

M : E es metrizable.

H : E_n es normado y semireflexivo para todo $n \in \mathbb{N}$.

<u>Teorema 2.1.</u> H-1 *y* H-2 implican H-3.

<u>Teorema 2.2.</u> H-3 implica DS.

<u>Teorema 2.3.</u> H-4 implica TDS.

<u>Teorema 2.4.</u> H-4 implica H-3.

<u>Teorema 2.5.</u> Si E_n es normado para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

a) H-5 si y sólo si TDS.

b) H-6 si y sólo si DS.

<u>Proposición 2.6.</u> H-1 y H-2 implican H-4.

<u>Demostración.</u>

Sea $B \subset E_n$ convexo y cerrado entonces $\overline{B}^{E_{n+1}} \subset \overline{E}^{E_{n+1}} = E_n$ por H-1. Sea $x \in \overline{B}^{E_{n+1}}$, entonces para todo $V \in \mathcal{V}_{x,\, E_{n+1}}$ $V \cap B \neq \phi$. Sea $U \in \mathcal{V}_{x,\, E_n}$ entonces existe $V \in \mathcal{V}_{x,\, E_{n+1}}$ tal que $V \cap E_n = U$ y $V \cap B \neq \phi$. Como $B \subset E_n$

$$\phi \neq V \cap B = V \cap B \cap E_n = B \cap U$$

es decir $B \cap U \neq \phi$, de donde $x \in \overline{B}^{E_n}$. Entonces $x \in B$ es decir B es cerrado en E_{n+1}.

<u>Teorema 2.7.</u> H-3 implica H-7 implica DS.

<u>Demostración.</u>

Probemos que H-7 implica DS.

Sea B acotado en E y supongamos $B \not\subset E_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, en particular $B \not\subset E_1$.

Sea $b_1 \in B \setminus E_1$, observemos primero que $b_1 \neq 0$ pues si $b_1 = 0$ entonces $b_1 \in E_1$. Además existe $V \in \mathcal{V}_{0,E}$ tal que $b_1 \notin V$. Elegimos $G_1 \in \mathcal{V}_{0,E}$ simétrica $(G_1 = -G_1)$ tal que $G_1 + G_1 \subset V$. Como $b_1 \notin V$ entonces $b_1 \notin G_1 + G_1$. Sean $V_1 = G_1 \cap E_1$ y $\overline{V}_1^E = W_1$, por H-7 existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{E}_1^E \subset E_{n_1}$.

Sea $b_2 \in B\setminus E_1$, $W_1 \subset E_{n_1}$ ya que $W_1 = \bar{V}_1^E = \overline{G_1 \cap E_1}^E \subset \bar{E}_1^E \subset E_{n_1}$, además $W_1 = \overline{V_1}^E = \overline{G_1 \cap E_1}^E \subset G_1 + G_1$, como $b_1 \not\in G_1 + G_1$ entonces $b_1 \not\in W_1$ y $b_2 \not\in E_{n_1}$ entonces $\frac{1}{2}b_2 \not\in E_{n_1}$, por lo tanto, $\frac{1}{2}b_2 \not\in W_1$.

Como $b_1, \frac{1}{2}b_2 \not\in W_1$ entonces existe G vecindad de cero en E tal que $b_1, \frac{1}{2}b_2 \not\in W_1 + G$ y existe $G_2 \in \mathcal{V}_{o,E}$ tal que

$$G_2 + G_2 \subset G$$

es decir, $W_1 + G_2 + G_2 \subset W_1 + G$

entonces $b_1, \frac{1}{2}b_2 \not\in W_1 + G_2 + G_2$.

Sea $V_2 = G_2 \cap E_{n_1}$ y $W_2 = \overline{V_1 + V_2}^E$ por H-7 $\overline{E_{n_1}}^E \subset E_{n_2}$ para algún $n_2 > n_1$.

Sea $b_3 \in B\setminus E_{n_2}$ entonces $W_2 \subset E_{n_2}$ puesto que

$$W_2 = \overline{V_1 + V_2}^E = \overline{(G_1 \cap E_1) + (G_2 \cap E_{n_1})}^E$$
$$\subset \overline{G_1 \cap E_{n_1}}^E \subset \overline{E_{n_1}}^E \subset E_{n_2}$$

y $W_2 \subset W_1 + G_2 + G_2$.

Como $b_1, \frac{1}{2}b_2 \not\in W_1 + G_2 + G_2$ entonces $b_1, \frac{1}{2}b_2 \not\in W_2$. Así $b_3 \in B\setminus E_{n_2}$ entonces $\frac{1}{3}b_3 \not\in E_{n_2}$ por lo tanto $\frac{1}{3}b_3 \not\in W_2$. De esta manera construímos sucesiones $\{W_k\}$ y $\{b_k\}$ tales que $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \in \mathcal{V}_{o,E}$ y $\frac{1}{k}b_k \not\in W$ si $k \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción ya que como B es acotado y $\{b_k\} \subset B$, $\{\frac{1}{k}\} \to 0$ entonces

$$\frac{1}{k}b_k \to 0.$$

Teorema 2.8. Si E es metrizable entonces DS implica H-7.

Demostración.

Sea $\{G_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades del cero en E tal que

$$G_{p+1} \subset G_p.$$

Supongamos que $\bar{E}_1^E$ no está contenido en E_1+p para todo $p \in \mathbb{N}$.

Para cada $p \in \mathbb{N}$, sean $x_p \in \bar{E}_1^E \setminus E_{1+p}$ y $A_p > 0$ tal que $A_p x_p \in G_p$.

Esto último es posible ya que G_p puede elegirse absorbente para todo $p \in \mathbb{N}$.

Como la sucesión $\{G_p\}$ es decreciente, se sigue que $A_p x_p \to 0$ cuando $p \to \infty$, entonces $B= \cup \{A_p x_p ; p \in \mathbb{N}\}$ es acotado en E.

Por DS se tiene que $B \subset E_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ lo cual es una contradicción ya que $A_n x_n \notin E_{n+1}$.

Lema 2.9. Sean X,Y dos espacios vectoriales localmente convexos, *Hausdorff*, $X \subset Y$, $id: X \to Y$ continua y X semireflexivo. Entonces todo conjunto convexo, cerrado y acotado en X es cerrado en Y.

Demostración.

Sea F un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X, entonces F es debilmente compacto en X ([20] Cap. IV, 5.5 Pag.144), ahora, como la identidad de X en Y es continua, F es debilmente compacto en Y, y puesto que la topología débil en Y es Hausdorff, se sigue que F es debilmente cerrado en Y, como

F es convexo F es cerrado en Y.

<u>Teorema 2.10</u>. Si todos los E_n son espacios normados semireflexivos entonces se cumple TDS.

<u>Demostración</u>.

Puesto que los E_n son normados semireflexivos, se sigue que son espacios de Banach ([20], Cap IV, 5.6 corolario 2 Pag. 145) y como los espacios E_n son normados las condiciones TDS y H-5 son equivalentes, teorema 2.5, asi que, bastará con probar que H-5 se cumple.

Sea B acotado y convexo en E_n. Supongamos sin pérdida de generalidad B cerrado en E_n, probaremos que B es cerrado en E con lo cual $\bar{B}^E = B \subset E_n$ y habremos terminado.

Sea $b \notin B$. Existe $U_o \in \mathcal{U}_{o,E_n}$ convexa, cerrada y acotada tal que $b \notin B+U_o$.

Como B y U_o son cerrados, convexos y acotados y E_n es semireflexivo, se tiene que B y U_o, son debilmente compactos por lo tanto $B+U_o$ es también convexo y debilmente compacto, entonces $B+U_o$ es debilmente cerrado así que $B+U_o$ es cerrado en E_n.

Por el lema 2.9 $B+U_o$ es cerrado en E_{n+1} entonces existe $U_1 \in \mathcal{U}_{o,E_{n+1}}$ cerrada, convexa y acotada tal que $b \notin B+U_o+U_1$, inductivamente construímos $\{U_k\}$ $k \geq 0$ tal que $U_k \in \mathcal{U}_{o,E_{k+n}}$ cerrada, convexa y acotada y $b \notin B+U_o+...+U_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces $U = (U_o+...U_k) \in \mathcal{U}_{o,E}$ tal que $b \notin B+U$

Por lo tanto B es cerrado en E.

Resumiendo obtenemos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & & H \arrow[d, Rightarrow] & \\
H\text{-}1 \text{ y } H\text{-}2 \arrow[r, Rightarrow] & H\text{-}4 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & TDS \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[d, Rightarrow] & H\text{-}5 \arrow[l, Rightarrow, shift left, "N"] \arrow[d, Rightarrow] \\
 & H\text{-}3 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & DS \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[dl, Rightarrow, shift left, "M"] & H\text{-}6 \arrow[l, Rightarrow, shift left, "N"] \\
 & H\text{-}7 \arrow[ur, Rightarrow, shift left] & &
\end{tikzcd}
$$

CAPITULO III

Dedicaremos esta sección a relacionar nuestro problema con el concepto de dualidad, dicha relación fué usada por vez primera en 1980, no logrando resolver el problema, pero sí dándole un enfoque distinto y mejorando las condiciones, pues si bien en la cadena de los espacios $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \ldots \subset E$, se tiene poca información, llamando F_n y F a los duales de E_n y E respectivamente, se obtiene:

$$F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots \supset F \quad ,$$

donde los elementos son funciones lineales continuas y gracias a las topologías admisibles para los duales se tienen propiedades interesantes, por ejemplo F con la topología débil coincide con el limite proyectivo de los espacios F_n si a cada uno de ellos se le da la topología debíl ([20] Cap. IV Teo. 4.5 pag. 140), además el paso de E_n a F_n (E a F) y reciprocamente, siempre puede lograrse utilizando la noción de polaridad.

<u>Teorema 3.1</u>. H-8 se satisface si y sólo si cada función lineal continua en E_n tiene una extensión lineal continua a E_{n+1} .

<u>Demostración</u>.

Supongamos que toda función lineal continua tiene una extensión. Sea F un hiperplano cerrado en E_n, entonces existe $f \in E_n'$ tal que:

$$F = \{x;\ f(x) = \alpha\} \qquad ([20] \text{ Cap. I } 4.1 \text{ Pag. } 24).$$

Por hipótesis existe $f^* \in E'_{n+1}$ tal que

$$f^* \mid E_n = f.$$

Si $x \in F$ entonces $x \in E_n$ y $f^*(x) = f(x) = \alpha$ Por tanto: $F \subset \{x;\ f^*(x) = \alpha\}$ y como f^* es continua, entonces:

$$\{x:\ f^*(x) = 0\} \text{ es cerrado en } E_{n+1}.$$

Por lo tanto $\overline{F}^{E_{n+1}} \subset \{x:\ f^*(x) = \alpha\}$.

Supongamos ahora que $(E_n \setminus F) \cap \overline{F}^{E_{n+1}} \neq \phi$. Sea $x \in E_n \setminus F$, $x \in \overline{F}^{E_{n+1}}$, como $x \in E_n \setminus F$ entonces $f(x) \neq \alpha$.

Por otra parte $x \in \overline{F}^{E_{n+1}}$ de donde $f^*(x) = \alpha$, pero $x \in E_n$ entonces $f^*(x) = f(x) = \alpha$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto:

$$(E_n \setminus F) \cap \overline{F}^{E_{n+1}} = \phi$$

Supongamos ahora que si F es un hiperplano cerrado en E_n entonces $(E_n \setminus F) \cap \overline{F}^{E_{n+1}} = \phi$.

Sea $f: E_n \to \mathbb{R}$ lineal continua, entonces $F = \{x:\ f(x) = 0\}$ es un hiperplano cerrado, por hipótesis $(E_n \setminus F) \cap \overline{F}^{E_{n+1}} = \phi$.

Probaremos primero que:

existe $x_o \notin \overline{F}^{E_{n+1}}$ tal que $x_o \in E_n$.

Supongamos que si $x \notin \overline{F}^{E_{n+1}}$ entonces $x \notin E_n$. Se sigue que $E_n \subset \overline{F}^{E_{n+1}}$, pero $F \subset E_n$, entonces:

$$E_n \setminus F \subset \overline{F}^{E_{n+1}} \setminus F.$$

Por consiguiente si $x \in E_n \setminus F$ entonces:

$x \in (E_n \setminus F) \cap \overline{F}^{E_{n+1}} = \phi$, lo cual es una contradicción.

Sea entonces $x_o \notin \overline{F}^{E_{n+1}}$ tal que $x_o \in E_n$, existe $g: E_{n+1} \to \mathbb{R}$ lineal continua tal que:

$g(x_o) \neq 0$ y $g(x) = 0$ para todo $x \in \overline{F}^{E_{n+1}}$ ([7] Cap.3 Prop. 2 Pag. 180).

Entonces:

$F \subset \{x \in E_{n+1};\ g(x) = 0\}$, es decir $g|_F = f$.

Como $x_o \notin \overline{F}^{E_{n+1}}$ entonces $x_o \notin F$, por tanto $f(x_o) \neq 0$. Sea $\alpha = \dfrac{f(x_o)}{g(x_o)}$ y tomemos $x \in E_n \setminus F$, x puede escribirse como:

$x = h + \lambda x_o$ $h \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ([21] Cap.3, 3.5 B Pag. 138)

$$\begin{aligned} f(x) = f(h+\lambda x_o) &= f(h) + \lambda f(x_o) \\ &= \lambda f(x_o) \\ &= \lambda\alpha g(x_o) \\ &= \lambda\alpha g(x_o) + \alpha g(h) \\ &= \alpha g(h+\lambda x_o) \\ &= \alpha g(x) \end{aligned}$$

Como g es continua en E_{n+1}, αg también lo es pero $\alpha g|_{E_n} = f$, por tanto f es continua en E_n con la topología de E_{n+1} y por consiguiente existe una extensión continua de f a E_{n+1}.

Obsérvese que el resultado anterior introduce la noción de dualidad en el problema, ahora bien, algunos de los resultados que a continuación presentamos fueron originalmente probados usando H-B, sin embargo en el caso de que las demostraciones resulten más sencillas, las presentaremos haciendo uso del Teorema 1.1.

<u>Teorema 3.2.</u> H-1 y H-8 si y solo si H-3 y H-8.

<u>Demostración.</u>

Supongamos que H-3 y H-8 se cumplen.

Probaremos que H-3 implica H-1.

Si E_n es cerrado en E, entonces $E \setminus E_n$ es abierto en E, de ahí que $(E \setminus E_n) \cap E_{n+1}$ es abierto en E_{n+1}, pero $(E \setminus E_n) \cap E_{n+1} = E_{n+1} \setminus E_n$, entonces E_n es cerrado en E_{n+1}.

Supongamos ahora que H-1 y H-8 se satisfacen.

Para mostrar que H-3 se cumple, supongamos que E_1 no es cerrado en E.

Sea $x_o \in \overline{E_1}^{E} \setminus E_1$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_o \in E_2$.

Como E_1 es cerrado en E_2, existe $f_2 \in E_2'$ tal que $f_2(x_o) = 1$ y $f_2(x) = 0$ si $x \in E_1$. Por H-8, f_2 tiene una extensión $f_3 \in E_3'$, f_3 tiene una extensión $f_4 \in E_4'$ etc.

Sea $V = \cup \{f_k^{-1}(-1,1)\ k = 2,\dots\}$, claramente $x_o \notin V$ y $E_1 \subset V$.

Además V es abierto en E, pues $V \cap E_n = f_n^{-1}(-1,1)$ es bierto en E_n:

En efecto, si $x \in f_n^{-1}(-1,1)$ entonces: $x \in E_n$ y $f_n(x) \in (-1,1)$, por lo tanto $x \in V \cap E_n$, recíprocamente si $x \in V \cap E_n$, como $x \in V$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x \in f_k^{-1}(-1,1).$$

Si $k \leq n$ $x \in f_n^{-1}(-1,1)$ ya que:

$$f_k^{-1}(-1,1) \subset f_n^{-1}(-1,1).$$

Si $n < k$ $x \in f_k^{-1}(-1,1)$ y $x \in E_n$.

Por tanto $f_n(x) = f_k(x) \in (-1,1)$ es decir, $x \in f_n^{-1}(-1,1)$, entonces V es abierto en E, de donde V es vecindad de E_1 y no contiene a x_o, lo cual cotradice que $x_o \in \overline{E_1}^E$.

Teorema 3.3. DS y H-8 implican TDS.

Demostración.

Sea $B \subset E$ acotado y supongamos que $B \subset E_1$.

Supongamos además que B no es acotado en E_n, entonces B no es débilmente acotado en E_n para todo $n \in \mathbb{N}$, esto último es la afirmación del teorema de Banach-Mackey. ([14] cap 4. Secc. 20 (7) pag.254).

Sea $f_1 \in E_1'$ de tal modo que f_i no sea acotada en B. Esta puede elegirse pues:

Supongamos que para toda $f \in E_1'$ f es acotada en B, entonces $f(B)$ es acotado en $\mathbb{R}$, es decir:

Existe $\alpha > 0$ tal que: $f(B) \subset \alpha\{x \mid |x| \leq 1\}$, es decir $|f(B)| \leq \alpha$.

Sea $V \in \mathcal{U}_o, E_1$ con la topología débil.

$$V = \{x \in E_1 \mid |f_i(x)| \leq 1 \quad i=1,\ldots,n, \quad f_i \in E_1'\}.$$

Para cada $i=1,\ldots,n$ existe $\alpha_i > 0$ tal que: $|f_i(B)| \leq \alpha i$

$|f_i(B)| \leqslant \alpha \quad i=1,\ldots,n \quad$ si $\quad \alpha = \max\{\alpha_i,\ i=1,\ldots,n\}$

$|\frac{1}{\alpha} f_i(B)| \leqslant 1 \quad i=1,\ldots,n$

$|f_i(\frac{1}{\alpha}B)| \leqslant 1 \quad i=1,\ldots,n.$

Entonces $\frac{1}{\alpha}B \subset V$, es decir V absorbe a B lo cual es una contradicción ya que B no es débilmente acotado.

Así, existe $f_i \in E_i'$ tal que f_i no es acotada en B, escojamos $\{b_k\} \subset B$ tal que $f_i(b_k) > k \quad k \in \mathbb{N}$.

Sea $f_k \in E_k'$ para $k = 2, 3, \ldots,$ tal que f_k+1 es extensión de f_k lo cual se puede hacer por el teorema 3.1 entonces

$$\cup\ \{f_k^{-1}(-\infty,1);\ k=1,2,\ldots,\} \in \mathcal{S}_o, E, \quad \text{pues:}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k^{-1}(-\infty,1)\} \cap E_n = f_n^{-1}(-\infty,1) \in \mathcal{S}_o, E_n$$

y por la manera en que se han escogido los b_k,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k^{-1}(-\infty,1)\} \quad \text{no absorbe a } B.$$

Por tanto B no es acotado en E. Lo cual es una contradicción.

<u>Corolario 3.4</u>. H-3 y H-8 implican TDS.

<u>Demostración</u>.

H-3 y H-8 implican DS y H-8 implican TDS.

<u>Corolario 3.5</u>. H-7 y H-8 implican TDS.

<u>Demostración</u>.

H-7 y H-8 implican DS y H-8 implican TDS.

<u>Observación</u>. H-3 y H-8 implican H-7 y H-8.

Teorema 3.6. H-6 y H-8 implican H-5.

Demostración.

Sea B acotado en E_1.

Definimos $B_o = \bar{B}^E$. Por H-6 $B_o \subset E_p$ para alguna p.

Supongamos que B_o no es acotado en E_p, por lo tanto:

existe $f_p \in E'_p$ y $\{b_k\} \subset B_o$ tal que $f_p(b_k) > k$.

Sea f_p+1 una extensión continua de f_p a E_{p+1}

f_p+2 una extensión continua de f_p+1 a E_{p+2} etc. entonces

$$\cup\{f_k^{-1}(-\infty,1),\ k=p,\ p+1,\ldots\} \in \mathcal{U}_o, E.$$

Además por construcción $\cup\{f_k^{-1}(-\infty,1);\ k=p,\ p+1,\ldots\}$ no absorbe a B_o, es decir B_o no es acotado en E, pero B es acotado en E_1, entonces B es acotado en E de donde $\bar{B}^E = B_o$ es acotado en E, lo cual es una contradicción.

Teorema 3.7. H-1 y H-8 sí y sólo si H-4.

Demostración.

Supongamos que H-1 y H-8 se satisfacen.

Sea B convexo y cerrado en E_n, por H-1 $\bar{B}^{E_{n+1}} \subset \overline{E_n}^{E_{n+1}} = E_n$.

Supongamos que $x \notin B$ y que $x \in E_n$, entonces existe $f_n \in E'_n$ tal que $f_n(x) = \frac{1}{2}$ y $f_n(y) = 0$ si $y \in B$. Por H-8 existe $f_{n+1} \in E_{n+1}'$ extensión de f_n tal que

$$f_{n+1}^{-1}(0,1) \in \mathcal{U}_x,\ E_{n+1}$$

$$y \quad f_{n+1}^{-1}(0,1) \cap B = \phi.$$

por tanto $x \notin \bar{B}^{E_{n+1}}$, es decir $\bar{B}^{E_{n+1}} \subset B$.

Supongamos ahora que H-4 se cumple. Como E_n es cerrado y convexo en E_n, entonces E_n es cerrado en E_{n+1}, es decir H-1 se cumple.

Sea F un hiperplano cerrado en E_n, por ser convexo F es cerrado en E_{n+1}, entonces $(E_n \setminus F) \cap \overline{F}^{E_{n+1}} = (E_n \setminus F) \cap F = \phi$.

<u>Lema 3.8</u>. Sean $(E_n \xi_n)$ espacios métricos localmente convexos. Si (E_n, ξ_n) y $\xi_{n+1}|_{E_n}$ tienen los mismos conjuntos acotados, entonces

$$(E_n, \xi_n) = (E_n, \xi_{n+1}|_{E_n})$$

<u>Demostración</u>.

(E_n, ξ_n) es métrico, por consiguiente bornológico ([20] Cap. II 8.1 Pag. 61). Del mismo modo $(E_n, \xi_{n+1}|_{E_n})$ es bornológico.

Sea $U \in \mathcal{U}_{o}, E_n, \xi_n$ convexa y balanceada.

Sea A acotado en (E_n, ξ_n), como (E_n, ξ_n) y $\xi_{n+1}|_{E_n}$ tienen los mismos acotados, A es acotado en $\xi_{n+1}|_{E_n}$.

U absorbe a A y A es cualquier acotado en (E_n, ξ_n), por lo tanto $U \in \mathcal{U}_o, \xi_{n+1}|_{E_n}$ ya que $E_n, \xi_{n+1}|_{E_n}$ es bornológico.

El argumento para probar que si $U \in \mathcal{U}_o, \xi_{n+1}|_{E_n}$ entonces $U \in \mathcal{U}_o, \xi_n$ es el mismo.

<u>Teorema 3.9</u>. Si (E_n, ξ_n) es métrico localmente convexo para todo

$n \in \mathbb{N}$ entonces H-4 sí y sólo si H-1 y H-2.

Demostración.

El Teorema 3.7 afirma que H-4 sí y sólo si H-1 y H-8, recordemos además el teorema de Banach-Mackey que hemos mencionado antes y que afirma entre otras cosas:

A es acotado en (E,T) es equivalente a si $f \in E$ ent f es acotada en A). Ahora bien, puesto que

$$(E_n,\zeta_n)' = (E_n,\zeta_{n+1}|_{E_n})'$$

entonces (E_n,ζ_n) y $(E_n,\zeta_{n+1}|_{E_n})$ tienen los mismos conjuntos acotados, por el lema 3.8 se tiene que:

$$(E_n,\zeta_n) = (E_n,\zeta_{n+1}|_{E_n}),$$

es decir, se cumple también H-2.

La proposición 2.6 afirma el recíproco.

Obsérvese que con el teorema 3.9, el teorema 2.3 es equivalente al teorema de Dieudonné-Schwartz en el caso en que los espacios son métricos.

Presentamos a continuación un resultado probado con la técnica usada en el teorema 2.5 a).

Teorema 3.10. Supóngase que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $U_n \in \mathcal{U}_o, E_n$ convexa y $p \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{U}_n^{E} \subset E_{n+p}$ es acotado, entonces TDS se cumple.

Demostración.

Sea B acotado en E y supongamos que no lo es en E_n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Existe $b_1 \in B \setminus U_1$, pues si $b \in B$ implica $b \in U_1$, entonces $B \subset U_1$, de donde $\bar{B}^E \subset \overline{U_1}^E \subset E_{1+p}$ y $\bar{B}^E$ acotado. Como $B \subset \bar{B}^E$, B sería acotado en E_{1+p}.

Sea pues $b_1 \in B \setminus U_1$, $b \neq 0$ ya que $0 \in U_1$, $\{0\}$ es cerrado y convexo en E_1. $\{\bar{0}\}^E \subset \overline{U_1}^E \subset E_n$ para alguna n y es acotado ahí. Pero como la cerradura de un subespacio es subespacio entonces $\{\bar{0}\}^E = \{0\}$, pues de otro modo no podría ser acotado en E_n, entonces como $\{0\}$ es cerrado en E:

$\exists\ V_1 \in \mathcal{U}_{o,E}$ tal que $b_1 \notin V_1$, V_1 cerrada. (Los espacios vectoriales topológicos son regulares).

Sean $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b_1 \in E_{p_1}$ y $W_1 = \overline{V_1 \cap U_{p_1}}^E$.

$W_1 \in \mathcal{U}_{o,E_{p_1}}$ convexa, $W_1 \subset V_1$ ya que V_1 es cerrada. Ahora bien:

$$W_1 = \overline{V_1 \cap U_{p_1}}^E \subset \overline{U_{p_1}}^E \subset E_{p_2}.$$

W_1 es acotado en E_{p_2}, escojamos $p_2 > p_1$.

B no es acotado en E_{p_2}, entonces existe $b_2 \in B \setminus 2W_1$, de lo contrario, como en el caso anterior B resultaría acotado en algún E_n.

Supongamos que $b_2 \in E_{p_2}$ ya que de no ser así tendríamos $b_2 \in E_n$ con $n > p_2$, como W_1 es acotado en E_{p_2}, también lo es en E_n y seguiríamos el procedimiento con E_n en lugar de E_{p_2}.

Como $b_1, \frac{b_2}{2} \notin W_1$ y W_1 es cerrado en E, existe $V_2 \in \mathcal{U}_{W,E}$

cerrada tal que $V_2 \supset U_1$ y $b_1, \frac{b_2}{2} \notin V_2$. Como $0 \in W_1$ y $V_2 \in \mathcal{S}_o, E$, entonces:

$$W_1 \subset W_1 + V_2 + V_2 \quad y \quad b_1, \frac{b_2}{2} \notin V_2$$

Sea $W_2 = \overline{V_2 \cap U_{p_2}}^E$ entonces

$W_2 \subset V_2$ y $b_1, \frac{b_2}{2} \notin \overline{W_1 + W_2}^E$, pues:

$$\overline{W_1 + W_2}^E \subset \overline{W_1 + V_2}^E \subset \overline{V_2 + V_2}^E = \overline{2V_2}^E$$

$$= 2V_2 \subset W_1 + 2V_2$$

De éste modo, podemos definir inductivamente $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ y $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tales que $p_k < p_{k+1}$ y $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ donde V_k es una vecindad del cero en E tal que:

$$\frac{bs}{s} \notin \overline{(W_1 + W_2 + \ldots W_k)}^E \quad s = 1,2,\ldots,k \quad k \in \mathbb{N} \quad y$$

$W_s = \overline{U_{ps} \cap V_s}^E$.

Sea $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{(W_1 + W_2 + \ldots + W_k)}^E$.

Como B es acotado entonces $\frac{1}{k} B \subset V$ *para alguna* $k \in \mathbb{N}$, *por* lo tanto:

$$\frac{b_k}{k} \in \overline{W_1 + \ldots + W_s}^E \quad \text{para alguna } s \in \mathbb{N},$$

Pero

$\frac{x_k}{k} \notin \overline{W_1 + \ldots + W_s}^E$ si $s \geq k$ por lo tanto $s < k$, entonces $\overline{(W_1 + \ldots + W_j)}^E \subset \overline{(W_1 + \ldots + W_i)}^E$ si $j \leq i$, de donde $\frac{b_k}{k} \notin V$, lo cual es una contradicción ya que V es vecindad del cero en E.

En efecto:

Sea $n \in \mathbb{N}$ entonces existe s tal que $n \leqslant ps$, entonces $E_n \subseteq E_{ps}$. De donde:

$$E_n \cap V = E_n \cap E_{ps} \cap V \supset E_n \cap W_s$$

y como la inclusión $i: E_n \hookrightarrow E_{ps}$ es continua, $E_n \cap W_s$ es vec. del cero en E_n, por consiguiente B es acotado en algún E_n, es decir TDS se cumple.

Hasta aquí hemos probado que se cumplen las siguientes propiedades

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
H\text{-}1 \text{ y } H\text{-}2 \arrow[r, Rightarrow] & H\text{-}4 \arrow[r, Leftrightarrow] & H\text{-}1 \text{ y } H\text{-}8 \arrow[r, Leftrightarrow] & H\text{-}3 \text{ y } H\text{-}8 \arrow[r, Rightarrow] & H\text{-}7 \text{ y } H\text{-}8 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & TDS \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, shift right] & H\text{-}5 \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & & & & DS \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow, shift right, "H\text{-}8"'] & H\text{-}6.
\end{tikzcd}$$

En 1982 Qiu Jing Huei [16] sugiere se relaje TDS, considerando otra condición, para la cual, como veremos a continuación, sí fué posible encontrar condiciones necesarias y suficientes, la condición es la siguiente:

Para todo $B \subset E$ acotado, existen $n \in \mathbb{N}$ y A acotado en E_n tales que $B \subset \bar{A}^E$.

Esta condición la denotaremos por "QJH" por razones obvias, y en lo que sigue expondremos algunos de los resultados obtenidos. Como referencias para esta parte pueden consultarse [16] [17] y [8]. A partir de aquí se supone E Hausdorff. Asimismo F_n denotará el dual de E_n con la topología $\beta(F_n, E_n)$ (topología fuerte), y F el límite proyectivo de los F_n.

Recordemos una propiedad que usaremos con frecuencia y cuya demos_ tración aparece en ([7] Prop.1.f Pag.190)

Lema 3.11. Sean X y Y en dualidad, entonces B es acotado en X sí y sólo si B^{oY} es absorbente.

Lema 3.12. Para todo conjunto cerrado, acotado y absolutamente convexo $B \subset E$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{B \cap E_n}^{E} = B$ sí y sólo si para todo barril $A \subset F$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{A}^{F_n} \cap F = A$.

Demostración.

Sean $A \subset F$ barril y $B = A^{oE}$. Por tratarse de una polar, B es convexo, balanceado y cerrado, y por el lema 3.11 también resulta acotado, entonces aplicando la hipótesis se tiene:

$$\overline{B \cap E_n}^{E} = B$$

Aplicando el teorema de bipolares ([7] Cap.3 Secc. 3 Teo.1 Pag. 192) se tiene que:

$$(B \cap E_n)^{oF} = B^{oF} = A.$$

Pero $(B \cap E_n)^{oF} = (A^{oE} \cap E_n)^{oF} = (A^{oE_n})^{oF}$

$$= (A^{oE_n})^{oF} \cap F$$

$$= \bar{A}^{F_n} \cap F.$$

Entonces $\bar{A}^{F_n} \cap F = A$.

Para mostrar el recíproco sea B absolutamente convexo, cerrado y acotado en E.

Sea $A = B^{oF}$. A es un barril en F (aplicando lema 3.11), entonces $\bar{A}^{F_n} \cap F = A$. Por el teorema de bipolares:

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^{F_n} \cap F &= (A^{\circ E_n})^{\circ F_n} \cap F \\
&= (A^{\circ E_n})^{\circ F} \\
&= (A^{\circ E} \cap E_n)^{\circ F} \\
&= ((B^{\circ F})^{\circ E} \cap E_n)^{\circ F} \\
&= (\bar{B}^{E} \cap E_n)^{\circ F} \\
&= (B \cap E_n)^{\circ F}
\end{aligned}
$$

entonces $(B \cap E_n)^{\circ F} = A = B^{\circ F}$ y nuevamente usando el teorema de bipolares se tiene que $\overline{B \cap E_n}^{E} = B$.

<u>Proposición 3.13</u>. F es barrelado sí y sólo si para todo conjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado en E existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap E_n$ es acotado en E_n y $\overline{B \cap E_n}^{E} = B$.

<u>Demostración</u>.

Sea $B \subset E$ absolutamente convexo, cerrado y acotado, entonces:

$$
\begin{aligned}
A = B^{\circ F} &= \{f \in F;\ |f(x)| \leq 1,\ \ x \in B\}. \\
&= \cap \{f \in F_n;\ |f(x)| \leq 1,\ \ x \in B\} \quad n \in \mathbb{N} \\
&= \cap \{B^{\circ F_n};\ n \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}
$$

$B^{\circ F}$ es un barril en F, entonces $B^{\circ F} = A \in \mathcal{U}_{o,}F$ ya que F es barrelado. Como $A \in \mathcal{U}_{o,}F$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $H \in \mathcal{U}_{o},F_n$ tales $A = F \cap H$ y H cerrada, entonces $A \subset F$, $A \subset \bar{A}^{F_n}$ de donde

$$A \subset F \cap \bar{A}^{F_n}.$$

Ahora bien, $F \cap H \subset H$, entonces $A \subset H$, o sea H es un cerrado que contiene a A y por consiguiente $\bar{A}^{F_n} \subset H$, de donde:

$$F \cap \bar{A}^{F_n} \subset F \cap H = A.$$

Por lo tanto $A = F \cap \bar{A}^{F_n}$ con A barril en F, por el lema 3.12, se tiene $\overline{B \cap E_n}^{E} = B$.

Falta solo comprobar que $B \cap E_n$ es acotado en E_n.

Probaremos que F es denso en F_n.

Como E es Hausdorff y E y F están en dualidad, la dualidad es estricta, por tanto, en particular se cumple que:

Si para todo $y \in F$ $\langle x,y \rangle = 0$ entonces $x = 0$.

Supongamos $\bar{F} \neq F_n$. Existe $y_o \in F_n \setminus \bar{F}$, $y_o \neq 0$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $f \in F_n'$ tal que:

$$f(y_o) = 1 \quad f(y) = 0 \quad \text{para todo} \quad y \in F.$$

$f: F_n \to \mathbb{R}$ es lineal continua y E_n, F_n estan en dualidad, entonces existe $x \in E_n$ tal que para todo $y \in F_n$ se tiene que: $f(y) = \langle x,y \rangle$. Pero para todo $y \in F$ $f(y) = 0$, entonces $\langle x,y \rangle = 0$ para todo $y \in F$, entonces $x = 0$. Pero $f(y_o) = \langle x,y_o \rangle =$ $= \langle o,y_o \rangle = 0$ lo cual contradice que $f(y_o) = 1$.

Por tanto F es denso en F_n.

Además $A = H \cap F$ es denso en H. En efecto:

H es cerrado en F_n, entonces $\bar{A}^{F_n} \subset \bar{H}^{F_n} = H$, pero como $F \cap H = F \cap \bar{A}^{F_n}$ entonces $\bar{A}^{F_n} = H$, de donde A es denso en H.

Entonces tenemos:

$$H = \overline{H \cap F}^{F_n} = \bar{A}^{F_n}.$$

Por el teorema de las bipolares:

$$\bar{A}^{F_n} = (A^{oE_n})^{oF_n}$$

$$\overline{F \cap H}^{F_n} = ((F \cap H)^{oE_n})^{oF_n}$$

por tanto $H = ((F \cap H)^{oE_n})^{oF_n} = (A^{oE_n})^{oF_n}$

de donde $H^{oE_n} = (F \cap H)^{oE_n} = A^{oE_n}$.

Ahora bien:

$A = H \cap F = B^{oF} = (B \cap E_n)^{oF}$ (ya que $\overline{B \cap E_n}^{E} = B$) como $F \subset F_n$, $(B \cap E_n)^{oF} \subset (B \cap E_n)^{oF_n}$ entonces $H \cap F \subset (B \cap E_n)^{oF_n}$

$$(H \cap F)^{oE_n} \supset ((B \cap E_n)^{oF_n})^{oE_n} = B \cap E_n$$

entonces $H^{oE_n} = (F \cap H)^{oE_n} = A^{oE_n} \supset B \cap E_n$.

Como $H \in \mathcal{U}_o$, F_n, H^{oE_n} es acotado en E_n. En efecto:
Sea $U \in \mathcal{U}_o$, E_n con la topología $\sigma(E_n, F_n)$. $U = A^{oE_n}$, A subconjunto finito de F_n, es decir A es acotado en F_n, entonces existe $\lambda > 0$ tal que:

$$A \subset \lambda H$$

$$\frac{1}{\lambda} A \subset H$$

entonces $(\frac{1}{\lambda} A)^{oE_n} \supset H^{oE_n}$

de donde $H^{oE_n} \subset \lambda\, A^{oE_n}$

entonces H^{oE_n} es débil acotado en E_n y por consiguiente es acotado en E_n, entonces $B \cap E_n$ es acotado en E_n.

Probaremos ahora el recíproco.

Sea A un barril en F y $B = A^{oE}$. Entonces B es absolutamente convexo y cerrado en E, ésto es sólo porque es una polar, B

también es acotado por el lema 3.11.

Pero $B^{oF} = (A^{oE})^{oF} = \bar{A}^F = A$, como A es un barril, B^{oF} es ab sorbente, por lo tanto B es acotado. Entonces por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap E_n$ es acotado en E_n y $\overline{B \cap E_n}^E = B$, por el lema se sigue que $\bar{A}^{F_n} \cap F = A$.

Ahora bien, $B \cap E_n = A^{oE} \cap E_n = A^{oE_n}$, por lo tanto

$$\bar{A}^{F_n} = (A^{oE_n})^{oF_n} = (B \cap E_n)^{oF_n}.$$

Como $B \cap E_n$ es acotado en E_n, $(B \cap E_n)^{oF_n} \in \mathcal{S}_o, F_n$ para la topología $\beta(F_n, E_n)$, entonces:

$$\bar{A}^{F_n} \in \mathcal{S}_o, F_n.$$

Entonces $A = \bar{A}^{F_n} \cap F \in \mathcal{S}_o, F$, de donde F es barrelado.

<u>Teorema 3.14</u>. QJH sí y sólo si F es barrelado.

<u>Demostración</u>.

Por la proposición 3.13, como F es barrelado, entonces para todo B absolutamente convexo, acotado y cerrado en E existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap E_n$ es acotado en E_n y $\overline{B \cap E_n}^E = B$.

Sea B acotado en E, definimos:

$$B' = \overline{\text{cobal } B}^E$$

B' es absolutamente convexo, acotado y cerrado en E, por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$B' \cap E_n \text{ es acotado en } E_n \text{ y } \overline{B' \cap E_n}^E = B.$$

Sea $D = B' \cap E_n$, D acotado en E_n. Demostraremos que $B \subset \bar{D}^E$.

Peró $B \cap E_n \subset B' \cap E_n$, de donde:

$$B = \overline{B \cap E_n}^E \subset \overline{B' \cap E_n}^E = \bar{D}^E.$$

Entonces QJH se satisface. Lo anterior prueba que la condición es necesaria. Probemos ahora la suficiencia:

Sea A un barril en F. Sea $B = A^{oE}$.

Por el lema 3.11, A^{oE} es acotado en E y por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}$ y $D \subset E_n$ acotado tal que $\bar{D}^E \supset B$.

Como D es acotado, D^{oF_n} es vecindad del cero en F_n, además

$$B^{oF} = (A^{oE})^{o^F} = \bar{A}^F = A,$$

y como $B \subset \bar{D}^E$, entonces $B = \bar{B}^E = (B^{oF})^{oE}$.

$\bar{D}^E = (D^{oF})^{oE}$, entonces $A = B^{oF}$ y $(B^{oF})^{oE} \subset (D^{oF})^{oE}$, o sea $D^{oF} \subset B^{oF}$.

Así $A = B^{oF} \supset D^{oF} = D^{oF_n} \cap F$.

$D^{oF_n} \cap F$ es vec. del cero en F por lo tanto A es vec. del cero en F, es decir F es barrelado.

Obsérvese en particular que la propiedad vale en el caso de que todos los E_n son Banach, semirreflexivos, de hecho en este caso se sabe que TDS vale.

<u>Teorema 3.15</u>. Sean $\pi(F)$ y $\beta(F,E)$ las topologías proyectiva y fuerte de F respectivamente. Entonces:

$\pi(F) = \beta(F,E)$ sí y sólo si F es barrelado.

<u>Demostración</u>.

Sea A un barril en F y $B = A^{oE}$, entonces $A = (A^{oE})^{oF} = B^{oF}$.
B es acotado ya que $B = (B^{oF})^{oE}$ y B^{oF} es absorbente (Vea. [5] Prop. 1.f pag.190). Entonces $A \in \mathcal{S}_o, \beta(F,E)$ y de la hipótesis se sigue que

$$A \in \mathcal{S}_o, \pi(F)$$

Reciprocamente. Sea A un barril en F, $B = A^{oE}$ es acotado en E, entonces B es absolutamente convexo, cerrado y acotado en E, como F es barrelado existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap E_n$ es acotado en E y

$$\overline{B \cap E_n}^{E} = B$$

$$(B \cap E_n)^{oF} = B^{oF} = A$$

$$(B \cap E_n)^{oF_n} \cap F = A$$

como $B \cap E_n$ es acotado en E_n entonces $(B \cap E_n)^{oF_n}$ es un barril en F_n, de donde $(B \cap E_n)^{oF_n} \cap F$ es un barril en F, es decir A es un barril en F.
Como F es barrelado entonces A es vecindad del cero en F, $\pi(F)$. Ahora, si A es un barril en F y $B = A^{oE}$, entonces $A = (A^{oE})^{oF} = B^{oF}$.
$B = A^{oE}$ es acotado en E, entonces $A = B^{oF}$, B acotado en E, de donde $A \in \mathcal{S}_{o,\beta(F,E)}$.

<u>Teorema 3.16</u>. QJH y H-8 implican TDS.

<u>Demostración</u>.

Sea $B \subset E$ acotado, existe D acotado en algún E_n tal que $B \subset \bar{D}^E$.

Como $B \subset (D^{oF})^{oE} = \bar{D}^E$, entonces $B^{oF} \supset D^{oF}$.

Ahora bien $D^{oF_n} \subset D^{oF}$ pues:

Si $f \in D^{oF_n}$ entonces $f \in F_n$ y $|f(x)| \leq 1$ si $x \in D$, aplicando H-8 inductivamente obtenemos que existen:

$$g_1 \in F_{n+1} \quad \text{extensión de } f \quad |g_1(x)| \leq 1 \quad \text{si} \quad x \in D$$
$$\vdots$$
$$g_i \in F_{n+i} \quad \text{extensión de } g_{i-1} \quad |g_i(x)| \leq 1 \quad \text{si} \quad x \in D$$

entonces existe $g \in F$ tal que:

$$g|E_n = f \quad |g(x)| \leq 1 \quad \text{si} \quad x \in D,$$

es decir $f \in D^{oF}$

entonces $D^{oF_n} \subset D^{oF} \subset B^{oF}$, de aquí se sigue que si $f \in D^{oF_n}$ entonces $f \in F_n$ y $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in B \cup D$, o sea $D^{oF_n} \subset (B \cup D)^{oF_n}$, pero dado que la otra contención se cumple siempre se sigue que:

$$B \subset B \cup D \subset ((B \cup D)^{oF_n})^{oE_n} = (D^{oF_n})^{oE_n} = \bar{D}^{E_n} \subset E_n,$$

entonces $B \subset E_n$ y como $B \subset \bar{D}^{E_n}$ con D acotado en E_n se sigue que B es acotado en E_n.

CAPITULO IV

En ésta sección introducimos la noción de espacios rápidamente completos y palmeados, para mostrar posteriormente que con hipótesis de este tipo se obtienen condiciones equivalentes a DS y TDS.

A lo largo de todo el capítulo $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$ será una sucesión de espacios localmente convexos, Hausdorff tales que la identidad $id: E_n \to E_{n+1}$ es continua y $E = \lim \operatorname{ind} E_n$ es localmente convexo y Hausdorff.

Definición 4.1. Sea X un espacio localmente convexo. Un disco es un conjunto absolutamente convexo (convexo y balanceado) de X. Si A es un disco, denotamos por X_A al espacio vectorial generado por A con la topología generada por $\{\lambda A;\ \lambda > 0\}$, es decir, los conjuntos $\{\lambda A; \lambda > 0\}$ forman una base de vecindades de X_A. El disco A es un disco de Banach si X_A es un espacio de Banach.

Definición 4.2. Un espacio localmente convexo X es rápidamente completo si todo acotado en X está contenido en un disco de Banach acotado. Siguiendo la notación de[20] usaremos "semicompleto" en vez de "secuencialmente completo".

Para abreviar denotaremos las propiedades más usuales de la siguiente manera:

P_o: Para todo acotado B en E_n, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{B}^E$ es acotado en E_m.

P_1: Para todo $n \in \mathbb{N}$ y B disco de Banach acotado en E, existe

$m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{B \cap E_n}^{B} \subset E_m$.

P_2: Para todo $n \in \mathbb{N}$ y B disco de Banach acotado en E, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{B \cap E_n}^{B}$ es acotado en E_m.

Observaciones 4.3.

a) A es absorbente en X_A.

b) La topología generada por los conjuntos $\{\lambda A;\ \lambda > 0\}$ coincide con la dada por la funcional subaditiva de Minkowski P_A, es decir la generada por los conjuntos $\{x;\ P_A(x) < \varepsilon\}$.

c) X_A es Seminormado.

d) Si A es acotado, X_A es normado.

Proposición 4.4. QJH y Po si y sólo si TDS.

Demostración.

Sea A acotado en E, por QJH existe $n \in \mathbb{N}$ y B acotado en E_n tal que $A \subset \overline{B}^{E}$, aplicando Po se sigue que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{B}^{E}$ es acotado en E_m, entonces $A \subset \overline{B}^{E}$ es acotado en E_m, entonces $A \subset \overline{B}^{E}$ es acotado en E_m y por consiguiente TDS se satisface.

Supongamos ahora que TDS se cumple, obviamente TDS implica QJH, solo resta probar que P o se satisface, para ello sea B acotado en E_n, entonces B es acotado en E y $\overline{B}^{E}$ resulta acotado en E, por TDS $\overline{B}^{E}$ es acotado en algún E_m lo cual completa la demostración.

Lema 4.5. Si los espacios E_n son semireflexivos entonces P o se satisface.

Demostración.

Sea $B \subset E_n$, B acotado absolutamente convexo y cerrado, entonces por ser E_n semireflexivo B es débilmente compacto en E_n. ([7] cap. 3 Secc. 8 prop. 1.1 pag. 227).

Probaremos que la función id: $E_{n_\sigma} \to E_\sigma$ (donde E_n y E tienen las topologías débiles correspondientes) es continua. En efecto: Sea V vecindad básica del cero en E

$$V = \{x \in E; |\langle x, y_i\rangle| \leq 1\} \quad y_1,\ldots,y_n \in E'$$

$$id^{-1}(V) = V \cap E_n = \{x \in E_n; |\langle x, y_i\rangle| \leq 1\} \quad y_1,\ldots,y_n \in E'$$

como $E' \subset E_n'$

$id^{-1}(V) = \{x \in E_n; |\langle x, y_i\rangle| \leq 1\} \quad y_1,\ldots,y_n \in E_n'$, vecindad básica del cero en E_n con la topología débil. Entonces B es débilmente compacto en E, de donde B es débilmente cerrado en E, y por ser convexo también es cerrado en E ([7] Cap. 3 Secc. 4 prop. 3 pag. 198), entonces $\overline{B}^E = B$ es acotado en E_n.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por E_{n_b}' al dual de E_n con la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados.

Ahora bien, el teorema 3.14 afirma que QJH se cumple si y sólo si lim proy E_{n_b}' es barrelado, entonces podemos establecer el siguiente:

Teorema 4.6.

a) lim proy E_{n_b}' barrelado y P o si y sólo si TDS.

b) Si lim proy E_{n_b}' es barrelado y cada E_n es semireflexivo entonces TDS se satisface.

Demostración.

a) Usando el teorema 3.14 y la proposición 4.4 se tiene:

lim proy E_{n_b}' barrelado y P o si y sólo si QJH y P o si y sólo si TDS.

b) Utilizando el teorema 3.14 el lema 4.5 y la proposición 4.4 se obtiene la afirmación.

Corolario 4.7. Si cada E_{n_b}' es un espacio de Fréchet entonces TDS si y sólo si P o.

Lema 4.8. Todo espacio localmente convexo semicompleto X es rápidamente completo.

Demostración.

Sea $A \subset X$ acotado, entonces la envolvente convexa balanceada y cerrada de A es también acotado. Sea $B = \overline{\text{cobal } A}$. Probaremos $id: X_B \to X$ es continua.

Sea U abierto en X, $id^{-1}(U) = U \cap X_B$.

Como B es acotado en X, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda B \subset U$, entonces $\lambda B \subset U \cap X_B$ y $id^{-1}(U)$ es abierto en X_B.

Puesto que B es absolutamente convexo y $B \supset A$, sólo falta probar que X_B es completo.

Sea (x_n) sucesión de Cauchy en X_B, como X es semicompleto (x_n) converge en X entonces (x_n) es acotada en X_B, es decir existe $\lambda > 0$ tal que $(x_n) \subset \lambda B$, como λB es cerrado en X y X es semicompleto

$$x_n \to x \in \lambda B$$

entonces X_B es completo y B es un disco de Banach tal que $A \subset B$, entonces X es rápidamente completo.

Usaremos el concepto de espacios palmeados (en francés "espaces a réseaux", en inglés "webbed spaces") para obtener otro criterio sobre TDS. Para una discusión más amplia sobre este concepto puede consultarse [4].

<u>Definición 4.9</u>. Una palma W en un espacio localmente convexo X es una colección de subconjuntos

$$C_{n_1,\dots,n_k} \subset X \quad \text{donde} \quad k,n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}$$

tales que $X = \cup\{C_{n_1},\ n_1 \in \mathbb{N}\}$ y

$$C_{n_1,\dots,n_k} = \cup\{C_{n_1,\dots n_{k+1}};\ \ n_{k+1} \in \mathbb{N}\} \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{N}.$$

La palma W es una palma completante si para cada sucesión $\{n_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ existe otra sucesión de números reales positivos $\{r_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ tal que para todo $a_k \in [0,\ r_k]$ y para todo $x_k \in C_{n_1,\dots,n_k}$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x_k$ converge en X.

<u>Definición 4.10</u>. Un espacio palmeado es un espacio localmente convexo con una palma completante.

<u>Definición 4.11.</u> Sea I el conjunto $\{(n_1,\dots,n_k);\ k,n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}\}$ definimos en I la siguiente relación de orden $(m_1,\dots,m_k) \leqslant (n_1,\dots,n_{k'})$ si y sólo si $k \leqslant k'$ y $m_i = n_i$ $(i \leqslant k)$. θ es el cero en I (es un vector sin entradas), $\theta \leqslant (m_1,\dots,m_k)$ para cualesquiera $k,n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}$.

Proposición 4.12. Sea X un espacio localmente convexo y R un mapeo de I en la familia de subconjuntos de X, $R: I \to P^X$

$$\nu \to e_\nu$$

con las siguientes propiedades:

a) $e_\theta = X$.

b) Si $\mu \leqslant \nu$ entonces $e_\nu \subset e_\mu$.

c) $e_\mu = \bigcup_{\nu>\mu} e_\nu$, para cualquier $\mu \in I$.

entonces la familia $\{e_\nu\}_{\nu \in I}$ define una palma, y recíprocamente, dada cualquier palma existe un mapeo con las propiedades anteriores.

Demostración.

Probaremos primero que $\{e_\nu\}_{\nu \in I}$ define una palma.

Sea $C_{n_1,\ldots,n_k} = e_{(n_1,\ldots,n_k)}$

$$X = e_\theta = \bigcup_{\nu>\theta} e_\nu .$$

Si $\nu > \theta$ $\nu = (n_1,\ldots,n_k)$

$$\nu \geqslant n_1$$

$$e_\nu \subset e_{n_1} \subset \bigcup_{n_1 \in \mathbb{N}} e_{n_1} = \bigcup_{n_1 \in \mathbb{N}} C_{n_1}$$

entonces $\bigcup_{\nu>\theta} e_\nu \subset \bigcup_{n_1 \in \mathbb{N}} C_{n_1}$

es decir $X \subset \bigcup_{n_1 \in \mathbb{N}} C_{n_1}$

la otra contención se cumple obviamente.

$$C_{n_1,\ldots,n_k} = e(n_1,\ldots,n_k) = \bigcup_{\nu > (n_1,\ldots,n_k)} e_\nu$$

Pero $\bigcup_{\nu > (n_1,\ldots,n_k)} e_\nu = \bigcup_{n_{k+1} \in \mathbb{N}} C_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$, en efecto:

Si $\nu > (n_1,\ldots,n_k)$

$\nu = (n_1,\ldots,n_k\ ,\ n_{k+1},\ldots,n_k')$

$\geqslant (n_1,\ldots,n_{k+1})$

entonces $e_\nu \subset e_{(n_1,\ldots,n_{k+1})} = C_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$

$e_\nu \subset \bigcup_{n_{k+1}\in\mathbb{N}} C_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$

Así $\bigcup_{\nu>(n_1,\ldots,n_k)} e_\nu \subset \bigcup_{n_{k+1}\in\mathbb{N}} C_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$

Por otra parte si $n_{k+1}\in\mathbb{N}$:

$$(n_1,\ldots,n_{k+1}) \supset (n_1,\ldots,n_k)$$

entonces $C_{n_1,\ldots,n_{k+1}} \subset \bigcup_{\nu>(n_1,\ldots,n_k)} e_\nu$

de donde

$$\bigcup C_{n_1,\ldots,n_{k+1}} = \bigcup_{(\nu>n_1,\ldots,n_k)} e_\nu$$

Con lo cual se tiene que $\{C_{n_1,\ldots,n_k}\}$ forman una palma.

Recíprocamente supongamos que se tiene una palma $\{C_{n_1,\ldots,n_k}\}$.

Definimos $R\colon I \to P^X$ como sigue:

Si $(n_1,\ldots,n_k) \in I$

$$R(n_1,\ldots,n_k) = e_{(n_1,\ldots,n_k)} = C_{n_1,\ldots,n_k}$$

$$R_\theta = e_\theta = X$$

Basta probar que b) y c) se cumplen. Para b) observemos que

Si $\mu \leqslant \nu$ y $\mu = (n_1,\ldots,n_k)$

entonces $\nu = (m_1,\ldots,m_{k'})$ con $k \leqslant k'$ y $m_i = n_i$ $i \leqslant k$ así

$$
\begin{aligned}
e_{(n_1,\dots,n_k)} = C_{n_1,\dots,n_k} &= \bigcup_{n_{k+1}\in\mathbb{N}} C_{n_1,\dots,n_{k+1}} \supset C_{n_1,\dots,n_k,m_{k+1}} \\
&\supset C_{m_1,\dots,m_{k'}} \\
&= C_{(m_1,\dots,m_{k'})}.
\end{aligned}
$$

es decir $e_\mu \supset e_\nu$.

Para c) supongamos que $\mu = (n_1,\dots,n_k)$

$$e_\mu = C_{n_1,\dots,n_k} = \bigcup_{n_{k+1}\in\mathbb{N}} C_{n_1,\dots,n_{k+1}}$$

como en el recíproco se puede probar que $\bigcup_{n_{k+1}\in\mathbb{N}} C_{n_1,\dots,n_{k+1}} =$ $\bigcup_{\nu>\mu} e_\nu$ con lo cual se obtiene la conclusión.

<u>Definición 4.13</u>. Decimos que una palma es convexa, absolutamente convexa o cerrada si cada uno de sus elementos es convexo, absolutamente convexo o cerrado, respectivamente.

<u>Definición 4.14</u>. Una sucesión completante B_k $(k \in \mathbb{N})$ de un espacio X localmente convexo es una sucesión decreciente de subconjuntos de X tal que existe una sucesión r_k $(k \in \mathbb{N})$ de números no negativos tales que una cantidad numerable de ellos difieren de cero y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converge en X si $a_k \in [0,r_k]$ y $x_k \in B_k$. En ese caso decimos que la sucesión (r_k) está asociada a la sucesión (B_k).

La sucesión (B_k) es estrictamente completante si la sucesión asociada (r_k) se puede elegir de tal manera que $\sum_{k=k_o+1}^{\infty} a_k x_k \in B_{k_o}$ para cualquier $k_o \in \mathbb{N}$, $a_k \in [0,r_k]$ y $x_k \in B_k$.

En ese caso decimos que la sucesión (r_k) está asociada estrictamente a la sucesión B_k.

Definición 4.15. Sea $\{e_\nu, \nu \in I\}$ una palma en un espacio localmente convexo X. Una sucesión e_{ν_n} $(n \in \mathbb{N})$ de elementos de la palma tales que $\nu_{n+1} > \nu_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es llamado un ramal de la palma. Así un ramal es una sucesión $e_{(n_1,\ldots,n_{k_i})}$ $(i \in \mathbb{N})$, donde n_k $(k \in \mathbb{N})$ es arbitrario y (k_i) es una sucesión creciente que diverge a ∞.

Proposición 4.16. Una palma es completante si y sólo si cada uno de sus ramales es completante.

Demostración.

Es inmediata de la definición.

Definición 4.17. Una palma es estricta si es absolutamente convexa y cada uno de sus ramales es estrictamente completante. Un espacio palmeado estricto es un espacio localmente convexo con una palma estricta.

Definición 4.18. Sea X un espacio localmente convexo, Hausdorff. Una sucesión $(x_n) \subset X$ es rápidamente convergente a x si existe un disco de Banach acotado B de X tal que $x_n \to x$ en X_B. Decimos que un subconjunto de X es cerrado para sucesiones rápidamente convergentes si contiene los límites de todas las sucesiones rápidamente convergentes.

Lema 4.19. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a cero entonces la cerradura de la envolvente convexo-balanceada de

$\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, $\overline{\text{cobal}\ \{x_n\}}$, es el conjunto de todas las series convergentes de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ con $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq 1$. Si todas las series de la forma anterior son convergentes, entonces $\overline{\text{cobal}\ \{x_n\}}$ es compacto.

Demostración

([4] Cap. III Secc. 1 Prop. III. 1.4 Pag. 30).

Lema: 4.20. Sea B_n una sucesión completante de un espacio localmente convexo X, $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión asociada a $\{B_n\}$ y U una vecindad del cero en X. Entonces para k suficientemente grande

$\{\sum_{i=k}^{\infty} \mu_i x_i;\ \mu_i \in [0, \lambda_i]\quad x_i \in B_i\} \subset U$. En particular $\lambda_i B_i \subset U$ para $i \geq k$.

Demostración.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer U cerrado, entonces es suficiente probar que:

$\{\sum_{i=k}^{n} \mu_i x_i;\ n \geq k\ \ \mu_i \in [0, \lambda_i],\ x_i \in B_i\} \subset U$ para k suficientemente grande. Si este no es el caso, existen, por inducción, sucesiones $\{m_k\}$, $\{n_k\}$ crecientes divergentes a ∞, tales que $n_k < m_{k+1}$ y si $\mu_i \in [0, \lambda_i]$, $x_i \in B_i$ con $m_k \leq i \leq n_k$ entonces $\sum_{i=m_k}^{n_k} \mu_i x_i \notin U$ para todo $k \in \mathbb{N}$ pero esto es imposible ya que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i x_i$ es convergente en X.

Proposición 4.21. Sea B_k $(k \in \mathbb{N})$ una sucesión completante en un espacio localmente convexo X, entonces existe una sucesión asociada λ_k $(k \in \mathbb{N})$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ es rápidamente convergente para cualesquiera $\mu_k \in [0,\lambda_k]$ y $x_k \in B_k$.

Demostración.

Sea λ_n $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión asociada a $B_n (n \in \mathbb{N})$. Por el lema 4.19, si $x_n \in B_n$, el conjunto

$$K = \{\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \lambda_k x_k : \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k| \leq 1\}$$

es compacto y absolutamente convexo puesto que si $\sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k| \leq 1$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \lambda_k x_k$ converge, observese que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \lambda_k x_k$ se puede expresar como

$$\Sigma\varepsilon_k^{(1)}\lambda_k x_k - \Sigma\varepsilon_k^{(2)}\lambda_k x_k + i\ \Sigma\varepsilon_k^{(3)}\lambda_k x_k - i\ \Sigma\varepsilon_k^{(4)}\lambda_k x_k$$

donde $0 \leq \varepsilon_k^{(j)} \leq 1$ $j = 1,\ldots,4$. . Puesto que cada una de las series anteriores converge, $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \lambda_k x_k$ converge. Sea $r_k = \frac{1}{2^k} \lambda_k$, probaremos que si $\mu_k \in [0,k]$ entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ converge en X_K.

Sea $\lambda > 0$, λK es vecindad del cero en X_K. Puesto que $2^n \to \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $2^n \lambda > 1$.

$$\sum_{k=N}^{\infty} 2^N \mu_k x_k \in K \quad \text{si} \quad \mu_k \in [0,\frac{\lambda_k}{2^k}],$$

ya que $\varepsilon_k = 2^N \frac{\mu_k}{\lambda^k} \leq \frac{2^N \lambda_k}{2^k \lambda_k} \leq 1$ $k \geq N$ y $\sum_{k=N}^{\infty} \varepsilon_k \lambda_k x_k \in K$,

pero $\varepsilon_k \lambda_k x_k = 2^N \mu_k x_k$ entonces $\sum_{k=N}^{\infty} 2^N \mu_k x_k \in K \subset 2^N \lambda K$

de donde $\sum_{k=N}^{\infty} \mu_k x_k \in \lambda K$

es decir $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ converge en X_K. Así, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ converge rápidamente en X.

Teorema 4.22. (Teorema de la gráfica cerrada)

Sean X, Y espacios localmente convexos, X de Fréchet, Y palmeado estricto y T un operador lineal de Y en X tal que la gráfica de T, $G(T)$ es cerrada en $X\times Y$ respecto a sucesiones rápidamente convergentes. Entonces T es continua.

Demostración.

Sea U_k $(k\in \mathbb{N})$ una base de vecindades del cero en X tales que $2U_{k+1}\subset U_k$ para cada $k\in\mathbb{N}$ y $R=\{e_\nu;\ \nu\in I\}$ una palma estricta en Y. Como $X=T^{-1}(Y)$ entonces $X=T^{-1}(\bigcup_{n_1\in\mathbb{N}} e_{n_1})=$
$=\bigcup_{n_1\in\mathbb{N}} T^{-1}e_{n_1}$. Puesto que la unión numerable de conjuntos de la 1ª categoría es también de la 1ª categoría ([4] Cap. I Secc. 1 Prop. I 1.2 Pag. 1), se sigue que existe $n_1\in\mathbb{N}$ tal que $T^{-1}e_{n_1}$ no es de la 1ª categoría en X. Pero $T^{-1}e_{n_1}=\bigcup_{n_2\in\mathbb{N}} T^{-1}e_{(n_1,n_2)}$, utilizando el mismo argumento, se sigue que existe $n_2\in\mathbb{N}$ tal que $T^{-1}e_{(n_1,n_2)}$ no es de la 1ª categoría. Procediendo por inducción obtenemos que, existe un ramal e_{ν_n} $(n\in\mathbb{N})$ de la palma R tal que $T^{-1}e_{\nu_n}$ $(n\in\mathbb{N})$ no es de la 1ª categoría para cada $n\in\mathbb{N}$, se tiene entonces que para cada $n\in\mathbb{N}$ el interior de la cerradura de $T^{-1}e_{\nu_n}$, $\overline{T^{-1}e_{\nu_n}}^{\,\circ}$ es no vacío, y puesto que $T^{-1}e_{\nu_n}$ es absolutamente convexo, entonces $\overline{T^{-1}e_{\nu_n}}^{\,\circ}$ es vecindad del cero en X para cada $n\in\mathbb{N}$. Existe $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión creciente, $k_n\to\infty$ tal que $U_{k_n}\subset\overline{T^{-1}e_{\nu_n}}$ para cada $n\in\mathbb{N}$.
Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión estrictamente asociada al ramal

e_{ν_n} $(n \in \mathbb{N})$. Supongamos, considerando en caso necesario una subsucesión, que $\lambda_n \neq 0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por la proposición 4.21 podemos escoger $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de tal manera que $\Sigma\lambda_n y_n$ sea rápidamente convergente para todo $y_n \in e_{\nu_n}$. Finalmente cambiando $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ podemos suponer que $U_{k_n} \subset \lambda_n T^{-1} e_{\nu_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $U_{k_n} \subset T^{-1} e_{\nu_{n-1}}$ si $n > 1$. En efecto:

$U_{k_n} \subset \lambda_n \overline{T^{-1} e_{\nu_n}} \subset \lambda_n T^{-1} e_{\nu_n} + U_{k_{n+1}}$ $\quad n \in \mathbb{N}$. Dado $x_{n_o} \in U_{k_{n_o}}$, existen sucesiones $x_n \in U_{k_n}$ $(n > n_o)$ y $y_n \in T^{-1} e_{\nu_n}$ tales que:

$$x_n = \lambda_n y_n + x_{n+1}$$

$$\begin{aligned}
x_{n_o} &= \lambda_{n_o} y_{n_o} + x_{n_o+1} \\
x_{n_o+1} &= \lambda_{n_o+1} y_{n_o+1} + x_{n_o+2} \\
&\vdots \\
x_{n_o+k} &= \lambda_{n_o+k} y_{n_o+k} + y_{n_o+k+1}
\end{aligned}$$

Sea $N = n_o + k$, sumando obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n_o}^{N} x_k &= \sum_{k=n_o}^{N} \lambda_k y_k + \sum_{k=n_o}^{N} x_{k+1} \\
&= \sum_{k=n_o}^{N} \lambda_k y_k + \sum_{k=n_o}^{N} x_k - x_{n_o} + x_{N+1}
\end{aligned}$$

$$x_{n_o} = \sum_{k=n_o}^{N} \lambda_K Y_K + x_{N+1}$$

entonces $\sum_{n=n_o}^{N} \lambda_n y_n \to x_{n_o}$.

Por otra parte, por definición de sucesión estrictamente asociada y puesto que $T(y_n) \in e_{\nu_n}$,

$\sum_{n=n_o}^{N} \lambda_n T y_n$ converge en Y rápidamente a algún punto $z \in e_{\nu_{n_o-1}}$.

Como $G(T)$ es cerrado para sucesiones rápidamente convergentes entonces $(x_{n_o}, z) \in G(T)$, de donde:
$x_{n_o} \in T^{-1} e_{\nu_{n_o-1}}$, por lo tanto $U_{k_{n_o}} \subset T^{-1} e_{\nu_{n_o-1}}$.
Por el lema 4.20, para cualquier $V \in \mathcal{V}_{o,Y}$
$\lambda_{n+1} e_{\nu_{n+1}} \subset V$ para n suficientemente grande entonces como
$U_{k_n} \subset T^{-1} e_{\nu_{n+1}}$

$$\lambda_{n+1} U_{k_n} \subset \lambda_{n+1} T^{-1} e_{\nu_{n+1}}$$
$$= T^{-1} \lambda_{n+1} e_{\nu_{n+1}}$$

entonces $T(\lambda_{n+1} U_{k_n}) \subset \lambda_{n+1} e_{\nu_{n+1}} \subset V$ y T es continua.

<u>Proposición 4.23.</u> Si X es un espacio de Fréchet entonces toda sucesión convergente en X es rápidamente convergente

<u>Demostración</u>.

Supongamos que $x_n \to 0$. Sea d una métrica invariante compatible con la topología de X, entonces $d(x_n, 0) \to 0$, existe una sucesión creciente n_k tal que $d(x_n, 0) < \frac{1}{k^2}$ si $n \geq n_k$.

Sea $\gamma_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n < n_1 \\ k & \text{si } n_k \leq n < n_{k+1} \end{cases}$

entonces si $n \geq n_k$

$$\begin{aligned} d(\gamma_n x_n, 0) &= d(kx_n, 0) \\ &\leq d(x,0) + d(2x_n, x_n) + d(3x_n, 2x_n) + \ldots + d(kx_n, (k-1)x_n) \\ &= k\, d(x_n, 0) < \frac{1}{k} \end{aligned}$$

es decir $\gamma_n x_n \to 0$ donde $\gamma_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\gamma_n \to \infty$.

Sea $K = \overline{\mathrm{cobal}\ \gamma_n y_n}$ la cerradura de la envolvente convexa y balanceada de la colección $\{\gamma_n y_n\}$. K es acotado en X, es decir es un disco acotado. Probaremos que (x_n) converge a cero en X_K.

Sea $\lambda > 0$ Demostraremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \lambda K$ si $n \geq N$. Como $\gamma_n \to \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_n \lambda > 1$ si $n \geq N$, entonces:

Si $n \geq N$ $\gamma_n x_n \in k \subset \gamma_n \lambda K$, así $x_n \in \lambda K$ como queríamos demostrar. Sólo falta probar que K es un disco de Banach, es decir que X_K es completo.

Sea (x_m) una sucesión de Cauchy en X_K. Tomando una subsucesión podemos suponer que $x_m - x_{m-1} \in \frac{1}{2^m}K$ para todo m. Más aún, x_m es de Cauchy en X pues si $U \in \mathcal{U}_{o,X}$, existe $\lambda > 0$ tal que $K \subset \lambda U$, de donde $\frac{1}{\lambda}K \subset U$.

Por otra parte, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq M$ entonces $\frac{1}{2^m} < \frac{1}{\lambda}$, de donde:

$$x_m - x_{m-1} \in \frac{1}{2^m}K \quad \frac{1}{\lambda}K \subset U \quad \text{si} \quad m \geq M,$$

como X es completo, existe x tal que $x_m \to x$. Probaremos que $x_m \to x$ en X_K.

Sea $m_o \in \mathbb{N}$, si $m \geq m_o$

$$\begin{aligned} x_m = x_{m_o} & + (x_{m_o+1} - x_{m_o}) + (x_{m_o+2} - x_{m_o+1}) + \dots \\ & + (x_{m_o+r} - x_{m_o+r-1}). \\ & \in x_{m_o} + \left(\frac{1}{2^{m_o+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m_o+r}} \right) K \\ & = x_{m_o} + \frac{1}{2^{m_o+1}} \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{r-1}} \right) K \\ & = x_{m_o} + \frac{1}{2^{m_o+1}} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^r}{1-\frac{1}{2}} \right) K \\ & = x_{m_o} + \frac{2}{2^{m_o+1}} \left(1 - \frac{1}{2^r} \right) K \\ & = x_{m_o} + \frac{1}{2^{m_o}} \left(1 - \frac{1}{2^r} \right) K \subset x_{m_o} + \frac{1}{2^{m_o}} K \end{aligned}$$

en particular $x_m - x_{m_o} \in K$, como K es cerrado y $x_m \to x$ entonces $x \in K$ y $x - x_{m_o} \in \frac{1}{2^{m_o}} K$.

Así $x_m - x = x_m - x_{m_o} + x_{m_o} - x$

$$\begin{aligned} & \in \frac{1}{2^{m_o}} K - \frac{1}{2^{m_o}} K \\ & = \frac{1}{2^{m_o-1}} K \quad \text{si} \quad m \geq m_o \end{aligned}$$

y $x_m \to x$ en X_K.

Por último si la sucesión (x_n) no converge a cero, suponiendo que converge a x basta tomar la sucesión γ_n que corresponde a $(x_n - x)$ y repetir el procedimiento.

Teorema 4.24. El límite inductivo de espacios palmeados (palmeados estrictos) es palmeado (palmeado estricto).

Demostración.

Si $R^{(n)} = \{e_\nu^{(n)};\ \nu \in I\}$ es una palma estricta en X_n y

$X = \lim \text{ind}\, X_n$, definimos

$e_{n_1} = X_{n_1}$, $e_\phi = X$

$e_{(n_1,\ldots,n_k)} = e^{(n_1)}_{(n_2,\ldots,n_k)}$ $\quad (k, n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N})$.

Demostraremos que ésta es una palma en X, es decir:

a) $e_\phi = X$.

b) Si $\mu > \nu$ $e_\mu \subset e_\nu$.

c) $e_\nu = \bigcup_{\mu > \nu} e_\mu$.

a) Se cumple por definición.

Para b) Supongamos que $\mu > \nu$.

$$\nu = (n_1,\ldots,n_k) \quad \mu = (n_1,\ldots,n_k,\ldots,n_{k'}) \quad k' > k$$

$e_\mu = e^{(n_1)}_{(n_2,\ldots,n_{k'})} \subset e^{(n_1)}_{(n_2,\ldots,n_k)} = e_\nu$

ya que $(n_2,\ldots,n_{k'}) > (n_2,\ldots,n_k)$ y $\{e^{(n_1)}\}$ es una palma en X_{n_1}, entonces $e_\mu \subset e_\nu$.

c) Sea $\nu = (n_1,\ldots,n_k)$ y $\mu > \nu$

$\mu = (n_1,\ldots,n_{k'})$ con $k' > k$, entonces:

$\bigcup_{\mu > \nu} e_\mu = \bigcup_{k' > k} e^{(n_1)}_{(n_2,\ldots,n_{k'})} = e^{(n_1)}_{(n_2,\ldots,n_k)}$ ya que $\{e^{(n_1)}\}$ es una palma de X_{n_1}.

Para ver que la palma es completante (estricta), debemos ver que es absolutamente convexa y que cualquier ramal es completante (estrictamente completante). La primera afirmación es obvia ya que cada e_μ esta definido como $e^{(n_1)}_{(n_2,\ldots,n_k)}$ y $\{e^{(n_1)}\}$ es una palma estricta, en consecuencia absolutamente convexa.

Veamos que cada ramal es completante.

Sea e_{ν_n} un ramal, es decir $\nu_{n+1} > \nu_n$ entonces $e_{\nu_1} \supset e_{\nu_2} \supset \ldots \supset e_{\nu_n} \supset e_{\nu_{n+1}} \supset \ldots$ pero si $\nu_i = (n_1, \ldots, n_{k_i})$ entonces se tiene:

$$e^{(n_1)}_{(n_2,\ldots,n_{k_1})} \supset e^{(n_1)}_{(n_2,\ldots,n_{k_2})} \supset \ldots \supset e^{(n_1)}_{(n_2,\ldots,n_{k_n})} \supset \ldots$$

$$\text{con } k_1 < k_2 < \ldots < k_n$$

es decir, es un ramal en $e^{(n_1)}$, por lo tanto es completante (estrictamente completante) y como la topología de X_{n_1} es más fina que la de X, entonces es completante (estrictamente completante) en X.

<u>Proposición 4.25.</u> Si X es un espacio de Fréchet entonces X es palmeado estricto.

<u>Demostración</u>.

Sea $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$ una sucesión fundamental de vecindades del cero absorbentes, absolutamente convexas y cerradas en X.

Definimos $C_{n_1,\ldots,n_k} = \bigcap_{j=1}^{k} n_j U_j$ probaremos que los conjuntos $C_{n_1,\ldots,n_k}$ forman una palma en X.

$\bigcup_{n_1=1}^{\infty} C_{n_1} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} n_1 U_1 = X$ pues U_i es absorbente para todo $i \in \mathbb{N}$ además:

$$\bigcup_{n_k=1}^{\infty} C_{n_1,\ldots,n_k} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{k} n_j U_j$$
$$= \bigcup_{n_k=1}^{\infty} (n_1 U_1 \cap \ldots \cap n_k U_k)$$
$$= \bigcup_{n_k=1}^{\infty} (n_k U_k \cap n_1 U_1 \cap \ldots \cap n_{k-1} U_{k-1})$$
$$= (\bigcup_{n_k=1}^{\infty} n_k U_k) \cap (n_1 U_1 \cap \ldots \cap n_{k-1} U_{k-1})$$
$$= (\bigcup_{n_k=1}^{\infty} n_k U_k) \cap (\bigcap_{j=1}^{k-1} n_j U_j)$$
$$= E \cap C_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$$
$$= C_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$$

Solo falta probar que la palma es completante. Para ello, dada una sucesión (n_k) de números naturales sea $r_k = \frac{1}{2^k n_k}$ entonces si $0 \leqslant a_k \leqslant r_k$ probaremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ es convergente.

Sea $x_k \in C_{n_1,\ldots,n_k}$

$x_k \in \bigcap_{j=1}^{k} n_j U_j$

$x_k \in n_1 U_1 \cap \ldots \cap n_k U_k$

$x_k \in n_k U_k$

$a_k x_k \in r_k n_k U_k = \frac{1}{2^k n_k} n_k U_k$

entonces $a_k x_k \in \frac{1}{2^k} U_k$

Por otra parte consideremos la suma:

$$\sum_{k=k_o}^{k_o+m} a_k x_k = a_{k_o} x_o + a_{k_o+1} x_{k_o+1} + \ldots + a_{k_o+m} x_{k_o+m}$$

$$\in \frac{1}{2^{k_o}} U_{k_o} + \frac{1}{2^{k_o+1}} U_{k_o+1} + \ldots + \frac{1}{2^{k_o+m}} U_{k_o+m}$$

$$\subset \frac{1}{2^{k_o}} U_{k_o} + \frac{1}{2^{k_o+1}} U_{k_o} + \ldots + \frac{1}{2^{k_o+m}} U_{k_o}$$

$$= \frac{1}{2^{k_o}} U_{k_o} \; (1+\tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2^m})$$

$$= \frac{1}{2^{k_o}} U_{k_o} \left(\frac{(\frac{1}{2})^{m+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2^{k_o-1}} \; (1 - \frac{1}{2^{m+1}}) \; U_{k_o}$$

$$= \frac{1}{2^{k_o-1}} \left((\tfrac{2}{2})^{m+1} - \frac{1}{2^{m+1}} \right) U_{k_o}$$

$$= \frac{1}{2^{k_o-1}} \; \frac{1}{2^{m+1}} \; (2^{m+1} - 1) \; U_{k_o}$$

$$= \frac{1}{2^{k_o+m}} \; (2^{m+1} - 1) \; U_{k_o}$$

entonces $\displaystyle\sum_{k=k_o}^{k_o+m} a_k x_k \in \frac{1}{2^{k_o+m}} (2^{m+1} - 1) \; U_{k_o}$

pero $m + 1 \leqslant k_o + m$

$$2^{m+1} \leqslant 2^{k_o+m}$$

$$2^{m+1} - 2^{k_o+m} \leqslant 0 < 1$$

$$2^{m+1} - 1 < 2^{k_o+m}$$

con lo cual $\displaystyle\frac{1}{2^{k_o+m}} (2^{m+1} - 1) < 1$

y como U_{k_o} es balanceado se tiene que

$$\sum_{k=k_o}^{k_o+m} a_k x_k \in U_{k_o} \; ,$$

por consiguiente $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ es convergente en X entonces X es palmeado.

Para ver que es palmeado estricto, obsérvese que puesto que

$\sum_{k=k_o}^{\infty} a_k x_k \in U_{k_o}$

y $U_{k_o} \subset U_{k_o-1} \subset \ldots \subset U_2 \subset U$,

entonces $\sum_{k=k_o}^{\infty} a_k x_k \in U_k$ si $k \leqslant k_o$

de donde $\sum_{k=k_o}^{\infty} a_k x_k \in n_k U_k$ si $k \leqslant k_o$

de ahí que:

$$\sum_{k=k_o}^{\infty} a_k x_k \in n_1 U_1 \cap n_2 U_2 \cap \ldots \cap n_{k_o} U_{k_o}$$
$$= C_{n_1, \ldots, n_{k_o}}$$

es decir la sucesión es estrictamente completante por consiguiente X es palmeado estricto.

Proposición 4.26. Si X es de Fréchet entonces X es rápidamente completo.

Demostración.

Si X es de Fréchet entonces X es semicompleto, la conclusión se sigue del lema 4.8.

Proposición 4.27. Sean X y Y espacios localmente convexos, T una función lineal de X en Y con dominio X. X es un espacio de Fréchet, Y tiene una palma estricta $R = \{e_\nu;\ \nu \in I\}$ y la gráfica G(T) de T es cerrada para sucesiones rápidamente convergentes en $X \times Y$. Entonces si $T^{-1}e_\mu$ es una vecindad de cero en X, existe $\nu > \mu$ tal que $T^{-1}e_\nu$ también es vecindad de cero en X. En particular existe un ramal e_{ν_k} $(k \in \mathbb{N})$ tal que cualquier $T^{-1}e_{\nu_k}$ es vecindad de cero.

Demostración.

Supongamos que $T^{-1}e_\mu \in \mathcal{N}_{o,X}$, entonces $T^{-1}e_\mu$ no puede ser de la 1ª categoría, en efecto: llamemos $U = T^{-1}e_\mu$ y suponga mos que es de la 1ª categoría, entonces $X - U$ es denso en X: (X es de Baire) ([4] Cap. 1 Secc. 1 Teo. I.1.5 Pag. 2) como $U \in \mathcal{N}_o$, escogemos A abierto tal que

$$0 \in A \subset U^\circ$$

entonces $A \cap \overline{X - U} = \phi$ lo cual es una contradicción.

Ahora bien, como $T^{-1}e_\mu = \bigcup_{\nu > \mu} T^{-1}e_\nu$ entonces existe $\nu_1 > \mu$ tal que $T^{-1}e_{\nu_1}$ tampoco es de la 1ª categoría, ya que la unión de conjuntos de la 1ª categoría es de la 1ª categoría.

Por inducción podemos encontrar un ramal e_{ν_μ} tal que $\overline{T^{-1}e_{\nu_n}} \neq \phi$ para cada $n \in \mathbb{N}$, esto último es cierto ya que $T^{-1}e_{\nu_n}$ no es de la 1ª categoría, es decir $\overline{X - T^{-1}e_{\nu_n}} \neq X$ entonces existe $x \in X$ tal que $x \notin \overline{X - T^{-1}e_{\nu_n}}$ con lo cual $x \in T^{-1}e_{\nu_n} \subset \overline{T^{-1}e_{\nu_n}}$.

Escojamos entonces una sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ estrictamente asocia da (existe ya que X es un espacio de Fréchet, proposición 4.25), y supongamos que $\lambda_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en caso necesario tomamos una subsucesión.

El interior $\overline{T^{-1}e_{\nu_n}}^{\,o}$ de $\overline{T^{-1}e_{\nu_n}}$, es no vacío. Además $0 \in \overline{T^{-1}e_{\nu_n}}$ ya que $0 \in e_{\nu_n}$ $(0 = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x_k \in e_{\nu_n}$ $a_k = 0 \in [0, \lambda_k]$ y T es lineal).

Por lo tanto $\lambda_n \overline{T^{-1}e_{\nu_n}}$ contiene al cero y tiene interior no vacío, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe U_n vecindad del cero tal que:

$$U_n \subset \lambda_n \overline{T^{-1}e_{\nu_n}}$$

entonces $U_n \subset \lambda_n \overline{T^{-1}e_{\nu_n}} \subset \lambda_n T^{-1}e_{\nu_n} + U_{n+1}$. De la misma manera que en el Teorema 4.22 se obtiene que

$$x_{n_o} = \sum_{k=n_o}^{N} \lambda_k y_k + x_{N+1}$$

Por otra parte, como $T y_n \in e_{\nu_n}$, usando la proposición 4.21 tenemos que:

$\sum_{n=n_o}^{N} \lambda_n y_n$ converge rápidamente en Y a algún punto $z \in e_{\nu_{n_o-1}}$, como por hipótesis $G(T)$ es cerrada para sucesiones rápidamente convergentes, entonces (x_{n_o}, z) está en $G(T)$, entonces $x_{n_o} \in T^{-1}e_{\nu_{n_o-1}}$. Por lo tanto $U_{n_o} \subset T^{-1}e_{\nu_{n_o-1}}$.

Así $T^{-1}e_{\nu_n}$ es vecindad del cero para cada $n \in \mathbb{N}$.

<u>Teorema 4.28</u>. Sea Y un espacio de Fréchet, $X = \lim\limits_{\substack{\longrightarrow \\ n \in \mathbb{N}}} \text{ind}\, X_n$, donde X_n es un espacio palmeado para todo $n \in \mathbb{N}$ y $T\colon Y \to X$ es una función cuya gráfica es cerrada para sucesiones rápidamente convergentes. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T(Y) \subset X_n$ y $T\colon Y \to X_n$ es continua.

<u>Demostración</u>.

Supongamos primero que los espacios X_n tienen una palma estricta $R^{(n)}$, entonces, puesto que el límite inductivo de espacios palmeados estrictos es también palmeado estricto (Teorema 4.24),

X tiene una palma estricta en la cual $e_n = X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por la proposición 4.27 existe un ramal e_{ν_k} $(k \in \mathbb{N})$ tal que $T^{-1}e_{\nu_k}$ es una vecindad del cero en X. En particular si $i_1 \leq \nu_1$ entonces $e_{i_1} \supset e_{\nu_1}$

$$T^{-1}e_{\nu_1} \subset T^{-1}e_{i_1} = T^{-1}X_{i_1}$$

Si $x \in Y$, existe λ_x tal que:

$$x \in \lambda_x T^{-1}e_{\nu_1} \subset \lambda_x T^{-1}X_{i_1}$$

entonces $T(x) \in \lambda_x X_{i_1} = X_{i_1}$

por lo tanto $T(Y) \subset X_{i_1}$

para terminar, T es continua por el teorema de la gráfica cerrada (Teorema 4.22)

Teorema 4.29. Si E_n es palmeado para cada $n \in \mathbb{N}$ y E es rápidamente completo entonces TDS se satisface.

Demostración.

Sea A acotado en E, por ser E rápidamente completo, existe un disco de Banach B acotado en E tal que $A \subset B$, entonces X_B es un espacio de Banach. De la misma manera que en el lema 4.8 se tiene que la identidad

$$id: X_B \to E \text{ es continua}$$

Por el teorema 4.28 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset E_n$ y la identidad $id: X_B \to E_n$ es continua, entonces $A \subset B \subset E_n$.

Para concluir probaremos que A es acotado en E_n. Sea $\lambda > 0$, λB es una vecindad básica del cero en X_B, entonces $\frac{1}{\lambda} > 0$ es tal que

$$A \subset \frac{1}{\lambda}(\lambda B)$$

es decir, A es acotado en X_B.

Por último como $id: X_B \to E_n$ es continua, A es acotado en E_n.

<u>Teorema 4.30</u>. Si TDS se satisface y E_n es rápidamente completo para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces E es rápidamente completo.

<u>Demostración</u>.

Sea A acotado en E. Aplicando TDS se obtiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que A es acotado en E_n, por ser E_n rápidamente completo, existe un disco de Banach B acotado en E_n tal que $A \subset B$. Pero entonces $E_B = E_{n_B}$ y como B es acotado en E_n, entonces E_{n_B} es un espacio de Banach (observación 4.3 d).), es decir B es un disco de Banach por lo tanto E es rápidamente completo.

Combinando los teoremas 4.29 y 4.30 se obtiene el siguiente:

<u>Corolario 4.31</u>. Si todos los E_n son palmeados y rápidamente completos entonces TDS es equivalente a E es rápidamente completo.

Si además usamos la proposición 4.25 y las observaciones 4.3 obtenemos:

<u>Corolario 4.32</u>. Si todos los E_n son de Fréchet entonces TDS es equivalente a E es rápidamente completo.

El resultado mencionado en el corolario 4.32 aparece también en [16] Teorema 5. La demostración utiliza la noción de espacio palmeado estricto.

Lema 4.33. Sea B un disco de Banach acotado en E. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$B = \overline{B \cap E_n}^B$$

Demostración.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $B_n = \overline{B \cap E_n}^B$ y $F_n = E_{B_n}$.

Probaremos primero que F_n es cerrado en E_B con lo cual, puesto que E_B es de Banach, F_n es de Banach.

En efecto: Sea $(z_n) \subset E_{B_n}$ una sucesión convergente y supongamos que

$$z_n \to z$$

$$z_n = \alpha x_n + \beta y_n \qquad x_n, y_n \in B_n \qquad \alpha, \beta \neq 0$$

$$\alpha x_n + \beta y_n \to x$$

$$x_n \to \frac{x - \lim \beta y_n}{\alpha}$$

$$y_n \to \frac{x - \lim \alpha x_n}{\beta}$$

Como B_n es cerrado en E_B

$$\frac{x - \lim \beta y_n}{\alpha} \in B_n$$

$$\frac{x - \lim \alpha x_n}{\beta} \in B_n$$

entonces $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha \left(\frac{x - \lim \beta y_n}{\alpha}\right) + \beta\left(\frac{x - \lim \alpha x_n}{\beta}\right)$

$$= x \in \alpha B_n + \beta B_n$$

entonces $x \in E_{B_n}$

por lo tanto F_n es de Banach

en particular F_n es palmeado. (lema 4.25).

Definimos ahora $Y = \lim \operatorname{ind} F_n$

por definición de topología inductiva, la topología de E_B esta contenida en la topología de Y, entonces la identidad:

$$id: E_B \to Y \text{ es continua,}$$

aplicando el teorema 4.28, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $id: E_B \to F_n$ es continua, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $\delta B \subset B_n$, entonces, si $x \in B$ $\delta x \in B_n$, $\delta x \in \overline{B \cap E_n}^B \subset \overline{B}^B \cap \overline{E_n}^B \subset E_n$, entonces $x \in E_n$ de aquí que $x \in B \cap E_n \subset \overline{B \cap E_n}^B$ y puesto que $\overline{B \cap E_n}^B \subset B$ se sigue que $B = \overline{B \cap E_n}^B$.

<u>Teorema 4.34</u>. Si E es rápidamente completo entonces:

a) DS si y sólo si P_1.

b) TDS si y sólo si P_2.

<u>Demostración</u>.

Sea $A \subset E$ acotado.

como E es rápidamente completo, existe B disco de Banach en E tal que $A \subset B$, aplicando el lema 4.33 obtenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B = \overline{B \cap E_n}^B$.

Si P_1 se cumple, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{B \cap E_n}^B \subset E_m$ y por consiguiente $B \subset E_m$, es decir DS se cumple.

Si P_2 se cumple, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{B \cap E_n}^B$ es acotado en E_m y entonces B es acotado en E, con lo cual TDS se satisface.

Recíprocamente, si DS se cumple, sea $n \in \mathbb{N}$ y B disco de Banach en E, aplicando nuevamente el lema 2.31 se tiene que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\overline{B \cap E_{n_1}}^B = B.$$

Por DS existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset E_m$ entonces $\overline{B \cap E_{n_1}}^B =$
$= B \subset E_m$.

Por otra parte $B \cap E_n \subset B$

$$\overline{B \cap E_n}^B \subset \overline{B}^B = \overline{B \cap E_{n_1}}^B = B$$

entonces $\overline{B \cap E_n}^B \subset B \subset E_m$

es decir P_1 se cumple.

Si TDS se cumple entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset E_m$ acotado, procediendo como en el caso anterior se tiene que $\overline{B \cap E_n}^B \subset B \subset E_m$ es acotado, es decir P_2 se satisface

Teorema 4.35.

a) Si P_1 se cumple y E es rápidamente completo entonces E_n es rápidamente completo para todo $n \in \mathbb{N}$

b) Si TDS se cumple y cada E_n es rápidamente completo entonces E es rápidamente completo

c) Si TDS se cumple, entonces E_n es rápidamente completo para cada $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si E es rápidamente completo.

Demostración.

a) Sea A acotado en E_n, entonces A es acotado en E y por ser E rápidamente completo existe B disco de Banach contenido en E tal que $B \subset A$, haciendo uso del lema 4.33 se tiene que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\overline{B \cap E_r}^B = B,$$

de P_1 se obtiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$B = \overline{B \cap E_r}^B \subset E_m$$

entonces B es un disco de Banach en E_m y $A \subset B$ es decir E_n es rápidamente completo.

b) Sea A acotado en E, por TDS se tiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset E_m$ acotado, como E_n es rápidamente completo, existe B disco de Banach en E_m tal que $A \subset B$, entonces B es disco de Banach en E y $A \subset B$ por lo tanto E es rápidamente completo.

c) Se sigue de a) y b).

<u>Teorema 4.36</u>.

a) P_1 y E rápidamente completo implican DS y E_n rápidamente completo para cada $n \in \mathbb{N}$.

b) P_2 y E rápidamente completo implican TDS y E_n rápidamente completo para cada $n \in \mathbb{N}$.

<u>Demostración</u>.

Se sigue de los teoremas 4.34 y 4.35. Por último enunciamos un resultado útil en el caso de que E_n sea cerrado en E_{n+1} para cada $n \in \mathbb{N}$.

<u>Teorema 4.37</u>. Sea E_n cerrado en E_{n+1} para cada $n \in \mathbb{N}$ y $B \subset E$ absolutamente convexo y cerrado (no necesariamente acotado). Entonces B es acotado en algún E_s si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap E_n$ es acotado en E_{m_n}.

<u>Demostración.</u>

Sean
$$B_n = B \cap E_n ,$$
$$F_n = (E_n)_{B_n}$$

entonces $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$

probaremos que la identidad:

$$id: F_n \to F_{n+1} \text{ es continua.}$$

$$B_{n+1} \cap E_n = (B \cap E_{n+1}) \cap E_n = B \cap (E_{n+1} \cap E_n)$$
$$= B \cap E_n = B_n$$

Sea $A = \{x \in E_{n+1};\ P_{B_{n+1}}(x) < \varepsilon\}$

$A \cap E_n = \{x \in E_n;\ P_{B_{n+1}}(x) < \varepsilon\}$

probaremos que $A \cap E_n = \{x \in E_n;\ P_{B_n}(x) < \varepsilon\}$, para ello es necesario probar que

$$P_{B_{n+1}}(x) = P_{B_n}(x) \quad \text{si} \quad x \in E_n$$

pero si $x \in E_n$ $\quad \frac{x}{\lambda} \in E_n$

entonces $\frac{x}{\lambda} \in B_{n+1}$ y $\frac{x}{\lambda} \in B_{n+1} \cap E_n = B_n$

entonces $\{\lambda > 0;\ \frac{x}{\lambda} \in B_{n+1}\} = \{\lambda > 0; \frac{x}{\lambda} \in B_n\}$.

de donde $P_{B_{n+1}}(x) = P_{B_n}(x)$

y entonces

$$id: F_n \to F_{n+1} \text{ es continua.}$$

Sea $F = \lim \operatorname{ind} F_n$, entonces el límite inductivo es estricto pues dado $\{x \in E_n;\ P_{B_n}(x) < \varepsilon\}$, el conjunto $\{x \in E_{n+1};$ $;\ P_{B_{n+1}}(x) < \varepsilon\}$ es tal que:

$$\{x \in E_{n+1};\ P_{B_{n+1}}(x) < \varepsilon\} \cap E_n = \{x \in E_n;\ P_{B_n}(x) < \varepsilon\}$$

Por consiguiente la topología inductiva induce en F_n la topología dada por P_{B_n}.

Ahora probaremos que B es acotado en F.

Sea $U \in \mathcal{U}_{o,F_n}$, $U = \lambda B_n$ $\lambda > 0$

y $\rho > \frac{1}{\lambda}$ entonces

$$B \cap F_n \subset B \cap E_n \subset \rho\lambda(B \cap E_n) = \rho U$$

entonces $B \cap F_n$ es acotado en F_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y B es acotado en F.

Probaremos en seguida que $\overline{F_n}^{F_{n+1}} = F_n$.

Tenemos $\overline{B_n}^{F_{n+1}} \subset \overline{E_n}^{E_{n+1}} = E_n$

y $\overline{B_n}^{F_{n+1}} \subset \overline{B_{n+1}}^{F_{n+1}} = B_{n+1}$

entonces $\overline{B_n}^{F_{n+1}} \subset E_n \cap B_{n+1} = B_n$

$\overline{B_n}^{F_{n+1}} = B_n$, entonces

para probar que $\overline{F_n}^{F_{n+1}} = F_n$, basta ver que

$$\overline{\left\langle \overline{B_n}^{F_{n+1}} \right\rangle}^{F_{n+1}} = \left\langle \overline{B_n}^{F_{n+1}} \right\rangle$$

Sea $x \in \overline{\left\langle \overline{B_n}^{F_{n+1}} \right\rangle}^{F_{n+1}}$, entonces existe

$$(x_n) \subset \left\langle \overline{B_n}^{F_{n+1}} \right\rangle \text{ tal que}$$

$$x_n \to_{F_{n+1}} x$$

entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$

entonces $P_{\overline{B_n}^{F_{n+1}}}(x_n - x) < \varepsilon$

en particular para $\varepsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$P_{\overline{B_n}^{F_{n+1}}}(x_n - x) < 1$$

entonces $\quad x_n - x \in \overline{B_n}^{F_{n+1}} = B_n$

$$x_n - x \in B_n$$

como B_n es balanceado

$$x - x_n \in B_n$$

$$x \in x_n + B_n$$

$$x \in \langle \overline{B_n}^{F_{n+1}} \rangle + B_n$$

$$x \in \langle \overline{B_n}^{F_{n+1}} \rangle$$

entonces $\overline{F_n}^{F_{n+1}} = F_n$.

Podemos aplicar ahora el teorema de Dieudonné-Schwartz y obtenemos que B es acotado en algún F_r, ahora bien, por hipótesis existe $m_r \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap E_r$ es acotado en E_{m_r} probaremos que B es acotado en E_{m_r}.

Sea $U \in \mathcal{U}_0$ en E_{m_r}, existe $\lambda > 0$ tal que

$$B \cap E_r \subset \lambda\, U.$$

entonces $B = B \cap F_r \subset B \cap E_r \subset \lambda U$

y B es acotado en E_{m_r}

El recíproco es evidente.

<u>Corolario 4.38</u>. Supongamos que cada espacio E_n es cerrado en E_{n+1}. Entonces TDS se cumple si y sólo si para cada conjunto B acotado en E y $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap E_n$ es acotado en E_m.

CAPITULO V

Dedicaremos este capítulo a mostrar una serie de ejemplos y contraejemplos que han surgido a lo largo del tiempo en que se ha atacado el problema que nos ocupa.

Definición 5.1. Sea E un espacio vectorial topológico. El espacio fundamental de E es E como espacio vectorial, es decir sin considerar su estructura topológica.

Definición 5.2. Sean A y M conjuntos cualesquiera. Denotaremos por $A^n \times M^{\mathbb{N}-n}$ al conjunto de sucesiones cuyos primeros n términos están en A y los restantes en M.

El siguiente es un ejemplo en el cual se cumple (H-3)- "E_n es cerrado en E para todo $n \in \mathbb{N}$" y (TDS)- "Todo conjunto acotado en E está contenido y es acotado en algún E_n" no se satisface.

Ejemplo 5.3. Sea $E_n = X^n \times Y^{\mathbb{N}-n}$ donde X es un espacio de Banach de dimensión infinita y Y es el espacio fundamental de X (que denotaremos L) equipado con la topología mas fina que lo hace localmente convexo. Consideremos E_n con la topología producto. Claramente, como espacio vectorial $E_n = L^{\mathbb{N}}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Sea $i: E_n \to E_{n+1}$ la función identidad. Puesto que i resulta ser un producto de identidades y la topología de Y es más fina que la de X, se sigue que $i: E_n \to E_{n+1}$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual podemos hablar de $E = \lim \text{ind}\, E_n$.

Puesto que $E_n = L^{\mathbb{N}}$, $E = E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ como espacio vectorial, con lo cual H-3 se verifica.

Probaremos que TDS no se verifica. Para ello demostraremos primero que $E = X^{\mathbb{N}}$. Como espacios vectoriales, obviamente son iguales, mostraremos a continuación que sus topologías coinciden:

Sea W una vecindad básica del cero en $X^{\mathbb{N}}$, entonces podemos pensar que $W = V^n \times L^{\mathbb{N}-n}$ donde V es vecindad del cero en X, como la topología de Y es más fina que la de X, V es vecindad del cero en Y, entonces W es vecindad del cero en E_n para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto lo es también en E, así la topología de E es más fina que la de $X^{\mathbb{N}}$. Para mostrar la igualdad de las topologías, tomemos W vecindad del cero convexa en E, en particular W es vecindad del cero en E_1, por lo tanto W contiene una vecindad de la forma $V_1 \times U_1^{n-1} \times L^{\mathbb{N}-(n-1)}$ con V_1 vecindad del cero en X y U_1 vecindad del cero en Y.

Sea $U = V_1 \cap U_1$, definimos $W_1 = U^n \times L^{\mathbb{N}-n}$, entonces $W_1 \subset W$, pero W es también vecindad del cero en E_n, entonces existe una vecindad, contenida en W de la forma $W_2 = (2S)^n \times V^m \times L^{\mathbb{N}-(n+m)}$ con S y V vecindades del cero en X y Y respectivamente. Probaremos a continuación que:

$$S^n \times L^{\mathbb{N}-n} \subset \tfrac{1}{2}W_1 + \tfrac{1}{2}W_2.$$

Sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in S^n \times L^{\mathbb{N}-n}$

Si $k < n$, $x_k \in S$ y la proyección k-ésima de $\tfrac{1}{2}W_1 + \tfrac{1}{2}W_2$ es $\tfrac{1}{2}(2S) + \tfrac{1}{2}U$

$$x_k = \tfrac{1}{2}(2x_k) = \tfrac{1}{2}(2x_k) + 0 \in \tfrac{1}{2}(2S) + \tfrac{1}{2}U$$

Si $k > n$ $x_k \in L$ y la proyección k-ésima de $\frac{1}{2}W_1 + \frac{1}{2}W_2$ es:

$$\tfrac{1}{2}L + \tfrac{1}{2}V \quad \text{si} \quad n < k < n+m$$

$$\tfrac{1}{2}L + \tfrac{1}{2}L = L \quad \text{si} \quad k > n+m$$

entonces: Si $n < k < n+m$

$$x_k \in L, \quad 2x_k \in L$$

$$x_k = \tfrac{1}{2}(2x_k) \in \tfrac{1}{2}L \subset \tfrac{1}{2}L + \tfrac{1}{2}V$$

Si $k > n+m$

$$x_k = \tfrac{1}{2}x_k + \tfrac{1}{2}x_k \in \tfrac{1}{2}L + \tfrac{1}{2}L = L$$

así $S^n \times L^{\mathbb{N}-n} \subset \frac{1}{2}W_1 + \frac{1}{2}W_2$

y como $W_1 \subset W$, $W_2 \subset W$ y W es convexa, entonces $S^n \times L^{\mathbb{N}-n} \subset W$ pero $S^n \times L^{\mathbb{N}-n}$ es vecindad del cero en $X^{\mathbb{N}}$, de donde la topología de $X^{\mathbb{N}}$ es más fina que la de E, con lo cual hemos probado que $E = X^{\mathbb{N}}$.

Tomemos ahora la bola unitaria en X, llamémosla B y sea W una vecindad del cero en E, probaremos que $B^{\mathbb{N}}$ es acotado en E, es decir que existe $r > 0$ tal que $\frac{1}{r}B^{\mathbb{N}} \subset W$.

Como $E = X^{\mathbb{N}}$, existe $r' > 0$ tal que

$$B(r')^n \times X^{\mathbb{N}-n} \subset W \qquad \text{donde } B(r') \text{ es}$$

la bola con centro en cero y radio r' en X, sea $r = \frac{1}{r'}$ entonces

$$\tfrac{1}{r}B^{\mathbb{N}} \subset B(r')^n \times L^{\mathbb{N}-n} \subset W$$

por lo tanto $B^{\mathbb{N}}$ es acotado en E y como $E = E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $B^{\mathbb{N}} \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para finalizar pro-

baremos que $B^{\mathbb{N}}$ no es acotado en ningún E_n.
Supóngamos que $B^{\mathbb{N}}$ es acotado en algún E_n, entonces la proyección $n+1$ de $B^{\mathbb{N}}$ (a saber B) es acotado en Y lo cual es una contradicción puesto que si elegimos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ linealmente independientes tales que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y definimos $f(x_n) = n$, extendemos a $f: Y \to \mathbb{R}$ lineal, entonces, sea U vecindad del cero en $\mathbb{R}$ convexa balanceada y absorbente, entonces $f^{-1}(U)$ es convexo, balanceado y absorbente y como Y tiene la topología más fina que lo hace localmente convexo, entonces $f^{-1}(U)$ es vecindad del cero en Y, así f es continua en Y, sin embargo, por construcción $f(B)$ no es acotado, por lo tanto B no es acotado en Y y por consiguiente TDS no se cumple.

Corolario 5.4.

a) (H-3)- "E_n es cerrado en E para todo $n \in \mathbb{N}$" no implica (H-4)- "Todo conjunto convexo y cerrado en E_n es cerrado en E_{n+1}".
b) (H-3) no implica (H-1) y (H-2) ("E_n es cerrado en E_{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$" y "La topología de cada E_n es igual a la topología inducida en E_n por E_{n+1}".

Demostración.

Ambos resultados son triviales. a) se obtiene del teorema 2.3 y b) se sigue de la proposición 2.6 y el teorema 2.3.
El siguiente es un ejemplo en el cual se cumple (H-1), no obstante no se satisfacen DS- "Todo conjunto acotado en E está contenido en E_n para algún $n \in \mathbb{N}$" ni (H-2).

Ejemplo 5.5. Sean X y Y como en el ejemplo 5.3. Construímos el subespacio Z como sigue:

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ linealmente independiente tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos una funcional lineal $f: X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_n) = n$, f no es continua, puesto que si lo fuera, la imagen $f(B)$ de la bola unitaria B en X sería acotado, lo cual no sucede, entonces $Kerf$ no es cerrado, es decir, existe $x \in \overline{Kerf}$ tal que $x \notin Kerf$. Así $Kerf \subsetneq \overline{Kerf} \subset X$, pero $Kerf$ es un hiperplano, por lo tanto es maximal entonces $\overline{Kerf} = X$ es decir, $Kerf$ es denso en X.

Sea $Z = Kerf$ con la topología más fina que lo haga localmente convexo.

Definimos $D = B \cap Z$ y $E_n = X^n \times Y \times Z^{\mathbb{N}-(n+1)}$ entonces, como en el ejemplo 5.3 y puesto que Z tiene la topología más fina que lo hace localmente convexo, la identidad $i: E_n \to E_{n+1}$ es continua.

Sea $E = \lim\limits_{n} \text{ind } E_n$.

De la misma manera que en el ejemplo 5.3 puede mostrarse que $f: Y \to \mathbb{R}$ es continua, con lo cual $Z = Kerf$ es cerrado en Y, de aquí podemos deducir que E_n es cerrado en E_{n+1} para cualquier $n \in \mathbb{N}$, puesto que:

$$E_n = X^n \times Y \times Z^{\mathbb{N}-(n+1)}$$
$$E_{n+1} = X^{n+1} \times Y \times Z^{\mathbb{N}-(n+2)}$$

y, Y es cerrado en X y Z es cerrado en Y.

Por otra parte, E_{n+1} no induce la topología de E_n, pues supongamos que lo hace y consideremos el conjunto $\{0\}^n \times Z \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+1)}$, cerrado en E_n, entonces existe U cerrado en E_{n+1} tal que:

$$\{0\}^n \times Z \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+1)} = U \cap E_n$$

como E_n es cerrado en E_{n+1}:

$$U \cap E_n \text{ es cerrado en } E_{n+1}$$

y entonces $\{0\}^n \times Z \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+1)}$ es cerrado en E_{n+1} lo cual es una contradicción puesto que:

$$\overline{\{0\}^n \times Z \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+1)}} = \{0\}^n \times \overline{Z} \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+1)}$$

y Z es denso en X.

Para probar que DS no se cumple, consideremos el conjunto $\overline{D}^{\mathbb{N}} = \overline{(B \cap Z)}^{\mathbb{N}}$.

$\overline{D}^{\mathbb{N}}$ es acotado en E y no está contenido en ninguno de los E_n.

Probaremos primero que $D^{\mathbb{N}}$ es acotado:

Sea G una vecindad del cero convexa en E, $G \cap E_1$ es vecindad del cero en E_1, entonces existen U_1, U_2 y U_3 vecindades del cero en X, Y y Z respectivamente tales que

$W_1 = U_1 \times U_2 \times U_3^n \times Z^{\mathbb{N}-(n+2)} \subset G \cap E_1 \subset G$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, $G \cap E_{n+2}$ es vecindad del cero en E_{n+2}, entonces existen S, T y V vecindades del cero en X, Y y Z respectivamente tales que:

$W_2 = (2S)^{n+2} \times T \times V^m \times Z^{\mathbb{N}-(n+m+3)} \subset G \cap E_{n+2} \subset G$.

De la misma manera que en el ejemplo 5.3 se tiene que

$S^{n+2} \times Z^{\mathbb{N}-(n+2)} \subset \frac{1}{2}W_1 + \frac{1}{2}W_2 \subset G$.

Ahora bien, puesto que $D \subset B$, D es acotado en X y como S vecindad del cero en X, existe $\lambda > 0$ tal que $D \subset \lambda S$. De aquí se sigue que

$$D^{\mathbb{N}} \subset \lambda(S^{n+2} \times Z^{\mathbb{N}-(n+2)}) \subset \lambda G$$

pues si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D^{\mathbb{N}}$, entonces

Si $k \leq n+2$ la proyección k-ésima de $\lambda(S^{n+2} \times Z^{\mathbb{N}-(n+2)})$ es λS y $x_k \in D \subset \lambda S$.

Si $k > n+2$ la proyección k-ésima de $\lambda(S^{n+2} \times Z^{\mathbb{N}-(n+2)})$ es λZ y $x_k \in D = B \cap Z \subset Z$

entonces $x_k \in \lambda Z$.

Hemos probado $D^{\mathbb{N}} \subset \lambda G$, es decir $D^{\mathbb{N}}$ es acotado en E, de donde $\overline{D^{\mathbb{N}}}$ es acotado en E.

Solo resta probar que $\overline{D^{\mathbb{N}}}$ no está contenido en ningún E_n. Para ello, observemos que:

$D^{\mathbb{N}} \subset B^{\mathbb{N}} \cap E$, más aún, a continuación probaremos que $\overline{D^{\mathbb{N}}} = B^{\mathbb{N}} \cap E$:

Sea $a \in B^{\mathbb{N}} \cap E$, entonces $a \in B^{\mathbb{N}} \cap E_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Sea $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, con $\|a_k\| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$

$$a \in E_n = X^n \times Y \times Z^{\mathbb{N}-(n+1)}$$

Ahora bien, D es denso en B (cerradura en X) pues si $x \in B$ entonces $x \in B \cap \bar{Z}$, entonces existe $(x_k) \subset Z$ tal que $x_k \to x$.

Sea $y_k = \dfrac{\|x\| x_k}{\|x_k\|}$ entonces $y_k \to x$

$y_k \in Z$ puesto que $x_k \in Z$

$\|y_k\| = \|x\| \dfrac{\|x_k\|}{\|x_k\|} = \|x\| \leq 1$ puesto que $x \in B$

entonces $y_k \in B$ es decir $y_k \in B \cap Z = D$

así $x \in \overline{D}$, $\overline{D} \subset B$ se cumple trivialmente, entonces D es denso en B.

Ahora, si $k \leq n+1$ $a_k \in B$ y $a_k \in X$, como D es denso en B, existe una sucesión

$$(a_m^k) \subset D \text{ tal que:}$$

$$a_k = \lim_{m\to\infty} a_m^k$$

Si $k > n+1$ $a_k \in B$ y $a_k \in Z$, de donde $a_k \in D$, definiendo $a_m^k = a_k$ para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$a_k = \lim_{m\to\infty} a_m^k$$

entonces
$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\lim_{m\to\infty} a_m^k)_{k\in\mathbb{N}} = \lim_{m\to\infty} (a_m^k)_{k\in\mathbb{N}}$$

donde el último límite es tomado en E_n, y como la topología inducida por E en E_n es más débil que la original, entonces se tiene que

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = \lim_{m\to\infty} (a_m^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ en } E.$$

Además $(a_m^k)_{k\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, es decir $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \overline{D^{\mathbb{N}}}$

Para la otra contención, puesto que $D^{\mathbb{N}} \subset B^{\mathbb{N}} \cap E$ basta probar que $B^{\mathbb{N}} \cap E$ es cerrado en E, pues entonces $\overline{D^{\mathbb{N}}} \subset \overline{B^{\mathbb{N}} \cap E} = B^{\mathbb{N}} \cap E$. Para ello demostraremos que $B^{\mathbb{N}} \cap E_n$ es cerrado en E_n para cada $n \in \mathbb{N}$:

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E_n \setminus B^{\mathbb{N}}$, entonces existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{k_o}\| > 1$

Como $E_n = X^n \times Y \times Z^{\mathbb{N}-(n+1)}$ y las topologías de Y y Z son más finas que la topología de X, entonces existe una vecindad de x_{k_o} en X, Y o Z (dependiendo de si $k_o \leq n$, $k_o = n+1$ o $k_o > n+1$), tal que para todo $x \in V$, $\|x\| > 1$.

Así V induce en E_n una vecindad V' de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\|y_k\| > 1$ para todo $y_k \in V'$, es decir $V' \cap B^{\mathbb{N}} = \phi$, así $E_n \setminus B^{\mathbb{N}} \cap E_n$ es abierto, equivalentemente $B^{\mathbb{N}} \cap E_n$ es cerrado en E_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y así $B^{\mathbb{N}} \cap E$ es cerrado en E.

Por lo tanto $\overline{D^{\mathbb{N}}} = B^{\mathbb{N}} \cap E$.

Ahora bien, supongamos que $\overline{D^{\mathbb{N}}} \subset E_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces $B^{\mathbb{N}} \cap E \subset E_n$ y entonces

$$\{0\}^{n+1} \times B \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+2)} \subset B^{\mathbb{N}} \cap E_{n+1} \subset B^{\mathbb{N}} \cap E \subset E_n = X^n \times Y \times Z^{\mathbb{N}-(n+1)}$$

comparando las coordenadas $n+2$ se tiene que:

$B \subset Z$ entonces $\bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda B \subset Z$, pero $\bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda B = X$, entonces $X \subset Z$ lo cual es una contradicción. En resumen, $\overline{D^{\mathbb{N}}}$ es acotado en E y no está contenido en ningún E_n, es decir, DS no se cumple.

Utilizando algunos resultados de los capítulos 2 y 3, tenemos el siguiente:

<u>Corolario 5.6</u>.

a) H-1 no implica TDS.

b) H-1 no implica (H-4) -"Todo conjunto convexo y cerrado en E_n es cerrado en E_{n+1}".

c) H-1 no implica (H-3) - "E_n es cerrado en E para todo $n \in \mathbb{N}$".

d) H-1 no implica (H-7) - "Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{E_n}^{E} \subset E_{n+p}$ para algún $p \in \mathbb{N}$.

e) H-1 no implica (H-8) - "Para cada hiperplano cerrado F en E_n, $(E_n \setminus F) \cap \overline{F}^{E_{n+1}} = \phi$.

Demostración.

a) Es obvio puesto que TDS implica DS.

b) Se sigue del teorema 2.3 y del hecho que TDS implica DS.

c) Es consecuencia del Teorema 2.2.

d) Se sigue del Teorema 2.7.

e) Se sigue del Teorema 3.2 y el inciso c).

El ejemplo que sigue es una variante del ejemplo 5.5 y muestra que (H-2) - "La topología de cada E_n es igual a la topología inducida en E_n por E_{n+1}" no implica DS.

Ejemplo 5.7. Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y Z un subespacio denso de X (la construcción de un subespacio con tales características fué dada en el ejemplo 5.5).
Consideremos Z con la topología de la norma en X. Definimos $E_n = X^n \times Z^{\mathbb{N}-n}$ con la topología producto, entonces se tiene que $E_n \subset E_{n+1}$ y puesto que la topología en Z es la inducida por X, entonces E_n tiene la topología inducida por E_{n+1}, es decir, H-2 se satisface.
Observemos que $\overline{X^n \times Z^{\mathbb{N}-n}}^{E_{n+1}} = (\overline{X}^X)^n \times \overline{Z}^X \times (\overline{Z}^Z)^{\mathbb{N}-(n+1)} =$

$$= X^n \times X \times Z^{\mathbb{N}-(n+1)} = E_{n+1}$$

lo que muestra que E_n es denso en E_{n+1}, es decir H-1 no se satisface.

Sea $E = \lim_n \text{ind}\, E_n$, B la bola unitaria en X y $D = B \cap Z$. Entonces $D^{\mathbb{N}}$ es acotado en E:

Sea G una vecindad del cero convexa en E. Entonces $G \cap E_1$ es vecindad del cero en E_1 , de donde existe V vecindad del cero en X tal que

$$W_1 = V \times (V \cap Z)^n \times Z^{\mathbb{N}-(n+1)} \subset G$$

(Obsérvese que V puede ser usada en las n+1 primeras coordenadas gracias a que Z tiene la topología inducida por X).

Sabemos además que D es acotado en X, es decir existe $\lambda > 0$ tal que $D \subset \lambda V$ de donde se sigue que $D \subset \lambda(V \cap Z)$, y por consiguiente:

$$D^{\mathbb{N}} \subset \lambda(V \times (V \cap Z)^n \times Z^{\mathbb{N}-(n+1)}) \subset \lambda G$$

Así, $D^{\mathbb{N}}$ es acotado en E y por lo tanto $\overline{D^{\mathbb{N}}}$ también lo es.

Demostraremos que $B^{\mathbb{N}} \cap E \subset \overline{D^{\mathbb{N}}}$:

Sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}} \cap E$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}} \cap E_n$.

Mostraremos que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es el límite en E_n de una sucesión $\{(x_k^m)_{k \in \mathbb{N}}\}_{m \in \mathbb{N}}$ en $D^{\mathbb{N}}$:

si $k > n$ entonces $x_k \in B$ y $x_k \in Z$ puesto que

$$E_n = X^n \times Z^{\mathbb{N}-n}$$

así $x_k \in D$, en este caso definimos $x_k^m = x_k$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Si $k \leq n$ entonces $x_k \in B$ y $x_k \in X$, como en el ejemplo 5.5,

D es denso en B (con la topología dada por X), entonces existe una sucesión $(x_k^m) \subset D$ que converge en X a x_k.
Entonces $\{(x_k^m)_{k\in\mathbb{N}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en E_n y como E induce a E_n una topología más débil que la original, la convergencia de dicha sucesión se cumple también en E, entonces

$$B^{\mathbb{N}} \cap E \subset D^{\mathbb{N}}$$

Pero entonces $D^{\mathbb{N}}$ no está contenido en E_n para todo $n \in \mathbb{N}$, pues supongamos $D^{\mathbb{N}} \subset E_n$, entonces:

$$\{0\}^n \times B \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+1)} \subset B^{\mathbb{N}} \cap E_{n+1} \subset B^{\mathbb{N}} \cap E \subset D^{\mathbb{N}} \subset E_n$$

y comparando las coordenadas $n+1$ se obtiene como en el ejemplo 5.5 que $B \subset Z$ de donde $X \subset Z$ lo cual es una contradicción.
Por consiguiente DS no se cumple. Entonces H-2 no implica DS.
Utilizando nuevamente los resultados del capítulo 2, obtenemos el siguiente:

Corolario 5.8.

a) H-2 no implica TDS.

b) H-2 no implica (H-4)- "Todo conjunto convexo y cerrado en E_n es cerrado en E_{n+1}".

c) H-2 no implica (H-1)- "E_n es cerrado en E_{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$".

d) H-2 no implica (H-3)- "E_n es cerrado en E para todo $n \in \mathbb{N}$".

e) H-2 no implica (H-7)- "Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{E_n}^{E} \subset E_{n+p}$ para algún $p \in \mathbb{N}$".

Demostración.

a) Se sigue del hecho que TDS implica DS.

b) Es consecuencia del teorema 2.3 y de que TDS implica DS.

c) Se obtiene aplicando la proposición 2.6 y el inciso b).

d) Se sigue del Teorema 2.2.

e) Es consecuencia inmediata del teorema 2.7.

Obsérvese además que utilizando el Teorema de Hahn-Banach y el teorema 3.1 se obtiene que H-2 implica (H-8)-"Para cada hiperplano cerrado F en E, $(E_n \setminus F) \cap \overline{F}^{E_{n+1}} = \phi$", entonces del ejemplo 5.7 obtenemos inmediatamente el siguiente:

Corolario 5.9.

a) H-8 no implica DS.

b) H-8 no implica H-1.

c) H-8 no implica H-4.

d) H-8 no implica H-3.

e) H-8 no implica H-7.

El ejemplo que sigue muestra que (H-7)- "Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{E_n}^{E} \subset E_{n+p}$ para algún $p \in \mathbb{N}$" no implica TDS.

Ejemplo 5.10. Consideremos el espacio $L^2(0,1)$ con las topologías dadas por las normas

$$\|f\|_i = \left(\int |f|^i \, dx\right)^{1/i} \qquad i = 1,2.$$

la desigualdad de Hölder:

$$\int |fg| dx \leq \left(\int |f|^p \, dx\right)^{1/p} \left(\int |g|^q \, dx\right)^{1/q}$$

afirma, en el caso $p = 1 = 2$:

$$\int |fg|dx \leq \|f\|_2 \ \|g\|_2$$

tomando $g = 1$ en $[0,1]$ se tiene

$$\int |f|dx \leq \|f\|_2$$

es decir $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$

Sea $X_i = L^2(0,1)$ con la norma $\| \ \|_i$ $i = 1,2$ entonces la desigualdad anterior implica que la identidad $id: X_2 \to X_1$ es continua.

Definimos $E_n = X_1^n \times X_2^{\mathbb{N}-n}$

Se sigue de la continuidad de $id: X_2 \to X_1$ que la identidad $id: E_n \to E_{n+1}$ es continua.

Sea $E = \lim \text{ind } E_n$

Entonces $E = X_1^{\mathbb{N}}$, la demostración de este hecho es idéntica a la que aparece en el ejemplo 5.3. Ahora bien, sea B_i la bola unitaria en X_i $i = 1,2$. $B_1^{\mathbb{N}}$ es acotado en E puesto que si U es vecindad del cero en E, existe $r' > 0$ tal que

$$B_o(r')^n \times X_1^{\mathbb{N}-n} \subset U \quad \text{para algún } n \in \mathbb{N}$$

donde $B_o(r')$ es la bola con centro en cero y radio r', tomando $r = \frac{1}{r'}$, se tiene que

$$\frac{1}{r} B_1^{\mathbb{N}} \subset B_o(r')^n \times X_1^{\mathbb{N}-n} \subset U.$$

entonces $B_1^{\mathbb{N}}$ es acotado en E.

Sea $G = X_1^n \times B_2 \times X_2^{\mathbb{N}-(n+1)}$ (G es una vecindad básica del cero en E_n). Llamemos e_{n+1} al vector $(0,\ldots,0,1,0\ldots0)$ (1 en el lugar $n+1$), para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_k(x) = k\chi_{[0,\frac{1}{k}]}(x)$$

donde $\chi_{[0,\frac{1}{k}]}(x)$ es la función característica de $[0,\frac{1}{k}]$.

Entonces

$$\|f_k\|_1 = \int |k\chi_{[0,\frac{1}{k}]}| = k\cdot\frac{1}{k} = 1$$

Así $f_k \in B_1$ y por consiguiente $f_k e_{n+1} \in B_1^{\mathbb{N}}$

Probaremos que G no absorbe a $B_1^{\mathbb{N}}$.

Supongamos que G absorbe a $B_1^{\mathbb{N}}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_1^{\mathbb{N}} \subset kG$

además $f_{k^2+1} e_{n+1} \subset B^{\mathbb{N}} \subset kG$

comparando coordenadas

$$f_{k^2+1} e_{n+1} = (0,\ldots 0,\ f_{k^2+1}\ , 0\ldots\ 0)$$

$$kG = kX_1\times\ldots\times kX_1 \times kB_2 \times kX_2\times\ldots\times kX_2$$

entonces $f_{k^2+1} \in kB_2$

pero

$$\left(\int \left|(k^2+1)\chi_{[0,\frac{1}{k^2+1}]}\right|^2\right)^{1/2} = (k^2+1)\left(\int \chi^2_{[0,\frac{1}{k^2+1}]}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{k^2+1}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{k^2+1} > k$$

lo cual es una contradicción. Así hemos probado que TDS no se cumple. Por otra parte, puesto que $E = E_n$ como espacio vectorial, H-7 se satisface trivialmente. Así H-7 no implica TDS. Más aún, puesto que X_1 es metrizable, E es metrizable ([7] Cap. 2 Secc. 7 Pag. 118), entonces H-7 no implica TDS aún cuando E sea metrizable.

Corolario 5.11. (H-6)- "Para cada conjunto B acotado y convexo en E_n, $\overline{B}^E$ está contenido en E_{n+p} para algún $p \in \mathbb{N}$". no implica TDS.

Demostración.

En el ejemplo anterior $E = E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ como espacios vectoriales, por consiguiente H-6 se satisface. El ejemplo siguiente muestra que TDS no implica (H-4)- "Todo conjunto convexo y cerrado en E_n es cerrado en E_{n+1}.

Ejemplo 5.12. Sea $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, definimos $w_n: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ como: $w_n(x) = e^{x/n}$ y

$$E_n = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+) ;\ \|w_n f\|_2 < \infty\}.$$

E_n es un subespacio vectorial de $L^2(\mathbb{R}_+)$. Damos a E_n estructura de espacio de Hilbert definiendo el producto interior

$$(f,g)_n = \langle w_n f,\ w_n g\rangle_2 \ , \quad \text{donde} \quad \langle\,,\rangle_2$$

es el producto interior en $L^2(\mathbb{R}_+)$.

La forma $(f,g)_n$ así definida resulta ser un producto interior gracias a que $\langle\ ,\ \rangle_2$ lo es. Probaremos que con la topología inducida por $\langle\ ,\ \rangle_2$ E_n es un espacio completo:

Sea $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E_n entonces $\lim\limits_{m,s\to\infty} (f_m - f_s\ ,\ f_m - f_s)_n = 0$, es decir

$$\lim_{m,s\to\infty} \langle w_n(f_m - f_s),\ w_n(f_m - f_s)\rangle_2 = 0$$

o sea $\{w_n f_m\}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}_+)$, pero $L^2(\mathbb{R}_+)$ es completo, sea $g = \lim\limits_{m\to\infty} w_n f_m \in L^2(\mathbb{R}_+)$

Definimos $g_1 = \frac{g}{w_m}$, como $w_n(x) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$, se si gue que $|g_1(x)| \leq |g(x)|$ para cada $x \in \mathbb{R}_+$, de donde $g_1 \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

$w_n\, g_1 = g$ y $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ entonces $g_1 \in E_n$ Además

$$(f_m - g_1 , f_m - g_1)_n = \left\langle w_n(f_m - g_1), w_n(f_m - g_1)\right\rangle_2$$

$$= \left\langle w_n f_m - g, w_n f_m - g\right\rangle_2$$

como $\lim\limits_{m\to\infty} w_n f_m = g$ se sigue que:

$$\lim_{m\to\infty} f_m = g_1 \quad \text{en} \quad E_n$$

entonces E_n es completo.

Observemos además que para cada $x \in \mathbb{R}_+$ y $n \in \mathbb{N}$ $w_{n+1}(x) \leq w_n(x)$, esto implica que $E_n \subset E_{n+1}$

ahora bien,

$$(f,f)_{n+1} = \left\langle w_{n+1} f, w_{n+1} f\right\rangle_2$$

$$= \int w_{n+1}{}^2(x)\; f^2(x)dx$$

$$\leq \int w_n{}^2(x)\; f^2(x)dx$$

$$= \left\langle w_n f, w_n f \right\rangle_2$$

$$= (f,f)_n$$

entonces la inclusión $id: E_n \to E_{n+1}$ es continua para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Sea $E = \lim\limits_{n} \text{ind}\, E_n$

Como E_n es de Hilbert, E_n es reflexivo ([1] Cap. 4 Secc.

44.7 Pag.191), entonces el teorema 2.10 afirma en este caso que TDS se cumple.

Probaremos que (H-1) no se verifica:

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a,b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{n+1} < a < \frac{1}{n} < b$$

Definimos $g(x) = e^{-ax}$. Claramente $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Obsérvese que en general $e^{\alpha x}$ $L^2(\mathbb{R}_+)$ si y sólo si $\alpha < 0$.

Ahora bien,

$$(w_n \cdot g)(x) = e^{x(\frac{1}{n}-a)} \quad \text{y como} \quad \frac{1}{n}-a > 0$$

tenemos que $w_n g \notin L^2(\mathbb{R}_+)$ es decir $g \notin E_n$. Sin embargo, puesto que $\frac{1}{n+1}-a < 0$ se tiene que $w_{n+1}(x)g(x) = e^{x(\frac{1}{n+1}-a)} \in$ $\in L^2(\mathbb{R}_+)$ o sea $g \in E_{n+1}$ así $g \in E_{n+1} \setminus E_n$.

Demostraremos que g es el límite en E_{n+1} de una sucesión de funciones en E_n, es decir que E_n no es cerrado en E_{n+1}:

Sea

$$f_k(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si} \quad x \in [0,k] \\ e^{-bx} & \text{si} \quad x \in [k,\infty] \end{cases}$$

$f_k \in L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$w_n(x)\ f_k(x) = \begin{cases} e^{x(\frac{1}{n}-a)} & \text{si} \quad x \in [0,k] \\ e^{x(\frac{1}{n}-b)} & \text{si} \quad x \in [k,\infty) \end{cases}$$

y $\|w_n f_k\|_2^2 = \int_0^k e^{2x(\frac{1}{n}-a)}dx + \int_k^\infty e^{2x(\frac{1}{n}-b)}dx$

la primera integral existe obviamente, y como $\frac{1}{n}-b < 0$ se tiene

$$\int_k^\infty e^{2(\frac{1}{n} -b)}dx < \infty$$

es decir

$$\|w_n f_k\|_2 < \infty \quad \text{con lo cual} \quad f_k \in E_n.$$

Ahora, claramente

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = e^{-ax} \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}_+$$

entonces

$$\lim_{k\to\infty} | f_k(x) - e^{-ax}|^2 = 0$$

de donde

$$\lim_{k\to\infty} | w_{n+1}^2(x) \ (f_k \ (x)-e^{-ax})|^2 = 0$$

ahora bien

$$w_{n+1}(x)|f_k(x)-e^{-ax}| = w_{n+1}^2(x)(e^{-ax} - f_k(x))^2$$

pero $f_k(x) \geqslant e^{-bx}$ para cualquier $x \in \mathbb{R}_+$

de donde $-f_k(x) \geqslant -e^{-bx}$, entonces

$$0 \leqslant e^{-ax} -f_k(x) \leqslant e^{-ax} -e^{-bx}$$

por lo tanto $(e^{-ax} -f_k(x))^2 \leqslant (e^{-ax} -e^{-bx})^2$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad (w_{n+1})^2(x) \ (e^{-ax} -f_k(x))^2 &\leqslant w_{n+1}^2(x) \ (e^{-ax} -e^{-bx})^2 \\ &= \left[e^{\frac{x}{n+1}}(e^{-ax} -e^{-bx})\right]^2 \\ &= \left[e^{x(\frac{1}{n+1} -a)} -e^{x(\frac{1}{n+1} -b)}\right]^2 \end{aligned}$$

además $\frac{1}{n+1} -a < 0$ y $\frac{1}{n+1} -b < 0$

entonces $g(x) = e^{x(\frac{1}{n+1} -a)} - e^{x(\frac{1}{n+1} -b)} \in L^2(\mathbb{R}_+)$

aplicando el teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue ([19] Cap.11 Secc. 3 Teo. 16 Pag. 229). Se sigue que

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^\infty w_{n+1}^2(x)\,|f_k(x) - e^{-ax}|^2 dx = 0$$

es decir, $\lim\limits_{k\to\infty} f_x(x) = e^{-ax}$ en E_{n+1}

con lo cual E_n no es cerrado en E_{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$ es decir H-1 no se verifica y puesto que H-4 es mas fuerte que H-1, se tiene que H-4 no se cumple.

Corolario 5.13.

a) TDS no implica H-1.

b) TDS no implica H-3.

Demostración.

a) Se obtuvo en el desarrollo del ejemplo para probar que H-4 no se satisface.

b) Es obvio puesto que H-3 es mas fuerte que H-1.

El siguiente es un ejemplo en el cual (H-3)- "E_n es cerrado en E para todo $n \in \mathbb{N}$" y (H-4)- "Todo conjunto convexo y cerrado en E_n es cerrado en E_{n+1}" no se satisfacen, no obstante (H-8)- "Para cada hiperplano cerrado F en E_n, $(E_n \setminus F) \cap \bar{F}^{E_{n+1}} = \phi$" y (H-7)- "Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\bar{E_n}^{E} \subset E_{n+p}$ para algún $p \in \mathbb{N}$".

Ejemplo 5.14. Sean X un espacio de Banach y Y un subespacio denso de X con la topología inducida. Definimos:

$$E_{2n-1} = X^n \times \{0\}^{\mathbb{N}-n}$$

$$E_{2n} = X^n \times Y \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+1)} \qquad n \in \mathbb{N}, \text{ todos}$$

con la topología producto.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ la identidad $id: E_m \to E_{m+1}$ es continua: En efecto, si m es impar $m = 2n-1$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y entonces se tiene la identidad

$$\begin{array}{l} E_{2n-1} = X^n \times \{0\}^{\mathbb{N}-n} \\ \quad id \downarrow \\ E_{2n} = X^n \times Y \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+1)} \end{array}$$

la cual resulta continua. Por otra parte si m es par,

$$E_m = E_{2n} = X^n \times Y \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+1)}$$

$$E_{m+1} = E_{2(n+1)-1} = X^{n+1} \times Y \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+2)} \quad \text{para}$$

algún $n \in \mathbb{N}$ y nuevamente la identidad es continua.

Sea $E = \cup\{E_n ; n \in \mathbb{N}\} \subset X^{\mathbb{N}}$. Probaremos que la topología inductiva en E coincide con la inducida por $X^{\mathbb{N}}$.

Sea $U \in \mathcal{V}_{o,E}$ con la topología inductiva, entonces $U \cap E_n \in \in \mathcal{V}_{o,E_n}$, como cada E_n tiene la topología inducida por $X^{\mathbb{N}}$, ésta es también una vecindad del cero en el producto.

Tomemos ahora una vecindad del cero en E con la topología inducida por $X^{\mathbb{N}}$, podemos pensar que $U = V^n \in X^{\mathbb{N}-n}$ $V \in \mathcal{V}_{o,X}$. Entonces $U \cap E_m \in \mathcal{V}_{o,E_m}$ para todo m, pues, si m es impar $m = 2k-1$ para algún $k \in \mathbb{N}$

$$E_m = X^k \times \{0\}^{\mathbb{N}-k}$$

Si $n \leq k$ $E_m \cap U = V^n \times X^{k-n} \times \{0\}^{\mathbb{N}-k} \in \mathcal{V}_{o,E_m}$

Si $n > k$ $E_m \cap U = V^k \times \{0\}^{\mathbb{N}-k} \in \mathcal{V}_{o,E_m}$.

Si por el contrario m es par

$$E_m = X^k \times Y \times \{0\}^{\mathbb{N}-(k+1)}$$

Si $n \leq k$ $E_m \cap U = V^n \times X^{k-n} \times Y \times \{0\}^{\mathbb{N}-(k+1)} \in \mathcal{N}_{o,E_m}$

Si $n > k$ $E_m \cap U = V^k \times V \cap Y \times \{0\}^{\mathbb{N}-(k+1)} \in \mathcal{N}_{o,E_m}$,

puesto que Y tiene la topología inducida por X. Como E tiene la topología inducida por $X^{\mathbb{N}}$, entonces la topología de E_n es la inducida por E_{n+1}, de donde, si $f: E_n \to \mathbb{R}$ es lineal continua, el teorema de Hahn-Banach muestra que existe una extensión lineal continua de f a E_{n+1}, se sigue del Teorema 3.1 que H-8 se satisface.

Ahora bien, puesto que la topología de E es la inducida por $X^{\mathbb{N}}$, se tiene que $\overline{E_n}^E = \overline{E_n}^{X^{\mathbb{N}}}$ entonces

$$\overline{E_{2n}}^E = X^n \times \overline{Y}^X \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+1)}$$

$$= X^{n+1} \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+1)} = E_{2n+1}$$

de la misma manera $\overline{E_{2n+1}}^E = E_{2n+1}$, es decir

$$\overline{E_{2n}}^E = \overline{E_{2n+1}}^E = E_{2n+1}$$

de aqui que H-7 se satisface y H-3 no se cumple.

Por último $\overline{E_{2n}}^{E_{2n+1}} = X^n \times \overline{Y}^X \times \{0\}^{\mathbb{N}-(n+1)}$

$$= E_{2n+1} \neq E_{2n}$$

de donde H-4 no puede cumplirse.

<u>Corolario 5.15.</u> (H-8) no implica H-1.

Es consecuencia inmediata del Teorema 3.7. Obsérvese que este resultado aparece también en el corolario 5.9.

El ejemplo que sigue muestra que TDS no implica (H-7)- "Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\bar{E}_n^E \subset E_{n+p}$ para algún $p \in \mathbb{N}$".

Ejemplo 5.16. Sea $D_{[-n,n]} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R})\ ,\ \text{sop } f \subset [-n,n]\}$, $D = \lim_n \text{ind } D_{[-n,n]}$. Sabemos aquí que TDS se cumple, de hecho la construcción es la misma que la del capítulo 1 tomando como sucesión de compactos $\{[-n,n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\Omega = \mathbb{R}$.

Sea $\varphi \in D$, $\text{sop } \varphi = [-1,1]$, definimos:

$$A = \{\varphi(\frac{(3p+1)}{pq} x);\quad p,q \in \mathbb{N}\} \quad y$$

$$E_n = \langle A \cup D_{[-n,n]} \rangle \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Claramente $A \subset D$, de donde $E_n \subset D$. Damos a cada E_n la topología inducida por D.

Sea $E = \lim_n \text{ind } E_n$. Entonces, como $E \subset D$ y E_n tiene la topología dada por D, la identidad $id: E \to D$ es continua, de donde si B es acotado en E, B es acotado en D, por TDS B es acotado en $D_{[-n,n]}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, pero $D_{[-n,n]} \subset E_n$, entonces B es acotado en E_n y TDS se cumple para E.

Puesto que cada E_n tiene la topología inducida por D, entonces la topología de E_n coincide con la inducida por E_{n+1} , por el teorema 3.1 y aplicando el teorema de Hahn-Banach se sigue que H-8 se satisface. Por otra parte, sea q cualquier número primo mayor que 5, entonces la función $\varphi(\frac{3}{q}x) \in \bar{E}_n^E$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $\varphi(\frac{3}{q}x) \notin E_S$ para $S < \frac{q}{3} - 1$. En efecto:

$\varphi(\frac{3}{q}\,x)$ es el límite de la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde:

$$\varphi_n(x) = \varphi(\frac{3n+1}{nq}\,x)$$

Para la segunda afirmación observemos primero que $\varphi(\frac{3}{q}x) \notin A$. Basta probar que

$$\frac{q}{3}\,\frac{3p+1}{p} \notin \mathbb{N} \quad \text{para cualquier} \quad p \in \mathbb{N}.$$

Supongamos que $\frac{q}{3}\,\frac{3p+1}{p} = k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ entonces

$$q(3p+1) = 3pk$$

$$q(3p+1) = 3k\,p_1\,p_2\cdots p_i \quad \text{donde}$$

$p = p_1\cdot p_2\cdots p_i$ p_j número primo $j=1,\ldots,i$.

entonces $p_j | q$ $j=1,\ldots,i$

como q es primo entonces $p_j = q$, de donde:

$$q(3p+1) = 3kq^i$$

$$3p+1 = 3kq^{i-j}$$

y entonces $3|3p+1$, lo cual es una contradicción. Supongamos ahora que $\varphi(\frac{q}{3}x) = \lambda_1\varphi_1(x)+\ldots+\lambda_n\varphi_n(x)$ donde $\varphi_i(x) = \varphi(\frac{3p_i+1}{p_i q_i}x)$ si $i \leqslant k$ p_i , $q_i \in \mathbb{N}$

$$\varphi_i \in D_{[-s,s]} \quad \text{si} \quad i > k \quad \lambda_i \neq 0 \quad i=1,\ldots,n.$$

Sea $r_i = \frac{3p_i+1}{p_i q_i}$ $i \leqslant k$ y supongamos que $r_i \leqslant r_{i+1}$ para $i=1,\ldots,k-1$. Entonces:

$$\text{Sop}\,\varphi(\frac{q}{3}x) = [-\frac{q}{3},\frac{q}{3}] \subset [-r_k,r_k].$$

Probaremos que $r_k = \frac{q}{3}$, es decir que $\frac{q}{3} = \frac{3p_k+1}{p_k q_k}$ con lo cual $q_k = \frac{3p_k+1}{p_k}\,\frac{3}{q}$ y puesto que esto último resulta imposible, conclumos que $\varphi(\frac{q}{3}x) \notin E_S$ si $S < \frac{q}{3} - 1$.

Supongamos que $\frac{q}{3} < r_k$.

Si $r_j \leqslant \frac{q}{3}$ $j=1,\ldots,k-1$ y x es tal que $\frac{q}{3} < x < r_k$ entonces $\varphi_i(x) = 0$ si $i \neq k$ y $\varphi_k(x) \neq 0$, entonces $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \neq 0$, es decir $x \in \operatorname{Sop} \varphi(\frac{q}{3}x)$ lo cual es una contradicción, de donde $\frac{q}{3} = r_k$. Ahora bien, si $\frac{q}{3} \leqslant r_j$ para algún $j < k$, tomamos $r_{k-1} < x < r_k$, entonces $\varphi_k(x) \neq 0$ y $\varphi_i(x) = 0$ si $i \neq k$, nuevamente $x \in \operatorname{Sop} \varphi(\frac{q}{3}x)$ de donde $r_{k-1} = r_k$, repitiendo el procedimiento obtenemos que $\frac{q}{3} = r_k$.

Por último, para ver que H-7 no se cumple, sean n y $p \in \mathbb{N}$, tomamos $q > 5$ primo, tal que $q > 3(n+p+1)$, entonces $\frac{q}{3} - 1 > p+n$ con lo cual $\varphi(\frac{3}{q}x) \in \overline{E}_n^E$ y $\varphi(\frac{3}{q}x) \notin E_{n+p}$.

El siguiente, es un ejemplo en el cual TDS se cumple y no se satisfacen:

(H-1)- "E_n es cerrado en E_{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$".

(H-2)- "La topología de cada E_n es igual a la topología inducida en E_n por E_{n+1}".

(H-3)- "E_n es cerrado en E para todo $n \in \mathbb{N}$".

(H-4)- "Todo conjunto convexo y cerrado en E_n es cerrado en E_{n+1}".

(H-7)- "Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{E}_n^E \subset E_{n+p}$ para algún $p \in \mathbb{N}$".

(H-8)- "Para cada hiperplano cerrado F en E_n, $(E_n \setminus F) \cap \overline{F}^{E_{n+1}} = \phi$".

<u>Ejemplo 5.17.</u> Sea $W(x) = \sqrt{1+x^2}$, $x \in (-\infty,\infty)$, definimos $E_n = \{f \in L^2(\mathbb{R})\ ;\ \|f\|_n^2 = \int_{\mathbb{R}} |W^{-n} f|^2 dx < +\infty\}$. Si $f, g \in E_n$, definimos $(f,g)_n = \langle W^{-n}f, W^{-n}g\rangle_2$ donde $\langle,\rangle_2$ denota el producto interior en L^2, $(\ ,\ )_n$ es entonces un producto interior en E_n , más aún, la topología inducida por él, dá a E_n estructura de espacio de Hilbert, la demostración es idéntica a la que prueba el mismo hecho en el ejemplo 5.12.

Como consecuencia del hecho que el conjunto de funciones continuas de soporte compacto es denso en L^p, $p \geqslant 1$ ([18] Cap. 3 Teo. 3.14 Pag. 71), se sigue que el conjunto D del ejemplo 5.16 es denso en cada E_n , de ahí que:

$$E_{n+p} = \overline{D}^{E_{n+p}} \subset \overline{E_n}^{E_{n+p}} \subset \overline{E_n}^{E}$$

De aquí se sigue claramente que H-1, H-2, H-3, H-4 y H-7 no se cumplen, sin embargo, puesto que cada E_n es de Hilbert, es reflexivo ([1] Cap. 4 Secc. 44 44.7 Pag. 191), y por el Teorema 2.10, TDS se cumple.

Por último, para mostrar que H-8 no se satisface, tomemos $f_k = W^n \chi_{[-k,k]} \in E_n$, y sea

$$B = \{f_k\ ,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces $\|f_k\|_n^2 = \int_{\mathbb{R}} |\chi_{[-k,k]}|^2\, dx = 2k$, por consiguiente $B \subset E_n$.

Observemos además que $\|f_k\|_{n+1}^2 < \pi$:

$$\|f_k\|^2_{n+1} = \int_{\mathbb{R}} |\overline{W}^{(n+1)} W^n \chi_{[-k,k]}|^2 dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |W^{-1}\chi_{[-k,k]}|^2 dx$$
$$= \int_{-k}^{k} |W^{-1}|^2 dx$$
$$= \int_{-k}^{k} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$
$$= \text{ang tan } k - \text{ang tan } -k$$

pero ang tan $k < \frac{\pi}{2}$ y ang tan $-k > \frac{-\pi}{2}$ de donde $\|f_k\|^2_{n+1} < \pi$ y B es acotado en E_{n+1}.

Supongamos que H-8 se cumple, B es acotado en E_{n+1} y no es acotado en E_n, entonces B no es débilmente acotado en E_n y existe $f_o \in E_n'$ tal que f no es acotada en B.

Para $k \in \mathbb{N}$ sea $b_k \in B$ tal que $f_o(b_k) > k$. Por inducción escogemos $f_p \in E_{n+p}'$ tal que f sea extensión de f_{p-1}. Entonces $\cup\{f_p^{-1}(-\infty,1);\ p \in \mathbb{N}\}$ es vecindad del cero en E y no absorbe a B, por lo tanto B no es acotado en E, lo cual es una contradicción.

Recordemos ahora que en el teorema 2.10 se probó que si cada E_n es de Banach y semireflexivo, entonces TDS se cumple, a continuación damos un ejemplo en el que cada E_n es de Fréchet y semireflexivo, sin embargo no se satisface TDS, más aún ni siquiera se obtiene QJH.

Ejemplo 5.18. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $D_n = \mathbb{R}\setminus\{1,2,\ldots,n\}$ y $E_n = C^\infty(D_n)$. Para cada $n,m \in \mathbb{N}$ y $f \in E_n$, definimos:

$\|f\|_{n,m} = \text{Sup }\{m|f^{(i)}(x)|;\ \ x \in K_{n,m} \ \ i=0,1,\ldots m\}$,

$K_{n,m} = \{x \in D_n;\ |x| \leqslant m,\ \ |x-j| \geqslant \frac{1}{m}\ \ \ j=0,1,\ldots,n\}.$

$\{K_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos compactos tales que $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_{n,m} = D_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\|\ \|_{n,m}$ es una seminorma en E_n.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_{n,m}$ la bola unitaria relativa a la seminorma $\|\ \|_{n,m}$, entonces el conjunto $\{B_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ forma una base para el sistema de vecindades de E_n con la propiedad de que $B_{n,m} \supset B_{n,m+1}$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$, lo cual hace a E_n un espacio metrizable. Probaremos a continuación que E_n es de Fréchet:

Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E_n, entonces para $V \in \mathcal{N}_{0,E_n}$, digamos

$V = \{f \in E_n;\ \|f\|_{n,m} < \varepsilon\}$, existe $N \in \mathbb{N}$

tal que si $k,s \geqslant N$, entonces $\|f_k - f_s\|_{n,m} < \varepsilon$ es decir $\sup\{m|f_k^{(i)}(x) - f_s^{(i)}(x)|;\ \ x \in K_{n,m}\ \ i=0,\ldots,m\} < \varepsilon$

entonces $m|f_k^{(i)}(x) - f_s^{(i)}(x)| < \varepsilon \quad x \in K_{n,m} \quad i=0,\ldots,m$ en particular $(f_k^{(i)}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, entonces converge a algún número $f^{(i)}(x)$.

Sea $x_o \in D_n$, si $U \in \mathcal{N}_{x_o,D_n}$, se tiene

$$|f^{(i)}(x) - f_k^{(i)}(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in U \text{ y } k > N$$

es decir $(f_k^{(i)})$ converge uniformemente a $f^{(i)}$ en U. Así $f^{(i)}$ es continua en x_o y como $x_o \in D_n$ era arbitrario, se sigue que $f^{(i)}$ es continua en D_n, por consiguiente E_n es de Fréchet. Además cada E_n es nuclear ([20] Cap. IV Secc. 9

Teo 9.7 y ejemplo 3 Pag. 173).

Entonces cada E_n tiene la propiedad de Montel ([20] Cap. III Secc. 7.2 corolario 2) y es, por consiguiente, semireflexivo ([20] Cap. IV Secc. 5 Teo 5.5 Pag. 144).

Sea $E = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} \text{ind}\, E_n$

Probaremos a continuación que TDS no se cumple.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, sea $f_n(x) = (x-n)^{n-1/2} e^{-(x-n)^2}$

y $c_n = \sup\{|f_n^{(i)}|;\ x \in D_n \setminus [n-1, n+1],\ i=0,1,\dots,n-1\}$.

Claramente, cada $f_n \in E_n$. Sea $V \in \mathcal{S}_{0,E}$, como $\{B_{1,m}\}_{m=1}^{\infty}$ es una base del sistema de vecindades de E_1, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $W = B_{1,m} \subset V$.

Ahora bien,

$$\left\|\frac{1}{nc_n} f_n\right\|_{1,m} = \sup\{m\left|\frac{1}{nc_n} f_n^{(i)}(x)\right|;\ x \in K_{1,m}\ i=0,\dots,m\} < 1$$

$$\text{si y sólo si} \quad \frac{m}{n} < 1$$

es decir $\frac{1}{nc_n} f_n \in W$ si $n=m+1,\ m+2,\dots$

entonces existe $k > 0$ tal que $h_n = \frac{1}{nc_n} f_n \in kV$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, el conjunto $B = \{h_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en E.

Pero $B \not\subset E_n$ para cualquier n. Para ello observemos que $f_n \notin E_{n-1}$.

$$f_n(x) = (x-n)^{n-1/2} e^{-(x-n)^2}$$

$$f_n^{(k)}(x) = (x-n)^{n-\frac{2k+1}{2}} e^{-(x-n)^2} p(x-n), \quad \text{donde } p(x-n)$$

es un polinomio, entonces en la n-ésima derivada el factor $(x-n)$ aparece en el denominador, es decir f_n no es de clase C^{∞} en $x = n \in D_{n-1}$, es decir $f_n \in E_n$ pero no en E_{n-1}.

Entonces B es un acotado en E que no está contenido en E_n para cualquier $n \in \mathbb{N}$, es decir TDS no se cumple. Por último, para ver que QJH no se cumple, sean $n \in \mathbb{N}$ y B_n cerrado y acotado en E_n. Como $f_{n+1} \in E_{n+1}$ y $f_{n+1} \notin E_n$ entonces $f_{n+1} \notin B_n$.

Puesto que E_n tiene la propiedad de Montel y B_n es cerrado, entonces B_n es compacto en E_n, por lo tanto B_n es compacto en E.

Así $f_{n+1} \notin \overline{B_n}^E = B_n$, $f_{n+1} \in B$

es decir QJH no se cumple.

BIBLIOGRAFIA

[1] Berberian, S. K. Lectures in Functional Analysis and Operator Theory. Springer - Verlag 1973.

[2] Bosch C., Kučera J. Conjuntos acotados en límites inductivos. Publicaciones del Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT). Guanajuato, Gto.

[3] Bosch C, Kučera J., Mc. Kennon K. Dual Characterization of the Dieudonné - Schwartz theorem on Bounded Sets. Internat J. Math. Sci. Vol. 6 No. 1 (1983) 189-192.

[4] De Wilde, M. Closed Graph Theorems and Webbed Spaces. Pitman, London 1978.

[5] Dieudonné, J., Schwartz L. La Dualité dans les espaces *F* y *LF*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 1 (1942), 61-101.

[6] Floret, Klaus. Some aspects of the theory of locally convex inductive limits. Surveys and Recent Results II. North Holland Publishing Company, (1980), 205-237.

[7] Horváth, J. Topological Vector Spaces and Distributions. Addison-Wesley, Reading, Massachusets, 1966.

[8] Kučera, J. Bounded Sets on locally convex Spaces. Por Aparecer.

[9] Kučera, J., Mc. Kennon K. Bounded Sets in inductive limits. Proc. Amer. Math. Soc. 69 (1978), 62-64.

[10] Kučera, J., Mc. Kennon, K. Dieudonné - Schwartz theorem on bounded sets in inductive limits. Proc. Amer. Math. Soc. 78 (1980). 366-368.

[11] Kučera, J. Bosch C. Dieudonné - Schwartz theorem on bounded sets in inductive limits II. Proc. Amer. Math. Soc. 86 (1982), 392-394.

[12] Kučera, J. Bounded sets in Fast Complete Inductive limits. Por aparecer.

[13] Kučera, J. Note on Köthe's example of an incomplete LB-space. Por aparecer.

[14] Köthe, G. Topological Vector Spaces I. Springer - Verlag 1969.

[15] Pérez, E. S. Conjuntos acotados en límites inductivos. Tesis, U.N.A.M., 1980.

[16] Qiu J. H. Some Results on Bounded sets in inductive limits. Por aparecer.

[17] Rudin W. Functional Analysis. Mc Graw-Hill Book Company, 1973.

[18] Rudin W. Real and Complex Analysis. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1966.

[19] Royden H. L. Real Analysis. Mc millan Company, New York, 1963.

[20] Schaefer, H. H. Topological Vector Spaces. Springer - Verlag, 1971.

[21] Taylor, A. E. Introduction to Functional Analysis. New York. J. Wiley 1958.