26
2E

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FORMAS NORMALES EN ECUACIONES DIFERENCIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ADRIANA ORTIZ RODRIGUEZ

MEXICO, D. F. 1995

FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron la **pasante(s)** Adriana Ortiz Rodríguez

con número de cuenta 8737388-0 **con el Título:**
Formas normales en Ecuaciones Diferenciales.

Otorgamos nuestro Voto Aprobatorio y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de MATEMATICO.

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
DRA. **Director de Tesis**	LAURA	ORTIZ BOBADILLA.	Laura Ortiz B.
DR.	XAVIER	GOMEZ-MONT AVALOS.	Xavier Gómez M
DRA.	MONICA ALICIA	CLAPP JIMENEZ LABORA.	M. Clapp
DR. **Suplente**	JESUS RUPERTO	MUCIÑO RAYMUNDO.	
DR. **Suplente**	ERNESTO	ROSALES GONZALEZ.	Ernesto Rosales González

Quiero dedicar este trabajo a mis padres.

Quiero agradecer de todo corazón a :

Juan Carlos, por su entrega, su incansable ayuda y por su infinita paciencia.

A Laura y Ernesto, por el apoyo y la confianza que siempre me brindaron. Por empujarme a seguir adelante.

A mis queridos hermanos, por ayudarme a lograr un suenño más.

A mi querido profesor Xavier Paez por toda su ayuda y consideración.

A todos ... mil gracias.

Contenido

Introducción

Una técnica muy poderosa para muchas ecuaciones diferenciales consiste en transformarlas (sin resolverlas) a una forma más simple.

El objetivo de esta tesis es estudiar las formas normales a las cuales se puede reducir una ecuación diferencial en la vecindad de un punto singular.

La reducción a formas normales se realiza por medio de series de potencias las cuales no siempre convergen. Aún en los casos donde las series son divergentes, este método se convierte en un dispositivo poderoso ya que, con algunos términos iniciales de las series podemos obtener información significativa del comportamiento de las soluciones.

Gran parte de estas formas normales proviene de la toría hiperbólica. Esta teoría fue construída por S. Smale en los sesentas para sistemas en general.

El método de formas normales es también una herramienta poderosa en el estudio de bifurcaciones.

En este trabajo se presentan los aspectos básicos del método de formas normales formales, analíticas y diferenciables para campos. Todavía más, se presentan formas normales diferenciables para familias de campos vectoriales. Los resultados dependen principalmente de los valores propios de la parte lineal de un campo en un punto singular.

El capítulo uno es una introducción a formas normales formales para series. Un análisis similar se realiza en el capítulo dos, donde se obtienen las formas normales formales para campos vectoriales. Este se divide en dos secciones. La primera consta de resultados para campos en una variable y en la segunda se estudia la teoría de Poincaré. Esta teoría la utilizaremos posteriormente en el capítulo cinco.

En el capítulo tres se hace un análisis de formas normales analíticas para campos reales y complejos. Los resultados están basados principalmente en la posición geométrica de los valores propios. Esta parte también tendrá utilidad en el capítulo cinco.

Cabe mencionar que en estos tres primeros capítulos trabajaremos con series complejas y campos reales y complejos.

En los dos capítulos siguientes sólo estudiaremos teoría para campos vectoriales reales.

El capítulo cuatro contiene la demostración del teorema de Borel en una y varias variables. Este teorema es trascendente para obtener la forma normal diferenciable de un campo vectorial real hiperbólico y no resonante.

En el capítulo cinco se hace una clasificación diferenciable local de familias de campos vectoriales reales en una vecindad de un punto singular. Estamos interesados en la forma a la cual una familia de campos puede ser transformada por un cambio de variables diferenciable que depende suavemente de los parámetros de la familia. Uno de los resultados principales en esta parte es una consecuencia de que los valores propios tengan parte real distinta de cero (llamada teoría hiperbólica).

Finalmente concluímos el trabajo con dos aplicaciones que consisten en la bifurcación de una órbita homoclínica de una familia hiperbólica tipo silla.

Capítulo 1

Formas normales formales.

1.1 Formas normales formales para transformaciones en una variable.

En este capítulo definiremos lo que es la forma normal de una serie y haremos un análisis de ella. Hay que aclarar que las series con las que trabajaremos serán series con término constante igual a cero.

Definición 1.1.1
Una serie formal en los complejos es una expresión de la forma :

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^j \, , \, h_j \in \mathbf{C}.$$

Es decir, sólo es una serie de números complejos.

Ahora definimos algunas propiedades que posteriormente utilizaremos. Dadas dos series formales : $f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ y $g = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$, definimos las siguientes operaciones :

- $f + g = \sum_{j=1}^{\infty}(a_j + b_j)z^j$.
- $fg = \sum_{j=1}^{\infty} (\sum_{i=0}^{j} a_j b_{j-i}) z^j$
- Si α está en los complejos, $\alpha f = \sum_{j=1}^{\infty}(\alpha a_j)z^j$

- Las primeras n componentes de la serie composición $f \circ g$ están dados por los primeros n términos de la suma siguiente

$$f \circ g_n(z) = f(\sum_{j=1}^{n} b_j z^j) = a_1(\sum_{j=1}^{n} b_j z^j) + a_2(\sum_{j=1}^{n-1} b_j z^j)^2 + \cdots + a_n(b_1 z)^n.$$

- La inversa de una serie f con término lineal distinto de cero es una serie formal f^{-1} que satisface que las composiciones $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$ son la identidad.

- La derivada de $f = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$ es la serie $f'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j z^{j-1}$. Es decir, es la serie compuesta por las derivadas de cada componente de f.

Proposición 1.1.1
El conjunto de series formales en una variable y con coeficientes en los complejos es un dominio entero.

Definición 1.1.2
Sean f y g dos series formales. Si existe una serie formal H que satisfaga la desigualdad

$$f = H \circ g \circ H^{-1} \tag{1.1}$$

entonces decimos que f y g son formalmente equivalentes. Si no existe una serie f_0 que tenga menos términos y que satisfaga (1.1), entonces decimos que f es la forma normal de g.

Observación :

Si la serie que cumple (1.1) es diferenciable o analítica entonces f y g son diferenciablemente equivalentes o analíticamente equivalentes respectivamente. Las equivalencias formal, diferenciable o analítica son una relación de equivalencia. Decimos que f y g son formalmente equivalentes linealmente si la serie que las hace formalmente equivalentes sólo consta de término lineal.

Es importante aclarar que las series H que consideraremos para hacer la equivalencia entre dos series serán aquellas que tengan término constante igual a cero y como término lineal la identidad ($H(0) = 0$ y $H'(0) = 1$).

Proposición 1.1.2
Sea $f(z) = \nu z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ una serie con $|\nu| \neq 1$, $\nu \neq 0$ y $H(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} h_j z^j$ una serie formal, entonces f es formalmente equivalente a sí misma por medio de H si y sólo si H es la identidad.

Demostración :

Para demostrar que la serie H es lineal, es fácil comprobar que $h_2 = 0$ a partir de la igualdad $f \circ H = H \circ f$. Para hacer la demostración por inducción, suponemos que $h_s = 0$, para $s \leq n-1$. Ahora vamos a demostrar que $h_n = 0$, entonces

$$(H \circ f)(z) = \nu z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j + h_n(\nu z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j)^n + \hat{O}(z^{n+1}) \quad (1.2)$$

[1]

$$(f \circ H)(z) = \nu z + \nu h_n z^n + \sum_{j=2}^{\infty} a_j (z + h_n z^n + \cdots)^j + \hat{O}(z^{n+1}) \quad (1.3)$$

Igualando (1.2) y (1.3) tenemos que :

$$\nu z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j + h_n(\nu z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j)^n + \hat{O}(z^{n+1}) =$$
$$\nu z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j + \nu h_n z^n + \hat{O}(z^{n+1}).$$

Finalmente,

$$h_n(\nu^n - \nu) z^n = \hat{O}(z^{n+1}).$$

La igualdad anterior implica que $h_n = 0$ ya que, por hipótesis, ν no es raíz de la unidad. □

Observación :

Esta proposición implica la unicidad de la equivalencia formal salvo por transformaciones lineales.

En efecto, si las series formales f y g son formalmente equivalentes por H_1 y H_2 ($H_1 \circ f = g \circ H_1$ y $H_2 \circ f = g \circ H_2$) donde el término lineal de H_1 y

[1] Para denotar los términos mayores o iguales que z^k de una serie formal escribiremos $\hat{O}(z^k)$.

de H_2es z. entonces f es formalmente equivalente a sí misma por $H_2^{-1} \circ H_1$. Por la proposición anterior $H_2^{-1} \circ H_1$ es la transformación identidad. Así, $H_1 = H_2$. De las últimas observaciones hechas podemos enunciar la siguiente proposición

Proposición 1.1.3
Sean $f(z) = \nu z$ y $g(z) = \mu z$, $\nu \neq \mu$, dos series complejas, entonces f y g no son formalmente equivalentes.

Demostración :
Recordemos que sólo vamos a considerar para la equivalencia series tales que $H'(0)= 1$. Supongamos que existe una serie formal $H(z) = z+\sum_{j=2}^{\infty} h_j z^j$, que satisface (1.1), entonces

$$(H \circ f)(z) = \nu z + \sum_{j=2}^{\infty} h_j \nu^j z^j \tag{1.4}$$

$$(g \circ H)(z) = \mu z + \sum_{j=2}^{\infty} \mu h_j z^j \tag{1.5}$$

Igualando (1.4) y (1.5) tenemos que $(\nu - \mu)z = \hat{O}(z^2)$
La igualdad sólo se cumple si $\nu = \mu$, lo cual no es posible por hipótesis.□

Observación :
Lo que nos dice la proposición anterior es que la parte lineal de una serie formal es invariante bajo series formales, es decir, que no existe ninguna serie formal de la forma $H(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} h_j z^j$ que haga formalmente equivalentes dos transformaciones lineales distintas. Lo cual implica que dos transformaciones lineales no podrán ser ni diferenciable, ni analíticamente equivalentes.

El siguiente teorema será la base para poder saber cual es la forma normal de una serie que tiene término lineal distinto de cero. Es importante aclarar que los resultados obtenidos a partir del teorema siempre serán bajo la suposición que ν no es raíz de la unidad.

TEOREMA 1.1.1
Sean $f(z) = \nu z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ y $g(z) = \nu z$, $\nu \neq 0, | \nu | \neq 1$, entonces f y g son formalmente equivalentes.

En la demostración mostraremos que existe una serie formal que satisfaga la igualdad (1.1). Para hacer tal equivalencia, vamos a eliminar los términos de grado 2, 3, ... sucesivamente. Primero construiremos un polinomio adecuado para que sea posible la eliminación del término de grado 2, después construiremos otro para que la composición de ambos polinomios elimine los de grado 3 y así sucesivamente.

Demostración :

La demostración consiste en exhibir para cada número natural n, un polinomio G_n de grado $n!$ que satisfaga la siguiente igualdad :

$$(G_n \circ f \circ G_n^{-1})(z) = g(z) + \hat{O}(z^{n+1}). \tag{1.6}$$

Para $n = 2$, proponemos el polinomio $G_2(z) = H_2(z) = z + h_2 z^2$. Observemos que $H_2{}^{-1}(z) = z - h_2 z^2 + \hat{O}(z^3)$. De aquí tenemos que :

$$\begin{aligned}(H_2 \circ f \circ H_2^{-1})(z) &= \nu z + (a_2 - h_2\nu)z^2 + h_2\nu^2 z^2 + \hat{O}(z^3) \\ &= \nu z + (a_2 - h_2\nu + h_2\nu^2)z^2 + \hat{O}(z^3)\end{aligned}$$

Como queremos eliminar los términos de grado 2 entonces debemos verificar la igualdad, $a_2 - h_2\nu + h_2\nu^2 = 0$, es decir,

$$h_2 = \frac{a_2}{\nu - \nu^2}.$$

En consecuencia, nuestro polinomio es $H_2(z) = z + \frac{a_2}{\nu-\nu^2}z^2$. Por lo tanto, para $n = 2$, se satisface la igualdad (1.6).

Ahora, supongamos que hemos construido polinomios $H_2, H_3, \ldots, H_n$ de la forma $H_i(z) = z + h_i z^i$ que satisfacen :

$$\begin{aligned} f_2 &= H_2 \circ f \circ H_2^{-1}(z) = \nu z + \hat{O}(z^3) \\ f_3 &= H_3 \circ f_2 \circ H_3^{-1}(z) = \nu z + \hat{O}(z^4) \\ &\vdots \\ f_n &= H_n \circ f_{n-1} \circ H_n^{-1}(z) = \nu z + \hat{O}(z^{n+1}) \end{aligned}$$

Es decir, supongamos que existe un polinomio $G_n = H_n \circ \cdots \circ H_2$ tal que $G_n \circ f \circ G_n{}^{-1}(z) = \nu z + \hat{O}(z^{n+1})$. Ahora vamos a mostrar que existe un polinomio $H_{n+1}(z) = z + h_{n+1}z^{n+1}$ que satisface la igualdad

$$(H_{n+1} \circ f_n \circ H_{n+1}{}^{-1})(z) = \nu z + \hat{O}(z^{n+2}). \tag{1.7}$$

Supongamos que $f_n(z) = \nu z + b_{n+1} z^{n+1} + \hat{O}(z^{n+2})$, entonces,

$$(H_{n+1} \circ f_n \circ H_{n+1}{}^{-1})(z) = \nu z + (b_{n+1} - \nu h_{n+1} + h_{n+1}\nu^{n+1}) z^{n+1} + \hat{O}(z^{n+2}).$$

Hacemos el coeficiente del término de grado $n+1$ igual a cero para eliminarlo y obtenemos que

$$h_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{\nu - \nu^{n+1}}.$$

Finalmente se cumple la igualdad (1.7). La serie formal está dada por la composición infinita de los polinomios H_i, es decir,

$$H = \cdots \circ H_n \circ \cdots \circ H_3 \circ H_2. \square$$

Del teorema anterior podemos deducir los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.1.1
Sean $f(z) = \nu z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ y $g(z) = \nu z$ con $\nu \neq 0$ y $|\nu| \neq 1$, entonces f y g son formalmente equivalentes.

Este es un caso particular del teorema anterior ya que aquí todos los coeficientes de los términos de grado mayor que tres son cero.

Ejemplo 1.1.2
Sea $\nu \neq 0$ en los complejos tal que no es raíz de la unidad, entonces las siguientes transformaciones son formalmente equivalentes :

$$\begin{aligned} f(z) &= \nu z + a_2 z^2 \\ g(z) &= \nu z + a_n z^n \\ h(z) &= \nu z. \end{aligned}$$

TEOREMA 1.1.2
Sean $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ y $g(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ dos series con $a_2 \neq 0$ entonces f y g son formalmente equivalentes. Más aún, g es la forma normal de f.

Demostración :

La demostración es análoga a la del teorema 1.1.1. Primero veamos por qué los términos cuadrático y cúbico son invariantes bajo las series. Si proponemos el polinomio $H_2(z) = z + h_2 z^2$ donde $H_2^{-1}(z) = z - h_2 z^2 + 2h_2^2 z^3 + \cdots$ tenemos que

$$(H_2 \circ f \circ H_2^{-1})(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \hat{O}(z^4).$$

Reescribamos f como sigue

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \hat{O}(z^5)$$

y proponemos ahora el polinomio $H_3(z) = z + h_3 z^3$. Observemos que $H_3^{-1} = z - h_3 z^3 + h_5 z^5 + \cdots$ Si sustituimos H_3 en (1.1) obtenemos

$$(H_3 \circ f \circ H_3^{-1})(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + (a_4 + a_2 h_3) z^4 + \hat{O}(z^5).$$

En consecuencia tenemos que

$$H_3(z) = z - \frac{a_4}{a_2} z^3.$$

Por lo tanto,

$$(H_3 \circ f \circ H_3^{-1})(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \hat{O}(z^5).$$

Ahora supongamos que existen polinomios $H_3, H_4, \ldots H_n$ tales que satisfacen la siguiente igualdad :

$$H_n \circ \cdots H_3 \circ f \circ H_3^{-1} \circ \cdots H_n^{-1}(z) = g(z) + \hat{O}(z^{n+2}).$$

Reescribimos esta última igualdad como sigue :

$$f_n(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + l_{n+2} z^{n+2} + \hat{O}(z^{n+3}).$$

Es fácil verificar que el polinomio $H_{n+1}(z) = z + \frac{l_{n+2}}{a_2(1-n)} z^{n+1}$ satisface la siguiente igualdad :

$$(H_{n+1} \circ f_n \circ H_{n+1}^{-1})(z) = g(z) + \hat{O}(z^{n+3}).$$

El teorema se concluye de observar que la serie buscada está dada por la composición infinita de los polinomios H_n. □

Observación :

Mediante cálculos directos, podemos verificar que una serie de la forma $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$ no puede ser formalmente equivalente a otra de la forma $g(z) = z + b_2z^2 + b_3z^3 + \cdots$, si $(a_2, a_3) \neq (b_2, b_3)$. Dicho en otras palabras, la transformación $h(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3$ es la forma normal de f.

Otro caso por analizar es cuando nuestra serie tiene término lineal igual a cero, es decir, cuando f es de la forma $f(z) = z^k + a_mz^m + \cdots$, $k \geq 2$.

TEOREMA 1.1.3

Sea $f(z) = z^k + a_mz^m + \cdots$, $a_m \neq 0$, $k \geq 2$ y $m \geq k+1$ entonces f es formalmente equivalente a la serie $g(z) = z^k$. La serie formal H es de la forma $H(z) = z + h_{k-1}z^{m-k+1} + \cdots$

La demostración de este teorema se hace por inducción y se sigue del siguiente

Lema :

Sean $f(z) = z^k + b_rz^r + \hat{O}(z^{r+1})$ y $g(z) = z^k$ con $r \geq k+1$ entonces el polinomio $H(z) = z + \frac{b_r}{k}z^{r-k+1}$ satisface la igualdad :

$$(H \circ f \circ H^{-1})(z) = z^k + \hat{O}(z^{r+1}) \tag{1.8}$$

Demostración :

La parte izquierda de la igualdad (1.8) es :

$$\begin{aligned}
(H \circ f \circ H^{-1})(z) &= H \circ f(z - \frac{b_r}{k}z^{r-k+1} + \hat{O}(z^{2r-2k+1})) \\
&= H(z^k + \hat{O}(z^{r+1})) \\
&= z^k + \hat{O}(z^{r+1})
\end{aligned}$$

Por lo tanto la igualdad (1.8) se satisface. □

Ahora generalizaremos el concepto de *equivalencia formal* para series en varias variables.

1.2 Formas normales formales para series en varias variables.

Definición 1.2.1

Sean f y g dos series definidas en $\mathbb{C}^n$. Decimos que f y g son formalmente

equivalentes si existe una serie formal de la forma :
$H(z_1,\ldots,z_n) = (H_1(z_1,\ldots,z_n),\ldots,H_n(z_1,\ldots,z_n))$ *que satisface la igualdad* $g\circ H = H\circ f$, *donde cada* H_i *es de la forma* $H_i(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{|J|\geq 1} a^i_J X^J$, $J = (j_1,\ldots,j_n), \mid J \mid = \sum k = 1^n j_k$ *y* $a^i_J X^J = a^i_{j_1 j_2\cdots j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$ *tal que* $\sum_{k=1}^n j_k \geq 2$.

El siguiente ejercicio ejemplifica la definición anterior.

Ejemplo 1.2.1
Sea $f(z_1,z_2) = (\lambda_1 z_1 + z_2{}^2, \lambda_2 z_2)$ *con* $\lambda_1 \neq \lambda_2{}^2$, *entonces la forma normal de* f *es* $g(z_1,z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$.

Para mostrarlo, proponemos la serie formal

$$H(z_1,z_2) = (a_{10}z_1 + a_{01}z_2 + a_{02}z^2, z_2).$$

Por una parte tenemos que

$$(g\circ H)(z) = (\lambda_1 a_{10}z_1 + \lambda_1 a_{01}z_2 + \lambda_1 a_{02}z_2{}^2, \lambda_2 z_2) \tag{1.9}$$

y por otra parte,

$$(H\circ f)(z) = (\lambda_1 a_{10}z_1 + \lambda_2 a_{01}z_2 + (a_{10} + \lambda_2{}^2 a_{02})z_2{}^2, \lambda_2 z_2) \tag{1.10}$$

Igualando (1.9) y (1.10) obtenemos :

$$a_{10} = 1, \quad a_{01} = 0 \quad \text{y} \quad a_{02} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2{}^2}.$$

Usando que $\lambda_1 \neq \lambda_2{}^2$, los valores están bien definidos y por lo tanto (1.9) se cumple con una serie polinomial dada como sigue :

$$H(z_1,z_2) = (z_1 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2{}^2} z_2{}^2\,,\ z_2)$$

En la siguiente sección se hará un análisis similar al de este capítulo para campos vectoriales definidos por en los complejos.

Capítulo 2

Formas normales formales para campos vectoriales.

2.1 Formas normales formales para campos vectoriales en una variable.

En esta parte vamos a estudiar formas normales formales para campos vectoriales complejos. Este análisis es similar al del capítulo anterior En la primera sección consideraremos campos en una variable y en la segunda, generalizaremos algunas proposiciones de la primera sección.

Sean $v(z)$ y $w(z)$ dos campos vectoriales definidos en los complejos y tales que $v(0) = w(0) = 0$.

Definición 2.1.1
Los campos v y w son formalmente equivalentes si existe una serie formal $H(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} h_j z^j$ que satisface la igualdad

$$\left[\frac{dH}{dz}\right]v(z) = w(H(z)) \tag{2.1}$$

O bien, decimos que los campos v y w son conjugados. Decimos que dos ecuaciones diferenciales son formalmente equivalentes si los campos que las definen lo son.

Recordemos que para la equivalencia de campos sólo consideraremos series tales que $H'(0) = 1$.

Proposición 2.1.1
Sean $v(z) = \nu z$ y $w(z) = \mu z$ dos campos vectoriales y $\nu \neq \mu$ entonces v y w no son formalmente equivalentes.

Demostración :
Supongamos que existe una serie $H(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} h_j z^j$ que satisface (2.1), entonces

$$[\frac{dH}{dz}]v(z) = \nu z + \hat{O}(z^2)$$
$$w(H(z)) = \mu z + \hat{O}(z^2)$$

Usando la hipótesis llegamos a una contradicción.

Proposición 2.1.2
Sea $v(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ un campo vectorial complejo con $a_1 \neq 0$ y sea $H(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} h_j z^j$ una serie formal, entonces v es formalmente equivalente a sí mismo si y sólo si H es la identidad.

Demostración :
Sea $H(z) = z$, entonces $[\frac{dH}{dz}]v(z) = v(z)$ y $v(H(z)) = v(z)$. Por lo tanto, se satisface la igualdad (2.1). Proponemos la serie $H(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} h_j z^j$. Como se cumple (2.1), entonces $h_2 = 0$.

Supongamos que $h_s = 0$ para $s = 3, \ldots, n-1$. Vamos a demostrar que $h_n = 0$. Sea $H(z) = z + h_n z^n + \cdots$, entonces

$$[\tfrac{dH}{dz}]v(z) = [1 + n h_n z^{n-1} + \hat{O}(z^n)][a_1 z + \textstyle\sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j],$$

esto es,

$$[\frac{dH}{dz}]v(z) = a_1 z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j + n a_1 h_n z^n + \hat{O}(z^{n+1}). \qquad (2.2)$$

$$v(H(z)) = a_1 z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j + a_1 h_n z^n + \hat{O}(z^{n+1}). \qquad (2.3)$$

Igualando (2.2) y (2.3) tenemos que :

$$n a_1 h_n z^n = a_1 h_n z^n + \hat{O}(z^{n+1}).$$

En consecuencia $h_n = 0$ y por lo tanto $H(z) = z$. □

Observación :

Este teorema implica la unicidad de la serie formal que hace posible la equivalencia formal entre dos campos, es decir, si v y w son formalmente equivalentes por medio de las series H_1 y H_2, donde ambas series tienen término lineal igual a la identidad, entonces $H_1 = H_2$ ya que v es formalmente equivalente a símismo por medio de $H_2^{-1} \circ H_1$.

Proposición 2.1.3
Sean $v(z) = az + a_2z^2$ y $w(z) = az$ dos campos vectoriales con $a \neq 0$, entonces v y w son formalmente equivalentes. Más aún, w es la forma normal de v.

Demostración :

Vamos a construir una serie formal h que satisfaga (2.1). Para ello definimos $H(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} h_j z^j$ y la sustituimos en dicha igualdad.

El miembro izquierdo de (2.1) se expresa como:

$$\begin{aligned} [\frac{dH}{dz}]v(z) &= (1 + \sum_{j=2}^{\infty} j h_j z^{j-1})(az + a_2z^2) \\ &= az + (2ah_2 + a_2)z^2 + (3ah_3 + 2a_2h_2)z^3 + \cdots \end{aligned}$$

es decir,

$$[\frac{dH}{dz}]v(z) = az + \sum_{j=2}^{\infty}(jah_j + (j-1)a_2h_{j-1})z^j \tag{2.4}$$

aquí usamos que $h_1 = 1$.

Análogamente, el miembro derecho se expresa como :

$$w(H(z)) = az + \sum_{j=2}^{\infty} ah_j z^j \tag{2.5}$$

Igualando las expresiones (2.4) y (2.5) obtenemos :

$$ah_j = jah_j + (j-1)a_2h_{j-1}\,, \qquad j \geq 2. \tag{2.6}$$

De la igualdad (2.6) obtenemos una fórmula recursiva para los coeficientes, a saber,

$$h_j = \frac{(j-1)a_2 h_{j-1}}{a(1-j)} = -\frac{a_2 h_{j-1}}{a}, \qquad j \geq 2$$

Finalmente,

$$h_n = (-1)^{n-1}(\frac{a_2}{a})^{n-1}.$$

Por lo tanto, la serie formal que se propone es :

$$H(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^{j-1}(\frac{a_2}{a})^{j-1}z^j.$$

La demostración se sigue de sustituir la serie formal H en la igualdad (2.1).

Proposición 2.1.4
Sea $v(z) = az + a_n z^n$ un campo vectorial en los complejos con $a \neq 0$, entonces v es formalmente equivalente al campo vectorial $w(z) = az$. Más aún, w es la forma normal de v.

Demostración :
Proponemos la serie formal $H(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} h_j z^j$ y la sustituimos en la igualdad (2.1). El miembro izquierdo es :

$$\begin{aligned} [\frac{dH}{dz}]v(z) &= (1 + \sum_{j=2}^{\infty} j h_j z^{j-1})(az + a_n z^n). \\ [\frac{dH}{dz}]v(z) &= az + \sum_{k=2}^{n-1} k a h_k z^k + (a_n + n a h_n) z^n \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}((k+1)a_n h_{k+1} + (n+k) a h_{n+k}) z^{n+k} \end{aligned} \tag{2.7}$$

De manera análoga el miembro derecho es :

$$w(H(z)) = az + \sum_{j=2}^{\infty} a h_j z^j \tag{2.8}$$

Igualando (2.7) y (2.8) tenemos la siguiente expresión :

$$ah_j = jah_j\,, \qquad 2 \leq j \leq n-1 \tag{2.9}$$

De la expresión (2.9) concluimos que :

$$h_j = 0\,, \qquad 2 \leq j \leq n-1.$$

De (2.7) y (2.8) también tenemos que $h_n = \frac{a_n}{a(1-n)}$ y

$$ah_j = (j+1-n)a_n h_{j+1-n} + jah_j\,, \qquad n+1 \leq j \leq 2n-2 \tag{2.10}$$

De la expresión (2.10) concluimos que :

$$h_j = \frac{(j+1-n)a_n h_{j+1-n}}{a(1-j)}\,, \qquad n+1 \leq j \leq 2n-2 \tag{2.11}$$

Como $n+1 \leq j \leq 2n-2$, entonces, $2 \leq j+1-n \leq n-1$. Por lo tanto, $h_j = 0$, para $n+1 \leq j \leq 2n-2$.

En conclusión, el único coeficiente distinto de cero para $2 \leq j \leq 2n-2$ es h_n y por la igualdad (2.11) tenemos que $h_{2n-1} \neq 0$.

Haciendo una sustitución recursiva de h_n en la expresión (2.11) deducimos que los únicos coeficientes distintos de cero tienen la forma $j = mn-(m-1)$ con m en los números naturales.

Por lo tanto,

$$H(z) = z + \sum_{i=1}^{\infty} h_{in-(i-1)} z^{in-(i-1)}$$

o bien,

$$H(z) = z + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_n^m \prod_{k=0}^{m-1}(kn-k+1)}{m!a^m(1-n)^m} z^{mn-m+1}$$

□

TEOREMA 2.1.1

Sean $v(z) = az + a_2z^2 + \cdots$ y $w(z) = az$ dos campos vectoriales con coeficientes en los complejos y $a \neq 0$ entonces w es la forma normal de v.

Demostración :

Haciendo una construcción análoga a la de los dos teoremas anteriores de esta sección proponemos $H(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} h_j z^j$, donde

$$h_n = \frac{1}{a(1-n)} \sum_{i=2}^{n} (n-i+1) a_i h_{n-i+1}.$$

La demostración se sigue de sustituir la serie H en la igualdad (2.1). $\square$

El siguiente teorema es un resultado interesante para el caso en que los campos vectoriales tienen parte lineal nula.

TEOREMA 2.1.2

Sea $v(z) = z^k + a_m z^m + \cdots$ un campo vectorial, entonces v es formalmente equivalente al campo $w(z) = z^k + bz^{2k-1}$

Demostración :

La demostración consiste en eliminar sucesivamente los términos de grado mayor que k y distintos de $2k-1$. Primero se hará la construcción de la serie formal, para la cual, proponemos el polinomio $H_s(z) = z + h_s z^s$. Para obtener el valor de s, sustituimos la serie H_s en la igualdad (2.1) y obtenemos,

$$\left[\frac{dH_s}{dz}\right] v(H_s^{-1}(z)) = z^k + a_m z^m + (sh_s - kh_s) z^{k+s-1} + \hat{O}(z^{k+s}).$$

Como tenemos libertad para elegir el valor de la constante s, hacemos $m = k + s - 1$, es decir, $s = m - k + 1$ y $h_s = \frac{a_m}{k-s}$. Sustituimos el valor de s en h_s y obtenemos

$$h_s = \frac{a_m}{2k - m - 1},$$

el cual se encuentra bien definido si $m \neq 2k - 1$. Si $m = 2k - 1$ entonces no podemos eliminar el monomio z^{2k-1} ya que el coeficiente h_s no está determinado. Observemos que el coeficiente de dicho monomio quizás se pueda eliminar cuando aplicamos el proceso a los monomios de grado menor que $2k - 1$, pero si al llegar al monomio de dicho grado no se ha eliminado, entonces aparecerá en la forma normal.

Supongamos que $m > 2k-1$, entonces $\tilde{H}_1(z) = z + \frac{a_m}{2k-m-1} z^{m-k+1}$ satisface

$$\left[\frac{d\tilde{H}_1}{dz}\right] v(\tilde{H}_1^{-1}(z)) = z^k + hO(z^{m+1}).$$

Supongamos que hemos encontrado $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tales que

$$H_n = \tilde{H}_{m-k+n} \circ \cdots \circ \tilde{H}_{m-k+1}.$$

y

$$\left[\frac{dH_n}{dz}\right] v(H_n^{-1}(z)) = z^k + \hat{O}(z^{m+n}). \tag{2.12}$$

Denotando el miembro izquierdo de la última igualdad por v_n, tenemos que,

$$v_n = z^k + l_{m+n} z^{m+n} + \hat{O}(z^{m+n+1}).$$

Para eliminar el término z^{m+n} proponemos la serie

$$h_r(z) = z + \frac{l_{m+n}}{k-r} z^r, \qquad r = m - k + n + 1,$$

entonces,

$$\left[\frac{dH_r}{dz}\right] v(H_r^{-1}(z)) = z^k + \hat{O}(z^{m+n+1}).$$

Así la igualdad (2.1) se satisface con la composición infinita de los polinomios $\tilde{H}_i$. □

2.2 Formas normales formales para campos vectoriales en varias variables.

Un campo vectorial formal es un vector cuyas componentes son series de potencias en la variable $z \in \mathbf{C}^n$. Consideremos un campo formal complejo en series de potencias $v(z) = Az + \cdots$ y supongamos que la matriz A es diagonalizable.

Definición 2.2.1
Decimos que el vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ compuesto por los n valores propios de A, es **resonante** *si entre dichos valores existe una relación de la forma $\lambda_s = < m, \lambda >$, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbf{Z}_+^n \cup \{0\}$ y $\Sigma m_k \geq 2$. A una relación tal le llamamos* **resonancia** *y el número $\mid m \mid = \Sigma m_k$ es el orden de dicha resonancia.*

Las expresiones $< m, \lambda >$ y $m \cdot \lambda$ denotan el producto punto de los vectores m y λ en $\mathbf{C}^n$.

TEOREMA 2.2.1 *(Teorema de Poincaré)*
Si los valores propios de la matriz A forman un conjunto no resonante, entonces la ecuación

$$\dot{z} = Az + \cdots \tag{2.13}$$

es formalmente equivalente a la ecuación lineal $\dot{z} = Az$. Los puntos suspensivos denotan términos de grado mayor que uno en z.

Es importante observar que en este teorema no se cumple la implicación inversa. El siguiente campo vectorial es un contraejemplo de éste ya que es formalmente equivalente a su parte lineal y tiene la propiedad de tener una resonancia. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1 \\ \dot{x_2} &= 3x_2 + x_1 x_3 + \frac{1}{\pi - 2} {x_1}^3 \\ \dot{x_3} &= \pi x_3 + {x_1}^2 \end{aligned}$$

el cual tiene sólo una resonancia $\lambda_2 = 3\lambda_1$ cuyo monomio resonante es ${x_1}^3 e_2$. La razón de que esto suceda se debe a que cuando eliminamos los términos de grado 2 la suma de los coeficientes de los términos de grado 3 se anulan. Es un buen ejercicio para el lector comprobar esto.

La demostración del teorema de Poincaré consiste en la eliminación sucesiva de los términos de grado $2, 3, \ldots$ del lado derecho de la igualdad (2.13). Cada paso está basado en la solución de una ecuación lineal. Primero deduciremos dicha ecuación.

Consideremos un campo vectorial polinomial h en $\mathbf{C}^n$ el cual satisface $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 1$ (esto quiere decir que h tiene término constante igual a cero y término lineal igual a la identidad).

Definimos el grado de un vector polinomial como el grado del término de menor grado, considerando todas sus componentes.

Definición 2.2.2
El **corchete de Poisson** *de los campos* Az *y* $h(z)$ *es la expresión*

$$(D_z h)Az - Ah(z)$$

y lo denotamos por $[Az, h(z)]$.

Denotemos por L_A el operador que convierte a todo campo vectorial h en el corchete de Poisson del campo lineal Az con el campo dado h, esto es,

$$L_A h = (D_z h)Az - Ah(z).$$

Reescribamos la ecuación (2.13) como

$$\dot{z} = Az + v_r(z) + \ldots$$

donde $v_r(z)$ denota un campo vectorial polinomial de grado r, es decir, un vector donde cada componente tiene grado r o es igual a cero.

Observemos que el grado de cada componente del vector v_r es mayor o igual a 2. La ecuación que ahora nos interesa resolver es $L_A h = -v_r$. A dicha ecuación se le llama **ecuación homológica.**

Observación:

El operador lineal L_A actúa en el espacio de campos vectoriales formales, el cual deja invariante el espacio de vectores polinomiales de cualquier grado. Esto se verá en la siguiente proposición.

Denotemos por e_i un vector propio de A con su respectivo eigenvalor valor propio λ_i y por $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ las coordenadas con respecto a la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Por z^m entenderemos $z_1{}^{m_1} z_2{}^{m_2} \cdots z_n{}^{m_n}$.

Proposición 2.2.1
Si el operador A es diagonal entonces L_A también lo es. Los vectores propios de L_A son los vectores monomiales $z^m e_s$ y los valores propios de L_A son combinaciones lineales de los de A, a saber,

$$L_A z^m e_s = [< m, \lambda > -\lambda_s] z^m e_s.$$

Demostración :

Como L_A es una combinación lineal de A entonces también es diagonal. Demostremos que los vectores propios de L_A son de la forma $z^m e_s$. Sabemos que

$$L_A z^m e_s = (D_z z^m e_s) Az - Az^m e_s.$$

Reescribiendo la parte derecha obtenemos

$$(D_z z^m e_s) Az = \Sigma \lambda_i m_i z_i^{-1} z^m z_i\,,$$

es decir,

$$(D_z z^m e_s) Az = (m, \lambda) z^m e_s. \tag{2.14}$$

y

$$Az^m e_s = \lambda_s z^m e_s. \tag{2.15}$$

De las igualdades (2.14) y (2.15) tenemos que

$$L_A z^m e_s = [< m, \lambda > -\lambda_s] z^m e_s. \tag{2.16}$$

lo que demuestra la proposición. □

De aquí se puede observar que si la colección de valores propios de A es no resonante entonces los valores propios de L_A son distintos de cero. Con ésto, la ecuación homológica $L_A h = -v_r$ tiene una solución en el espacio de vectores polinomiales de grado $r \geq 2$. Así, podemos enunciar la siguiente

Proposición 2.2.2
Si la colección de valores propios de A es no resonante entonces la ecuación homológica $L_A h = -v_r$ tiene una solución en el espacio de series formales de grado r para todo campo vectorial formal v_r(de grado r).

Es decir, en caso de no existir resonancias de orden r la ecuación homológica es soluble para todo vector polinomial homogéneo v_r.

Demostración :

El campo vectorial v_r lo podemos expresar como

$$v_r(z) = \sum_{m,s} v_{m,s} z^m e_s, \quad |m| = r,$$

y la serie formal h como

$$h(z) = \sum_{m,s} h_{m,s} z^m e_s.$$

Para resolver la ecuación homológica deseada basta resolverla para cada monomio, es decir, basta resolver la ecuación

$$L_A h_{m,s} z^m e_s = -v_{m,s} z^m e_s. \tag{2.17}$$

Consideremos el monomio $v_{m,s} z^m e_s$ y observemos que, por la proposición 2.2.1, se cumple la siguiente igualdad

$$L_A h_{m,s} z^m e_s = h_{m,s}[< m, \lambda > -\lambda_s] z^m e_s.$$

Haciendo uso de la hipótesis $< m, \lambda > -\lambda_s \neq 0$, para todo s, concluimos de la igualdad (2.17) y de la expresión anterior que,

$$h_{m,s} = -\frac{v_{m,s}}{< m, \lambda > -\lambda_s}, \tag{2.18}$$

que satisface, para cada subíndice s, la ecuación homológica (2.17). □

Demostración del Teorema de Poincaré:

Reescribimos la ecuación (2.13) como $\dot{z} = Az + v_r(z) + \ldots$ y consideremos la ecuación homológica $L_A h = -v_r$. Por la proposición 2.2.2 sabemos que ésta ecuación tiene una solución h_r tal que $L_A h_r = -v_r$ y por el teorema 2.2.1 tenemos la siguiente igualdad

$$\sum_{|m|=r} \sum_{s} h_{m,s}[< m, \lambda > -\lambda_s] z^m e_s = -\sum_{|m|=r} \sum_{s} v_{m,s} z^m e_s. \tag{2.19}$$

Sea

$$H_r(z) = z + \sum_{|m|=r} \sum_{s} h_{m,s} z^m e_s, \text{ donde } h_{m,s} = -\frac{v_{m,s}}{< m, \lambda > -\lambda_s}.$$

Denotemos por $v(z)$ el campo vectorial de la ecuación (2.13),entonces

$$\begin{aligned}
(D_z H_r)v(z) - AH_r(z) &= (D_z H_r)(Az + v_r(z) + \cdots) - AH_r(z) \\
&= (Id + \frac{d}{dz}h_r(z))(Az + v_r(z) + v_{r+1}(z) + \cdots) - AH_r(z) \\
&= Az + v_r(z) - AH_r(z) + \frac{d}{dz}h_r(z)Az + v_{r+1}(z) + \cdots \\
&= Az + v_r(z) - Az - Ah_r(z) + \frac{d}{dz}h_r(z)Az + v_{r+1} + \cdots
\end{aligned}$$

El miembro del lado derecho de la última igualdad es:

$$(D_z H_r)v(z) - AH_r(z) = v_r(z) + L_A h_r(z) + v_{r+1}(z) + \cdots$$

Por (2.19) la última igualdad se reduce a

$$(D_z H)v(z) = AH(z) + v_{r+1}(z) + \cdots$$

donde v_{r+1} denota los términos de orden $r + 1$ y observemos que v_{r+1} no es el de antes, ya que ha sido modificado por las operaciones realizadas. Sucesivamente eliminamos los términos de orden $r + 1, r + 2, \cdots$, De modo que se ha demostrado que para cada número natural $N (N \geq 2)$, la ecuación (2.13) puede ser reducida a

$$\dot{z} = Az + \hat{O}(| z |^N).$$

□

Análisis para el caso real con valores complejos conjugados.

Ahora haremos un análisis de la forma normal para campos vectoriales definidos en $\mathbf{R}^n$ cuyos valores propios son complejos.

Consideremos el campo vectorial $v(x) = Ax + \cdots$ definido en $E \subset \mathbf{R}^n$ cuya matriz A de la parte lineal en el origen tiene valores propios complejos

$\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_m, \bar{\lambda}_m\}$. Entonces E admite una descomposición en suma directa de subespacios invariantes bidimensionales E_i de la misma forma que A admite una descomposición en suma directa de transformaciones de dimensión 2 tales que

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m\,,\ T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_m.$$

Donde los valores propios de T_i son λ_i y $\bar{\lambda}_i$.

Por esta razón es suficiente analizar sólo el sistema en dimensión 2. Para un sistema bidimensional con valores propios complejos exite un cambio de coordenadas que lo transforma a uno de la forma (ver [HIR])

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (ax - by + \cdots, bx + ay + \cdots).$$

Analicemos primero cuando la parte real de los valores propios es distinta de cero. Proponemos el cambio de coordenadas

$$z_1 = x + iy\,,\ z_2 = x - iy.$$

Este cambio reduce el sistema a

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= ax - by + ibx + iay + h(x,y) + ig(x,y) \\ \dot{z}_2 &= ax - by - ibx + -iay + h(x,y) - ig(x,y) \end{aligned}$$

Y lo reescribimos como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (a + ib)(x + iy) + h(x,y) + ig(x,y) \\ \dot{z}_2 &= (a - ib)(x - iy) + h(x,y) - ig(x,y) \end{aligned}$$

Como las variables x y y se pueden expresar en términos de z_1 y z_2 entonces las series f y g están en términos de z_1 y z_2.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda z_1 + f(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 &= \bar{\lambda} z_2 + \bar{f}(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Donde $\lambda = a + ib$. Ahora ya tenemos un sistema en los complejos y como no hay resonancias, entonces, por el teorema de Poincaré es equivalente formalmente al sistema

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda z_1 \\ \dot{z}_2 &= \bar{\lambda} z_2 \end{aligned}$$

Sea $r^2 = z\bar{z}$ y si derivamos esta ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{r^2} &= z\dot{\bar{z}} + \dot{z}\bar{z} \\ &= \bar{\lambda}r^2 + \lambda r^2 = (2Re\lambda)r^2 \end{aligned}$$

Y dependiendo del signo de $Re\lambda$ será variedad estable o inestable.

Ahora el problema se reduce a analizar el sistema cuando la parte real de los valores es cero. En este caso no podemos decir nada sobre el comportamiento del sistema ya que las partes consecutivas (cuadrática, cúbica,...) pueden afectar la parte lineal. Sea $(\dot{x}, \dot{y}) = (-by + h(x,y), bx + g(x,y))$ el sistema a estudiar. Como la información que tenemos es para campos en los complejos, entonces transformaremos nuestro sistema real a un sistema complejo mediante los siguientes cambios :

$$z_1 = x + iy\,,\ z_2 = x - iy.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= \dot{x} + i\dot{y} = -by + ibx + h(x,y) + ig(x,y) \\ \dot{z_2} &= \dot{x} - i\dot{y} = -by - ibx + h(x,y) - ig(x,y) \end{aligned}$$

Reescribimos este sistema como sigue

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= ib(x + iy) + h(x,y) + ig(x,y) \\ \dot{z_2} &= -ib(x - iy) + h(x,y) - ig(x,y) \end{aligned}$$

Por analogía al análisis anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= ibz_1 + f(z_1, z_2) \\ \dot{z_2} &= -ibz_2 + \bar{f}(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Observemos que la igualdad $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, donde $\lambda = ib$ genera una infinidad de resonancias cuyos monomios resonantes son de la forma $z_i {z_1}^k {z_2}^k$ en la i-ésima componente. Por el teorema de Poincaré - Dulac el sistema se transforma al sistema

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= \lambda z_1 + c_{21} z_1 (z_1 z_2) + c_{32} z_1 ({z_1}^2 {z_2}^2) + \cdots \\ \dot{z_2} &= \bar{\lambda} z_2 + d_{12} z_2 (z_1 z_2) + d_2 \,[\text{illegible}]\, ({z_1}^2 {z_2}^2) + \cdots \end{aligned}$$

Como $z_2\bar{z_1}$ entonces $z_1{}^k z_2{}^{\bar{k}} = r^{2k}$ donde r es el módulo o norma del complejo z y $d_{nm} = \bar{c_{mn}}$. Lo que nos interesa saber es el comportamiento cerca del origen, si es un centro, una espiral, etc ... lo cual implica que basta con saber el comportamiento de la norma r.

Sea $r^2 = |z_1|^2 = z_1 z_2$, entonces

$$\begin{aligned}(\dot{r^2}) &= z_1\dot{z_2} + \dot{z_1}z_2 = \bar{\lambda}r^2 + \bar{c_{21}}r^4 + \bar{c_{32}}r^6 + \cdots \\ &+ \lambda r^2 + c_{21}r^4 + c_{32}r^6 + \cdots\end{aligned}$$

Finalmente $(\dot{r^2}) = 2Rec_{21}r^4 + \hat{O}(r^6)$. Por lo tanto, si $Rec_{21} > 0$ entonces el retrato fase es una espiral inestable y si es negativa, es una espiral estable.

Analicemos un poco la serie que hizo posible la equivalencia formal entre los sistemas, la cual escribimos como

$$H(z_1, z_2) = (\sum_{i,j} h_{ij} z_1{}^i z_2{}^j, \sum_{i,j} l_{ij} z_1{}^i z_2{}^j).$$

Lo coeficientes están dados de la siguiente manera

$$\begin{aligned}h_{ij} &= \frac{v_{ij}}{(i-1)\lambda + j\bar{\lambda}}, i \geq 2 \text{ y } j \neq i-1, \\ l_{ij} &= \frac{u_{ij}}{i\lambda + (j-1)\bar{\lambda}}, i \geq 1 \text{ y } j \neq i+1\end{aligned}$$

Queremos que H restringida a los reales mande coordenadas reales en coordenadas reales, por lo cual debe de satisfacer

$$h_{mn} = \bar{h_{nm}} \text{ y } l_{mn} = \bar{l_{nm}} \quad \forall n, m.$$

Por lo tanto los coeficientes $h_{k,k}$ y $l_{k,k}$ son reales.

El siguiente ejemplo ilustra el Teorema de Poincaré.

Ejemplo 2.2.1

Consideremos dos campos vectoriales definidos en el espacio bidimensional de los complejos,

$$\begin{aligned}v(z_1, z_2) &= (\lambda_1 z_1 + a_{n,m} z_1^n z_2^m \,, \lambda_2 z_2) \quad y \\ w(z_1, z_2) &= (\lambda_1 z_1 \,, \lambda_2 z_2)\end{aligned}$$

donde el vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ es no resonante, entonces v y w son formalmente equivalentes.

En éste caso el vector homogéneo con términos a eliminar es

$$v_k(z_1, z_2) = (a_{n,m} z_1^n z_2^m, 0), \quad k = n + m.$$

Por la proposición 2.2.2 existe un polinomio

$$h_k(z_1, z_2) = (\frac{a_{n,m}}{n\lambda_1 + m\lambda_2 - \lambda_1} z_1^n z_2^m \, , 0)$$

tal que satisface la ecuación homológica $L_A h_k = -v_k$. En consecuencia, por el Teorema 2.2.1, nuestra ecuación diferencial $\dot{z} = (\lambda_1 z_1 + a_{n,m} z_1^n z_2^m \, , \lambda_2 z_2)$ se puede transformar en la ecuación diferencial $\dot{z} = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$. □

Supongamos ahora que para el campo de la ecuación (2.13) existe una resonancia, a saber, $\lambda_s =< m, \lambda >$. Entonces por la igualdad (2.18) no existe ninguna serie formal que pueda eliminar el monomio $z^m e_s$, lo cual implica que la forma normal de (2.13) es

$$\dot{z} = Az + a_{m,s} z^m e_s:$$

Al monomio $z^m e_s$ se le llama **monomio resonante.** En consecuencia, podemos enunciar el siguiente teorema, cuya demostración omitimos ya que se sigue de aplicar los pasos de la demostración del teorema de Poincaré para los términos no resonantes. Es importante observar que sólo con una igualdad de la forma $< \lambda, m >= 0$ se generan una infinidad de resonancias con sus respectivos monomios resonantes $x^m x_i$ que aparecen en la i-ésima componente.

TEOREMA 2.2.2 *(Teorema de Poincaré-Dulac)*
La ecuación $\dot{z} = Az + \cdots$ *es formalmente equivalente a la ecuación*

$$\dot{z} = Az + w(z)$$

donde $w(z)$ es una serie formada por términos resonantes.

Capítulo 3

Formas normales analíticas para campos vectoriales.

3.1 Formas normales analíticas para campos vectoriales en una variable.

En este capítulo haremos un análisis sobre la forma normal de un campo vectorial holomorfo o analítico en el caso real.

En la primera sección estudiaremos campos analíticos en una variable y en la segunda, trabajaremos con campos en varias variables. Demostraremos algunas proposiciones que utilizaremos en el capítulo 5 y finalizaremos enunciando los teoremas de formas normales analíticas.

Analicemos el caso analítico (real y complejo) en una variable, donde el punto singular es no degenerado, es decir, es un cero de orden uno.

Proposición 3.1.1
Sea v un campo vectorial analítico en $\mathbf{R}$ *ó* $\mathbf{C}$ *y sea p un punto singular no degenerado de dicho campo. Entonces, v es analíticamente equivalente a su parte lineal.*

Demostración :
Sin pérdida de generalidad supongamos que el punto singular es el origen.

Entonces v lo podemos escribir como sigue

$$v(z) = lz + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j, \qquad l \neq 0.$$

Definimos el campo $w(z) = lz$, entonces vamos a demostrar que existe una función analítica, definida en una vecindad del origen, tal que

$$\left[\frac{dH}{dz}\right] v(z) = w(H(z)) \ \ y \ \ H(0) = 0. \tag{3.1}$$

Observemos que se pide $H(0) = 0$ para que mande el origen en él mismo, con lo cual podemos escribir $H(z) = zh(z)$ y $h(0) = 1$ para que H sea invertible.

La ecuación (3.1) la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\frac{1}{lzh(z)}(h(z) + z\frac{dh}{dz}) = \frac{1}{v(z)} \tag{3.2}$$

Como el origen es un polo de orden uno del campo $\frac{1}{v(z)}$ entonces la función $\tilde{v}(z) = \frac{1}{v(z)} - \frac{1}{lz}$ es analítica en el origen. Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(z)} - \frac{1}{lz} &= \frac{1}{lz(1 + b_2 z + \ldots)} - \frac{1}{lz} \\ &= \frac{1}{lz}(-b_2 z + \ldots), \qquad b_2 = \frac{a_2}{l}. \end{aligned}$$

La ecuación (3.2) la reescribimos como sigue :

$$\frac{dh}{dz} \cdot \frac{1}{lh(z)} = \frac{1}{v(z)} - \frac{1}{lz}. \tag{3.3}$$

Integrando la ecuación (3.3) de ambos lados en una vecindad suficientemente pequeña del origen,

$$\frac{1}{l}\int_0^z \frac{h'(\xi)}{h(\xi)} d\xi = \int_0^z \left(\frac{1}{l\xi}(-b_2\xi + \ldots)\right) d\xi.$$

Esto es,

$$\frac{1}{l}\ln h(z) = \frac{1}{l}\int_0^z (-b_2 + O(\xi)) d\xi. \tag{3.4}$$

Las integrales anteriores se entienden, en los complejos, como la integral sobre cualquier trayectoria que une el origen con z y aquí estamos considerando la rama de logaritmo que manda al uno en el origen.

Despejando h de la ecuación (3.4) obtenemos

$$h(z) = \exp(-b_2 z + o(z^2)).$$

Por lo tanto,

$$h(z) = 1 - b_2 z + O(z^2).$$

Claramente $h(0) = 1$ y h es analítica en una vecindad del origen. Finalmente, el cambio de coordenadas buscado está dado por

$$H(z) = z - \frac{a_2}{l} z^2 + O(z^3).$$

Como el integrando de la expresión (3.4) es analítico, entonces h lo es también ya que es composición de dos funciones analíticas. $\square$

Ahora analizaremos el caso analítico complejo en una variable cuando el punto singular es degenerado.

Proposición 3.1.2
Sea $v(z) = z^k \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$, $b_o = 1$ un campo vectorial analítico con singularidad degenerada en el origen, entonces v es analíticamente equivalente al campo

$$w(z) = z^k + a z^{2k-1} \tag{3.5}$$

Demostración :

Para demostrar la equivalencia analítica se quiere encontrar una función H analítica e invertible que satisfaga la igualdad

$$\left[\frac{dH}{dz}\right] v(z) = w(H(z)) \tag{3.6}$$

y $H(0) = 0$ para que H mande el punto singular del campo v en el del campo w. Sustituyendo la expresión (3.5) en (3.6) obtenemos

$$\frac{\frac{dH}{dz}}{H^k + aH^{2k-1}} = \frac{1}{v(z)} \tag{3.7}$$

El siguiente Lema nos ayudará a convertir el campo $\frac{1}{v(z)}$ en una expresión analítica.

Lema :
Sean $v(z)$ y $w(z)$ dos campos analíticamente equivalentes en una vecindad del origen y supongamos que dicho punto es un cero del mismo orden (mayor que uno) de ambos campos, entonces,

$$Res(\frac{1}{v(z)},0)^1 = Res(\frac{1}{(w\circ f)(z)},0).$$

Demostración :
Como los campos v y w son analíticamente equivalentes, existe f analítica tal que $\frac{df}{dz}v(z) = w(f(z))$, es decir,

$$\int_\gamma \frac{1}{v(z)}dz = \int_{f(\gamma)} \frac{1}{w(\xi)}d\xi$$

donde $\gamma(t) = \exp(it)\epsilon$, $t \in [0,1]$. Entonces,

$$Res(\frac{1}{v(z)},0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{v(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w(f(z))}\frac{df}{dz}dz = Res(\frac{1}{(w\circ f)(z)},0).$$

Lo que demuestra el Lema. □

Del lema anterior se sigue que los campos $\frac{1}{w(\xi)}$ y $\frac{1}{v(z)}$ tienen el mismo residuo. Para calcularlo observemos que, como $w(\xi) = \xi^k + a\xi^{2k-1}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(\xi)} &= \frac{1}{\xi^k(1+a\xi^{k-1})}\\ &= \xi^{-k}(1-a\xi^{k-1}+O(\xi^k))\\ &= \xi^{-k}-a\xi^{-1}+g(\xi)\end{aligned}$$

donde $g(\xi)$ es una función holomorfa. Así, el residuo es $-a$. Ahora retomamos la expresión (3.7), a la cual le restamos la singularidad $-\frac{a}{z}$,

$$\frac{\frac{dH}{dz}}{H^k + aH^{2k-1}} + \frac{a}{z} = \frac{1}{v(z)} + \frac{a}{z},$$

[1]Esto denota el residuo del campo $\frac{1}{v}$ en el origen.

sumándole y restándole $\frac{a\frac{dH}{dz}}{H}$ a dicha expresión y reagrupando, obtenemos

$$\frac{dH}{dz}\left(\frac{1}{H^k + aH^{2k-1}} + \frac{a}{H}\right) - a\left(\frac{z\frac{dH}{dz} - H}{zH}\right) = \frac{1}{v(z)} + \frac{a}{z}.$$

Por esta igualdad queremos encontrar ahora una función analítica que satisfaga

$$\int_0^H \left(\frac{1}{\tilde{H}^k + a\tilde{H}^{2k-1}} + \frac{a}{\tilde{H}}\right)d\tilde{H} - a\ln\left(\frac{H}{z}\right) = \int_0^z \left(\frac{1}{v(\xi)} + \frac{a}{\xi}\right)d\xi \qquad (3.8)$$

Primero se justificará por que podemos tomar al cero como límite inferior, de las integrales anteriores. Definimos la función

$$\begin{aligned}
\phi_c(z,w) &= \int_c^{zw} \left(\frac{1}{\xi^k + a\xi^{2k-1}} + \frac{a}{\xi}\right)d\xi - a\ln(w) - \int_c^z \left(\frac{1}{v(\xi)} + \frac{a}{\xi}\right)d\xi \\
&= \int_c^{zw} \left(\xi^{-k}(1 - a\xi^{k-1} + b\xi^k + \cdots) + \frac{a}{\xi}\right)d\xi \\
&- a\ln(w) - \int_c^z \left(\frac{1}{v(\xi)} + \frac{a}{\xi}\right)d\xi
\end{aligned}$$

es decir,

$$\phi_c(z,w) = \int_c^{zw} (\xi^{-k} + g(\xi))d\xi - a\ln(w) - \int_c^z \left(\frac{1}{v(\xi)} + \frac{a}{\xi}\right)d\xi.$$

donde $g(\xi)$ es una función holomorfa. Sabemos que aplicando un número finito de pasos del Teorema de Poincaré-Dulac al campo $v(z)$, obtenemos un cambio polinomial que hace analíticamente equivalentes a dicho campo y al campo $\tilde{v}(z) = z^k + az^{2k-1} + \cdots$, así, la última igualdad de ϕ_c es analíticamente equivalente a la expresión :

$$\phi_c(z,w) = \int_c^{zw} \xi^{-k}d\xi + \int_c^{zw} g(\xi)d\xi - a\ln(w) - \int_c^z (\xi^{-k} + f(\xi))d\xi$$

donde $f(\xi)$ es también una función holomorfa en una vecindad del origen. Finalmente,

$$\phi_c(z,w) = \int_z^{zw} \xi^{-k}d\xi + \int_c^{zw} g(\xi)d\xi - a\ln(w) - \int_c^z f(\xi)d\xi.$$

Como ϕ_c está bien definida para todo c, entonces cuando $c \to 0$ tenemos,

$$\phi_0(z,w) = \int_z^{zw} \xi^{-k} d\xi - a\ln(w) + \int_0^{zw} g(\xi)d\xi - \int_0^z f(\xi)d\xi$$

Observemos que resolver la ecuación (3.8) se reduce a encontrar una función $h(z)$ analítica que satisfaga $\phi_0(z,h(z)) = 0$ y $h(0) \neq 0$. Así, la función H que buscamos estará dada por $H(z) = zh(z)$. Para resolver dicho problema, aplicaremos el Teorema de la función Implícita a la función $\phi(z,w) = z^{k-1}\phi_0(z,w)$ en el punto $(0,1)$.

$$\begin{aligned}\phi(z,w) &= z^{k-1}\int_z^{zw} \xi^{-k} d\xi - az^{k-1}\ln(w) \\ &+ z^{k-1}\int_0^{zw} g(\xi)d\xi - z^{k-1}\int_0^z f(\xi)d\xi\end{aligned}$$

Claramente $\phi(0,1) = 0$ y

$$\frac{\partial\phi}{\partial w}\Big|_{(0,1)} = z^{k-1}\frac{\partial}{\partial w}\int_z^{zw} \xi^{-k}d\xi\Big|_{(0,1)} = \frac{z^{k-1}}{-k+1}\frac{\partial}{\partial w}\left((zw)^{-k+1} - z^{-k+1}\right)\Big|_{(0,1)}$$

y por el Teorema de Continuación Analítica,

$$\frac{\partial\phi}{\partial w}\Big|_{(0,1)} = w^{-k}\Big|_{(0,1)} = 1.$$

Entonces existe una función analítica h y una vecindad V del punto $(0,1)$ tal que para todo punto $(z,w) \in V, \phi(z,w)$ tiene exactamente una solución $h(z) = w$ tal que

$$h(0) = 1 \quad \text{y} \quad \phi(z,h(z)) = 0, \qquad z \in V.$$

Por lo tanto,

$$\phi(z,h(z)) = z^{k-1}\Big[\int_z^{zh(z)} \xi^{-k}d\xi - a\ln h(z) + \int_0^{zh(z)} g(\xi)d\xi - \int_0^z f(\xi)d\xi\Big] = 0.$$

Lo que implica

$$\int_z^{zh(z)} \xi^{-k}d\xi - a\ln h(z) + \int_0^{zh(z)} g(\xi)d\xi - \int_0^z f(\xi)d\xi = 0.$$

Como $H(z) = zh(z)$, entonces,

$$\int_z^{H(z)} \xi^{-k} d\xi - a \ln \frac{H(z)}{z} + \int_0^{H(z)} g(\xi) d\xi - \int_0^z f(\xi) d\xi = 0.$$

También se puede verificar que $H(0) = 0$ y $H'(0) = 1$. Por lo tanto,

$$H(z) = z + \cdots$$

la cual es invertible en una vecindad del origen. □

3.2 Formas analíticas para campos en varias variables.

Los resultados que enseguida se dan, dependen de la posición geométrica de los valores propios en el plano.

Consideremos el espacio formado por todas las posibles n-adas de eigenvalores $\mathbf{C}^n = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) : \lambda_i$ está en los complejos$\}$.

Definición 3.2.1
Definimos un plano resonante como un hiperplano en $\mathbf{C}^n$ *que está dado por una ecuación de la forma* $\lambda_s = < m, \lambda >$, *donde* $m = (m_1, \ldots, m_n)$ *es un vector con entradas enteras no negativas y satisface* $\sum m_i \geq 2$.

Definición 3.2.2 *(Dominios de Poincaré y de Siegel)*
Un vector $\lambda \in \mathbf{C}^n$ *pertenece al Dominio de Poincaré si la envoltura convexa de sus componentes no contiene al cero y* λ *pertenece al Dominio de Siegel si su envoltura lo contiene.*

Decimos que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *pertenece a la envoltura convexa de* $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *si* x *se expresa como* $x = \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i$ *con* $0 \leq m_i \leq 1$, $\sum m_i = 1$ *y* m_i *en los reales y la denotamos por* $Conv\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Proposición 3.2.1
El Dominio de Poincaré es abierto.

Demostración :

Sea $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un elemento del dominio de Poincaré. Definimos la distancia del punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ al punto $y = (y_1, \ldots, y_n)$ como

$$d(x,y) = max\{| x_i - y_i |: 1 \leq i \leq n\}.$$

Llamamos $\Lambda = Conv\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ y consideramos el conjunto

$$A = \{d(z,0) : z \in \Lambda\}.$$

Claramente $A \neq \emptyset$ y $M > 0$, donde $M = minA$. Consideremos ahora la recta l que satisface

$$d(l,z) \geq \frac{M}{2}, \forall z \in \Lambda \quad y \quad d(l,0) = \frac{M}{2}.$$

Sea $\epsilon = \frac{M}{4}$ y consideremos el conjunto $B_\epsilon(\lambda) = \{w \in \mathbf{C}^n : d(w,\lambda) < \epsilon\}$ entonces $min\,\{d(z,l) : z \in B_\epsilon(\lambda)\} = \frac{M}{4}$. Ahora lo que se va a demostrar es que toda $w \in B_\epsilon(\lambda)$ está en el dominio de Poincaré.
Como $w \in B_\epsilon(\lambda)$ entonces la envoltura convexa de w está en $B_\epsilon(\lambda)$. Esto implica que la recta l separa la envoltura convexa de w del origen. □

Ahora veremos algunos resultados en el Dominio de Poincaré.

Proposición 3.2.2
Todo punto que está en el Dominio de Poincaré, satisface, a lo más, un número finito de resonancias y existe una vecindad en la que cada uno de sus puntos satisface un número finito de resonancias de un conjunto finito determinado de planos resonantes.

Demostración :

Primero demostraremos que cada λ^0 en el Dominio de Poincaré, satisface un número finito de resonancias.
Consideremos el conjunto $B = \{\lambda_s^0 = < m, \lambda^0 >: 1 \leq s \leq n\}$ formado por todas las posibles resonancias del punto λ^0. Sabemos que existe una recta l que separa la envoltura convexa de $\{\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0\}$ del origen, por la cual trazamos un vector unitario perpendicular η que pase por el origen y consideramos las proyecciones ortogonales sobre dicha recta de los valores propios λ_i^0. Todas éstas proyecciones, por construcción, son mayores que la distancia α de la recta l al origen.

Como hay un número finito de valores propios λ_i^0 entonces existe el máximo de sus proyecciones. Definimos $M = \max\{(\lambda_s^0 \cdot \eta) + 1 : 1 \leq s \leq n\}$. Supongamos que λ^0 satisface una infinidad de resonancias, entonces, podemos suponer sin pérdida de generalidad que, para λ_s^0 se satisfacen una infinidad de relaciones del tipo

$$\lambda_s^0 = \sum_{j=1}^{n} m_j \lambda_j^0.$$

Así, tenemos las siguientes desigualdades :

$$M > \lambda_s^0 \cdot \eta = \sum_{i=1.}^{n} m_i(\lambda_i^0 \cdot \eta) \geq \alpha(\sum_{i=1}^{n} m_i).$$

Como hay una infinidad de planos resonantes tenemos que se satisface la desigualdad $M \geq \alpha(\sum_{i=1}^{n} m_i)$ para una infinidad de enteros positivos m_i. Así podemos construir sucesiones $\{(m_{k_1}, \ldots, m_{k_n})\}_{k \in N}$ tales que si $k < r$ entonces $\sum_{i=1}^{n} m_{k_i} < \sum_{i=1}^{n} m_{r_i}$ y si $k \to \infty$, $\sum_{i=1}^{n} m_{k_i} \to \infty$, lo que contradice que las sumas $\alpha \sum_{i=1}^{n} m_i$ estén acotadas por M. Por lo tanto, λ^0 satisface sólo un número finito de resonancias.

Ahora consideremos el conjunto

$$R = \{m = (m_1, \ldots, m_n) : \lambda_s^0 = (m \cdot \lambda^0) \text{ para alguna } s\},$$

el cual es finito. Sea $\Upsilon = \{m : \sum_{i=1}^{n} m_i(\lambda_i^0 \cdot \eta) < M\}$. Observemos que $R \subset \Upsilon$. Por la proposición 3.2.1 existe una vecindad de radio ϵ_1 alrededor de λ^0 contenida en el Dominio de Poincaré.

Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \frac{1}{n+1}\}$ y consideramos la bola

$$B_\epsilon(\lambda^0) = \{w \in C^n / d(w, \lambda^0) < \epsilon\}.$$

Sea $\lambda \in B_\epsilon(\lambda^0)$ y sea $H = \{m : \lambda_s =< m, \lambda > \quad \text{para alguna } s\}$. Vamos a demostrar que $H \subseteq \Upsilon$.

Sea $\tilde{m} \in H$ tal que $\lambda_s = \tilde{m}_1\lambda_1 + \cdots + \tilde{m}_n\lambda_n$, entonces hay que demostrar $\sum_{i=1}^{n} \tilde{m}_i(\lambda_i^0 \cdot \eta) < M$. Por una parte sabemos que, por estar λ en $B_\epsilon(\lambda^0)$, se satisface la desigualdad $(\lambda_i^0 \cdot \eta) < (\lambda_i \cdot \eta) + \epsilon$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{m}_i(\lambda_i^0 \cdot \eta) < \sum_{i=1}^{n} \tilde{m}_i(\lambda_i \cdot \eta) + n\epsilon. \tag{3.9}$$

Por otra parte tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{m}_i(\lambda_i \cdot \eta) = (\lambda_s \cdot \eta) < (\lambda_s^0 \cdot \eta) + \epsilon \tag{3.10}$$

Finalmente, haciendo uso de las desigualdades (3.9) y (3.10) obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{m}_i(\lambda_i^0 \cdot \eta) < (\lambda_s^0 \cdot \eta) + \epsilon(n+1) \leq (\lambda_s^0 \cdot \eta) + 1.$$

Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} \tilde{m}_i(\lambda_i^0 \cdot \eta) < M.$ □

Proposición 3.2.3 *(Poincaré-Dulac)*
Si el conjunto de valores propios de la parte lineal de un campo en el origen están en el Dominio de Poincaré, entonces, en el caso de resonancia el campo puede ser reducido a una forma normal polinomial por medio de un cambio formal.

Demostración :
Por la proposición 3.2.2 sabemos que hay un número finito de resonancias y por el teorema de Poincaré - Dulac 2.2.2 se obtiene la forma normal polinomial. □

Observación :
Si un punto λ está en el Dominio de Poincaré entonces una resonancia $\lambda_s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$ es posible sólo si el coeficiente $m_s = 0$ ya que de lo contrario habría una infinidad de resonancias.

Resonancias en el Dominio de Siegel.

Proposición 3.2.4
El conjunto de planos resonantes es denso en el Dominio de Siegel.

Demostración :
Sea $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ un elemento del Dominio de Siegel, entonces su envoltura convexa contiene al origen. Primero supongamos que el origen está dentro de la envolvente, entonces existen tres valores propios tales que su envolvente convexa Λ contiene (en el interior) al origen . Sin pérdida de

generalidad supongamos que son λ_1, λ_2 y λ_3. Consideremos el ángulo formado por λ_1 y λ_2.
Dividimos la región formada por todos los múltiplos reales no negativos de λ_1 y λ_2 en paralelogramos, los cuales son combinaciones lineales enteras no negativas de los dos valores propios en cuestión. Sea

$$d = \max\{| \lambda_1 |, | \lambda_2 |, | \lambda_1 - \lambda_2 |, | \lambda_1 + \lambda_2 |\}.$$

Sea $\epsilon > 0$ entonces existe un natural N tal que $d < N\epsilon$.
Como $-N\lambda_3$ está en alguno de nuestros paralelogramos entonces existen enteros positivos m_1 y m_2 tales que el vector $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + N\lambda_3$ cae dentro del paralelogramo formado por λ_1 y λ_2, es decir, satisface

$$| m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + N\lambda_3 | \leq d.$$

Consideremos ahora el plano resonante $\pi : m_1 z_1 + m_2 z_2 + (N+1)z_3 = z_3$. La distancia del punto λ al plano π es $d(\lambda, \pi) = \inf\{d(\lambda, p) : p \in \pi\}$ y satisface

$$d(\lambda, \pi) \leq \frac{| m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + N\lambda_3 |}{2^{\frac{1}{2}} N} \leq \frac{d}{N} < \epsilon.$$

Ahora supongamos que el origen está en alguna arista de la envoltura. Sin pérdida de generalidad suponemos que el origen está en el intervalo (λ_1, λ_2).

Sea $\lambda = | \lambda_1 - \lambda_2 |$ y $\epsilon > 0$, entonces existe N en los naturales tal que $\frac{d}{N} < \epsilon$. Consideremos $N\lambda_1$, entonces existe M en los naturales tal que $| N\lambda_1 - M\lambda_2 | \leq d$. Sea $\pi : z_1 = (N+1)z_1 + Mz_2$ un hiperplano resonante, entonces

$$d(\lambda, \pi) < \frac{| N\lambda_1 + M\lambda_2 |}{\sqrt{2N^2 + 2m^2}} \leq \frac{d}{N} < \epsilon.$$

□

Definición 3.2.3
Un punto $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in C^n$ se dice que es de tipo (c, ν) si para toda s se tiene que

$$| \lambda_s - (m, \lambda) | \geq \frac{c}{| m |^{\nu}}$$

para todos los vectores m con componentes enteras no negativas tales que $\sum_{i=1}^{n} m_i \geq 2$.

Observación:

Si $c > 0$ y λ es de tipo (c, ν) entonces λ no tiene resonancias, y si $c > 0$ y λ tiene al menos una resonancia entonces λ no pertenece a (c, ν) para toda $c > 0$ y para toda ν.

Proposición 3.2.5
El conjunto de puntos que no son de tipo (c, ν), $\forall c > 0$, *tiene medida cero siempre que* $\nu > \frac{n-2}{2}$.

Para los siguientes dos teoremas no se dá la demostración, pues no se encuentra dentro de los objetivos de este trabajo. Nótese, sin embargo, la importancia que éstos tienen.

TEOREMA 3.2.1 *(Poincaré) (Ver [Arn])*
Si los valores propios de la parte lineal de un campo holomorfo en un punto singular pertenecen al dominio de Poincaré y son no resonantes entonces el campo es holomorficamente equivalente a su parte lineal en una vecindad del punto singular.

TEOREMA 3.2.2 *(Siegel) (Ver [ARN])*
Si los valores propios de la parte lineal de un campo vectorial holomorfo en el origen forman un vector de tipo (c, ν) *entonces el campo es holomorficamente equivalente a su parte lineal.*

Capítulo 4

Formas normales infinitamente diferenciables.

4.1 Teorema de Borel en una y varias variables.

En lo sucesivo, $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ significará que f es una función de variable real infinitamente diferenciable.

TEOREMA 4.1.1 *(Teorema de Borel)*
Dada una serie formal $\hat{f} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$ con una variable real, existe una función $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ tal que

$$\frac{d^k f}{dx^k}\Big|_{x=0} = k! a_k\,, \qquad k \geq 1.$$

Antes de hacer la demostración del Teorema de Borel, daremos la siguiente definición que será esencial en la demostración.

Definición 4.1.1
Sea X un subconjunto cerrado de $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Decimos que $f \in C^k(\Omega)$ es m-plana en $X, m \leq k$, si $D^\alpha f(x) = 0$, para toda $x \in X$ y toda α con $|\alpha| \leq m$. Si $f \in C^\infty(\Omega)$ y $D^\alpha f(x) = 0$ para toda $x \in X$ y toda α, entonces decimos que f es plana en X.

Demostración :

Consideremos el polinomio $P_k = \sum_{j=1}^{k} a_j x^j$ y el monomio $R_k = P_k - P_{k-1}$. $R_k(x) = a_k x^k$ es un monomio de orden k, y satisface

$$\frac{d^j}{dx^j} R_k(0) = 0\,, \qquad j \leq k-1.$$

Ahora vamos a demostrar que, para cada monomio R_k, existe una función $\phi_k \in C^\infty(\mathbf{R})$ tal que $\phi_k(0) = 0$ y $\| R_k - \phi_k \|_{k-1} < \frac{1}{2^{k-1}}$, donde

$$\| R_k - \phi_k \|_{k-1} = \sup_{j \leq k-1, x \in R} \{ \mid \frac{d^j}{dx^j} R_k(x) - \frac{d^j}{dx^j} \phi_k(x) \mid \}.$$

Ahora consideremos el polinomio $R_k(x) = a_k x^k$. La siguiente construcción será para encontrar la función ϕ_k.

Sean

$$g_2(x) = \begin{cases} R_k(1-x^2) & \text{si } \mid x \mid \leq 1 \\ 0 & \text{si } \mid x \mid > 1 \end{cases}$$

$$g_3(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{x} g_2(t)dt & \text{si } x \geq -1 \\ 0 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Definimos $M_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^k dt.$

$$g_4(x) = g_3(2x-1).$$

$$g_5(x) = g_4(\frac{4(1-x^2)}{3}).$$

$$g_6(x) = \frac{g_5(\frac{x}{\delta_k})}{M_k a_k}.$$

Finalmente, $g_k(x) = 1 - g_6(x)$, es decir,

$$g_k(x) = 1 - \Big[\int_{-1}^{\frac{1}{3}(5-8\frac{x^2}{\delta_k{}^2})} a_k (1-t^2)^k dt / (a_k M_k) \Big].$$

Así, definimos la función

$$\phi_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mid x \mid \leq \frac{\delta_k}{2} \\ g_k(x) R_k(x) & \text{si } \frac{\delta_k}{2} < \mid x \mid < \delta_k \\ R_k(x) & \text{si } \mid x \mid \geq \delta_k \end{cases}$$

La δ_k se elige de tal manera que $\| R_k - \phi_k \|_{k-1} < \frac{1}{2^{k-1}}$. Consideremos la función

$$h_k(x) = R_k(x) - \phi_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } | x | \geq \delta_k \\ R_k(x)[1 - g_k(x)] & \text{si } \frac{\delta_k}{2} < | x | < \delta_k \\ R_k(x) & \text{si } | x | \leq \frac{\delta_k}{2} \end{cases}$$

Como la función h_k se anula fuera de una vecindad del origen, entonces su norma sobre los números reales es igual a su norma en la vecindad de radio δ_k. Ahora definimos una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in N}$ como sigue :

$$f_n = \sum_{k=1}^{n}(R_k - \phi_k) = P_n - \sum_{k=1}^{n} \phi_k.$$

Para demostrar la existencia de la función buscada del teorema y su diferenciabilidad de todo orden, probaremos las siguientes afirmaciones:

a) Para cada número natural α, la sucesión $\{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f_n\}$ converge uniformemente.

b) $F_0 \in C^\infty(\mathbf{R})$.

c) $F_\alpha = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} F_0$.

d) $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} F_0(0) = \alpha! a_\alpha$.

a) Demostraremos que, para cada α fija, la sucesión $\{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f_n\}$ es de Cauchy.

Sea $\epsilon > 0$ entonces existe un número natural $N = \max\{-\frac{\ln \epsilon}{\ln 2} + 1, \alpha\}$ tal que para toda $k, q > N, (q < k)$,

$$\begin{aligned} \sup_{x\in R} \left| \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f_q(x) - \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f_k(x) \right| &\leq \sum_{i=q}^{k-1} \sup_{x\in R} \left| \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f_i(x) - \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f_{i+1}(x) \right| \\ = \sum_{i=q}^{k-1} \sup_{x\in R} \left| \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (R_{i+1} - \varphi_{i+1})(x) \right| &\leq \sum_{i=q}^{k-1} \| R_{i+1} - \varphi_{i+1}) \|_i \\ \leq \sum_{i=q}^{k-1} \frac{1}{2^i} < \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{N-1}} < \epsilon. \end{aligned}$$

Definimos $F_\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f_n$. Haciendo un uso recursivo del siguiente Lema para cada α fija, se demustran (b) y (c).

Lema :
Sea $\{h_n\}$ una sucesión de funciones reales diferenciables que convergen uniformemente a una función continua h. Entonces h es diferenciable y además, si la sucesión $\{\frac{dh_n}{dx}\}$ converge uniformemente a $\tilde{h}$se tiene que $\frac{dh}{dx} = \tilde{h}$.

Por lo tanto, $F_\alpha = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} F_0$.

d) Sea m un número natural, definimos $T^m(g) = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{1}{\alpha!}(D_x{}^\alpha g)(0)x^\alpha$. Ahora demostraremos que para cada natural se satisface $T^m(F_0) = P_m$.

$$\begin{aligned}
T^m(F_0) &= \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{1}{\alpha!} D_x{}^\alpha (\hat{f} - \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j)(0)x^\alpha \\
&= \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{1}{\alpha!} \Big[\sum_{j=1}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-(\alpha-1))a_j x^{j-\alpha}\Big](0)x^\alpha \\
&= \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{1}{\alpha!} \Big[\sum_{j=\alpha}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-(\alpha-1))a_j x^{j-\alpha}\Big](0)x^\alpha \\
&= \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{1}{\alpha!} (\alpha! a_\alpha) x^\alpha \\
&= P_m.
\end{aligned}$$

□

4.2 Teorema de Borel para varias variables.

Ahora centraremos nuestra atención en enunciar el teorema de Borel para varias variables.

TEOREMA 4.2.1 *(Borel)*
Sea $\hat{f}(x) = \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} c_\alpha x^\alpha$ una serie formal en $\mathbf{R}^n$, donde c_α es una constante real para cada n-ada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de enteros no negativos. Entonces existe una función infinito diferenciable en $\mathbf{R}^n$ tal que $\frac{1}{\alpha!} D_x{}^\alpha \hat{f}(0) = c_\alpha$. (Ver [NAR].)

Demostración :

Sea $T_m(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha x^\alpha$ un vector polinomial y consideremos el polinomio de grado m, $P_m = T_m - T_{m-1} = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha x^\alpha$ que es una función plana en el cero, entonces, por el lema básico, que a continuación enunciaremos y demostraremos, para cada $\epsilon > 0$ existe una función $g_m \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ tal que se anula en el cero, se desvanece en una vecindad de éste (es decir, es plana en el origen) y satisface

$$\| P_m - g_m \|_{m-1}{}^{\mathbf{R}^n} < \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Consideremos la sucesión $\{f_n = \sum_{|m|\leq n}(P_m - g_m)\}_{n\in N}$ de funciones infinito-diferenciables en $\mathbf{R}^n$.

Ahora vamos a demostrar que para cada α fija, la sucesión $\{D_x{}^\alpha f_n\}$ es de Cauchy.

Dado $\epsilon > 0$ existe $N = \max\{-\frac{\ln\epsilon}{\ln 2} + 1, \alpha\}$ tal que para toda $m, n > N$, se tiene

$$\begin{aligned}\sup \mid D_x{}^\alpha f_m(x) - D_x{}^\alpha f_n(x) \mid &= \sup \mid \sum_{k=m+1}^{n} D_x{}^\alpha f_k(x) - D_x{}^\alpha f_{k-1}(x) \mid \\ \leq \sum_{k=m+1}^{n} \sup \mid D_x{}^\alpha(f_k - f_{k-1})(x) \mid &= \sum_{k=m+1}^{n} \sup \mid D_x{}^\alpha(P_k - g_k)(x) \mid \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \| P_k - g_k \|_{k-1}{}^{\mathbf{R}^n} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{1}{2^{N-1}} = \epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada α, la sucesión $\{D_x{}^\alpha f_n\}$ converge uniformemente respecto a x. Definimos $F_\alpha = \lim_{n\to\infty} D_x{}^\alpha f_n$. Por el lema aplicado a funciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}$ concluimos que $F_\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ para toda $\alpha \geq 0$. Notemos que $F_0 = \hat{f} - \sum_{m\geq 1} g_m$, es decir, la función buscada $f = F_0$ está dada por la serie inicial $\hat{f}$ más una función plana.

Para terminar la demostración, definimos

$$T^k(F_0) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!}(D_x{}^\alpha F_0)(0)x^\alpha.$$

Entonces,

$$T^k(F_0) \;=\; T^k(\sum_{m=0}^{\infty}(P_m - g_m)) = T^k(\sum_{m=0}^{\infty} P_m) - T^k(\sum_{m=0}^{\infty} g_m)$$

$$= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!}(D_x{}^\alpha \sum_{|m|=0}^{\infty} c_\alpha x^\alpha)(0)x^\alpha - \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!}(D_x{}^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} g_m)(0)x^\alpha$$
$$= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!}[\sum_{|m|\ge|\alpha|} c_m m(m-1)\cdots(m-(\alpha-1))x^{m-\alpha}](0)x^\alpha$$
$$= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} c_\alpha \alpha! x^\alpha$$

Por lo tanto, $D_x{}^\alpha F_0(0) = \alpha! c_\alpha$.

Lema básico :
Sea $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ una función m-plana en el cero, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una función $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ tal que se anula en el origen, es plana en dicho punto y satisface $\| g - f\|_{m-1}{}^{\mathbf{R}^n} < \epsilon$.

Demostración :

Consideremos las cubiertas de $\mathbf{R}^n, \{u_1, u_2\} = \{B_1(0), \mathbf{R}^n - \bar{B}_{\frac{1}{2}}(0)\}$ y $\{w_1, w_2\} = \{B_{\frac{3}{4}}(0), \mathbf{R}^n - \bar{B}_{\frac{1}{4}}(0)\}$ tales que $\bar{w}_1 \subset u_1$, $i = 1, 2$.

Sea $0 < c < 1$ un valor fijo y sea $\delta_i = d(\bar{w}_i, u_i{}^c)$. Para cada $a \in \bar{w}_i$ definimos la función

$$\varphi_a(x) = \eta(\frac{x-a}{\delta_i}), \text{ donde } \eta(x) = s(x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2)$$

y $s(t) = \exp(-\frac{1}{c-t})$ si $t < c$ y $s(t) = 0$ si $t \ge 0$.

Nótese que la funcin η es no negativa en todo su dominio, es positiva en el origen, es una función infinito-diferenciable y su soporte está contenido en el conjunto de $x \in \mathbf{R}^n$ tales que $\frac{|x-a|}{\delta_i} < c$.

Consideremos una cubierta abierta $\{V_a\}_{a\in\bar{w}_1}$ de $\bar{w}_1$, donde $V_a = \{x \in \mathbf{R}^n : \varphi_a(x) > 0\}$. Como $\bar{w}_1$ es un conjunto compacto entonces existen $a_1, \ldots, a_p \in \bar{w}_1$ tales que $\bar{w}_1 \subset V_{a_1} \cup \cdots \cup V_{a_p}$. Análogamente para $\bar{w}_2$ existen $b_1, \ldots, b_k \in \bar{w}_2$ tales que $\bar{w}_2 \subset V_{b_1} \cup \cdots \cup V_b$. Definimos las funciones

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{p} \varphi_{a_j} \quad \text{y} \quad \psi_2 = \sum_{j=1}^{k} \varphi_{b_j}.$$

Tales funciones son no negativas en $\mathbf{R}^n$, son $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ y $sop(\psi_i) \subset u_i\,, i = 1, 2$. Consideremos ahora las funciones

$$\tilde{\varphi_1} = \frac{\psi_1}{\psi_1 + \psi_2}, \quad \tilde{\varphi_2} = \frac{\psi_2}{\psi_1 + \psi_2}.$$

Observemos que ambas funciones son no negativas, que no se hacen cero simultáneamente, que $\tilde{\varphi_1} + \tilde{\varphi_2} = 1$ y que el soporte de $\tilde{\varphi_i}$ está contenido en u_i respectivamente.

Hasta aquí hemos demostrado que existe una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{u_1, u_2\}$. Por las propiedades antes mencionadas de las funciones $\tilde{\varphi_i}$, se concluye que existe una función ψ tal que se anula en el complemento de la bola de radio uno (centrada en el origen), es no negativa en el conjunto $A = \{x \in \mathbf{R}^n : \frac{1}{2} <\mid x \mid< 1\}$ y vale uno en la bola cerrada de radio dos.

Definimos la función $g_\delta(x) = \varphi(\frac{x}{\delta})f(x)$, donde δ es muy pequeña y $\varphi = 1 - \psi$. Claramente $g_\delta \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ y es plana en el origen.

Como $g_\delta(x) = f(x)$ si $\mid x \mid\geq \delta$ entonces

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} \mid D_x{}^\alpha g_\delta(x) - D_x{}^\alpha f(x) \mid = \sup_{|x|\leq\delta} \mid D_x{}^\alpha g_\delta(x) - D_x{}^\alpha f(x) \mid$$

y es suficiente probar para $\mid \alpha \mid\leq m - 1$ que

$$\sup_{|x|\leq\delta} \mid D_x{}^\alpha g_\delta(x) - D_x{}^\alpha f(x) \mid\to 0 \quad \text{cuando}\, \delta \to 0.$$

Como f es $m - 1$ plana en el cero entonces $D_x{}^\alpha f(0) = 0\,,\mid \alpha \mid\leq 1$. Así $\mid D_x{}^\alpha f(x) \mid\leq M_0 \mid x \mid^{m-|\alpha|-1}$ implica que $\sup_{|x|\leq\delta} \mid D_x{}^\alpha f(x) \mid\leq M_0\delta^{m-|\alpha|-1}$. Con la siguiente expresión se podrá acotar el supremo

$$D_x{}^\alpha g_\delta(x) = \sum_{\mu+\nu=\alpha} C_\alpha{}^\nu \delta^{-|\nu|}(D_x{}^\nu\varphi)(\frac{x}{\delta})(D_x{}^\mu f)(x).$$

Como ϕ es una función diferenciable de todo orden, entonces

$$\sup_{|x|\leq 1} \mid D_x{}^\alpha\phi(x) \mid= M_\alpha < \infty.$$

Por lo tanto,

$$\mid D_x{}^\alpha g_\delta(x) \mid\leq \sum_{\mu+\nu=\alpha} M\delta^{-|\nu|} \mid D^\mu f(x) \mid, \quad M = \max_{|\nu|\leq\alpha} C_\alpha{}^\nu M_\nu.$$

Como $D^\mu f$ es $(m-1-|\mu|)$–plana en el cero, entonces tenemos

$$\sup_{|x|\leq\delta} | D^\mu f(x) | \leq \delta^{m-1-|\mu|} = O(\delta^{m-1-|\mu|}), \quad \text{para } \delta << 1.$$

Así, el término $| D_x{}^\alpha g_\delta(x) | \leq MK \sum_{\mu+\nu=\alpha} \delta^{m-1-|\mu|-|\nu|}$ es tan pequeño como queramos.

Ahora enunciaremos un teorema cuya demostración se basa en el teorema de Borel.

TEOREMA 4.2.2 *(Chen) El germen de un campo vectorial hiperbólico y no resonante en el origen es* $\mathbf{C}^\infty$*-equivalente a su parte lineal. En general, cualesquiera dos gérmenes de campos vectoriales hiperbólicos que difieren por una discrepancia plana en el origen son* $\mathbf{C}^\infty$*-equivalentes (ver [WIL] y [CHEN]).*

La demostración completa se dará en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Formas finito-diferenciables para familias de campos vectoriales.

5.1 Formas normales diferenciables para familias.

En este capítulo estudiaremos la forma normal diferenciable no sólo para campos vectoriales, sino también para familias de campos. El capítulo está dividido en cuatro partes, las cuales constituyen los diferentes pasos de las demostraciones de los dos principales teoremas que enunciaremos.

Definición 5.1.1
Una familia localmente diferenciable de campos vectoriales es un germen en el origen del campo vectorial definido por un sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = v(x, \epsilon), \quad \dot{\epsilon} = 0, \quad x \in (\mathbf{R}^n, 0),\ \epsilon \in (\mathbf{R}^p, 0).$$[1]

Decimos que dos familias localmente diferenciables de campos vectoriales son finitamente diferenciablemente equivalentes si, dado cualquier número k, existen representantes de los correspondientes gérmenes que son finito-diferenciablemente conjugados en sus dominios de definición.

[1] La expresión $\epsilon \in (\mathbf{R}^p, 0)$ significa que epsilon es un parámetro $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ que toma valores en una vecindad del origen.

Esto significa que existe un difeomorfismo k-diferenciable definido en alguna vecindad del origen en el espacio $\mathbf{R}^{n+p}$, el cual conjuga los flujos fase localmente de los representantes de las dos familias.

El siguiente teorema es análogo al teorema de Poincaré, sólo que éste teorema es una generalización para deformaciones de gérmenes.

TEOREMA 5.1.1 *(Il'yashenko y Yakovenko) ([ILY])*
Si los valores propios de la parte lineal de un germen de un campo vectorial $v(x) = Ax + \cdots$ forman un conjunto no resonante, entonces para cada $k \in \mathbf{N}$ existe una vecindad U de ϵ tal que cada deformación local de dicho germen es $\mathbf{C}^k$-equivalente a la familia lineal

$$\dot{x} = A(\epsilon)x. \tag{5.1}$$

Definición 5.1.2
Un conjunto de valores propios complejos λ se dice que es fuertemente mono-resonante (o bien, uno resonante) si todas las relaciones de resonancia entre estos valores se obtienen únicamente de una igualdad del tipo $< r, \lambda >= 0, r \in \mathbf{Z}^n{}_+$. Al monomio $x^r = x_1{}^{r_1} \cdots x_n{}^{r_n}$ le llamaremos **generador de resonancias**. *Obsérvemos que x^r no es un monomio resonante. Decimos que λ es hiperbólico si la parte real de cada componente λ_i es no nula.*

Observemos que la hiperbolicidad anterior de los valores propios de la parte lineal del germen inicial del teorema 5.1.1 es una consecuencia de las propiedades de no resonancia ya que si suponemos que no son hiperbólicos entonces existen al menos dos valores propios imaginarios puros conjugados que generan una infinidad de resonancias.

Antes de dar la demostración del teorema 5.1.1 enunciaremos el siguiente teorema. Las demostraciones de ambos teoremas tienen varios en común, así que las haremos simultáneamente.

TEOREMA 5.1.2 *(Il'yashenko y Yakovenko) ([ILY])*
Sea $v(x, \epsilon)$ una familia localmente diferenciable de campos vectoriales, la cual es una deformación del germen del campo $v(x) = Ax + \cdots$ donde la parte lineal A en el origen tiene un conjunto de valores propios fuertemente monoresonante e hiperbólico. Entonces para cada $k \in bfN$ existe una vecindad U del del parámetro ϵ tal que $v(x, \epsilon)$ es $\mathbf{C}^k$-equivalente a una familia definida

por la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \vdots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m_1} a_{1j}(\epsilon)u^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m_n} a_{nj}(\epsilon)u^j \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

donde $u(x)$ es el monomio generador de resonancias y $\epsilon \in U$.
Dicho de otra manera, dado cualquier número natural N existe un polinomio $g_N(u,\epsilon)$ con las propiedades antes mencionadas tal que la familia $v(x,\epsilon)$ es C^N-equivalente a la familia local definida anteriormente con $g = g_N$ en alguna vecindad del cero en $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$.

Observación :

El grado del polinomio depende únicamente del germen inicial y es independiente de la deformación.

Ahora daremos un bosquejo de las demostraciones de ambos teoremas, en las cuales, primeramente construiremos un cambio de variables que modifique las variedades estable e inestable del campo v , de tal forma que ésas variedades coincidan con los planos coordenados en una vecindad del origen. Después, por medio de una transformación que preserve dichos planos, llevaremos a cabo la normalización del jet de la familia deformada. Esta familia es, entonces, globalizada, es decir, es extendida a una familia que está definida para todos los valores del espacio fase y es lineal fuera de un conjunto compacto centrado en el origen.

Como último paso, estableceremos una equivalencia local entre la familia globalizada resultante y una familia obtenida a partir de la globalización de la familia de la forma normal de los teoremas a demostrar. Esas dos familias diferirán por una discrepancia con soporte compacto, la cual tiene un N-jet[2] nulo en el punto singular con N suficientemente grande. Se demostrará que tal discrepancia se puede escribir como la suma de dos términos con soporte compacto, los cuales pueden ser eliminados aplicándoles, individualmente, el método homotópico, con lo que se completa la demostración. Antes de comenzar la demostración, vamos a introducir el concepto de campos vectoriales semiformales.

[2]El N-jet de una función diferenciable en x_0 es el conjunto formado por $f(x_0)$ y sus primeras N derivadas en x_0.

Definición 5.1.3
Sea Υ el anillo de gérmenes en el origen de funciones diferenciables con parámetro ϵ. Una serie semiformal con parámetro ϵ es una serie de potencias en la variable x con coeficientes en Υ. Un campo vectorial semiformal es un objeto determinado por un sistema de ecuaciones diferenciales cuya parte derecha son series semiformales. Análogamente se define cambio semiformal de variables.

Lema :
Sea $A(\epsilon)$ una familia localmente diferenciable de operadores lineales con un parámetro $\epsilon \in \mathbf{R}^p$ tal que los valores propios del operador $A(0)$ son distintos. Entonces dichos valores pueden ser localmente extendidos respecto al parámetro como gérmenes de funciones diferenciables $\lambda_j(\cdot) \in \Upsilon, j = 1, \ldots, n$.

Demostración :
Sea $Q(x, \epsilon)$ el polinomio característico de la matriz $A(\epsilon)$ en la variable x y $Q(x, 0) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$ el polinomio de $A(0)$.
Es decir, $Q(\lambda_i, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Haciendo algunos cálculos se puede verificar que $\frac{\partial Q(x,\epsilon)}{\partial x}(\lambda_i, 0) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, debido a que los valores propios son distintos. En consecuencia, por el teorema de la Función Implícita, existen n funciones $g_i(\epsilon)$ tales que $\lambda_i = g_i(0)$ y $Q(g_i(\epsilon), \epsilon) = 0$. Por lo tanto, $g_i(\epsilon) = \lambda_i(\epsilon)$. □

Primeramente daremos la definición de resonancia para gérmenes que dependen de un parámetro $\epsilon \in \mathbf{R}^p$.

Definición 5.1.4
Una resonancia entre gérmenes es cualquier combinación $\lambda_j(\epsilon) - < r, \lambda(\epsilon) >$, la cual es un elemento no invertible del anillo $\Upsilon, r \in \mathbf{Z}_+^n$ y $| r | \geq 2$.

Una familia $A(\epsilon)$ se dice que es fuertemente monoresonante si todas las relaciones de resonancia entre los gérmenes $\lambda_j(\epsilon)$ se siguen de una sola condición $< r, \lambda(\epsilon) > \in \Im$, donde $\Im$ es el ideal maximal del anillo local Υ formado por todos los gérmenes que se anulan en el origen.

Un monomio $a(\epsilon)x^r \frac{\partial}{\partial x_j}$ [3] en la expansión de un campo vectorial es resonante si $\lambda_j - < r, \lambda > \in \Im$.

[3] Esta notación significa que el monomio $a(\epsilon)x^r$ está en la j-ésima componente.

Demostración de los Teoremas 5.1.1 y 5.1.2 :

Ahora daremos la definición de *forma normal preliminar* para transformar la familia original en esta forma.

Consideremos una familia local de campos vectoriales que representan una deformación de un germen hiperbólico y que está definida por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{X} = A(\epsilon)x + v(x,\epsilon), \qquad x \in (\mathbf{R}^n, 0), \ \epsilon \in (\mathbf{R}^p, 0). \tag{5.3}$$

$$v(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad (\frac{\partial v}{\partial x})(0,0) = 0.$$

De aquí en adelante siempre vamos a suponer que los valores propios de la matriz $A(0) = A$ son distintos. Que el conjunto de dichos valores propios $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ es hiperbólico y que está etiquetado de tal forma que los primeros n_- valores están en el semiplano izquierdo (Re $\lambda_i < 0$) y los n_+ restantes están en el semiplano derecho (Re $\lambda_i > 0$ y $n_- + n_+ = n$).

Sea $\mathbf{R}^{n_-} \oplus \mathbf{R}^{n_+}$ la descomposición correspondiente del espacio fase en suma directa de subespacios lineales invariantes bajo el operador $A(0)$.

Definición 5.1.5

Sea Λ el conjunto de valores propios del operador lineal $A(0)$ el cual es no resonante o fuertemente monoresonante. La forma normal preliminar de grado $N < \infty$ para una deformación de un germen de un campo vectorial hiperbólico con parte lineal $A(0)$, es una familia determinada por el sistema de ecuaciones

$$\dot{X} = A(\epsilon)x + P(x,\epsilon) + w(x,\epsilon) \tag{5.4}$$

que satisface las siguientes afirmaciones :

1) $P(0,\epsilon) = w(0,\epsilon) = 0$ para $\epsilon \in (\mathbf{R}^p, 0)$.

2) Los planos coordenados de la suma $\mathbf{R}^{n_-} \oplus \mathbf{R}^{n_+}$ son invariantes bajo los campos de la familia (5.4).

3) El N-jet de la discrepancia w en $x = 0$ es cero para toda ϵ.

4) Si Λ es no resonante, entonces $P \equiv 0$ y si es fuertemente monoresonante,

$$P(x,\epsilon) = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m_1} a_{1j}(\epsilon)u^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m_n} a_{nj}(\epsilon)u^j \end{pmatrix}$$

donde $u = x^r$ es el monomio generador de resonancias.

Lema :
Una familia del tipo (5.3) es, para cada $N < \infty$, $\mathbf{C}^k$ equivalente a alguna familia en la forma normal preliminar con la propiedad de que el difeomorfismo que conjuga, preserva el parámetro ϵ.

Después de demostrar este lema, usaremos el método homotópico para eliminar la discrepancia w de la forma normal preliminar y así obtener las formas deseadas (5.1) y (5.2).

Demostración del Lema :

Como el campo vectorial inicial $Ax + v(x) + \cdots$ es hiperbólico, entonces la matriz jacobiana $A + (\frac{\partial v}{\partial x})$ es no degenerada. Denotemos por f al campo (5.3), esto es

$$f(x,\epsilon) = A(\epsilon)x + v(x,\epsilon), \quad f(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = A(0).$$

Por el teorema de la función Implícita, existe una función $h(\epsilon)$ tal que

$$x = h(\epsilon), \quad h(0) = 0 \quad \text{y} \quad f(h(\epsilon),\epsilon) = 0.$$

Esto significa que sólo hay una curva $h(\epsilon)$ en la que se anula el campo f en una vecindad suficientemente pequeña alrededor del origen. Es decir, el campo f sólo tiene un punto singular en dicha vecindad.

Ahora haremos un cambio de coordenadas que translade la curva $h(\epsilon)$ al origen para que se satisfaga la igualdad $f(0,\epsilon) = 0$.

Definimos la función $G(y,\epsilon) = (y - h(\epsilon),\epsilon)$ cuya inversa es $G^{-1}(x,\epsilon) = (x + h(\epsilon),\epsilon)$. Como la matriz jacobiana de G es no degenerada, entonces G es un difeomorfismo. Esto es, G es invertible y su inversa también es diferenciable en una vecindad del origen en $\mathbf{R}^{n+p}$.

Finalmente, $f \circ G^{-1}(0,\epsilon) = f(h(\epsilon),\epsilon) = 0$. Después de este cambio de coordenadas podemos suponer que $f(0,\epsilon) = 0$.

Ahora podemos usar un resultado para gérmenes de campos vectoriales hiperbólicos (ver [HPS]), el cual dice que para todo germen hiperbólico existen variedades invariantes diferenciables de dimensión n_- y n_+ en una vecindad del punto singular que son tangentes respectivamente a los subespacios invariantes que se contraen y que se expanden de la parte lineal del campo en este punto. Dichas variedades son las intersecciones de los planos $\epsilon = cte$ con subvariedades diferenciables de dimensión $n_- + p$ y $n_+ + p$. Así, éstas variedades dependen suavemente del parámetro ϵ.

Después de un cambio de coordenadas que transforma las variedades invariantes en los planos coordenados, podemos observar que la condición *2* de la definición 5.1.5 se satisface en una vecindad del origen. Por último, después de aplicar un número finito y suficiente de pasos del método de Poincaré-Dulac a las series semiformales del campo (5.3), obtenemos una transformación polinomial que preserva el parámetro ϵ y que lo hace analíticamente equivalente a una familia del tipo (5.4). Hay que notar que los pasos de dicho método dejan invariantes los planos coordenados y así las condiciones *1* y *2* se siguen satisfaciendo.

Para demostrar la condición *4* dividimos el problema en el caso no resonante y en el fuertemente monoresonante. Para el primer caso observemos que para $\epsilon = 0$ no hay resonancias pero para $\epsilon \neq 0$ no sabemos nada al respecto. Entonces demostraremos que los monomios resonantes, obtenidos de aplicar sucesivamente el método de Poincaré-Dulac a (5.3) tienen grado tan alto que, con un número considerado de pasos, el polinomio $P(x,\epsilon) = 0$, $\forall \epsilon \in (\mathbf{R}^p, 0)$.

Observemos que hay dos casos, el primero es cuando el conjunto de valores propios de $A(0)$ está en el Dominio de Poincaré y el segundo cuando está en el Dominio de Siegel. Supongamos que $\Lambda(0) = \{\lambda_1(0), \ldots, \lambda_n(0)\}$ está en el de Siegel. Como el conjunto de resonancias es denso en dicho dominio por la proposición 3.2.4, entonces podemos encontrar, para cada ϵ suficientemente pequeña, un conjunto resonante de valores propios $\Lambda(\epsilon)$.

Consideremos el conjunto $\Sigma = \{\epsilon > 0 \mid \Lambda(\epsilon) \text{ es resonante}\}$ y $\mu_\epsilon = \{m = (m_1, \ldots, m_n) \mid m \cdot \Lambda(\epsilon) = \lambda_{j(\epsilon)}(\epsilon)\}$.

Lema :
Sean $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ una sucesión en Σ tal que $\epsilon_k \to 0$ y $M_k = (m_{k1}, \ldots, m_{kn})$ tal que $M_k \cdot \Lambda(\epsilon_k) = \lambda_{j(\epsilon_k)}(\epsilon_k)$, $k \geq 1$. Si $\Lambda(0)$ es una colección no resonante entonces $\mid M_k \mid$ es no acotada.

Demostración :

Supongamos que $|M_k \mid$ es acotada. Como M_k pertenece a un conjunto compacto entonces la sucesión $\{M_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{M_{ki}\}$. Recordemos que los términos m_{ki} son enteros no negativos, lo cual implica que a partir de cierto subíndice I, los términos de la sucesión $\{M_{ki}\}$ comienzan a repetirse, es decir, $M_{kj} = (\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_n), \forall j \geq I$.

Haciendo tender $k \to \infty$ obtenemos una infinidad de resonancias; esto implica que algún subíndice de los valores propios de la parte derecha de la igualdad

$$\tilde{m}_1\lambda_1(\epsilon_k) + \cdots + \tilde{m}_n\lambda_n(\epsilon_k) = \lambda_{j(\epsilon_k)}(\epsilon_k)$$

se repite una infinidad de veces. Sin pérdida de generalidad supongamos que el subíndice es j y consideremos el conjunto de resonancias que tienen a λ_j en la parte derecha, lo cual implica que :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{m}_1\lambda_1(\epsilon_k) & + & \cdots + \tilde{m}_n\lambda_n(\epsilon_k) = \lambda_j(\epsilon_k) \\ & & \vdots \;\; k \to \infty \\ \tilde{m}_1\lambda_1(0) & + & \cdots + \tilde{m}_n\lambda_n(0) = \lambda_j(0) \end{array}$$

Dicho en palabras, la resonancia $\tilde{m}_1\lambda_1(\epsilon_k) + \cdots + \tilde{m}_n\lambda_n(\epsilon_k) = \lambda_j(\epsilon_k)$ cuando $k \to \infty$, tiende a la resonancia

$$\tilde{m}_1\lambda_1(0) + \cdots + \tilde{m}_n\lambda_n(0) = \lambda_j(0),$$

lo cual contradice que la colección $\Lambda(0)$ es no resonante. □

En otras palabras, este lema nos dice que, para cada k, el campo vectorial $v(x, \epsilon_k)$ tiene términos resonantes de grado suficientemente alto, entonces, aplicando un número finito de veces los pasos del teorema de Poincaré-Dulac, de tal forma que no se alcancen los monomios resonantes, obtenemos la forma lineal (5.1) más una discrepancia. Más adelante se verá que este campo obtenido es $\mathbf{C}^k$-equivalente a la familia lineal.

Para el caso en que $\Lambda(0)$ está en el dominio de Poincaré, sabemos por la proposición 3.2.2 que el conjunto de resonancias es discreto y por lo tanto, podemos encontrar una vecindad en la cual no hay resonancias.

Ahora retomemos el caso fuertemente monoresonante. Demostraremos que el polinomio P de la forma normal preliminar, es independiente de la deformación y del orden del N-jet de w.

Como la familia bajo estudio es fuertemente monoresonante, entonces, aplicándole una infinidad de veces los pasos del método de Poincaré-Dulac, obtenemos un cambio semiformal y una forma normal, a saber,

$$\dot{x} = X \cdot a(u, \epsilon) \tag{5.5}$$

donde $X = diag(x_1, \ldots, x_n)$, a es un vector compuesto por series semiformales y $u = x^r$ es el monomio generador de resonancias.

Lema :
Consideremos una familia semiformal del tipo (5.5) y supongamos que entre los coeficientes del vector $a(u,\epsilon)$ existe, al menos uno, distinto de cero, es decir, existe un número natural m tal que $a_{im}(0)u^m \neq 0$, para algún i. Entonces existe un cambio semiformal de variables con término constante cero tal que conjuga la familia semiformal (5.5) con otra familia de la misma forma, pero con un vector polinomial de grado $2m$ en lugar de la serie semiformal.

Demostración :

Recordemos que $\mathbf{Z}^n_+$ es el vector que satisface $< r, \lambda >= 0$. Podemos encontrar vectores no negativos $r_2, \ldots, r_n$ en $\mathbf{Z}^n_+$ con entradas enteras tales que el determinante de la matriz R, formada por los vectores $r_1 = r, r_2, \ldots, r_n$, es igual a la unidad. Ahora introducimos varios cambios de coordenadas.

$$y_1 = x^r, \quad y_2 = x^{r_2}, \quad \ldots, \quad y_n = x^{r_n} \tag{5.6}$$

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2 h_2(y_1,\epsilon), \quad \ldots, \quad z_n = y_n h_n(y_1,\epsilon) \tag{5.7}$$

$$w_1 = {z_1}^{s_{11}} \cdots {z_n}^{s_{1n}}, \quad \ldots, \quad w_n = {z_1}^{s_{n1}} \cdots {z_n}^{s_{nn}} \tag{5.8}$$

donde $R^{-1} = (s_{ij})$. El cambio que proponemos es

$$\ln W = \ln X + R^{-1} \ln h.$$

El cual es la composición de las tres transformaciones $Y = X^R$, $Z = Yh$ y $\ln W = R^{-1} \ln Z$. Ahora haremos el análisis detallado de las tres transformaciones. Derivando el monomio que genera resonancias obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{u} &= r_1 {x_1}^{-1} x^r \dot{x}_1 + r_2 {x_2}^{-1} x^r \dot{x}_2 + \cdots + r_n {x_n}^{-1} x^r \dot{x}_n. \\ \dot{u} &= u(r_1 \frac{\dot{x}_1}{x_1} + \cdots + r_n \frac{\dot{x}_n}{x_n}). \end{aligned}$$

Por la ecuación (5.5) sabemos que $\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(\epsilon) u^j$ y sustituyéndola en $\dot{u}$ tenemos que

$$\dot{u} = u(r_1 \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}(\epsilon) u^j + \cdots + r_n \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(\epsilon) u^j)$$

lo cual es un producto punto de los vectores r y a. Entonces $\dot{u} = u$ $< r, a(u,\epsilon) >$. Denotemos por f dicho producto punto.

$$\dot{u} = u f(u,\epsilon) \tag{5.9}$$

A dicha ecuación se le llama *sistema factor*.

Usando el Teorema de Borel 4.1.2 podemos extender la ecuación (5.9) a una función infinito-diferenciable la cual difiere de (5.9) por una discrepancia.

Más adelante demostraremos que existe un cambio de variables finito-diferenciable que conjuga la ecuación (5.9) con una ecuación diferencial en una variable, cuya parte derecha es un polinomio. Tal equivalencia se demuestra haciendo uso del método homotópico. A tal hecho se le llama *normalización del sistema factor*.

Así podemos suponer que la ecuación (5.9) tiene la forma

$$\dot{z_1} = z_1 \sum_{j=0}^{2m} b_j(\epsilon) {z_1}^j, \quad b_j(\cdot) \in \Upsilon, \quad z_1 \in (\mathbf{R}, 0) \tag{5.10}$$

Retomando el cambio de coordenadas (5.6) y derivándolo, nos lleva a un sistema :

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= y_1 f(y_1, \epsilon) \\ \dot{y_2} &= y_2 < r_2, a(u, \epsilon) > \\ &\vdots \\ \dot{y_n} &= y_n < r_n, a(u, \epsilon) > \end{aligned}$$

El cual reescribimos como sigue

$$\dot{y_1} = y_1 f(y_1, \epsilon), \quad \dot{y_2} = y_2 g_2(y_1, \epsilon), \ldots \quad \dot{y_n} = y_n g_n(y_1, \epsilon) \tag{5.11}$$

donde g_k denota el producto punto de los vectores r_k y a.

Usando el cambio de coordenadas (5.7), vamos a demostrar que el sistema (5.11) lo podemos transformar a un sistema similar pero polinomial, eligiendo las funciones h_i adecuadas.

Derivemos $z_k = y_k h_k(y_1, \epsilon)$,

$$\begin{aligned} \dot{z_k} &= y_k \frac{\partial h_k}{\partial y_1} \dot{y_1} + h_k \dot{y_k}, \\ \dot{z_k} &= \frac{z_k}{h_k} \frac{\partial h_k}{\partial y_1} y_1 f + h_k y_k g_k. \end{aligned}$$

Como $y_1 = z_1$, entonces $\dot{z_k} = \frac{z_k}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial z_1} z_1 f(z_1,\epsilon) + z_k g_k(z_1,\epsilon)$, es decir,

$$\dot{z_k} = z_k\Big[g_k(z_1,\epsilon) + \frac{z_1 f(z_1,\epsilon)}{h_k(z_1,\epsilon)}\frac{\partial h_k(z_1,\epsilon)}{\partial z_1}\Big].$$

Verifiquemos que las expresiones de los paréntesis se tornan a ser polinomios, eligiendo las funciones h_k adecuadas. Dividimos la serie semiformal g_k por el polinomio $z_1 f$, lo cual es posible debido al teorema de División (ver [AGV], p.82) que garantiza la división entre series formales con parámetro. Entonces tenemos

$$g_k(z_1,\epsilon) = z_1 f(z_1,\epsilon)\phi_k(z_1,\epsilon) + q_k(z_1,\epsilon) \tag{5.12}$$

Como $z_1 f$ tiene grado menor o igual que $2m+1$ entonces $\partial q_k \leq 2m$.

Sustituimos la igualdad (5.12) en $\dot{z_k}$ y obtenemos

$$\dot{z_k} = z_k\Big[z_1 f\phi_k + q_k + z_1 f\frac{h'_k}{h_k}\Big].$$

$$\dot{z_k} = z_k q_k + z_k z_1 f\Big[\phi_k + \frac{h'_k}{h_k}\Big].$$

Para obtener la forma polinomial, hacemos $\phi_k + \frac{h'_k}{h_k} = 0$, lo que implica,

$$\int_0^{z_1} \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial z}dz = -\int_0^{z_1} \phi_k(z,\epsilon)dz$$

de donde obtenemos que $\ln h_k(z_1,\epsilon) = -\int_0^{z_1} \phi_k\, dz$ y por lo tanto,

$$h_k(z_1,\epsilon) = \exp(-\int_0^{z_1} \phi_k dz).$$

Notemos que h_k tiene solución en la clase de series formales con constante igual a la unidad la cual es diferenciable.

Hasta aquí hemos obtenido un germen diferenciable de la forma (5.5) con un vector polinomial de grado $2m+1$. Ahora el problema se debe a que el cambio de coordenadas $Z = X^R h$, que es el que hemos realizado, no comienza con la identidad, es decir, no podemos asegurar que sea invertible y por tal motivo se propone el tercer cambio de coordenadas (5.7), $\ln W = R^{-1}\ln Z$. Haciendo las sustituciones de z_i en este cambio obtenemos

$$w_k = x_k {h_1}^{s_{k1}} \cdots {h_n}^{s_{kn}}.$$

Dicho cambio $W = XH^{R^{-1}}$ es diferenciable y empieza con la identidad.

Sólo resta probar que el tercer cambio induce un sistema polinomial. Si derivamos $w_i = z_1{}^{s_{i1}} \cdots z_n{}^{s_{in}}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{w}_i &= s_{i1}\frac{w_i}{z_1}\dot{z}_1 + \cdots + s_{in}\frac{w_i}{z_n}\dot{z}_n, \\ \dot{w}_i &= w_i\Big[s_{i1}\frac{\dot{z}_1}{z_1} + \cdots + s_{in}\frac{\dot{z}_n}{z_n}\Big]. \end{aligned}$$

Como $\dot{z}_i = z_i q_i$ entonces $\dot{w}_i = w_i[s_{i1}q_1 + \cdots + s_{in}q_n]$.

Por lo tanto, la suma del interior del paréntesis es un polinomio de grado $2m$. Lo que completa la demostración del lema. □

Para finalizar la demostración del lema recordemos que habíamos aplicado el método de Poincaré-Dulac un número finito de veces al campo (5.3) y habíamos obtenido un vector polinomial compuesto por monomios resonantes más una discrepancia. Ahora aplicamos el procedimiento de este lema al campo vectorial obtenido para obtener la fōrma normal preliminar y un cambio finito-diferenciable.

Hasta aquí por el trabajo anterior, podemos suponer que la familia bajo estudio puede ser escrita en la forma normal preliminar (5.4), la cual difiere de la forma normal del teorema por una discrepancia w con un N-jet igual a cero en el origen.

Sólo resta construir un cambio diferenciable de variables que elimine la discrepancia w. Para construirlo, vamos a hacer uso del método homotópico, el cual nos conduce a una forma explícita de dicho cambio de variables. Esta forma está dada por una integral sobre trayectorias del campo (5.4). Sin embargo, notemos que este campo sólo está definido en una vecindad del origen. En consecuencia, si permanecemos dentro de la teoría local, tenemos problemas con los límites de integración. Pero este problema se puede evitar por medio de un procedimiento llamado *globalización*. Dicho procedimiento consiste en extender la familia (5.4) a una familia global de campos vectoriales definida en el mismo espacio con soporte compacto y tal que las trayectorias de los campos pueden ser extendidas sin cotas y así podamos trabajar con integrales impropias. El procedimiento de globalizar consiste en lo siguiente

I. *Globalización.*

Sea $\phi : \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^p, 0)$ una función diferenciable no negativa igual a uno en una vecindad V del origen $\{x = 0\}$, es menor que la unidad y tiene soporte compacto. Recordemos que el soporte de una función en $\mathbf{R}^n$ es el conjunto de puntos en dicho espacio tales que la función en éstos puntos es distinta de cero.

Una *globalización* de la forma normal preliminar (5.4) es una familia de funciones vectoriales definidas como sigue :

$$\dot{x} = [1 - \phi(x)]Ax + \phi(x)[A(\epsilon)x + P(x,\epsilon) + w(x,\epsilon)], \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{5.13}$$

El soporte de ϕ está dentro de una vecindad suficientemente pequeña del origen. Los términos de la expresión (5.13) los podemos agrupar como

$$\dot{x} = F(x,\epsilon) + \tilde{w}(x,\epsilon) \tag{5.14}$$

Donde $F = [1 - \phi]Ax + \phi[A(\epsilon)x + P]$ es un campo vectorial diferenciable en $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^p, 0)$ cuyo germen en el origen es polinomial y coincide con las formas normales de los teoremas 1 y 2 respectivamente. Además, el campo F es lineal fuera de un conjunto compacto.

La discrepancia $\tilde{w} = \phi w$ tiene también un soporte compacto y un N-jet cero en el origen. Así podemos probar los teoremas 1 y 2 estableciendo una equivalencia diferenciable entre las familias F y $F + \tilde{w}$.

Las justificaciones de las siguientes afirmaciones respecto a los campos F y $F + \tilde{w}$ se siguen de las propiedades de la forma normal preliminar (5.4) y de la fórmula de la familia globalizada (5.13).

- $F(0,\epsilon) = 0$ y los planos coordenados de la suma directa $\mathbf{R}^{n-} \oplus \mathbf{R}^{n+}$ son invariantes bajo F y $\tilde{w}$.

- Todas las curvas del flujo de los campos F y $F + \tilde{w}$ pueden ser prolongadas sin cotas.

- La discrepancia $\tilde{w}$ tiene soporte compacto.

- Denotemos por π_+ y π_- las proyecciones sobre los planos coordenados $\mathbf{R}^{n+}$ y $\mathbf{R}^{n-}$ respectivamente y por ${g_F}^t$ el flujo fase del campo F. Entonces existen dos números reales λ_+ y $\lambda_-(\lambda_- < 0 < \lambda_+)$ tales que las siguientes desigualdades valen para algún $C > 0$

$$\begin{aligned} \| \pi_- \circ {g_F}^t(x) \| &\leq C \exp(t\lambda_-) \| \pi_- x \| \quad \textit{cuando } t \to \infty. \\ \| \pi_+ \circ {g_F}^t(x) \| &\leq C \exp(t\lambda_+) \| \pi_+ x \| \quad \textit{cuando } t \to -\infty. \end{aligned}$$

Donde $\lambda_- = \max\{Re\lambda_i/1 \leq i \leq n_-\}$. Análogamente para el campo $F + \tilde{w}$. Estas estimaciones describen la contracción y la expansión hiperbólica del flujo de los campos en una cercanía de los planos coordenados $\mathbf{R}^{n-}$ y $\mathbf{R}^{n+}$.

Definición 5.1.6
La divergencia de un campo vectorial W en el espacio $\mathbf{R}^n$ con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ es una función definida como

$$divW = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W_i}{\partial x_i}.$$

En particular, para un campo lineal $V(x) = Ax$, la divergencia es la traza del operador lineal A, es decir,

$$divAx = TrA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

- **La divergencia de los campos F y $F + \tilde{w}$ está acotada uniformemente respecto al parámetro ϵ y respecto a la variable x, lo cual se debe a que dichos campos, fuera de un conjunto compacto, son lineales.**

- **Dado cualquier miltiíndice α tal que $|\alpha| \leq N$, se satisfacen las siguientes desigualdades uniformemente respecto a ϵ**

$$\| D_x{}^{\alpha} \tilde{w}(x, \epsilon) \| \leq C(\alpha) \| x \|^{N - |\alpha|} \tag{5.15}$$

II. *Descomposición de la discrepancia.*

Una discrepancia $\tilde{w}$ que es N-plana en el origen no es fácil de eliminar por el método homotópico. En consecuencia, vamos a descomponer dicha discrepancia en suma de dos términos $\tilde{w}_+$ y $\tilde{w}_-$, cada uno de los cuales será $[\frac{N}{2}]$−plano en todos los puntos de algún plano coordenado de la suma $\mathbf{R}^{n-} \oplus \mathbf{R}^{n+}$. Así, eliminando primero los dos términos por separado, se eliminará la discrepancia $\tilde{w}$.

Lema :
Supongamos que una función diferenciable $\tilde{w} : \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^p, 0) \to \mathbf{R}^n$ tiene

soporte compacto y un N-jet ($N \leq \infty$) nulo en el eje $\{x = 0\}$. Sea $\mathbf{R}^{n-} \oplus \mathbf{R}^{n+}$ la descomposición que conocemos de $\mathbf{R}^n$ en subespacios invariantes bajo dicha función. Entonces existe una descomposición

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_- + \tilde{\omega}_+$$

tal que la función $\tilde{\omega}_-$ tiene un $[\frac{N}{2}]-$ jet nulo en todos los puntos de $\mathbf{R}^{n-}$ y la función $\tilde{\omega}_+$ tiene un jet del mismo orden (de $\tilde{\omega}_-$) para todo punto de $\mathbf{R}^{n+}$ y los soportes de ambas funciones son compactas.
($[\frac{N}{2}]$ denota el mayor entero menor o igual que $\frac{N}{2}$. Para $N = \infty$, $[\frac{N}{2}] = \infty$.)

Demostración :

Es suficiente probar el lema para funciones escalares. Para $N < \infty$, cualquier germen diferenciable f con un N-jet cero en $x = 0$ lo podemos escribir de la siguiente forma :

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=N+1} x^\alpha f_\alpha(x, \epsilon) \tag{5.16}$$

donde $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ es un multiíndice y f_α es un germen diferenciable. Cualquier monomio x^α lo podemos escribir como $x^{\alpha_-} x^{\alpha_+} = x^\alpha$; $\alpha_-, \alpha_+ \in \mathbf{Z}_+^n$, donde el monomio x^{α_-} sólo contiene productos de funciones coordenadas que se anulan en $\mathbf{R}^{n+}$, esto es, $x^{\alpha_-} = x_1{}^{\alpha_1} \cdots x_{n_-}{}^{\alpha_{n_-}}$ e inversamente $x^{\alpha_+} = x_1{}^{\alpha_{n_-+1}} \cdots x_n{}^{\alpha_n}$. Y se satisface $\alpha_- + \alpha_+ = \alpha$.

La expresión (5.16) la podemos reescribir como sigue :

$$f = \sum_{|\alpha_+| > \frac{N}{2}} x^\alpha f_\alpha + \sum_{|\alpha_-| \geq \frac{N}{2}+1} x^\alpha f_\alpha = f_- + f_+.$$

El germen $f_-(f_+)$ satisface que su $[\frac{N}{2}]$-jet es cero en todo punto del subespacio $\mathbf{R}^{n-}(\mathbf{R}^{n+})$. Para que los gérmenes tengan soporte compacto, recurrimos a un método basado en la partición de la unidad.

El caso $N = \infty$ es un poco distinto. Consideremos una función suave f_+ tal que su $\infty-$jet es cero para todo punto del subespacio $\mathbf{R}^{n+}$ y que coincide con el $\infty-$jet de la función original en todos los puntos de $\mathbf{R}^{n-}$. La existencia de tal función se sigue del Teorema de extensión de Whitney.(Ver [NAR] y [MAL])

Como el soporte de f es compacto, entonces podemos elegir una función f_+ con la misma propiedad.

Sea $f_- = f - f_+$, la cual tiene un ∞−jet nulo en todo punto del plano $\mathbf{R}^{n-}$, entonces la descomposición $f = f_- + f_+$ satisface las propiedades requeridas. Esto completa la demostración del lema. □

Para demostrar que las familias F y $F+\tilde{w}$ son $\mathbf{C}^k$-equivalentes localmente, demostraremos que las familias siguientes son $\mathbf{C}^k$-equivalentes

$$F \text{ y } F + \tilde{w}_+ \,, \; F + \tilde{w}_+ \text{ y } F + \tilde{w}_+ + \tilde{w}_- = F + \tilde{w}.$$

En esta secuencia, cualesquiera dos familias sucesivas difieren por una discrepancia con un $[\frac{N}{2}]$−jet nulo en uno de los planos coordenados. Por transitividad obtenemos la equivalencia deseada.

III.*Método Homotópico.*

Definición 5.1.7
Sean $v(x)$ y $w(x)$ dos campos vectoriales definidos en $\mathbf{R}^n$. Definimos el Corchete de Poisson de los campos v y w como el vector

$$\left[v, w\right] = \frac{\partial w}{\partial x} v - \frac{\partial v}{\partial x} w$$

la notación que usaremos es $[v, w]$.

Proposición 5.1.1
Sean F y $F+\tilde{w}_+$ dos familias de campos vectoriales definidas en $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^p, 0)$. Supongamos que existe un campo vectorial k-diferenciable en $\mathbf{R}^n$ definido como $\dot{x} = h(x)$, $\dot{\epsilon} = 0$, que satisface la ecuación

$$[F + \tau\tilde{w}_+, h] = \tilde{w}_+ \,, \qquad \tau \in [0, 1] \tag{5.17}$$

donde $h(0) = 0$. Entonces F y $F + \tilde{w}_+$ son $\mathbf{C}^k$−equivalentes.

A la ecuación (5.17) se le llama *ecuación homológica.* Este lema reduce nuestro problema a la solución de una ecuación homológica, la cual es un sistema lineal de primer orden de ecuaciones diferenciales parciales.

Demostración :

Consideremos el espacio extendido $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^p, 0) \times \mathbf{R}$ con coordenadas (x, ϵ, τ). Introduciremos ambas familias F y $F + \tilde{\omega}_+$ en una sola familia definida en dicho espacio y definida por la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x} = F(x,\epsilon) + \tau\tilde{\omega}_+(x,\epsilon), \quad \dot{\epsilon} = 0, \quad \dot{\tau} = 0. \tag{5.18}$$

Por hipótesis sabemos que existe un campo vectorial $h(x)$, entonces definimos un nuevo campo en el espacio extendido,

$$\dot{x} = h(x), \quad \dot{\epsilon} = 0, \quad \dot{\tau} = 1. \tag{5.19}$$

Dicho campo también lo podemos escribir como $h(x)\frac{\partial}{\partial x} + 1\frac{\partial}{\partial \tau}$.

Como trabajaremos a menudo con campos en la x-componente, omitiremos la notación de parcial sólo en esta componente, de otra manera, lo especificaremos. La condición (5.17) del lema es equivalente, en términos de los campos (5.18) y (5.19) a la siguiente ecuación :

$$[F + \tau\tilde{\omega}_+, h + 1\frac{\partial}{\partial \tau}] = 0. \tag{5.20}$$

Desarrollando la ecuación (5.20) obtenemos :

$$\begin{aligned}
[F + \tau\tilde{\omega}_+, h + 1\frac{\partial}{\partial \tau}] &= [F + \tau\tilde{\omega}_+, h] + [F + \tau\tilde{\omega}_+, 1\frac{\partial}{\partial \tau}] \\
&= [F + \tau\tilde{\omega}_+, h] + [F, 1\frac{\partial}{\partial \tau}] + [\tau\tilde{\omega}_+, 1\frac{\partial}{\partial \tau}].
\end{aligned}$$

Si desarrollamos el término $[F, 1\frac{\partial}{\partial \tau}]$ podemos observar que

$$\left[F, 1\frac{\partial}{\partial \tau}\right] = \frac{\partial(0,\ldots,0,1)}{\partial(x,\epsilon,\tau)}F - \frac{\partial F}{\partial(x,\epsilon,\tau)}1\frac{\partial}{\partial \tau} = 0.$$

Haciendo lo mismo con $[\tau\tilde{\omega}_+, 1\frac{\partial}{\partial \tau}]$, obtenemos

$$\left[\tau\tilde{\omega}_+, 1\frac{\partial}{\partial \tau}\right] = \frac{\partial(0,\ldots,0,1)}{\partial(x,\epsilon,\tau)}\tau\tilde{\omega}_+ - \frac{\partial \tau\tilde{\omega}_+}{\partial(x,\epsilon,\tau)}1\frac{\partial}{\partial \tau} = -\tilde{\omega}_+.$$

Por lo tanto, la ecuación (5.19) se reduce a

$$[F + \tau\tilde{\omega}_+, h] = \tilde{\omega}_+.$$

La equivalencia entre los campos se sigue de los siguientes resultados :

1) Dados dos campos v y w en $\mathbf{R}^n$, $[v, w] = 0$ si y sólo si los flujos de los campos conmutan, es decir, si $g_v{}^t \circ g_w{}^s = g_w{}^s \circ g_v{}^t$.
2) Si los flujos fase de los campos v y w conmutan, entonces existe una superficie integral asociada a dichos campos.

Definimos $v_\tau = F + \tau\tilde{w}_+$, entonces $[v_\tau, h] = 0$, lo cual implica que, para cada τ, existe una superficie entre dichos campos. Como $\tau \in [0, 1]$, entonces el flujo del campo h manda soluciones del campo $v_0 = F$ en soluciones del campo $v_1 = F + \tilde{w}$.

Sólo falta saber cuándo tiene solución la ecuación homológica (5.17) lo cual queda resuelto con el siguiente proposición :

Proposición 5.1.2
Sea $v(x, \mu)$ una familia de campos vectoriales en $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ que dependen diferenciablemente del parámetro $\mu \in B \subseteq \mathbf{R}^p$. Supongamos que existe una subvariedad $M \subseteq \mathbf{R}^n$ que es invariante bajo todos los campos $v(x, \mu)$ y que es estable exponencialmente, esto quiere decir que existe un número $\lambda > 0$ tal que para toda $\epsilon \in B$

$$dist(g^t{}_v(x), M) \leq C \exp(-\lambda t) dist(x, M), \qquad t > 0.$$

Supongamos también que todas las trayectorias de los campos $v(x, \mu)$ pueden prolongarse sin cotas y que la divergencia de v está uniformemente acotada. Entonces, para cada $N < \infty$ existe un número $k < \infty$ tal que para cada familia $u(x, \mu)$ N-plana en M de campos vectoriales diferenciables en $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$, la ecuación

$$[v(x, \mu), h(x)] = u(x, \mu)$$

tiene una solución $h(x)$ k-diferenciable con k-jet nulo en M.

En nuestro caso, la variedad invariante es el plano coordenado $\mathbf{R}^{n+}$ la familia de campos $v(x, \epsilon, \tau) = F(x, \epsilon) + \tau\tilde{w}_+(x, \epsilon)$ y $u(x, \epsilon) = \tilde{w}_+(x, \epsilon)$. Las otras hipótesis se satisfacen debido a que la familia $F + \tau\tilde{w}_+$ es lineal fuera de un conjunto compacto.

Es importante observar lo siguiente :

$$[F + \tau\tilde{w}_+, h] \;=\; \frac{\partial h}{\partial(x, \epsilon, \tau)}(F + \tau\tilde{w}_+) - \frac{\partial(F + \tau\tilde{w}_+)}{\partial(x, \epsilon, \tau)} h$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial \epsilon}, \frac{\partial h}{\partial \tau}\right)(F + \tau\tilde{\omega}_+, 0, 0) - \left(\frac{\partial(F + \tau\tilde{\omega}_+)}{\partial(x, \epsilon)}, \tilde{\omega}_+\right)(h, 0, 0) \\
&= \frac{\partial h}{\partial x}(F + \tau\tilde{\omega}_+) - \frac{\partial(F + \tau\tilde{\omega}_+)}{\partial x} h.
\end{aligned}
$$

Esto quiere decir que sacar las parciales respecto a todas las variables es equivalente a sacarlas respecto a la variable x, o dicho de otra manera, el campo h es el mismo para toda ϵ y toda τ.

Demostración :

La ecuación homológica $[v, h] = u$ es igual a la siguiente ecuación

$$
\frac{\partial h}{\partial x} v - \frac{\partial v}{\partial x} h = u. \tag{5.21}
$$

El término $\frac{\partial h}{\partial x} v(x)$ es igual a $\frac{d}{dt} h({g_v}^t(x)) \mid_{t=0}$. Esto se sigue de desarrollar ${g^t}_v(x)$ en serie de Taylor alrededor de $t = 0$. Denotaremos a $\frac{d}{dt} h({g_v}^t(x)) \mid_{t=0}$ por $\dot{h}(y)$.

La ecuación (5.21) la podemos escribir como sigue :

$$
\frac{d}{dt} h(y) - \frac{\partial v}{\partial x} h({g^t}_v(x)) = u({g^t}_v(x)). \tag{5.22}
$$

Observemos que esta última expresión es una ecuación lineal y no homogénea, lo cual implica que la solución está dada por $h(y) = X(y) \cdot C(y)$, donde $X(y)$ satisface la ecuación homogénea :

$$
\frac{d}{dt} h({g^t}_v(x)) - \frac{\partial v}{\partial x} h({g^t}_v(x)) = 0.
$$

A dicha ecuación se le llama *ecuación de primera variación* y la solución está dada por :

$$
X(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} {g^t}_v(x) \text{ con condición inicial } X(x, 0) = Id \in \mathbf{R}^n.
$$

(Ver [ARN2]).

Si derivamos h y sustituimos en ésta la expresión (5.22) obtenemos

$$
\frac{dh}{dt} - \frac{\partial v}{\partial x} h = X \frac{dC}{dt}.
$$

Esto es, $X\frac{dC}{dt} = u$. Más adelante se verá que el determinante de X es distinto de cero, lo cual la hace invertible en una vecindad del origen. Así, $\frac{d}{dt}C(x,t) = X^{-1}(g_v{}^t(x))u(g_v{}^t(x))$. Esto es,

$$C(x,t) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(g_v{}^\tau(x))u(g_v{}^\tau(x))d\tau.$$

es una solución que satisface la condición inicial $C(x,t_0) = 0$.

$$h(x,0) = Id\int_{t_0}^{0} X^{-1}(g_v{}^\tau(x))u(g_v{}^\tau(x))d\tau.$$

Por lo tanto,

$$h(x) = \int_{t_0}^{0} X^{-1}(g_v{}^\tau(x))u(g_v{}^\tau(x))d\tau \qquad \forall x \in M^c$$

y $h(x) = 0$, para todo $x \in M$.

Ahora nos interesa hacer tender t_0 a infinito para demostrar la diferenciabilidad del campo h y lo podemos hacer sin dificultades ya que las trayectorias se pueden prolongar sin cotas. Por lo tanto, para la familia que estamos trabajando tenemos la expresión

$$h(x) = -\int_{0}^{\infty} X^{-1}(g_v{}^\tau(x))\tilde{w}_+(g_v{}^\tau(x))d\tau \qquad \forall x \in M^c \tag{5.23}$$

$$h(x) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in M. \tag{5.24}$$

Sólo resta probar que h es diferenciable lo cual haremos sólo para la familia en cuestión $F + \tau\tilde{w}_+$. Consideremos las siguientes afirmaciones :

1. La función $\tilde{w}_+$ decae con una tasa exponencial cuando el punto tiende a la variedad invariante $M = \mathbf{R}^{n+}$,

$$\| D_x{}^\alpha \tilde{w}_+ \| \leq C_0(\alpha) \cdot dist(x,M)^{\frac{N}{2-|\alpha|}} \qquad |\alpha| \leq \frac{N}{2}.$$

Esto se debe a que cualquier función N plana en un conjunto es menor que cualquier función exponencial por alguna constante. También tenemos la siguiente desigualdad por la estabilidad exponencial,

$$\| D_x{}^\alpha \tilde{w}_+ \circ g^t{}_v(x) \| \leq C_0(\alpha) \cdot dist(g^t{}_v(x), M)^{N-|\alpha|}.$$

$$\| D_x{}^\alpha \tilde{w}_+ \circ g^t{}_v(x) \| \leq \tilde{C}(\alpha)\exp(-\lambda(\frac{N}{2} - |\alpha|)t)dist(x,M) \qquad |\alpha| \leq \frac{N}{2}.$$

2. La norma del operador $X(x,t)$ está acotada por una función exponencial

$$\| X(x,t) \| \leq C_1(x)\exp(rt), \quad r > 0.$$

Para demostrar tal desigualdad, el operador $X(x,t)$ lo vamos a ver como una función de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^{2n}$ con la norma euclideana. Definimos $k(t) = \ln r^2(t)$, donde $r(t) = \| X(x,t) \|$.

$\frac{dk}{dt} = \frac{2r\dot{r}}{r^2} \leq M$, donde M es una constante positiva tal que $\| \frac{\partial v}{\partial x} \| \leq M$. Integrando la ecuación que derivamos, $\ln \frac{r^2(t)}{r^2(t_0)} \leq 2M(t-t_0)$. Por lo tanto obtenemos $\| X(x,t) \| \leq \| X(x,t_0) \| \exp(M(t-t_0))$. Como en el espacio euclideano todas las normas son equivalentes, entonces usando la norma

$$\| X(x,t) \| = \sup\{X(x,t)(y) : \| y \| = 1\}$$

tenemos la igualdad deseada.

3. El determinante de $X(x,t)$ decrece no más rápido que una función exponencial

$$\det X(x,t) \geq C_2(x)\exp(-st).$$

Esto implica que dicho operador es invertible. Esto se debe a que la divergencia de v está uniformemente acotada, al teorema de Liouville (ver [ARN2]) y al teorema del valor medio para integrales.

4. De las afirmaciones 2 y 3 se sigue que la norma del operador inversa no incrementa más rápido que una función exponencial,es decir,

$$\| X^{-1}(x,t) \| \leq C_3\exp(bt).$$

Estas afirmaciones demuestran que el integrando de la ecuación (5.23).

IV. *Normalización del sistema factor.*

Ahora demostraremos que el sistema factor es finito-diferenciable equivalente a un campo vectorial polinomial.

Lema :

Sea $\dot{x} = f(x,\epsilon)$, $\quad x \in (\mathbf{R},0)$, $\epsilon \in (\mathbf{R}^p,0)$, una familia N diferenciable de campos vectoriales unidimensionales la cual es una deformación de un germen de un campo vectorial $(x^\nu + \cdots)\frac{\partial}{\partial x}$. Entonces existe un número $k = k(N)$ tal que la familia antes mencionada es C^k-equivalente a la familia polinomial

$$\dot{x} = \sum_{i=0}^{2\nu-1} a_i(\epsilon)x^i, \qquad a_i(\cdot) \in C^N.$$

En la demostración utilizaremos el teorema de división (ver [AGV] y [LAS]) y el de preparación de Weierstrass (ver [BRO]) y como estamos estudiando campos de diferenciabilidad finita, entonces dichos teoremas los enunciaremos para el caso finito diferenciable.

Demostración del lema :
Teorema de división.

Sea $D(x,\epsilon)$ una función diferenciable que tiene un cero de orden ν respecto a x en $\epsilon = 0$ $(D(x,0) = x^\nu + \cdots)$. Cualquier función g suficientemente difrenciable puede entonces ser escrita en la forma

$$g(x,\epsilon) = q(x,\epsilon)D(x,\epsilon) + \sum_{i=0}^{\nu-1} \lambda_i(\epsilon)x^i,$$

donde el cociente $q(\cdot,\cdot)$ y los coeficientes $\lambda_i(\cdot)$ del residuo son funciones cuya diferenciabilidad depende de la de f. Si la suavidad de g aumenta entonces la de éstos también.

Teorema de preparación de Weierstrass.

Del teorema de división podemos deducir para una función suficientemente diferenciable $f(x,\epsilon)$ tal que $f(x,0) = x^\nu + \cdots$ puede ser escrita como

$$f(x,\epsilon) = Q(x,\epsilon) \cdot \sum_{i=0}^{\nu} \lambda_i(\epsilon)x^i,$$

donde $\lambda_\nu = 1$ y $Q(0,0) \neq 0$. La suavidad de Q, que es invertible, y de los coeficientes λ_i depende de la de f.

Como $f(x,0) = x^\nu + \cdots$ entonces aplicamos el teorema de preparación y obtenemos $f(x,\epsilon) = Q(x,\epsilon)\sum_{i=0}^{\nu} \lambda_i(\epsilon)x^i$. Como $Q(0,0) \neq 0$, $Q(0,0)$ es una constante distinta de cero. Supongamos que dicha constante es c, entonces, $f(x,0) = (c + c_1x + \cdots)(\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_\nu x^\nu)$.

Por lo tanto, $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{\nu-1} = 0$ y $c\lambda_\nu = 1$, es decir, $P_\nu(x,\epsilon) = \sum_{i=0}^{\nu} \lambda_i(\epsilon)x^i$ tiene un cero de orden ν para $\epsilon = 0$. Así, podemos utilizar el teorema de división para la función Q, la cual escribimos como

$$Q(x,\epsilon) = q(x,\epsilon)P_\nu(x,\epsilon) + \sum_{i=0}^{\nu-1} \lambda_i(\epsilon)x^i.$$

Si sustituimos Q en f concluimos que

$$f(x,\epsilon) = q(x,\epsilon)P_\nu{}^2(x,\epsilon) + P_\nu \cdot \sum_{i=0}^{\nu-1} \lambda_i(\epsilon)x^i.$$

Esto es,

$$f(x,\epsilon) = q \cdot P_\nu{}^2 + R_{2\nu-1} \tag{5.25}$$

donde $R_{2\nu-1}$ es un polinomio de grado $2\nu - 1$ en las variables x y ϵ.

Ahora vamos a eliminar la función $q \cdot P_\nu{}^2$ y lo haremos demostrando por medio del método homotópico que la familia (5.25) es $\mathbf{C}^k$-equivalente a la familia polinomial

$$\dot{x} = R_{2\nu-1}(x,\epsilon). \tag{5.26}$$

Relacionamos las familias (5.25) y (5.26) por medio de una homotopía,

$$\dot{x} = R_{2\nu-1}(x,\epsilon) + \tau q(x,\epsilon)P_\nu{}^2(x,\epsilon)\,, \quad x \in \mathbf{R}, \tau \in [0,1] \tag{5.27}$$

Recordemos por la proposición 5.1.1 que la equivalencia de las familias (5.25) y (5.26) puede ser probada resolviendo la ecuación homológica, la cual, en nuestro caso es

$$[R_{2\nu-1} + \tau q \cdot P_\nu{}^2, h] = q \cdot P_\nu{}^2. \tag{5.28}$$

Denotemos por $F(x,\epsilon,\tau)$ a la familia (5.27), entonces la ecuación homológica se reduce a $F'h - h'F = q \cdot P_\nu{}^2$.

Primero resolveremos la ecuación homogénea $F'h_1 - h_1{}'F = 0$. Haciendo unos cálculos tenemos que la solución de dicha ecuación está dada por

$$h_1(x) = \frac{h_1(x_0)}{F(x_0)}F(x).$$

La solución de la ecuación homológica está dada como $h = h_1 g$. Si calculamos la derivada de h, la sustituimos en la ecuación homológica y utilizamos que h_1 satisface una ecuación homogénea, obtenemos $g'h_1F = -qP_\nu{}^2$.

Esto implica que $kg'F^2 = -qP_\nu{}^2$. Reescribamos F como sigue :

$$F = f - qP_\nu{}^2 + \tau qP_\nu{}^2 = f - (1-\tau)qP_\nu{}^2 = f - \mu qP_\nu{}^2.$$

Finalmente tenemos que $F = (Q - \mu qP_\nu{}^2)P_\nu$ la cual escribimos como $F = \tilde{Q}P_\nu$, donde $\tilde{Q} = Q - \mu qP_\nu{}^2$ es una función invertible respecto a x para toda $\mu \in [0,1]$ y toda $\epsilon \in (\mathbf{R}^p, 0)$.

Así, $g' = -\frac{1}{k}qP_\nu{}^2F^{-2}$, es decir,

$$g' = -\frac{1}{k}q\tilde{Q}^{-2}$$

El lado derecho de esta ecuación es una funcion finito-diferenciable cuya diferenciabilidad incrementa conforme la de f aumenta. Así, existe una solución k diferenciable con condición inicial $g(0,\epsilon,\tau) = 0$. Por lo tanto, la solución h requerida es $h(x) = kF(x)g(x)$, con lo cual queda probado el lema.

Aplicando la proposición 5.1.1 a la ecuación homológica (5.28), encontramos que las familias $F + \tilde{w}_+$ y F son $\mathbf{C}^k$ equivalentes en una vecindad del origen y haciendo uso recursivo del método homotópico concluimos que las familias $F + \tilde{w}$ y $F + \tilde{w}_+$ lo son también. Por transitividad, F y $F + \tilde{w}$ son $\mathbf{C}^k$ equivalentes. Lo que demuestra los teoremas 5.1.1 y 5.1.2.

La proposición puede generalizarse para $N = \infty$. De hecho, los argumentos anteriores indican que la integral(5.23) puede ser derivada el número de veces que se desee si la parte derecha de la ecuación (5.17) tiene un $\infty-$jet nulo en todos los puntos de M. Con ésto hemos demostrado la siguiente proposición

Proposición 5.1.3

Bajo las mismas hipótesis de la proposicion 5.1.2 , la ecuación homológica, cuyo lado derecho es infinitamente plano en todos los puntos de M, tiene una solución infinitamente diferenciable y plana en M.

Recordemos que en el capítulo anterior mencionamos el teorema de Chen cuya demostración quedo inconclusa debido a que había que eliminar una función plana en el origen. Ahora ya podemos dar la demostración completa recurriendo al método homotópico.

TEOREMA 5.1.3 *(Chen)*
El germen de un campo vectorial hiperbólico y no resonante en el origen es C^∞-equivalente a su parte lineal. En general, cualesquiera dos gérmenes de campos vectoriales hiperbólicos que difieren por una discrepancia plana en el origen son C^∞-equivalentes (ver [WIL] y [CHEN]).

La primera conclusión de dicho teorema se sigue de la linealización formal del germen no resonante y del teorema de Borel de una extensión de una serie formal a una función infinitamente diferenciable.

La segunda conclusión se sigue casi verbalmente de las demostraciones de los teoremas 5.1.1 y 5.1.2, usando la proposición anterior para este teorema.

V. *Aplicaciones.*

Ahora analizaremos dos aplicaciones de uno de los teoremas que acabamos de demostrar.

Definición 5.1.8
Una curva fase f_t de un campo vectorial diferenciable es llamada una trayectoria homoclínica u órbita homoclínica de un punto singular p si cuando $t \to \infty$ y $t \to -\infty$ la curva se aproxima a p.

I. *Teorema de Shilnikov.*

Dado el campo vectorial $v(x) = Ax + f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ con una singularidad tipo silla en el origen, con un conjunto de valores propios reales no resonante $-\lambda < -\mu < 0 < \nu$ y con una órbita homoclínica, entonces, en toda bifurcación del campo se genera un ciclo límite apartir de la trayectoria homoclínica.

Primero estudiaremos el comportamiento del campo inicial v. La transformación de Poincaré Δ a lo largo de la trayectoria homoclínica se expresa como la composición de dos transformaciones, una asociada al punto silla Δ^{sing} y otra a lo largo de la parte regular de la trayectoria Δ^{reg}, es decir, $\Delta = \Delta^{reg}\Delta^{sing}$.

La dificultad realmente se halla al estudiar Δ^{sing}. Para su estudio, recurrimos al teorema 5.1.1 de formas normales diferenciables, el cual nos dice que dada una familia de gérmenes de campos vectoriales en $\mathbf{R}^n$ definida por el siguiente sistema

$$\dot{x} = A(\epsilon)x + f(x,\epsilon), \qquad A(0) = A$$

con una colección de valores propios de la matriz A no resonante en un punto singular hiperbólico $p = 0$, entonces, para cada natural k existe una vecindad U en el espacio de parámetros tal que para cada $\epsilon \in U$ el campo $A(\epsilon)x + f(x,\epsilon)$ es $\mathbf{C}^k$ equivalente a su parte lineal $A(\epsilon)x$ en la misma vecindad del origen del espacio fase. Tal cambio depende del parámetro ϵ.

La transformación de correspondencia para $\epsilon = 0$ del campo lineal es

$$\dot{x} = -\lambda x\,, \quad \dot{y} = -\mu y\,, \quad \dot{z} = \nu z.$$

La imagen del rectángulo $\Re_h = \{(x,y,z) : |\, y \,| \leq 1\,;\ z \in (0,h]\,,\ x = 1\}$, bajo el flujo fase del sistema es un "triángulo" como se muestra en la figura 5.1

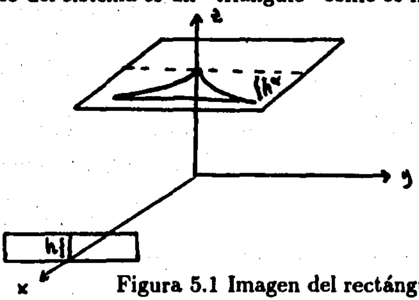


Figura 5.1 Imagen del rectángulo

Observemos que la base del triángulo imagen depende de h y de $\sigma = -\mu + \nu$, ya que la altura de dicho triángulo es $H = h^{\alpha}$, donde $\alpha = \frac{\lambda}{\nu}$. Si $\sigma < 0$ entonces $\alpha > 1$ y si $\sigma > 0$, $\alpha < 1$. Así, la trasnformación de correspondencia está definida por la expresión

$$\Delta^{sing} : (1, y, z) \to (y z^{\mu/\nu}, z^{\alpha}, 1).$$

Sea $h << 1$. Si $\sigma < 0$ entonces tenemos que $H << h$ y para $\sigma > 0$, $H >> h$.

La transformación regular en realidad no es problema ya que podemos usar el teorema de rectificación y así la imagen del triángulo bajo su flujo no varía mucho.

Como ϵ varía muy poco, entonces el rectángulo $\Re_h$ bajo la composición $\Delta_\epsilon = \Delta_\epsilon{}^{reg} \Delta^{sing}$ se transforma en otro como se muestra enseguida

$\epsilon < 0$ y $\sigma < 0$

No hay puntos fijos
ya que se translada hacia abajo el triángulo.

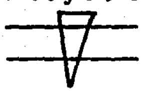
$\epsilon = 0$ y $\sigma < 0$

En este caso es claro que la óbita homoclínica
es el punto fijo.

$\epsilon > 0$ y $\sigma < 0$

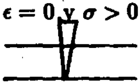
Aquí, por el teorema de Brauer podemos
observar que hay un punto fijo.

$\epsilon < 0$ y $\sigma > 0$



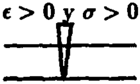
En este caso existe un punto fijo ya que un lado
se expande y el otro se contrae.

$\epsilon = 0$ y $\sigma > 0$



La órbita homoclínica es el punto fijo.

$\epsilon > 0$ y $\sigma > 0$



No hay puntos fijos.

Consideremos el caso $\epsilon > 0$ y $\sigma < 0$. La transformación Δ^{sing} la podemos escribir como sigue

$$\Delta^{sing} : (y, z) \to (yz^{\mu/\nu}, z^{\alpha}).$$

La matriz jacobiana de dicha transformación es

$$\begin{pmatrix} \alpha z^{\alpha-1} & 0 \\ \frac{\mu}{\nu} y z^{\frac{\mu}{\nu}-1} & z^{\frac{\mu}{\nu}} \end{pmatrix}$$

Para $\alpha > 1$ dicha matriz tiene norma tan pequeña como se desee si z es suficientemente pequeña. Por otra parte, la norma de la trasformación derivada $D\Delta_{\epsilon}^{reg}$ está acotada para todos los valores del parámetro.

Terminamos con el caso $\epsilon < 0$ y $\sigma > 0$ el cual se resuelve con el siguiente

Ejercicio :

Sea $f : \pi_1 \rightarrow \pi_2$ una función del rectángulo π_1 en el rectángulo π_2. El comportamiento de la función consiste en encoger 5 veces el rectángulo π_1 hacia el centro y después al conjunto resultante expanderlo 5 veces a lo largo de π_2.

Observemos que para calcular $f^2(\pi_1)$ tenemos que fijarnos en la intersección $f(\pi_1) \cap \pi_1$ para aplicar de nuevo la función al conjunto $f(\pi_1)$.

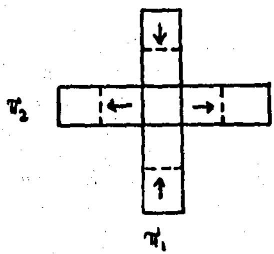


Figura 5.2 Dominio de f

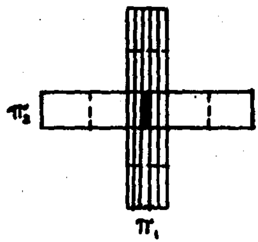


Figura 5.3 Imagen de π_1

Si continuamos el proceso obtenemos que $\lim_{n\to\infty} f^n(\pi_1)$ es una recta vertical contenida en $\pi_1 \cap \pi_2$. Lo que demuestra el teorema.

II. Esta aplicación consiste en un modelo de un sistema dinámico continuo en el cual aparece una órbita homoclínica en $\mathbf{R}^3$.

Consideremos un campo vectorial $v(x) = Ax + f(x)$ en $\mathbf{R}^3$ el cual tiene al origen como punto singular y una órbita homoclínica correspondiente a este punto.

Supongamos que la matriz de la parte lineal del campo en el punto singular tiene dos valores propios conjugados complejos con parte real negativa α y un valor propio real positivo μ.

Teorema.
Sea $\alpha + \mu > 0$ y $V_\epsilon(x) = A(\epsilon)x + f(x,\epsilon)$ una familia monoparamétrica de campos vectoriales diferenciables tal que $V_0 = v$. Entonces, cada campo vectorial de la familia V_ϵ tiene un conjunto numerable de órbitas periódicas.

Sólo haremos un bosquejo de la demostración. Para ϵ suficientemente pequeña, $\lambda(\epsilon) = \alpha(\epsilon) + i\beta(\epsilon)$ y $\mu(\epsilon)$ son tales que $\alpha(\epsilon) < 0$, $\mu(\epsilon) > 0$ y $\alpha(\epsilon) + \mu(\epsilon) > 0$.

Así, podemos aplicar el teorema de formas normales diferenciables a nuestra familia V_ϵ, el cual la hace $\mathbf{C}^k$ equivalente a la familia lineal

$$\dot{x} = A(\epsilon)x.$$

Definimos *el primer retorno* como la imagen bajo el flujo del campo V_ϵ de una pequeña sección transversal a la órbita homoclínica. El n-ésimo retorno será la imagen bajo el flujo del (n-1)-ésimo retorno.

Sin pérdida de generalidad podemos analizar el primer retorno bajo el campo $V_0 = v$ ya que para $\epsilon \neq 0$ el análisis es similar. Demostraremos que en el primer retorno Δ asociado a la órbita homoclínica aparece un número finito de *herraduras de Smale.* La presencia de al menos una herradura genera un conjunto numerable de órbitas periódicas.

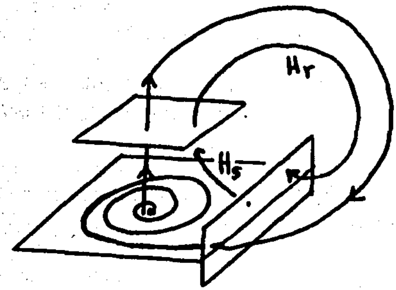
Este primer retorno correspondiente lo expresamos como composición de dos transformaciones $\Delta_\epsilon = \Delta_r \circ \Delta_s$ donde Δ_s corresponde a la parte de las trayectorias que pasan cerca del punto singular y Δ_r corresponde a la parte de las trayectorias que pasan lejos del origen.

Sea Σ la transversal al flujo del campo definida definida por un pequeño rectángulo de altura h el cual está contenido en el cilindro

$$\{(z,u) : |z| = 1, z \in \mathbf{C}\}$$

y cuya base está en el plano $u = 0$. La base del rectángulo (esto es, cuando $u = 0$) es transformada por el flujo del campo de la familia lineal para ϵ_0

en una espiral llena y la imagen de Σ bajo el mapeo $H_s : \Sigma \to \Sigma_1$, donde $\Sigma_1 = \{(z,u) : u = 1\}$, es también una espiral llena acotada por $| z |= h^{-\alpha/\mu}$. De hecho, la solución a través del punto $(z,h) \in \Sigma$ del sistema tiene la forma $\phi(t) = (z\exp(\lambda t), h\exp(\mu t))$ entonces, para $t = \mu^{-1}\ln(1/h)$ obtenemos que $\phi(\mu^{-1}\ln(1/h)) = (h^{-\alpha/\mu}, 1) \in \Sigma$ y $| z\exp(\lambda t) |= h^{-\alpha/\mu}$. Finalmente como $\alpha + \mu > 0$, $-\frac{\alpha}{\mu} < 1$ y si $h << 1$, entonces $h << h^{\alpha/\mu} << 1$.



BIBLIOGRAFIA

[ARN] - V.I.Arnold.
Geometrical methods in the theory of Ordinary Differential Equations.
Springer Verlag. 177-191.

[ARN2] - V.I.Arnold.
Ordinary Differential Equations.

[AGV] - V.I.Arnold, S. M. Gusein-zade, A. N. Varchenko.
Vol.1.1985. Birkhauser.

[BRO] - Th.Bröcker.
Diffrentiable germs and catastrophes. London Math. Soc. Lecture Note Series, No.17, Cambridge Univ. Press,1975.

[CHEN] - K.T.Chen.
Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point. Amer.J.Math.85(1963), 693-722.

[HPS] - M.W.Hirsh, C.C.Pugh and M.Shub.
Invariant manifolds, Lecture Notes in Math.583(1977).

[ILY] - Yu.S.Il'yashenko and S.Yu.Yakovenko
Finitely-smooth normal forms of local families of diffeomorphisms and vector fields, Russian math. Surveys (1991), 1-25.

[LAS] - G.Lassalle.
Le théoreme de preparation différentiable en classe p, Ann.Institute Fourier 23:2 (1973), 97-108.

[MAL] - B.Malgrange.
Ideals of differentiable functions, Tata Inst. of Fundamental Research Studies in Math,No.3, Oxford Univ.Press, London 1967.

[NAR] - Raghavan Narasimhan.

Analysis on real and complex manifolds. Vol.1.

[HAR] - P.Hartman.
Ordinary differential equations, Wiley, New York, London, Sidney 1964.