



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

43
2EJ
V.1,

**MODELACIÓN MATEMÁTICA DE FLUJOS
TURBULENTOS A TEMPERATURAS MODERADAS**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
FÍSICO

P R E S E N T A :

EDGAR IGNACIO SÁNCHEZ RANGEL



MÉXICO, D.F.

1995

FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE

Jefe de la División de Estudios Profesionales

Facultad de Ciencias

Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) EDGAR IGNACIO SANCHEZ RANGEL

con número de cuenta 8603099-3 con el Título: _____

"MODELACION MATEMATICA DE FLUJOS TURBULENTOS A TEMPERATURAS

MODERADAS"

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Físico

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
	DR.	HERMILO RAMIREZ LEON	<i>[Firma]</i>
Director de Tesis	DR.	EDUARDO RAMOS MORA	<i>[Firma]</i>
	DR.	RAMON PERALTA Y FABI	<i>[Firma]</i>
	M. EN C.	VIVIANNE MARQUINA FABREGA	<i>[Firma]</i>
Suplente	DR.	MARCO ANTONIO MARTINEZ NEGRETE	<i>[Firma]</i>
Suplente			

**A la memoria de:
CLARA BAUTISTA RESENDIZ
A quien siempre recordaré
con cariño y admiración.**

AGRADECIMIENTOS

A mis padres: Santa y Roberto, y a mis hermanos: Clara, Andrea y Benigno por su apoyo incondicional a lo largo de mi carrera y en la elaboración de esta tesis.

Al Instituto de Investigaciones Eléctricas por el apoyo económico al otorgarme una beca para mi estancia en el mismo y la realización de este trabajo.

Al Dr. Hermilo Ramírez León por su gran ayuda al asesorarme en la elaboración, corrección y mejoramiento de este trabajo.

Al Centro de Cómputo de la UNAM por el otorgamiento de tiempo de CPU en la supercomputadora CRAY-YMP 4/464.

A mis compañeros y amigos tanto de la Facultad de Ciencias como del Instituto de Investigaciones Eléctricas por su apoyo y ayuda.

ÍNDICE

ÍNDICE.	i
NOTACIÓN Y CONVENCIONES.	iv
INTRODUCCIÓN.	
La contaminación ambiental.	ix
Los modelos de dispersión.	xi
El objetivo del trabajo.	xiv
Organización del trabajo.	xiv

CAPÍTULO 1: EL MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO.

1.1 Introducción.	1
1.2 Hipótesis de inicio.	2
1.3 Las ecuaciones instantáneas.	5
1.3.1 Ecuación de continuidad.	5
1.3.2 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.	7
1.3.3 Ecuación constitutiva de Newton de la viscosidad.	8
1.3.4 Ecuación de conservación de la energía.	9
1.3.5 Ley de conducción de calor de Fourier.	10
1.3.6 Ecuación de estado.	10
1.3.7 Resumen de las ecuaciones instantáneas.	11
1.4 Las ecuaciones de Boussinesq.	12
1.4.1 Ecuación de estado.	13
1.4.2 Ecuación de continuidad.	13
1.4.3 Ecuación de cantidad de movimiento.	14
1.4.4 Ecuación de energía.	14
1.5 Los postulados de Reynolds.	18
1.6 Las ecuaciones medias.	20
1.6.1 Ecuación media de continuidad.	20
1.6.2 Ecuación media para la velocidad.	21

1.6.3 Ecuación media para la temperatura.....	24
1.6.4 Discusión de las ecuaciones medias.....	26

CAPÍTULO 2: LOS MODELOS DE TURBULENCIA DE ORDEN CERO Y DE PRIMER ORDEN.

2.1 Introducción.....	28
2.2 Modelos de orden cero.....	28
2.2.1 Modelo de viscosidad turbulenta.....	29
2.2.2 Modelo de difusión turbulenta.....	30
2.3 Modelos de primer orden.....	31
2.3.1 Modelo $\kappa - \epsilon$	31
2.3.2 Modelo $\frac{\kappa}{\theta^2} - \epsilon_\theta$	36

CAPÍTULO 3: MÉTODO DE SOLUCIÓN NUMÉRICA.

3.1 Introducción.....	41
3.2 Discretización de las derivadas.....	42
3.3 Celda MAC.....	44
3.4 Discretización de las ecuaciones.....	45
3.4.1 Ecuación media de la velocidad.....	45
3.4.2 Ecuación de la energía cinética de la turbulencia.....	47
3.4.3 Ecuación de la disipación de la energía cinética de la turbulencia.....	48
3.4.4 Ecuación de la temperatura media.....	49
3.4.5 Ecuación de la varianza de la fluctuación de temperatura.....	50
3.4.6 Ecuación de la evolución de la disipación de la varianza de temperatura.....	51
3.5 El método de compresibilidad artificial.....	52
3.6 El programa <i>QUETZAL/II</i>	55

CAPÍTULO 4: ESTUDIO PARAMÉTRICO DE UN FLUJO TÉRMICO VERTICAL.

4.1 Introducción.....	60
4.2 Clasificación de jets y sus características.....	60
4.3 El jet plano turbulento.....	63
4.3.1 Identificación de las zonas de un flujo desarrollado.....	63
4.3.2 Obtención de la línea de expansión.....	65

CAPÍTULO 5: APLICACIONES.

5.1	Introducción.....	69
5.2	Definición del dominio de estudio.....	69
5.3	Condiciones iniciales.....	71
5.3.1	Perfiles naturales de presión y temperatura.....	71
5.3.2	Condiciones de emisión.....	73
5.4	Condiciones de frontera.....	74
5.4.1	Condiciones de frontera para la línea de emisión.....	74
5.4.2	Condiciones de frontera para la línea de simetría.....	75
5.4.3	Condiciones límites para la frontera libre superior.....	76
5.4.4	Condiciones límites para la frontera libre derecha.....	78
5.4.5	Condiciones de frontera para la pared ficticia.....	79
5.5	Discusión de los resultados.....	80
5.5.1	Modelo con coeficientes constantes.....	81
5.5.2	Modelo semiempírico.....	90
5.5.3	Modelo derivado de κ - ϵ	100

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS.....	112
----------------------------------	-----

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	115
---------------------------------	-----

ANEXO 1: PRINCIPALES SUBROUTINAS DEL PROGRAMA QUETZAL/II.

A.1	Subrutina para la solución de la ecuación de continuidad.....	120
A.2	Subrutina para la solución de las ecuaciones para el campo medio de velocidades....	126
A.3	Subrutina para la solución de la ecuación de la temperatura.....	129
A.4	Subrutina para la solución de las ecuaciones para los esfuerzos de Reynolds.....	131
A.5	Subrutina para la solución de la ecuación de la energía cinética de la turbulencia	132
A.6	Subrutina para la solución de la ecuación de la disipación de la energía cinética de la turbulencia.....	134
A.7	Subrutina para la solución de las ecuaciones para el flujo de calor	136
A.8	Subrutina para la determinación de los términos de difusión	137
A.9	Subrutina para el cálculo de la viscosidad y difusividad turbulenta con el modelo κ - ϵ	144

NOTACIÓN

LETRAS LATINAS.

A_T	constante de similaridad para la velocidad.
A_W	constante de similaridad para la temperatura.
B	término de flotación de la energía cinética turbulenta.
B_W	constante de perfiles gaussianos para la velocidad.
B_T	constante de perfiles gaussianos para la temperatura.
C_{ε_1}	constante de modelación de la ecuación de ε para el término de producción.
C_{ε_2}	constante de modelación de la ecuación de ε para el término de disipación.
$C_{\varepsilon_{T1}}$	primera constante de modelación del término de producción de la ecuación de ε_θ .
$C_{\varepsilon_{T2}}$	segunda constante de modelación del término de producción de la ecuación de ε_θ .
$C_{\varepsilon_{T3}}$	primera constante de modelación del término de disipación de la ecuación de ε_θ .
$C_{\varepsilon_{T4}}$	segunda constante de modelación del término de disipación de la ecuación de ε_θ .
C_μ	constante de modelación en la ecuación de viscosidad turbulenta.
C_p	capacidad calorífica a presión constante.
C_{p_0}	capacidad calorífica a presión constante de la atmósfera.
C_V	calor específico a volumen constante.
D	diámetro a la salida de la chimenea.
E	energía total.
Fr	número de Froude.
Gr	número de Grashof.
G	producción suplementaria por fuerza de volumen.
G_ε	término de producción debido a las fuerzas de volumen.
g_i	vector de aceleración gravitacional.
H	altura de la chimenea.
h	entalpía.
k	coeficiente de conductividad térmica.
\bar{k}	conductividad térmica instantánea.
k_0	conductividad térmica en la atmósfera.
χ	difusividad térmica.
K_T	difusividad térmica turbulenta equivalente.

K_{T1}	coeficiente de difusividad térmica equivalente en la dirección horizontal.
K_{T3}	coeficiente de difusividad térmica equivalente en la dirección vertical.
L_E	línea de expansión.
M	número de Mach.
Q_i	conducción de calor.
\tilde{P}	presión instantánea.
P_0	presión en la atmósfera.
P	presión de desviación.
p	fluctuación turbulenta de la presión.
P	término de producción de la energía cinética turbulenta.
Pr	número de Prandtl.
Pr_T	número de Prandtl turbulento.
P_e	término debido a los gradientes de fluctuaciones de velocidad.
P_θ	término de producción por el gradiente medio de temperatura.
R	constante universal de los gases.
R	relación de las escalas de tiempo dinámico y térmico.
R_0	constante universal de los gases en la atmósfera.
R_b	número de Rossby.
Re	número de Reynolds.
Ri	número de Richardson.
S_{ch}	número de Schmidt.
t	tiempo.
\tilde{T}	temperatura instantánea.
T_0	temperatura ambiente.
T_N	temperatura natural.
T_{N0}	temperatura natural en la atmósfera.
T_m	temperatura máxima del flujo.
T	desviación de temperatura.
\bar{T}	temperatura media de desviación.
\tilde{U}_j	vector de velocidad instantánea.
U_j	desviación de la velocidad con respecto a la atmósfera en calma.
\bar{U}_j	velocidad media de desviación.
u_j	fluctuación turbulenta de la velocidad de desviación.
v_s	velocidad del sonido.
W_m	velocidad máxima del flujo.
W_0	velocidad de salida del flujo en la chimenea.

$\overline{u_i u_j}$	esfuerzo de Reynolds.
$\overline{u_i \theta}$	flujo turbulento de calor.
x_j	coordenadas cartesianas.
x_{CL}	pósición horizontal de la línea de simetría.
z_D	parámetro adimensional para la identificación de las diferentes zonas de un flujo.
z_0	origen de similitud.

LETRAS GRIEGAS.

α	parámetro de iteración.
β	coeficiente de expansión volumétrica.
δ_{ij}	delta de Krönecker.
δx_j	semilongitud de evolución.
ε	disipación de la energía cinética de la turbulencia.
ε_c	parámetro de acotamiento para el método de compresibilidad artificial.
ε_ε	disipación de ε .
ε_θ	disipación de la varianza de la fluctuación turbulenta de la temperatura.
γ	razón de calores específicos.
Γ_{ij}	tensor de esfuerzos.
η	variable de afinidad.
η_θ	variable de afinidad para la temperatura.
κ	energía cinética de la turbulencia.
λ	segundo coeficiente de viscosidad.
$\tilde{\mu}$	viscosidad instantánea.
μ_0	viscosidad de la atmósfera en reposo.
μ	desviación de la viscosidad.
ν_0	coeficiente de viscosidad cinemática.
ν_N	viscosidad cinemática natural.
ν_T	viscosidad turbulenta.
ν_{T1}	coeficientes de viscosidad turbulenta (modelo de orden cero) en la dirección horizontal.
ν_{T3}	coeficientes de viscosidad turbulenta (modelo de orden cero) en la dirección vertical.
θ	fluctuación turbulenta de la temperatura de desviación.
$\overline{\theta^2}$	varianza de la fluctuación de temperatura
$\bar{\rho}$	densidad instantánea.

ρ_0	densidad de la atmósfera en reposo.
ρ_N	densidad natural.
ρ	desviación de la densidad.
$\bar{\rho}$	densidad media de desviación.
ρ'	fluctuación turbulenta de la densidad.
σ_κ	constante de modelación de la ecuación de κ .
σ_ϵ	constante de modelación de la ecuación de ϵ .
σ_T	constante de modelación de la ecuación de $\overline{\theta^2}$.
$\sigma_{\epsilon T}$	constante de modelación de la ecuación de ϵ_θ .
τ_d	escala de tiempo dinámico.
τ_θ	escala de tiempo térmico.
Ω	velocidad de la rotación terrestre.

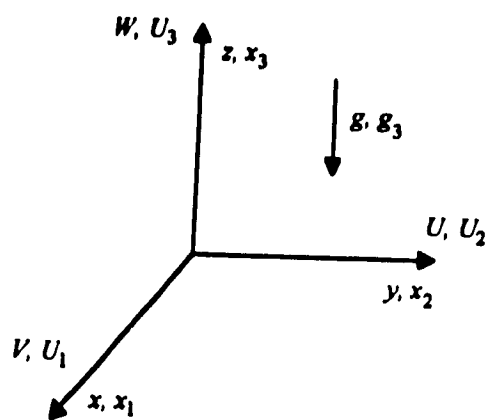
SUBÍNDICES.

0	estado de referencia.
1, 2, 3	dirección espacial.
i, j, k	índices espaciales.
l, m	
N	estado natural de la atmósfera.
T	turbulencia.

CONVENCIONES.

$\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x_j}$	operador diferencial o derivada material.
$\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$	operador diferencial siguiendo el movimiento medio de desviación.
$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_j}$	operador nabra.
$\bar{\otimes}$	variable media.
$\tilde{\otimes}$	variable instantánea.

Orientación de los ejes:



INTRODUCCIÓN

LA CONTAMINACIÓN AMBIENTAL.

Existen diferentes definiciones de contaminación que involucran los puntos de vista de sus autores; en lo que a este trabajo se refiere se tratará de dar una definición objetiva de este fenómeno. Se dice que hay contaminación ambiental cuando cualquier circunstancia que agrega o sustrae elementos de los constituyentes usuales del aire puede alterar sus propiedades físicas o químicas lo suficiente para ser detectadas por los ocupantes del medio. Por otra parte consideramos como contaminante aquellas sustancias agregadas al medio ambiente cuyas concentraciones bastan para producir un efecto medible sobre el hombre, animales, vegetación o materiales.

Los contaminantes pueden por lo tanto incluir casi cualquier composición natural o artificial de materia capaz de ser transportada por medio del aire. Estas pueden ser partículas sólidas o líquidas, gases o diferentes mezclas de ellos. La contaminación del aire por una especie química simple parece ser poco usual; ciertamente muchos problemas comunitarios involucran un gran número de tipos y tamaños de sustancias.

Para clasificar los contaminantes hasta ahora conocidos, es conveniente considerar dos grupos generales: (a) aquellos emitidos directamente desde una fuente identificable (contaminantes primarios), y (b) aquellos producidos en el aire por interacción con dos o más

contaminantes primarios, o por reacción con los constituyentes atmosféricos normales, con o sin fotoactivación (contaminantes secundarios).

La contaminación atmosférica es asociada generalmente con la industria y las actividades domésticas del hombre, sin embargo muchos de los grandes contaminantes gaseosos son emitidos por la naturaleza. Tomando cifras globales, la masa total de los residuos de gases emitidos por ella excede a la de los emitidos por el hombre en varios ordenes de magnitud, no obstante, las actividades humanas afectan desfavorablemente la calidad de la atmósfera, particularmente en áreas urbanas densas y cerca de grandes fuentes de emisión. Muchos contaminantes son preocupantes por los efectos globales que pueden causar; los efectos pueden ser inmediatos y obvios, tales como la poca visibilidad, irritación de los ojos y olores desagradables; pero también pueden ser perceptibles sólo a través de grandes periodos de observación, tal como en corrosión. Los efectos más sutiles requieren estudios estadísticos sofisticados para determinar casos tales como los efectos en la salud humana y cambios en el balance de energía terrestre.

El estudio de la contaminación ambiental es un problema complejo e interesante ya que involucra varias disciplinas como son la química atmosférica, la mecánica de fluidos, la termodinámica, las teorías de la turbulencia, la mecánica estadística, etc. Este trabajo pretende contribuir al entendimiento de los mecanismos que produce el movimiento de los contaminantes en la atmósfera, particularmente aquellos que son producidos a partir de fuentes de emisión de tipo puntual, como las chimeneas de descarga de las centrales termoeléctricas.

El estudio de este fenómeno implica el conocimiento de una gran cantidad de variables, de entre las cuales se destacan:

- La meteorología local.
- La microfísica y la química de las emisiones.
- La química atmosférica.
- El tipo y la intensidad de los contaminantes.
- La capa límite atmosférica.
- La estructura turbulenta del flujo.

Existen otros factores que deben considerarse, como son: el funcionamiento interno de una planta, la topografía del sitio, el tipo de zona, etc.

El estudio de la dispersión de contaminantes atmosféricos y su modelación debe, rigurosamente considerar los factores antes mencionados.

LOS MODELOS DE DISPERSIÓN.

Existen varios tipos de modelos que permiten el estudio de la dispersión de los contaminantes; entre las características más importantes de estos se encuentran:

- Estructura básica del modelo: determinístico o no determinístico.
- Tiempo de resolución: a estado estable o dependiente del tiempo.
- Marco o referencia: euleriano o lagrangiano.
- Dimensionamiento del dominio computacional: unidimensional, bidimensional, tridimensional o multinivel.
- Métodos de solución del modelo: analíticos o numéricos (varios métodos).
- Espacio físico: local, regional, nacional o global.
- Tiempo : segundo, minuto, hora, día, mes u otro.
- Contaminantes de interés: dióxido de sulfuro, óxido de nitrógeno, hidrocarburos, partículas de materia, oxidantes fotoquímicos o contaminantes secundarios.

La tabla I presenta un resumen de las escalas de aplicación, capacidad, datos requeridos de entrada y costos de algunos modelos de contaminación del aire determinísticos.

INTRODUCCIÓN

MODELO	ESCALA DE APLICACIÓN	CAPACIDAD	DATOS REQUERIDOS	COSTO DE COMPUTO
gaussiano	local, fuentes puntuales	limitado	disponibles	bajo
de celdas	urbano	muy limitado	disponibles	bajo
euleriano	todas las escalas	completo	posiblemente difícil	bajo, mediano o considerable
de trayectoria lagrangiano	urbano, regional, distancias largas	limitado	disponibles	relativamente bajo
de trayectoria de partículas aleatorias	todas las escalas	completo	difíciles de obtener	alto

Tabla I Características de los modelos de dispersión de contaminantes atmosféricos .(Zannetti, 1990)

Como se había especificado anteriormente este fenómeno es sumamente complejo de estudiar; desde 1955 se han propuesto modelos para determinar la difusión de contaminantes a partir de una fuente puntual, una línea fuente o de una superficie fuente. De los métodos más utilizados, inclusive hoy en día, son los modelos gaussianos que se apoyan en la metodología de Briggs (1970), llamada *two-step plume-path diffusion method* (método de difusión de la pluma en dos pasos); y que consiste en un primer paso, de calcular la altura efectiva que es igual a la altura de la chimenea más una altura debida a los efectos de gravedad y a la cantidad de movimiento inicial del fluido. En segundo termino, se considera una fuente puntual en la altura efectiva y se resuelve la ecuación de difusión simplificada, suponiendo que las velocidades laterales y verticales son nulas y despreciando el transporte del contaminante por las fluctuaciones de la velocidad, con respecto del transporte convectivo por esta misma velocidad. Los modelos que se apoyan en las formulaciones de Briggs son innumerables y algunos de los cuales están debidamente validados y son ampliamente reconocidos y recomendados por la EPA (Agencia de Protección del Medio Ambiente). Una de las principales ventajas que ofrecen estos modelos es su adaptabilidad ya que pueden instalarse en computadoras personales. En la práctica generalmente se buscan soluciones "urgentes y económicas" razón por la cual se recurre con frecuencia a estos modelos. Sin embargo y a pesar del desarrollo de estos modelos los resultados son, por lo general, de carácter indicativo.

Otra metodología más completa, fue propuesta por Shir (1970), la cual consiste en estudiar el problema bidimensional de la difusión a partir de una fuente lineal de contaminación (calor y cantidad de movimiento), en una atmósfera local. Shir introduce coeficientes de viscosidad y de difusividad turbulentos constantes y uniformes (ν_T y K_T). El sistema de ecuaciones de conservación (no lineales) está asociado con una variable que evoluciona con el tiempo; las dos ecuaciones de la dinámica son transformadas en una ecuación de evolución de la vorticidad y una ecuación de Poisson para la función de corriente. En este método, las condiciones meteorológicas intervienen como variables dependientes en el cálculo. Este es uno de los trabajos pioneros en lo que a la modelación estadística, de los procesos de dispersión atmosférica, se refiere.

Se han desarrollado métodos más recientes cuasi-tridimensionales los cuales suponen que existe una dirección privilegiada del flujo, según la cual las ecuaciones son de tipo parabólico, mientras que en las otras dos direcciones, las ecuaciones son de tipo elíptico. Estas formulaciones representan la turbulencia en términos de la difusión con la introducción de coeficientes de difusión turbulenta. Taft (1974) desarrolló un modelo suponiendo que el viento en la dirección horizontal no se modifica por la estructura de la chimenea y el jet. Los coeficientes de difusividad turbulenta son modelados conforme el esquema de Gawain y Pritchett (1969). Para comparar sus resultados a las medidas del sitio, Taft estudió la evolución del jet hasta 1700 m a partir del punto de emisión.

Benqué (1976) utilizó un método de pasos fraccionarios sobre las variables primitivas que resuelve el sistema de ecuaciones por planos sucesivos en una dirección. Si el número de Froude es igual a 1, supone que la velocidad longitudinal no es modificada y, mientras que el chorro tenga mayor energía (que sea más portante), esta velocidad es dividida por un coeficiente comprendido entre 1 y 1.5. Los coeficientes de difusividad, varían con la altitud según la estabilidad de la atmósfera natural y son constantes en el tiempo; los coeficientes son deducidos de experimentos en túneles de viento.

Los trabajos mencionados anteriormente, permiten estudiar la difusión del contaminante a distancias importantes a partir del punto de emisión. El éxito de estos modelos es que permiten predecir la contaminación en un tiempo corto de CPU; mejor aún, ellos se pueden adaptar fácilmente a computadoras pequeñas o personales (PC's). Sin embargo, estos modelos presentan serios inconvenientes, por ejemplo: necesitan una hipótesis sobre la intensidad del viento en la dirección longitudinal, no permiten la rotación del viento con la altitud, los efectos de la turbulencia atmosférica son aproximados o completamente ignorados, al igual que los efectos

Otra metodología más completa, fue propuesta por Shir (1970), la cual consiste en estudiar el problema bidimensional de la difusión a partir de una fuente lineal de contaminación (calor y cantidad de movimiento), en una atmósfera local. Shir introduce coeficientes de viscosidad y de difusividad turbulentos constantes y uniformes (ν_T y K_T). El sistema de ecuaciones de conservación (no lineales) está asociado con una variable que evoluciona con el tiempo; las dos ecuaciones de la dinámica son transformadas en una ecuación de evolución de la vorticidad y una ecuación de Poisson para la función de corriente. En este método, las condiciones meteorológicas intervienen como variables dependientes en el cálculo. Este es uno de los trabajos pioneros en lo que a la modelación estadística, de los procesos de dispersión atmosférica, se refiere.

Se han desarrollado métodos más recientes cuasi-tridimensionales los cuales suponen que existe una dirección privilegiada del flujo, según la cual las ecuaciones son de tipo parabólico, mientras que en las otras dos direcciones, las ecuaciones son de tipo elíptico. Estas formulaciones representan la turbulencia en términos de la difusión con la introducción de coeficientes de difusión turbulenta. Taft (1974) desarrolló un modelo suponiendo que el viento en la dirección horizontal no se modifica por la estructura de la chimenea y el jet. Los coeficientes de difusividad turbulenta son modelados conforme el esquema de Gawain y Pritchett (1969). Para comparar sus resultados a las medidas del sitio, Taft estudió la evolución del jet hasta 1700 m a partir del punto de emisión.

Benqué (1976) utilizó un método de pasos fraccionarios sobre las variables primitivas que resuelve el sistema de ecuaciones por planos sucesivos en una dirección. Si el número de Froude es igual a 1, supone que la velocidad longitudinal no es modificada y, mientras que el chorro tenga mayor energía (que sea más portante), esta velocidad es dividida por un coeficiente comprendido entre 1 y 1.5. Los coeficientes de difusividad, varían con la altitud según la estabilidad de la atmósfera natural y son constantes en el tiempo; los coeficientes son deducidos de experimentos en túneles de viento.

Los trabajos mencionados anteriormente, permiten estudiar la difusión del contaminante a distancias importantes a partir del punto de emisión. El éxito de estos modelos es que permiten predecir la contaminación en un tiempo corto de CPU; mejor aún, ellos se pueden adaptar fácilmente a computadoras pequeñas o personales (PC's). Sin embargo, estos modelos presentan serios inconvenientes, por ejemplo: necesitan una hipótesis sobre la intensidad del viento en la dirección longitudinal, no permiten la rotación del viento con la altitud, los efectos de la turbulencia atmosférica son aproximados o completamente ignorados, al igual que los efectos

producidos por obstáculos (estelas, remolinos, zonas de disipación, etc.). Los mecanismos de química atmosférica son por lo general ignorados. Otro inconveniente que presentan es que no son aplicables a zonas donde la topografía local es compleja, ni a zonas costeras donde la humedad relativa es importante y no consideran la estratificación de la atmósfera.

Otras técnicas que se han desarrollado son los autómatas celulares (Salcido, 1991) y los modelos de celdas Reyes (1992), estos tipos de modelaciones aún se encuentran en proceso de validación.

EL OBJETIVO DEL TRABAJO.

El objetivo del trabajo es el de validar el modelo físico-matemático y los modelos de turbulencia usados aquí con ayuda de un programa de computadora llamado *QUETZALII*, el cual está actualmente en proceso de elaboración en el Departamento de Sistemas de Combustión del Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE).

Dicho modelo trata de ser más realista en cuanto a los mecanismos físicos y químicos (en menor grado por el momento) de las sustancias emitidas así como los mecanismos que intervienen en el proceso de transporte. Se toma en cuenta la capa límite atmosférica y la estructura turbulenta, la cual se reproduce por medio de una modelación con ecuaciones de transporte. Los resultados que se presentan son para un flujo local sobre la zona de emisión.

ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO.

En el capítulo 1 se introducen las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos, a saber: la cantidad de movimiento, de la entalpía, una ecuación de estado para los gases perfectos y la ecuación de continuidad. Se parte de estas ecuaciones en su forma integral y se consideran algunas hipótesis simplificadoras: por ejemplo, en cuanto a la microfísica y química de la emisión y la compresibilidad del flujo.

En el capítulo 2 se describen los modelos de turbulencia de orden cero (modelo de viscosidad turbulenta y de difusión turbulenta) y los modelos de primer orden (modelo $\kappa-\epsilon$ y

modelo $\overline{\theta^2} - \epsilon_\theta$). En los primeros modelos se introducen los conceptos de viscosidad y difusividad turbulenta y en los segundos, se desarrollan dos ecuaciones, una de evolución y otra de disipación, tanto para la energía cinética de la turbulencia como para la varianza de temperatura.

En el capítulo 3 se describe el método numérico de solución del modelo físico-matemático desde la discretización de las ecuaciones básicas hasta el método de compresibilidad artificial y su convergencia. Se describe además el algoritmo del programa *QUETZAL/II* y la combinación de los parámetros de control que regulan la solución de los diferentes modelos.

En el capítulo 4 se describe el estudio paramétrico de un flujo térmico vertical, así como las diferentes zonas que lo conforman y los parámetros que permiten representarlo.

En el capítulo 5 se presentan las diferentes condiciones de frontera así como las condiciones iniciales y de emisión consideradas en el modelo, finalmente se muestran y explican los resultados obtenidos con la simulación.

En las Conclusiones y Perspectivas se presenta una breve discusión de los resultados y las consideraciones que se deben de hacer para futuras aplicaciones, además de mencionar las posibilidades de aplicación del programa *QUETZAL/II* como una herramienta para el estudio de la dispersión de contaminantes.

Finalmente, en el Anexo I se presentan las subrutinas del programa *QUETZAL/II* utilizadas para la solución del sistema de ecuaciones obtenido con el modelo desarrollado en este trabajo.

CAPÍTULO 1

EL MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO

1.1 INTRODUCCIÓN.

El modelo que se desarrollará en este trabajo pretende incluir algunas de las características de las que generalmente carecen otros modelos. Se tomará en cuenta principalmente el estudio de los mecanismos de generación, producción y destrucción de la turbulencia atmosférica y se plantearán los elementos para considerar los mecanismos de la química atmosférica, en una etapa posterior.

Trabajos predecesores de estos modelos fueron desarrollados por Kolmogorov (1942) y Prandtl y Wieghsrdt (1945), quienes formularon una metodología seguida hoy en día por muchos autores. Otros de los trabajos importantes fueron desarrollados por Chou (1949) y Rotta (1951), quienes dieron por primera vez algunos resultados prácticos e introdujeron conceptos importantes sobre la modelación matemática de los términos de correlación de presión y de las correlaciones triples. Sin embargo, sus trabajos se vieron frenados por la carencia de un equipo de cómputo apropiado en su época.

Hoy en día, la eficiencia de los modelos de turbulencia de orden superior y sus aplicaciones se han ido perfeccionando de acuerdo con la evolución de las computadoras. En la década de los 70's una amplia gama de modelos estadísticos de orden superior apareció en la literatura, citemos

por ejemplo Bradshaw *et al* (1967), Donaldson (1969), Nee and Kovaznay (1969), Daly and Harlow (1970) y Rodi and Spalding (1970).

A partir de esta década, los modelos han sido impulsados por los trabajos de Launder , Rodi, Patankar y Spalding.

Evidentemente esta generación de modelos abarca los estudios sobre flujos atmosféricos que permiten la inclusión de la capa límite atmosférica, el flujo cortante, y en general los mecanismos de turbulencia atmosférica; estos modelos pueden tomar en cuenta la estabilidad atmosférica y han sido desarrollados por Donaldson (1969), Busch, Panofsky, Deardorff, etc.¹ Los modelos incluyen generalmente la dispersión de contaminantes pasivos en la atmósfera, para flujos en dos y tres dimensiones y bajo condiciones de estabilidad aleatorias. Existen pocos trabajos que consideren contaminantes activos.

Como todos los modelos de turbulencia de orden superior, el modelo que se ha desarrollado consume tiempo de cálculo y una carga de memoria bastante considerable. Debido a esto, el único inconveniente que presentan estos modelos en general es quizá la dimensión del dominio de estudio.

1.2 HIPÓTESIS DE INICIO.

El modelo físico-matemático de origen se basa en las siguientes hipótesis que tienen como objetivo simplificar las ecuaciones que gobiernan el flujo y poder ser resueltas de una manera práctica:

- Se considera la aproximación de Boussinesq.
- Una capa límite atmosférica.
- Se considera que el fluido es newtoniano.

¹ Los trabajos referidos en el texto fueron presentados por los tres últimos autores en Haugen (1973) como: Busch, Niels E. "*On the mechanics of atmospheric turbulence*", Panofsky, Hans A "*Tower micrometeorology*" y Deardorff, James W. "*Three-dimensional numerical modeling of the planetary boundary layer*".

- El flujo se considera incompresible.
- Se considera que el fluido se comporta como un gas ideal, termodinámicamente.
- No se toman en cuenta reacciones químicas; las sustancias son consideradas como transportables y sin efecto en las condiciones del flujo.
- La viscosidad dinámica μ , el coeficiente de conductividad térmica k y el calor específico a presión constante varían de forma despreciable y se consideran constantes durante un proceso.
- Se considera el número de Rossby suficientemente grande, de tal forma que la aceleración de Coriolis sea despreciable:

$$R_b = \frac{\text{velocidad característica del fluido}}{\text{velocidad de rotación de la Tierra}} = \frac{W_0}{\Omega L} \quad (1.1)$$

Por ejemplo si $L = 500$ m, $W_0 = 10$ m/s y $\Omega = 7.222 \times 10^{-5}$ rad/s; $R_b \approx 277$.

- El número de Mach, dado en la siguiente expresión, se considera pequeño.

$$M = \frac{|\vec{U}|}{v_s} \ll 1, \quad (1.2)$$

donde v_s es la velocidad del sonido en el aire (330 m/s).

- No se consideran topografías locales.
- No se considera la humedad relativa del aire.
- No se consideran los efectos fotoquímicos.
- La variación de la densidad se considera despreciable:

$$\left| \frac{\bar{\rho} - \rho_0}{\rho_0} \right| \ll 1, \quad (1.3)$$

donde ρ_0 es la densidad del estado de referencia (densidad de la atmósfera en reposo).

- La variación de la temperatura se considera despreciable:

$$\left| \frac{\bar{T} - T_0}{T_0} \right| \ll 1, \quad (1.4)$$

donde T_0 es la temperatura del estado de referencia.

- La variación de la presión se considera despreciable:

$$\left| \frac{\bar{P} - P_0}{P_0} \right| \ll 1, \quad (1.5)$$

donde P_0 es la presión estática del estado de referencia la cual obedece la condición hidrostática

$$\frac{\partial P_0}{\partial x_3} = -g\rho_0. \quad (1.6)$$

- El calor generado por los esfuerzos viscosos puede ser despreciado en la ecuación de energía termodinámica.
- Las escalas verticales del movimiento son pequeñas comparadas con el espesor efectivo de la atmósfera (el espesor de una atmósfera aerostática de densidad constante es de alrededor de 8 Km).

$$\left| \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \right|^{-1}; \quad (1.7)$$

es decir, que se supondrá convección superficial.

En la aproximación de Boussinesq, los flujos son tratados como incompresibles pero con una densidad dependiente de la temperatura cuando se estudian flujos con grandes números de Froude térmicos, la variación es significativa cuando se multiplica por la aceleración de la gravedad.

1.3 LAS ECUACIONES INSTANTÁNEAS.

Las leyes de la dinámica de fluidos están bien establecidas y pueden ser formuladas de varias maneras. Por ejemplo, pueden ser deducidas de la observación de que el comportamiento de un sistema físico está completamente determinado por las leyes de conservación. El estado de un fluido se considera conocido si, en cualquier instante de tiempo, los campos de velocidad y un número mínimo de propiedades estáticas (presión, densidad) son conocidas en cualquier punto.

El concepto de conservación significa que la variación de una *cantidad* (intensiva) de flujo conservada dentro de un volumen dado es debido al efecto total de alguna fuente interna y la *cantidad* que atraviesa la frontera. Esta cantidad es llamada flujo. Los flujos y fuentes son en general, dependientes tanto de las coordenadas espacio-tiempo como del movimiento del fluido.

Existen tres leyes físicas fundamentales que, a excepción de los fenómenos relativistas y nucleares, se aplican a todos y cada uno de los flujos, independientemente de la naturaleza del fluido que se esté considerando. Estas leyes son: la conservación de la masa (ecuación de continuidad), segunda ley de Newton (ecuación de la cantidad de movimiento) y la primera ley de la termodinámica (ecuación de energía). Pueden incluirse otro tipo de ecuaciones, dependiendo del fenómeno asociado, por ejemplo, cuando se considera la dispersión de contaminantes en la atmósfera debe de incluirse la ecuación de conservación de especies.

1.3.1 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.

La ley de la conservación de la masa establece que la masa no puede ser creada ni destruida sólo transformada, aplicando esta ley a un volumen de control fijo de tamaño infinitesimal (Fig. 1.1). Esta puede de la siguiente forma.

$$\oint_S \bar{\rho} \bar{U} \cdot ds + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{\rho} dV = 0, \quad (1.8)$$

FLUJO TOTAL
DE MASA

VARIACIÓN TEMPORAL
DE LA MASA

donde $\bar{\rho}$ y \bar{U} son la densidad y la velocidad instantáneas respectivamente. Esta forma integral se considera como la formulación básica de la ley de conservación y, de hecho, la expresión más

general, debido a que sigue siendo válida en presencia de variaciones discontinuas de las propiedades del flujo.

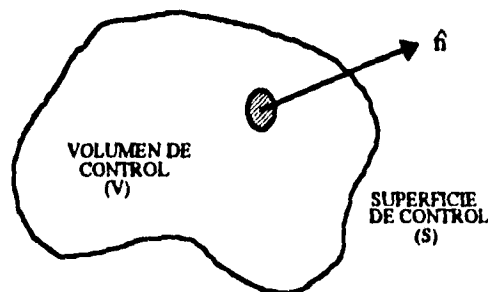


Figura 1.1 Volumen de control fijo

La ley de conservación de la masa es de naturaleza cinética, esto es, independiente de la naturaleza del fluido o de las fuerzas que actúan sobre este.

Considerando la continuidad de las propiedades del fluido, aplicando el teorema de Gauss y suponiendo la forma diferencial equivalente, la ecuación de continuidad puede escribirse como

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -(\nabla \cdot \bar{\rho} \vec{U}). \quad (1.9)$$

El vector $\bar{\rho} \vec{U}$ es el flujo de materia y su divergencia representa la rapidez con que disminuye la densidad de flujo de materia por unidad de volumen. La ecuación anterior expresa que la velocidad con que cambia la densidad en el interior de un pequeño elemento de volumen fijo en el espacio, es igual a la velocidad neta de entrada de flujo de densidad de materia en el elemento dividida por su volumen.

La ecuación de continuidad expresada en términos de la derivada material, es decir, la evolución del movimiento del fluido, en el espacio y en el tiempo es

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = -\bar{\rho}(\nabla \cdot \vec{U}). \quad (1.10)$$

Para flujos incompresibles, como el que se considera en este trabajo, la densidad se supone constante y la ecuación se escribe entonces como

$$(\nabla \cdot \vec{U}) = 0. \quad (1.11)$$

Aunque en realidad ningún fluido es totalmente incompresible, en la práctica se puede admitir con mucha frecuencia que si el flujo no es afectado por gradientes de temperatura (lo cual implica números de Froude pequeños), mezcla de gases de diferente densidad, reacciones químicas considerables o números de Mach elevados, la densidad puede considerarse como constante, y dar con ello una simplificación considerable, no sólo a la ecuación de conservación de la masa, sino a todas las ecuaciones de la mecánica de fluidos.

1.3.2 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

Esta ecuación se establece a partir de la segunda ley de Newton la cual se puede enunciar de la siguiente manera: "La razón de cambio de la cantidad de movimiento de un sistema es igual a la fuerza total que actúa sobre él en la misma dirección a la del movimiento". El enunciado se divide en dos partes; la primera es que esta ley pertenece a un sistema específico y segunda, que consta de dirección y magnitud, de manera que es una expresión vectorial. Aplicando la segunda ley de Newton a un fluido y considerando un enfoque de volumen de control se tiene la expresión para la conservación de la cantidad de movimiento

$$\sum_{i=1}^n F_i = \oint_S \bar{\rho} \vec{U} \vec{U} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{\rho} \vec{U} dV. \quad (1.12)$$

SUMA DE FUERZAS EXTERNAS	FLUJO TOTAL DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO	RAPIDEZ DE CAMBIO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO	
--------------------------------	---------------------------------------------------	---------------------------------------------------------	--

La suma de fuerzas externas son las que se deben al esfuerzo normal (en las que se incluyen las fuerzas de presión y una contribución viscosa), al esfuerzo cortante (fuerzas tangenciales) y las fuerzas que se ejercen sobre el volumen, por ejemplo como la gravedad.

Considerando las propiedades del fluido como extensivas, aplicando el teorema de Gauss y sustituyendo la suma de fuerzas por los esfuerzos correspondientes se obtiene la ecuación de cantidad de movimiento en su forma diferencial equivalente

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \bar{U} = -[\nabla \cdot \bar{\rho} \bar{U} \bar{U}] - \nabla \bar{P} - [\nabla \cdot \bar{\Gamma}] + \bar{\rho} g. \quad (1.13)$$

VELOCIDAD DE INCREMENTO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO	VELOCIDAD DE GANANCIA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO POR CONVECCIÓN	FUERZAS DE PRESIÓN	VELOCIDAD DE GANANCIA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO POR TRANSPORTE VISCOSO	FUERZAS DE GRAVEDAD
------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------	-----------------------	---------------------------------------------------------------------------------------	------------------------

En la expresión anterior \bar{P} es la presión, $\bar{\Gamma}$ son los esfuerzos y g la aceleración de la gravedad. La ecuación de cantidad de movimiento expresada en términos de la derivada material y con la ecuación de continuidad, para flujos incompresibles (ecuación 1.11) es

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{U}}{dt} = -\nabla \bar{P} - [\nabla \cdot \bar{\Gamma}] + \bar{\rho} g. \quad (1.14)$$

SUMA DE FUERZAS	FUERZAS DE PRESIÓN	FUERZAS VISCOSAS	FUERZAS DE GRAVEDAD
--------------------	-----------------------	---------------------	------------------------

1.3.3 ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD.

La ecuación de cantidad de movimiento [(1.13) ó (1.14)] es aplicable a todos los flujos, su generalidad depende de las expresiones consideradas para el tensor de esfuerzos. Para los gases o líquidos que puedan ser tratados como medios continuos, se ha observado que el esfuerzo en un punto es linealmente dependiente de la velocidad de deformación del fluido; un fluido que se comporta de esta manera es llamado *fluido newtoniano*. La ecuación del tensor de esfuerzos para un fluido newtoniano tridimensional puede escribirse por la siguiente relación de Newton-Stokes²

$$\bar{\Gamma}_{ij} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial x_m}$$

para un flujo incompresible se puede demostrar que el último término de la expresión anterior es cero, por lo que el tensor de esfuerzos se transforma en

² Cabe mencionar que en este trabajo se utilizará la llamada convención de Einstein, en la que se establece que cuando un subíndice aparece dos veces en un lado de una ecuación, queda implicada la suma con respecto a tal subíndice (Arfken, 1981).

$$\bar{\Gamma}_{ij} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.15)$$

las ecuaciones (1.14) y (1.15) se pueden entonces relacionar para encontrar la expresión precisa para la ecuación de conservación de cantidad de movimiento que utilizaremos en las siguientes secciones y que es parte fundamental del modelo que se desarrolla en este trabajo.

1.3.4 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA.

La primera ley de la termodinámica aplicada a un fluido que pasa a través de un volumen de control conduce a la ecuación de energía, que en términos vectoriales puede escribirse como

$$\frac{\partial \bar{\rho} E}{\partial t} = -(\nabla \cdot \bar{\rho} \bar{U} E) - (\nabla \cdot \bar{Q}) + \bar{\rho}(\bar{U} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot \bar{P} \bar{U}) - (\nabla \cdot [\bar{\Gamma} \cdot \bar{U}]) \pm G, \quad (1.16)$$

CAMBIO DE ENERGÍA	VELOCIDAD DE ENTRADA DE ENERGÍA POR CONVECCIÓN	VELOCIDAD DE ENTRADA DE ENERGÍA POR CONDUCCIÓN	VELOCIDAD DE TRABAJO COMUNICADO AL FLUIDO POR FUERZAS DE GRAVEDAD	VELOCIDAD DE TRABAJO COMUNICADO AL FLUIDO POR FUERZAS DE PRESIÓN	VELOCIDAD DE TRABAJO COMUNICADO AL FLUIDO POR FUERZAS VISCOSAS	GENERACION O DESTRUCCIÓN DE ENERGÍA DEBIDO A OTROS FENÓMENOS
-------------------	------------------------------------------------	------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------

donde Q es el flujo de calor por conducción, G un término de generación o destrucción de energía y E representa la energía total dada por

$$E = e + \frac{\bar{U}^2}{2} + \text{energía potencial} + \dots \quad (1.17)$$

y e es la energía interna por unidad de masa. En términos de la energía interna la ecuación (1.16) puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} e) = -(\nabla \cdot \bar{\rho} e \bar{U}) - (\nabla \cdot \bar{Q}) - \bar{P}(\nabla \cdot \bar{U}) - (\bar{\Gamma} : \nabla \bar{U}). \quad (1.18)$$

CAMBIO DE ENERGÍA INTERNA	ENTRADA DE ENERGÍA DEBIDA A LA CONVECCIÓN	ENTRADA DE ENERGÍA POR CONDUCCIÓN	VELOCIDAD REVERSIBLE DE AUMENTO DE ENERGÍA POR COMPRESIÓN	VELOCIDAD IRREVERSIBLE DE AUMENTO DE ENERGÍA DEBIDO A LA DISIPACIÓN VISCOSA
---------------------------	-------------------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------

Ahora, utilizando la definición de entalpía dada por

$$\tilde{h} = e + \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}}, \quad (1.19)$$

se puede obtener una ecuación de la entalpía a partir de la ecuación (1.18):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\rho}\tilde{h}) + (\nabla \cdot \tilde{\rho}\tilde{U}\tilde{h}) = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} - (\nabla \cdot \mathbf{Q}) - (\Gamma : \nabla \tilde{U}), \quad (1.20)$$

en donde la interpretación de los términos es análoga a la descrita en la ecuación (1.18).

1.3.5 LEY DE CONDUCCIÓN DE CALOR DE FOURIER.

El término de conducción de calor en las ecuaciones (1.18 ó 1.20) es obtenido mediante la llamada ley de Fourier la cual establece que el flujo de calor por conducción es proporcional al gradiente de temperatura. Esta ley se escribe como

$$\mathbf{Q} = -\tilde{k}\nabla\tilde{T}, \quad (1.21)$$

donde \tilde{k} es el coeficiente de conductividad térmica, que en este trabajo se considera como constante e independiente de la dirección en la ecuación (1.21), ya que se considera un medio isotrópico de estudio. La conductividad térmica es una propiedad de los medios conductores de calor y, al igual que la viscosidad dinámica, es función de la temperatura y varía de manera significativa con la presión en el caso de gases a presiones altas.

1.3.6 ECUACIÓN DE ESTADO.

Para poder cerrar el sistema de ecuaciones de la dinámica de fluidos es necesario establecer relaciones entre las variables termodinámicas $(\tilde{P}, \tilde{\rho}, \tilde{T}, \tilde{e}, \tilde{h})$, así como relacionar las propiedades de transporte (μ, k) con las variables termodinámicas. Las relaciones de este tipo son conocidas como ecuaciones de estado.

La ecuación de estado clásica es aquella establecida para los gases perfectos, es decir, la presión está dada sólo por efecto cinético y se desprecian las acciones intermoleculares debidas al movimiento térmico. Se considera además que el gas perfecto sigue las leyes de Mariote, Gay-Lussac y Joule; las dos primeras son resumidas directamente por las ecuaciones de estado; es decir una relación entre P , V y la temperatura T , que es el estado térmico. La ecuación de estado clásica para gases perfectos está dada por

$$\bar{P} = \bar{\rho} \bar{R} \bar{T}, \quad (1.22)$$

en la que \bar{R} es la constante del gas (constante de los gases ideales dividida entre un peso molecular). Para un gas perfecto existen también las siguientes relaciones (Anderson *et al*, 1980).

$$e = C_V \bar{T} \quad \bar{h} = C_P \bar{T} \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad C_V = \frac{\bar{R}}{\gamma-1} \quad C_P = \frac{\gamma \bar{R}}{\gamma-1}, \quad (1.23)$$

donde C_V es el calor específico a volumen constante, C_P es el calor específico a presión constante y γ es una relación entre calores específicos. Para el aire bajo condiciones estándar, $R = 287 \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ }^\circ\text{K}$ y $\gamma = 1.4$

1.3.7 RESUMEN DE LAS ECUACIONES INSTANTÁNEAS.

Las ecuaciones que se consideran gobiernan el movimiento de un gas perfecto, para una atmósfera adiabática y en reposo, son:

- La ley de los gases perfectos

$$\bar{P} = \bar{\rho} \bar{R} \bar{T}. \quad (1.1)$$

- La ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1.2)$$

- La ecuación de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}_j \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\Gamma}_{ij}}{\partial x_j} - \bar{\rho} g_i, \quad (I.3)$$

en la que el esfuerzo debido a la difusión molecular está dado por

$$\bar{\Gamma}_{ij} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \frac{2}{3} \bar{\mu} \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial x_m}. \quad (I.3a)$$

- La ecuación de la entalpía

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}_j \bar{h}}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial x_j} + \bar{\Gamma}_{ij} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}, \quad (I.4)$$

en la que la conducción de calor está dada por la ley de Fourier

$$\bar{Q}_j = -\bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}. \quad (I.4a)$$

1.4 LAS ECUACIONES DE BOUSSINESQ.

El sistema de ecuaciones (I) deducido en la sección anterior, es extremadamente complicado y por ello poco utilizable bajo su forma diferencial, por lo tanto es necesario introducir hipótesis simplificadoras que dependen generalmente del problema en estudio.

El modelo de turbulencia y de transporte de materia que se desarrolla es para un flujo que toma lugar dentro de la capa límite atmosférica. Siguiendo la práctica usual para obtener las ecuaciones para el movimiento de una capa límite atmosférica (Lumley and Panofsky, 1964; Spiegel and Veronis, 1959) y considerando que la atmósfera está en un estado de desviación con respecto a una atmósfera adiabática y en reposo, las variables físicas pueden descomponerse de acuerdo al siguiente esquema:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= P_0 + P, \\ \bar{T} &= T_0 + T, \\ \bar{U}_j &= 0 + U_j, \\ \bar{\mu} &= \mu + \mu_0, \\ \bar{k} &= k + k_0, \\ \bar{\rho} &= \rho + \rho_0,\end{aligned}\tag{1.24}$$

en donde μ es la viscosidad y k el coeficiente de conductividad térmica, el valor del estado de equilibrio atmosférico es denotado por el subíndice 0 y las propiedades del flujo son consideradas constantes.

1.4.1 ECUACIÓN DE ESTADO.

Considerando que la materia que va a ser transportada en la atmósfera no será en concentraciones muy elevadas, no existen efectos directos sobre el coeficiente calorimétrico C_p y éste puede tomarse como constante, por lo tanto la ecuación (1.1) se puede escribir entonces como .

$$P = R_0 \rho_0 T_0.\tag{1.25}$$

1.4.2 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.

La ecuación de continuidad (1.2) será

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0.\tag{1.26}$$

1.4.3 ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

Considerando la ecuación (1.26), las propiedades para un flujo incompresible y la situación del equilibrio del medio de referencia, podemos obtener la siguiente expresión para la ecuación de cantidad de movimiento (1.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= \frac{\rho}{\rho_0} g_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\mu_0}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\rho}{\rho_0} g_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\mu_0}{\rho_0} \left[\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_j \partial x_i} \right] \\ &= \frac{\rho}{\rho_0} g_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\mu_0}{\rho_0} \left[\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right], \end{aligned}$$

de donde puede escribirse finalmente

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{T}{T_0} g_i + \nu_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}, \quad (1.27)$$

en la que

$$\nu_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0}$$

es el coeficiente de viscosidad cinemática, además se consideró que

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T}{T_0}$$

1.4.4 ECUACIÓN DE ENERGÍA.

Utilizando (1.19) y (1.23) en (1.20) se tiene que

$$Cp_0 \left[\frac{\partial \bar{\rho} \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}_j \bar{T}}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + \bar{\Gamma}_{ij} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}.$$

Si consideramos, además, que el número de Mach M del fluido que nos interesa es pequeño, podemos despreciar el último término de la ecuación anterior, ya que éste representa el calor generado por la disipación del movimiento y es del orden M^2 con respecto a los otros términos de la ecuación. La forma final de la ecuación de energía es entonces

$$Cp_0 \left[\frac{\partial \bar{\rho} \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}_j \bar{T}}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right).$$

De la ecuación de la entalpía, haciendo las mismas consideraciones que para la ecuación (1.20), se puede llegar a que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_0 \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right) = (Cp_0 - R_0) \rho_0 \frac{\partial T_0}{\partial t} \approx 0. \quad (1.28)$$

Y por tanto la ecuación de energía será

$$Cp_0 \rho_0 \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial P}{\partial t} + U_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + U_j \left[\frac{\partial P_0}{\partial x_j} - Cp_0 \rho_0 \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right] + k_0 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right).$$

Del lado derecho de la ecuación, el término entre corchetes se puede despreciar debido a que la atmósfera básica es isoentrópica, por lo que

$$\frac{\partial P_0}{\partial x_j} = Cp_0 \rho_0 \frac{\partial T_0}{\partial x_j} = \frac{P_0}{T_0} \frac{Cp_0}{R_0} \frac{\partial T_0}{\partial x_j}. \quad (1.29)$$

Los dos primeros términos en el miembro derecho representan el calentamiento del fluido debido al movimiento y son de orden M^2 comparado con los otros términos en la ecuación y por lo tanto se pueden despreciar. Finalmente la ecuación de la energía será

$$Cp_0 \rho_0 \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = k_0 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \quad (1.30)$$

De las ecuaciones (1.6) y (1.29) se tiene que

$$\frac{\partial T_0}{\partial x_i} = -\frac{g_i}{C_{p0}}, \quad (1.31)$$

y de la cual, considerando que, fuera de la dirección privilegiada (válida en flujos con cortantes), los gradientes de la temperatura de referencia son nulos, esto es

$$\frac{\partial T_0}{\partial x_1} = \frac{\partial T_0}{\partial x_2} = 0, \quad (1.32)$$

y que además $g_1 = g_2 = 0$ la ecuación (1.30) puede escribirse como

$$\frac{\partial T_0}{\partial x_3} = -\frac{g}{C_{p0}}, \quad (1.33)$$

la cual constituye un gradiente adiabático constante en la dirección vertical del flujo. De (1.28) se tiene también que

$$k_0 \frac{\partial T_0}{\partial x_3} = \text{constante}, \quad (1.34)$$

las ecuaciones para la atmósfera básica son ligeramente inconsistentes ya que k_0 es, en general, una función de T_0 . Esta inconsistencia niega la consideración de la invarianza en el tiempo de T_0 , de (1.28) se establece que, en general,

$$\rho_0 (C_{p0} - R_0) \frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_0 \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right). \quad (1.35)$$

La inconsistencia, sin embargo, no es de importancia práctica, de la ecuación (1.35) se obtiene la velocidad de cambio de T_0 con respecto del tiempo la cual es mucho más lenta que la velocidad de cambio involucrada en cálculos prácticos de movimiento atmosférico.

Como se especificó anteriormente los coeficientes de difusión molecular se consideran constantes en las ecuaciones; así mismo consideramos que el número de Prandtl definido como

$$Pr = \mu_0 C_{p0} / k_0, \quad (1.36)$$

es cercano a 1, con lo cual se puede escribir que

$$k_0 = \mu_0 C_{p0}. \quad (1.37)$$

Arreglando términos en la ecuación (1.30) tenemos que

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{k_0}{C_{p0} \rho_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j},$$

o bien

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}, \quad (1.38)$$

en la que

$$\chi = \frac{k_0}{C_{p0} \rho_0},$$

es la difusividad térmica.

Las ecuaciones que han sido deducidas anteriormente pueden ser resumidas de la siguiente forma:

- Ecuaciones para el movimiento de desviación:

Ecuación de estado

$$P_0 = R_0 \rho_0 T_0. \quad (1.25)$$

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1.26)$$

Ecuación para la velocidad

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{T}{T_0} g_i + \nu_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}. \quad (1.27)$$

Ecuación para la temperatura

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}. \quad (1.38)$$

- Ecuaciones auxiliares para una atmósfera adiabática y en reposo:

$$\frac{\partial T_0}{\partial x_3} = -\frac{g}{Cp_0}, \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial x_i} = -\rho_0 g_i. \quad (1.40)$$

1.5 LOS POSTULADOS DE REYNOLDS.

Admitiremos de aquí en adelante que en un flujo turbulento, los campos que describen el estado de un fluido (U_i , $i = 1, 2, 3$; P, T, \dots) pueden ser considerados como funciones aleatorias del espacio y del tiempo. Estas variaciones pueden representarse mediante un tratamiento estadístico para lo cual cualquier variable $F(\vec{x}, t)$ puede descomponerse en un valor medio $\bar{F}(\vec{x}, t)$ y un residuo $f(\vec{x}, t)$ llamado *fluctuación turbulenta*

$$F = \bar{F} + f \quad (1.41)$$

Las cantidades que son sometidas a este tipo de descomposición son la velocidad U_i , la presión P y la temperatura T .

Cuando las ecuaciones son sometidas a un tratamiento estadístico, éstas deben satisfacer una serie de propiedades, también estadísticas, conocidas como los *postulados de Reynolds*. Dichas propiedades son las siguientes.

Sean F y G dos funciones aleatorias *cualquiera* de \bar{x} y de t , y a una constante *cualquiera* (no aleatoria); para ellas se cumple la

- Linealidad.

$$\begin{aligned}\overline{F+G} &= \bar{F} + \bar{G} \\ \overline{aF} &= a\bar{F} \\ \bar{a} &= a\end{aligned}\tag{1.42}$$

- Conmutatividad con las operaciones de derivación e integración.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{F}}{\partial s} &= \overline{\frac{\partial F}{\partial s}} \\ \overline{\int F ds} &= \int \bar{F} ds\end{aligned}\tag{1.43}$$

- Invarianza³

$$\overline{\bar{F} \cdot G} = \bar{F} \cdot \bar{G}\tag{1.44}$$

El postulado anterior es esencial en los desarrollos teóricos; esto implica en particular las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned}\overline{\bar{F}} &= \bar{F} \\ \overline{\bar{f}} &= \overline{(F - \bar{F})} = 0 \\ \overline{\bar{F} \cdot \bar{G}} &= \bar{F} \cdot \bar{G} \\ \overline{\bar{F} \cdot g} &= 0\end{aligned}\tag{1.45}$$

³ El postulado (1.44) es llamado *invarianza* por comodidad; en realidad éste es más general que la simple invarianza.

donde g representa la fluctuación.

Estas propiedades se utilizarán más adelante para el estudio de las ecuaciones de la mecánica de fluidos.

1.6 LAS ECUACIONES MEDIAS

El sistema de ecuaciones deducido en la sección 1.4.1 es llamado generalmente *ecuaciones de Boussinesq para un flujo estratificado* y son las ecuaciones clásicas para flujos atmosféricos.

Siguiendo la técnica usada por Reynolds (1894), se pueden escribir las ecuaciones para las propiedades medias de una capa límite atmosférica turbulenta; para ello, se expresarán las variables físicas como la suma de un valor medio de la variable (denotado por una barra) y una fluctuación instantánea sobre la media de acuerdo al siguiente esquema

$$\begin{aligned} P &= \bar{P} + p \\ T &= \bar{T} + \theta \\ U_i &= \bar{U}_i + u \end{aligned} \tag{1.46}$$

1.6.1 ECUACIÓN MEDIA DE CONTINUIDAD.

Aplicando la descomposición de Reynolds a la ecuación (1.26) se tiene

$$\frac{\partial(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j} = 0$$

o bien

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

Promediando el miembro izquierdo de la ecuación se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \\ &= \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0\end{aligned}$$

y como por definición

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0$$

entonces

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.47)$$

1.6.2 ECUACIÓN MEDIA PARA LA VELOCIDAD.

Aplicando la descomposición de Reynolds a la ecuación para la velocidad, ecuación (1.27) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\bar{U}_i + u_i)}{\partial t} + (\bar{U}_j + u_j) \frac{\partial (\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (\bar{P} + p)}{\partial x_i} + \frac{g_i}{T_0} (\bar{T} + \theta) + \nu_0 \frac{\partial^2 (\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j^2}, \\ \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \frac{g_i}{T_0} (\bar{T} + \theta) + \nu_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)\end{aligned} \quad (1.48)$$

Promediando la ecuación término a término obtenemos para el primer y segundo término del lado izquierdo de la igualdad

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t}\right)} &= \overline{\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\right)} \\ &= \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} \end{aligned}$$

para los demás términos del miembro izquierdo

$$\begin{aligned} \overline{\left(\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} &= \overline{\left(\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} \\ &= \overline{\left(\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} \\ &= \overline{\left(\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} \end{aligned}$$

y para el primer término del lado derecho

$$\begin{aligned} \overline{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i}} &= \overline{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i}} \\ &= \overline{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} \\ &= \overline{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{g_i}{T_0} (\bar{T} + \theta)} &= \overline{\frac{g_i}{T_0} (\bar{T} + \theta)} \\ &= \frac{g_i}{T_0} \bar{T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0 \left(\overline{\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}} \right) &= v_0 \left(\overline{\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2}} + \overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}} \right) \\ &= v_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + \overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}} \right) \\ &= v_0 \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} \end{aligned}$$

sustituyendo cada término en la ecuación (1.48) se puede llegar a

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \left(\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\bar{T}}{T_0} g_i + v_0 \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2},$$

reescribiendo la ecuación tenemos que

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\bar{T}}{T_0} g_i + v_0 \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

y como

$$\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

además como por definición

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

entonces

$$\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

de donde puede escribirse finalmente

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\bar{T}}{T_0} g_i + \nu_0 \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial(\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} \quad (1.49)$$

Esta es la ecuación utilizada para el movimiento medio de una capa atmosférica.

1.6.3 ECUACIÓN MEDIA PARA LA TEMPERATURA.

Aplicando la descomposición de Reynolds a la ecuación (1.38) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{T} + \theta)}{\partial t} + (\bar{U}_j + u_j) \frac{\partial(\bar{T} + \theta)}{\partial x_j} &= \chi \frac{\partial^2(\bar{T} + \theta)}{\partial x_j^2} \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} &= \chi \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \right) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Promediando cada término obtenemos para el primero y segundo del miembro izquierdo que

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)} &= \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \end{aligned}$$

y para los términos restantes

$$\begin{aligned} \overline{\left(\bar{U}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right)} &= \left(\overline{\bar{U}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}} + \overline{\bar{U}_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} + \overline{u_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}} + \overline{u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} \right) \\ &= \left(\bar{U}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \\ &= \left(\bar{U}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} \right) \end{aligned}$$

por último, para el primer término del miembro derecho

$$\begin{aligned} \overline{\chi \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \right)} &= \chi \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} \right) \\ &= \chi \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} \end{aligned}$$

sustituyendo los términos en la ecuación (1.50) se tiene

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \left(\bar{U}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} \right) = \chi \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2}$$

reacomodando la ecuación se tiene

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} - \overline{u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}}$$

y como

$$\frac{\partial(u_j \theta)}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \theta \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

además como la divergencia de la velocidad es igual a cero

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

entonces

$$\frac{\partial(u_j \theta)}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}$$

finalmente se puede escribir la ecuación para la temperatura en la siguiente forma

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u_j \theta}}{\partial x_j} \quad (1.51)$$

1.6.4 DISCUSIÓN DE LAS ECUACIONES MEDIAS.

Debido a los tensores de segundo orden que aparecen en las ecuaciones medias, para la velocidad $(\overline{u_i u_j})$ y temperatura $(\overline{u_j \theta})$, este sistema estadístico de ecuaciones es *abierto*, en el sentido de que los tensores son correlaciones que funcionan como incógnitas. Resulta evidente que el procedimiento estadístico introduce una pérdida de información que debe compensarse de alguna forma con las hipótesis de cerradura, las cuales a su vez son consideradas de acuerdo al comportamiento turbulento del fluido. A causa de la no linealidad de los términos de advección en las ecuaciones de la mecánica de fluidos, todo sistema estadístico de ecuaciones contiene más incógnitas que ecuaciones.

Existen muchos métodos de cerradura siendo el más simple el que consiste en relacionar las cantidades de movimientos de segundo orden a los campos medios de velocidad y temperatura por medio de unos coeficientes de viscosidad (ν_T) y de difusividad (κ_T) equivalentes los cuales de alguna forma son función de la turbulencia. Estos coeficientes pueden considerarse como constantes o ser esfuerzos representados mediante una ley arbitraria optimizada; también pueden relacionarse a los campos medios por relaciones algebraicas. En estas condiciones suele llamarse al procedimiento de solución como *de orden cero*.

Si los coeficientes (ν_T, κ_T) son determinados con una sola ecuación de evolución de variables turbulentas (en general κ , energía cinética de la turbulencia y θ^2 la varianza de la temperatura, respectivamente). El modelo es llamado *de primer orden con una ecuación*.

Si estos coeficientes son determinados por medio de dos ecuaciones de evolución suplementarias destinadas a representar el campo turbulento, el modelo es llamado *de primer orden con dos ecuaciones*.

Existen otros métodos conocidos como *de orden superior* desarrollados recientemente, y consisten en establecer una ecuación de evolución para los momentos de segundo orden y para los cuales los coeficientes de viscosidad y difusividad turbulenta no intervienen más. Estos métodos son los más prometedores ya que permiten representar el comportamiento físico de los fenómenos con mayor claridad.

En este trabajo se incluyen en las ecuaciones los coeficientes (ν_T, κ_T), los cuales son evaluados con modelos *de orden cero*, para lo cual se consideró una relación algebraica en

función de la velocidad y temperatura medias. Además, se utilizó un modelo *de primer orden con dos ecuaciones*, en el que se desarrollaron las ecuaciones de κ (energía cinética de la turbulencia) y ε (su disipación) para el campo dinámico, en tanto que para el campo térmico se desarrollaron las ecuaciones para θ^2 (la varianza de temperatura) y ε_θ (su disipación).

CAPÍTULO 2

LOS MODELOS DE TURBULENCIA DE ORDEN CERO Y DE PRIMER ORDEN

2.1 INTRODUCCIÓN.

Como se había especificado en el capítulo anterior, los términos $\overline{u_i u_j}$, y $\overline{u_j \theta}$, que aparecen en las ecuaciones medias (1.49) y (1.51), respectivamente, introducen el problema de la cerradura de las ecuaciones. En este trabajo se consideran modelos de turbulencia de orden cero y de primer orden, para la evaluación de estos términos. Para los primeros se introducen los conceptos de viscosidad y difusividad turbulenta (cf. 2.2); para los segundos se desarrollan dos ecuaciones de evolución, una relacionada con los mecanismos que contribuyen a la *creación de la turbulencia* y otra, relacionada con los mecanismos que *destruyen la turbulencia* (cf. 2.3).

2.2 MODELOS DE ORDEN CERO.

Los coeficientes de viscosidad y difusividad turbulenta equivalentes no son una propiedad física del fluido, contrariamente a la viscosidad molecular ν_0 ó a la difusividad térmica χ , sino más bien son parámetros que caracterizan los efectos de la turbulencia de un flujo. Evidentemente estos coeficientes no son definidos para flujos laminares o en ausencia de movimiento. Con toda

generalidad estos coeficientes deberían ser un tensor de cuarto orden; sin embargo, dada la complejidad de cálculo que este tensor implicaría, se considera una hipótesis de isotropía que permite representar este tensor mediante un escalar (Sini, 1986).

2.2.1 MODELO DE VISCOSIDAD TURBULENTA ν_T .

Este coeficiente relaciona los esfuerzos de Reynolds con los gradientes medios de velocidad; en otras palabras, el tensor de cantidad de movimiento, por analogía con la ley de Newton de esfuerzos viscosos, puede ligarse al tensor de deformación de velocidades medias introduciendo el coeficiente de viscosidad turbulenta equivalente, esto es

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.1)$$

que suele escribirse también como (Arpaci, 1984)

$$-\overline{u_i u_j} + \frac{\overline{u_j u_j}}{3} \delta_{i,j} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.2)$$

para remarcar los efectos de incompresibilidad.

Se han propuesto muchas soluciones para evaluar el coeficiente de viscosidad turbulenta (Launder y Spalding, 1972; Reynolds, 1976). En general el análisis dimensional muestra que puede considerarse proporcional a una escala de longitud (que puede ser el diámetro de la chimenea de emisión o una relación que tome en cuenta la longitud de mezcla) y una escala de velocidad (que puede ser la velocidad de emisión máxima o una relación que involucre la energía cinética de la turbulencia).

Otra forma de evaluar estos coeficientes es proponer una expresión como

$$\nu_T = \psi W_m (z + \alpha D), \quad (2.3)$$

en la que W_m es la velocidad sobre el eje del chorro, D el diámetro de la chimenea y donde ψ y α son las constantes a determinar (Gaillard, 1978).

En lo que a este trabajo respecta se considerará el modelo descrito por la ecuación (2.3) (cf. 5.5.2) que toma en cuenta la anisotropía del flujo, lo cual implica que deben de definirse tres coeficientes de viscosidad, esto es

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\overline{u_i u_j} + \frac{\overline{u_j u_j}}{3} \right) = (v_{T1} \delta_{11} \delta_{1m} + v_{T2} \delta_{12} \delta_{2m} + v_{T3} \delta_{13} \delta_{3m}) \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_1 \partial x_m}. \quad (2.4)$$

Si se considera la hipótesis de que existe isotropía en los planos horizontales, se puede escribir $v_{T1} = v_{T2}$. En cuanto al coeficiente v_{T3} éste dependerá de la estratificación, teniendo en cuenta además la producción o la destrucción de la energía cinética turbulenta por las fuerzas de gravedad.

La representación de los esfuerzos de Reynolds, para un flujo bidimensional en función de la viscosidad turbulenta equivalente puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\overline{u_1 u_1} + \frac{\overline{u_1 u_1}}{3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} (-\overline{u_1 u_3}) = v_{T1} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x_1 \partial x_1} + v_{T3} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x_3 \partial x_3}. \quad (2.5)$$

2.2.2 MODELO DE DIFUSIÓN TURBULENTO K_T .

Este coeficiente, puede definirse considerando el número de Prandtl turbulento definido por

$$Pr_T = \frac{v_T}{K_T}. \quad (2.6)$$

El valor de éste varía de 0.5 a 0.7 para flujos turbulentos como los que aquí se estudian (Rodi, 1991)

El modelo usado se escribe de la siguiente manera

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i \theta}) = (K_{T1} \delta_{11} \delta_{1m} + K_{T2} \delta_{12} \delta_{2m} + K_{T3} \delta_{13} \delta_{3m}) \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_1 \partial x_m}, \quad (2.7)$$

para un flujo bidimensional

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}(\overline{u_3 \theta}) - \frac{\partial}{\partial x_3}(\overline{u_1 \theta}) = K_{T1} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_1 \partial x_1} + K_{T3} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_3 \partial x_3}, \quad (2.8)$$

evidentemente los valores de estos coeficientes están extremadamente ligados al valor de los coeficientes ν_T a través de la relación (2.6), la cual es ajustada de forma empírica o por optimización numérica. En este trabajo se realiza una optimización numérica de los parámetros ν_{T1} , ν_{T2} , Pr_T y por consecuencia K_{T1} y K_{T3} (cf. 5.5.2).

2.3 MODELOS DE PRIMER ORDEN A DOS ECUACIONES.

Son los modelos de turbulencia más utilizados para la simulación de flujos turbulentos debido a que se adaptan con relativa facilidad a un gran número de flujos. Sin embargo, estos modelos no reproducen adecuadamente todos los mecanismos que intervienen en el proceso de creación/destrucción de la turbulencia; por ejemplo, no reproducen adecuadamente un chorro redondo con simetría axial o flujos fuertemente disipativos. No obstante, diversos estudios han mostrado que pueden representar satisfactoriamente flujos como los que en este trabajo se consideran.

2.3.1 MODELO $\kappa - \epsilon$.

De manera clásica los esfuerzos de Reynolds son esquematizadas por analogía a la expresión de esfuerzos moleculares en un flujo laminar (Boussinesq, 1897)

$$\overline{-u_i u_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \kappa \quad (2.9)$$

en la que ν_T es el coeficiente de viscosidad turbulenta que, a diferencia de los modelos de orden uno, ya no es una constante, sino que evoluciona en el espacio y el tiempo.

El modelo de dos ecuaciones que se desarrolla surge de representar la viscosidad turbulenta equivalente (ν_T), en función de la ecuación de evolución de la energía cinética de la turbulencia κ y de su disipación relacionadas por la siguiente expresión

$$\nu_T = C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon}, \quad (2.10)$$

para lo cual el coeficiente C_μ surge de suponer que en un proceso los mecanismos de producción y disipación están en equilibrio (Rodi, 1980); para flujos en atmósfera libre $C_\mu = 0.09$, sin embargo el valor de este coeficiente no es universal y se calcula a partir de relaciones empíricas destinadas a adaptar el valor de esta constante a cada problema en particular.

Para modelar κ y ε se procede de las ecuaciones medias y de las ecuaciones de Boussinesq llegando a una expresión para la energía cinética de la turbulencia, definida como $\kappa = 1/2 \overline{u_i u_i}$

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \underbrace{-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}}_{\text{ENERGÍA CINÉTICA DE LA TURBULENCIA SIGUIENDO EL MOVIMIENTO MEDIO DE DESVIACIÓN (A)}} - \underbrace{\beta g_i \overline{u_i \theta}}_{\text{TERMINO DE PRODUCCIÓN (B)}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j \frac{\overline{u_m u_m}}{2} + \frac{\overline{p u_i}}{\rho_N} \delta_{ij} - \nu_N \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right)}_{\text{TERMINO DE PRODUCCIÓN/DESTRUCCIÓN LIGADO A LAS FUERZAS DE ARQUIMEDES (C)}} - \underbrace{\nu_N \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{\text{TERMINO DE TRANSPORTE DIFUSIVO (D)}} - \underbrace{\nu_N \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{\text{TERMINO DE DISIPACIÓN (E)}}. \quad (2.11)$$

Un análisis término a término de la ecuación muestra que (A) no cambia (Mompeam, 1989).

(B) se modela de la siguiente manera

$$-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}$$

(C) como

$$\beta g_i \overline{u_i \theta} = \beta g_k \frac{\nu_T}{Pr_T} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j}$$

El primer término de (D) es modelado con ayuda de la ley del primer gradiente (Mompem, 1989) de la manera siguiente

$$u_j \frac{\overline{u_m u_m}}{2} = - \frac{v_T}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j}$$

Además un análisis de orden de magnitud demuestra que el segundo y tercer término de (D) son despreciables (Mompem, 1989).

Y como (E), que representa la disipación no cambia, se tiene finalmente que la ecuación modelada para la energía cinética de la turbulencia toma la forma siguiente

$$\frac{D\kappa}{Dt} = P + B + \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_T}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right) \tag{2.12}$$

En la que los términos P y B se definen de la siguiente manera

$$P = v_T \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \tag{2.13}$$

$$B = \beta g_k \frac{v_T}{Pr_T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \tag{2.14}$$

y σ_κ es una constante empírica que tiene una función análoga al número de Prandtl.

La ecuación de la disipación de la energía cinética de la turbulencia se escribe como

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = v_N \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j v_N \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right) - 2 v_N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{2.15}$$

DISIPACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE LA TURBULENCIA SIGUIENDO EL MOVIMIENTO MEDIO DE DESVIACIÓN (A)

DIFUSIÓN MOLECULAR (B)

DIFUSIÓN TURBULENTO DE LAS FLUCTUACIONES DE VELOCIDAD (C)

DIFUSIÓN TURBULENTO DE LAS FLUCTUACIONES DE PRESIÓN (D)

$$-2v_N \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) - 2v_N u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_m}$$

PRODUCCIÓN DEBIDO A LOS GRADIENTES DE VELOCIDAD MEDIA
Y EL MOVIMIENTO TURBULENTO
(E) Y (F)

$$-2v_N \beta g_i \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right) - 2v_N \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - 2v_N^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_m^2}$$

PRODUCCIÓN DEBIDA
A LAS FUERZAS
DE VOLUMEN
(G)

TERMINO DEBIDO
A LA INTERACCIÓN
ENTRE LOS GRADIENTES
DE FLUCTUACIONES DE
VELOCIDAD
(H)

DISIPACIÓN DE
LA ENERGÍA
CINÉTICA DE LA
TURBULENCIA
(I)

Modelando la ecuación se tiene que (A) no cambia y (B) es despreciable en comparación con los demás términos.

Con respecto a (C) se puede obtener una expresión a partir de una ecuación de Poisson, ya que el segundo miembro de ésta ecuación contiene dos partes, a saber:

- i) los que muestran la influencia de un mecanismo no lineal.
- ii) los resultantes de un mecanismo lineal.

En lo que sigue, (C) y (D) serán asociados por una modelación global, utilizando la ley del primer gradiente (Mompeam, 1989).

$$u_j v_N \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} + 2v_N \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = -\frac{v_T}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}$$

Al hacer un análisis dimensional de (E), (F) y (G) se puede observar que son despreciables con respecto a los demás términos (Mompam, 1989).

Los términos de producción y disipación (H e I) son modelados conjuntamente. La modelación toma en cuenta la influencia de fuerzas de volumen como función de B (Rodi, 1978), por lo tanto

$$(H) - (I) = C_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{\kappa} (P + B) - C_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{\kappa}$$

por lo que la ecuación modelada toma la siguiente forma

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = C_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{\kappa} (P + B) - C_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{\kappa} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_T}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) \quad (2.16)$$

El número de Prandtl de la turbulencia que aparece en la ecuación (2.14) se obtiene generalmente por la optimización del decaimiento en la altitud de la temperatura media sobre la vertical. Se ha encontrado que el valor

$$Pr_T = 0.4 \quad (2.17)$$

concuera tanto en cálculos numéricos como en resultados experimentales (Sini, 1986). Para un chorro plano Chen y Rodi, (1980) recomiendan el valor de

$$Pr_T = 0.5 \quad (2.18)$$

En lo que respecta a los valores de las constantes tomaremos los valores mostrados en la Tabla 2.1.

Variable:	Recomendado por:
$\sigma_x = 1.0$	Lauder y Spalding (1972)
$\sigma_\epsilon = 1.3$	Lauder y Spalding (1974)
$C_{\epsilon_1} = 1.44$	Chen y Rodi (1980)
$C_{\epsilon_2} = 1.92$	Shiestel (1982)

Tabla 2.1 Constantes de modelación para la ecuación de la disipación de la energía cinética de la turbulencia.

El valor de las constantes es muy sensible; por ejemplo Chen y Rodi (1980) demuestran que una modificación del 5% sobre C_{ϵ_1} o C_{ϵ_2} introduce una variación aproximada sobre la expansión del chorro del 20%.

2.3.2 MODELO $\bar{\theta}^2 - \epsilon_\theta$.

En analogía directa con el transporte medio de cantidad de movimiento por la turbulencia, el transporte turbulento de la temperatura puede expresarse por una relación de gradiente con el campo medio de la temperatura.

$$-\overline{u_i \theta} = K_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}, \quad (2.19)$$

en la que K_T es el coeficiente de difusividad turbulenta equivalente, que caracteriza los efectos de la turbulencia sobre los cambios térmicos.

En la literatura se puede encontrar una demostración de que la hipótesis de la analogía con los resultados de la teoría cinética de los gases resulta discutible (definición de los coeficientes de intercambio negativo) en el caso de ciertos flujos, como lo son la capa de mezcla con una distribución con simetría axial de temperatura (Sini, 1986).

No obstante, los conceptos de viscosidad y difusividad equivalentes debidos a la turbulencia dan resultados satisfactorios, en el caso de flujos *cortantes*.

La experiencia muestra que ν_T y K_T varían en el tiempo y en el espacio en un flujo dado, y que son completamente diferentes de un flujo a otro, sin embargo el número de Prandtl (ec. 2.6), que los relaciona, permanece por lo general, constante y sólo necesita de algún cálculo de optimización para un problema en particular. Una vez hecho lo anterior permanece constante en el espacio y en el tiempo, en un problema dado.

Por otro lado, para estimar los mecanismos de producción/destrucción del campo térmico, en analogía con el campo dinámico se desarrollaron las ecuaciones para el cálculo de la varianza de temperatura y de su disipación como sigue:

La ecuación para la varianza de temperatura (Mompean, 1989) es

$$\frac{D\theta^2}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathcal{K} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta^2} \right) - 2\overline{u_j \theta} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} - 2\mathcal{K} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \quad (2.20)$$

TERMINO DE EVOLUCIÓN Y DE CONVECCIÓN PARA EL CAMPO DE VELOCIDAD MEDIA (A)	DIFUSIÓN MOLECULAR (B)	DIFUSIÓN DE LA CONVECCIÓN TURBULENTO (C)	PRODUCCIÓN POR EL GRADIENTE MEDIO DE TEMPERATURA (D)	DISIPACIÓN DE LAS FLUCTUACIONES DE TEMPERATURA (E)
---------------------------------------------------------------------------	------------------------	------------------------------------------	------------------------------------------------------	----------------------------------------------------

con \mathcal{K} como la difusividad térmica.

(A) no cambia al ser modelado, (B) es despreciable comparado con los demás términos y (C) es modelado por la ley del primer gradiente (Mompean, 1989).

$$-\overline{u_j \theta^2} = \frac{\nu_T}{\sigma_T} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_j}$$

Por último (D) y (E) no cambian, por lo que la ecuación modelada es

$$\frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_T} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_j} \right) - 2\overline{u_j \theta} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} - 2\varepsilon_\theta, \quad (2.21)$$

en la que σ_T (número de Prandtl) será tomado como 0.70 (Spalding, 1971).

Para el cálculo de la ecuación de la disipación se tomarán dos procedimientos; uno que consiste en tomar la relación de las escalas de tiempo dinámico y térmico mediante la relación:

$$R = \frac{\tau_\theta}{\tau_d} = \frac{\overline{\theta^2}}{2\kappa} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\theta} \quad (2.22)$$

de donde

$$\varepsilon_\theta = \frac{\overline{\theta^2}}{2R\kappa} \varepsilon, \quad (2.23)$$

las escalas de tiempo dinámico se definen como:

$$\tau_d = \frac{\kappa}{\varepsilon} \tag{2.24}$$

y la escala de tiempo térmico:

$$\tau_\theta = \frac{\overline{\theta^2}}{2\varepsilon_\theta} \tag{2.25}$$

El valor del parámetro R depende del tipo de flujo que se esté estudiando para flujos libres suele encontrarse en la bibliografía valores de 0.4 - 0.5 (Beguier, 1978).

El segundo procedimiento es el de escribir su ecuación de evolución:

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = -2\chi \overline{\frac{\partial\theta}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}} - 2\chi u_j \overline{\frac{\partial\theta}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j \partial x_i}} - 2\chi \overline{\frac{\partial\theta}{\partial x_i} \frac{\partial\theta}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}} \tag{2.26}$$

EVOLUCIÓN DE LA
DISIPACIÓN DE
FLUCTUACIONES DE
TEMPERATURA
SIGUIENDO EL
MOVIMIENTO MEDIO
DE DESVIACIÓN
(A)

TERMINOS FUENTE DE LAS INTERACCIONES
ENTRE LA TURBULENCIA Y LOS GRADIENTES
DE TEMPERATURA MEDIA
(B) Y (C)

TERMINO FUENTE
DE LA INTERACCIÓN
ENTRE LAS
FLUCTUACIONES
DE TEMPERATURA
Y EL GRADIENTE DE
VELOCIDAD MEDIA
(D)

$$-2\chi \overline{\frac{\partial\theta}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial\theta}{\partial x_j}} - 2 \left(\chi \overline{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\chi \overline{\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial x_j}} - u_j \varepsilon_\theta \right)$$

TERMINO DE LA INTERACCIÓN
ENTRE LOS GRADIENTES
DE FLUCTUACIONES
TURBULENTAS ALTAS
(E)

TERMINO DE DISIPACIÓN
DEBIDO A LAS
FLUCTUACIONES DE
TEMPERATURA
(F)

DIFUSIÓN
MOLECULAR
(G)

DIFUSIÓN DE LA
CONVECCION
(H)

Modelando la ecuación se tiene que (A) no cambia.

Newman *et al* (1981) realizaron un estudio a partir de medidas experimentales de procesos de evolución de θ^2 para flujos homogéneos con y sin gradientes de temperatura media.

Para (B) y (D) sugieren una forma en la que intervienen las escalas de tiempo mecánica y térmica

$$-2\chi \frac{\overline{\partial \theta}}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial U_j}}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - 2 \left(\chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 = -C_{\epsilon T3} \epsilon \theta \frac{\epsilon}{\kappa} - C_{\epsilon T4} \frac{(\epsilon \theta)^2}{\theta^2}.$$

(C) es despreciable comparado con los demás términos (Mompeam, 1989).

Para (E) y (F) Chung y Sung (1984) proponen la inclusión de la producción de la energía cinética de la turbulencia (P) y un término suplementario de producción de los efectos de flotabilidad (G), así que

$$-2\chi \frac{\overline{\partial \theta}}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial U_j}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - 2\chi \frac{\overline{\partial \theta}}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial \theta}}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial U_j}}{\partial x_j} = -C_{\epsilon T1} \frac{\epsilon \theta}{\theta^2} \overline{u_j \theta} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + C_{\epsilon T2} (P+G) \frac{\epsilon \theta}{\kappa}.$$

(G) es despreciable comparado con los demás términos. Por último (H) se modela de la siguiente manera (Mompeam, 1989)

$$\overline{u_j \epsilon \theta} = \frac{\nu_T}{\sigma_{\epsilon T}} \frac{\partial \epsilon \theta}{\partial x_j},$$

por lo que la ecuación modelada es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon \theta}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \epsilon \theta}{\partial x_j} = & -C_{\epsilon T1} \frac{\epsilon \theta}{\theta^2} \overline{u_j \theta} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + C_{\epsilon T2} (P+G) \frac{\epsilon \theta}{\kappa} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_{\epsilon T}} \frac{\partial \epsilon \theta}{\partial x_j} \right) C_{\epsilon T3} \epsilon \theta \frac{\epsilon}{\kappa} - C_{\epsilon T4} \frac{(\epsilon \theta)^2}{\theta^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

en la que P es la producción de energía turbulenta por el gradiente de velocidad media y se define como

$$P = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (2.28)$$

y G la producción suplementaria por fuerzas de volumen

$$G = \beta g \overline{u_i \theta} \quad (2.29)$$

el valor de las constantes se definen en la Tabla 2.2 mostrada a continuación.

Variable:	Definido por:
$C_{\epsilon T1} = 1.96$	Newman et al (1981)
$C_{\epsilon T2} = 0.80$	Chung and Sung (1984)
$C_{\epsilon T3} = 0.80$	Newman et al (1981)
$C_{\epsilon T4} = 2.0$	Chung and Sung (1984)

Tabla 2.2 Constantes de modelación para la ecuación de evolución de la disipación de fluctuaciones de temperatura.

con respecto al valor de $\sigma_{\epsilon T}$ es habitual encontrar en la literatura el valor de una unidad, esto es:

$$\sigma_{\epsilon T} = 1.0 \quad (2.30)$$

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE SOLUCIÓN NUMÉRICA

3.1 INTRODUCCIÓN.

Un sistema de ecuaciones como el que se ha obtenido en los capítulos anteriores, tiene que ser resuelto, evidentemente, por vía numérica. En este trabajo se ha optado por resolverlo mediante un esquema de diferencias finitas y utilización de un volumen de control. Para lo cual se utilizó un programa de computadora, llamado *QUETZALII*, en el cual se introdujeron los modelos de turbulencia desarrollados anteriormente, así como la combinación entre ellos, de acuerdo a la definición de los parámetros MDL y MTH dados en la Tabla (3.1). Se considera el método de compresibilidad artificial descrito posteriormente para la solución de la ecuación de continuidad.

Parámetro	0	1
MDL	Modelo ν_T	Modelo $\kappa - \epsilon$
MTH	Modelo K_T	Modelo $\bar{\theta}^2 - \epsilon_\theta$

Tabla 3.1 Definición de los parámetros MDL y MTH.

3.2 DISCRETIZACIÓN DE LAS DERIVADAS.

El proceso de discretización consiste en pasar de una función continua a una función discreta que resulta en intervalos finitos de tiempo y espacio, este proceso se logra escribiendo las derivadas parciales continuas en derivadas discretas lo cual puede hacerse mediante la serie de Taylor cuya expresión general es

$$\varphi(x_{j+1}) = \varphi_j + \Delta x_j \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_j + \frac{1}{2} (\Delta x_j)^2 \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_j + \dots + O(x_j, \Delta x_j) \frac{1}{n} (\Delta x_j)^n \left. \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right|_j, \quad (3.1)$$

es decir, que el valor de la función $\varphi(x_{j+1})$ puede obtenerse a partir de una expresión en el punto x_j . La distancia espacial entre x_j y x_{j+1} es $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$.

En este estudio se realiza la expresión en serie de Taylor alrededor de un punto (j,l) y limitando a segundo orden el error de truncamiento. Los desarrollos son hechos considerando una malla no homogénea como la que se indica en la Fig. 3.1

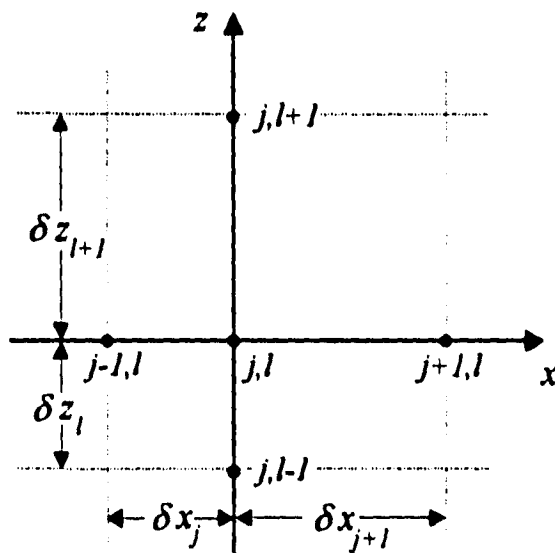


Figura 3.1 Malla no homogénea.

Desarrollando a la izquierda en el punto (j,l) , en la Fig. (3.1) y limitado a segundo orden el error de truncamiento se obtiene

$$\varphi_{j-1,j} = \varphi_{j,j} - \delta x_j \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{j,j} + \left(\frac{\delta x_j^2}{2} \right) \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{j,j} + O(\delta x_j^3) \quad (3.2)$$

análogamente un desarrollo a la derecha se escribe como

$$\varphi_{j+1,j} = \varphi_{j,j} + (\alpha_j \delta x_j) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{j,j} + \frac{(\alpha_j \delta x_j)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{j,j} + O(\delta x_j^3) \quad (3.3)$$

en donde se ha considerado el siguiente parámetro geométrico

$$\alpha_j = \frac{\delta x_{j+1}}{\delta x_j} \quad (3.4)$$

la primera derivada de una función φ con respecto de x en un esquema de tres puntos, puede expresarse como (Ramírez, 1991)

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{j,j} = a \varphi_{j+1,j} + b \varphi_{j-1,j} + c \varphi_{j,j} \quad (3.5)$$

si se consideran los siguientes parámetros

$$a = \frac{1}{\alpha_j(\alpha_j + 1)\delta x_j}, \quad b = -\frac{\alpha_j^2}{\alpha_j(\alpha_j + 1)\delta x_j}, \quad c = \frac{\alpha_j^2 - 1}{\alpha_j(\alpha_j + 1)\delta x_j} \quad (3.6)$$

que al sustituirse en la ecuación (3.5) se obtiene

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{j,j} = \frac{\varphi_{j+1,j} + (\alpha_j^2 - 1)\varphi_{j,j} - \alpha_j^2 \varphi_{j-1,j}}{\alpha_j(\alpha_j + 1)\delta x_j} \quad (3.7)$$

siguiendo un procedimiento análogo, la derivada de segundo orden puede escribirse como

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{j,j} = 2 \left(\frac{\varphi_{j+1,j} - (\alpha_j + 1)\varphi_{j,j} + \alpha_j \varphi_{j-1,j}}{\alpha_j (\alpha_j + 1) \delta x_j^2} \right) \quad (3.8)$$

y la derivada mixta como

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right|_{j,j} = 2 \left(\frac{\varphi_{j+1,j} - (\alpha_j + 1)\varphi_{j,j} + \alpha_j \varphi_{j-1,j}}{\alpha_j (\alpha_j + 1) \delta x_j^2} \right) \quad (3.9)$$

los esquemas antes mencionados han sido optimizados utilizando funciones geométricas representando flujos como los que aquí se estudian (Ramírez, 1991).

3.3 CELDA MAC.

Para la solución numérica de las ecuaciones se ha considerado la celda MAC (marker-and-cell) en la cual los escalares son evaluados en el centro de las mallas y las cantidades vectoriales en las caras correspondientes, como se indica en la Fig. 3.2.

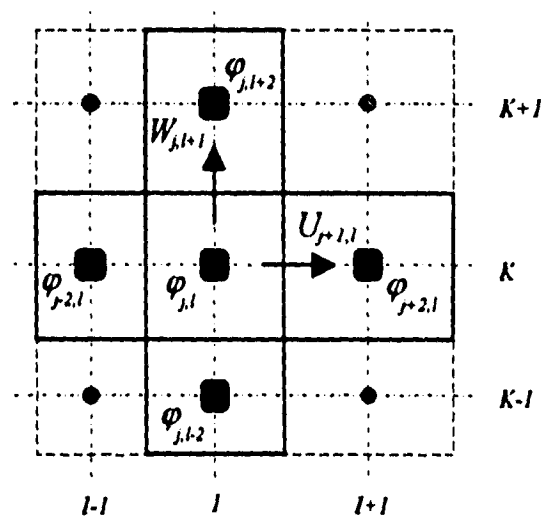


Figura 3.2 Celda de discretización, φ representa los escalares.

Los esquemas de discretización de las derivadas definidas anteriormente implica que se debe de tener una doble malla en un dominio de estudio; es decir una malla de cálculo y una de interpolación.

3.4 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES.

El sistema de ecuaciones que se ha obtenido es un sistema parabólico en el tiempo e hiperbólico en el espacio; para resolverlo se ha elegido un método de diferencias finitas. El esquema general de la solución de las ecuaciones que se ha elegido es el siguiente

$$[\varphi_{j,l}]^{n+1} = [\varphi_{j,l}]^n + \Delta t [\text{CONVEC}(\varphi_{j,l}) + \text{DISS}(\varphi_{j,l}) + \text{DIFF}(\varphi_{j,l}) + \dots]^n \quad (3.10)$$

en la que (j,l) representan los índices en el espacio y (n) el índice temporal; así, las ecuaciones son resueltas de acuerdo a las condiciones establecidas en una etapa anterior, relacionándose en un proceso de cálculo por el incremento de tiempo dado por Δt . La derivada temporal se discretiza como

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} \quad (3.11)$$

3.4.1 ECUACIÓN MEDIA DE LA VELOCIDAD.

La ecuación media para la velocidad (1.49)

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\bar{T}}{T_0} g_i + \nu_0 \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial (\overline{u_i u_j})}{\partial x_j}$$

se discretiza conforme al esquema dado por la ec. (3.10); así para su componente vertical se obtiene

$$\bar{W}_{j,j}^{n+1} = \bar{W}_{j,j}^n + \Delta t \left[\text{CONVEC}W_{i,k} - \text{VOM}_{j,j} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_{j,j} - \text{DIFF}W_{1,i,k} - g \frac{\bar{T} - T_N}{T_N} - \text{DIFF}W_{2,i,k} \right]^n \quad (3.11)$$

en la que

$$\text{VOM}_{j,j} = \frac{1}{\rho_N}$$

y los macrotérminos se definen como:

- convección

$$\text{CONVEC}W_{i,k} = -\bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} - \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z}$$

- gradiente de presión

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{j,j}^n = \frac{P_{j,j+1}^n - P_{j,j-1}^n}{\Delta z_l}$$

- difusión molecular

$$\text{DIFF}W_{1,i,k} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial z} \right)$$

- la difusión turbulenta se evalúa en diferente forma para los dos modelos:

- para el modelo algebraico (MDL = 0)

$$\text{DIFF}W_{2,i,k} = \nu_1 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial x} + \nu_3 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z \partial z}$$

- para el modelo de primer orden (MDL = 1)

$$\text{DIFF}W_{2,i,k} = \frac{\partial \overline{uw}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial z}$$

Para la componente horizontal se tiene

$$\bar{U}_{j,j}^{n+1} = \bar{U}_{j,j}^n + \Delta t \left[\text{CONVECU}_{i,k} - \text{VOM}_{j,j} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \right)_{j,j} - \text{DIFFU1}_{i,k} \right] - \text{DIFFU2}_{i,k} \quad (3.13)$$

en forma análoga a la ecuación anterior los macrotérminos se definen como:

- convección

$$\text{CONVECU}_{i,k} = -\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}$$

- gradiente de presión

$$\left. \frac{\partial P^n}{\partial x} \right|_{j,j} = \frac{P_{j+1,j}^n - P_{j-1,j}^n}{\Delta x_j}$$

- difusión molecular

$$\text{DIFFU1}_{i,k} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial z} \right)$$

- difusión turbulenta:

-para el modelo algebraico

$$\text{DIFFU2}_{i,k} = \nu_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial x} + \nu_3 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z \partial z}$$

- para el modelo de primer orden

$$\text{DIFFU2}_{i,k} = \frac{\overline{\partial u u}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial u w}}{\partial z}$$

3.4.2 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE LA TURBULENCIA.

La ecuación de la energía cinética de la turbulencia dada por la ec. (2.12)

$$\frac{D\kappa}{Dt} = P + B + \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_T}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right)$$

se discretiza como

$$\kappa_{j,j}^{n+1} = \kappa_{j,j}^n + \Delta t \left[\text{CONVECK}_{i,k} + P_{j,j} + B_{j,j} - \varepsilon + \text{DIFF}\kappa_{i,k} \right]^n \quad (3.14)$$

con los macrotérminos:

- convección

$$\text{CONVECK}_{i,k} = -\bar{U} \frac{\partial \kappa}{\partial x} - \bar{W} \frac{\partial \kappa}{\partial z}$$

- difusión

$$\text{DIFF}\kappa_{i,k} = \frac{v_{T,j}}{\sigma_\kappa} \left(\frac{\partial^2 \kappa}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \kappa}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\sigma_\kappa} \left(\frac{\partial v_T}{\partial x} \frac{\partial \kappa}{\partial x} + \frac{\partial v_T}{\partial z} \frac{\partial \kappa}{\partial z} \right)$$

- producción

$$P_{j,j} = v_{T,j} \left[2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 \right]$$

- flotación

$$B_{j,j} = -v_{T,j} g \beta \frac{1}{Pr_T} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right)$$

3.4.3 ECUACIÓN DE LA DISIPACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE LA TURBULENCIA.

La ecuación de la disipación de la energía cinética de la turbulencia dada por la ec. (2.16)

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{\kappa} (P + B) - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{\kappa} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)$$

se discretiza de la siguiente forma

$$\varepsilon_{j,l}^{n+1} = \varepsilon_{j,l}^n + \Delta t \left[\text{CONVEC} \varepsilon_{i,k} + C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_{j,l}}{\kappa_{j,l}^n} (P_{j,l} + B_{j,l}) - C_{\varepsilon_2} \frac{(\varepsilon_{j,l})^2}{\kappa_{j,l}} + \text{DIFF} \varepsilon_{i,k} \right]^n \quad (3.15)$$

con los macrotérminos definidos por:

- convección

$$\text{CONVEC} \varepsilon_{i,k} = -\bar{U} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \bar{W} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$$

- difusión

$$\text{DIFF} \varepsilon_{i,k} = \frac{v_{T,j,l}}{\sigma_\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \left(\frac{\partial v_T}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial v_T}{\partial z} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right)$$

3.4.4 ECUACIÓN DE LA TEMPERATURA MEDIA.

La ecuación de la temperatura media dada por la ec. (1.51)

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{U}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \bar{u}_i \bar{\theta}}{\partial x_j}$$

se discretiza como

$$\bar{T}_{j,l}^{n+1} = \bar{T}_{j,l}^n + \Delta t \left[\text{CONVECT}_{i,k} + \text{DIFFT1}_{i,k} - \text{DIFFT2}_{i,k} \right]^n \quad (3.16)$$

con los macrotérminos:

- convección

$$\text{CONVECT}_{i,k} = -\bar{U} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \bar{W} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$$

- difusión molecular

$$\text{DIFFT1}_{i,k} = \alpha_N \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z \partial z} \right)$$

- difusión turbulenta:

- para el modelo algebraico

$$\text{DIFFT2}_{i,k} = K_{T1} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial x} + K_{T3} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z \partial z}$$

- para el modelo $\theta^2 - \epsilon_\theta$.

$$\text{DIFFT2}_{i,k} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$$

3.4.5 ECUACIÓN DE LA VARIANZA DE LA FLUCTUACIÓN DE TEMPERATURA.

Para la varianza de la fluctuación de temperatura ec. (2.21)

$$\frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_T} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_j} \right) - 2 \overline{u}_j \theta \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - 2 \epsilon_\theta$$

la discretización es

$$\overline{\theta^2} \Big|_{j,l}^{n+1} = \overline{\theta^2} \Big|_{j,l}^n + \Delta t \left[\text{CONVEC} \theta_{i,k}^2 + \text{DIFF} \theta_{i,k}^2 + \text{PROD} \theta_{i,k}^2 - \text{DISS} \theta_{i,k}^2 \right]^n \quad (3.17)$$

con los macrotérminos:

- convección

$$\text{CONVEC} \theta_{i,k} = -\bar{U} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x} - \bar{W} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial z}$$

- difusión

$$\text{DIFF}\theta_{i,k}^2 = \frac{\nu_{T,j,l}}{\sigma_\theta} \left(\frac{\partial^2 \bar{\theta}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}^2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\sigma_\theta} \left(\frac{\partial \nu_T}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial x} + \frac{\partial \nu_T}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial z} \right)$$

- disipación

$$\text{DISS}\theta_{i,k}^2 = 2\varepsilon_\theta |_{j,l}^n$$

- producción

$$\text{PROD}\theta_{i,k}^2 = -2 \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right]$$

3.4.6 ECUACIÓN DE LA EVOLUCIÓN DE LA DISIPACIÓN DE LA VARIANZA DE TEMPERATURA.

Para la evolución de la disipación de la varianza de temperatura, ec. (2.29).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j} = & -C_{\varepsilon T1} \frac{\varepsilon_\theta}{\theta^2} \bar{u}_j \theta \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + C_{\varepsilon T2} (P+G) \frac{\varepsilon_\theta}{\kappa} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_{\varepsilon T}} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j} \right) C_{\varepsilon T3} \varepsilon_\theta \frac{\varepsilon}{\kappa} - C_{\varepsilon T4} \frac{(\varepsilon_\theta)^2}{\theta^2} \end{aligned}$$

la discretización es

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta,j,l}^{n+1} = & \varepsilon_{\theta,j,l}^n + \Delta t \left[\text{CONVEC}\varepsilon_{\theta,k} + C_{\varepsilon T2} \frac{\varepsilon_{\theta,j,l}^n}{\kappa_{j,l}^n} (P_{j,l}^n + G_{j,l}^n) \right. \\ & \left. - C_{\varepsilon T1} \frac{\varepsilon_\theta}{\theta^2} \left(\bar{u} \theta \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{w} \theta \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) + \text{DIFF}\varepsilon_{\theta,k} + \text{DISS}\varepsilon_{\theta,k} \right]^n \end{aligned} \quad (3.18)$$

con los macrotérminos:

- convección

$$\text{CONVEC}\varepsilon_{\theta,k} = -\bar{U} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} - \bar{W} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial z}$$

- producción

$$P_{j,j}^n = \overline{uu} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \overline{uw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} + \overline{uw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z}$$

- flotación

$$G_{j,j}^n = \beta g \overline{w\theta}$$

- difusión

$$\text{DIFF}_{\varepsilon_{\theta,k}} = \frac{\nu_T}{\sigma_{\varepsilon_{\theta}}} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta}}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_{\theta}}} \left(\frac{\partial \nu_T}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \nu_T}{\partial z} \frac{\partial \varepsilon_{\theta}}{\partial z} \right)$$

- disipación

$$\text{DISS}_{\varepsilon_{\theta,k}} = -C_{\varepsilon_{T4}} \frac{(\varepsilon_{\theta})^2}{\theta^2} - C_{\varepsilon_{T3}} \frac{\varepsilon}{\kappa} \varepsilon_{\theta}$$

La estructura dada por la ecuación (3.10) es la misma que se considera dentro del programa de cómputo y tiene la ventaja de conocer la evolución, en el espacio y en el tiempo, de los diversos mecanismos que intervienen en las ecuaciones.

Suponiendo que todos los campos son conocidos en el instante $t = m\Delta t$, la resolución de la ec. (3.10), permite obtener en cada nodo del dominio, una primera aproximación de la velocidad a la etapa $(n+1)$. La primera aproximación de la velocidad $(n+1)$ es representada por las condiciones impuestas en las condiciones iniciales. Luego que el campo de velocidades en todo el dominio se calcula, estas velocidades no satisfacen, evidentemente, la ecuación de continuidad, para ello es necesario que en cada paso de tiempo, se este verificando dicha velocidad. Por esta razón se introduce el método iterativo de compresibilidad artificial; el cual se describe en la sección siguiente.

3.5 EL MÉTODO DE COMPRESIBILIDAD ARTIFICIAL.

Conforme evolucionan en el tiempo, la solución de las ecuaciones deben satisfacer la ecuación de continuidad en el dominio; esto implica que para un dominio discretizado esta ecuación deberá satisfacerse en cada una de las celdas de cálculo (Fig. 3.2). Así la ecuación de la

divergencia (ecuación 1.47) escrita en una etapa $(n+1)$ debe satisfacer matemáticamente la siguiente relación

$$\text{div } \bar{v}^{n+1} = 0 \quad (3.19)$$

Esta condición generalmente no se cumple y es más fuerte al inicio de los cálculos (ver Fig. 3.3) por ello para ajustar la ecuación de continuidad se ha introducido el método de compresibilidad artificial (Chorin, 1967). Este método funciona de la siguiente manera; sea la ecuación de movimiento

$$\bar{v}^{n+1} = \bar{v}^n + \bar{f}^n + \Delta t [\text{otros mecanismos}]^n \quad (3.20)$$

suponiendo que todos los campos son conocidos a la etapa $(n+1)$, la solución de la ecuación (3.20), permite obtener, en cada nodo del dominio, una primera aproximación de la velocidad a la etapa $(n+1)$.

Evidentemente la ecuación de continuidad (3.19) no se verifica en cada celda de cálculo; a partir de este campo aproximado, un proceso iterativo permite ajustar conjuntamente \bar{v}^{n+1} y P^{n+1} de tal forma que se verifique

$$\text{div } \bar{v}^{n+1} = 0 \quad (\rightarrow \varepsilon_c) \quad (3.21)$$

En efecto, $\text{div } \bar{v}^{n+1}$ positiva (negativa) en una celda (i,k) , induce la existencia de un flujo de masa saliendo (entrando) de la celda, que se puede, para asegurar la conservación, anular disminuyendo (aumentando) artificialmente la presión en la celda considerada. ε_c es una cantidad pequeña tendiente a cero. La relación de iteración es de la forma:

$$\left[\delta P_{i,k}^{n+1} \right]^{l+1} = -\beta_c \left[\text{div } \bar{v}_{i,k}^{n+1} \right]^l \quad (3.22)$$

en la que l es el índice iterativo de la compresibilidad, δP^{l+1} es la corrección de presión hecha a la $(l+1)$ -ésima iteración y β_c el parámetro de iteración ($\beta_c > 0$).

El método, llamado de compresibilidad artificial, permite relajar simultáneamente los campos de velocidad y de presión. En este método, el algoritmo de relajación simultánea es equivalente al

algoritmo implícito clásico que consiste en resolver la ecuación de Poisson para la presión y llevar ésta a la ec. (3.20).

Después de haber impuesto, en el ciclo temporal $(n+1)$ una corrección de presión δP^{l+1} en la celda (i,k) , la conservación de la cantidad de movimiento debe de asegurarse, y en consecuencia, \vec{v}^{n+1} debe ser corregida por una cantidad $div \vec{v}^{n+1}$.

Así, introduciendo la relación de iteración (3.21) en la ecuación de conservación (3.19)

$$\begin{aligned}\delta U_{i,k}^{n+1} &= [U_{i,k}^{n+1}]^{l+1} - [U_{i,k}^{n+1}]^l = \frac{\Delta t \delta P_{i,k}^{l+1}}{\rho_N \Delta x} \\ \delta U_{i-1,k}^{n+1} &= [U_{i-1,k}^{n+1}]^{l+1} - [U_{i-1,k}^{n+1}]^l = \frac{\Delta t \delta P_{i,k}^{l+1}}{\rho_N \Delta x} \\ \delta U_{i,k}^{n+1} &= [W_{i,k}^{n+1}]^{l+1} - [W_{i,k}^{n+1}]^l = \frac{\Delta t \delta P_{i,k}^{l+1}}{\rho_N \Delta z} \\ \delta U_{i,k-1}^{n+1} &= [W_{i,k-1}^{n+1}]^{l+1} - [W_{i,k-1}^{n+1}]^l = \frac{\Delta t \delta P_{i,k}^{l+1}}{\rho_N \Delta z}\end{aligned}\quad (3.23)$$

El parámetro β_c que aparece en la relación de iteración (3.21) se obtiene después de haber corregido el campo de velocidad a la $(l+1)$ -ésima iteración, con lo cual $div \vec{v}^{n+1} = 0$; de donde se obtiene que

$$\delta P^{l+1} = - \frac{\rho_N [div \vec{v}_{i,k}^{n+1}]}{2\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)} \quad (3.24)$$

en la que

$$\beta_c = \frac{\rho_N}{2\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)} \quad (3.25)$$

Las correcciones son hechas línea tras línea en la totalidad del dominio. La corrección impuesta en una celda afecta las celdas vecinas. El proceso debe ser reiterado hasta que a la etapa $(n+1)$, la ecuación de continuidad sea verificada, a un valor β_c , en todas las celdas del dominio.

La convergencia del proceso iterativo puede ser acelerada introduciendo un coeficiente de relajación en la ecuación (3.23). Este coeficiente, definido como Ω , debe a fin de conservar la estabilidad del esquema, tomar valores en el intervalo

$$0.1 \leq \Omega \leq 1$$

Conforme evoluciona el tiempo, se requerirá de menos iteraciones en el algoritmo del método, como se indica en forma esquemática en la Fig. 3.3.

3.4 EL PROGRAMA *QUETZAL/II*

Para la solución del sistema de ecuaciones se procedió a la utilización de un programa de cálculo, este programa llamado *QUETZAL/II*, se apoya en la estructura del programa *QUETZAL* (que sirve a su vez, para el estudio de flujos compresibles a altas temperaturas). A diferencia de éste, *QUETZAL/II* trata con las ecuaciones de movimiento para flujos incompresibles y los modelos de turbulencia generados por ésta. Ambos programas están escritos en FORTRAN estándar.

En éste trabajo se introdujeron al programa *QUETZAL/II* los modelos de turbulencia descritos en el capítulo 2, las subrutinas utilizadas y modificadas del programa al introducir dichos modelos se presentan en el Anexo 1.

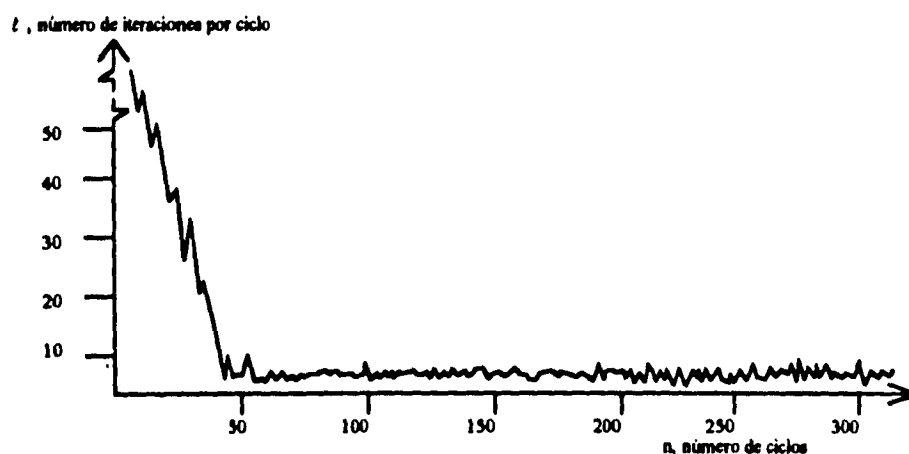


Figura 3.3. Aspecto indicativo de la convergencia del método de compresibilidad artificial.

Las ecuaciones y los modelos de turbulencia descritas en las secciones anteriores fueron introducidas en *QUETZALII*. El algoritmo general del programa puede verse en la Fig. 3.4. En la Fig. 3.5 se indica el algoritmo de compresibilidad artificial en la Fig. 3.6 las combinaciones posibles de los modelos de turbulencia de acuerdo al valor de los parámetros MDL y MTH dados en la Tabla 3.1.

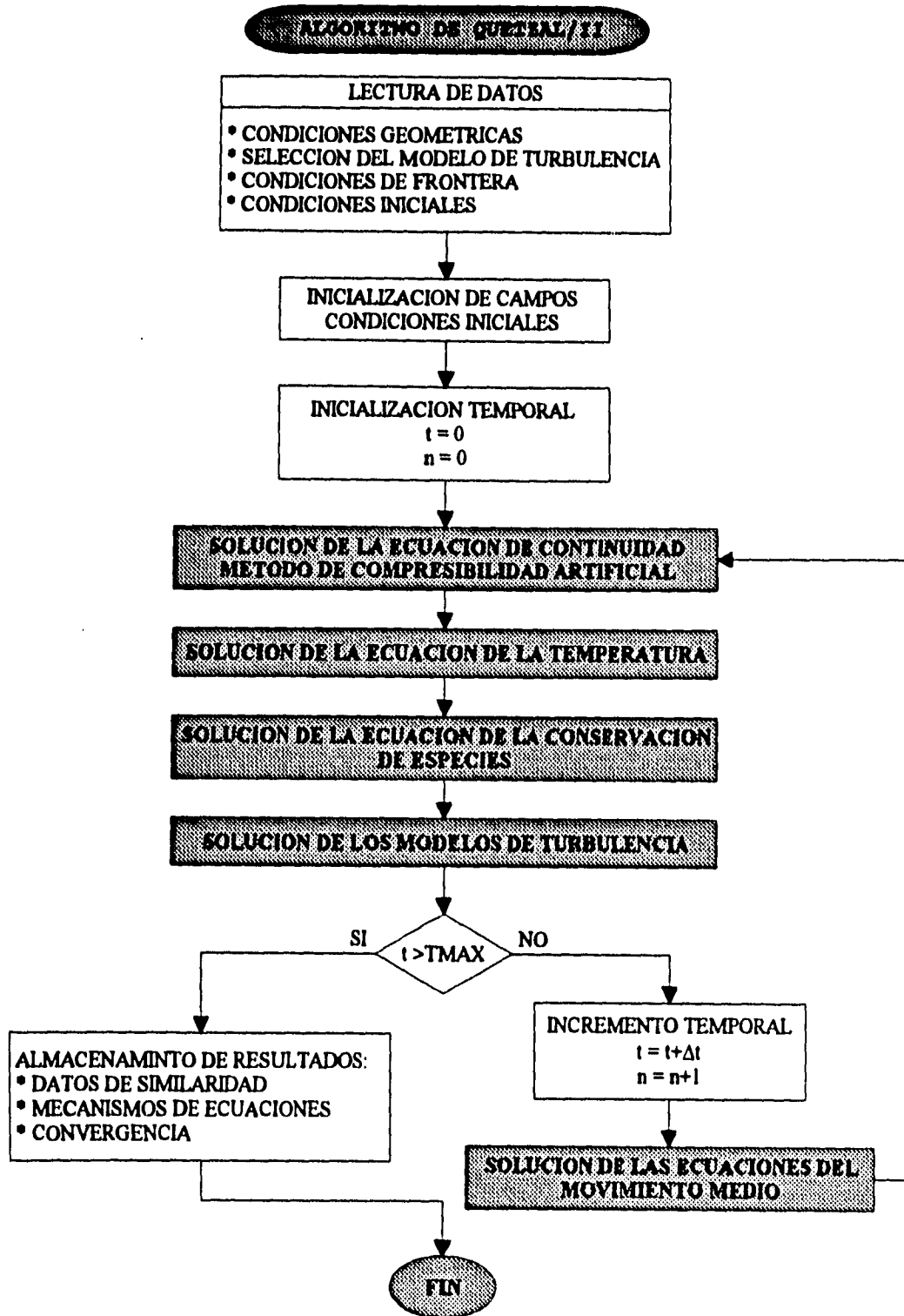


Figura 3.4 Diagrama de flujo general del programa QUETZAL/II

ALGORITMO DE QUETZALTI

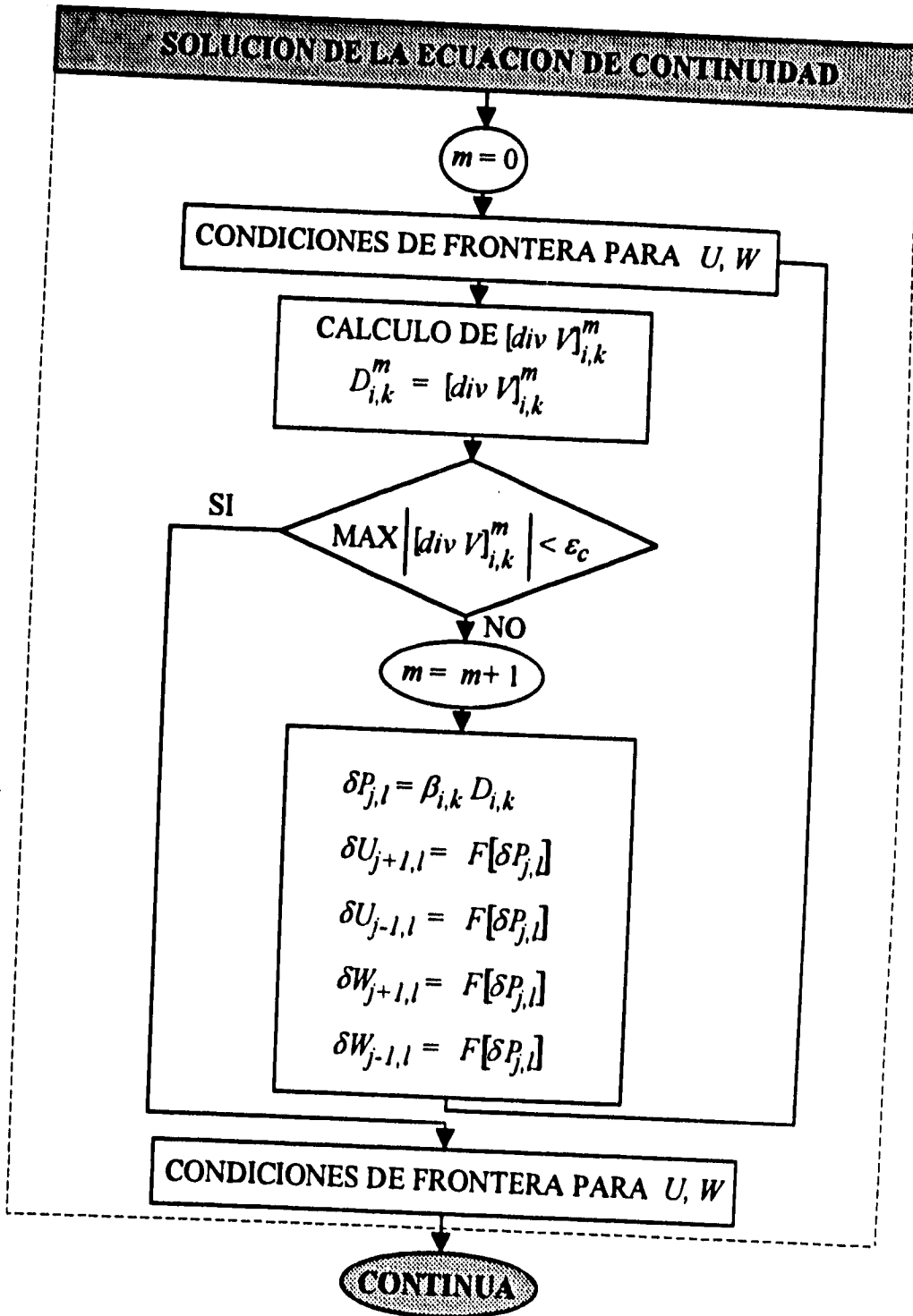


Figura 3.5 Algoritmo del método de compresibilidad artificial

ALGORITMO DE QUETAL/11

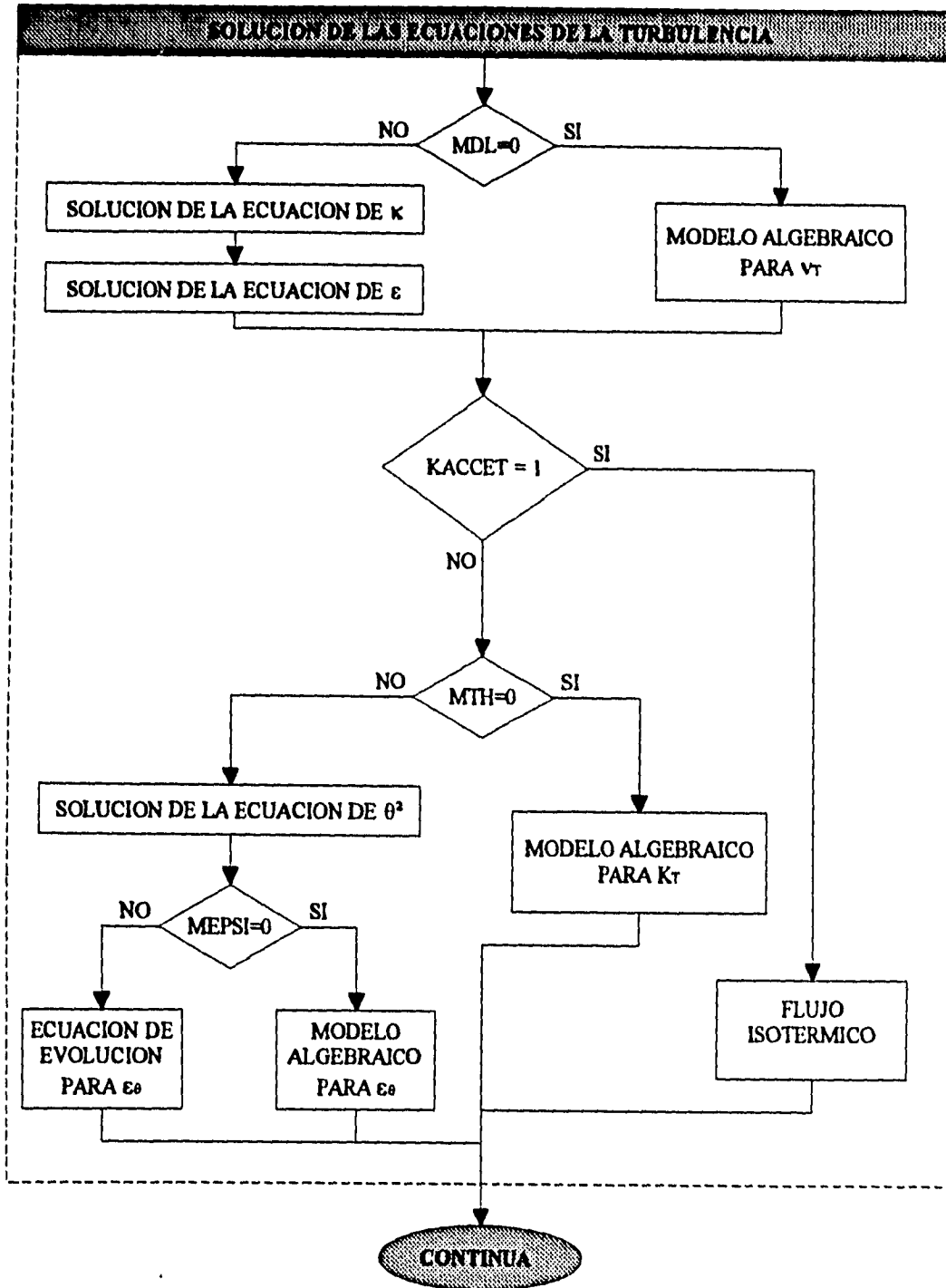


Figura 3.6 Esquema de solución de los modelos de turbulencia.

CAPÍTULO 4

ESTUDIO PARAMÉTRICO DE UN FLUJO TÉRMICO VERTICAL

4.1 INTRODUCCIÓN.

En las secciones previas se ha establecido un sistema de ecuaciones estadísticas en el cual se ha considerado un flujo con cortante donde existe una dirección privilegiada. En este capítulo se describen las diferentes categorías de flujos dependiendo de la fuerza de *flotación*: cuando éstas actúan en la dirección de la velocidad del chorro en el origen, el flujo es llamado *chorro portante* (*buoyant jet*), cuando actúan en la dirección opuesta, el flujo es llamado *chorro negativo*. Cuando el efecto de *flotación* se desprecia, el chorro es llamado *chorro puro* o *chorro simple* (*non-buoyant jet*). Los otros casos límite, en que las fuerzas de *flotación* dominan al flujo, son llamados *pluma simple* o *pluma pura*. En medios ambientes homogéneos y en reposo, todo *chorro portante* eventualmente se transforma en *plumas* al alejarse del origen, aún cuando estos tengan una cantidad de movimiento inicial importante.

4.2 CLASIFICACIÓN DE LOS CHORROS Y SUS CARACTERÍSTICAS.

El *chorro puro* tiene la misma densidad que la del medio ambiente así que las fuerzas de *flotación* están ausentes. La *pluma pura* no tiene cantidad de movimiento inicial y puede ser

generada con una fuente de calor tal como una plancha caliente, un cigarro encendido o una flama. El caso general de un *chorro con flotación*, llamado algunas veces *pluma forzada*, tiene una cantidad de movimiento inicial y es creada por un flujo descargándose con una densidad menor a la del medio ambiente. Como ejemplos se pueden citar; la descarga de un difusor de calor, una torre enfriadora, una chimenea o un quemador. En la región cercana a la descarga, las fuerzas de cantidad de movimiento dominan al flujo así que éste se comporta como un *chorro sin flotación (non-buoyant jet)*. Allí, sigue una región intermedia donde la influencia de las fuerzas de cantidad de movimiento iniciales se hacen cada vez más pequeñas. En la región final, las fuerzas de flotación dominan completamente al flujo y éste se comporta como una *pluma*. Cuando el chorro se descarga con un cierto ángulo con respecto al vector gravitacional, éste gira hacia arriba debido a la fuerza de *flotación* y se comporta virtualmente como un *chorro vertical con flotación* en un campo cercano. Un *chorro negativo con flotación* se crea por la descarga del flujo en la dirección hacia arriba cuya densidad es mayor a la del medio ambiente. Los ejemplos son la descarga de aguas negras pesadas desde el fondo de un lago o la parte superior de agua evaporándose en columnas, en este caso el chorro pierde continuamente cantidad de movimiento dándosele a las fuerzas de *flotación* que provocan un giro eventualmente hacia abajo.

El movimiento del chorro es, en general, gobernado por fuerzas de inercia, viscosas y de Arquímedes (*flotación*). El carácter local del flujo es determinado por la magnitud de estas fuerzas en cada punto, el carácter global, el cual nos interesa, está determinado por la importancia de las fuerzas en la fuente y por las condiciones ambientales. La influencia respectiva de las contribuciones inerciales, viscosas y de efectos de flotabilidad están caracterizadas por los parámetros descritos a continuación.

- El número de Reynolds representa la razón entre fuerzas de inercia y fuerzas viscosas

$$Re = \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}} = \frac{W_0 D}{\nu} \quad (4.1)$$

en *chorros sin flotación* este parámetro es de suma importancia. El valor crítico en el que un chorro es puramente laminar en el aire es de $Re = 50$ (Sini, 1986).

- El número de Grashof representa la razón entre las fuerzas de flotación y fuerzas viscosas

$$Gr = \frac{\text{fuerzas de flotación}}{\text{fuerzas viscosas}} = \frac{\beta g D^3 (T_0 - T_{N_0})}{\nu^2} \quad (4.2)$$

en *plumas puras* el número de Grashof es de importancia. Los *chorros turbulentos y plumas* tienen número de Reynolds y Grashof altos, así, las fuerzas viscosas se desprecian en estos flujos, lo mismo ocurre para el caso intermedio de *buoyant jets*.

Estos números son importantes ya que indican si el flujo es laminar o turbulento, y si éste es inicialmente laminar, a qué distancia de la fuente se espera que ocurra la transición a la turbulencia como consecuencia del medio.

- El número de Froude representa la razón entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de flotación

$$Fr = \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas de flotación}} = \frac{W_0^2}{\beta g D (T_0 - T_{N_0})} \quad (4.3)$$

El número de Froude puede escribirse también de la siguiente forma

$$Fr = \frac{Re^2}{Gr} = \frac{1}{Ri} \quad (4.4)$$

donde Ri representa el número de Richardson. El número de Froude es el parámetro que indica, de una manera más clara, el comportamiento para los *chorros portantes*, como puede verse en la siguiente tabla

Chorro puro (<i>non-buoyant jet</i>)	$Fr \rightarrow \infty$
Pluma pura	$Fr \rightarrow 0$
Chorro portante (<i>pluma forzada</i>)	$0 < Fr$
Chorro negativo	$Fr < 0$

Tabla 4.1 Números de Froude para los diferentes tipos de chorros.

El número de Froude de un flujo se puede definir también como

$$Fr = \frac{W_0^2}{gD} = \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas de gravedad}} \quad (4.5)$$

Los números de Prandtl y de Schmidt son una característica del fluido y están definidos por las siguientes expresiones.

$$Pr = \frac{\nu}{k} = \frac{Cp\mu}{k} = \frac{\text{difusividad de cantidad de movimiento}}{\text{difusividad térmica}} \quad (4.6)$$

$$S_{ch} = \frac{\nu}{D} = \frac{\mu}{\rho D} = \frac{\text{difusividad de cantidad de movimiento}}{\text{difusividad molecular}} \quad (4.7)$$

4.3 CHORRO PLANO TURBULENTO.

En las secciones previas se mencionaron los diferentes tipos de chorros existentes, en este trabajo nos interesa estudiar en particular el comportamiento de un chorro plano en turbulencia libre, en tal caso se dará una descripción de sus diferentes zonas y principales características.

4.3.1 IDENTIFICACIÓN DE LAS ZONAS DE UN FLUJO DESARROLLADO.

La Fig. (4.1) muestra las zonas características de un chorro plano turbulento con simetría axial, se pueden observar también los parámetros que caracterizan estos flujos, que son principalmente; D que es el diámetro a la salida de la chimenea, z_0 que indica el origen ficticio de similitud, z_D que es un parámetro adimensional que sirve para identificar las diferentes zonas del flujo y puede definirse por las siguientes expresiones

$$z_D = \frac{z - z_0}{D} \quad (4.8a)$$

$$z_D = \frac{z}{D} \quad (4.8b)$$

y por último la línea L_E llamada línea de expansión y que determina o indica la evolución del flujo.

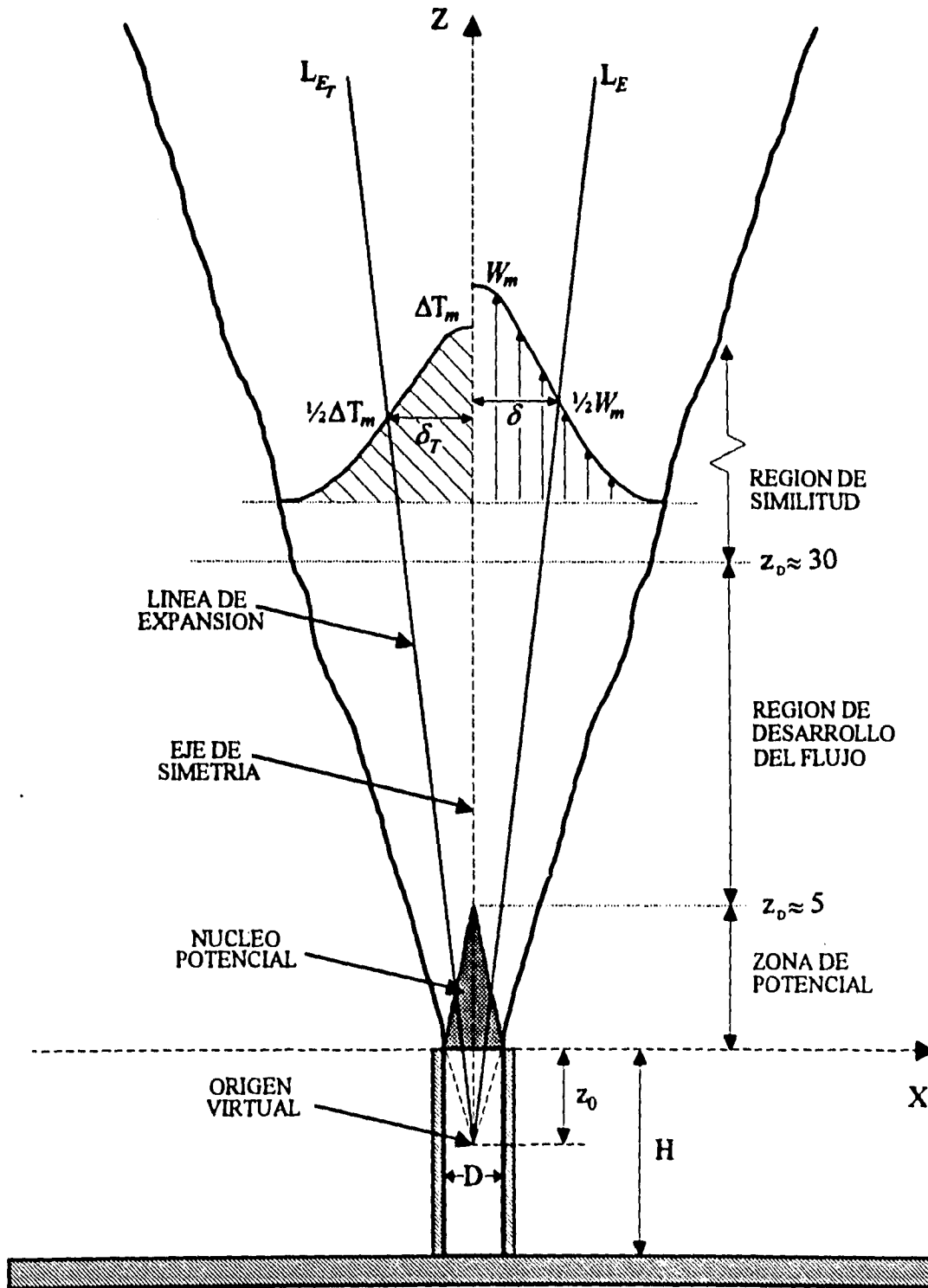


Figura 4.1 esquema de definición de un chorro plano simétrico.

4.3.2 OBTENCIÓN DE LA LÍNEA DE EXPANSIÓN.

Para cada velocidad máxima (W_m) sobre el eje de simetría, dividida por la velocidad máxima de emisión (W_E), se calcula un valor delta (δ_{l_j}) para el cual la velocidad vale la mitad de su valor sobre el eje. δ_{l_j} recibe el nombre de semilongitud de evolución. La línea de expansión debe de pasar por cada valor de la semilongitud en la zona del flujo desarrollado, ésta se puede calcular de la siguiente manera

$$L_E = \frac{1}{l_2 - l_1} \sum_{l=l_1}^{l_2} \left(\frac{\delta_{l+1} - \delta_l}{z_{l+1} - z_l} \right) \quad (4.9)$$

El origen ficticio de similitud se calcula de la siguiente forma

$$z_0 = \frac{1}{l_2 - l_1} \sum_{l=l_1}^{l_2} \left(\frac{z_l - \delta_l}{L_E} \right) \quad (4.10)$$

Para números de Reynolds grandes, el flujo de un chorro plano llega a ser completamente turbulento a una distancia de la sección de emisión. Allí los bordes de salida generan capas de mezcla turbulentas las cuales se extienden hasta alcanzar, sobre su frontera interior, el eje del flujo. A partir de este punto, las capas de mezcla se fusionan para formar al chorro propiamente dicho. La región interna del flujo que separa las dos capas de mezcla en cada lado del punto de fusión es, en general, mas o menos turbulento. Es, por esta razón, llamado *núcleo de potencial* o *corazón de potencial* (fig. 4.1).

La longitud del núcleo de potencial depende de la intensidad de la turbulencia para la sección de salida. esta bien puede ser del orden de $6D$ (Chen y Rodi, 1980) cuando el nivel de turbulencia es muy débil dentro de la región central de la sección de emisión, pero puede ser significativamente reducido dentro del caso contrario. La longitud del núcleo depende igualmente de la geometría del dispositivo de emisión.

El conjunto de resultados experimentales obtenidos por el chorro plano turbulento muestran que a partir de una sección situada en $z/D \approx 30$, el flujo está plenamente desarrollado y evoluciona conforme a las relaciones definidas para la zona de similitud.

Cuando se hable de *similitud*, una velocidad, una temperatura y una escala de longitud serán suficientes para representar funciones adimensionales. Un chorro plano puede considerarse como emitido de una fuente lineal situada en un origen virtual llamado *origen de similitud* y denotado por z_0 (Fig. 4.1).

La posición vertical z_0 del origen de similitud depende de qué tan estrecha es la longitud del núcleo de potencial y, por consecuencia, de la geometría y de la intensidad de la turbulencia para la sección de salida.

Si se selecciona, para la altura z , la velocidad máxima¹ vertical $W_m(z)$ como escala de medición de la velocidad, el valor máximo de temperatura $\Delta T_m(z)$ como escala de medición de la temperatura, la semilongitud del chorro $\delta(z) = \{x^{W.5}\}$ como escala de medición de la longitud, y $x^{W.5}$ el valor de x tal que $W(x, z) = 0.5W_m(z)$. Las definiciones anteriores de *similitud* implican que la velocidad pueda expresarse como

$$W(x, z) = W_m f(\eta) \quad (4.11)$$

en la que

$$\eta = \frac{x_i - x_{CL}}{\delta}, \quad (4.12)$$

donde x_{CL} representa la posición horizontal en el eje de simetría, y η es la llamada variable de afinidad; como es de esperarse si δ está definida para cuando $W = 0.5W_m(z)$, η deberá tener un valor máximo de 2.

De la misma forma la temperatura T puede expresarse como

$$\Delta T = \Delta T_m f(\eta_\theta) \quad (4.13)$$

con

$$\eta_\theta = \frac{x_i - x_{CL}}{\delta_\theta}. \quad (4.14)$$

Introduciendo las relaciones anteriores en las ecuaciones medias de continuidad, cantidad de movimiento y energía, se obtienen las relaciones de similitud. Estas relaciones para un chorro plano turbulento se pueden escribir, para la velocidad, de la siguiente forma

¹Dada una atmósfera en reposo, la simetría vertical del flujo implica que el eje vertical de simetría (subíndice cl) coincide con las cantidades medias máximas (subíndice m).

$$\frac{d\delta}{dz} = cte. \quad (4.15)$$

$$\frac{W_m}{W_0} = A_w z_D^{-n} \quad (4.16)$$

y para la temperatura

$$\frac{d\delta_\theta}{dz} = cte. \quad (4.17)$$

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = A_T z_D^{-n_0}. \quad (4.18)$$

Se observa que existen dos formas de *similitud*, una para plumas puras y otra para chorros, los valores de las constantes para los dos casos se muestran a continuación.

Constante	Chorro Puro ($Fr \rightarrow \infty$)	Buoyant Jet ($Fr \rightarrow 0$)
$d\delta/dz$	0.10	0.12
A_w	2.4	1.3
n	$-1/2$	0
$d\delta_\theta/dz$	0.142	0.13
A_T	2.0	2.4
n_0	$-1/2$	-1

Tabla 4.2 Constantes de similitud de un chorro turbulento (Chen y Rodi, 1980).

Así dado un chorro plano, las condiciones de similitud son diferentes para las regiones donde se desprecian las fuerzas de Arquímedes o las que en su lugar son más importantes. En ambas regiones de similitud el flujo se dispersa linealmente, es decir $\delta(z) \propto z$, pero la velocidad de dispersión es diferente.

Los perfiles de velocidad son aproximados frecuentemente por perfiles gaussianos, de esta manera, las ecuaciones (4.7) y (4.9) se pueden escribir como

$$\frac{W}{W_m} = \exp(-B_W \eta^2) \quad (4.19)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_m} = -\exp(-B_T \eta^2) \quad (4.20)$$

los valores de las constantes se dan a continuación

Constante	Chorro Puro ($Fr \rightarrow \infty$)	Buoyant Jet ($Fr \rightarrow 0$)
B_W	62	50
B_T	35	41

Tabla 4.3 constantes de perfiles gaussianos (Chen y Rodi, 1980).

En el capítulo siguiente se validará el modelo fisico-matemático descrito en los capítulos anteriores con ayuda del programa de computación *QUETZALII* utilizando el análisis de similitud dado en este capítulo.

43
2EJ
V.2



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**MODELACIÓN MATEMÁTICA DE FLUJOS
TURBULENTOS A TEMPERATURAS MODERADAS**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
FÍSICO

P R E S E N T A :

EDGAR IGNACIO SÁNCHEZ RANGEL



MÉXICO, D.F.

1995

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

FALLA DE ORIGEN

CAPÍTULO 5

APLICACIONES

5.1 INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se empieza por definir el dominio de estudio para un medio ambiente en reposo y homogéneo, a continuación se presentan las condiciones iniciales, de emisión y a la frontera así como los perfiles naturales de presión y temperatura considerados en este trabajo. Finalmente se presentan los resultados obtenidos tanto para los campos dinámicos y térmicos como para los mecanismos del flujo en estudio, mediante el modelo físico-matemático desarrollado anteriormente, estos mismos resultados son comparados con mediciones experimentales dadas por diferentes autores. Cabe mencionar que se utilizaron en la simulación tres modelos de turbulencia, a saber: un modelo con coeficientes de viscosidad turbulenta constantes, un modelo semiempírico cuya formulación está dada en función de la altura y por último un modelo derivado del κ - ϵ .

5.2 DEFINICIÓN DEL DOMINIO DE ESTUDIO.

En la Fig. 5.1 se presenta un dominio que debe tomarse en cuenta en el estudio de emisión como el que aquí se considera; cuando el medio ambiente se encuentra en reposo, es homogéneo

y no sufre alteración alguna en el transcurso del proceso el flujo presenta una simetría axial que permite reducir el dominio de cálculo a la mitad (ver Fig. 5.1), las condiciones de simetría son referenciadas al eje vertical que constituye además una de las fronteras del dominio que se explicarán posteriormente.

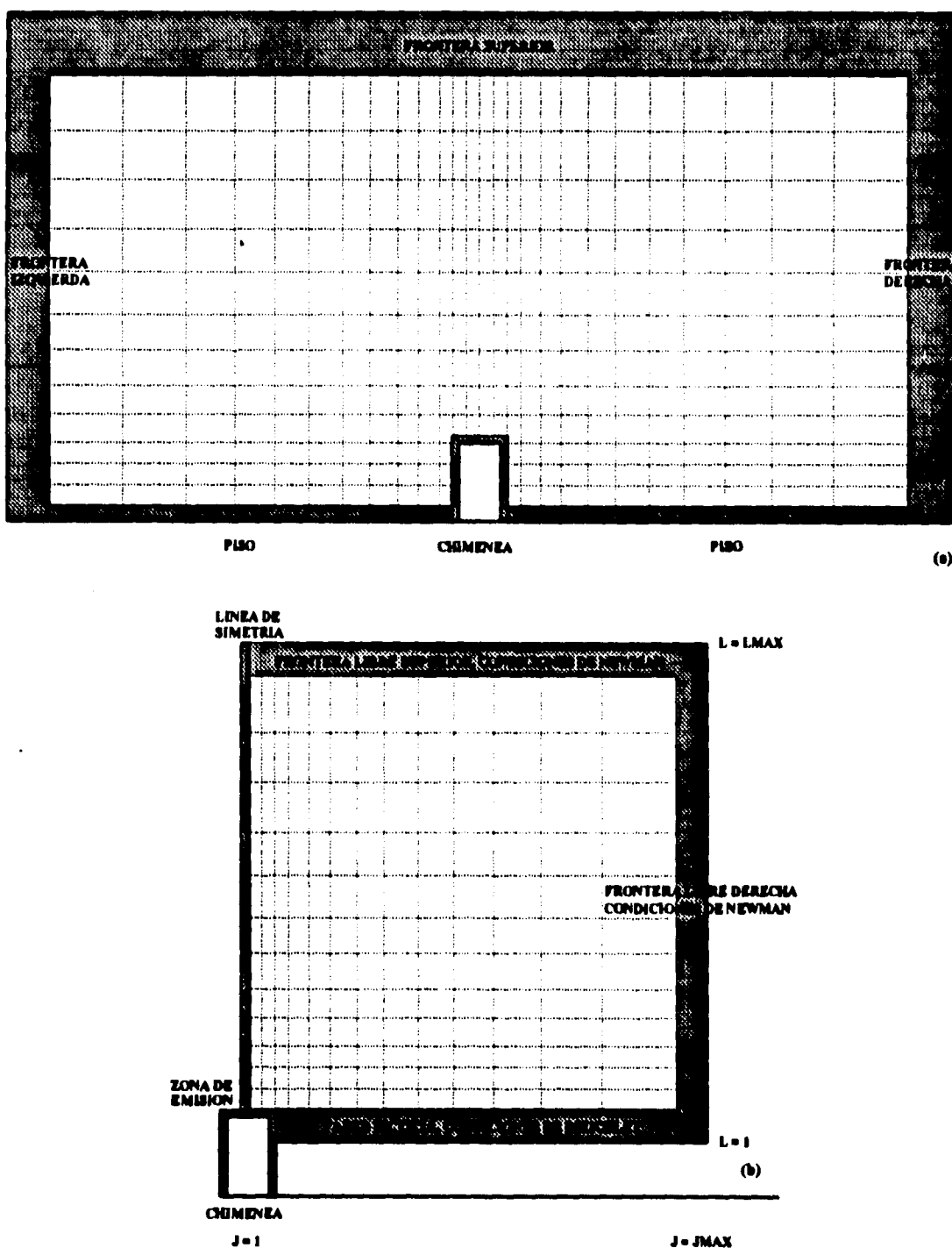


Figura 5.1 Dominio de estudio. (a) vista general, (b) vista reducida.

5.3 CONDICIONES INICIALES.

Las condiciones iniciales se aplican a todo el dominio de estudio en $t = 0$, con

$$J = 1, \dots, JMAX$$

$$L = 1, \dots, LMAX$$

además para una atmósfera en reposo, se cumple que

$$U(J,L) = 0$$

$$W(J,L) = 0$$

5.3.1 PERFILES NATURALES DE PRESIÓN Y TEMPERATURA.

Para la presión y temperatura, consideramos los perfiles naturales definidos por la Fig. (5.2) y obtenidos con las relaciones

$$PNAT(L) = PSOL + Z(L) GRADP \quad (5.1)$$

$$TNAT(L) = CVOM \times PNAT/RGAZ \quad (5.2)$$

con:

PSOL = presión para $z = 0$: $PSOL = 1 \text{ Pa}$.

GRADP = gradiente aerostático: $\frac{\partial p}{\partial z} = -11.4 \text{ Pa m}^{-1}$

CVOM = volumen másico natural $\approx 0.86 \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1}$

RGAZ = constante universal de los gases perfectos = $273 \text{ J K}^{-1} \text{ Kg}^{-1}$

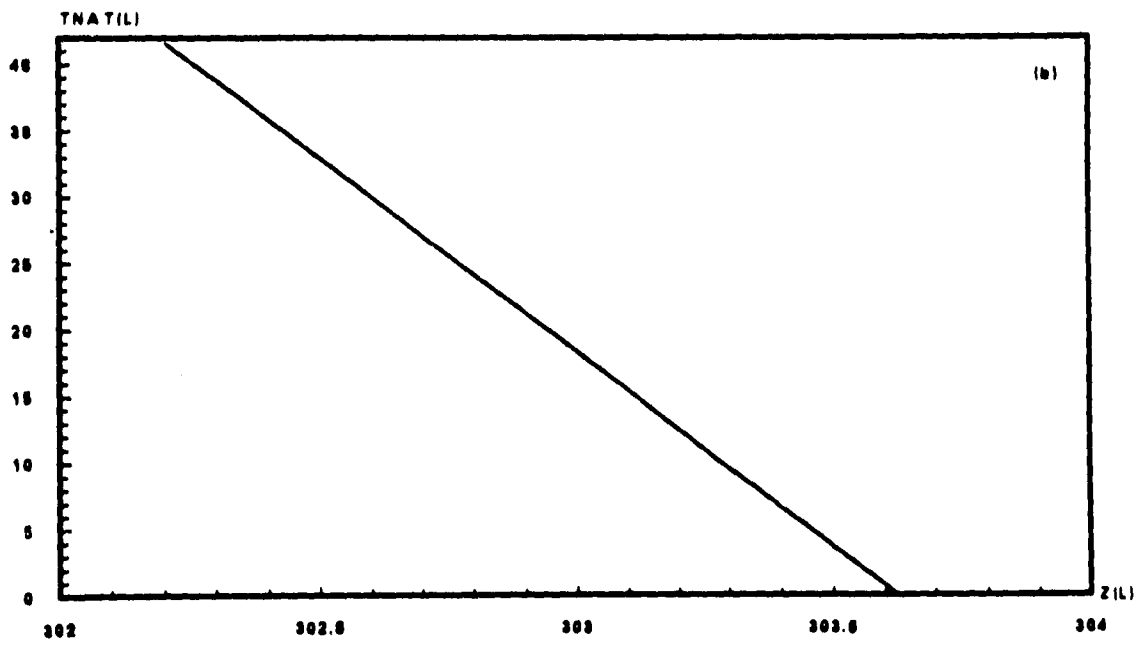
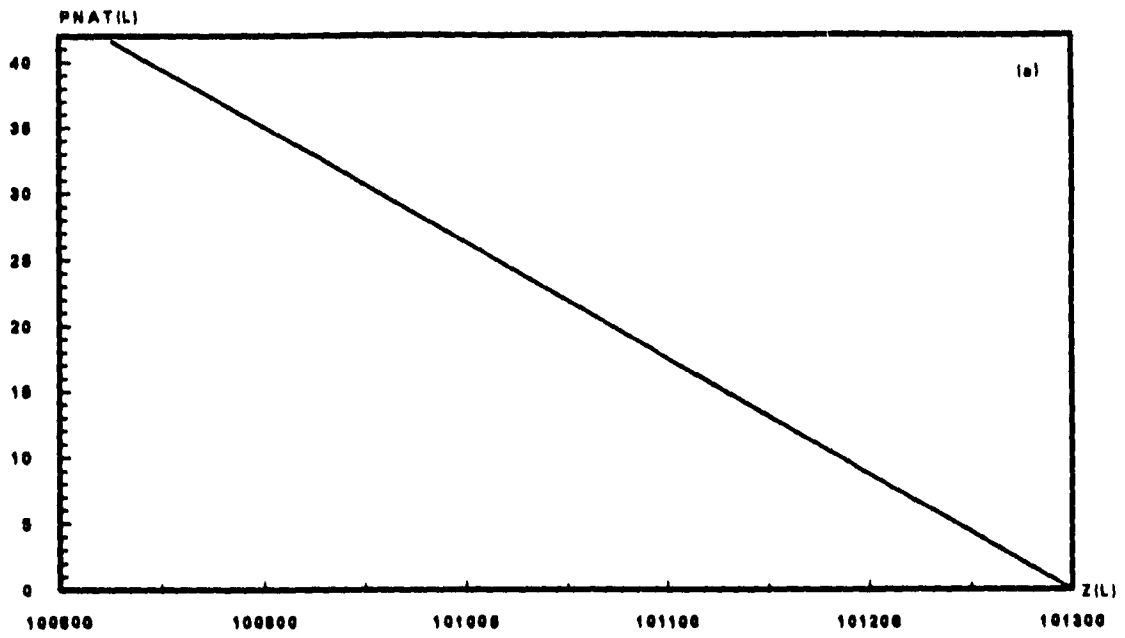


Figura 5.2 Perfiles naturales. (a) Presión, (b) Temperatura.

además

$$T(J,L) = TNAT(L)$$

$$P(J,L) = PNAT(L)$$

5.3.2 CONDICIONES DE EMISIÓN.

Las condiciones de emisión que se consideraron en este trabajo son representadas esquemáticamente por la Fig. 5.3 mostrada a continuación.

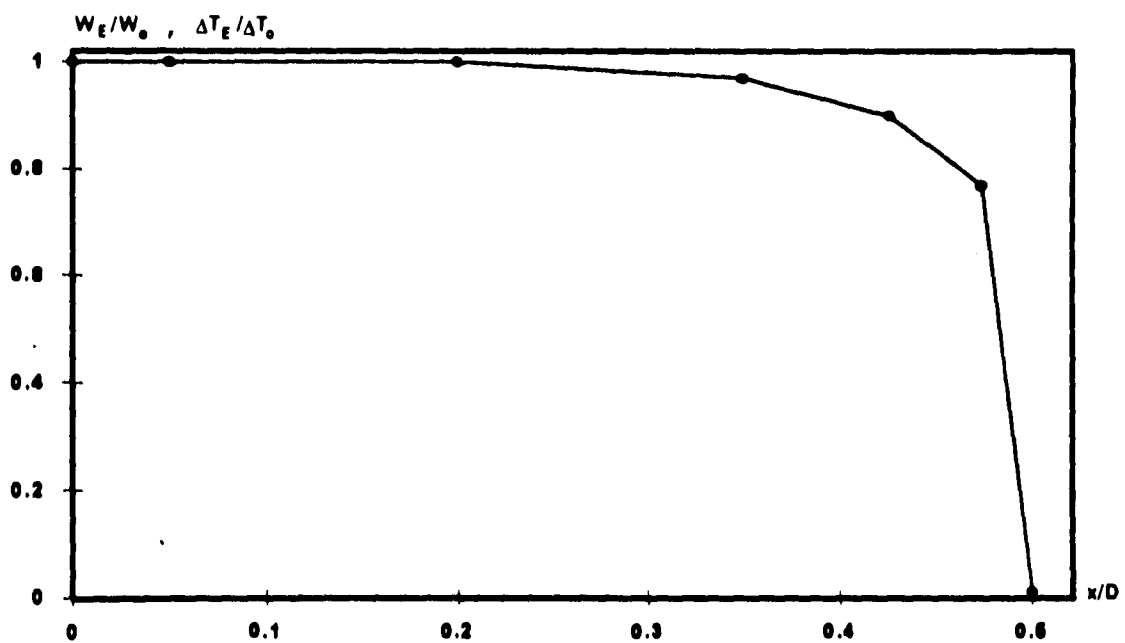


Figura 5.3 Perfiles adimensionales de emisión para la velocidad y temperatura.

con $W_0 = 5 \text{ m s}^{-1}$ y $\Delta T_0 = 20 \text{ K}$.

5.4 CONDICIONES DE FRONTERA.

Las condiciones de frontera se introducen en celdas ficticias colocadas en los bordes del dominio de estudio, como se muestra en la Fig. 5.1 (b). En las siguientes secciones se explicarán las diferentes fronteras que limitan el dominio de cálculo.

5.4.1 CONDICIONES DE FRONTERA PARA LA LÍNEA DE EMISIÓN.

La línea de emisión del flujo está dada como una condición de frontera como se muestra en la Fig. 5.4.

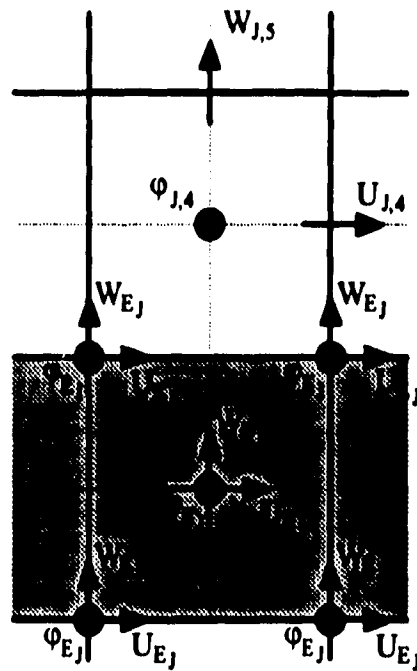


Figura 5.4 Condiciones de frontera para la línea de emisión.

Las diferentes variables en la línea de emisión ($J = JB1, \dots, JB2$) en la que $JB2$ es el límite derecho de la chimenea se pueden escribir de la siguiente manera:

$$U(0 \leq x \leq D/2, z = z_3) = U_0; \quad U(J, KB) = U_E(J) = 0$$

$$W(0 \leq x \leq D/2, z = z_3) = W_0; \quad W(J, KB) = W_E(J)$$

$$T(0 \leq x \leq D/2, z = z_3) = \Delta T_0; \quad T(J, KB) = T_E(J)$$

$$\varphi(0 \leq x \leq D/2, z = z_3) = \varphi_0; \quad \varphi(J, KB) = \varphi_E(J)$$

donde φ representa un gradiente turbulento y el subíndice E indica el valor de la variable en la línea de emisión.

5.4.2 CONDICIONES DE FRONTERA PARA LA LÍNEA DE SIMETRÍA.

Sobre el eje del jet, línea de simetría del flujo, se tienen las condiciones de frontera mostradas en la Fig. 5.5.

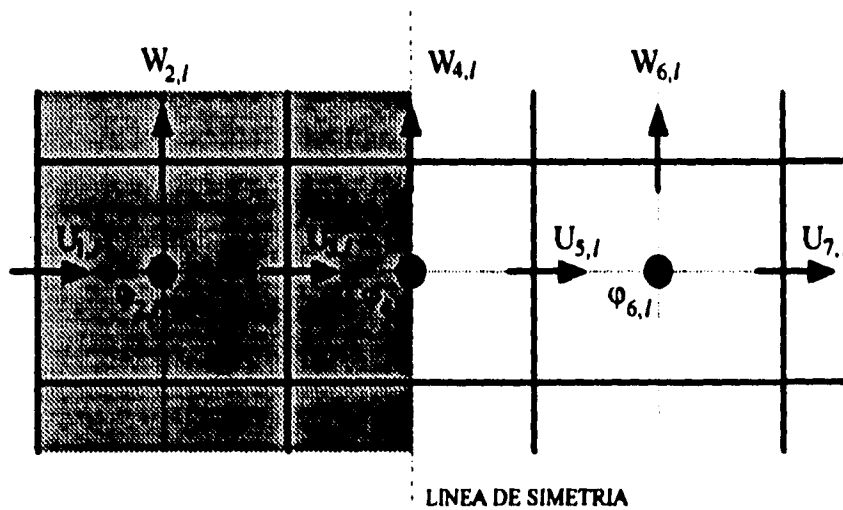


Figura 5.5 Condiciones de frontera para la línea de simetría.

en los límites: $L = 2$, hasta $LMAX2$

$$U(1,L) = -U(7,L)$$

$$U(2,L) = -U(6,L)$$

$$U(3,L) = -U(5,L)$$

$$U(4,L) = 0.0 \text{ sobre el eje}$$

$$\left. \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right|_{CL} = 0$$

$$W(2,L) = W(6,L)$$

$$W(3,L) = W(5,L)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right|_{CL} = 0$$

$$T(2,L) = T(6,L)$$

$$T(3,L) = T(5,L)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right|_{CL} = 0$$

$$\varphi(2,L) = \varphi(6,L)$$

$$\varphi(3,L) = \varphi(5,L)$$

5.4.3 CONDICIONES LÍMITES PARA LA FRONTERA LIBRE SUPERIOR.

Las condiciones para esta frontera son de tipo Newman, como se muestra en la Fig. 5.6.

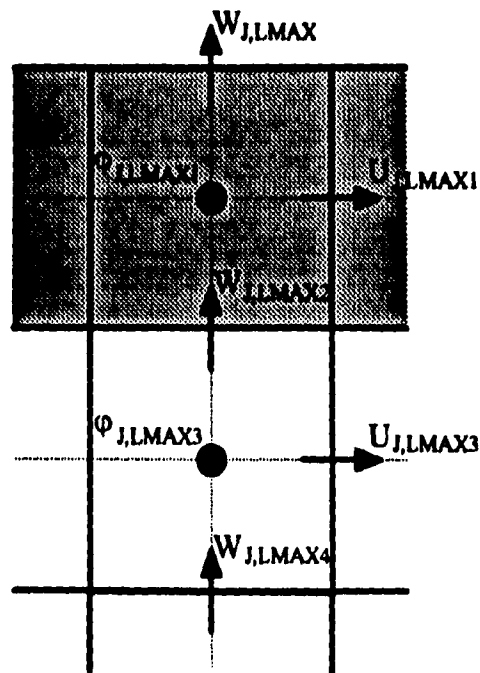


Figura 5.6 Frontera libre superior.

estas condiciones son definidas en los límites $J = 2, \dots, JMAX1$

$$\left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right|_{LMAX2} = 0 \quad U(J, LMAX1) = U(J, LMAX3)$$

$$U(J, LMAX2) = U(J, LMAX3)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right|_{LMAX1} = 0 \quad W(J, LMAX) = W(J, LMAX2)$$

$$W(J, LMAX1) = W(J, LMAX2)$$

Para la velocidad vertical, se tiene la opción de considerar condiciones de reflexión (nulidad de las derivadas segundas en la dirección normal a la frontera), con lo que se puede escribir

$$W(J, LMAX) = 2W(J, LMAX2) - W(J, LMAX4)$$

$$W(J, LMAX1) = (3W(J, LMAX2) - W(J, LMAX4))/2$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right|_{LMAX2} = 0$$

$$T(J,LMAX1) = T(J,LMAX3)$$

$$T(J,LMAX2) = T(J,LMAX3)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{LMAX2} = 0$$

$$\varphi(J,LMAX1) = \varphi(J,LMAX3)$$

$$\varphi(J,LMAX2) = \varphi(J,LMAX3)$$

5.4.4 CONDICIONES LÍMITES PARA LA FRONTERA LIBRE DERECHA.

Las condiciones para esta frontera son de tipo Newman, como se muestra en la Fig. 5.7.

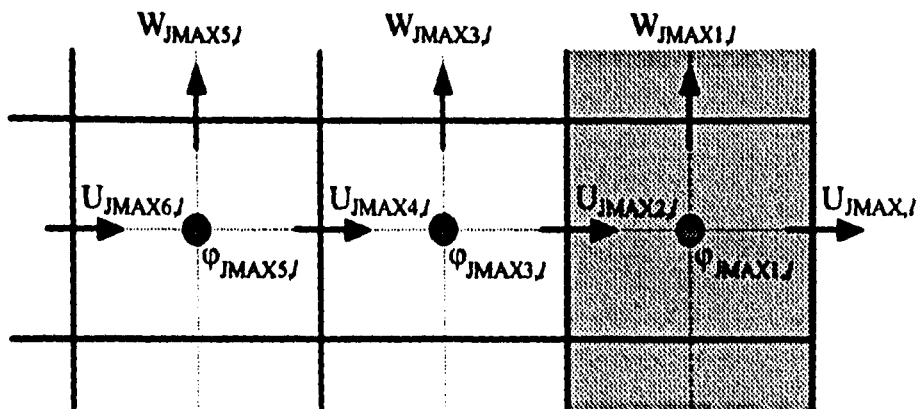


Figura 5.7 Frontera libre derecha.

escribiremos las condiciones para $L = 2, \dots, LMAX1$

$$\left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right|_{LMAX1} = 0$$

$$U(JMAX,L) = U(JMAX2,L)$$

$$U(JMAX1,L) = U(JMAX2,L)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right|_{L_{MAX2}} = 0$$

$$W(JMAX1,L) = W(JMAX3,L)$$

$$W(JMAX2,L) = W(JMAX3,L)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right|_{L_{MAX2}} = 0$$

$$T(JMAX1,L) = T(JMAX3,L)$$

$$T(JMAX2,L) = T(JMAX3,L)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{L_{MAX2}} = 0$$

$$\varphi(JMAX1,L) = \varphi(JMAX3,L)$$

$$\varphi(JMAX2,L) = \varphi(JMAX3,L)$$

5.4.5 CONDICIONES DE FRONTERA PARA LA PARED FICTICIA.

Las condiciones para esta frontera son de deslizamiento, como se muestran en la Fig. 5.8.

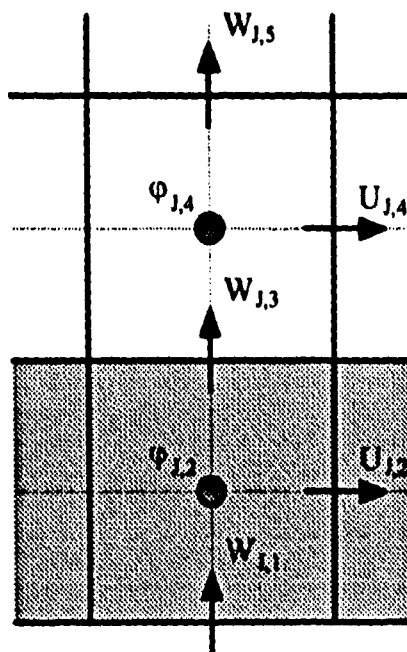


Figura 5.8 Condiciones de frontera para la pared ficticia.

para $J = JB2+1, \dots, JMAX1$

$$\left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right|_3 = 0$$

$$U(J,3) = U(J,4)$$

$$U(J,2) = U(J,4)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right|_4 = 0$$

$$W(J,3) = 0$$

$$W(J,1) = 0$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right|_3 = 0$$

$$T(J,3) = T(J,4)$$

$$T(J,2) = T(J,4)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \right|_3 = 0$$

$$\varphi(J,3) = \varphi(J,4)$$

$$\varphi(J,2) = \varphi(J,4)$$

5.5 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.

En los modelos de turbulencia de orden cero los esfuerzos de Reynolds y el flujo de calor son modelados suponiendo una analogía con los flujos laminares (ver secciones 2.2.1 y 2.2.2). Debido a esto los coeficientes de viscosidad turbulenta juegan un papel importante al momento de describir la evolución de un flujo turbulento, desafortunadamente no existe una forma *precisa* para evaluar dichos coeficientes es por eso que en este trabajo se utilizaron tres modelos de turbulencia alternativos en los cuales se evaluaron de forma diferente los coeficientes ν_{Tj} como se mostrará a continuación.

5.5.1 MODELO CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Los valores encontrados en la literatura para los coeficientes ν_{Tj} varían de forma considerable, dependiendo de las condiciones del medio ambiente que se consideren, como se puede observar en la siguiente tabla.

Clase de estabilidad	$\nu_{T1} = \nu_{T2}$ (m^2s^{-1})	ν_{T3} (m^2s^{-1})	Referencias
Neutra (inestable)	10	10	Gaillard (1978)
	1-10	1-10	Stull (1988)
Estable	10	0.1	Gaillard (1978)

Tabla 5.1 Coeficientes de viscosidad turbulenta.

En este trabajo se evaluaron los ν_{Tj} de forma empírica encontrando un valor aproximado que posteriormente se optimizó numéricamente, se optó además por considerar una atmósfera estable, la cual permite escribir

$$\nu_{T1} = \nu_{T2}$$

Los coeficientes ν_{Tj} se relacionan con K_{Tj} por medio del número de Prandtl turbulento (ec. 2.7) de la siguiente forma

$$K_{Tj} = \frac{\nu_{Tj}}{Pr_T} \quad (5.3)$$

A continuación se presentarán los resultados obtenidos al tomar en cuenta las consideraciones hechas anteriormente.

Se comenzó por fijar el valor del coeficiente ν_{T3} en 0.01, posteriormente se evaluó ν_{T1} empíricamente, optimizándolo hasta encontrar el valor que mejor se ajustara a los datos experimentales.

Para el campo dinámico se puede observar un buen comportamiento en la Fig. 5.9 para el perfil horizontal de la velocidad media en la zona de similitud obtenido con $\nu_{T1} = 0.06$ y $\nu_{T3} = 0.01$.

Los perfiles verticales así como la evolución de la velocidad media para diferentes valores de ν_{T1} se muestran en las Figs. 5.10 y 5.11 respectivamente; en la primera se muestra una gran diferencia con respecto a los datos experimentales, en la segunda los valores se alejan del 10% para la pendiente de evolución encontrada en la bibliografía por diferentes autores.

En las Figs. 5.12 y 5.13 (a y b) se muestra el comportamiento de los mecanismos sobre la horizontal y sobre la vertical respectivamente; se puede decir que existe un comportamiento aceptable de estos si se toma en cuenta que sobre la horizontal la advección y la difusión molecular no son completamente simétricas debido a que la variación de la velocidad con respecto al tiempo no es cero en toda la horizontal, por otra parte sobre la vertical la gravedad tiene una ligera variación que bien pudiera afectar a la advección y la difusión turbulenta para que estas no sean simétricas y puedan anularse.

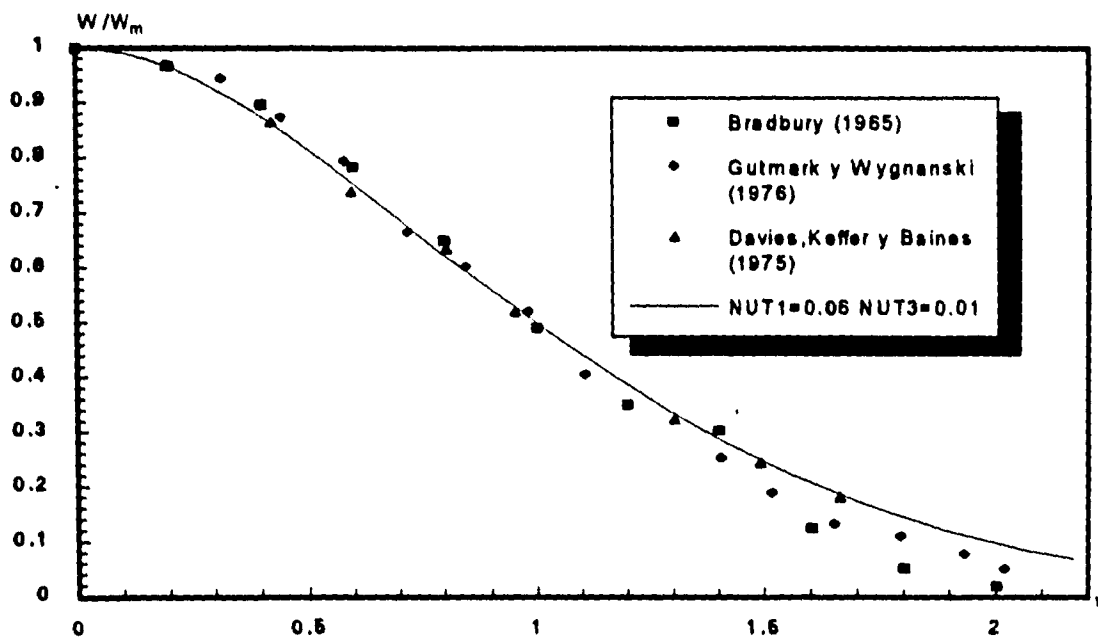


Figura 5.9 Perfil horizontal de la velocidad media en la sección $z/D = 30$.

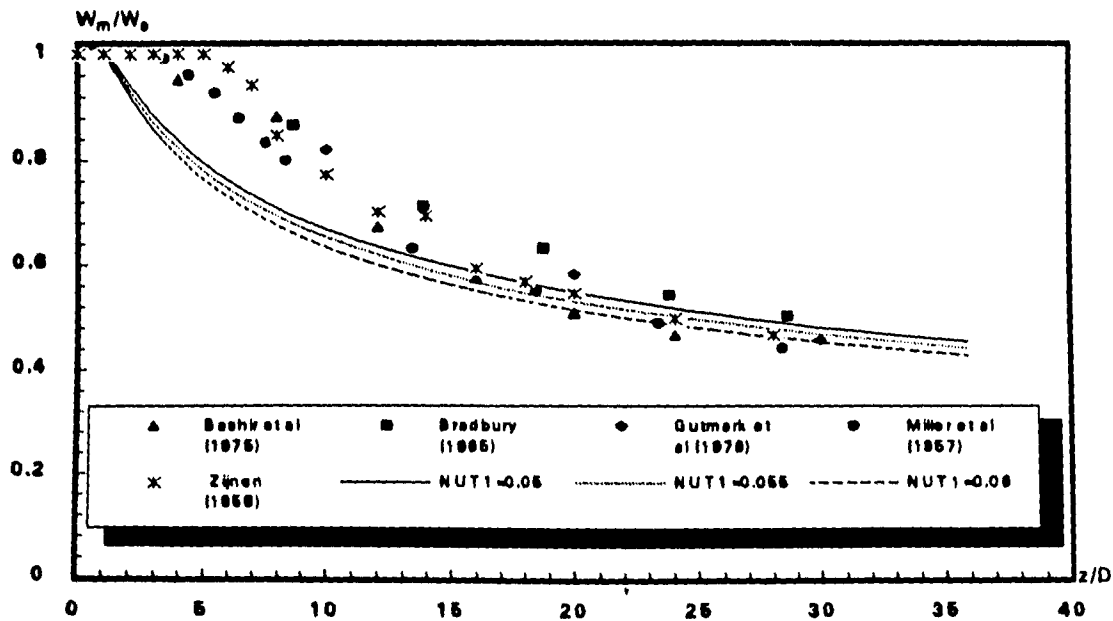


Figura 5.10 Perfiles verticales de la velocidad media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de v_{T1} .

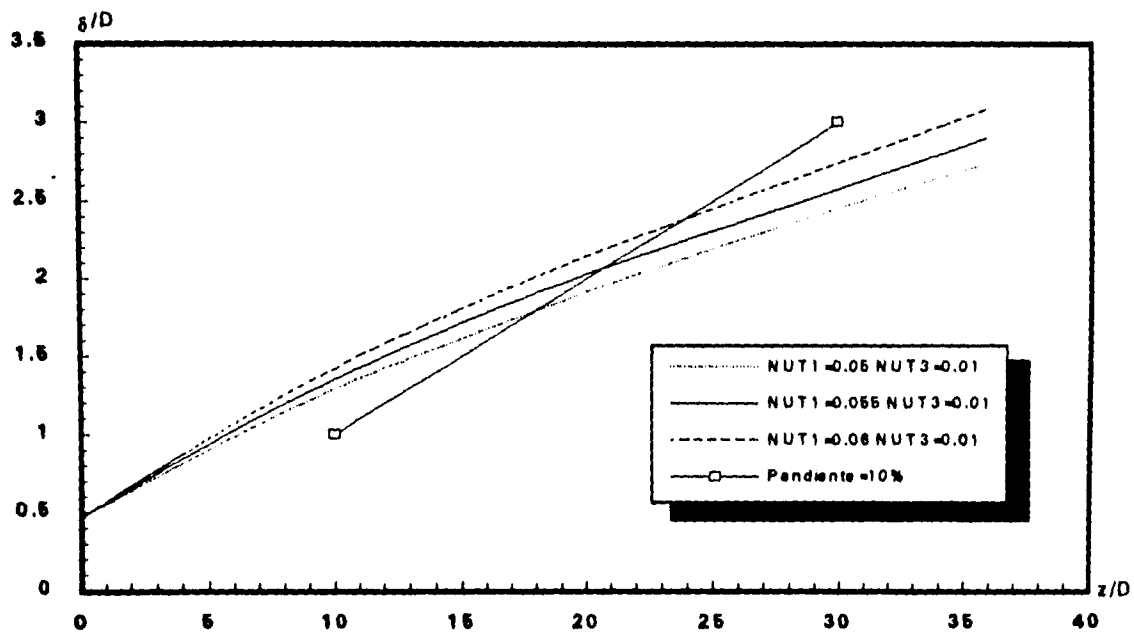


Figura 5.11 Evolución de la velocidad media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de v_{T1} .

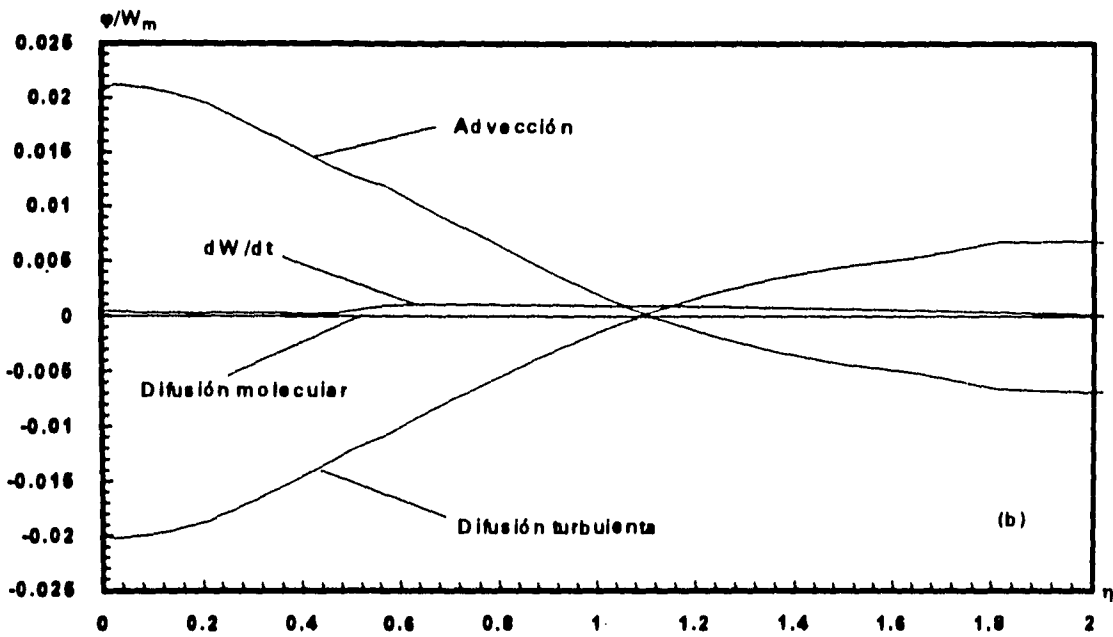
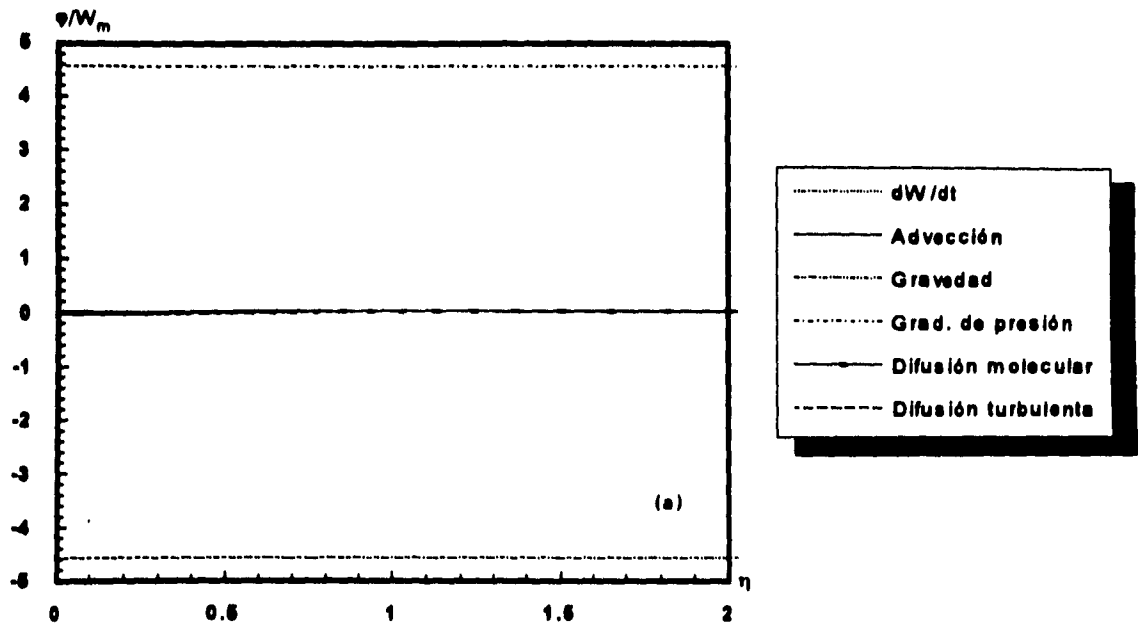


Figura 5.12 Mecanismos para la velocidad media sobre la horizontal en la sección $z/D = 20$.

(a) vista general, (b) acercamiento.

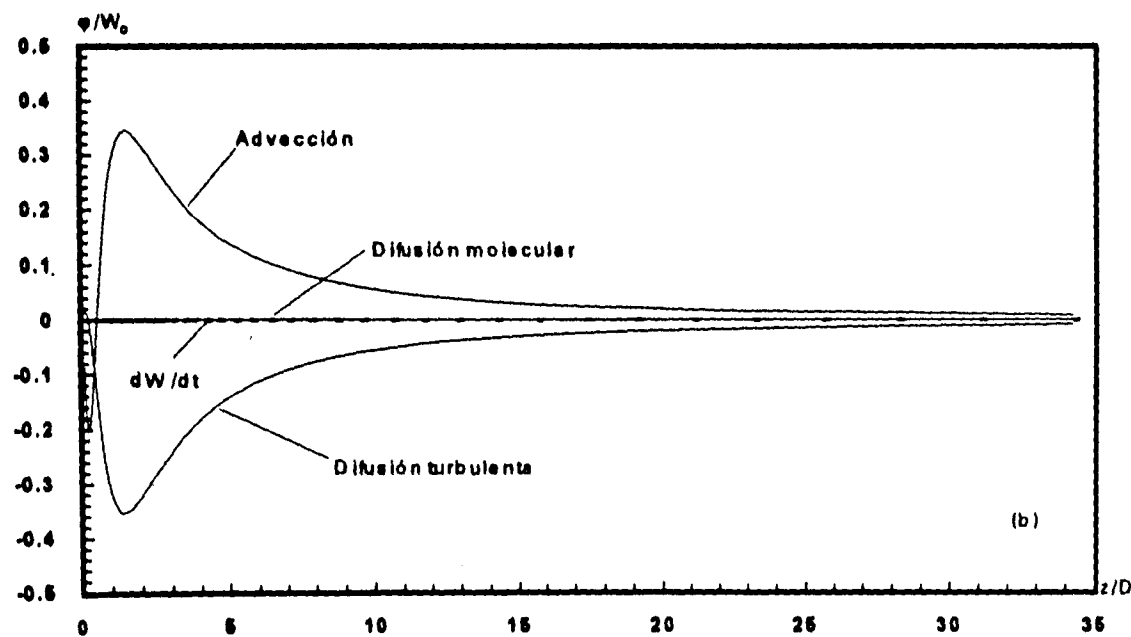
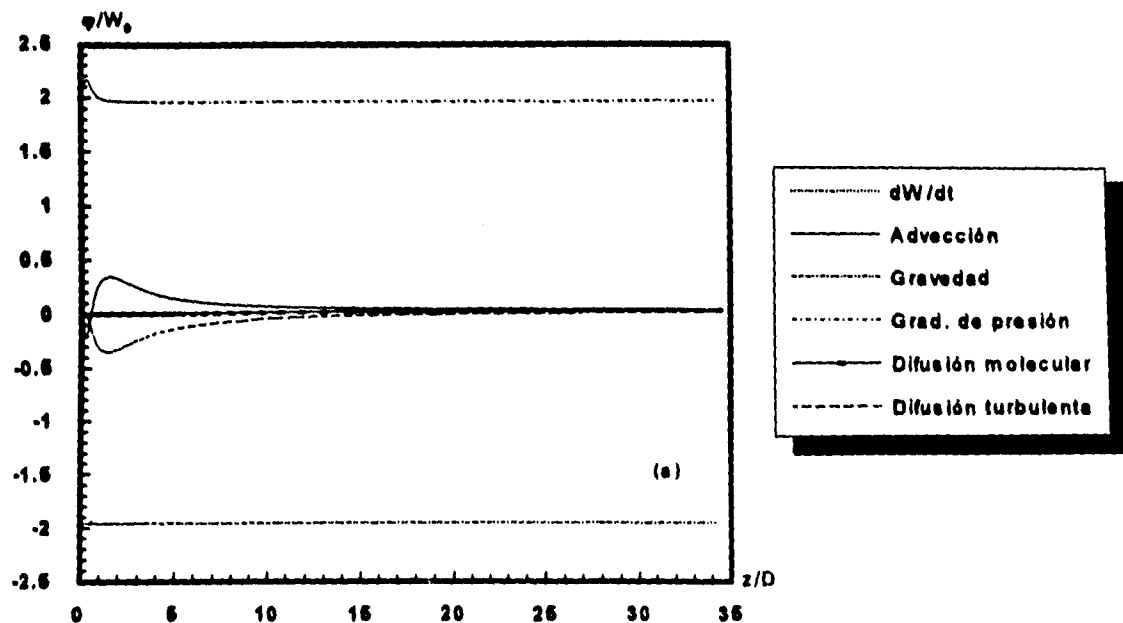


Figura 5.13 Mecanismos para la velocidad media sobre la vertical en la sección $z/D = 20$.

(a) vista general, (b) acercamiento.

Para el campo térmico se muestra un buen comportamiento para el perfil horizontal de la temperatura media con $\nu_{T1} = 0.06$ y $\nu_{T3} = 0.01$ en la Fig. 5.14.

Los perfiles verticales y la evolución de la temperatura media para diferentes valores del número de Prandtl se muestran en las Figs. 5.15 y 5.16 respectivamente; en la primera hay una gran diferencia con respecto a los datos experimentales, para la segunda los resultados muestran aún una mayor discrepancia.

En las Figs. 5.17 y 5.18 se presenta el comportamiento de los mecanismos para la temperatura media sobre la horizontal y sobre la vertical respectivamente; se puede observar un buen comportamiento en ambas debido a que los mecanismos de advección y difusión turbulenta son simétricos y opuestos para los dos casos.

Por último en la Fig. 5.19 se muestran las curvas de isovalores tanto para la velocidad como para la temperatura; en la primera se puede observar un buen comportamiento mientras que en la segunda se presenta una dispersión cerca de la chimenea, se puede verificar con la Fig. 5.15 que aproximadamente en la sección 10 las curvas no siguen el comportamiento deseado éstas se aproximan a líneas verticales.

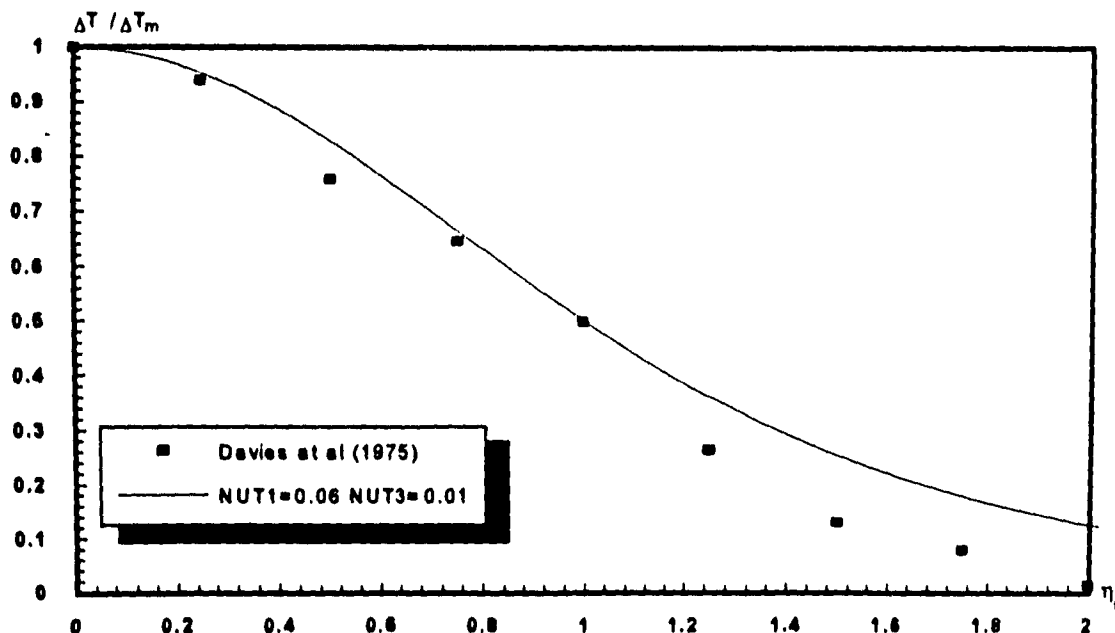


Figura 5.14 perfil horizontal de la temperatura media en la sección $z/D = 30$.

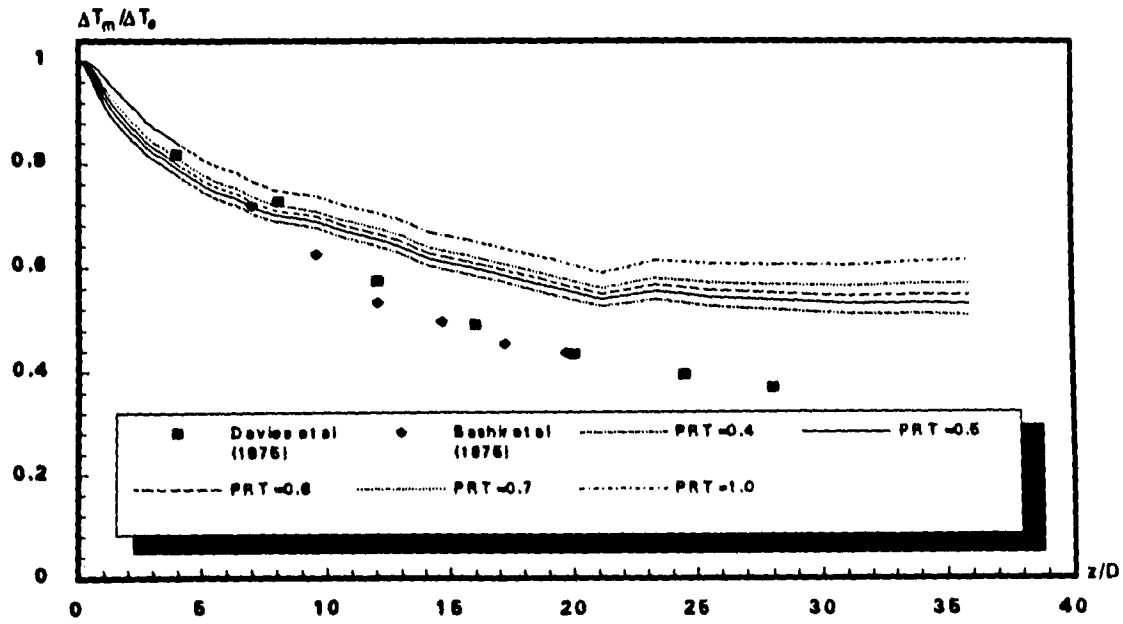


Figura 5.15 Perfiles verticales de la temperatura media en la sección $z/D = 30$.
para diferentes valores de $Pr\gamma$.

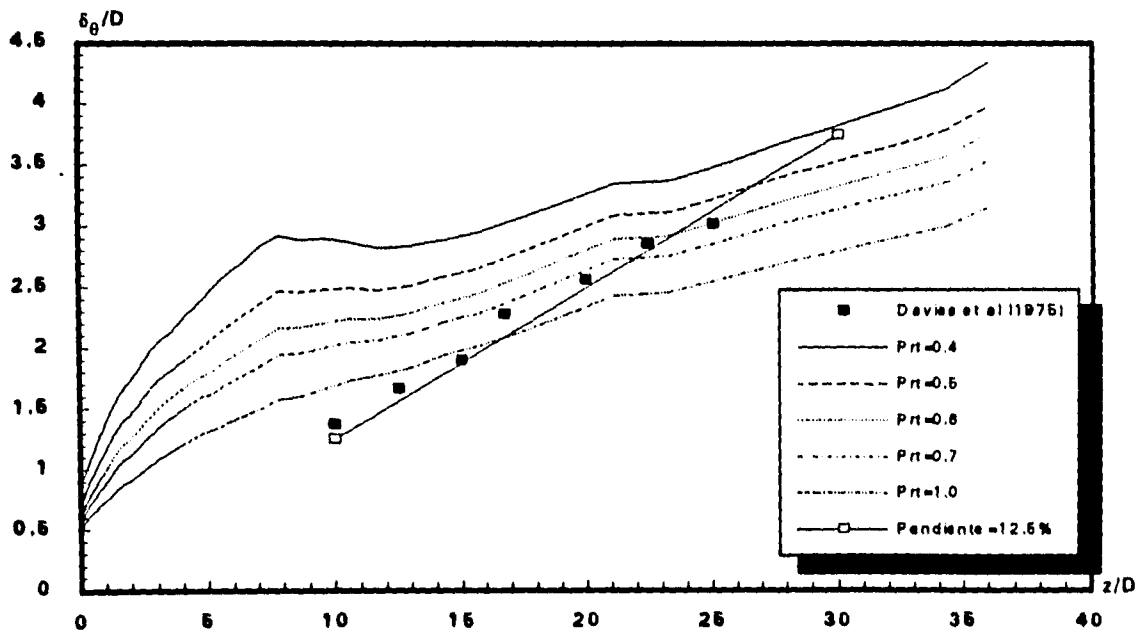


Figura 5.16 Evolución de la temperatura media en la sección $z/D = 30$
para diferentes valores de $Pr\gamma$.

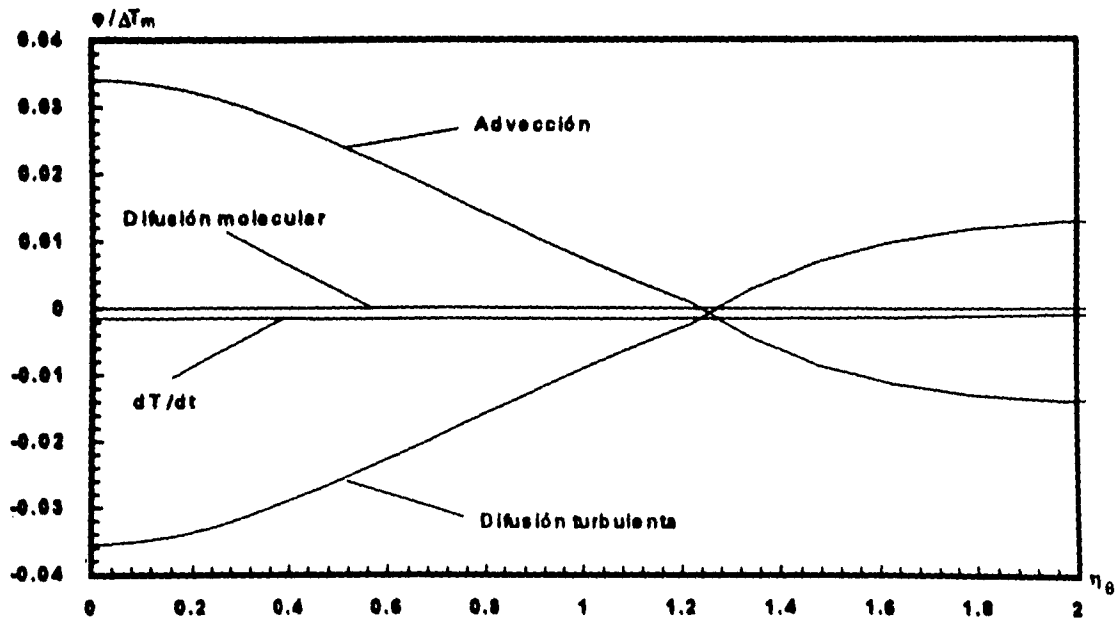


Figura 5.17 Mecanismos para la temperatura media sobre la horizontal en la sección $z/D = 20$.

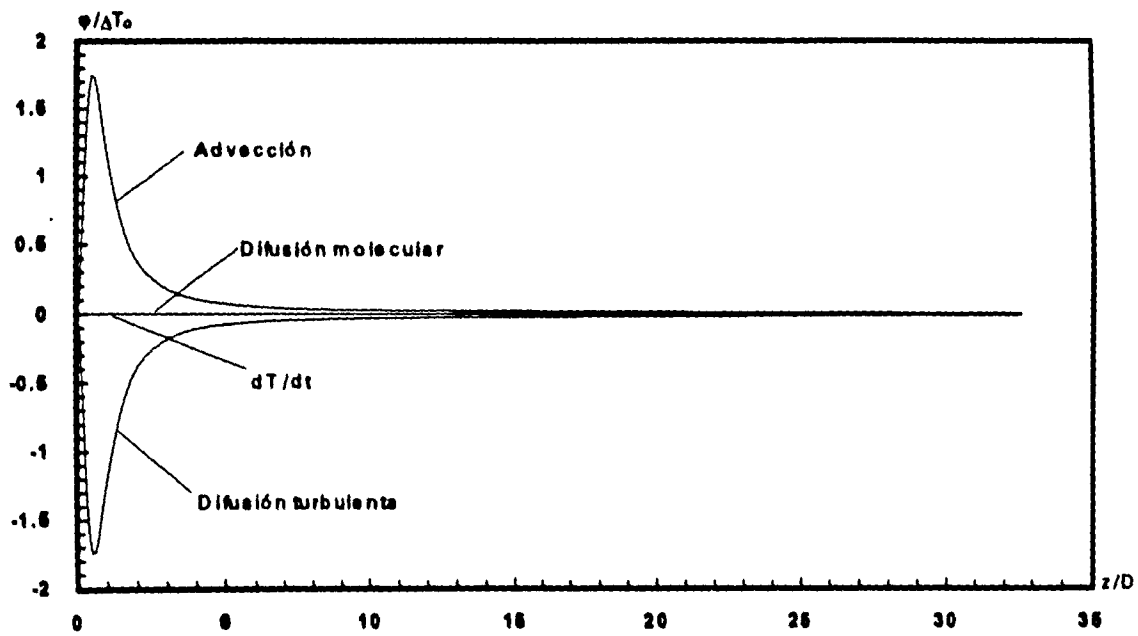


Figura 5.18 Mecanismos para la temperatura media sobre la vertical en la sección $z/D = 20$.

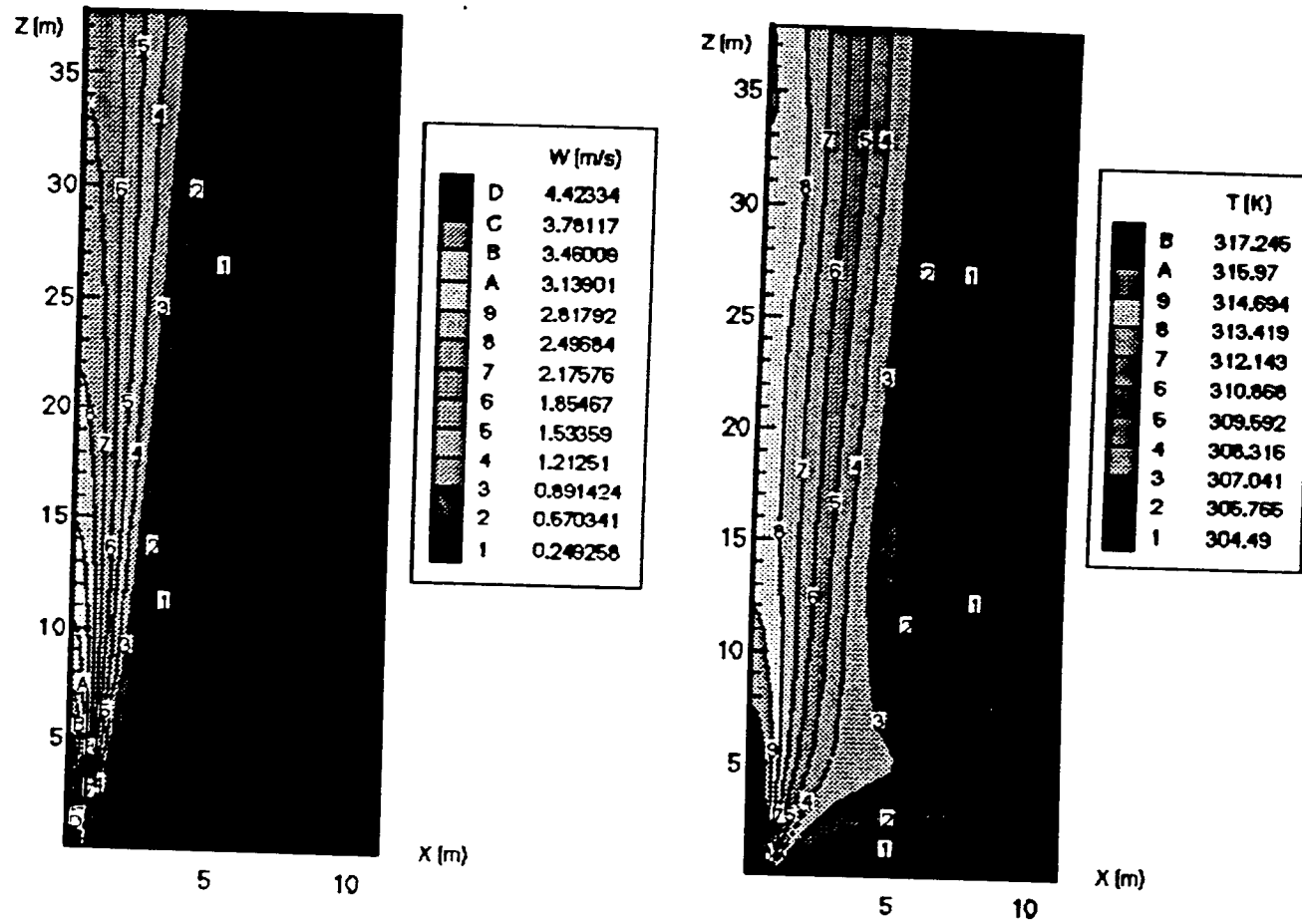


Figura 5.19 Curvas de isovalores para la velocidad y temperatura con coeficientes de viscosidad turbulenta constantes.

5.5.2 MODELO SEMIEMPÍRICO.

La utilización de la ecuación (2.3) necesita conocer de antemano la velocidad en el eje vertical, evidentemente esto no acontece, por lo que se ha decidido utilizar la ley que describe la evolución de la velocidad sobre el eje (ec. 4.13). La relación se escribe entonces como

$$v_T = \psi A_w W_0 \left(\frac{z_D}{D} \right)^{-1/2} (z_D + \alpha D) \quad (5.4)$$

que está en función de la velocidad de emisión y de la constante empírica $A_w = 2.4$ consideraremos en este trabajo a $\alpha = 1$.

Se comenzó por dar un valor inicial al parámetro ψ igual a 0.001, después se procedió a fijar dos valores; uno mayor (0.009) y otro menor (0.0001), a medida que se obtuvieron los resultados se procedió a reducir el intervalo de acotamiento hasta encontrar un valor para ψ igual a 0.002.

Para el campo dinámico se puede observar un buen comportamiento con respecto a los datos experimentales. La Fig. 5.20 muestra los perfiles horizontales de la velocidad media obtenidos con diferentes valores de ψ .

Los perfiles verticales así como la evolución de la velocidad media para diferentes valores de ψ se muestran en las Figs. 5.21 y 5.22 respectivamente; en la primera se muestra una menor diferencia con respecto a los datos experimentales que la presentada con los v_{Tj} constantes, en la segunda los valores se acercan al valor de 10% para la pendiente de evolución.

La Fig. 5.25 muestra el comportamiento de v_{Tj} con respecto a z para diferentes valores de ψ .

En las Figs. 5.24 y 5.25 (a y b) se muestran los mecanismos sobre la horizontal y sobre la vertical respectivamente; se puede decir que existe un buen comportamiento sobre la horizontal, destacando solamente que la variación de la velocidad con respecto al tiempo no es completamente cero, por otra parte sobre la vertical se puede notar una ligera variación en el comportamiento de la difusión turbulenta debido quizá a la variación de la gravedad sobre esta misma línea.

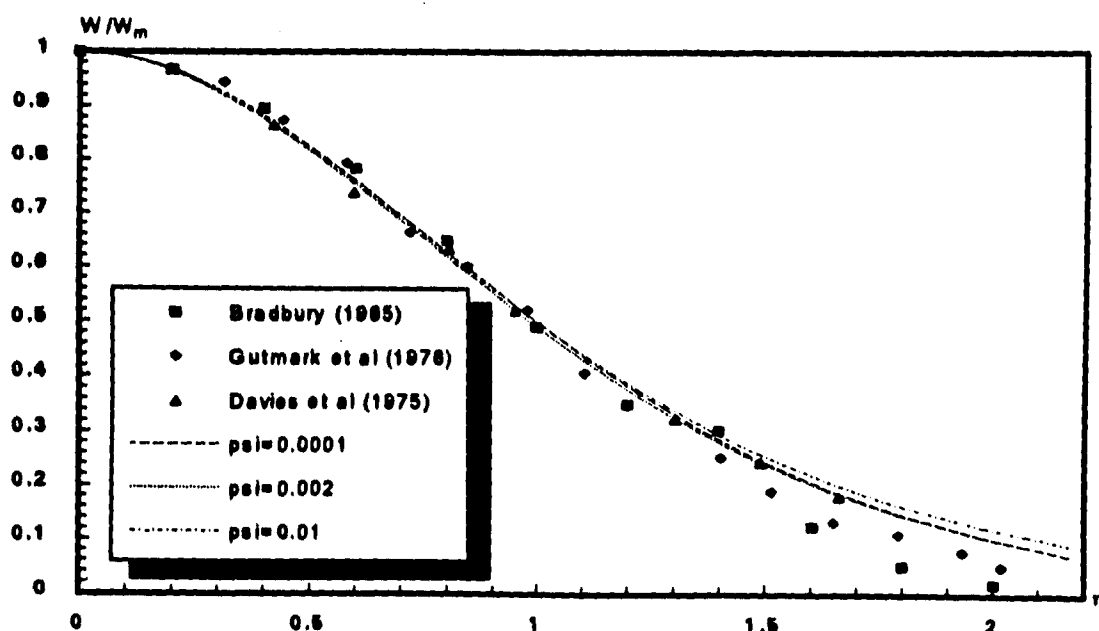


Figura 5.20 Perfiles horizontales de la velocidad media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de ψ

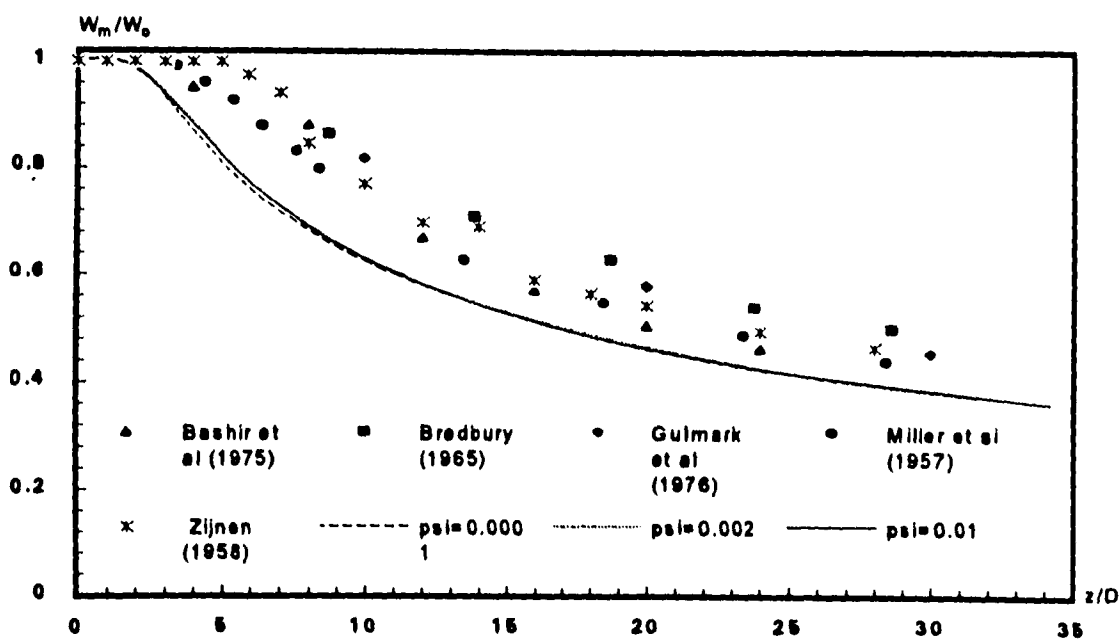


Figura 5.21 Perfiles verticales de la velocidad media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de ψ .

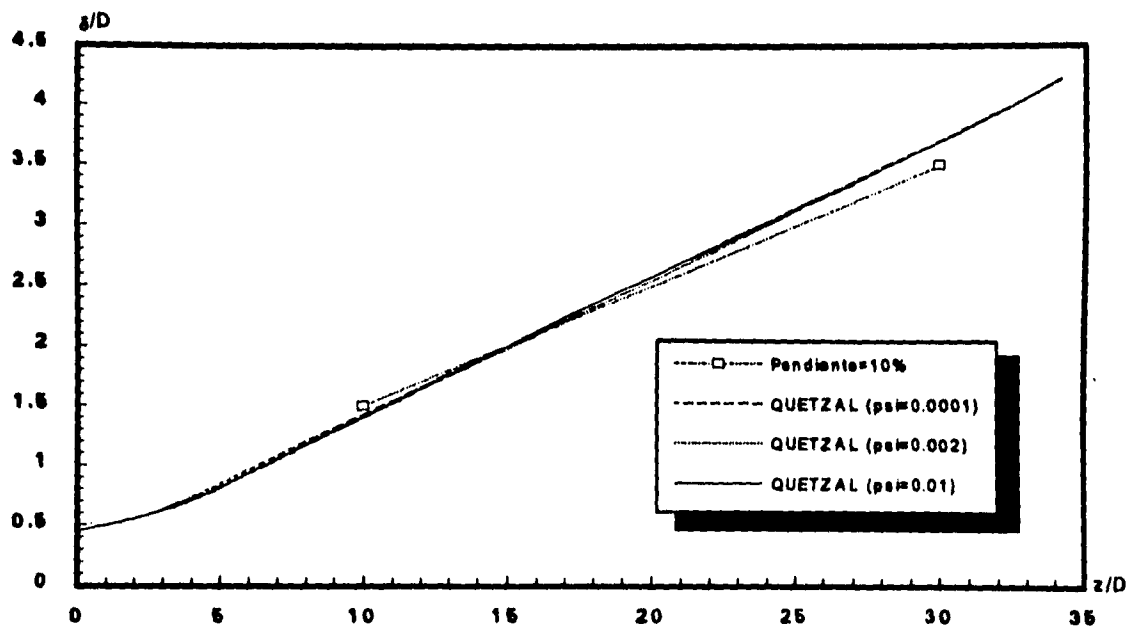


Figura 5.22 Evolución de la velocidad media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de ψ

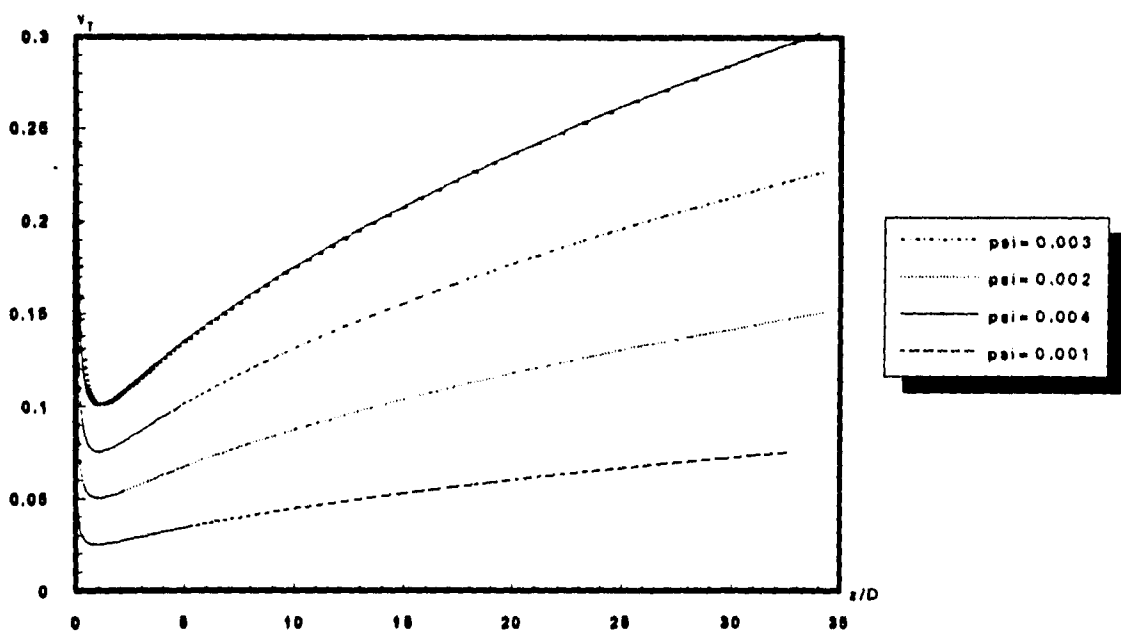


Figura 23 Gráfica de v_T para diferentes valores de ψ .

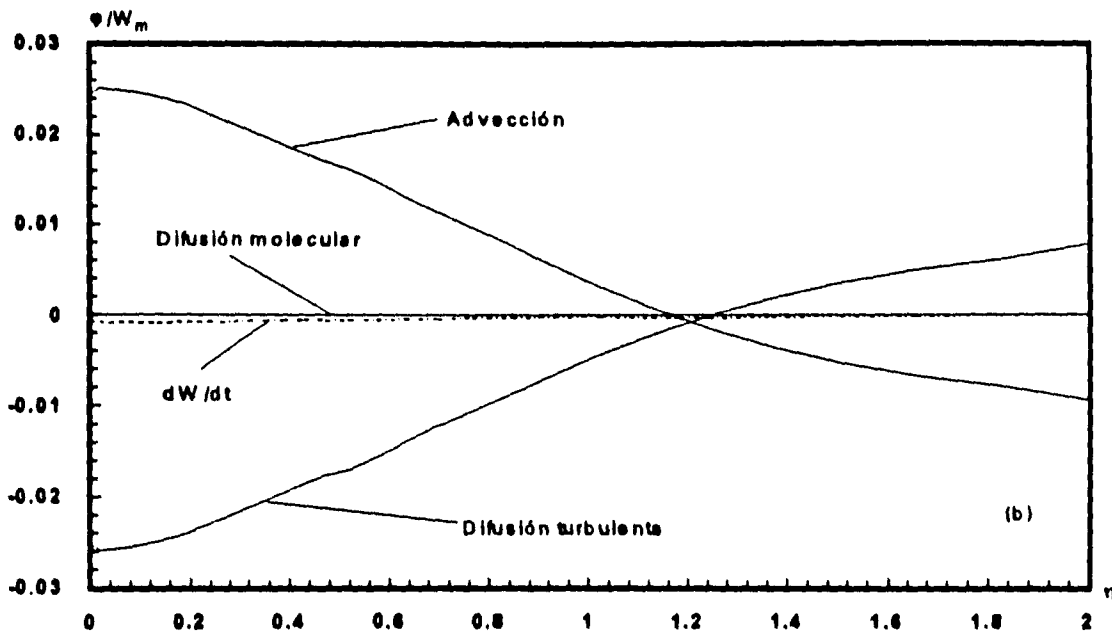
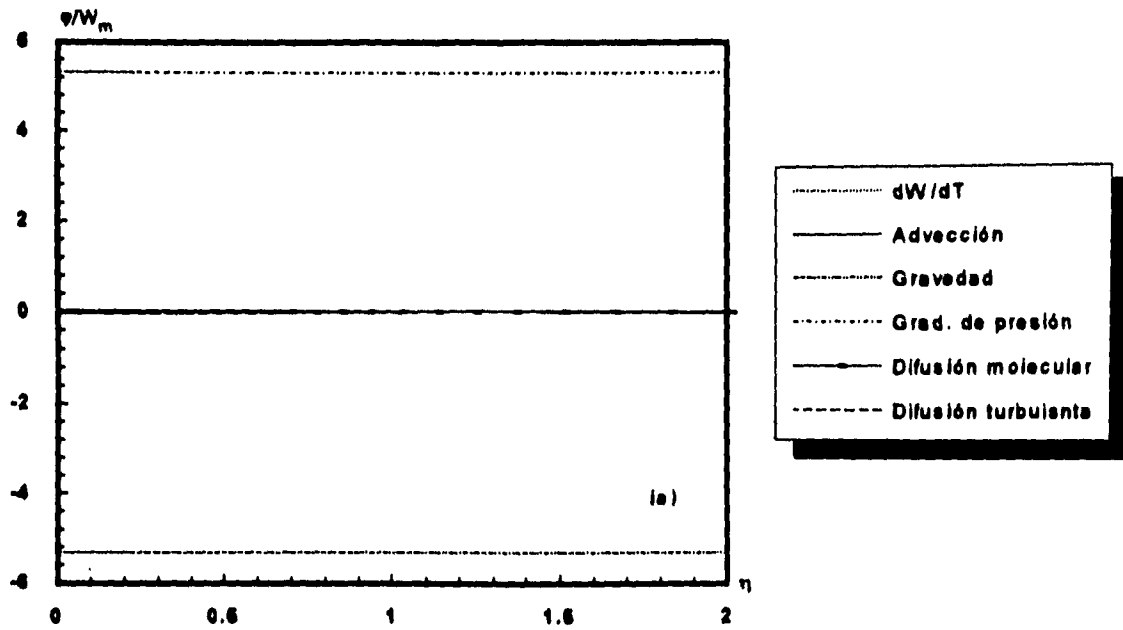


Figura 5.24 Mecanismos para la velocidad media sobre la horizontal en la sección $z/D = 20$.
(a) vista general, (b) acercamiento.

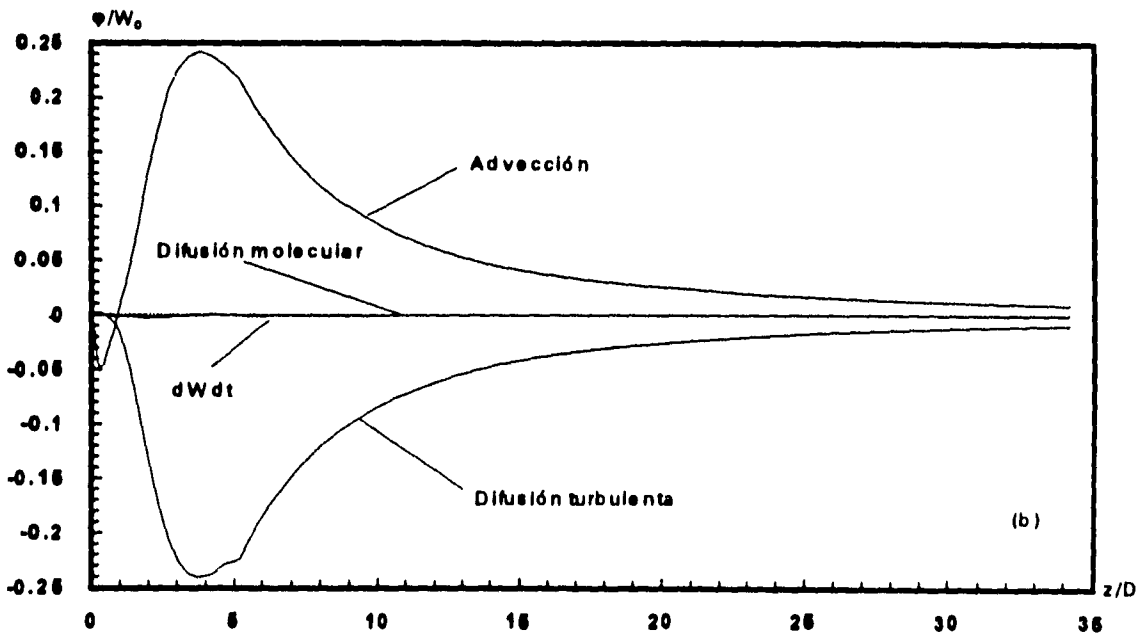
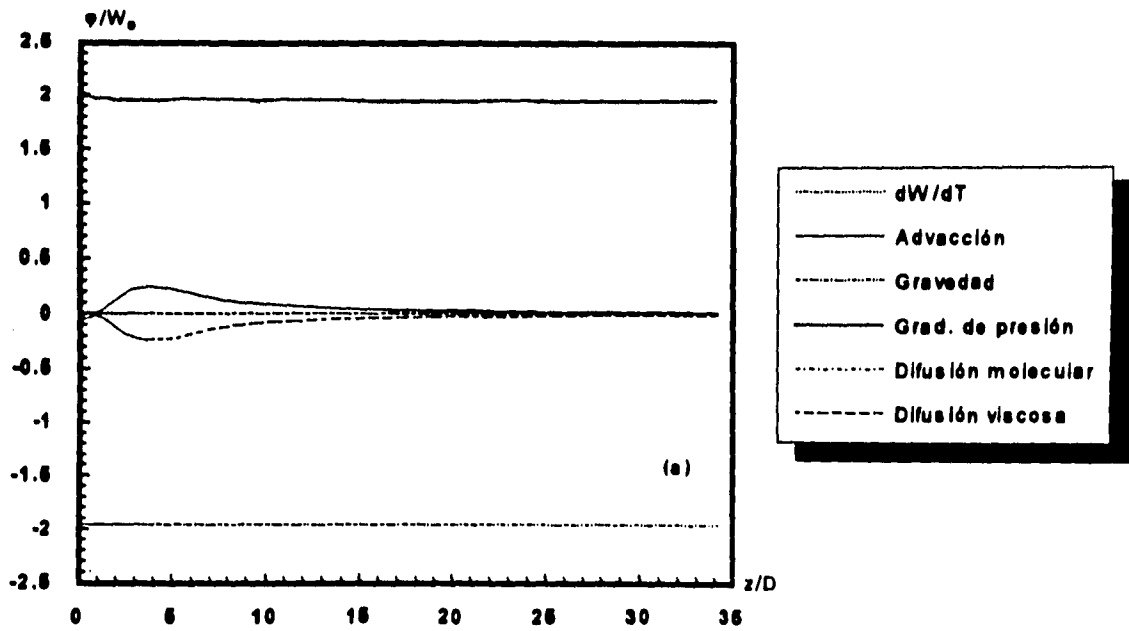


Figura 5.25 Mecanismos para la velocidad media sobre la vertical en la sección $z/D = 20$.

(a) vista general, (b) acercamiento.

Para el campo térmico se muestra un buen comportamiento en el perfil horizontal de la temperatura media para $\psi = 0.002$ mostrado en la Fig. 5.26.

Los perfiles verticales y la evolución de la temperatura media se muestran en las Figs. 5.27 y 5.28 respectivamente; como se puede observar en la primera hay una diferencia con respecto a los datos experimentales, para la segunda los resultados muestran aún una mayor discrepancia.

En las Figs. 5.29 y 5.30 se presenta el comportamiento de los mecanismos para la temperatura media sobre la horizontal y sobre la vertical respectivamente; se puede observar un buen comportamiento en ambas debido a que los mecanismos de advección y difusión turbulenta son simétricos y opuestos para los dos casos.

En la Fig. 5.31 se muestra la convergencia de la velocidad y temperatura medias con respecto al número de iteraciones; la diferencia en las pendientes de convergencia se debe a que se considera una convergencia absoluta y no relativa.

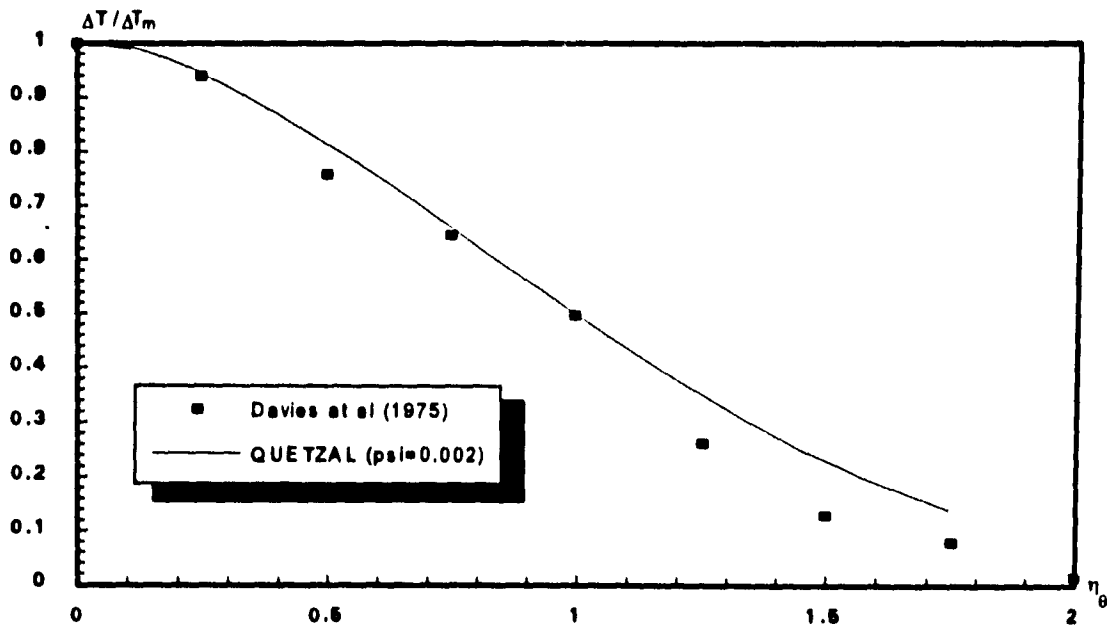


Figura 5.26 Perfiles horizontales de la temperatura media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de ψ

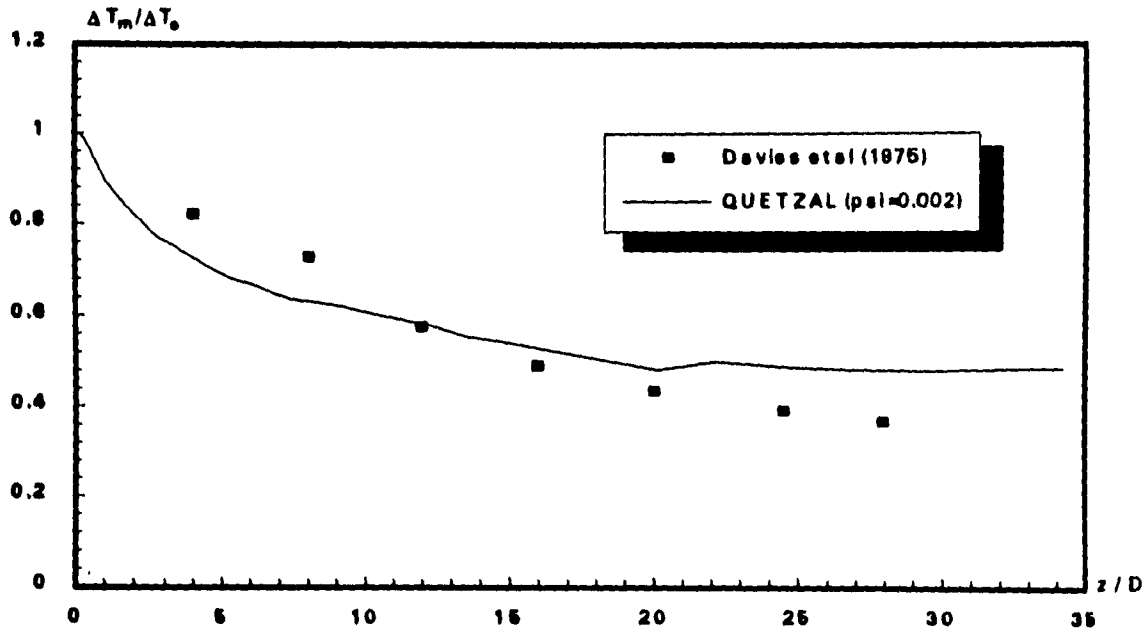


Figura 5.27 Perfiles verticales de la temperatura media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de ψ .

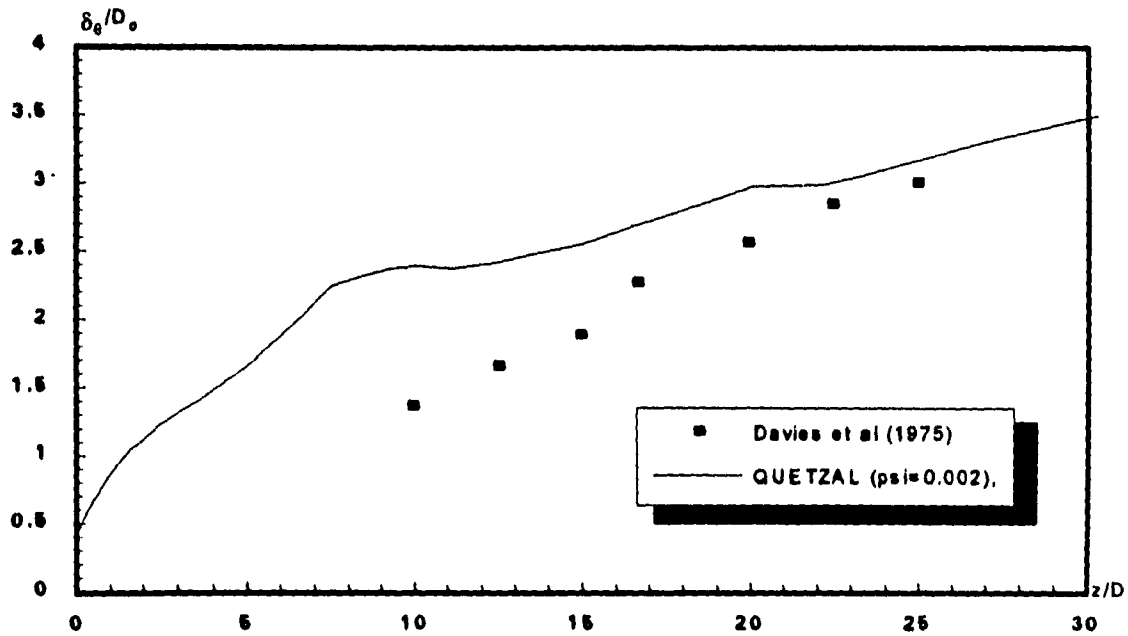


Figura 5.28 Evolución de la temperatura media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de ψ

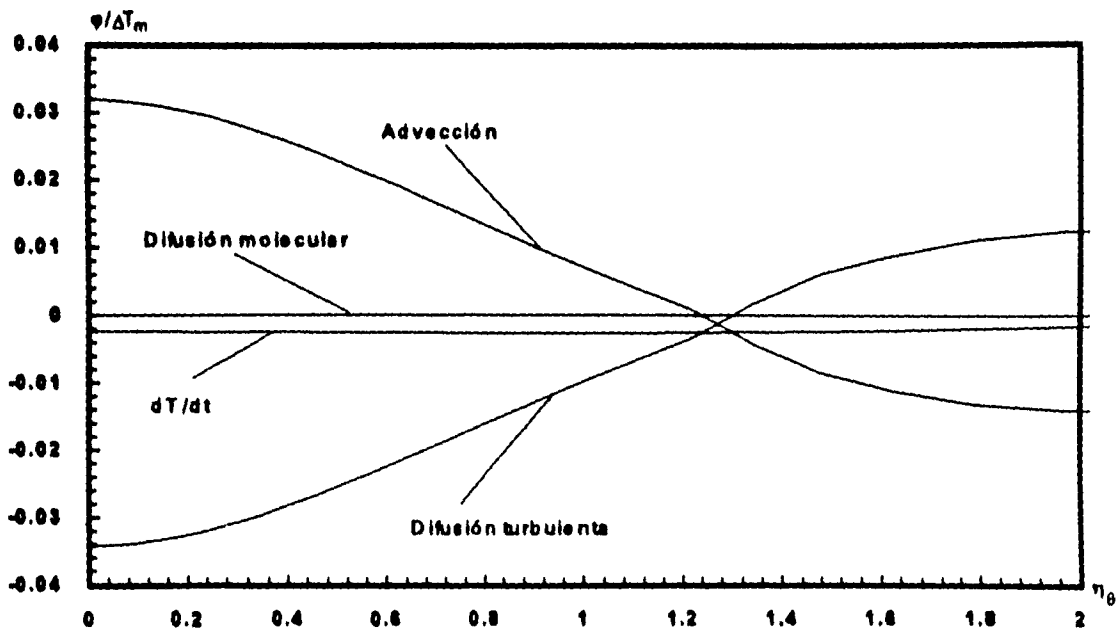


Figura 5.29 Mecanismos para la temperatura media sobre la horizontal en la sección $z/D = 20$.

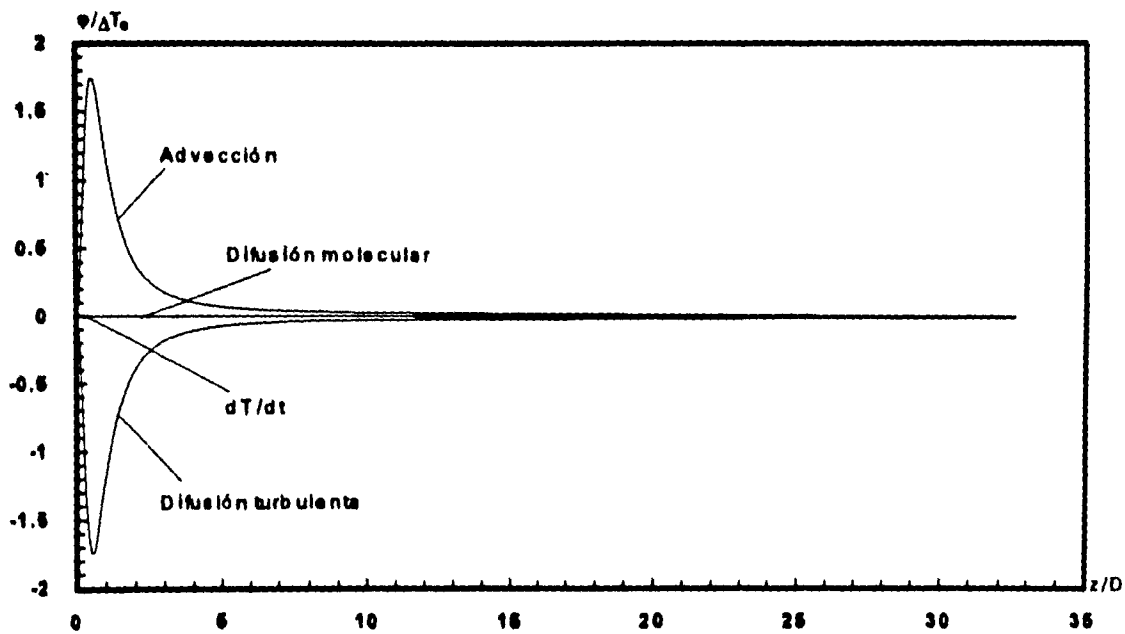


Figura 5.30 Mecanismos para la temperatura media sobre la vertical en la sección $z/D = 20$.

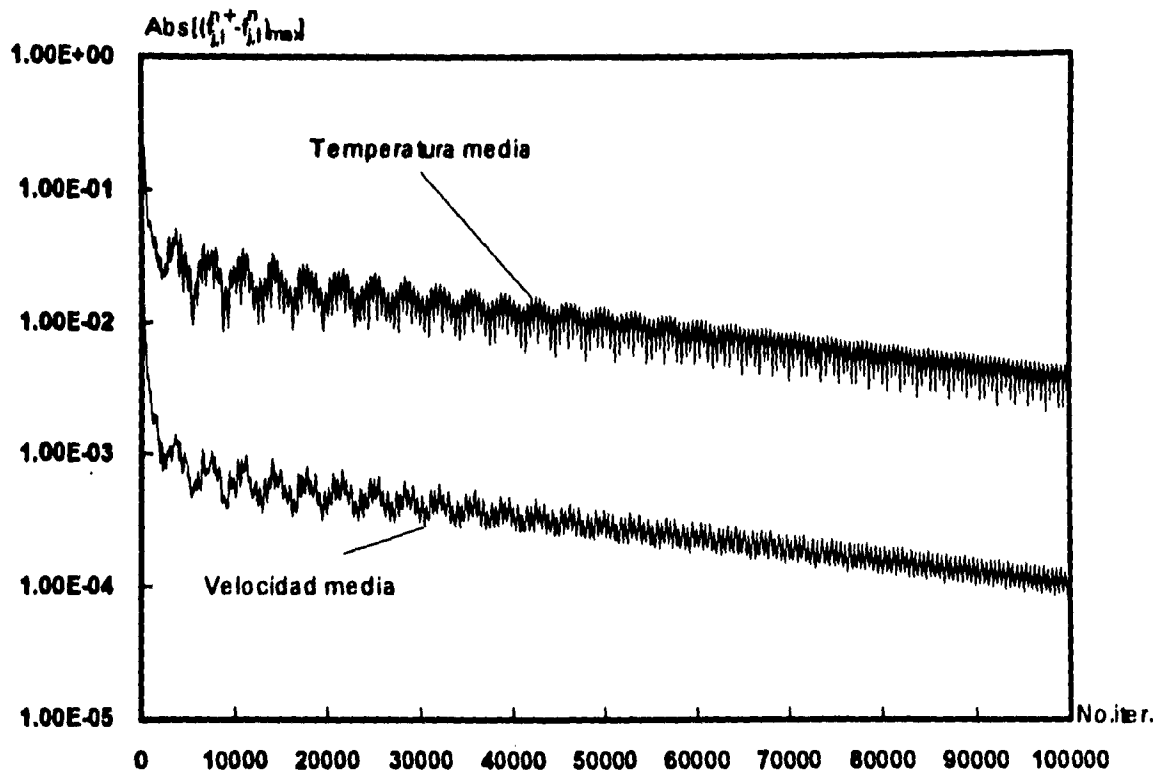


Figura 5.31 Convergencia de la velocidad y la temperatura medias.

Finalmente en la Fig. 5.32 se muestran las curvas de isovalores tanto para la velocidad como para la temperatura; en la primera se muestra un buen comportamiento, destacando solamente que a partir de la sección 30 empieza a haber una disipación, lo que no sucedió con el modelo anterior, por otra parte en la segunda el comportamiento de la curva mejoró notablemente, si bien persiste todavía una leve disipación a la salida de la chimenea las curvas tienen un mejor comportamiento que con el modelo de v_T constantes.

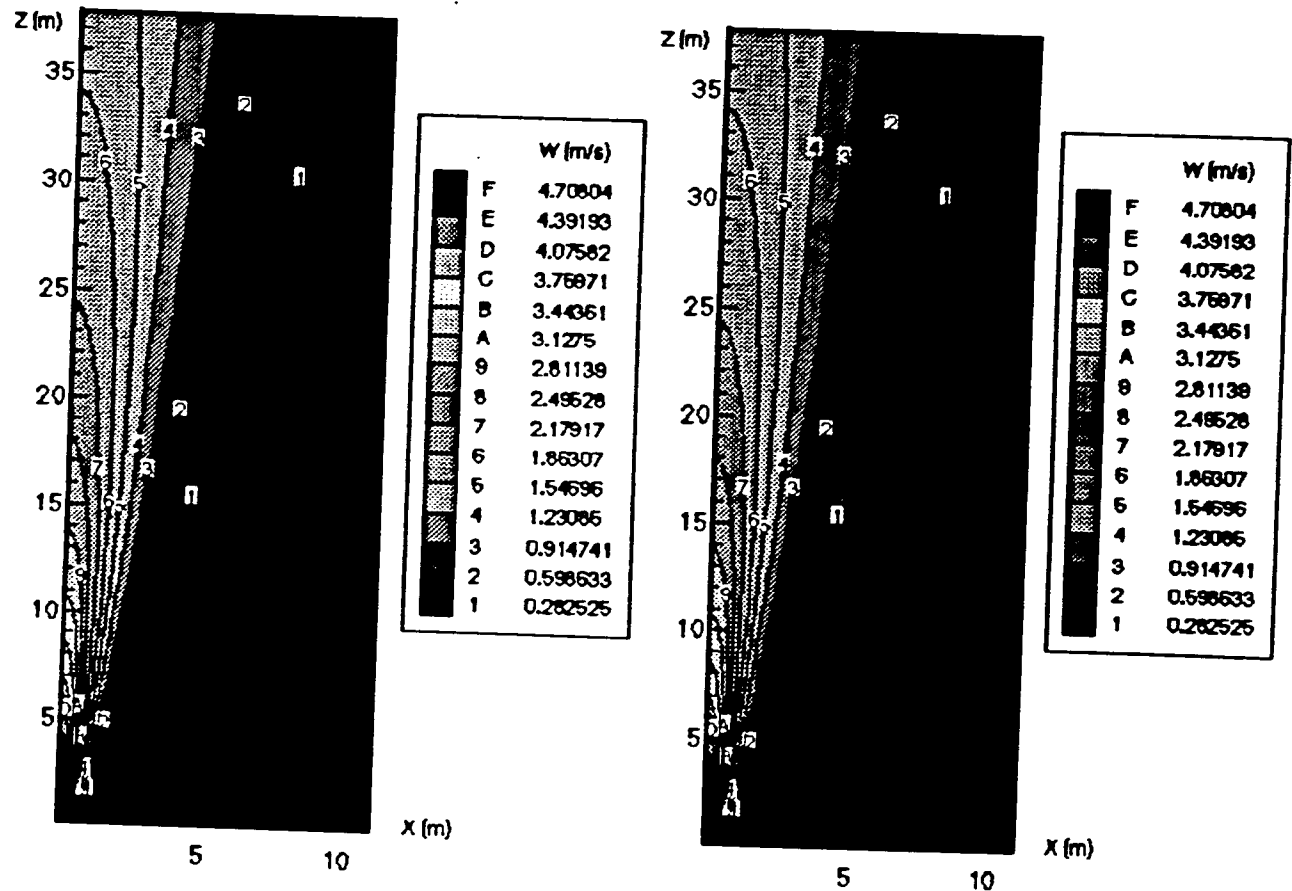


Figura 5.32 Curvas de isovalores para la velocidad y temperatura con coeficientes de viscosidad turbulenta calculados con $\psi = 0.002$.

5.5.3 MODELO DERIVADO DE κ - ϵ .

Para encontrar los campos dinámico y térmico para este modelo, v_T se obtiene por medio de evaluaciones previas de la energía cinética de la turbulencia (κ) y de su disipación (ϵ), mediante la relación (2.10), con $C_\mu = 0.09$.

Para el campo dinámico se puede observar un buen comportamiento con respecto a los datos experimentales. La Fig. 5.33 muestra los perfiles horizontales de la velocidad media obtenidos con diferentes valores de v_T calculados con el modelo κ - ϵ .

El perfil vertical así como la evolución de la velocidad media se muestran en las Figs. 5.34 y 5.35 respectivamente; en la primera se muestra una menor diferencia con respecto a los datos experimentales que la presentada con los modelos anteriores, en la segunda la pendiente no se acerca al valor de 10% tan bien como los valores mostrados en la Fig. 5.22.

En la Fig. 5.36 se muestra una comparación de los valores de v_T sobre la vertical tanto para este modelo como para el anterior con diferentes valores de ψ , se puede observar que el valor de ψ para el cual la curva de v_T se ajusta a la calculada con este modelo es de 0.002, como se pudo deducir anteriormente.

En las Figs. 5.37 y 5.38 (a y b) se muestra el comportamiento de los mecanismos sobre la horizontal y sobre la vertical respectivamente; sobre la horizontal la variación de la velocidad con respecto al tiempo difiere solo un poco de cero, por otra parte sobre la vertical se puede notar una variación en el comportamiento de la difusión turbulenta debido nuevamente a la variación de la gravedad sobre esta misma línea.

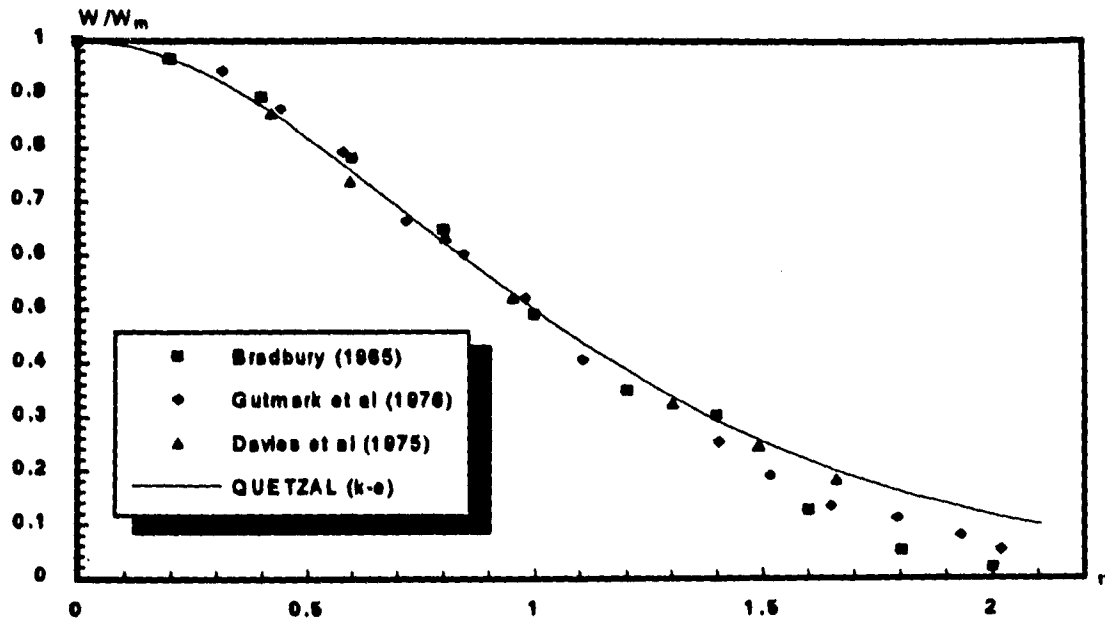


Figura 5.33 Perfiles horizontales de la velocidad media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de v_T calculados con el modelo $\kappa\text{-}\epsilon$.

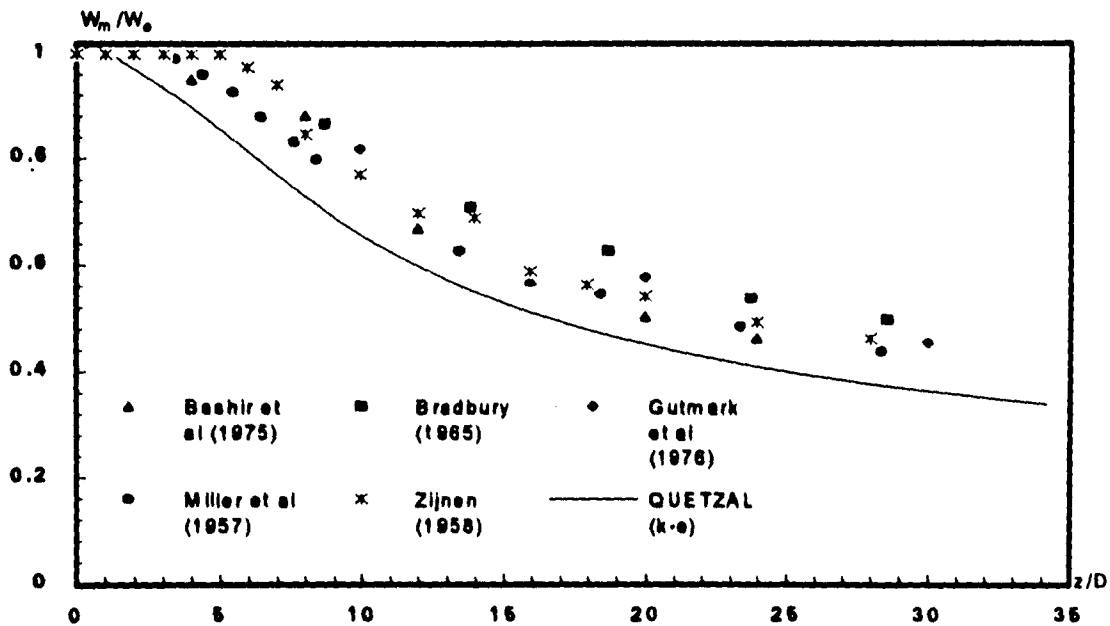


Figura 5.34 Perfiles verticales de la velocidad media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de v_T calculados con el modelo $\kappa\text{-}\epsilon$.

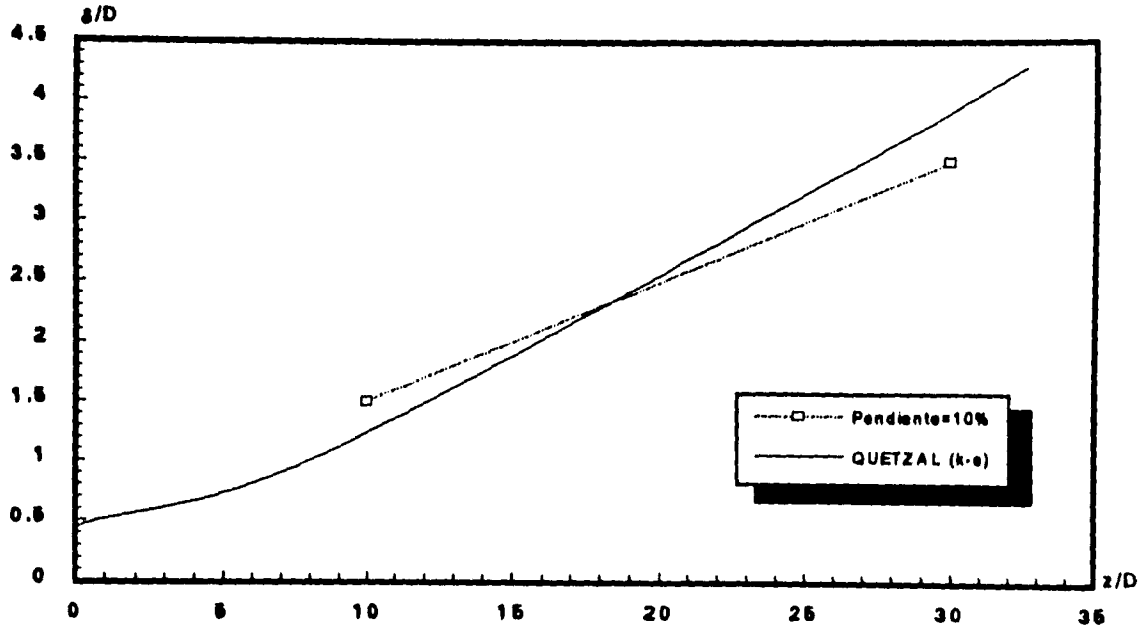


Figura 5.35 Evolución de la velocidad media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de v_T calculados con el modelo $\kappa-\epsilon$.

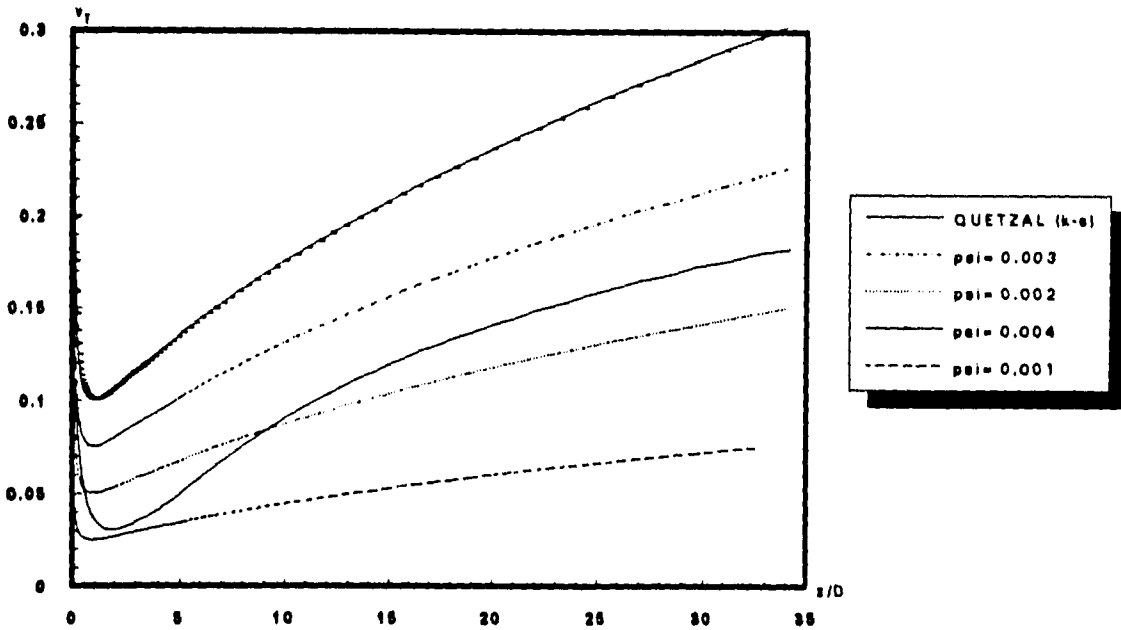


Figura 5.36 Comportamiento de v_T para diferentes valores de ψ y con el modelo $\kappa-\epsilon$.

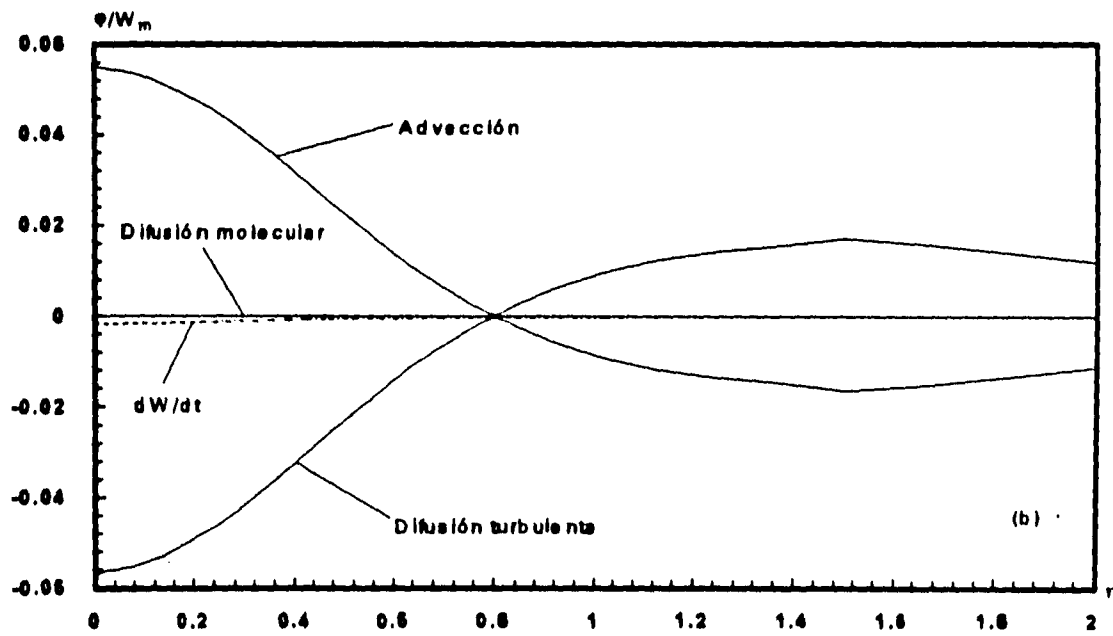
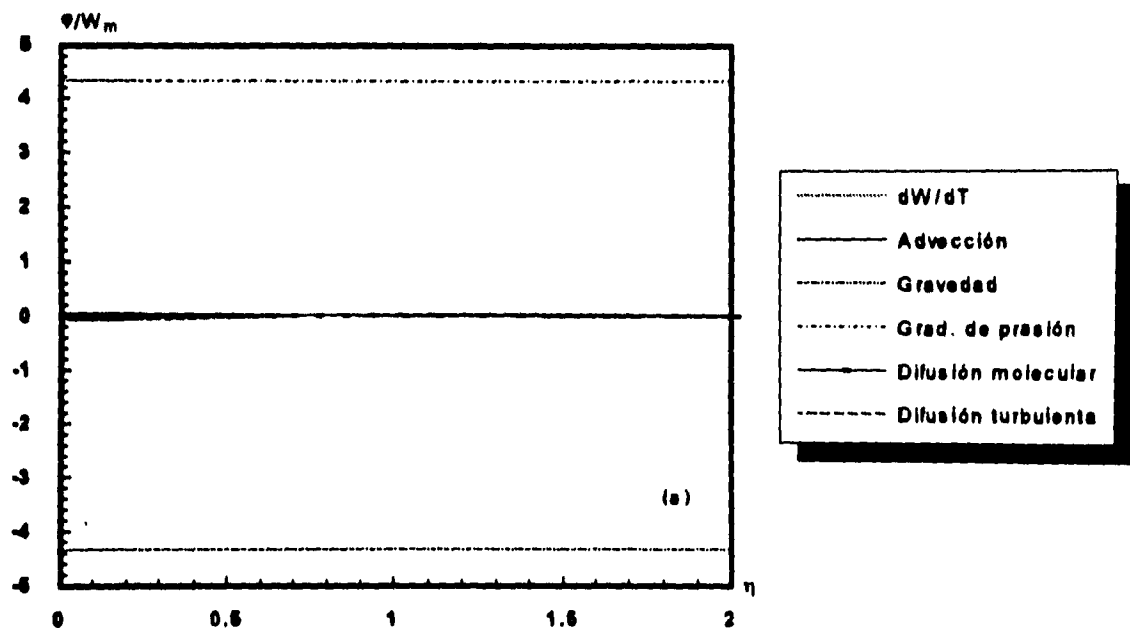


Figura 5.37 Mecanismos para la velocidad media sobre la horizontal en la sección $z/D = 20$.

(a) vista general, (b) acercamiento.

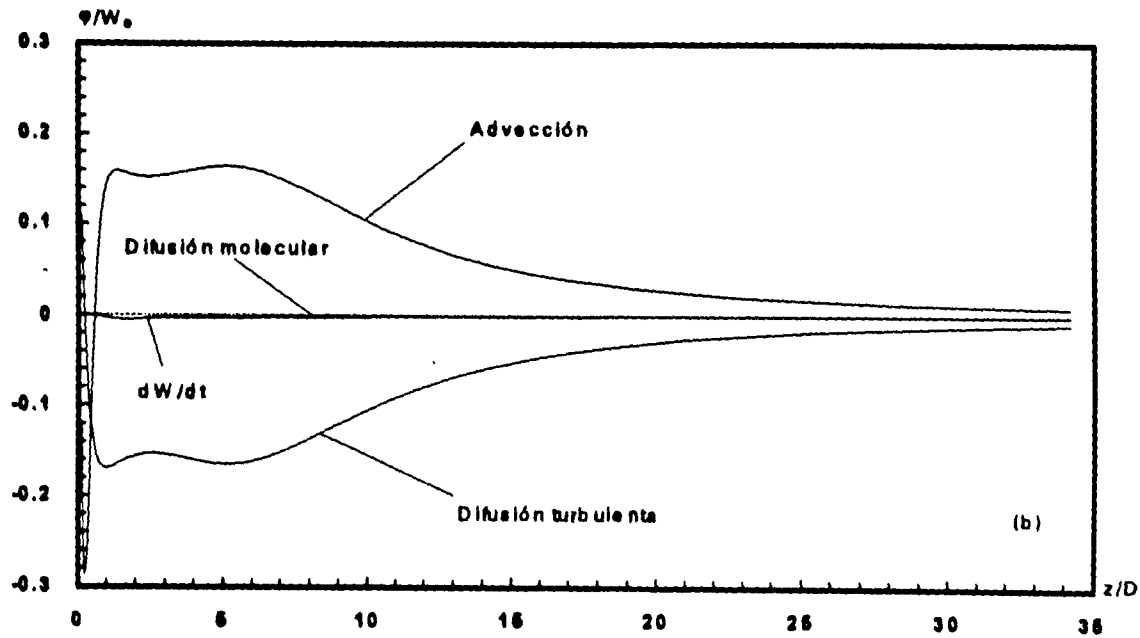
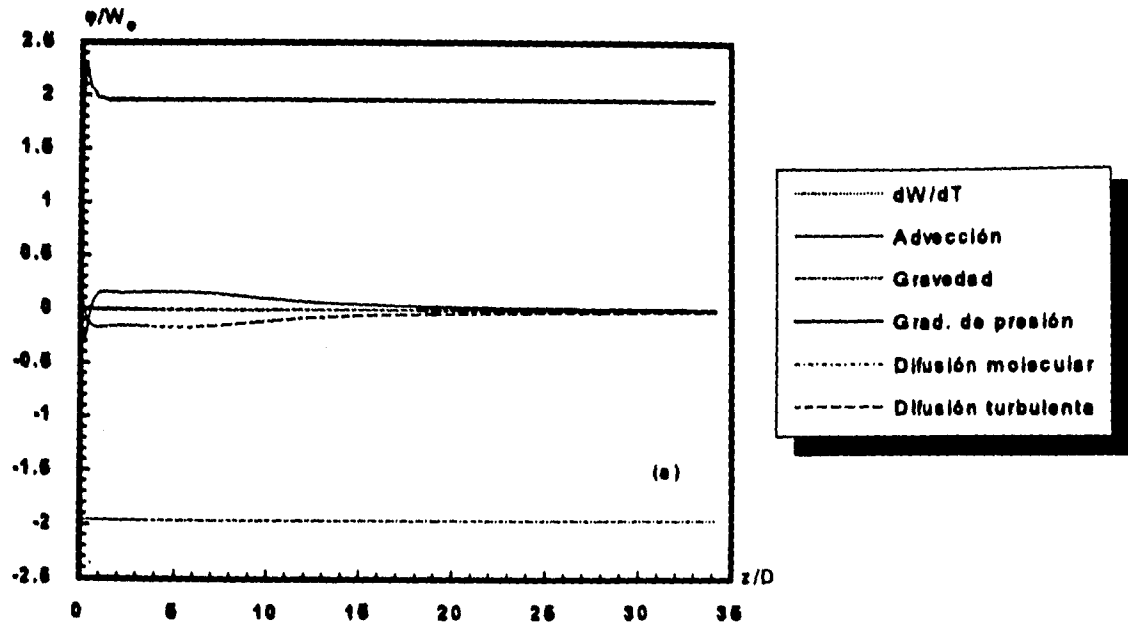


Figura 5.38 Mecanismos para la velocidad media sobre la vertical en la sección $z/D = 20$.

(a) vista general, (b) acercamiento.

Para el campo térmico se muestra un comportamiento satisfactorio para el perfil horizontal de la temperatura media mostrado en la Fig. 5.39.

Los perfiles verticales y la evolución de la temperatura media se muestran en las Figs. 5.40 y 5.41 respectivamente; como se puede observar en la primera hay una diferencia con respecto a los datos experimentales, para la segunda los resultados muestran también una discrepancia aunque se puede notar una ligera mejoría con respecto a los resultados anteriores.

En las Figs. 5.42 y 5.43 se presenta el comportamiento de los mecanismos para la temperatura media sobre la horizontal y sobre la vertical respectivamente; se puede observar un buen comportamiento en ambas debido a que los mecanismos de advección y difusión turbulenta son simétricos y opuestos para los dos casos, además la variación de la temperatura con respecto al tiempo es prácticamente cero.

En la Fig. 5.44 se muestra la convergencia de la velocidad y temperatura medias con respecto al número de iteraciones; nuevamente se puede observar que la velocidad media converge más rápido que la temperatura y que ambas son paralelas entre sí.

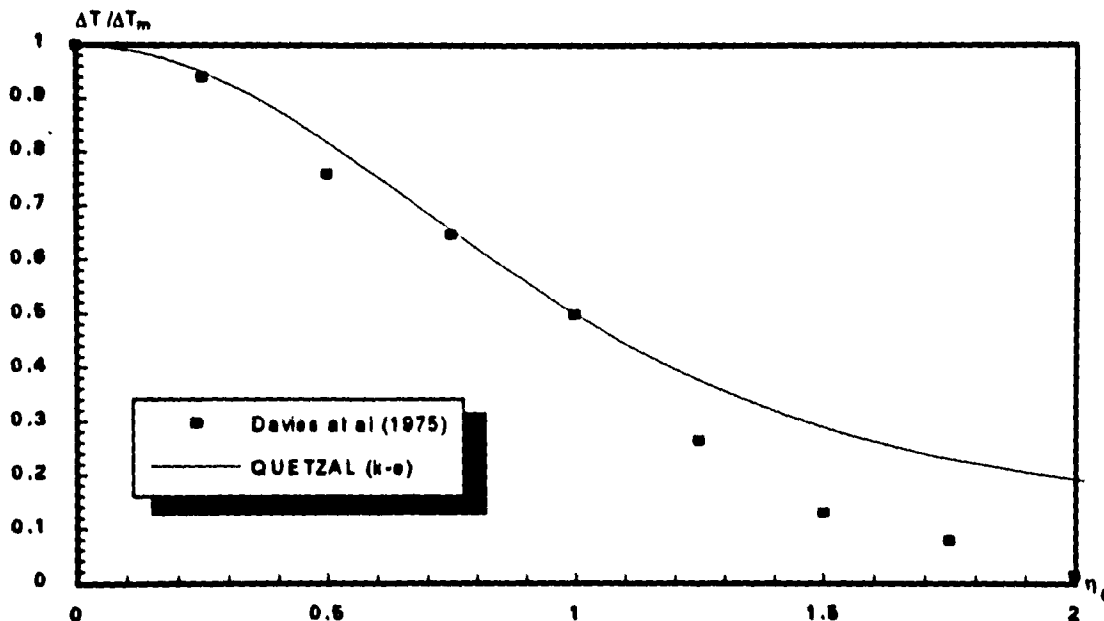


Figura 5.39 Perfiles horizontales de la temperatura media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de v_T calculados con el modelo $\kappa-\epsilon$.

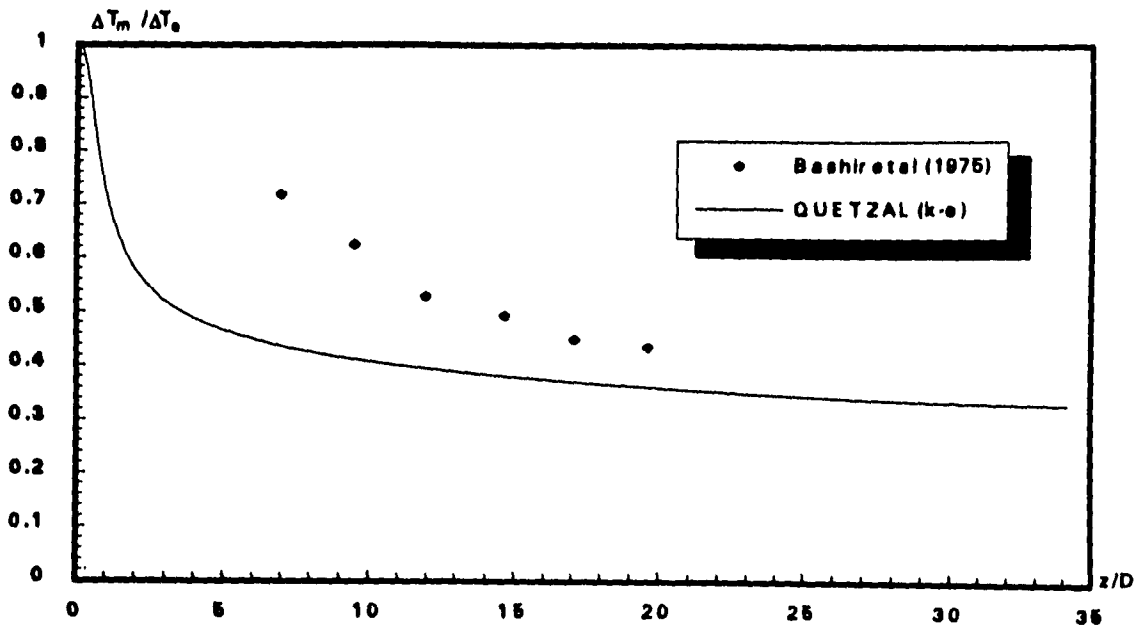


Figura 5.40 Perfiles verticales de la temperatura media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de v_T calculados con el modelo $\kappa-\epsilon$.

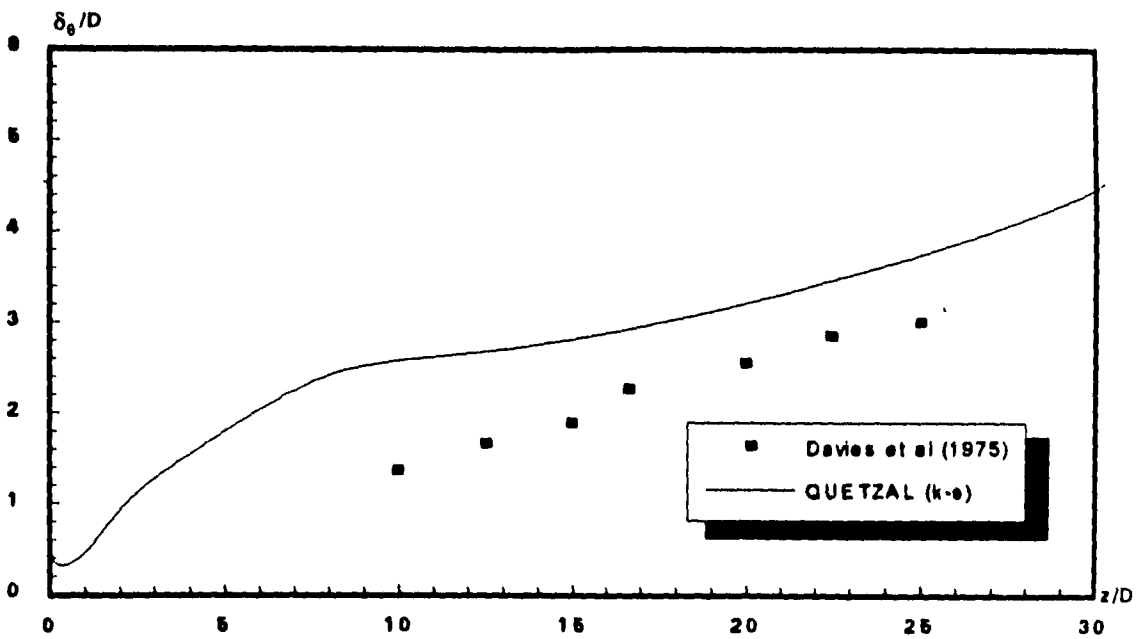


Figura 5.41 Evolución de la temperatura media en la sección $z/D = 30$ para diferentes valores de v_T calculados con el modelo $\kappa-\epsilon$.

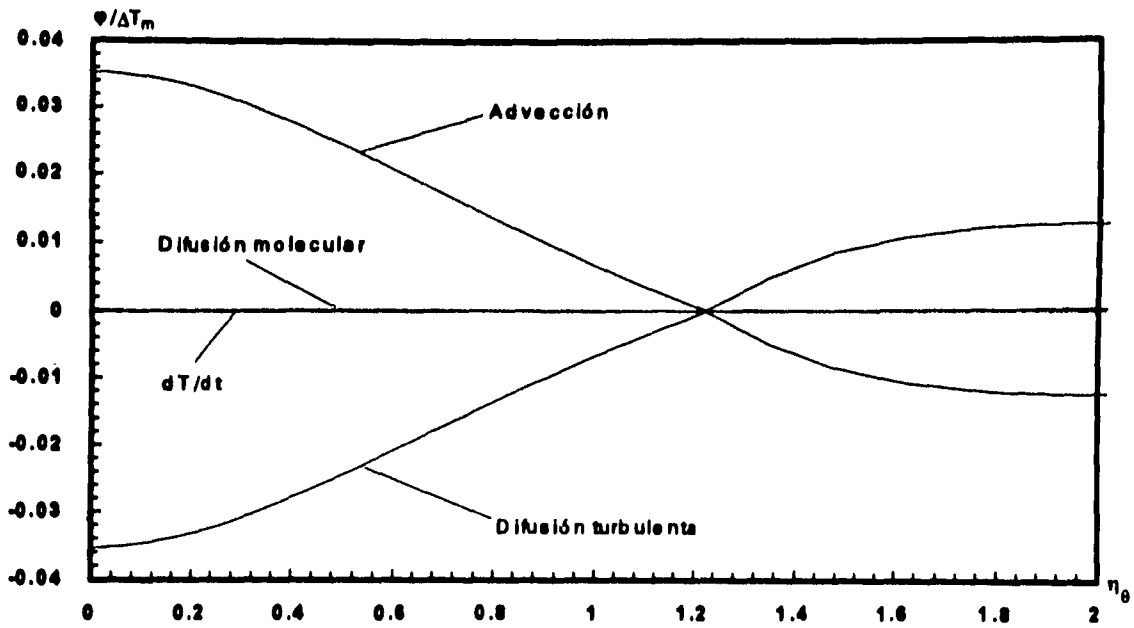


Figura 5.42 Mecanismos para la temperatura media sobre la horizontal en la sección $z/D = 20$.

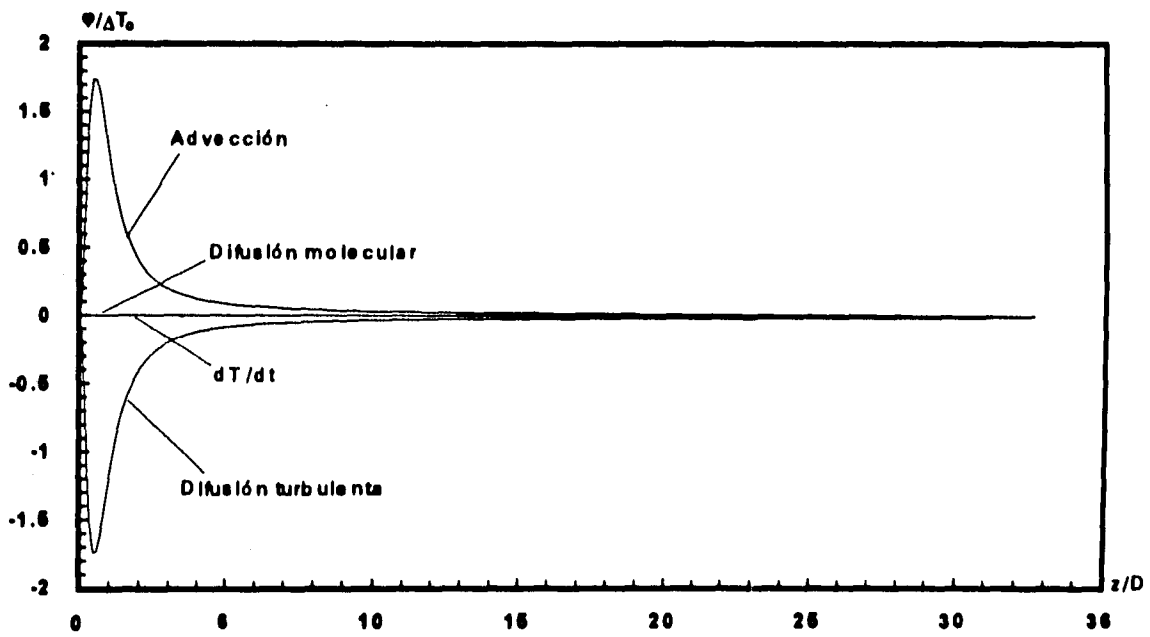


Figura 5.43 Mecanismos para la temperatura media sobre la vertical en la sección $z/D = 20$.

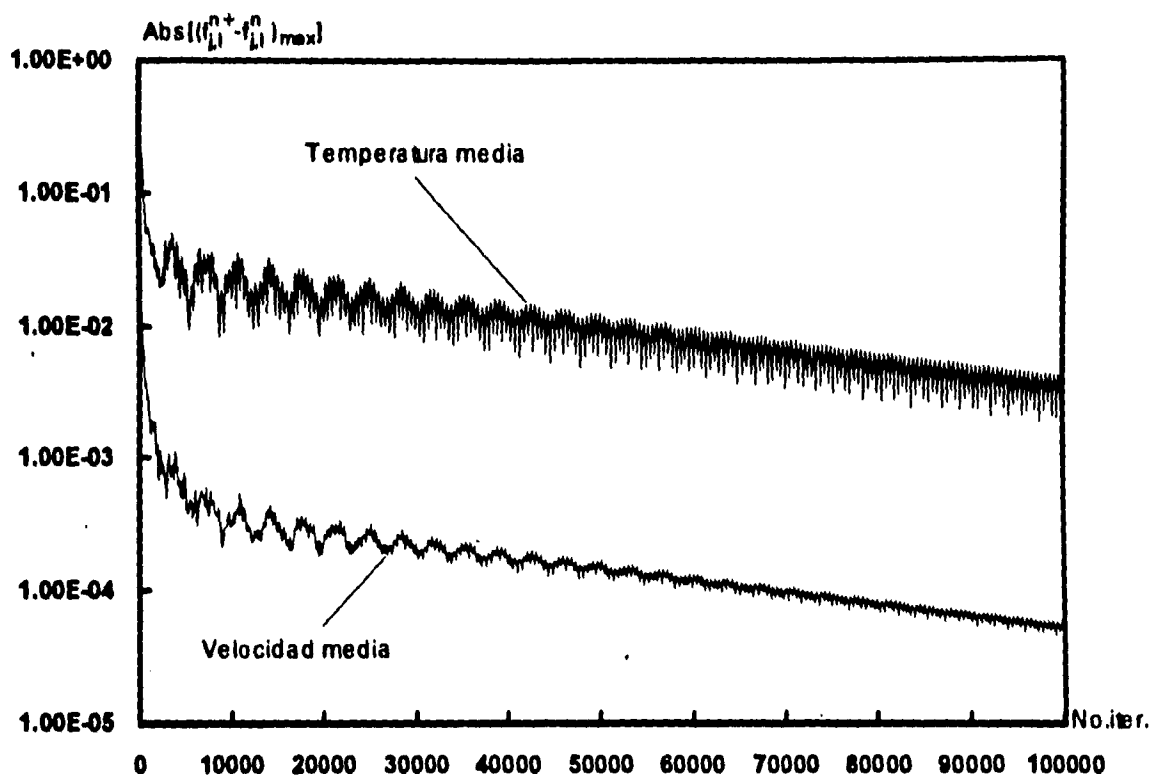


Figura 5.44 Convergencia de la velocidad y la temperatura medias.

En la Fig. 5.45 se muestran las curvas de isovalores tanto para la velocidad como para la temperatura, se puede observar que ambas curvas tienen un buen comportamiento hay una buena disipación y una mejora con respecto a los modelos anteriores.

En la Fig. 5.46 (a) se muestra la curva de isovalores para la energía cinética de la turbulencia, mientras que en la Fig. 5.46 (b) se muestra su disipación.

Finalmente en la Fig. 5.47 se muestra el comportamiento de los coeficientes de viscosidad turbulenta equivalentes calculados con el modelo κ - ϵ .

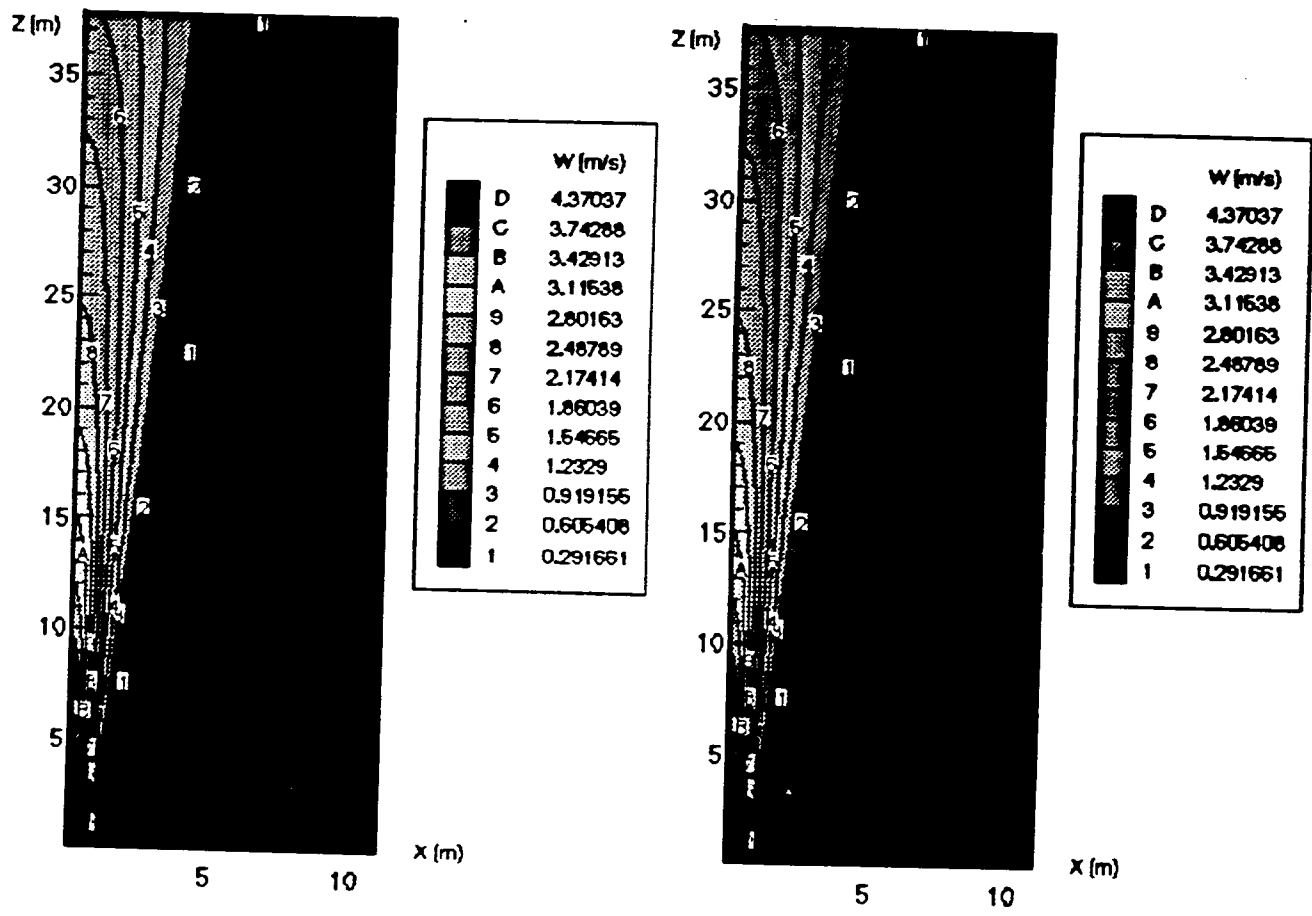


Figura 5.46 Curvas de isovalores para la velocidad y temperatura con el modelo k-epsilon.

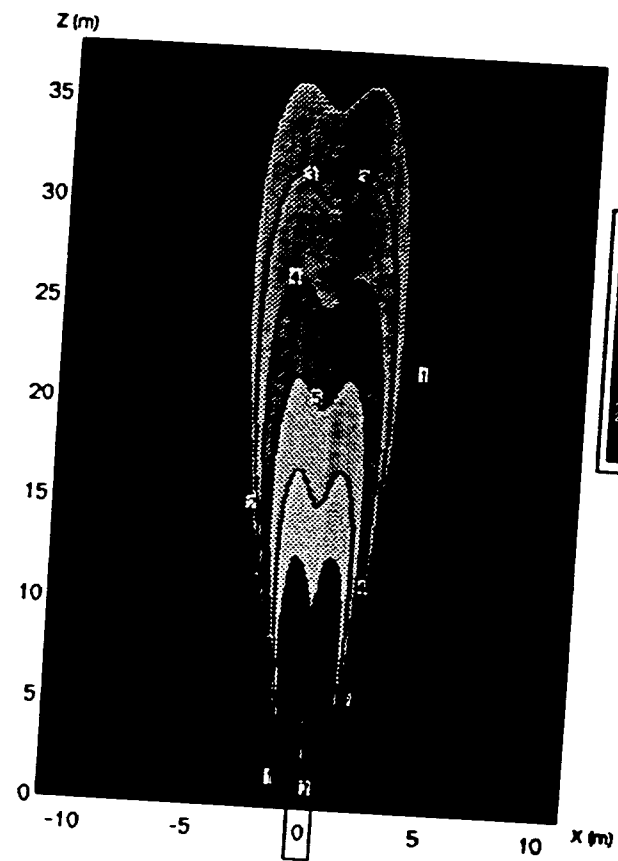
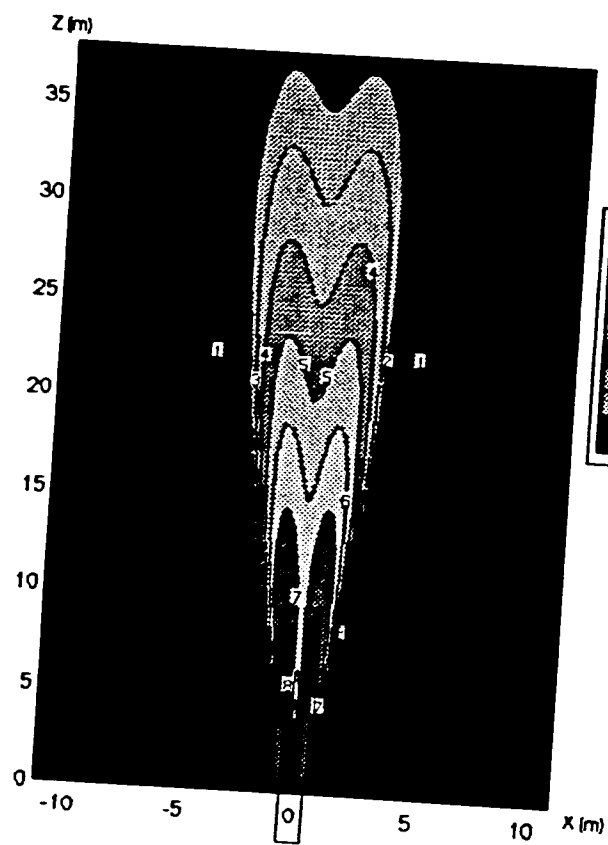


Figura 5.46 Curvas de isovalores para: (a) Energía cinética de la turbulencia y (b) su disipación.

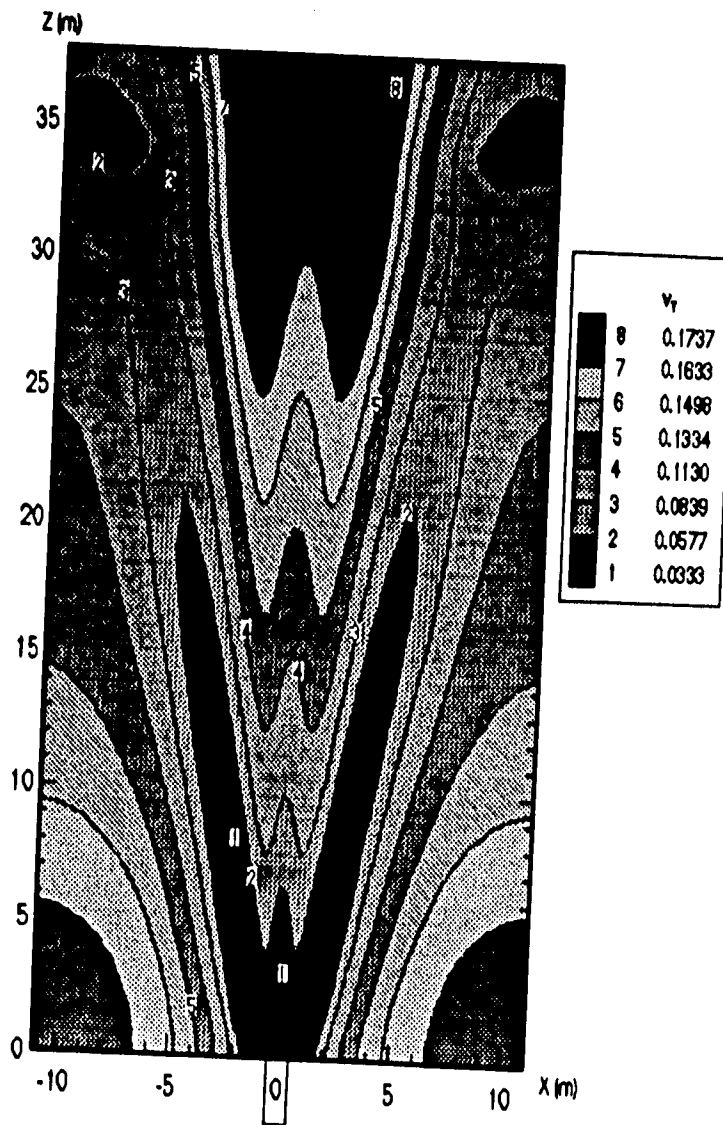


Figura 5.47 Curva de isovalores para el coeficiente de viscosidad turbulenta con el modelo k-epsilon.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

CONCLUSIONES.

Uno de los objetivos del trabajo fue el de validar el programa de computadora que se utilizó para la simulación de contaminantes pasivos inertes. En este sentido se puede decir que se obtuvieron resultados satisfactorios tanto del algoritmo del programa como del modelo fisico-matemático que se desarrolló, las comparaciones con diversos resultados experimentales así lo confirman.

Por otra parte, el usar tres modelos de turbulencia para la simulación obedece al hecho de que se pretendió observar la forma en que dichos modelos describían la evolución del flujo en estudio, con base en sus campos dinámicos y térmicos, y poder saber cual de ellos presentaba mejores resultados.

El objetivo del estudio de modelos con coeficientes de viscosidad y difusividad turbulenta constantes fue el de encontrar, por optimización numérica, el valor de estos coeficientes que mejor se adaptara al comportamiento estándar de estos flujos. Fue necesaria la calibración del número de Prandtl turbulento, el valor óptimo encontrado fue de 0.5. Como se puede observar en la Fig. 5.19, este modelo simula de una manera aceptable el campo dinámico, sin embargo el campo térmico presenta una ligera distorsión en el comportamiento habitual encontrado en la literatura.

Con la idea de mejorar los resultados encontrados con los coeficientes constantes, se recurrió al uso de un modelo de viscosidad cinemática turbulenta en función de la altura como el descrito por la ec. (5.4). Los resultados obtenidos con este modelo representan mejor los campos dinámico y térmico, como se puede observar en la Fig. 5.32. Fue necesario un trabajo de optimización sobre el número de Prandtl. Haciendo una comparación entre las Figs. 5.14 y 5.26 se puede observar que éste modelo representa mejor la zona de similitud.

Para el modelo con coeficientes de viscosidad y difusividad turbulenta equivalentes en función de la energía cinética de la turbulencia (κ) y su disipación (ϵ), los resultados obtenidos muestran un comportamiento satisfactorio para los campos dinámico y térmico, ver Fig. 5.45; Esto puede constatarse al analizar los resultados en la zona de similitud (Figs. 5.33, 5.34, 5.39 y 5.40). Este modelo tiene la ventaja de poder conocer la intensidad de la turbulencia (Fig. 5.41 (a)) y también permite conocer su disipación (Fig. 5.41(b)). En la Fig. 5.47 se muestra la evolución de el coeficiente de viscosidad turbulenta obtenida con este modelo.

Esta breve discusión muestra que para obtener una simulación satisfactoria del comportamiento del flujo, los coeficientes ν_T tienen que variar en el espacio y el tiempo de acuerdo a la evolución del campo medio, dichos coeficientes siguen una relación que no está dada solamente por la altura, sino por otras cantidades tales como la energía cinética de la turbulencia y de su disipación.

Debido a esto, un estudio que pretenda simular en buena medida el comportamiento de un flujo turbulento, en este caso emitido desde una fuente puntual, debe de tomar en cuenta las consideraciones hechas anteriormente.

Por último, cabe mencionar el tiempo de cómputo que se requiere. Cuando se utilizan modelos de orden cero se generan cuatro ecuaciones diferenciales que, introducidas en el programa, es posible correrlo en una PC/486 o en una Workstation en un tiempo razonable de CPU¹. Sin embargo, cuando se consideran modelos de primer orden (κ - ϵ) se requiere de una Workstation o, como en este caso, de una supercomputadora Cray, esto es sobre todo porque el número de ecuaciones diferenciales a resolver se incrementa a once.

¹ En una Workstation el tiempo para correr el programa es aproximadamente de 15 minutos, mientras que en la supercomputadora Cray el tiempo se reduce a 5 minutos.

PERSPECTIVAS.

Este trabajo, como se mencionó anteriormente, tiene por objetivo validar el modelo físico-matemático, con los modelos de turbulencia usados aquí y el algoritmo del programa **QUETZAL/II** para obtener una herramienta útil en el estudio y comprensión de la dispersión de contaminantes en la atmósfera emitida de fuentes puntuales. Este estudio es parte de un programa de trabajo elaborado en el Instituto de Investigaciones Eléctricas para este fin. Actualmente se ha introducido la ecuación de conservación de especies para flujos no reactivos y se realizan pruebas de calibración y ajuste, tanto del algoritmo, como de nuevos coeficientes que deben de considerarse.

El programa **QUETZAL/II** sigue en proceso de validación y estructuración y su finalidad será consolidar una herramienta de diagnóstico en la dispersión de contaminantes. La aplicación inmediata son las chimeneas de descarga de las centrales termoeléctricas, sin embargo podrían aplicarse a las chimeneas de desechos industriales o bien a las tomas de enfriamiento de las centrales nucleoelectricas, previa consideración de la humedad relativa en las ecuaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arfken, G. (1981) *Métodos matemáticos para físicos*, Ed. Diana, México.
- Arpaci, V. S. and Larsen, P. S. (1984) *Convection Heat Transfer*, Prentice-Hall, Inc., USA.
- Anderson, D. A., Tannehill, V. C. and Pletcher, R. H. (1980) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, W.J Minkowycs y E.M. Sparrow, Editors. Hemisphere publishing Corporation.
- Bashir J. and Uberoi M. S. (1975) *Experiments on turbulent structure and heat transfer in a two-dimensional jet*, Phys. of Fluids, 18, N° 4, 405-410.
- Benqué, Cuadron, Viollet (1976) *Modèle tridimensionnel de calcul de panaches émis dans l'atmosphère*, 14ème Journée de la S.H.F.
- Béguier, C., Fulachier, L. and Keffer, J. F. (1978) *The turbulent mixing layer with an asymmetrical distribution of temperature*, J. Fluid Mech., 89, 561-587.
- Bird, R. B., Stewart, W. E. y Lightfoot, E. N. (1987) *Fenómenos de transporte*, Ed. Repla, México.
- Borghì, R. (1984) *Assessment of a theoretical model of turbulent combustion by comparison with a single experiment*, Combustion and Flame, 56, 149-164.
- Boussinesq, J. (1897) *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section*, Tomo I-II, Gautier-Villars, Paris.
- Bradbury L. J. S. (1965) *The structure of a self-preserving turbulent plane jet*, J. Fluid Mech., 23, 31-61.
- Bradshaw, P., D.H. Ferriss and N. P. Atwell, (1967) *Calculations of boundary layer development using the turbulent energy equation*, J. Fluid Mech., 28, 593-616.

- Briggs, G.A. (1970) *Some recent analyses of plume rise observation*, Second International clean air congress of the International Union of air pollution association.
- Chassaing, P. (1985) *An alternative approach to the formulation of the equations of turbulent variable density fluid motion*, Journal de Mécanique Théorique et appliquée, 4, No 3, 375-389.
- Chen, C. J. and Rodi, W. (1980) *Vertical turbulent buoyant jets*, HMT Pergamon Press, England.
- Ching-Cheng and Shir (1970) *A pilot study in numerical techniques for predicting an pollutant distribution downwind from a line stack*, Atmospheric Environment, 1970, 4, 387-407.
- Chorin, A. J. (1967) *A numerical method for solving incompressible viscous flow problems*, J. Computational. Physics, 2, 12-26.
- Chou, P.Y. (1949) *Pressure flow of a turbulent fluid between two infinite parallel planes*, Quart. Appl. Math., 3, 198-209.
- Chung, M.K. and Sung, H.J. (1984) *Four-equation turbulence model for prediction of the turbulent boundary layer affected by buoyancy force over a flat plate*, Int. J. Heat Mass Transfer, 27, 2387-2395.
- Daly, B.J., and R.F. Harlow, (1970) *Transport equation in turbulence*, Phys. Fluids, 13, 26-34.
- Davies, A. E., Keffer, J. F. and Baines, W. D. (1975) *Spread of a heated plane turbulent jet*, Phys. of Fluids, 18, N° 7, 770-775.
- Donaldson, C. duP., (1968) *A computer study of an analytical model of boundary layer transition*, AIAAJ., 7, 272-278.
- Favre, A. J. (1971) *Equations statistiques aux fluctuations turbulentes dans les écoulements compressibles*, C. R. Académie de Sciences. Série A. 273, 1087 y 1289.
- Fletcher, C. A. J. (1988) *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Volumen 1 y 2. Fundamental and General Thecniques, Ed. Springer-Verlag, USA.

- Gaillard, P. (1978) *Modélisation numérique des panaches d'aéroréfrigérant*, Thèse de docteur-ingénieur, Univ. C. Bernard, Lyon et Ecole Central de Lyon, France.
- Gawain T.H. and Pritchett. J.W. (1969) *A unified heuristic model of fluid turbulence*, J. of computational physics, 5, June 1970.
- Gutmark, E. and Wygnanski, I. (1976) *The planar turbulent jet*, J. Fluid Mech., 73, 465-495.
- Ha Minh (1976) *Découlement provoqué d'un écoulement turbulent incompressible*, Tesis de doctor en ciencias. INPT. Toulouse, Francia.
- Haugen, D. A. (1973) *Workshop on Micrometeorology*, Duane A. Haugen, Editor. American Meteorological Society, USA.
- Kolmogorov, A.N., (1942) *Equations of turbulent motion of an incompressible fluid*, Izv. Akad. Nauk, SSSR, ser. Fiz. VI, Nos. 1-2, 56-58.
- Launder, B. E. (1975) *Progress in the modelling of turbulent transport*, Von Kàrmàn Institute for Fluids Dynamics, Lecture series N 1976, Rhode St. Genèse, Bélgica.
- Launder, B. E. and Spalding, D. B. (1972) *Mathematical models of turbulence*, Academic Press, London.
- Launder, B. E. and Spalding, D. B. (1974) *The numerical computation of turbulent flow*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 3, 269.
- Lumley, J. L. and Panofsky, H. A. (1964) *The Structure Atmospheric Turbulence*, Interscience Publisher, John Wiley & Sons, New York.
- Miller, D. R. and Comings, E. W. (1957) *Static pressure distribution in the free turbulent jet*, J. Fluid of Mech., 3, 1-16.
- Mompeam, G. (1989) *Modelisation des écoulements turbulents avec transferts thermiques en convection mixte*, tesis de doctorado de l'école central de Lyon, Francia.

Nee, V.W., and Kovaszny, L.S.G. (1969) *Simple phenomenological theory of turbulent shear flows*, Phys. Fluids, 12, 473-484.

Newman, R.G., Launder, B.E. and Lumely, J.L. (1981) *Modelling the behaviour of homogeneous scalar turbulence*, J. Fluid Mech., 111, 217-232.

Patankar, S. V. and Spalding, D. B. (1970) *Heat and mass transfer in boundary layers*, 2nd. Ed., Intertext Book, London.

Prandtl, L., and Wieghardt, (1945) *Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz* Nach. Akad. Wiss. Goettingen, 19, No. 6.

Ramírez León H. (1991) *Modelisation au second ordre d'écoulements turbulents fortement chauffés*, Tesis de doctorado del Laboratoire de Mécanique de Fluides de la école Centrale de Nantes, Francia.

Rey, C. (1985) *Mise en évidence des effets de variation de la masse volumique dans les équations aux corrélations des champs turbulents de vitesse et de temperature*, Jornadas de estudio sobre *Les écoulements à masse volumique variables*. Marsella, Francia, 29-30, abril 1985.

Reyes, C., Ley-Koo M., Muñoz-Ledo R. and Varela J. R. (1993) *A multi-cell computer model for ozone and its photochemical reactions*, Air pollution'93, México, 313-321.

Reynolds, O. (1894) *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 186, 123-164.

Reynolds, W. C. (1976) *Computation of Turbulent Flows*, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, California, USA.

Rodi, W. (1978) *Turbulence models and their application in hydraulics*, Int. Association for Hyd. Res., Delft, Netherlands.

Rodi, W. (1980) *Turbulence models and their application in hydraulics: a state of the art review*, Book Publication of international association for hydraulic research, Delft, Netherlands.

Rodi, W. (1982) *Turbulent buoyant jets and plumes*, Ed. W. Rodi. H.M.T. Pergamon Press, Oxford, England.

Rodi, W. (1991) *Introduction to the modeling of turbulence*, Universität Karlsruhe, Pergamon Press, England.

Rotta, J., (1951) *Statistische theorie nichthomogener turbulenz*, Z. Phys., **129**, 547.

Salcido, A. (1993) *Lattice gas model for transport and dispersion phenomena of air pollutants*, Air pollution'93, México, 173-181.

Schiestel R. (1982) *Modelisation des écoulements turbulents*, Cours I.M.S.T. Université d'Aix-Marseille II.

Sini J. F. (1986) *Modélisation d'écoulements turbulents libres bidimensionels avec effects de flotabilité*, Tesis de doctor en ciencias. Univ. Aix-Marseille II. Institut Statistique de la Turbulence.

Spalding, D. B. (1979) *Combustion and mass transfer*, H. M. T. Pergamon press, England.

Spalding, D.B., (1971) *Concentration fluctuation in a round turbulent free jet*, Chem. Eng. Science, **26**, 95-107.

Stull, R. B. (1988) *An introduction to boundary layer meteorology*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Taft J. (1974) *A numerical model for including arbitrary external boundaries in the M.A.C. incompressible fluid computing technique*, J. of Computational Physics **4**, 543-551.

Zijnen, Van der Hegge B. G. (1958) *Measurement of the velocity distribution in a plane turbulent jet of air*, Appl. Sci. Res., **A7**, 256-276.

Zannetti, P. (1990) *Air pollution modeling: theories, computational methods and available software*, Computational Mechanics Publications, New York, USA.

ANEXO 1
PRINCIPALES SUBROUTINAS DEL PROGRAMA QUETZAL/II

A.1 SUBROUTINA PARA LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.

```
C=====C
C          SUBROUTINE CONTI(ITER,NITER,NCYCLE)
C=====C
C
C          CALCULO DE LA DIVERGENCIA DIV(I,K)
C                   n m
C          EL COEFICIENTE RESIDUAL [Di,k]
C-----C
C
C          PARAMETER (IMAX=45,KMAX=47)
C          PARAMETER (JMAX=91,LMAX=95)
C          PARAMETER (NFRONT=5)
C.....C
C          IMPLICIT REAL (A-H,O-Z)
C.....C
C          DIMENSION DMAX(1001)
C          DIMENSION COFX(IMAX,KMAX),COFZ(IMAX,KMAX)
C          DIMENSION BETA(IMAX,KMAX)
C.....C
C          COMMON/CONT/ DIV(IMAX,KMAX),D(IMAX,KMAX)
C.....C
C
```

COMMON/GEN3/ U(JMAX,LMAX)
 COMMON/GEN4/ W(JMAX,LMAX)
 COMMON/GEN6/ P(JMAX,LMAX)

C

COMMON/BASE10/ PAS,TMAX
 COMMON/BASE11/ OME,EPSI
 COMMON/BASE21/ ITEDIV
 COMMON/ECROPT/ ICYCLE,IWRITE

C

COMMON/VEMIN/ WEMIN,TEMIN,UEMIN,VVEMIN,UWEMIN,WWEMIN,
 \$ EKEMIN,EPEMIN,UTEMIN,WTEMIN,TTEMIN,ETEMIN

C

COMMON/VOLM/ VOM(JMAX,LMAX)

C

COMMON/ITEM1/ WEMI(JMAX),TEMI(JMAX)
 COMMON/ITEM5/ UEMI(JMAX)

C

COMMON/GRIDX/ DX(JMAX),DELX(JMAX),RDX(JMAX)
 COMMON/GRIDZ/ DZ(LMAX),DELZ(LMAX),RDZ(LMAX)
 COMMON/ALFASX/
 & ALFAX(JMAX),ALFAX2(JMAX),ALFAX3(JMAX),ALFAX4(JMAX)
 COMMON/ALFAZ/
 & ALFAZ(LMAX),ALFAZ2(LMAX),ALFAZ3(LMAX),ALFAZ4(LMAX)
 COMMON/DIMMAX/ JMAX1,JMAX2,JMAX3,JMAX4
 COMMON/DIMMAZ/ LMAX1,LMAX2,LMAX3,LMAX4

C

C

C

LIMITE DE ITERACIONES PARA EL PROCESO DE
 CONVERGENCIA DE LA ECUACION DE CONTINUIDAD

C

C

ITEMAX = ITEDIV

C

C

C

C

C

IFLAG = -1

C

C

C

INICIO DE LA BUCLE ITERATIVA DE SOLUCION DE
 LA ECUACION DE CONTINUIDAD

C

```

C-----C
C                                     ITER = 1
C-----C
C
C      |-----|
C      |          CALCULO DEL COEFICIENTE DE RELAJACION BETA(I,K)          |
C      |-----|
C
C      DO 15 I=2,IMAX-1
C         J=2*I
C         JP1=J+1
C         DO 15 K=2,KMAX-1
C            L=2*K
C            LP1=L+1
C
C      COFX(I,K)=VOM(JP1,L)/DX(JP1)
C      COFZ(I,K)=VOM(J,LP1)/DZ(LP1)
C
C      15 CONTINUE
C
C      COEFF=OME/PAS
C
C      DO 17 I=2,IMAX-1
C         J=2*I
C         DO 17 K=2,KMAX-1
C            L=2*K
C
C      BETAB = COFX(I,K)*RDX(J)+COFX(I-1,K)*RDX(J)
C      $      + COFZ(I,K)*RDZ(L)+COFZ(I,K-1)*RDZ(L)
C
C      BETA(I,K) = COEFF/BETAB
C
C      17 CONTINUE
C-----C
C      10                                     CONTINUE
C-----C
C
C      |-----|
C      |          CONDICIONES LIMITES SOBRE LA VELOCIDAD          |
C      |-----|
C
C      CALL CFRONT(U,UEMI,UEMIN,1)
C
C      CALL CFRONT(W,WEMI,WEMIN,2)
C-----C

```



```
C
C IF(IFLAG .EQ. 0 .OR. ITER .GT. ITEMAX)GO TO 90
C
C     IFLAG = 0
C     DMAX(ITER) = 0.0
C
C     -----
C     CALCULO DE LA DIVERGENCIA DE LA VELOCIDAD
C     -----
C
C DO 20 I=2,IMAX-1
C   J=2*I
C   DO 20 K=2,KMAX-1
C     L=2*K
C
C     DIV(I,K)=(U(J+1,L)-U(J-1,L))/DX(J)+(W(J,L+1)-W(J,L-1))/DZ(L)
C
C     -----
C     EVALUACION DEL COEFICIENTE "D(I,K)"
C     -----
C
C     D(I,K) = DIV(I,K)
C
C 20 CONTINUE
C
C     -----
C     PRUEBA SOBRE LA CONVERGENCIA DE "D(I,K)"
C     -----
C
C DO 37 I=2,IMAX-1
C   DO 37 K=2,KMAX-1
C     ABSD=ABS(D(I,K))*PAS
C     IF(ABSD .GT. DMAX(ITER))THEN
C       IDMAX=I
C       KDMAX=K
C     ENDIF
C
C     DMAX(ITER) = AMAX1(DMAX(ITER),ABSD)
C
C 37 CONTINUE
C
C .....
C
C     IF(DMAX(ITER) .GE. EPSI)THEN
C       IFLAG = IFLAG+1
C     ENDIF
```

```

C
  ITER = ITER+1
C
  |-----|
  | CORRECCION DE LAS PRESIONES Y VELOCIDADES |
  |-----|
C
  DO 40 I=2,IMAX-1
C-----C
    J=2*I
    IP1=I+1
    JP1=J+1
    JP2=J+2
    DO 40 K=2,KMAX-1
C-----C
      L=2*K
      KP1=K+1
      LP1=L+1
      LP2=L+2
C
      DELP = - BETA(I,K)*D(I,K)
C
      DELU = PAS*VOM(JP1,L)*DELP*RDZ(JP1)
C
      DELW = PAS*VOM(J,LP1)*DELP*RDZ(LP1)
C
      PRINT*, '          DELW=',DELW
C
      U(JP1,L) = U(JP1,L) + DELU
      W(J,LP1) = W(J,LP1) + DELW
    40 CONTINUE
C
C-----C
  DO 50 I=2,IMAX-1
C-----C
C
  J=2*I
  IM1=I-1
  JM1=J-1
  JM2=J-2
  DO 50 K=2,KMAX-1
C
  L=2*K
  KM1=K-1
  LM1=L-1
  LM2=L-2

```

```

C
C   DELP = - BETA(I,K)*D(I,K)
C
C   DELU = - PAS*VOM(JM1,L)*DELP*RDX(JM1)
C
C   DELW = - PAS*VOM(J,LM1)*DELP*RDZ(LM1)
C
C   U(JM1,L) = U(JM1,L) + DELU
C   W(J,LM1) = W(J,LM1) + DELW
C   P(J,L) = P(J,L) + DELP
C
C   50 CONTINUE
C
C
C-----C
C               NUEVA ITERACION
C-----C
C
C-----C
C               GO TO 10
C-----C
C
C-----C
C               CONTINUE
C-----C
C
C               ITER=ITER - 1
C
C               NITER = NITER + ITER
C
C   IF(IWRITE .GT. 0)THEN
C   IF(MOD(NCYCLE,IWRITE) .EQ. 0)THEN
C   WRITE(57,*)ITER,DMAX(ITER),IDMAX,KDMAX
C   ENDIF
C   ENDIF
C
C   |-----|
C   | INTERPOLACIONES |
C   |-----|
C
C-----C
C               PRESIONES
C               CALL INTERP(P,3)
C-----C
C

```

ANEXO 1

```
C-----C
C          VELOCIDAD HORIZONTAL
C          CALL INTERP(U,1)
C-----C
C
C-----C
C          VELOCIDAD VERTICAL
C          CALL INTERP(W,2)
C-----C
C
C          |-----|
C          |CONDICIONES LIMITES PARA LAS VELOCIDADES|
C          |-----|
C
C          CALL CFRONT(U,UEMI,UEMIN,1)
C
C          CALL CFRONT(W,WEMI,WEMIN,2)
C
C-----C
C          RETURN
C          END
C-----C
```

A.2 SUBROUTINA PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES PARA EL CAMPO MEDIO DE VELOCIDADES.

```
C-----C
C          SUBROUTINE NAVIER(KFIRST)
C-----C
C
C          |-----|
C          |SOLUCION DE LAS ECUACIONES|
C          |PARA EL CAMPO MEDIO DE VELOCIDADES|
C          |-----|
C
C          PARAMETER(IMAX=45,KMAX=47)
C          PARAMETER(JMAX=91,LMAX=95)
C
C          .....
C          IMPLICIT REAL (A-H,O-Z)
C          .....
C          COMMON/BASE10/ PAS,TMAX
C          COMMON/BASE12/ RGAZ
```

```

COMMON/BASE17/ GRAV
C .....
COMMON/ALGP1/ NCYCLE
C .....
COMMON/VOLM/ VOM(JMAX,LMAX)
C .....
COMMON/ADVEC1/ ADVECU(IMAX,KMAX),ADVECW(IMAX,KMAX)
C .....
COMMON/MECU/ DIFFU1(IMAX,KMAX),DIFFU2(IMAX,KMAX)
COMMON/MECW/ DIFFW1(IMAX,KMAX),DIFFW2(IMAX,KMAX)
C .....
COMMON/GEN1/ X(JMAX)
COMMON/GEN2/ Z(LMAX)
COMMON/GEN3/ U(JMAX,LMAX)
COMMON/GEN4/ W(JMAX,LMAX)
COMMON/GEN5/ T(JMAX,LMAX)
COMMON/GEN6/ P(JMAX,LMAX)
COMMON/GEN7/ EK(JMAX,LMAX),EP(JMAX,LMAX)
COMMON/TEMPN/ TN(JMAX,LMAX)
COMMON/PRONAT/ PNAT(JMAX,LMAX),TNAT(JMAX,LMAX)
C .....
COMMON/GRIDX/ DX(JMAX),DELX(JMAX),RDX(JMAX)
COMMON/GRIDZ/ DZ(LMAX),DELZ(LMAX),RDZ(LMAX)
C .....
COMMON/VITN/ UN(JMAX,LMAX),WN(JMAX,LMAX)
C .....
COMMON/DIMMAX/ JMAX1,JMAX2,JMAX3,JMAX4
COMMON/DIMMAZ/ LMAX1,LMAX2,LMAX3,LMAX4
C .....
C=====C
C
C      ECUACION PARA LA VELOCIDAD HORIZONTAL
C
C=====C
C      CALCULO DE LOS TERMINOS DE CONVECCION
CALL CONVE2(UN,5,JMAX2,4,LMAX3,ADVECU,KFIRST)
C=====C
C
C=====C
C      CALCULO DE LOS TERMINOS DE DIFUSION
CALL DIFFUS(1,DIFFU1,DIFFU2)
C=====C
C
DO 10 J=5,JMAX2,2

```

```

I = J/2
DO 10 L=4,LMAX3,2
  K = L/2
C
C-----C
  U(J,L)=UN(J,L) + PAS*(ADVECU(I,K) - VOM(J,L)*
$      ((P(J+1,L)-P(J-1,L))/DX(J)-DIFFU1(I,K))-DIFFU2(I,K))
C-----C
C
10 CONTINUE
C
|-----|
| ECUACION PARA LA VELOCIDAD VERTICAL |
|-----|
C
C
C-----C
C      CALCULO DE LOS TERMINOS DE CONVECCION      C
CALL CONVE2(WN,4,JMAX3,5,LMAX2,ADVECW,KFIRST)
C-----C
C
C-----C
C      CALCULO DE LOS TERMINOS DE DIFUSION      C
CALL DIFFUS(2,DIFFW1,DIFFW2)
C-----C
C
DO 20 J=4,JMAX3,2
  I = J/2
  DO 20 L=5,LMAX2,2
    K = L/2
C
C-----C
  W(J,L) = WN(J,L) + PAS*(ADVECW(I,K) - GRAV
$      - VOM(J,L)*((P(J,L+1)-P(J,L-1))/DZ(L)-DIFFW1(I,K))
$      - DIFFW2(I,K))
C-----C
C
20 CONTINUE
C
IF(MOD(NCYCLE,100) .EQ. 0) THEN
C
C
W410 = 3.947029
W430 = 2.370968
W510 = -8.4810925E-04

```

```

W530 = 0.2762077
C
R410 = W410-W(4,65)
R430 = W430-W(4,87)
R510 = W510-W(72,65)
R530 = W530-W(72,87)
C
PRINT*,'  NCYCLE =',NCYCLE
PRINT*,'R410 =',R410
PRINT*,'R430 =',R430
PRINT*,'R510 =',R510
PRINT*,'R530 =',R530
C
ENDIF
C
C
C=====C
                RETURN
                END
C=====C

```

A.3 SUBROUTINA PARA LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA TEMPERATURA.

```

C=====C
                SUBROUTINE TEMPER(KFIRST)
C=====C
C
C-----|-----|
C          | SOLUCION DE LA ECUACION PARA EL CAMPO DE TEMPERATURA |
C-----|-----|
C
PARAMETER(IMAX=45,KMAX=47)
PARAMETER(JMAX=91,LMAX=95)
C.....
IMPLICIT REAL (A-H,O-Z)
C.....
COMMON/GEN5/ T(JMAX,LMAX)
COMMON/GEN6/ P(JMAX,LMAX)
C.....
COMMON/ADVEC2/ ADVECT(IMAX,KMAX)
C.....

```

```

COMMON/VOLM/ VOM(JMAX,LMAX)
C .....
COMMON/MECT/ DIFFT1(IMAX,KMAX),DIFFT2(IMAX,KMAX)
C .....
COMMON/BASE18/ RCP
C .....
COMMON/VITN/ UN(JMAX,LMAX),WN(JMAX,LMAX)
COMMON/TEMPN/ TN(JMAX,LMAX)
C .....
COMMON/BASE10/ PAS, TMAX
C .....
COMMON/GRIDX/ DX(JMAX),DELX(JMAX),RDX(JMAX)
COMMON/GRIDZ/ DZ(LMAX),DELZ(LMAX),RDZ(LMAX)
C .....
COMMON/DIMMAX/ JMAX1,JMAX2,JMAX3,JMAX4
COMMON/DIMMAZ/ LMAX1,LMAX2,LMAX3,LMAX4
C=====C
C
C
C=====C
C          CALCULO DE LOS TERMINOS DE CONVECCION          C
C          CALL CONVE2(TN,4,JMAX3,4,LMAX3,ADVECT,KFIRST)
C=====C
C
C
C=====C
C          CALCULO DE LOS TERMINOS DE DIFUSION          C
C          CALL DIFFUS(3,DIFFT1,DIFFT2)
C=====C
C
C          DO 10 J=4,JMAX3,2
C             I = J/2
C             DO 10 L=4,LMAX3,2
C                K = L/2
C
C-----C
C          T(J,L)= TN(J,L) + PAS*(ADVECT(I,K) +
C          $          RCP*VOM(J,L)*DIFFT1(I,K) - DIFFT2(I,K))
C-----C
C
C          10 CONTINUE
C
C=====C
C
C          RETURN
C          END
C=====C

```


A.4 SUBROUTINA PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES PARA LAS TENSIONES DE REYNOLDS.

```

C-----C
C          SUBROUTINE EQRSMD
C-----C
C
C          SOLUCION DE LAS ECUACIONES
C          PARA LAS TENSIONES DE REYNOLDS
C-----C
C
C          PARAMETER(IMAX=45,KMAX=47)
C          PARAMETER(JMAX=91,LMAX=95)
C-----C
C          IMPLICIT REAL (A-H,O-Z)
C-----C
C          REAL NUT, KT
C-----C
C          COMMON/GEN8/ UU(JMAX,LMAX),VV(JMAX,LMAX),WW(JMAX,LMAX),
C          $          UW(JMAX,LMAX)
C          COMMON/VITN/ UN(JMAX,LMAX),WN(JMAX,LMAX)
C-----C
C          COMMON/MKEP1/ NUT(JMAX,LMAX),KT(JMAX,LMAX)
C          COMMON/DOUBN2/ EKN(JMAX,LMAX),EPN(JMAX,LMAX)
C-----C
C          COMMON/DIMMAX/ JMAX1,JMAX2,JMAX3,JMAX4
C          COMMON/DIMMAZ/ LMAX1,LMAX2,LMAX3,LMAX4
C-----C
C
C          DEFINICION:
C          DTIERS = 2./3.
C
C          DO 10 J=2,JMAX1
C             DO 10 L=2,LMAX1
C
C             TRIAG = DTIERS*EKN(J,L)
C
C-----C
C          UU(J,L) = - NUT(J,L)*2.0*DPX(UN,J,L)+TRIAG
C          VV(J,L) = TRIAG
C          WW(J,L) = - NUT(J,L)*2.0*DPZ(WN,J,L)+TRIAG
C          UW(J,L) = - NUT(J,L)*(DPCZ(UN,J,L)+ DPCX(WN,J,L))
C-----C
C

```

```

10 CONTINUE
C
C=====C
                RETURN
                END
C=====C

```

A.5 SUBROUTINA PARA LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE LA TURBULENCIA.

```

C=====C
                SUBROUTINE EQEK(KFIRST)
C=====C
C
C-----C
                SOLUCION DE LA ECUACION DE
                LA ENERGIA CINETICA DE LA TURBULENCIA
C-----C
C
PARAMETER(IMAX=45,KMAX=47)
PARAMETER(JMAX=91,LMAX=95)
C.....C
IMPLICIT REAL (A-H,O-Z)
C.....C
REAL MU0,MU,MUB
REAL KMOL, KMOLB
REAL NUT, KT
C.....C
COMMON/MECEK/ ADVEEK(IMAX,KMAX),PRODEK(JMAX,LMAX),
&             DIFFEK(JMAX,LMAX),DISSEK(JMAX,LMAX)
C.....C
COMMON/MKEP1/ NUT(JMAX,LMAX),KT(JMAX,LMAX)
COMMON/MKEP2/ PKE(IMAX,KMAX), BKE(IMAX,KMAX)
C.....C
COMMON/BASE9/ MDL,MTH,MTC
COMMON/BASE10/ PAS, TMAX
C.....C
COMMON/GEN7/ EK(JMAX,LMAX),EP(JMAX,LMAX)
COMMON/DOUBN2/ EKN(JMAX,LMAX),EPN(JMAX,LMAX)
COMMON/CTSEK/ SIGMK
C.....C
COMMON/DIMMAX/ JMAX1,JMAX2,JMAX3,JMAX4

```

 COMMON/DIMMAZ/ LMAX1,LMAX2,LMAX3,LMAX4

C-----C

C

C

MODELO DE TIPO K-EPSILON
- NUT(J,L) -

C

C-----C

C-----C

CALCULO DE LOS TERMINOS DE ADVECCION
CALL CONVE2(EKN,4,JMAX3,4,LMAX3,ADVEEK,KFIRST)

C-----C

C

DO 15 J=4,JMAX3,2

I=J/2

DO 15 L=4,LMAX3,2

K=L/2

C

C

C-----C

C-----C

TERMINOS DE PRODUCCION
PRODEK(J,L) = PKE(I,K) + BKE(I,K)

C-----C

C

C-----C

C

TERMINOS DE DIFUSION

C

DIFFEK(J,L) = NUT(J,L)/SIGMK*(DPX2(EKN,J,L)+DPZ2(EKN,J,L))

\$ + (DPX(NUT,J,L)*DPX(EKN,J,L)

\$ + DPZ(NUT,J,L)*DPZ(EKN,J,L))/SIGMK

C-----C

C

C-----C

C-----C

TERMINOS DE DISIPACION

DISSEK(J,L) = - EPN(J,L)

C-----C

C

C-----C

EK(J,L) = EKN(J,L) + PAS*(ADVEEK(I,K) + PRODEK(J,L)

& + DIFFEK(J,L) + DISSEK(J,L))

C-----C

C

15 CONTINUE

C

ANEXO I

RETURN
END

A.6 SUBROUTINA PARA LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA DISIPACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE LA TURBULENCIA.

SUBROUTINE EQEP(KFIRST)

SOLUCION DE LA ECUACION
DE LA DISIPACION DE LA ENERGIA CINETICA DE LA TURBULENCIA

PARAMETER(IMAX=45,KMAX=47)
PARAMETER(JMAX=91,LMAX=95)

.....
IMPLICIT REAL (A-H,O-Z)

.....
REAL NUT, KT

.....
COMMON/MECEP/ ADVEEP(IMAX,KMAX),PRODEP(JMAX,LMAX),
& DIFFEP(JMAX,LMAX),DISSEP(JMAX,LMAX)

.....
COMMON/MKEP1/ NUT(JMAX,LMAX),KT(JMAX,LMAX)
COMMON/MKEP2/ PKE(IMAX,KMAX), BKE(IMAX,KMAX)

.....
COMMON/BASE9/ MDL,MTH,MTC
COMMON/BASE10/ PAS, TMAX
COMMON/BASE17/ GRAV

.....
COMMON/ETEMPS/ ETD(JMAX,LMAX),ETM(JMAX,LMAX),ETT(JMAX,LMAX)

.....
COMMON/GEN7/ EK(JMAX,LMAX),EP(JMAX,LMAX)

.....
COMMON/CTSEP1/ CE1,CE2
COMMON/CTSEP2/ SIGME

.....
COMMON/ACELD/ KACCED,KACCET


```

S      + DPZ(NUT,J,L)*DPZ(EPN,J,L))/SIGME
C
C      DISSEP(J,L) = - CE2*EPN(J,L)*EPN(J,L)/EKN(J,L)
C
C-----C
C      EP(J,L) = EPN(J,L) + PAS*(ADVEEP(I,K) + PRODEP (J,L)
&      + DIFFEP(J,L) + DISSEP(J,L))
C-----C
C
C      10 CONTINUE
C
C=====C
C
C      RETURN
C      END
C=====C

```

A.7 SUBROUTINA PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES PARA EL FLUJO DE CALOR.

```

C=====C
C      SUBROUTINE EQRSMT
C-----C
C
C      |-----|
C      | SOLUCION DE LAS ECUACIONES PARA EL FLUJO DE CALOR |
C      |-----|
C
C      PARAMETER(IMAX=45,KMAX=47)
C      PARAMETER(JMAX=91,LMAX=95)
C.....C
C      IMPLICIT REAL (A-H,O-Z)
C.....C
C      REAL NUT, KT
C.....C
C      COMMON/GEN10/ UT(JMAX,LMAX),WT(JMAX,LMAX)
C.....C
C      COMMON/MKEP1/ NUT(JMAX,LMAX),KT(JMAX,LMAX)
C.....C
C      COMMON/TEMPN/ TN(JMAX,LMAX)
C.....C
C      COMMON/DIMMAX/ JMAX1,JMAX2,JMAX3,JMAX4
C      COMMON/DIMMAZ/ LMAX1,LMAX2,LMAX3,LMAX4
C

```



```

C
PARAMETER(IMAX=45,KMAX=47)
PARAMETER(JMAX=91,LMAX=95)
C.....
IMPLICIT REAL (A-H,O-Z)
C
REAL MU, MUB
REAL KMOL,KMOLB
REAL NUT01,NUT03
REAL NUT1,NUT3
REAL KT1,KT3
REAL KC1,KC3
C.....
DIMENSION DIFF1(IMAX,KMAX),DIFF2(IMAX,KMAX)
C.....
DIMENSION NUT1(LMAX),NUT3(LMAX)
COMMON/BASE1/ HO,DIAM
COMMON/GEN11/ WEO,EKEO,EPEO,UWEO,WWEO,TEO,TTEO,ETEO,UTEO,WTEO,
$      UUEO,VVEO
COMMON/GEN2/ Z(LMAX)
C.....
COMMON/BASE9/ MDL,MTH,MTX
COMMON/BASE10/ PAS,TMAX
COMMON/BASE12/ RGAZ
COMMON/BASE13/ GCP
COMMON/BASE17/ GRAV
COMMON/BASE18/ RCP
C.....
COMMON/VISDYN/ MU(JMAX,LMAX),MUB
COMMON/DIFTHE/ KMOL(JMAX,LMAX),KMOLB
C.....
COMMON/VITN/ UN(JMAX,LMAX),WN(JMAX,LMAX)
COMMON/TEMPN/ TN(JMAX,LMAX)
C.....
COMMON/DOUBN1/ UUN(JMAX,LMAX),VVN(JMAX,LMAX),WWN(JMAX,LMAX),
$      UWN(JMAX,LMAX)
COMMON/DOUBN2/ EKN(JMAX,LMAX),EPN(JMAX,LMAX)
COMMON/DOUBN3/ TTN(JMAX,LMAX),ETN(JMAX,LMAX)
COMMON/DOUBN4/ UTN(JMAX,LMAX),WTN(JMAX,LMAX)
C.....
COMMON/GRIDX/ DX(JMAX),DELX(JMAX),RDX(JMAX)
COMMON/GRIDZ/ DZ(LMAX),DELZ(LMAX),RDZ(LMAX)
C.....
COMMON/COENU/ NUT01,NUT03
COMMON/COEKT/ KT1,KT3
COMMON/COEKC/ KC1,KC3

```



```

C .....
COMMON/CONIN1/ CIN(JMAX,LMAX)
COMMON/CONIN2/ UC1N(JMAX,LMAX),WC1N(JMAX,LMAX)
COMMON/CDIFC1/ DMOL(JMAX,LMAX)
C .....
COMMON/DIMMAX/ JMAX1,JMAX2,JMAX3,JMAX4
COMMON/DIMMAZ/ LMAX1,LMAX2,LMAX3,LMAX4
C=====C
C
C SI MNUT = 0 CALCULA DIFF2 CON NUT'S CONSTANTES
C SI MNUT = 1 CALCULA NUT'S EN FUNCION DE Z(L) Y WAXE(L)
C
C   MNUT = 1
C
C=====C
C
C           SELECCION DE CALCULO
C           GO TO(100,200,300,400),NDIF
C=====C
C
C=====C
C           CALCULO DE LAS VELOCIDADES HORIZONTALES
100           CONTINUE
C=====C
C
C           |-----|
C           |           CALCULO DE DIFF1(I,K)           |
C           |-----|
C
C DO 110 J=5,JMAX2,2
C   I=J/2
C DO 110 L=4,LMAX3,2
C   K=L/2
C
C-----C
C           DIFF1(I,K)=MU(J,L)*(2.0*DPX2(UN,J,L)+DPZ2(UN,J,L)+DPXZ(WN,J,L))
C-----C
C
C 110 CONTINUE
C
C           |-----|
C           |           CALCULO DE DIFF2(I,K)           |
C           |-----|
C
C IF(MDL .EQ. 0 .AND. MNUT .EQ. 0)THEN

```

```

C
  DO 140 J=5,JMAX2,2
    I=J/2
    DO 140 L=4,LMAX3,2
      K=L/2
C
C-----C
      DIFF2(I,K) = - NUT01*DPX2(UN,J,L) - NUT03*DPZ2(UN,J,L)
C-----C
C
  140 CONTINUE
C
C-----C
C          CALCULO DE NUT1 CON LA FUNCION PSI          C
C-----C
C
  ELSE IF(MDL .EQ. 0 .AND. MNUT .EQ. 1) THEN
C
  PSI = 0.002
  AW = 2.4
  ALFANU = 1.0
  FACTNU = 0.01
C
  DO 142 L=4,LMAX3,2
    K=L/2
C
  IF(Z(L) .LT. 5.0) THEN
C
    NUT1(L) = PSI*WEO*(Z(L)+ALFANU*DIAM)
  ELSE
    NUT1(L) = PSI*WEO*AW*(Z(L)/DIAM)**(-0.5)*(Z(L)+ALFANU*DIAM)
  ENDIF
  NUT3(L) = FACTNU*NUT1(L)
C
  DO 142 J=5,JMAX2,2
    I=J/2
C
C-----C
      DIFF2(I,K) = - NUT1(L)*DPX2(UN,J,L) - NUT3(L)*DPZ2(UN,J,L)
C-----C
C
  142 CONTINUE
C
  ELSE
C
  DO 145 J=5,JMAX2,2

```

```

I=J/2
DO 145 L=4,LMAX3,2
  K=L/2
C
C-----C
          DIFF2(I,K) = DPX(UUN,J,L) + DPZ(UWN,J,L)
C-----C
C
145 CONTINUE
C
  ENDIF
C
C-----C
          GO TO 500
C-----C
C
C=====C
          CALCULO DE LAS VELOCIDADES VERTICALES
200          CONTINUE
C=====C
C
|-----|
|          CALCULO DE DIFF1(I,K)          |
|-----|
C
DO 210 J=4,JMAX3,2
  I=J/2
  DO 210 L=5,LMAX2,2
    K=L/2
C
C-----C
          DIFF1(I,K)=MU(J,L)*(2.0*DPZ2(WN,J,L)+DPX2(WN,J,L)+DPXZ(UN,J,L))
C-----C
C
210 CONTINUE
C
|-----|
|          CALCUL DE DIFF2(I,K)          |
|-----|
C
C
IF(MDL .EQ. 0 .AND. MNUT .EQ. 0)THEN
C
DO 240 J=4,JMAX3,2
  I=J/2
  DO 240 L=5,LMAX2,2

```

```

      K=L/2
C
C-----C
      DIFF2(I,K)= - NUT01*DPX2(WN,J,L) - NUT03*DPZ2(WN,J,L)
C-----C
C
240 CONTINUE
C
C-----C
C          CALCULO DE NUT3 CON LA FUNCION PSI          C
C-----C
C
ELSE IF(MDL .EQ. 0 .AND. MNUT .EQ. 1)THEN
C
      PSI = 0.002
      AW = 2.4
      ALFANU = 1.0
      FACTNU = 0.01
C
DO 242 L=5,LMAX2,2
      K=L/2
      IF(Z(L) .LT. 5.0)THEN
C
          NUT1(L) = PSI*WEO*(Z(L)+ALFANU*DIAM)
          ELSE
          NUT1(L) = PSI*WEO*AW*(Z(L)/DIAM)**(-0.5)*(Z(L)+ALFANU*DIAM)
          ENDIF
          NUT3(L) = FACTNU*NUT1(L)
C
DO 242 J=4,JMAX3,2
      I=J/2
C
C-----C
      DIFF2(I,K)= - NUT1(L)*DPX2(WN,J,L) - NUT3(L)*DPZ2(WN,J,L)
C-----C
C
242 CONTINUE
C
ELSE
DO 245 J=4,JMAX3,2
      I=J/2
      DO 245 L=5,LMAX2,2
          K=L/2
C
C-----C
      DIFF2(I,K)= DPX(UWN,J,L) + DPZ(WWN,J,L)

```

ANEXO I

```

C-----C
C
245 CONTINUE
C
    ENDIF
C
C-----C
                GO TO 500
C-----C
C-----C
C-----C
C    CALCULO DE LOS TERMINOS DE DIFUSION PARA LA TEMPERATURA    C
300                CONTINUE
C-----C
C
    |-----|
    |                CALCULO DE DIFF1(I,K)                |
    |-----|
C
C
DO 310 J=4,JMAX3,2
    I=J/2
    DO 310 L=4,LMAX3,2
        K=L/2
C
C
C-----C
                DIFF1(I,K) = KMOL(J,L)*(DPX2(TN,J,L)+DPZ2(TN,J,L))
C-----C
C
310 CONTINUE
C
    |-----|
    |                CALCULO DE DIFF2(I,K)                |
    |-----|
C
IF(MTH.EQ.0)THEN
C
DO 340 J=4,JMAX3,2
    I=J/2
    DO 340 L=4,LMAX3,2
        K=L/2
C
C-----C
                DIFF2(I,K) = -KT1*DPX2(TN,J,L) - KT3*DPZ2(TN,J,L)
C-----C

```

```

C
340 CONTINUE
C
ELSE
C
DO 345 J=4,JMAX3,2
    I=J/2
    DO 345 L=4,LMAX3,2
        K=L/2
C
C-----C
                DIFF2(I,K) = DPX(UTN,J,L) + DPZ(WTN,J,L)
C-----C
C
345 CONTINUE
C
ENDIF
C
C-----C
                GO TO 500
C-----C
C
C-----C
                RETURN
                END
C-----C

```

A.9 SUBROUTINA PARA EL CÁLCULO DE LA VISCOSIDAD Y DIFUSIVIDAD TURBULENTAS CON EL MODELO κ - ϵ .

```

C-----C
                SUBROUTINE MODKEP
C-----C
C
C-----C
                SUBROUTINAS PARA EL CALCULO DE
                * LA VISCOSIDAD TURBULENTA NUT(J,L)
                * LA DIFUSIVIDAD TURBULENTA KT(J,L)
                * LA DIFUSIVIDAD TURBULENTA KC(J,L)
C-----C
C

```

```

PARAMETER(JMAX=91,LMAX=95)
C .....
C IMPLICIT REAL (A-H,O-Z)
C .....
C REAL NUT, KT, KC
C .....
C COMMON/MKEP1/ NUT(JMAX,LMAX),KT(JMAX,LMAX)
COMMON/MKEP3/ KC(JMAX,LMAX)
C .....
C COMMON/ETEMPS/ ETD(JMAX,LMAX),ETM(JMAX,LMAX),ETT(JMAX,LMAX)
C .....
C COMMON/DOUBN2/ EKN(JMAX,LMAX),EPN(JMAX,LMAX)
C .....
C COMMON/KECMU/ CMU
C .....
C COMMON/BASE9/ MDL,MTH,MTC
C .....
C COMMON/PRANDT/ PRTL
COMMON/SCHMIT/ SCH
C .....
C COMMON/DIMMAX/ JMAX1,JMAX2,JMAX3,JMAX4
COMMON/DIMMAZ/ LMAX1,LMAX2,LMAX3,LMAX4
C=====C
DO 10 J = 2,JMAX1
DO 10 L = 3,LMAX1
C
NUT(J,L) = CMU*EKN(J,L)*EKN(J,L)/EPN(J,L)
C
KT(J,L) = NUT(J,L)/PRTL
C
10 CONTINUE
C
IF (MTC .EQ. 5) RETURN
C
DO 20 J = 2,JMAX1
DO 20 L = 3,LMAX1
C
C
KC(J,L) = NUT(J,L)/SCH
C
20 CONTINUE
C=====C
RETURN
END
C=====C

```