01163
3
2 ej

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE
MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

Recibí notificación para el examen de la alumna HILDRUN FRANCISCA GARCIA LEGL

Departamento de INGENIERIA CIVIL

Sección: MECANICA DE SUELOS

FALLA DE ORIGEN

JURADO:	NOMBRE	FIRMA	FECHA
PRESIDENTE:	DR. EULALIO JUAREZ BADILLO		nov. 21, 1994.
VOCAL:	ING. JESUS ALBERRO ARAMBURU		21 nov '94
SECRETARIO:	M EN I. NEFTALI RODRIGUEZ CUEVAS		17 nov 1994
SUPLENTE:	DR. EDUARDO ROJAS GONZALEZ	Eduardo	21, Nov, 94
SUPLENTE:	M EN I. GERMAN FIGUEROA VEGA		nov 17/94

REPRODUCCIÓN DE VIBRACIONES EN ARCILLAS MEDIANTE MODELOS VISCOELÁSTICOS

DEDICATORIA

Dedico el presente trabajo

A mis padres: Dr. Juan Eugenio García e Hildrun Legl de García.

A mi esposo: Ing. Antonio Sarcos Portillo.

Al mejor de los maestros: Ing. Neftalí Rodríguez Cuevas.

AGRADECIMIENTO

Al Ing. Neftalí Rodríguez Cuevas, por su valioso asesoramiento para la realización de éste trabajo, por su paciencia y dedicación , sugerencias y recomendaciones y sobre todo por ser ,en todo momento ,un verdadero ejemplo de calidad humana y profesional.

Al Dr. Jorge Abraham Díaz Rodríguez y al Grupo de Dinámica de Suelos de la DEPFI, por su colaboración en la realización de los ensayes de laboratorio.

Al Dr. Eulalio Juárez Badillo por compartir con generosidad sus conocimientos de Mecánica de Suelos y su concepción filosófica de la vida, haciendo de su clase una experiencia doblemente valiosa.

Al Dr. Eduardo Rojas González por sus sugerencias y ayuda siempre oportunas y su amable atención.

Al los miembros del jurado por sus recomendaciones y observaciones. Especialmente al M. en I. Germán Figueróa , cuya palabra amable en el momento preciso , su lucha , capacidad de trabajo y su optimismo son un verdadero estímulo para el estudiante.

A los ingenieros Edgar Méndez Sánchez, Moisés Juárez Camarena y Osvaldo Flores Castrellón , y al Sr. Javier Balderas por su apoyo y hospitalidad.

Al Ing. Antonio Sarcos Portillo por compartir conmigo sus logros y ambiciones y darme la oportunidad de alcanzar mis objetivos profesionales.

A todas aquellas personas que de una u otra forma hicieron de la estancia en México una experiencia maravillosa e inolvidable.

RESUMEN

Para explicar el comportamiento dinámico de arcillas bajo excitaciones conocidas , primeramente se revisa la teoría viscoelástica lineal , con el fín de obtener expresiones aplicables a modelos comunes sometidos a solicitaciones conocidas.

Para comparar resultados teóricos con aquellos que se obtienen de pruebas ortotrópicas y anisotrópicas, se efectuaron pruebas en probetas de arcilla sometidas a esfuerzo constante, para identificar a los modelos viscoelásticos correspondientes y sus constantes. Se obtuvo una alta correlación entre las pruebas y los modelos seleccionados, con desviaciones estándar inferiores a tres porciento.

Una vez conocidas las constantes del modelo, se calcularon curvas esfuerzo-deformación unitaria bajo carga senoidal, las cuales se compararon con el resultado de pruebas controladas, y se encontró similitud en la respuesta.

Con la información obtenida, se efectuaron mediciones y cálculos para estimar las características del amortiguamiento obtenido; se presentan consideraciones para medir el amortiguamiento de las muestras de arcilla, en función de sus propiedades viscoelásticas.

Se presentan comentarios sobre el procedimiento que se desarrolló en esta tesis y sobre los parámetros viscoelásticos que controlan la respuesta dinámica de arcillas, y la disipación de energía.

ABSTRACT

The lineal viscoelastic theory was revised for explaining the dynamic behavior of clays under known excitations and to obtain expressions which are applicabe to common models subject to known stresses.

Tests on clay specimens, subject to constant stress, were made for comparing theoretical results with those obtained from orthotropic and anisotropic tests and to indentify the corresponding viscoelastic models and their constants. The correlation between the tests and selected models was high , the standard deviation was less than 3%.

Once the model constants were determined, stress-strain relations , under senusoidal load, were calculated and which were compared with the results of controlled tests. The theoretical results were almost the same with the experimental values.

Measures and calculations were made for estimating the characteristics of the calculated damping. Some considerations are presented for defining the damping of the clays samples ,as a function of their viscoelastic properties.

Finally, some comments concerning the procedures developed in this thesis and about the viscoelastic parameters controlling the dynamic response of clays an the dissipation of energy, are made.

I N D I C E

CAPITULO IV

DEFORMABILIDAD COMPLEJA Y PROCESOS DE DISIPACIÓN EN MODELOS VISCOELÁSTICOS 53

CAPITULO V

RELACIONES ENTRE LA DEFORMABILIDAD DE FLUENCIA Y DEFORMABILIDAD COMPLEJA. APLICACIONES A MODELOS ESPECIFICOS. 63

CAPITULO VI

SISTEMAS MECÁNICOS COMPUESTOS POR MASAS Y RESORTES VISCOELÁSTICOS EN VIBRACIÓN LIBRE 79

CAPITULO VII

RESPUESTA VISCOELÁSTICA BAJO EXCITACIONES CONOCIDAS 99

CAPITULO VIII

SOLUCIÓN VISCOELÁSTICA PARA UNA PROBETA DE ARCILLA DE LA CIUDAD DE MÉXICO BAJO ESFUERZOS CONSTANTES 109

CAPITULO IX

PROPIEDADES DINAMICAS DEL MATERIAL ESTUDIADO 141

RESUMEN DE NOTACIÓN

A = *Área inicial del especímen.*
$\mathcal{A}$ = *Admitancia.*
a = *Amplitud de desplazamiento.*
B = *Parámetro de Skempton.*
B = *Relación de amortiguamiento crítico.*
C = *Constante del amortiguador viscoso.*
C_c = *Amortiguamiento crítico.*
C(w) = *Amortiguamiento en función de la frecuencia.*
D = *Disipación.*
E = *Módulo de eslasticidad de Young.*
E_e = *Módulo medio de rigidez.*
E_o = *Módulo tangente inicial a la curva esfuerzo-deformación.*
E_α = *Módulo tangente a la curva esfuerzo-deformación pata $t \to \alpha$.*
E^* = *Módulo de rigidez viscoelástico.*
$E_{est.}$ = *Módulo de rigidez del material en condiciones estáticas.*
$[E_{jk}]$ = *Tensor general de deformaciones unitarias en un punto.*
$[E_o]$ = *Componente distorsional del tensor de deformaciones.*
$[E_v]$ = *Componente volumétrica del tensor de deformaciones.*
$e^{(t)}$ = *Exponencial.*
e = *Relación de vacíos.*
e_i = *Relación de vacíos inicial.*
e_f = *Relación de vacíos final.*
F = *Fuerza resultante que actúa sobre una partícula.*
F = *Fuerza.*
F_o = *Amplitud de fuerza.*
F(s) = *Transformada de Laplace de la función* F(t).
f = *Frecuencia en hertz.*
f_n = *Frecuencia natural de vibración sin amortiguamiento (hertz)*
$f_d(t)$ = *Fuerza del amortiguador viscoso en función del tiempo.*
$\mathcal{G}$ = *Módulo de rigidez al cortante, dinámico.*
$\mathcal{G}_1$ = *Componente real del módulo de rigidez al cortante, $\mathcal{G}$.*
$\mathcal{G}_2$ = *Componente imaginaria del módulo de rigidez al cortante, $\mathcal{G}$.*
G(w) = *Deformabilidad compleja del material viscoelástico.*
$G_1(w)$ = *Componente real de la deformabilidad compleja.*
$G_2(w)$ = *Componente imaginaria de la deformabilidad compleja.*
G_M = *Módulo elástico maxwelliano (Kg/cm^2).*
G_K = *Módulo elástico kelviniano (Kg/cm^2)*
H = *Altura de probeta.*
H_i = *Altura inicial del especímen.*
H_s = *Altura de los sólidos.*
I_1, I_2, I_3 = *Invariantes del tensor de esfuerzos.*
i = *Raíz cuadrada de (-1).*
J_1, J_2, J_3 = *Invariantes del tensor de deformaciones unitarias.*
J(t) = *Deformabilidad de fluencia del material viscoelástico.*
K = *Constante del resorte elAstico lineal de Hooke.*
L, l = *Longitud.*
$\mathcal{L}$ = *Operador de Laplace.*
m = *masa.*
N = *Número de ciclos.*
n = *Vector unitario normal a un plano de corte.*
P = *Fuerza.*

P_o = *Amplitud de la fuerza.*
p_K = *Constantes viscoelásticas que multiplican a los esfuerzos.*
P = *Operador diferencial correspondiente a los esfuerzos en la ecuación constitutiva del material viscoelástico.*
$\mathcal{P}_o$ = *Operador algebráico correspondiente a los esfuerzos.*
Q = *Operador diferencial correspondiente a las deformaciones unitarias en la ecuación constitutiva del material viscoelástico.*
Q_o = *Operador algebráico correspondiente a las deformaciones.*
q_K = *Constantes viscoelásticas que multiplican a las deformaciones.*
S = *Desplazamiento de una partícula de un cuerpo sometido a carga*
S_r = *Densidad relativa de los sólidos.*
s = *Espacio de Bromwich.*
T = *Periodo (seg.)*
T^o= *Temperatura.*
t = *Tiempo.*
$[T_{jk}]$ = *Tensor general de esfuerzos en un punto.*
$[T_o]$ = *Componente distorsional del tensor de esfuerzos.*
$[T_v]$ = *Componente volumétrica del tensor de esfuerzos.*
u = *Desplazamiento de la masa de un oscilador.*
V = *Energía potencial almacenada en un ciclo de carga.*
v_o = *Amplitud de velocidad.*
W = *Trabajo histerético. Energía disipada en un ciclo de carga.*
w = *Frecuencia circular de vibración (rad/seg)*
w_n = *Frecuencia natural circular de vibración.*
x = *Desplazamiento de la masa de un oscilador.*
X_o = *Dimensión inicial de un cuerpo en la dirección x.*
Y_o = *Dimensión inicial de un cuerpo en la dirección y.*
$Y(t)$ = *Módulo de relajación del material viscoelástico.*
Z_o = *Dimensión inicial de un cuerpo en la dirección z.*
β = *Angulo de fase.*
β_1 y β_2 = *Amplitudes de desplazamiento.*
ΔA = *Area infinitesimal.*
ΔF = *Fuerza infinitesimal*
ΔL = *Incremento de longitud.*
$\Delta\sigma$ = *Incremento de esfuerzo.*
$\Delta\sigma_3$ = *Incremento de esfuerzo confinante.*
$\Delta\mu$ = *Incremento de presión de poro.*
$\Delta(t)$ = *Función escalón.*
δ = *Decremento logarítmico.*
$\delta(t)$ = *Delta de Dirac.*
$\delta_x, \delta_y, \delta_z$ = *Deformaciones en dirección , x,y,z, respectivamente.*
ϵ = *Deformación unitaria.*
ϵ_o = *Deformación unitaria instantánea.*
ϕ = *Angulo de fase.*
γ_{ij} = *Deformación angular en el plano ij .*
γ_s = *Densidad de sólidos.*
η = *Viscosidad del fluido.*
η = *Factor de pérdida.*
η_n = *Factor de pérdida en resonancia.*
η_M = *Coeficiente de viscosidad maxwelliano, en Kg s/cm^2.*
η_K = *Coeficiente de viscosidad kelviniano, en Kg s/cm^2.*
λ = *Relación entre costantes viscoelásticas, (q_i/q_j).*

μ = *Presión de poro.*
ν = *Término radical de la ecuación de frecuencia.*
ϕ, ϕ_1, ϕ_2 = *Angulos de fase.*
σ = *Esfuerzo total, en Kg/cm^2.*
σ = *Desviación estándar.*
σ_m = *Esfuerzo medio en un punto.*
σ_n = *Esfuerzo en un punto, asociado a un plano de corte.*
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ = *Esfuerzos normales en dirección x,y,z, respectivamente*
σ_3 = *Esfuerzo confinante.*
σ_o = *Esfuerzo total inicial.*
$\sigma_{est.}$ = *Esfuerzo total estático aplicado.*
τ_K = *Tiempo de retardo del cuerpo de Kelvin.*
τ_{ij} = *Esfuerzo cortante al plano ij.*

C A P Í T U L O I

INTRODUCCIÓN A LA VISCOELASTICIDAD

1.1 Generalidades

La viscoelasticidad puede definirse como el estudio de las relaciones esfuerzo-deformación-tiempo que están presentes en el comportamiento mecánico de los materiales. Es muy importante conocer estas relaciones al diseñar obras que serán construídas con materiales cuyas propiedades cambian con el tiempo y en las cuales la variación de la magnitud de las cargas influyen considerablemente. Éstos, por lo general, no pueden ser modelados fielmente por cuerpos elásticos ideales, ni por fluidos viscosos, ya que presentan comportamientos que se asemejan más a alguna combinación de los anteriores.

Entonces, la viscoelasticidad estudia un problema de comportamiento complejo en los materiales, cuando una parte de su estructura presenta reacomodo , fenómeno que además es dependiente del tiempo y de la historia de cargas aplicadas sobre el cuerpo. Este hecho conduce a que el estudio de las relaciones esfuerzo-deformación de los materiales viscoelásticos no sean tan sencillas como las planteadas en la teoría de Elasticidad.

Este enfoque se hace necesario para estudiar la evolución de las deformaciones en aquellos materiales cuyo comportamiento se aleja mucho del de un cuerpo elastico, como es el caso de los suelos, sobre los cuales se desplanta la totalidad de las obras civiles, ó el de aquellos materiales aproximadamente elásticos, que puedan estar sometidos eventualmente a intervalos de esfuerzos superiores al límite elástico, como son los que constituyen las estructuras de concreto, acero y madera bajo cargas sísmicas ó bien , cuando son sobrecargadas indiscriminadamente al darles un uso diferente al de diseño.

El desarrollo teórico del comportamiento viscoelástico de los materiales supone a éstos últimos contínuos, es decir, que cada particula es ,por sí misma, un sistema como el caracterizado por el modelo viscoelástico analógico. A pesar de que lo anterior no es totalmente compatible con la realidad física, para estados de esfuerzo lejanos a aquel que causa la ruptura del material, se ajusta al comportamiento real con bastante aproximación.

La viscoelasticidad permite considerar la variación de los estados de esfuerzos y de deformaciones asociados a un material en el transcurso del tiempo; ésto presenta la ventaja sobre otras teorías, de poder prever fenómenos de fluencia en los elementos estructurales y proyectar su vida útil de manera adecuada; tambien permite predecir los posibles asentamientos del suelo, debidos a la consolidación.

Desde un enfoque dinámico, la teoría viscoelástica nos provee de herramientas suficientes para predecir las respuestas de los materiales sometidos a vibración, estudiar las características de deformabilidad de los mismos, conocer la disipación de energía de cada uno y analizarotros parámetros que gobiernan el comportamiento dinámico de los materiales viscoelásticos.

1.2 Conceptos básicos

Antes de emprender el estudio del comportamiento de los materiales y poder analizar los diversos modelos reológicos mencionados en la literatura , es importante revisar ciertas definiciones de uso práctico, en cualquier desarrollo en el campo de los Medios Contínuos.

1.2.1 Esfuerzo

Un cuerpo está , en general, sujeto a dos tipos de fuerzas; las gravitatorias, que actúan sobre la masa del mismo y son proporcionales a ésta, conocidas como *fuerzas de cuerpo*, y las fuerzas externas que se ejercen sobre sus superficies exterior e interior, conocidas como *fuerzas de superficie*.

Considérese un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas de superficie en equilibrio como el mostrado en la Fig. 1.1 . Si se efectúa un corte en una dirección arbitraria que defina una superficie plana (Fig. 1.2) , al hacer el diagrama de cuerpo libre de una de las porciones se definirá $\bar{F}$ como la fuerza resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre la porción separada. Se llamará *esfuerzo medio* ,σm, al valor que resulta de dividir la fuerza resultante entre la magnitud del área cortada.

$$\sigma m = \bar{F} / A \tag{1.1}$$

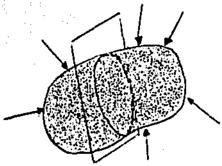


Fig. 1.1

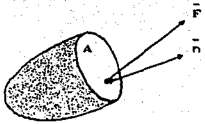


Fig. 1.2

Debido a que el valor del esfuerzo depende del área que se considere, resulta conveniente trabajar con superficies y fuerzas muy pequeñas, como $\overline{\Delta F}$ y $\overline{\Delta A}$, y tomar el límite del esfuerzo medio cuando el área tiende a cero. La cantidad obtenida de aplicar este procedimiento recibe el nombre de *esfuerzo medio en un punto*, asociado a un plano de corte

$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \to 0} \overline{\Delta F}/\overline{\Delta A} \qquad (1.2)$$

1.2.2 Desplazamiento

Se define el vector de desplazamiento en un punto P de un cuerpo, como el vector cuyo origen inicial es P y cuyo extremo terminal , P' , es el mismo punto P después de la ocurrencia de un fenómeno de carga. Es decir, el desplazamiento es un vector que representa la distancia entre la posición inicial y final de un punto.

$$\overline{S} = \overline{P}' - \overline{P} \qquad (1.3)$$

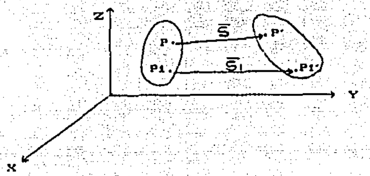


Fig. 1.3

1.2.3 Deformación

Es el desplazamiento relativo entre dos puntos de un mismo cuerpo producido por la ocurrencia de un fenómeno de carga. En la Fig. 1.3 se puede observar la posición relativa inicial y final de los puntos P , P_1 y P', P_1' respectivamente. La deformación será , entonces, el vector que resulta de la diferencia de los vectores de desplazamiento $\overline{S}$ y $\overline{S_1}$, ésto es;

$$\overline{\delta} = \overline{\Delta S} = \overline{S_1} - \overline{S} \qquad (1.4)$$

1.2.4 Deformación Unitaria ó Nominal

Dado un cuerpo en un estado inicial no deformado, como el que muestra la Fig. 1.4 , se define la deformación unitaria en una dirección al número que resulta de dividir la deformación ,$\overline{\delta}$, en una dirección entre la dimensión original del cuerpo correspondiente. Esta cantidad resulta ser adimensional y al ser representada gráficamente contra el tiempo suele ser usada en términos de porcentaje. Cuando se trata de un fenómeno dinámico , en ocasiones, recibe el nombre de *amplitud nominal de deformación* (ϵ). (Ref.1)

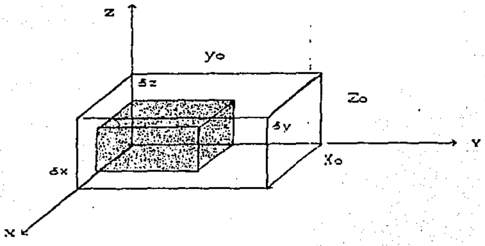


Fig. 1.4

$$\epsilon_x = \delta_x / X_o$$

$$\epsilon_y = \delta_y / Y_o \qquad (1.5)$$

$$\epsilon_z = \delta_z / Z_o$$

1.3 Estado de esfuerzo y estado de deformación

Al existir continuidad y equilibrio en un punto cualquiera de un cuerpo, es posible conocer a todos los *esfuerzos totales*, σ_n ,asociados a todos los planos que pasan por el punto del continuo sometido a fuerzas, si se conoce el tensor de esfuerzos:

$$[T_{jk}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

El tensor de esfuerzos se caracteriza por ser simétrico, en él aparecen nueve componentes de esfuerzo asociadas a tres planos ortogonales que contienen al punto en estudio.

De la Fig. 1.2 , $\bar{n}$ es un vector normal al plano de corte , que define la dirección en la cual interesa calcular el tensor de esfuerzos totales , [Tjk].

Los esfuerzos totales se pueden conocer al efectuar la operación;

$$[T_{jk}][\bar{n}] = \overline{\sigma_n} \qquad (1.6)$$

que equivale a escribir;

$$\begin{aligned} \sigma_{ni} &= \sigma_x\, l + \tau_{xy}\, m + \tau_{zx}\, n \\ \sigma_{nj} &= \tau_{yx}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{yz}\, n \\ \sigma_{nk} &= \tau_{zx}\, l + \tau_{zy}\, m + \sigma_z\, n \end{aligned} \qquad (1.7)$$

donde:

$\sigma_{ni}, \sigma_{nj}, \sigma_{nk}$: componentes ortogonales de σ_n.

(i, j, k) : vector unitario, en direcciones ortogonales

(l,m,n) : cosenos directores del vector normal al plano de magnitud unitaria.

En un tensor de esfuerzos, se pueden definir tres cantidades constantes, conocidas con el nombre de *invariantes*;

I_1 : invariante lineal.
I_2 : invariante de segundo orden.
I_3 : invariante de tercer orden.

Estas cantidades pueden ser calculadas de acuerdo conlas expresiones:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \qquad (1.8)$$
$$I_3 = \det [T_{jk}]$$

El tensor de esfuerzos general, $[T_{jk}]$ puede descomponerse en dos tensores conocidos como *componente volumétrica* y *componente distorsional*. La componente distorsional ,$[T_o]$,resulta de la superposición de cinco estados de cortante puro . De esta manera;

$$[T_o] = \begin{bmatrix} \sigma_x - I_1/3 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - I_1/3 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - I_1/3 \end{bmatrix} \qquad (1.9)$$

La componente volumétrica resulta de aplicar un estado de esfuerzos isotrópico en un punto y tiene la forma;

$$[T_v] = I_1/3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.10)$$

de esta manera, el tensor de esfuerzos general en un punto queda definido por:

$$[T_{jk}] = [T_o] + [T_v] \qquad (1.11)$$

En la componente distorsional se manifiestan los efectos de los esfuerzos cortantes que existen en el punto de interés, mientras que en la componente volumétrica solo están presentes esfuerzos normales.

En la componente distorsional, el invariante lineal ,I_1, se anula. En la componente volumétrica, en cambio, aparecerá el mismo invariante lineal que en el tensor general de esfuerzos, $[T_{jk}]$.

Al igual que para los esfuerzos, existirá un tensor general de deformaciones, simétrico , que viene dado por:

$$[E_{jk}] = \begin{bmatrix} \epsilon x & 1/2\gamma xy & 1/2\gamma xz \\ 1/2\gamma yx & \epsilon y & 1/2\gamma yz \\ 1/2\gamma zx & 1/2\gamma zy & \epsilon z \end{bmatrix} \qquad (1.12)$$

donde:

ϵx , ϵy , ϵz : Las deformaciones unitarias lineales en las direcciones ortogonales x,y,z.

γxy, γxz, γyz: Las deformaciones angulares entre ejes ortogonales en un punto.

El tensor de deformaciones unitarias posee tres cantidades constantes llamadas *invariantes del tensor de deformaciones*, que se representan como sigue:

J_1 : invariante lineal
J_2 : invariante de segundo orden
J_3 : invariante de tercer orden

cuyo cálculo es totalmente análogo al de los invariantes del tensor de esfuerzos.

También, el tensor de deformaciones unitarias podrá ser descompuesto en una componente volumétrica y una componente distorsional que quedan definidas por las expresiones siguientes:
La componente distorsional;

$$[E_o] = \begin{bmatrix} \epsilon x - J_1/3 & 1/2\gamma xy & 1/2\gamma xz \\ 1/2\gamma yx & \epsilon y - J_1/3 & 1/2\gamma yz \\ 1/2\gamma zx & 1/2\gamma zy & \epsilon z - J_1/3 \end{bmatrix} \qquad (1.13)$$

y la componente volumétrica;

$$[E_v] = J_1/3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.14)$$

De lo anterior se llega a una definición para el tensor de deformaciones unitarias similar a (1.11);

$$[E_{jk}] = [E_o] + [E_v] \qquad (1.15)$$

En la componente volumétrica de la deformación se manifiestan solamente las deformaciones unitarias asociadas a las tres direcciones ortogonales x,y,z , mientras que en la componente distorsional aparecen las deformaciones por cortante ó deformaciones angulares, entre esas direcciones.(Ref.1)

Encontrar las relaciones entre esfuerzos y deformaciones ha sido uno de los objetivos de la teoría de Elasticidad , la cual ha establecido una serie de ecuaciones lineales llamadas: *relaciones constitutivas* , bien conocidas y ampliamente utilizadas en los cálculos de ingeniería, por lo que en el presente trabajo no serán desarrolladas, ni discutidas.

Como se mencionó en la sección 1.1, la viscoelasticidad busca establecer las relaciones esfuerzo-deformación-tiempo de los materiales. La variable tiempo introduce la inelasticidad en las relaciones constitutivas, planteándose éstas últimas en forma de ecuaciones diferenciales que hacen del cálculo algo un poco menos simple que lo que ofrece la teoría de Elasticidad.

1.4 Modelos Viscoelásticos:

Los materiales viscoelásticos pueden agruparse en dos grandes conjuntos; los sólidos y los fluidos, los cuales pueden a su vez presentar ó no deformación elástica instantánea . Su comportamiento, en general, bajo esfuerzo uniaxial es muy semejante al de los modelos construidos con elementos elásticos discretos y elementos viscosos, es decir, elementos básicos como son: el resorte lineal y el amortiguador viscoso , mostrados en la Fig. 1.5.

(a) Resorte Lineal
Modelo de Hooke

(b) Amortiguador viscoso
Modelo de Newton

Fig. 1.5 Elementos básicos para la construcción de modelos viscoelásticos

1.4.1 Elementos básicos

Considérese un resorte lineal como el mostrado en la Fig. 1.6 . Cuando se aplica una fuerza P de tensión en sus extremos, su longitud se incrementa en una cierta cantidad u . Al ser retirada la fuerza, el resorte recobra su longitud original.

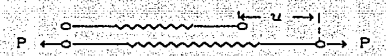


Fig. 1.6 Cuerpo de Hooke sometido a tensión

Este fenómeno describe un comportamiento elástico cuya relación esfuerzo-deformación es conocida como *Ley de Hooke*, y al material que así reacciona bajo los efectos de una carga se le llama *Cuerpo de Hooke.*

En adelante se hablará de esfuerzos , σ ,en lugar de fuerzas, y de deformaciones ,ϵ, en vez de desplazamientos, por ser términos más generales que obvian ciertos valores particulares como son: longitud, área transversal de la barra, etc... De ésta manera , el ejemplo anterior quedará representado en la Fig. 1.7

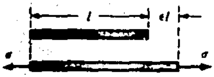


Fig. 1.7

En un material elástico lineal se tiene una relación esfuerzo-deformación ;

$$\sigma = E \epsilon \qquad (1.16)$$

donde:

σ : esfuerzo normal aplicado en los extremos de la barra.
E : módulo de Young del material que forma la barra.
ϵ : deformación unitaria que se produce en correspondencia con esfuerzo aplicado.

Al aplicar un esfuerzo constante , σ , y mantenerlo sostenido a lo largo del tiempo, se obtiene una deformación , también constante, como indica la Fig. 1.8.

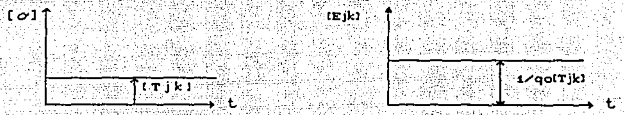


Fig. 1.8 Comportamiento del cuerpo de Hooke bajo esfuerzo constante sostenido.

Lo anterior conduce a una expresión tensorial del siguiente tipo:

$$[T_{jk}] = q_o \, [E_{jk}] \qquad (1.17)$$

Considérese ahora el amortiguador viscoso de la Fig. 1.9a . Consiste en un pistón móvil dentro de un cilindro con su base perforada, de tal manera que el fluido no quede atrapado en su interior. Entre el pistón y el cilindro hay un fluido viscoso, de ésta forma será necesario vencer la fuerza de fijación para que el pistón llegue a moverse.

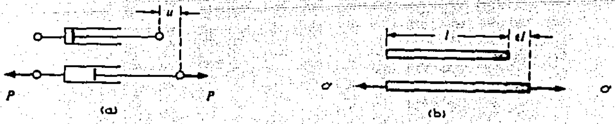


Fig. 1.9 Fluido de Newton bajo esfuerzo constante

Este modelo analógico recibe el nombre de fluido de Newton y representa el comportamiento de un fluido viscoso. La relación constitutiva del modelo está dada por:

$$P = K\,(du \,/\, dt) \qquad (1.18)$$

Una deformación similar se produce en una barra de cierto material, a tensión. Cuando la barra es esforzada, su cambio de longitud , ϵl , no es proporcional a la fuerza, sin embargo , su velocidad de cambio en el tiempo , $d(\epsilon l)/dt$, sí lo es. Por tanto, de (1.18) se llega a la siguiente expresión:

$$\sigma = F\, d\epsilon \,/\, dt = F\, \dot{\epsilon} \qquad (1.19)$$

Se empleará el punto para designar las derivadas totales ó parciales con respecto al tiempo. La cantidad $\dot{\epsilon}$ es llamada *velocidad de deformación* . Un material cuyos esfuerzos sean proporcionales a la velocidad de deformación será llamado *material viscoso.*

En términos de los tensores de esfuerzo y deformación, es posible demostrar que al aplicarse un esfuerzo , σ , constante a lo largo del tiempo sobre un material viscoso, éste presenta un comportamiento similar al de la Fig. 1.10.

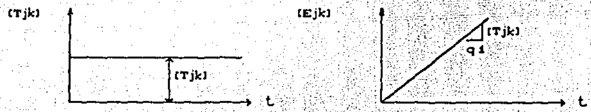


Fig. 1.10 Comportamiento de un fluido viscoso bajo la acción de un esfuerzo constante

donde:

$$[T_{jk}] = q_1\, [\dot{E}_{jk}] \qquad (1.20)$$

Al aceptar que $[T_{jk}]$ es constante en el tiempo, se puede escribir ;

$$[\dot{E}_{jk}] = [T_{jk}] \,/\, q_1 \qquad (1.21)$$

De integrar los dos miembros de la expresión (1.21) se llega a la relación:

$$[E_{jk}] = [T_{jk}]\, t / \, q_1 + C$$

Las condiciones iniciales del problema indican que para un tiempo t = 0 , la deformación, [Ejk] = 0, por tanto, la constante de integración , C , resulta ser igual a cero. De lo anterior se llega a la ecuación definitiva:

$$[E_{jk}] = [T_{jk}]t/q_1 \qquad (1.22)$$

El comportamiento de los materiales viscoelásticos, resulta ser una combinación de los casos descritos por las ecuaciones (1.17) y (1.19) correspondientes a los elementos de las Figs. 1.5a y 1.5b.

Con base en éstos dos elementos (resorte lineal y amortiguador viscoso) es posible construir modelos más complejos y obtener de ellos posibles patrones de comportamiento viscoelástico.

Ubicar un material dado en uno u otro de esos patrones, dependerá de los resultados de las pruebas de laboratorio ó de campo a las cuales dicho material debe ser sometido. A partir del análisis de esos resultados se podrá evaluar cual de los modelos es el que mejor representa su comportamiento y será entonces cuando se pueda aplicar la teoría.

1.4.2 Fluido de Maxwell y Sólido de Kelvin

De los modelos viscoelásticos compuestos, éstos resultan ser los más sencillos. Cada uno de ellos consiste en un resorte lineal de Hooke y un amortiguador viscoso de Newton, dispuestos en arreglos diferentes. (Ref. 2)

Se estudiará en primer lugar el modelo representado en la Fig. 1.11.

Fig. 1.11 Material de Maxwell

Se trata de un arreglo en serie de un sólido de Hooke y un fluido de Newton. Al aplicar un esfuerzo , σ , constante en sus extremos se obtiene una deformación total

$$\epsilon = \epsilon' + \epsilon'' \qquad (1.24)$$

donde ϵ' es la deformación del resorte y está dada por la expresión (1.16), y ϵ'' es la deformación del amortiguador viscoso y sale de la ecuación (1.19), por tanto, se tienen dos componentes de la deformación que conducen a:

$$\sigma = E\,\epsilon' \qquad y \qquad \sigma = F\,\dot{\epsilon}'' \tag{1.24a}$$

Al introducir las expresiones (1.24a) en (1.24) se obtiene la relación esfuerzo-deformación del modelo;

$$\dot{\sigma}/E + \sigma/F = \dot{\epsilon}' + \dot{\epsilon}'' = \dot{\epsilon} \tag{1.25}$$

la cual también puede ser escrita como:

$$\sigma + P_1\,\dot{\sigma} = q_1\,\dot{\epsilon} \tag{1.26}$$

Si se desea efectuar el desarrollo anterior en términos de los tensores de esfuerzos y deformaciones unitarias, se puede llegar a obtener un comportamiento del modelo, semejante al que se muestra en la Fig. 1.12, para un esfuerzo , σ , constante en el tiempo.

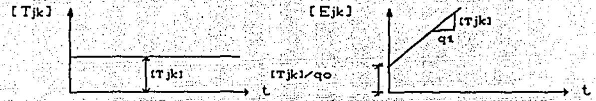


Fig. 1.12 Material de Maxwell

$$[T_{jk}] + P_1\,[\dot{T}_{jk}] = q_1\,[\dot{E}_{jk}] \tag{1.27}$$

El término $[\dot{T}_{jk}]$ se anula, debido a que $[T_{jk}]$ es constante, al integrar la ecuación anterior se llega al siguiente resultado:

$$[E_{jk}] = t\,[T_{jk}] / q_1 + C_1 \tag{1.28}$$

De sustituir las condiciones iniciales, $C_1 = [T_{jk}]/q_o$, por tanto, el comportamiento del modelo queda gobernado por la expresión:

$$[E_{jk}] = [T_{jk}]\,t/q_1 + [T_{jk}]/q_o \tag{1.29}$$

Para comprender el significado físico de estos resultados, en términos de una barra cargada a tensión, se somete dicha barra a dos pruebas estándar (Ref. 3)

La primera de ellas consiste en aplicar un esfuerzo , $\sigma=\sigma_o$, en un tiempo, t=0, y se registra la deformación instantánea $\epsilon(t)$. En este caso ,la ecuación (1.26) corresponde a la ecuación diferencial para ϵ , y tiene la solución:

$$\epsilon = t\sigma_o/q_1 + C_1 \qquad ;\ t>0 \tag{1.30}$$

que es equivalente a la ecuación (1.28). Para hallar la constante de integración , C_1, será necesaria una condición inicial.

La aplicación repentina de un esfuerzo, σ_o , a un tiempo, $t=0$, significa que $\dot{\sigma}(t)$ tiene una singularidad en ese punto. Para hacer que ésta desaparezca, se integra (1.26) a través de ese punto;

$$\int_{-\tau}^{+\tau} \sigma dt + p_1[\sigma(+\tau)-\sigma(-\tau)] = q_1 [\epsilon(+\tau)-\epsilon(-\tau)]$$

cuando $\tau \longrightarrow 0$, el primer término desaparece y sólo queda:

$$p_1\sigma_o = q_1\epsilon_o$$

que es equivalente a la expresión:

$$\epsilon_o = p_1\sigma_o/q_1 = \sigma_o/E_o \tag{1.31}$$

donde:

$\epsilon_o = \epsilon(0^+)$: valor de ϵ inmediatamente a la derecha de $t=0$

E_o : módulo de Young inicial ó de impacto.

Ahora, al introducir el valor de $\epsilon(0^+)$ en (1.30) se consigue:

$$C_1 = \epsilon_o = p_1\sigma_o/q_1$$

por tanto, la ecuación que rige la respuesta del modelo en este caso será:

$$\epsilon = \sigma_o/q_1 * (p_1 + t) \tag{1.32}$$

Este resultado puede ser representado gráficamente como se muestra en la Fig. 1.13.

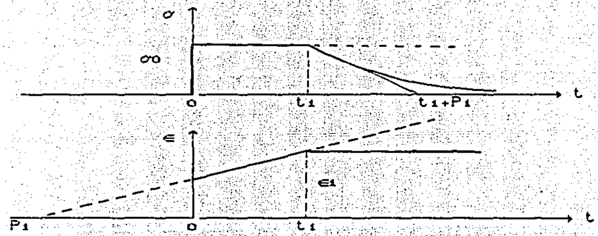


Fig. 1.13 Prueba estándar del Fluido de Maxwell

La segunda prueba estándar comienza para un tiempo , $t=t_1$, aquí la deformación , ϵ , será permanente, y deberá estudiarse lo que sucede con los esfuerzos.

Como $\epsilon = \epsilon_1$ es constante, el término $\dot{\epsilon} = 0$, por lo que la ecuación (1.26) se transforma en una ecuación diferencial homogénea para el esfuerzo, σ ,cuya solución viene dada por:

$$\sigma = C_2\, e^{-t/p_1} \quad ; \; t > t_1 \qquad (1.33)$$

Para hallar C_2 es necesario conocer $\sigma(t_1^+)$, que es el valor del esfuerzo inmediatamente a la derecha de una posible discontinuidad en $t=t_1$.

En la Fig. 1.13 se puede observar que la velocidad de deformación es finita en todos los instantes, por tanto, se puede

concluir que $\sigma(t_1^-) = \sigma(t_1^+)$, es decir, $\sigma = \sigma_0$. De introducir este valor en la ecuación (1.33) resulta:

$$\sigma = \sigma_0\, e^{-(t-t_1)/p_1} \qquad (1.34)$$

En la primera prueba, ϵ se incrementa bajo la acción de un esfuerzo constante. Éste fenómeno se conoce con el nombre de ''*Fase de fluencia*'' de la prueba. En la segunda, el esfuerzo decrece bajo la acción de una deformación constante, es decir, el material se relaja, a ésta etapa es llamada ''*Fase de relajación*''.

En la Fig. 1.13 las líneas punteadas indican lo que debería ocurrir si la fase de fluencia se extendiera más allá de $t = t_1$, la deformación se incrementaría indefinidamente. Físicamente hablando, la deformación escaparía rápidamente del dominio de las relaciones lineales.

El segundo modelo compuesto que se estudiará en éste capítulo se muestra en la Fig. 1.14.

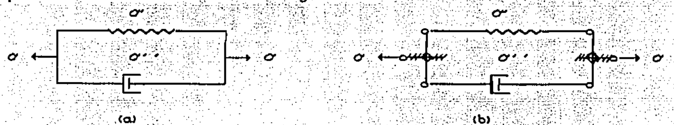


Fig. 1.14 Material de Kelvin

Éste modelo analógico, llamado cuerpo de Kelvin-Voigt , intenta representar materiales cuyo comportamiento es elástico y viscoso en forma simultánea. Consiste, como indica la Fig. 1.14 , en un resorte lineal de Hooke y un amortiguador viscoso de Newton dispuestos en paralelo.

La forma más común de representar éste material se muestra en la Fig. 1.14a , sin embargo, la forma como se distribuye el esfuerzo, σ , aplicado, ocurre como se especifica en la Fig. 1.14b.

En cualquier instante la deformación en el resorte y en el amortiguador será la misma y el esfuerzo, σ, se repartirá entre los dos elementos de tal forma, que σ' corresponde al esfuerzo aplicado en el elemento de Hooke y σ'' será el esfuerzo que recibe el amortiguador viscoso.

Al aplicar a éste modelo las ecuaciones (1.16) y (1.18) se obtiene:

$$\sigma' = E\,\epsilon \quad \text{y} \quad \sigma'' = F\,\dot{\epsilon}$$

donde: $$\sigma = \sigma' + \sigma'' = E\epsilon + F\dot{\epsilon}$$

lo anterior es equivalente a escribir, en forma general:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = q_0\epsilon + q_1\dot{\epsilon} \qquad (1.35)$$

Esta última ecuación diferencial puede ser interpretada a través de una prueba estándar sobre el material, que consiste en el siguiente procedimiento;

Al fijar $\sigma=\sigma_0$, la ecuación (1.35) conduce a la solución:

$$\epsilon = \sigma_0/q_0 + C_1\, e^{-\lambda t} \quad \text{con } \lambda = q_0/q_1 \qquad (1.36)$$

En el tiempo t=0, σ pasa de un valor $\sigma=0$ a $\sigma = \sigma_0$, la ecuación queda dentro del dominio finito, así, la expresión (1.35) obliga a que ϵ presente ese mismo comportamiento. Por tanto, ϵ no puede presentar una discontinuidad en t=0, entonces, la condición inicial para la ecuación (1.36) resulta ser $\epsilon(0^+)=0$, de aquí se llega a que $C_1 = -\sigma_0/q_0$. Al introducir el valor de la constante de integración en (1.36) se obtiene:

$$\epsilon = \sigma_0/q_0\,(1 - e^{-\lambda t}) \qquad (1.37)$$

Como se ilustra en la Fig. 1.15, si se continúan las líneas punteadas, la fase de fluencia se extiende hasta $t \rightarrow \infty$, la deformación no se produce indefinidamente, pero se aproxima a un límite;

$$\epsilon_\infty = \sigma_0/q_0 = \sigma_0/E_\infty \qquad (1.38)$$

donde E_∞ es llamado *módulo asintótico*. Lo anterior es proporcional al esfuerzo.

Planteado en términos de los tensores de esfuerzos y deformaciones unitarias, la expresión (1.35) puede escribirse como:

$$[T_{jk}] = q_0\,[E_{jk}] + q_1\,[\dot{E}_{jk}]$$

o bien; $$[T_{jk}]/q_1 = q_0/q_1\,[E_{jk}] + [\dot{E}_{jk}] \qquad (1.39)$$

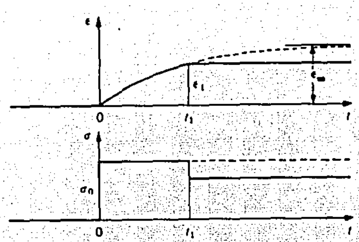


Fig. 1.15 Prueba estándar del sólido de Kelvin

La ecuación (1.39) acepta la solución homogénea:

$$[\dot{E}_{jk}] + q_0/q_1\,[E_{jk}] = 0$$

si

$$q_1[\dot{E}_{jk}] + q_0\,[E_{jk}] = 0$$

$$Ce^{-\lambda t} = [E_{jk}]$$

debido a que $1/q_1\,[T_{jk}]$ es constante; $[\dot{E}_{jk}] = 0$, por tanto, la ecuación que caracteriza a este modelo en función de los tensores de esfuerzos y de deformaciones es:

$$[E_{jk}] = \left\{[T_{jk}]/q_0\right\}(1-e^{-\lambda t}) \quad ; \quad C = [T_{jk}]/q_0 \qquad (1.40)$$

La expresión anterior describe un comportamiento del modelo bajo esfuerzo constante sostenido durante un tiempo relativamente largo, como el que muestra la Fig. 1.16.

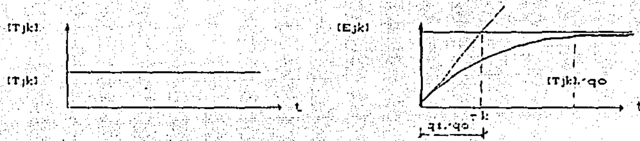


Fig. 1.16 Cuerpo de Kelvin bajo esfuerzo constante

Se observa que el material se empieza a deformar rápidamente hasta un instante en el que la pendiente de la curva empieza a disminuir, mostrándose para un tiempo $t \longrightarrow \infty$ prácticamente nula.

El valor τ_k recibe el nombre de *tiempo de retardo de Kelvin* y se define como el punto de intersección entre la tangente inicial a la curva $[E_{jk}]$ vs t y la recta a la cual se aproxima la curva cuando $t \longrightarrow \infty$.

Para hallar la pendiente inicial a la curva, se sigue el siguiente procedimiento teórico:

Para $t = 0$

$$[\dot{E}]_{t=0} = [(q_0/q_1)\, e^{-(q_0/q_1)t}][T]/q_0$$

donde el término exponencial se hace igual a la unidad. Por tanto:

$$[\dot{E}]_{t=0} = [T]/q_0 * q_0/q_1 = [T]/q_0 * 1/(q_1/q_0)$$

es decir;

$$[T]/q_0 = 1/\tau_k$$

Para $t = \tau_k$

$$[E]_{t=\tau_k} = [T]/q_0(1-e^{-(q_0/q_1)\tau_k}) = [T]/q_0(1-1/e) \simeq 0.632[T]/q_0$$

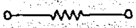
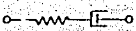
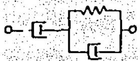
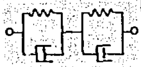
La deformación final para el cuerpo de Kelvin es $[T]/q_0$, y a un tiempo $t=\tau_k$ ya se ha alcanzado aproximadamente el 63% de la deformación final.(Ref.1).

Si se observa la deformación final de este modelo puede decirse que es la misma que corresponde a un sólido elástico, sin embargo, dicha deformación no se presenta desde el principio, es decir , se aproxima a ese valor gradualmente. Puede afirmarse entonces, que ocurre un fenómeno *diferido*.

Cuando se fija la deformación, el esfuerzo se relaja una cantidad, como se ve en la Fig. 1.15 , y luego permanece constante , esto significa que la relajación no es completa.

A partir de estos dos modelos básicos se pueden construir todas las combinaciones necesarias para aproximarse más al comportamiento de los materiales reales. En la tabla 1.1 se listan algunas de éstas combinaciones con sus correspondientes relaciones constitutivas y parámetros que serán estudiados más adelante.(Ref.3).

Tabla 1.1 Materiales Viscoelásticos

Modelo	Nombre	Ec. Diferencial / Desigualdades	Deformabilidad de Fluencia J(t)	Módulo de Relajación Y(t)	Deformabilidad Compleja J(ω): Parte real J1(ω)	Deformabilidad Compleja J(ω): Imaginaria J2(ω)
	Hooke	$\sigma = q_0\epsilon$	$1/q_0$	q_0	$1/q_0$	0
	Newton	$\sigma = q_1\dot{\epsilon}$	t/q_1	$q_1\,\delta(t)$	0	$-1/q_1\omega$
	Maxwell	$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_1\dot{\epsilon}$	$(p_1 + t)/q_1$	$\frac{q_1}{p_1}e^{-t/p_1}$	$\frac{p_1}{q_1}$	$-\frac{1}{q_1\omega}$
	Kelvin	$\sigma = q_0\epsilon + q_1\dot{\epsilon}$	$\frac{1}{q_0}(1-e^{-\lambda t}), \quad \lambda = \frac{q_0}{q_1}$	$q_0 + q_1\,\delta(t)$	$\frac{q_0}{q_0^2+q_1^2\omega^2}$	$-\frac{q_1\omega}{q_0^2+q_1^2\omega^2}$
	Sólido de 3 parámetros	$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\epsilon + q_1\dot{\epsilon}$ $q_1 > p_1q_0$	$\frac{p_1}{q_1}e^{-\lambda t} + \frac{1}{q_0}(1-e^{-\lambda t}),$ $\lambda = q_0/q_1$	$\frac{q_1}{p_1}e^{-t/p_1} + q_0(1-e^{-t/p_1})$	$\frac{q_0+p_1q_1\omega^2}{q_0^2+q_1^2\omega^2}$	$-\frac{(q_1-q_0p_1)\omega}{q_0^2+q_1^2\omega^2}$
	Fluido de 3 parámetros	$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_1\dot{\epsilon} + q_2\ddot{\epsilon}$ $p_1q_1 > q_2$	$\frac{t}{q_1} + \frac{p_1q_1-q_2}{q_1^2}(1-e^{-\lambda t})$ $\lambda = q_1/q_2$	$\frac{q_2}{p_1}\delta(t) + \frac{1}{p_1}\left(q_1 - \frac{q_2}{p_1}\right)e^{-t/p_1}$	$\frac{p_1q_1-q_2}{q_1^2+q_2^2\omega^2}$	$-\frac{q_1+p_1q_2\omega^2}{(q_1^2+q_2^2\omega^2)\omega}$
	Burgers	$\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} = q_1\dot{\epsilon} + q_2\ddot{\epsilon}$ $p_1q_1 > q_2, \quad p_1^2 > 4p_2$ $p_1q_1q_2 > p_2q_1^2 + q_2^2$	$\frac{t}{q_1} + \frac{p_1q_1-q_2}{q_1^2}(1-e^{-\lambda t})$ $+\frac{p_2}{q_2}e^{-\lambda t}, \quad \lambda = q_1/q_2$	$\frac{1}{\sqrt{p_1^2-4p_2}}[(q_1-\alpha q_2)e^{-\alpha t}$ $-(q_1-\beta q_2)e^{-\beta t}],$ $\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2p_2}\left(p_1 \pm \sqrt{p_1^2-4p_2}\right)$	$\frac{(p_1q_1-q_2)+p_2q_1\omega^2}{q_1^2+q_2^2\omega^2}$	$-\frac{q_1+(q_2p_1-p_2q_1)\omega^2}{(q_1^2+q_2^2\omega^2)\omega}$
	Sólido de 4 Parámetros	$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\epsilon + q_1\dot{\epsilon} + q_2\ddot{\epsilon}$ $q_1 > p_1q_0, \quad q_1^2 > 4q_0q_2$ $q_1p_1 > q_0p_1^2 + q_2$	$\frac{1+p_1\lambda_1}{q_2\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}(1-e^{-\lambda_1 t})$ $+\frac{1+p_1\lambda_2}{q_2\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}(1-e^{-\lambda_2 t})$ λ_1, λ_2 $q_2\lambda^2 - q_1\lambda + q_0 = 0$	$\frac{q_2}{p_1}\delta(t) + \frac{q_1p_1-q_2}{p_1^2}$ $-\frac{1}{p_1^2}(q_1p_1-q_0p_1^2-q_2)(1-e^{-t/p_1})$	$\frac{q_0+(p_1q_1-q_2)\omega^2}{q_0^2+(q_1^2-2q_0q_2)\omega^2+q_2^2\omega^4}$	$-\frac{(q_1-p_1q_0)\omega+q_2p_1\omega^3}{q_0^2+(q_1^2-2q_0q_2)\omega^2+q_2^2\omega^4}$

CAPÍTULO II

ASPECTOS TEÓRICOS DE VIBRACIÓN VISCOELÁSTICA

2.1 Función Escalón, Función de Dirac y Transformada de Laplace

En el capitulo anterior se describió la aplicación repentina de un esfuerzo, σ, de tal manera que para un tiempo $t<0$, $\sigma = 0$ y para cualquier instante $t>0$, $\sigma = \sigma_0$. Para ello se dividía el eje correspondiente al tiempo en dos partes y se aplicaba una ecuacion diferente a cada una de ellas.

Una manera compacta de expresar lo anterior es mediante una función escalón $\Delta(t)$, la cual está definida por las ecuaciones siguientes:

$$\Delta(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad \forall \quad t < 0 \\ 1 & ; \quad \forall \quad t > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

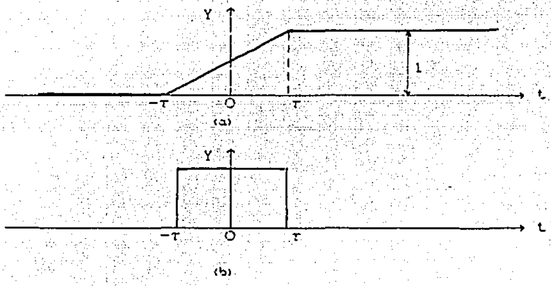


Fig. 2.1 Definición de $\Delta(t)$ y $\delta(t)$

Para el tiempo $t= 0$, la función $\Delta(t)$ esta indefinida, a menos que se distinga el cero como : $t=0^-$ y $t = 0^+$ como un ultimo tiempo negativo y un primer tiempo positivo , respectivamente.

Al recurrir a la función escalon $\Delta(t)$, la fase de fluencia estudiada en el capitulo anterior se define como:

$$\sigma = \sigma_0 \, \Delta(t) \tag{2.2}$$

Para introducir (2.2) en las ecuaciones diferenciales que caracterizan a los modelos viscoelasticos, será necesario obtener las derivadas de la función $\Delta(t)$. En la Fig. 2.1 se muestra como $\Delta(t)$ puede ser interpretada como el caso limite de una funcion $Y(t)$, cuya derivada resulta ser igual a cero para cualquier t a excepción de un pequeño intervalo alrededor de $t=0$.

Al integrar sobre el eje t dentro de ese pequeño intervalo, se puede demostrar que el area bajo el rectangulo resulta ser igual a la unidad. A medida que dicho intervalo se haga más pequeño, la altura del rectangulo tendera a aumentar para mantener el valor del área unitaria, como se indica en la Fig. 2.1. Por tanto, cuando el intervalo alrededor de $t=0$ tienda a cero, la altura del rectangulo debe tender a infinito. Lo anterior representa a una función muy singular, $\delta(t)$, que viene a ser la derivada de la función $\Delta(t)$ y que queda definida por:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad \forall \quad t \neq 0 \\ 1 & ; \quad \forall \quad t = 0 \end{cases} \qquad (2.3a)$$

que se obtiene al integrar la función $\delta(t)$, a lo largo del eje t;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t)\, dt = 1 \qquad (2.3b)$$

Esta funcion, $\delta(t)$, recibe el nombre de *Delta de Dirac*.

A fin de ilustrar la aplicacion de la función escalón a un caso practico, considerese el modelo de Kelvin descrito en el capitulo I. Supongase que se desea alcanzar la deformación ϵ_1 indicada en la Fig. 1.15 en un tiempo $t = t_1$ cercano a cero. Al desarrollar las series de expansion de la funcion exponencial de la ecuación (1.37) esta puede ser escrita como:

$$\epsilon_1 = \sigma_0/q_0(1-e^{-\lambda t}) = \sigma_0/q_0[1-1+\lambda t_1-1/2(\lambda t_1)^2+\ldots..]=\sigma_0/q_1+\ldots$$

donde: $\lambda = q_0/q_1$.

Al eliminar los terminos de orden superior se obtiene en el limite:

$$\epsilon_1 q_1 = \sigma_0 t_1$$

Se observa entonces, que para $t \rightarrow 0$, σ_0 debera tender a infinito para que se cumpla esta relacion, por tanto, la primera parte de la Fig. 1.15a degenera en un delta de Dirac cuyo valor esta dado por :

$$\sigma = \epsilon_1\, q_1\, \delta(t)$$

y esta ultima expresion al ser introducida en (1.37) conduce a :

$$\sigma = \epsilon\, q_1\, \delta(t) + \epsilon_1\, q_0\, \Delta(t) \quad ; \quad \text{para} \quad \epsilon = \epsilon_1 \Delta(t) \qquad (2.4)$$

La ecuación (2.4) representa la respuesta del modelo de Kelvin bajo una deformacion repentina forzada . Al comienzo, la función delta de Dirac aparece como un pico. Este pico se manifiesta en todos aquellos materiales que no poseen una respuesta elastica instantanea bajo la aplicacion repentina de esfuerzos, es decir, $E_2 \longrightarrow \infty$.(Ref.3).

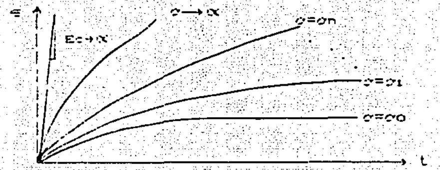


Fig. 2.2 Curvas ϵ vs t en el cuerpo de Kelvin bajo distintos niveles de esfuerzo aplicados repentinamente

En la Fig. 2.2 se resume lo expuesto anteriormente. En ésta se muestra como para altos niveles de esfuerzos la curva deformacion-tiempo tiende a levantarse, aumentando su módulo tangente inicial , E_2 , hasta tender a infinito en el caso de una rapida aplicación de un esfuerzo de gran magnitud.

Para los desarrollos posteriores se recurrira al uso de la transformada de Laplace, por tanto, se hace necesario realizar una breve explicacion de ciertos conceptos basicos al respecto.

Si se tiene una funcion f(t) cualquiera del tiempo, se define su transformada de Laplace como:

$$\overline{f}(t) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}dt \qquad (2.5)$$

En (2.5) se ha integrado la funcion f(t) en el tiempo, entre limites fijos. $\overline{f}$ depende solamente de la variable s . Es importante destacar lo siguiente:

i) Los valores de f(t) para $t < 0$ no influyen sobre $\overline{f}(s)$.
ii) Las transformadas de las derivadas de la función ,f(t), tienen una relación simple con $\overline{f}(s)$. Esta relacion consiste en la aplicación de (2.5) a $f'(t)$, por ejemplo:

$$\overline{f}(s) = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-st}dt$$

Al integrar por partes lo anterior, resulta:

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st}dt = -f(o)+s\bar{f}(s) \quad (2.6a)$$

Al aplicar el mismo procedimiento a la segunda y tercera derivada de f(t) se encuentra:

$$\int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = -f'(0)-sf(0)+s^2\bar{f}(s) \quad (2.6b)$$

$$\int_0^\infty f'''(t)e^{-st}dt = -f''(0)-sf'(0)-s^2f(0)+s^3\bar{f}(s) \quad (2.6c)$$

En general:

$$\int_0^\infty f^n(t)e^{-st}dt = s^n\bar{f}(s)-s^{n-1}f(o)-s^{n-2}f'(0)-s^{n-3}f''(0)\ldots\ldots \quad (2.6d)$$

Si las condiciones iniciales fuesen nulas, se obtendria:

$$\int_0^\infty f^n(t)e^{-st}dt = s^n\bar{f}(s) \quad (2.7)$$

Algunas otras aplicaciones y propiedades de la transformada de Laplace seran explicadas con mas detall· en el apéndice A.

Cuando f(t) o sus derivadas tengan una singularidad en t=0, sera necesario diferenciar entre 0^- y 0^+ como limite inferior de la integral (2.5).

En la mayor parte de los casos es necesario tratar con funciones que se anulan para valores de t<0, por tanto, para estas funciones, al tenerse 0^- como base , todos los terminos de la integral se anulan, este es el caso mencionado anteriormente como el de condiciones iniciales nulas, en el cual, la enésima derivada de f(t) tendra una transformada de Laplace dada por (2.7).

Un modelo viscoelastico generico tiene una ecuación diferencial que lo define de la forma:

$$\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} + \ldots\ldots = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon} + \ldots\ldots \quad (2.8a)$$

Esta expresión tambien puede ser escrita como:

$$\sum_0^m p_K \frac{d^K\sigma}{dt^K} = \sum_0^n q_K \frac{d^K\varepsilon}{dt^K} \quad (2.8b)$$

Así, se podrá dividir la ecuación entre una constante, sin cambiar su significado, y siempre se podrá tomar $p_o = 1$. Por tanto, la ecuación (2.8b) puede presentarse como:

$$P\sigma = Q\varepsilon \qquad (2.8c)$$

donde P y Q son operadores diferenciales definidos por:

$$P = \sum_{0}^{m} p_k \frac{d^k}{dt^k} \qquad y \qquad Q = \sum_{0}^{n} q_k \frac{d^k}{dt^k} \qquad (2.9)$$

Cuando (2.8b) es sometida a una transformación de Laplace, se obtiene la siguiente relación algebraica entre las transformadas $\bar{\sigma}(s)$ y $\bar{\varepsilon}(s)$:

$$\sum_{0}^{m} p_k\, s^k\, \bar{\sigma} = \sum_{0}^{n} q_k\, s^k\, \bar{\varepsilon} \qquad (2.10a)$$

y esto tambien puede escribirse como:

$$\mathcal{P}(s)\, \bar{\sigma} = \mathcal{Q}(s)\, \bar{\varepsilon} \qquad (2.10b)$$

donde $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son polinomios en s que quedan definidos por:

$$\mathcal{P}(s) = \sum_{0}^{m} p_k\, s^k \qquad y \qquad \mathcal{Q}(s) = \sum_{0}^{n} q_k\, s^k \qquad (2.11)$$

Algunos resultados obtenidos mediante la transformación de Laplace, al utilizar como base de la integral 0^-, es decir, condiciones iniciales nulas, se muestran en la tabla A-I del apendice A.(Ref. 4).

2.2 Módulo de Relajación.

Supongase que al cilindro de la Fig. 2.3 se le aplica una deformación axial Δl , de tal manera que su nueva longitud sea $\Delta l + L$. Para muchos materiales, si la fuerza necesaria para mantener esa nueva longitud, es medida a lo largo del tiempo, se encuentra que esa fuerza disminuye en el transcurso del tiempo, como muestra la Fig. 2.4 .

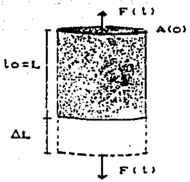


Fig. 2.3 Cilindro a Tensión

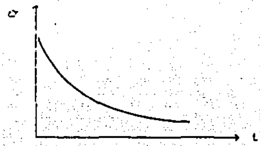


Fig. 2.4 Relajación de Esfuerzos

Se dice entonces que el esfuerzo se relaja, y la prueba descrita se conoce con el nombre de *experimento de relajación de esfuerzos*.

A lo largo de una curva σ vs t se puede hallar el módulo del material y puede observarse que éste es ahora función del tiempo, como muestra la siguiente expresión:

$$E(t) = \frac{F(t)}{A_o \ \Delta l/l_o} \tag{2.12}$$

$E(t)$ es llamado *modulo de relajacion*. Su comportamiento en el tiempo es, generalmente, complejo y depende del tipo de material que se investiga. Éste, no es necesariamente independiente de la deformacion unitaria , $\Delta l/l_o$. De hecho, la mayoría de las resinas comerciales, bajo deformaciones de trabajo, muestran módulos de relajacion dependientes de las mismas. No obstante, para materiales de uso común en ingeniería, el cálculo del módulo de relajación independiente de las deformaciones unitarias, cuando estas se encuentran acotadas en el intervalo de trabajo, resulta ser una excelente aproximacion de $E(t)$. En éstos materiales dicho modulo es siempre monotónicamente decreciente, o por lo menos, una función decreciente en el tiempo y se denota por $Y(t)$.

De ésta manera, la curva de la Fig. 2.4 viene dada por:

$$\sigma(t) = \varepsilon_o \ Y(t) \tag{2.13}$$

Si se toma $\bar{\varepsilon} = s^{-1}$ y $\bar{\sigma} = \bar{Y}(s)$ en (2.10b) se tiene que:

$$\bar{Y}(s) = \frac{Q(s)}{s.P(s)} \tag{2.14}$$

De la expresión (2.14) puede obtenerse el módulo de relajación para cualquier material viscoelástico.

2.3 Fluencia:

Supóngase ahora que el paralelepipedo de la Fig.2.5 se carga con una fuerza constante F. En general, la deformación se incrementa con el tiempo, como se muestra en la Fig. 2.6 . Esto se puede interpretar como la *fluencia* del material, que comienza con un reacomodo estructural de las particulas que lo componen.

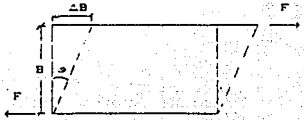


Fig. 2.5 Paralelepipedo sometido a fuerza cortante

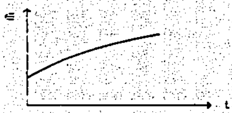


Fig. 2.6 Deformación en fluencia

2.4 Deformabilidad de Fluencia

En el experimento representado por las Figs.2.5 y 2.6 se puede calcular la deformacion especifica del material como una función del tiempo. Ésta puede expresarse de la forma:

$$J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma} \tag{2.15}$$

donde σ es el esfuerzo constante aplicado.

En algunos materiales J(t) se incrementa sin limites hasta que estos fallan, en otros, J(t) crece hasta un valor limite. En polimeros cristalinos en cambio, pueden presentarse crecimientos de J(t) parecidos a cualquiera de los dos anteriores según sea el nivel de esfuerzos al que sean sometidos.(Ref. 5). Ésto muestra que solo para niveles de esfuerzos muy pequeños, bajo los cuales la estructura original del material se mantenga invariante, J(t) sera independiente del esfuerzo, es decir, mientras el material se encuentre en el intervalo lineal de comportamiento.

En este trabajo se considerara que los materiales modelados mediante analogias viscoelasticas se encuentran en el intervalo lineal, o sea, la deformacion sera siempre proporcional a σ_o y quedara expresada por:

$$\epsilon(t) = \sigma_o \, J(t) \tag{2.16}$$

La funcion J(t) es la deformacion por unidad de esfuerzo aplicado, de forma constante, a lo largo del tiempo sobre un material, y resulta ser diferente para cada uno de estos. J(t) describe en cierta forma el comportamiento esfuerzo-deformación de un material especifico.

De lo anterior puede concluirse que para todo $t<0$, $J(t)\geq 0$, así, bajo carga sostenida, una barra a tensión nunca presentará como respuesta un acortamiento axial. Por tanto, $J(t)$ será una función monotónicamente creciente en el tiempo.

Para un modelo generico, de (2.10b) se obtiene que:

$$\bar{J}(s) = \frac{\mathcal{P}(s)}{sQ(s)} \qquad (2.17)$$

Con (2.14) y (2.17) se halla una relación entre la deformabilidad de fluencia y el modulo de relajación que es válida en el intervalo de comportamiento lineal del material:

$$\bar{J}(s)\ \bar{Y}(s) = s^{-2} \qquad (2.18)$$

Las expresiones de $J(t)$ correspondientes a los modelos viscoelasticos más comunes se encuentran en la tabla 1.1 .

2.5 Principio de Superposición de Boltzmann.

En las secciones precedentes se desarrollaron algunos conceptos necesarios para describir el comportamiento viscoelastico de los materiales, tales como: el modulo de relajación y la deformabilidad de fluencia. Cada uno de ellos referido a un tipo particular de prueba y limitado en su alcance y aplicaciones.

Lo anterior parece indicar que para conseguir la caracterización completa de un material viscoelastico, las cantidades mencionadas deberian conocerse para todos los valores de t.

Debido a que los materiales que aquí se consideran, se suponen en el intervalo de comportamiento lineal, es posible usar el principio de superposición para calcular las deformaciones producidas por varias cargas .

Para una barra a tensión, pueden calcularse las deformaciones producidas por una serie de esfuerzos tensionantes de distintas magnitudes, aplicados sucesivamente. Para entender el desarrollo que se intenta plantear, observese el caso descrito en la Fig. 2.7 .
Para el tiempo $t=0$ se aplica un esfuerzo σ_0 sobre el elemento, el cual responde con una deformación igual a $\epsilon = \sigma_0 J(t)$. Si este esfuerzo σ_0, se mantiene constante en el tiempo, la expresión anterior es suficiente para describir la deformación en cualquier instante. Sin embargo, si a un tiempo $t=t'$ se aplica

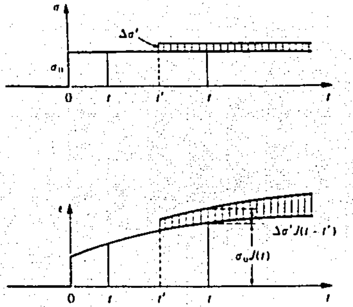


Fig. 2.7 Superposición lineal de incrementos de esfuerzo

sobre el elemento un incremento de esfuerzo $\Delta\sigma'$, la deformacion aumenta su valor en correspondencia a este esfuerzo adicional para todo $t>t'$. Esta deformacion también será función de $J(t)$. No obstante, ese incremento de la deformación será medido a partir del instante $t=t'$ y estara dado por la expresión:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \Delta\sigma' J(t-t') \qquad (2.19)$$

El caso de la Fig. 2.7 ilustra el hecho muy particular de un incremento de esfuerzo aplicado repentinamente en el instante t' para permanecer posteriormente constante en el tiempo.

Supóngase ahora, el caso en el cual un elemento se somete en un tiempo $t=0$ a un esfuerzo σ_0, aplicado , pero que luego σ varía como una funcion arbitraria $\sigma(t)$, como se muestra en la Fig. 2.8. Ese diagrama de esfuerzos puede ser dividido en varias partes; una parte basica $\sigma_0\Delta(t)$ y una secuencia de incrementos de esfuerzos infinitesimales de la forma $d\sigma'\Delta(t-t')$, donde $d\sigma'=(d\sigma/dt)_{t=t'}\,dt$, es decir, $(d\sigma'/dt')dt'$.

Para un tiempo t, la deformacion correspondiente es la sumatoria de las deformaciones causadas por todos los incrementos de esfuerzo aplicados antes de ese instante, o sea, a $t' < t$. Esto ultimo puede expresarse mediante la siguiente ecuacion:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t-t') \frac{d\sigma'}{dt'}\, dt' \qquad (2.20a)$$

donde $(d\sigma'/dt')dt'$ representa el incremento del esfuerzo con el tiempo. t.

Esta ecuación muestra como la deformación , en cierto instante , depende de todos los incrementos de esfuerzo ocurridos anteriores a él, ó bien, de la historia de esfuerzos $\sigma'(t')$ para $t' < t$.

Este hecho constituye una diferencia indiscutible con respecto a los materiales elásticos, cuyas deformaciones en cada instante son dependientes del esfuerzo aplicado en ese momento, y son, totalmente independientes de cualquier historia previa de esfuerzos.

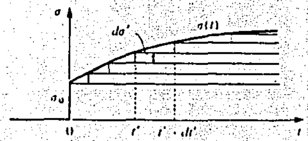


Fig. 2.8 Demostración de la integral hereditaria

La ecuación (2.20*a*) recibe el nombre de *integral hereditaria*.

Mediante el siguiente cambio de variables:

$$u = J(t-t')\Big|_0^t$$

$$v = \sigma(t')\Big|_0^t$$

$$dv = \frac{dJ(t-t')dt'}{dt'}$$

al integrar por partes a (2.20a) se obtiene:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + [J(t-t')\sigma(t')]_0^t - \int_0^t \sigma(t')\frac{dJ(t-t')}{dt'}\, dt'$$

Debe notarse que en esta ecuación , el cero corresponde a lo que se ha llamado 0^+, en el capitulo anterior. Por tanto, es posible escribir :

$$\frac{dJ(t-t')}{dt'} = - \frac{dJ(t-t')}{d(t-t')}$$

y de aquí se obtiene una segunda versión de (2.20a):

$$\epsilon(t) = \sigma(t)J(0) + \int_0^t \sigma(t') \frac{dJ(t-t')}{d(t-t')} dt' \qquad (2.20b)$$

De esta manera, (2.20a) muestra por separado las deformaciones causadas por el esfuerzo inicial σ_0 y por los posteriores incrementos de esfuerzo, y (2.20b), proporciona la deformación que ocurriría si el esfuerzo total, σ, fuese aplicado de una vez en un tiempo t y la deformación adicional producida por la fluencia ocurrida en tiempos posteriores debido a la mayoría ó el total de los esfuerzos aplicados.

Así como se han desarrollado las integrales hereditarias (2.20a) y (2.20b), en función de la deformabilidad de fluencia, J(t) del material, es posible encontrar expresiones similares en términos del módulo de relajación de éste, Y(t), dado por (2.13). Si las deformaciones de una barra a tensión son conocidas como una función del tiempo, es decir, si se conoce la historia de deformaciones del elemento, se pueden expresar los esfuerzos de la siguiente manera:

$$\sigma(t) = \epsilon_0 Y(t) + \int_0^t Y(t-t') \frac{d\epsilon'}{dt'} dt' \qquad (2.21a)$$

ó bien;

$$\sigma(t) = \epsilon(t)Y(0) + \int_0^t \epsilon(t') \frac{dY(t-t')}{d(t-t')} dt' \qquad (2.21b)$$

2.6 Comportamiento Dinámico

Considérese el paralelepípedo de la Fig. 2.5, sometido a una fuerza F(t) que varíe senoidalmente en el tiempo. En general, los esfuerzos y las deformaciones que se producen debidos a ésta fuerza no estarán en fase. Sin embargo, para un material idealmente elástico, lo estarán, así, como para un material idealmente viscoso, los esfuerzos se encontrarán en fase con la velocidad de deformación, es decir, estarán en cuadratura con la deformación. De este modo, al suponer que los esfuerzos son linealmente proporcionales a la deformación o a la velocidad de deformación, puede escribirse:

$$\sigma = \xi\epsilon + \eta\dot{\epsilon} \qquad (2.22)$$

Si se dice que

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t} \qquad (2.23)$$

y que la deformación es:

$$\epsilon = \epsilon_0 e^{i\omega t + \beta} \qquad (2.24)$$

donde β es el factor de fase, se obtiene:

$$\sigma = (\mathcal{G} + i w \eta)\epsilon \qquad (2.25)$$

El módulo dinámico complejo será entonces:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + i\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1 + i w \eta = \frac{\sigma}{\epsilon} \qquad (2.26)$$

es decir, el módulo dinámico complejo es la relación entre el esfuerzo cortante de variación sencidal y la deformación que éste produce , en la prueba del paralelepípedo.

El significado de las dos partes del módulo dinámico se puede apreciar en la ecuación (2.25). La parte real, $\mathcal{G}_1$, proporciona la componente elastica de la deformación y representa la energía utilizada como energía elástica por ciclo. La parte imaginaria, a su vez, da la componente viscosa de la deformación y representa la energía perdida por ciclo.(Ref.5).

Todas las deformaciones viscoelásticas varían con el tiempo, es decir, ocurre un movimiento continuo. Siempre que ocurra un cambio de velocidad se producirá una aceleración como resultado del desequilibrio de las fuerzas. Sin embargo, el movimiento viscoelastico es tan pequeño, que el producto de las masas por las aceleraciones resulta ser una cantidad despreciable en comparación con las magnitudes de las fuerzas actuantes. Debido a este hecho, es posible desarrollar una parte sustancial de la teoria viscoelastica sin introducir terminos de inercia en las ecuaciones. No obstante, en la teoria de vibraciones, estos terminos adquieren gran importancia y deben ser considerados.

2.7 Deformabilidad Compleja

Al plantear las ecuaciones correspondientes al problema dinámico y al introducir los terminos de inercia en estas, se puede examinar la ecuacion constitutiva del material viscoelastico para el caso especial, en el cual las deformaciones y los esfuerzos sean funciones periodicas.

Tomese la ecuacion constitutiva de un modelo viscoelástico generico de N parametros

$$\sigma + p_1\sigma' + p_2\sigma'' + \ldots = q_0\epsilon + q_1\epsilon' + q_2\epsilon'' + \ldots \qquad (2.27a)$$

que como se estudio anteriormente, puede ser escrita como

$$\sum_{0}^{m} p_K \frac{d^K\sigma}{dt^K} = \sum_{0}^{n} q_K \frac{d^K\epsilon}{dt^K} \qquad (2.27b)$$

Examinar este modelo en condiciones de esfuerzos y deformaciones oscilatorias, es algo que se puede hacer de dos maneras.

La primera, consiste en aplicar un esfuerzo periódico $\sigma = \sigma_o$ senwt sobre un especimen a tension. Este respondera con una deformación oscilatoria.

La segunda, es someter al especimen a una deformación oscilatoria forzada y registrar el esfuerzo necesario para producir dicha deformación.

Mientras que el primer examen puede ser visto como algo natural, el segundo, presenta la ventaja de no introducir signos negativos.

Al poner en práctica la primera prueba, se aplica un esfuerzo de la forma:

$$\sigma = \sigma_o \operatorname{sen} wt \qquad (2.28)$$

y se obtiene como respuesta, una deformación

$$\epsilon = \epsilon_o e^{iwt} \qquad (2.29)$$

de aplicar la fórmula de Euler a la ecuacion (2.29) se obtiene

$$\epsilon = \epsilon_o e^{iwt} = \epsilon_o (\cos wt + i \operatorname{sen} wt) \qquad (2.30)$$

En esta ecuación, las partes real e imaginaria representan dos deformaciones oscilatorias que son funciones de la frecuencia, w . Asi, (2.27b) tiene dos coeficientes reales, p_K y q_K . La parte real de la deformación ϵ , corresponde al resultado de aplicar la parte real del esfuerzo, σ, y la parte imaginaria de ϵ, será la respuesta del material ante la aplicación de la parte imaginaria de σ. De esta manera, se obtienen simultáneamente , la soluciones a dos problemas estrechamente relacionados.

Al introducir (2.30) en (2.27a) se tiene:

$$\sigma = \sigma_o e^{iwt}$$

que, mediante la formula de Euler , puede ser escrito como:

$$\sigma = \sigma_o e^{iwt} = \sigma_o (\cos wt + i \operatorname{sen} wt) \qquad (2.31)$$

Al llevar a (2.31) a la forma de (2.27b) resulta:

$$\frac{d^K\sigma}{dt^K} = (\iota w)^K \sigma o e^{\iota w t}$$

$$\frac{d^K\epsilon}{dt^K} = (\iota w)^K \epsilon o e^{\iota w t}$$

Por tanto, (2.27b) queda como:

$$\sum_{o}^{m} pK (\iota w)^K \sigma o e^{\iota w t} = \sum_{o}^{n} qK (\iota w)^K \epsilon o e^{\iota w t}$$

ó bien

$$\sigma o \sum_{o}^{m} pK (\iota w)^K = \epsilon o \sum_{o}^{n} qK (\iota w)^K$$

Luego, la magnitud de los esfuerzos se puede escribir como:

$$\sigma o = \epsilon o \frac{\sum qK \, \iota^K w^K}{\sum pK \, \iota^K w^K} \qquad (2.32)$$

La ecuación (2.32) en función de (2.1?), tambien se puede expresar de la manera siguiente:

$$\sigma o = \frac{Q(\iota w)}{\mathcal{P}(\iota w)} \xi o \qquad (2.33)$$

donde $\mathcal{P}$ y Q son los polinomios que resultan de aplicar la transformada de Laplace.

Evidentemente, σo resulta ser una cantidad compleja, por lo que puede ser escrito de la forma:

$$\sigma o = (\sigma 1 + \iota \sigma 2) \qquad (2.34)$$

y por (2.31)

$$\sigma = \sigma o \, (\cos wt + \iota \mathrm{sen}\, wt)$$

Al sustituir (2.34) en (2.31) se encuentra:

$$\sigma = (\sigma 1 + \iota \sigma 2) (\cos wt + \iota \mathrm{sen}\, wt)$$

De desarrollar la expresión anterior y agrupar terminos, se llega a:

$$\sigma = (\sigma_1 \cos wt - \sigma_2 \operatorname{sen} wt) + i(\sigma_1 \operatorname{sen} wt + \sigma_2 \cos wt) \qquad (2.35)$$

La expresion (2.35) muestra las componentes real e imaginaria del esfuerzo, σ, separadamente. La parte real del esfuerzo corresponde a la respuesta del especimen ante la componente real de la deformacion forzada y la parte imaginaria del esfuerzo es la respuesta ante la parte imaginaria de esta.

En ambos casos, los esfuerzos son una combinacion de las oscilaciones del tipo seno y coseno, es decir, existe un cambio de fase, del cual se hablo en la seccion anterior, entre el esfuerzo y la deformacion, por lo que cada uno alcanza su valor pico en instantes diferentes.

La relacion entre esfuerzos y deformaciones puede ser visualizada en un diagrama vectorial, como el que aparece en la Fig. 2.9 .

Este diagrama, consiste en dos pares de ejes ortogonales (R,I) y (r,i). Los ejes (R,I) forman un sistema coordenado en el cual se grafican los puntos (σ_1,σ_2) y $(\varepsilon_0,0)$, y los vectores resultantes, σ y ε, que tienen esas coordenadas como componentes. Esos vectores son llamados *vectores de amplitud* de las cantidades oscilatorias σ y ε.

Los ejes (r,i) giran en sentido horario con una velocidad angular, w . Cuando se proyectan σ y ε sobre el eje r para un tiempo t = t, se hallan las componentes vectoriales:

$$\sigma_1 \cos wt - \sigma_2 \operatorname{sen} wt \qquad y \qquad \varepsilon_0 \cos wt$$

que son las componentes reales de los terminos de la derecha de (2.30) y de (2.35). Similarmente, las proyecciones de σ y ε sobre el eje i corresponden a las componentes imaginarias del esfuerzo y de la deformacion. El angulo δ entre los vectores de amplitud representa el angulo de fase entre las oscilaciones, este puede

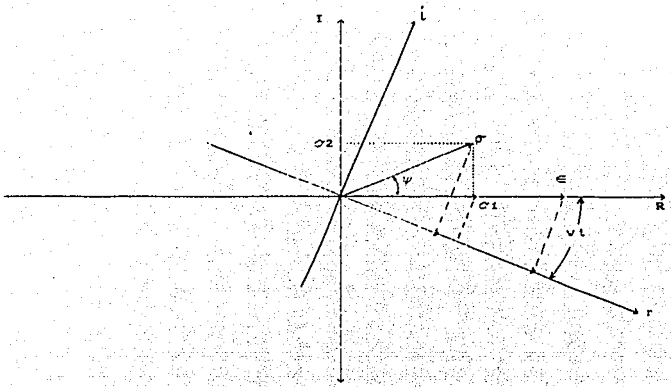


Fig. 2.9 Representación vectorial compleja de una vibración

hallarse fácilmente mediante el procedimiento siguiente:

De la Fig. 2.9 se tiene que:

$$\epsilon = \epsilon_o \text{sen } wt$$

$$\sigma = \sigma_2 \cos wt + \sigma_1 \text{sen } wt$$

por trigonometria:

$$\sigma = A \cos \psi \cos wt + a \text{ sen}\psi \text{ sen } wt$$

por tanto, el esfuerzo queda como:

$$\sigma = A (\cos \psi \cos wt + \text{sen } \psi \text{ sen } wt)$$

ó bien;

$$\sigma = A [\cos (wt + \psi)]$$

De la Fig. 2.9 se obtiene:

$$\sigma_2^2 = A^2 \cos^2 \psi \qquad y \qquad \sigma_1^2 = A^2 \text{sen}^2 \psi$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = A^2 \Rightarrow A = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{(1/2)}$$

De aquí que:

$$\psi = \text{angtan}\,(\sigma_2/\sigma_1) \tag{2.36}$$

Para un tiempo $t=0$; $\psi = 0$, es decir, los dos pares de ejes ortogonales ,(R,I) y (r,i) coinciden, y $wt = 0$. Ese es el caso de un material perfectamente elástico. Para cualquier otro instante $t=t$, los vectores de amplitud se descomponen en términos reales y términos imaginarios.

Al rotar los ejes (r,i), llegan a coincidir, primero con el vector σ, y para un tiempo $t = \psi/w$, coinciden con el vector ϵ, de esta manera, σ alcanza sus máximos casi al mismo tiempo en que ϵ alcanza los suyos.

Hasta ahora, todo el desarrollo previo ha supuesto una deformación ϵ_o real, es decir, que como se muestra en la Fig. 2.9 ϵ coincide con el eje R del sistema coordenado fijo. Si se rotaran los vectores de amplitud un ángulo, y se mantiene fijo entre ellos el ángulo de fase, ψ, los resultados no deberían diferir mucho de los obtenidos. En otras palabras, tanto los esfuerzos , como las deformaciones deberían alcanzar sus puntos máximos y sus cruces por cero para un tiempo, antes ó después, pero sin que ocurra un cambio en las relaciones entre ellos, o sea, el defasamiento será el mismo dado en la ecuación (2.36); hecho que le da generalidad a los resultados.

Si se hace uso de esta posibilidad de generalización de las ecuaciones previamente obtenidas, ϵ_o se considerará compleja y podrá expresarse como:

$$\epsilon_o = \epsilon_1 + i\epsilon_o$$

sin que (2.32) y (2.33) se vean afectadas por ello.

De lo anterior se deduce que la ecuación diferencial constitutiva del modelo viscoelástico genérico (2.27) es una relación lineal, por tanto, no debe sorprender el hecho de que (2.32) y (2.33) también lo sean; lo que permite escribir:

$$\epsilon_o = G(w)\sigma_o \tag{2.37}$$

Pero al afirmar que ϵ_o es una cantidad compleja se acepta que:

$$\epsilon_o = \epsilon_1 + i\epsilon_2 \tag{2.38}$$

Al introducir (2.38) en (2.32) se llega a:

$$\sigma_o = (\epsilon_1 + i\epsilon_2)\,\frac{Q(iw)}{P(iw)}$$

ó bien,

$$(\epsilon_1 + i\epsilon_2) = \sigma_o\,\frac{P(iw)}{Q(iw)}$$

De (2.37) se tiene que:

$$G(w) = \frac{P(iw)}{Q(iw)} \qquad (2.39)$$

Por tanto, G(w) debe tener una parte real y una parte imaginaria, es decir, que podrá expresarse como:

$$G(w) = G_1(w) + iG_2(w) \qquad (2.40)$$

a este factor se le conoce como *deformabilidad compleja*, y depende de la frecuencia, w, pero resulta ser independiente de la amplitud de los esfuerzos, de las deformaciones y del tiempo. Este hecho, conduce a aceptar que el término G(w) es propio para cada material y puede representarse como una función de la frecuencia.

Al expresar la ecuación (2.37) en los términos reales e imaginarios de cada uno de sus miembros se halla lo siguiente:

$$(\epsilon_1 + i\epsilon_2) = (G_1 + iG_2)\,(\sigma_1 + i\sigma_2)$$

De realizar el producto se obtiene:

$$\epsilon_1 + i\epsilon_2 = G_1\sigma_1 + iG_1\sigma_2 + iG_2\sigma_1 - G_2\sigma_2$$

Al agrupar términos resulta:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= G_1\sigma_1 - G_2\sigma_2 \\ \epsilon_2 &= G_1\sigma_2 + G_2\sigma_1 \end{aligned} \qquad (2.41)$$

La solución de (2.41) para σ_1 y σ_2 es:

$$\begin{aligned} (G_1^2 + G_2^2)\sigma_1 &= G_1\epsilon_1 + G_2\epsilon_2 \\ (G_1^2 + G_2^2)\sigma_2 &= G_1\epsilon_2 - G_2\epsilon_1 \end{aligned} \qquad (2.42)$$

Los pares de ecuaciones (2.41) y (2.42), muestran las relaciones entre esfuerzos y deformaciones.

Supóngase ahora, que el material se somete a un esfuerzo real $\sigma_o = \sigma_1$ unitario, es decir, $\sigma_1 = 1$ y $\sigma_2 = 0$. De la ecuación (2.41) se obtiene que $\epsilon_1 = G_1$ y $\epsilon_2 = G_2$. De las partes reales de (2.30) y (2.31) se observa que una unidad de esfuerzo oscilatorio $\sigma = \cos wt$, produce una deformación igual a:

$$\epsilon = G_1(w)\cos wt - G_2(w)\text{sen } wt \qquad (2.43)$$

que son la deformacion y el esfuerzo reales, defasados.

Si ahora el material se somete a un esfuerzo cuya parte real sea nula y la parte imaginaria $\sigma_2 = -1$, de (2.41) se llega a que $\epsilon_1 = G_2$ y $\epsilon_2 = -G_1$. De las partes imaginarias de (2.30) y (2.31) se observa que una unidad imaginaria de esfuerzo periódico $\sigma = \text{sen } wt$, produce una deformación igual a:

$$\epsilon = G_2(w) \cos wt + G_1(w) \text{ sen } wt \qquad (2.44)$$

CAPÍTULO III

DISIPACIÓN DE ENERGÍA Y AMORTIGUAMIENTO

3.1 Introducción

El fenomeno central de la teoria de vibraciones es la oscilación ciclica. El hecho mas importante de las oscilaciones dinamicas es la transformacion de la energia potencial en energia cinetica y viceversa , y se ha intentado reproducirlo con modelos que involucran elementos elasticos e inerciales. Por ejemplo; las frecuencias y los modos naturales de vibracion de sistemas vibratorios, asi como grupos y fases de las velocidades en sistemas de propagacion de ondas han sido obtenidos mediante algunos modelos.

Algunos aspectos secundarios de la oscilacion dinámica pueden ser explicados mediante mecanismos de medición del amortiguamiento. Por ejemplo; un mecanismo capaz de remover energia de un sistema oscilatorio. El amortiguamiento es el responsable del decaimiento eventual de las vibraciones libres, y explica el hecho de que la respuesta de un sistema oscilatorio excitado en condiciones de resonancia no crezca indefinidamente.

3.2 Naturaleza del Amortiguamiento

El amortiguamiento, basicamente se define, como la disipación de energia de un sistema vibratorio, (Ref.6). La energia perdida se transmite desde el sistema, por mecanismos de radiacion ó se disipa en el mismo. La mayoria de las mediciones de amortiguamiento se realizan bajo condiciones de oscilacion ciclica. Comunmente se observa un decaimiento de la vibración libre o se mide en condiciones de vibracion forzada en la vecindad de la resonancia. En ambos casos, el total de la energia, W, disipada en un ciclo puede ser inferida, pero raramente las mediciones llegan a ser precisas, como para obtener la velocidad de disipacion de energia por ciclo. Si la oscilación de un sistema ,en un modo singular bien definido,tiene una amplitud (a) y una frecuencia (w), la energia perdida por ciclo, generalmente varia con (a) y (w), es decir,

$$W = W(a,w)$$

Una medida conveniente del amortiguamiento se obtiene al comparar la energia perdida por ciclo, con el valor maximo de energia potencial almacenada en el sistema durante el ciclo,V. El factor de perdida viene dado por:

$$\eta = \frac{W}{2\pi V} \qquad (3.1)$$

Si la energía pudiera ser disipada a una velocidad uniforme durante un ciclo de movimiento armonico simple, entonces, $W/(2\pi)$ podria ser interpretado como la energia perdida por radián y η deberia ser, simplemente, la energia perdida por radián entre la energia potencial disponible.

En la mayoria de los sistemas dinámicos de interés, desde el punto de vista de vibraciones, el amortiguamiento resulta ser pequeño. Los valores de factor de pérdida que se encuentran en los intervalos comunes, van desde η = 1E-06 hasta η = 2E-01, sin embargo, se encuentran valores grandes de η en mecanismos de instrumentos, transductores y suspensiones de vehiculos. En general, el factor de pérdida, η ,depende de la amplitud y de la frecuencia de la oscilacion. No obstante, si el sistema es completamente lineal, entonces W y V seran proporcionales a (α^2) y el factor de pérdida , η, sera independiente de la amplitud. Para mecanismos de amortiguamiento lineal, el factor de pérdida, generalmente, es significativamente dependiente de la frecuencia, (Ref. 6). Estas ideas pueden ser ilustradas al tomar una barra de aluminio, suspendida por cuerdas, como se muestra en la Fig. 3.1.

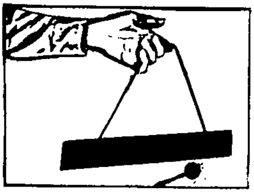


Fig. 3.1 Barra de aluminio sometida a vibración

Una vez que la barra es golpeada, ésta genera un sonido, con una frecuencia natural de vibracion de 130 hz. , el cual permanece perceptible durante varios segundos. A esa frecuencia se encuentra un coeficiente de perdida η = 1.5E-03.

Hay varios mecanismos que contribuyen al total de energia perdida por ciclo. El hecho de que exista sonido, pone en evidencia la radiacion de energia a partir de la barra. Habra ademas, radiacion de energia de las cuerdas que soportan la barra en los puntos nodales, y existira disipacion de energia del aluminio. Así, puede verse, que en un sistema simple como éste resulta dificil cuantificar el amortiguamiento.

Se pueden hacer estimaciones toscas acerca de las cantidades de amortiguamiento producidas por la disipación interna de energia y por radiacion acústica. Una gran cantidad de mecanismos, lineales y no-lineales, de amortiguamiento interno en metales ya ha sido definida, (Refs. 7 , 8) . Para el aluminio a flexión, a temperatura constante de laboratorio, la mayor contribución la realiza el flujo transversal de calor, que se desprende las fibras a compresión hacia las fibras a menor temperatura que se encuentran a tensión. Este es un mecanismo lineal de relajación que depende de la temperatura, T, el coeficiente de expansión térmica,α, la conductividad,K y el calor específico, Cv, de la viga, así como de su espesor, h, su módulo, E y la frecuencia ,f, de oscilación. Conocida la frecuencia de relajación, f_o, el factor de pérdida para la vibración , en el modo fundamental, puede ser calculado, como lo muestra la Fig. 3.2.

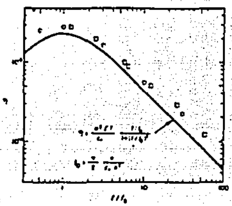


Fig. 3.2 Factor de pérdida en función de la frecuencia. (Ref. 6).

Un gran número de investigadores han medido el amortiguamiento debido a la acción del aire en vigas en cantiliver. Para grandes amplitudes de flexión, el amortiguamiento debido al aire no es lineal, el factor de pérdida se incrementa toscamente en proporción a la amplitud. Para pequeñas amplitudes, el factor de pérdida debido al amortiguamiento por la acción del aire , parece aproximarse al límite en el cual se hace independiente de la amplitud, como se muestra la Fig. 3.3.

La viga de la Fig. 3.1 puede utilizarse para ilustrar ésta afirmación. El amortiguamiento por radiación puede ser sustancialmente incrementado si las cuerdas que sujetan a la viga fueran fijadas a una mesa. La energía de vibración, la cual al principio se localiza en el elemento, es transmitida rápidamente a todas las partes de conjunto. Esta energía es tranferida en el sistema viga-mesa y contabilizada como perdida de energía de la viga, considerada como elemento aislado. El amortiguamiento interno de la viga, puede ser incrementado por un cambio en el material que la forma. Por ejemplo; si en lugar del aluminio se colocara acero, o para aumentar el amortiguamiento se utilizara un material viscoelastico como disipador de energía del sistema.

Por ejemplo; el amortiguamiento por radiación y por disipación interna puede esperarse que sean dependientes de la frecuencia. Si la radiación es lineal con respecto al sistema externo, el factor de pérdida será afectado por la frecuencia de la respuesta del sistema externo. Si la disipacion interna se debe a un mecanismo de relajacion lineal, habrá un pronunciado incremento en el factor de perdida, cuando la frecuencia de oscilacion se aproxime a la frecuencia de relajacion.

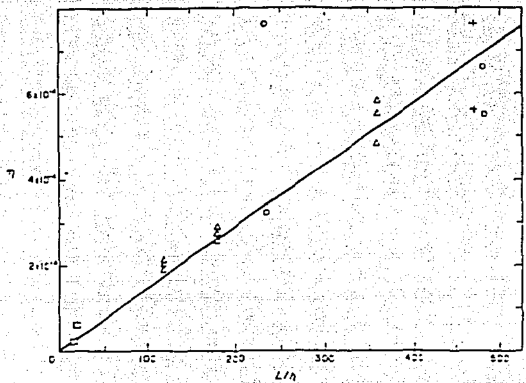


Fig. 3.3 Factor de pérdida para amortiguamiento por aire a baja amplitud, para un modo fundamental de vibración de una viga en cantiliver.(Ref. 6).

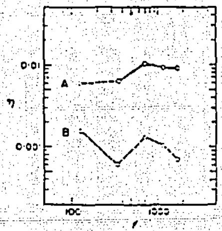


Fig. 3.4 Factor de pérdida para los primeros cinco modos de vibración libre de la viga. A) sin amortiguador. B)Con disipador viscoelástico.(Ref. 6).

3.3 Modelos Matemáticos de Amortiguamiento

El prototipo para vibraciones no-amortiguadas de una sistema masa-resorte, se muestra en la Fig. 3.5a. La vibración libre de este oscilador es un movimiento armónico simple , con una frecuencia:

$$w_n = (K/m)^{(1/2)}$$

Cuando la fuerza excitadora se establece como una fuerza senoidal, de frecuencia .w, hay una solución para el movimiento, el cual tiene la misma frecuencia .w, y una amplitud finita siempre que $w \neq w_n$.

(a) No amortiguado (b) Modelo con amortiguador viscoso ideal

Fig. 3.5 Modelos ideales de osciladores simples en vibración libre

La constante C es llamada *parametro del amotiguador*. La vibración libre proporciona una oscilación amortiguada y existe una respuesta de amplitud finita establecida para una excitación senoidal dada.

Al examinar más detalladamente un amortiguador lineal ideal, supóngase que se establece un movimiento armónico simple $X = \alpha \cos wt$, como muestra la Fig. 3.5b. La energia , W, disipada en un ciclo es:

$$W = \int_0^{(2\pi/w)} (c \frac{dx}{dt}) \frac{dx}{dt} dt = \pi c \alpha |w| \qquad (3.2)$$

mientras que la energia potencial maxima acumulada en el resorte durante el ciclo es:

$$V = 1/2 \, K \alpha^2 \qquad (3.3)$$

El factor de perdida para el amortiguador ideal del sistema de la Fig. 3.5b resulta ser:

$$\eta = [c |w|]/K \qquad (3.4)$$

Se puede notar que el valor absoluto de w, en (3.2) y (3.4) se utiliza para que X(t) asi como la energia perdida por ciclo, no se vean afectadas por los cambios de signo de w. De esta manera, se consideran a W y η como funciones de w, siempre reales y positivas.

En muchos casos en los cuales el amortiguamiento es pequeño, éste solo se aprecia durante la resonancia ó cerca de ésta. Esos efectos pueden ser descritos en términos del factor de pérdida, en la resonancia, como:

$$\eta_n = \frac{c w_n}{K} = \frac{c}{(Km)^{(1/2)}} \qquad (3.5)$$

De esta manera, la vibración libre del sistema de la Fig. 3.5b, tiene la forma:

$$X(t) = a_o\, e^{(-1/2\ \eta_n\ w_n t)} \cos(w_d\, t + \phi_o) \qquad (3.6)$$

donde:

$w_d^2 = w_n^2(1 - \eta_n^2/4)$, y a_o y la fase ϕ_o, dependen de las condiciones iniciales del problema.

Nótese que la velocidad de decaimiento del amortiguamiento depende de η_n. El *decremento logarítmico* viene dado por:

$$\delta = \mathrm{Log}\, \frac{X(t)}{X(t + 2\pi/w_d)} = \pi \eta_n \frac{w_n}{w_d} = \frac{\pi\ \eta_n}{(1 - \eta_n^2/4)^{(1/2)}} \qquad (3.7)$$

Cuando la fuerza excitadora del modelo de la Fig. 3.5b se estabiliza como una fuerza senoidal de la forma $f = F_o$ sen wt, la respuesta esperada será : $X = X_o$ sen $(wt + \psi)$, donde la amplitud de la respuesta , X_o, depende de la frecuencia ,w, y del factor de pérdida durante la resonancia, η_n, como lo indica la Fig. 3.6.

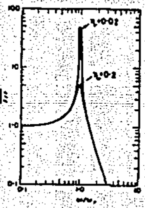


Fig. 3.6 Frecuencia de respuesta establecida para un oscilador simple, de un grado de libertad con un amortiguador ideal lineal.(Ref. 6)

Nótese que para amortiguamientos pequeños, la amplitud de la respuesta es sustancialmente independiente del amortiguamiento, excepto en la vecindad de $w = w_n$, donde ésta, depende de manera crítica de η_n. Se puede entonces inferir de la Fig. 3.6, que la densidad espectral de la respuesta, bajo la acción de una fuerza excitadora aleatoria estacionaria, depende de manera importante del factor de pérdida de resonancia, η_n.

En la sección 3.2 se sugirió que la mayoría de los mecanismos de amortiguamiento lineal presentan dependencia con la frecuencia. En muchos casos, sin embargo, la dependencia de los factores reales de pérdida con ésta, guardan poca relación con la ecuación (3.4), para un amortiguador ideal.

No obstante, para muchos propósitos, el amortiguamiento real puede ser modelado satisfactoriamente mediante un amortiguador equivalente. Esto se indica en la Fig. 3.7, donde la dependencia con la frecuencia del factor de pérdida real, en un oscilador simple de un grado de libertad, es comparado con un amortiguador ideal.

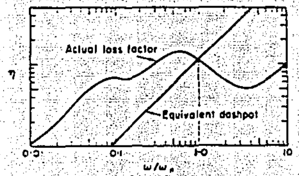


Fig. 3.7 Dependencia del factor de pérdida de un oscilador real y de un amortiguador ideal con la frecuencia, (Ref. 6).

Si el amortiguador se selecciona de tal manera que su factor de pérdida coincida con el real en la frecuencia natural del oscilador, el comportamiento del modelo estará suficientemente apegado al del sistema real, para la mayoría de los propósitos prácticos. Para la mayor parte de las frecuencias, el modelo tendrá un error en el valor del amortiguamiento, pero el efecto sobre la respuesta dinámica no tendrá mayor importancia si el amortiguamiento es pequeño.

La velocidad de decaimiento de la vibración libre y las curvas de frecuencia de respuesta (Fig. 3.6) para el amortiguamiento real se podrán estimar satisfactoriamente, mediante el amortiguador equivalente, si el factor de pérdida para la frecuencia de resonancia es el mismo.

Se ha aceptado que este procedimiento puede ser extendido al modelo de amortiguamiento de sistemas de varios grados de libertad. Se asigna un amortiguador equivalente a cada modo natural de vibración de manera que cuando el sistema real vibre en esos modos, los factores de pérdida reales coincidan con los de los modelos.

De esta forma, el procedimiento desprecia un posible acoplamiento de modos debido al amortiguamiento.

Varios estudios analíticos sobre el acoplamiento del amortiguamiento han sido realizados por: K. A. Foss (1958), S. H. Crandall y R. B. McCalley (1961) y T. K. Caughey y M. E. J. O'Kelly (1961) . Estos estudios han mostrado que existen aplicaciones prácticas en las cuales el acoplamiento del amortiguamiento juega un papel muy importante en el establecimiento de un entorno de estabilidad ó influencia en la repartición de energía durante una vibración aleatoria. Para propósitos de predicción de los niveles de respuesta estacionaria, de manera aleatoria ó determinista, sin embargo, no ha sido evidente que haya una razón urgente, desde el punto de vista práctico, para incluir las complicaciones adicionales que acarrea el acoplamiento del amortiguamiento a los modelos matemáticos,(Refs. 14,15 y 16).

Cuando el mecanismo de amortiguamiento resulta ser no-lineal, se presentan diferencias mas serias entre el modelo y el fenómeno modelado. Existen tratamientos analíticos para el amortiguamiento no-lineal (T. K. Caughey,1960, S. H. Crandall, G. R. Khabbaz y J. E. Manning, 1964 y M. R. Torres y C. D. Mote , 1969) pero son aplicables a casos muy particulares. En la práctica es común medir ó estimar los factores de pérdida para las amplitudes de respuesta, lo cual resulta ser representativo para las aplicaciones más comunes, a través del uso de un modelo con amortiguador lineal equivalente, que posea el mismo factor de pérdida, (Refs. 17, 18 y 19).

3.4 Amortiguador dependiente de la frecuencia

Cuando se conocen las frecuencias para las cuales el amortiguamiento de un sistema se hace significativo, resulta adecuado modelar los amortiguamientos pequeños, con amortiguadores lineales equivalentes, como se sugirió en la sección anterior. Pero, para los casos en los que se desconoce la frecuencia para la cual ocurre el amortiguamiento crítico, resulta necesario utilizar ese modelo. Esto ocurre en el análisis de estabilidad, donde la frecuencia crítica es, por sí misma, función del amortiguamiento.

A fin de describir un modelo adecuado para un mecanismo real de amortiguamiento, como el mostrado en la Fig. 3.7, se recurre a la integral de Fourier, para transformar el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

La transformada de Fourier , X(w), de una historia de tiempo, X(t), está definida por:

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{-ivt}\, dt \qquad (3.9)$$

mientras que la historia en función del tiempo, X(t), podrá ser recuperada mediante la aplicación del Teorema de Wiener - Kchinchine:

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w)\, e^{ivt}\, dw \qquad (3.10)$$

La expresión que relaciona la respuesta del amortiguador ideal con el dominio del tiempo es:

$$f_d(t) = C\,\frac{dx}{dt} \qquad (3.11)$$

y puede ser transformada al dominio de la frecuencia, al multiplicar ambos lados de (3.11) por e^{-ivt} e integrar:

$$F_d(w) = iwC\, X(w) \qquad (3.12)$$

donde $F_d(w)$ representa la transformada de Fourier de la fuerza del amortiguador , f_d.

La ecuación (3.12) se puede interpretar como la relación entre las amplitudes complejas de la fuerza y el desplazamiento, durante un ciclo de oscilación a la frecuencia w.

Para un amortiguador ideal, el parámetro C es constante y su factor de pérdida vendrá dado por la ecuación (3.4). Para un mecanismo de amortiguamiento, dependiente de la frecuencia, se podrá usar (3.4) para conseguir el parámetro C en función de la frecuencia.

$$C(w) = \frac{K\eta(w)}{|w|} \qquad (3.13)$$

Así, los factores de pérdida de los mecanismos reales de amortiguamiento serán medidos , siempre, bajo el efecto de las oscilaciones cíclicas, para poder usar de una manera general la ecuación (3.12). Al introducir (5.13) en (3.12) resulta:

$$F_d(w) = iwC(w)X(w) = \frac{iwK}{|w|}\,\eta(w)X(w) = iK\eta(w)\ \mathrm{sgn}\ wX(w) \qquad (3.14)$$

donde el signo (sgn w) toma el valor (+1) para w(+) y (-1) para

$w = 0$. La ecuación (3.14) define el comportamiento de un modelo ampliamente utilizado; el amortiguador dependiente de la frecuencia. Nótese que la definición viene dada en el dominio de la frecuencia. La ecuación correspondiente en el dominio del tiempo se obtiene al multiplicar (3.14) por $(e^{i\nu t})/2\pi$ e integrar:

$$X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\nu t}}{iwC(w)}\,dw\int_{-\infty}^{+\infty} fd(\tau)\, e^{i\nu\tau}d\tau \qquad (3.15)$$

Desafortunadamente, la integral (3.15) no conduce a una solución simple, excepto para algunos casos especiales de $C(w)$. Si $C(w)$ es una fracción racional de polinomios en w^2, entonces, la relación entre $fd(t)$ y $X(t)$ se podrá escribir en términos de una ecuación diferencial de orden superior a 1, en lugar de una expresión simple como (3.11), que fué utilizada para un amortiguador lineal ideal; se tiene así, una relación complicada entre $fd(t)$ y $X(t)$ para un amortiguador dependiente de la frecuencia.

Cuando un amortiguador ideal se coloca en un oscilador como el de la Fig. 3.5b, la relación entre la fuerza excitadora, $f(t)$, y el desplazamiento, $X(t)$, en el dominio del tiempo, viene dada por la expresión:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + KX = f \qquad (3.16)$$

La ecuación equivalente a (3.16) en el dominio de la frecuencia resulta ser:

$$(-mw^2+iwC + K)\, X(w) = F(w) \qquad (3.17)$$

Si ahora se reemplaza en el oscilador ese amortiguador ideal por otro que sea dependiente de la frecuencia, es decir, con un parámetro $C(w)$ dado por (3.13), la relación anterior en el dominio de la frecuencia será:

$$(-mw^2+ iwC(w) + K)\, X(w) = F(w) \qquad (3.18)$$

ó bien;

$$(-mw^2 + K(1 + i\eta(w)\, \mathrm{sgn}\, w))\, X(w) = F(w) \qquad (3.19)$$

Esas relaciones son utilizadas para obtener respuestas establecidas por excitación senoidal y espectros de respuestas estacionarias aleatorias. Estas, también pueden ser empleadas para obtener más información general de la respuesta en el dominio del tiempo:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + C(w) \frac{dx}{dt} + KX = f \qquad (3.20)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + KX\ (1 + i\eta(w)\ \mathrm{sgn}\ w) = f \qquad (3.21)$$

Existen algunas limitaciones en los modelos de amortiguadores dependientes de la frecuencia, cuando se intenta representar con ellos a mecanismos físicamente ideales.

Como se ha podido notar, para un amortiguador ideal el factor de pérdida ,$\eta(w)$, debe ser real, positivo y siempre función de w, para que éste represente un mecanismo de pérdida de energía. El parámetro C(w) de éstos amortiguadores debe ser igualmente , una cantidad real y positiva. Entonces, C(w) debe ser una función tal de w, que la relación correspondiente con el tiempo, representada por (3.15) sea causal, en el sentido de que la respuesta, X(t), en un instante t, dependa de la historia previa de excitación , $f_d(\tau)$ para $\tau < t$, pero debería ser independiente del comportamiento futuro, $\tau > t$.

En relación con este aspecto, se han enunciado varios teoremas generales (Ref. 9). No es siempre fácil decidir cuando una función C(w) dada, es causal ó no. En muchos casos , es posible demostrar la no-causalidad a través de la observación de pares (excitación - respuesta) teóricos que satisfacen la ecuación (3.15) y por tanto, la respuesta se anticipa a la excitación.

De hecho, esta es la razón por la cual se utiliza el modelo de amortiguamiento histerético lineal, en el cual se asume que el factor de pérdida, $\eta(w)$, tiene un valor constante, η_o, independiente de la frecuencia. Bajo esta hipótesis:

$$C(w) = \frac{K\eta_o}{|w|} = \frac{K\eta_o}{w}\ \mathrm{sgn}\ w \qquad (3.22)$$

y la ecuación (3.16) queda reducida a:

$$X(t) = \frac{1}{2\pi K\eta_o} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ivt}}{i\,\mathrm{sgn}\ w}\, dw \int_{-\infty}^{+\infty} f_d(\tau)\ e^{-ivt} d\tau \qquad (3.23)$$

Si se toma $f_d(t)$ como una unidad de pulso $\delta(t)$ y se designa la respuesta correspondiente como X(t) y la función de respuesta del pulso h(t), al aplicar límites generalizados se encuentra que:

$$h(t) = \frac{1}{\pi K \eta_o} \frac{1}{t} \quad ; \quad -\infty < t < +\infty \qquad (3.24)$$

Este par (excitación - respuesta) viola claramente el principio de causalidad, como lo muestra la Fig. 3.8.

La naturaleza no-causal de la suposición de un factor de pérdida independiente de la frecuencia fué notado independientemente por Fraeijis de Veubeke (1960), Caughey (1962) y Crandall (1963). Éste último, muestra como para pequeños pulsos aplicados sobre un oscilador de un grado de libertad puede ser válido un pequeño factor de pérdida independiente de la frecuencia, como un caso muy especial.(Refs. 20, 21 y 22)

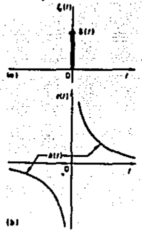


Fig. 3.8 Ejemplo de comportamiento no-causal
a) Fuerza excitadora
b) Respuesta, (Ref. 6)

La respuesta post-impulso se acercó a cero para t = -∞, es decir, que teóricamente se alcanzó un máximo negativo, muy rápidamente, después de la aplicación del pulso, por lo que fué posible eliminar la parte de la respuesta que corresponde, en teoría, a tiempos negativos.

De todo lo anterior se llegó a la conclusión de que no hay un mecanismo de amortiguamiento lineal cuyo factor de pérdida sea independiente de la frecuencia, sin embargo, existen varios mecanismos cuyos factores de pérdida permanecen sensiblemente constantes para algunos intervalos de frecuencia.

3.5 Tipos de amortiguamiento del material

Cuando los materiales reales son sometidos a bajos niveles de esfuerzos, su comportamiento nunca resulta ser perfectamente elástico. Esta respuesta inelástica se identifica en las curvas esfuerzo-deformación , las cuales se presentan como lazos de histéresis, (Fig. 3.9).

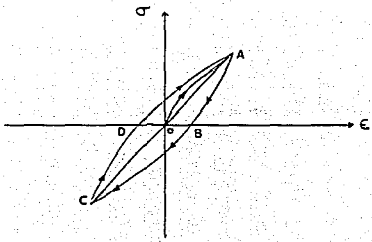


Fig. 3.9 Lazo de histéresis

Se pueden distinguir dos tipos de amortiguamiento histerético: el estático y el dinámico. (Ref.10)

En materiales en los que predomina la histéresis estática, el amortiguamiento se dice que es independiente del tiempo, de la velocidad de deformación, de la velocidad de aplicación de esfuerzos y de la frecuencia. Sin embargo, la histéresis dinámica se ve afectada por los factores mencionados y los materiales que la presentan, no necesariamente deben presentar histéresis dinámica.

Con base en estas características del material, asociadas con el tipo de histéresis que presente, se clasifican como; materiales que presentan histéresis viscoelástica, a aquellos que presentan histéresis dinámica y materiales con histéresis plástica, a los que presentan histéresis estática.

Otras formas de amortiguamiento, que incluyen la histéresis dinámica asociada con la inelasticidad a bajos niveles de esfuerzos, en ocasiones llamada *fricción interna*, así como la histéresis estática causada por efectos magnetoelásticos, han sido desarrollados por Lazan, (Ref.8).

Para efectos de este trabajo, con base en el desarrollo de las secciones anteriores, en los cuales se hace evidente la dependencia del amortiguamiento con el tiempo, se estudiará el amortiguamiento debido a la disipación de energía interna del material en modelos viscoelásticos.

3.6 Disipación de energía en materiales viscoelásticos bajo esfuerzo axial estático constante.

Considérese el elemento de la Fig. 3.10b , tomado de una barra de sección transversal A (Fig. 3.10a) , de longitud dx. En

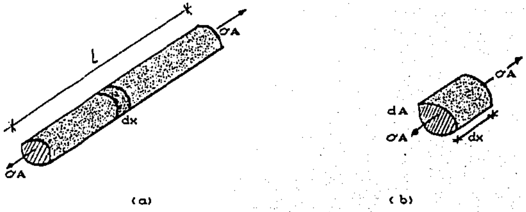


Fig. 3.10 Elemento de una barra a tensión

sus extremos actúan las Fuerzas σA, que producen un incremento $\epsilon\, dt$ en la deformación axial de la barra en un instante dt. Estas fuerzas , producen un trabajo:

$$\sigma A\, dx\, \epsilon\, dt = dW\, A\, dx \qquad (3.25)$$

donde dW es el trabajo realizado por las fuerzas sobre una unidad de volumen del material.

Si la deformación continúa durante un lapso finito de tiempo, el trabajo realizado por unidad de volumen puede ser escrito como:

$$W = \int dW = \int \sigma \epsilon\, dt \qquad (3.26)$$

que es una expresión más general de la ecuación (3.2). Este trabajo es producido por las fuerzas externas que actúan sobre el elemento, puede decirse, que es producido por una fuente externa de energía que penetra en la barra.

En materiales elásticos ideales, se crea un potencial de energía; conocido en la Teoría de Elasticidad como *energía de deformación*, la cual puede recobrarse a través de la descarga del elemento. En un material viscoelástico, parte de esa energía ó la totalidad de la misma debe perderse, como se vió en las secciones anteriores; ésta se transforma en radiación de calor ó sonido y en parte se disipa por el material. Esta energía no es recuperable y se conoce con el nombre de *energía disipada*.

3.7 Disipación de energía en materiales viscoelásticos bajo esfuerzo periódico.

Para aplicar la ecuación (3.26) a un material sometido a un esfuerzo oscilatorio, σ, no se podrán introducir las expresiones

(2.30) y (2.31), directamente, es decir, no se podrá usar la notación compleja, pues, ésta última representa el manejo simultáneo de dos oscilaciones con una diferencia de fase de 90°. Al separar esas oscilaciones y multiplicar cada una de ellas por un factor ''ι'', la integral de trabajo contendrá a un producto de esfuerzos y deformaciones, y en dicho producto el esfuerzo imaginario , que trabaja sobre una deformación imaginaria, será una cantidad de trabajo negativa, pero real , esto facilita el cálculo , ya que la parte real del trabajo resulta ser una cantidad difícilmente identificable y la parte imaginaria del trabajo carece de significado físico.

Si se acepta entonces, que los esfuerzos y las deformaciones pueden escribirse como cantidades reales de la forma:

$$\sigma = \sigma_o \cos wt \qquad (3.27)$$

$$\epsilon = \sigma_o \,(G_1(w) \cos wt - G_2(w) \,\mathrm{sen}\, wt) \qquad (3.28)$$

Al sustituir (3.27) y (3.28) en la ecuación (3.26) se obtiene:

$$W = -\sigma_o\, w \int \cos(wt)(G_1 \,\mathrm{sen}\, wt + G_2 \cos wt)\, dt \qquad (3.29)$$

Ahora, es necesario escoger los límites de integración, para ello existen dos alternativas interesantes; se puede integrar sobre un período $T = 2\pi/w$, ó bien, sobre una unidad de tiempo.

Al integrar sobre un período $T = 2\pi/w$, la expresión (3.29) se puede escribir como:

$$W = -\sigma_o^2 \, w\, G_1 \int_0^T \cos(wt)\,\mathrm{sen}(wt) - \sigma_o^2 \, w\, G_2 \int_0^T \cos^2(wt)\, dt \qquad (3.30)$$

Después de sustituir $T = 2\pi/w$ en las integrales, se observa que la primera de éstas se anula. Ésto representa el trabajo realizado por el esfuerzo, σ , sobre una deformación que está en fase con él. Esta es la forma típica en la que se halla el trabajo en los materiales idealmente elásticos, es decir, hasta la mitad del período , la energía es almacenada dentro del material (fase de carga). En la segunda mitad del período (fase de descarga) la energía es recuperada, por tanto, las deformaciones no son permanentes .

En un material viscoelástico, la deformación elástica viene acompañada de otra componente, la cual está defasada 90° con respecto al esfuerzo y proporciona una deformación permanente. Esta componente será expresada como:

$$W = -\sigma_o^2 w\, G_2 \,\frac{\pi}{w} = -\pi\, \sigma_o^2 G_2(w) \qquad (3.31)$$

La ecuación anterior representa el trabajo realizado por el esfuerzo durante todo el período y muestra una cantidad de energía disipada.

Según la segunda Ley de la Termodinámica; es necesario que la energía disipada siempre sea una cantidad positiva, por tanto:

$$G_2(w) \leq 0 \qquad (3.32)$$

La condición (3.32) resulta ser tal, que la igualdad es aplicable en casos muy limitados.

Cuando los límites de integración corresponden a una unidad de tiempo, el trabajo queda expresado como:

$$D = W = -1/2\ \sigma_o^2 w\ G_2(w) \qquad (3.33)$$

Este valor resulta ser de gran importancia en casos de aplicación y se le conoce con el nombre de *disipación D*, ésta se consigue de manera sencilla al dividir la ecuación (3.31) entre el período $T = 2\pi/w$.

Al tratar de verificar la expresión (3.33) a partir de (3.30) se encuentra que ésta solo es exacta para un número entero de períodos por unidad de tiempo.

Si esto último no ocurre, existirá una pequeña diferencia, positiva ó negativa, la cual depende de la forma en que la unidad de tiempo divide a la onda que describe la oscilación. Esto indica , que D es una cantidad promedio, y que carecerá de sentido, cuando el intervalo donde interesa conocer el cambio de energía, es respectivamente pequeño en relación al período. El valor de D, será comparado con otros valores de energía disipada por ciclo de carga en capítulos posteriores.

CAPÍTULO IV

DEFORMABILIDAD COMPLEJA Y PROCESOS DE DISIPACIÓN EN MODELOS VISCOELÁSTICOS

El siguiente capítulo, tiene como propósito aplicar los aspectos teóricos discutidos en los capítulos anteriores, a los modelos viscoelásticos más comunes.

La deformabilidad compleja y la disipación de energía son conceptos que permiten describir el comportamiento de un material específico sometido a carga de naturaleza periódica.

4.1 Aplicación al modelo de Hooke.

Este modelo es un caso muy particular de modelo viscoelástico, que se comporta como un cuerpo elástico ideal. La representación estándar de este material está dado en la Fig. 4.1

Fig. 4.1 Cuerpo de Hooke

La ecuación que caracteriza a este modelo es:

$$\sigma = q_0 \, \epsilon \qquad (4.1)$$

Al sustituir las expresiones (2.23) y (2.29) en (4.1) se obtiene:

$$\sigma_0 e^{iwt} = q_0 \epsilon_0 e^{iwt} \qquad (4.2)$$

ó bien

$$\sigma_0 = q_0 \epsilon_0 \qquad ; \qquad \epsilon_0 = \sigma_0 / q_0$$

De (2.37) y (2.40), la ecuación anterior podrá ser escrita como:

$$\epsilon_0 = [G_1(w) + iG_2(w)]$$

de donde:

$$G_1(w) = 1/q_0 \qquad y \qquad G_2(w) = 0 \qquad (4.3)$$

De las expresiones (4.3) resulta que el modelo en cuestión, no tiene componente imaginaria en la deformación, la cual es linealmente proporcional al esfuerzo aplicado, es decir, se trata de una cuerpo elástico lineal.

Cálculo de la disipación:

Al aplicar (3.33), en la cual el trabajo realizado por el esfuerzo en una unidad de tiempo viene dado por:

$$D = 1/2\ \sigma_o^2 w\ G_2(w)$$

resulta que en este modelo D = 0, y ésto es exactamente lo que se espera de un material elástico lineal. En este material no ocurre perdida de energía, toda se recupera en la fase de descarga del mismo , y es, por esta razón que no existe componente permanente en la deformación.

4.2 Aplicación al modelo de Maxwell

Este modelo, representado esquemáticamente por la Fig. 4.2, queda definido mediante la ecuación:

$$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_1\dot{\epsilon} \qquad (4.4)$$

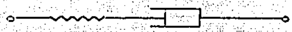


Fig. 4.2 Modelo de Maxwell

Al sustituir (2.23) y (2.29) en la ecuación (4.4) se obtiene:

$$\sigma_o e^{iwt} + p_1\sigma_o(iw)e^{iwt} = q_1\epsilon_o(iw)e^{iwt} \qquad (4.5)$$

De realizar algunas cancelaciones y factorizar σ_o y ϵ_o resulta:

$$\sigma_o\ (1 + iw\ p_1) = \epsilon_o\ (iw\ q_1) \qquad (4.6)$$

ó bien;

$$\epsilon_o = \sigma_o\ \frac{(1 + iw\ p_1)}{(iw\ q_1)} \qquad (4.7)$$

Pero ϵ_o fué definida anteriormente como:

$$\epsilon_o = \sigma_o \,[G_1(w) + iG_2(w)]$$

es decir;

$$G(w) = \frac{1 + iw\,p_1}{(iw\,q_1)} \qquad (4.8)$$

Al separar la expresion (4.8) en sus componentes real e imaginaria, resulta:

$$G_1(w) = \frac{1 + iw\,p_1}{iw\,q_1} \times \frac{-iw\,q_1}{-iw\,q_1} = \frac{w^2 q_1 p_1 - iw\,q_1}{w^2 q_1^2}$$

Por tanto,

$$G_1(w) = p_1/q_1 \qquad (4.9)$$

$$G_2(w) = -1/(q_1\,w) \qquad (4.10)$$

entonces, la deformación unitaria , ϵ , podrá expresarse como:

$$\epsilon = (p_1/q_1)\cos wt + (1/(q_1\,w))\,\text{sen}\,wt \qquad (4.11)$$

Al analizar la expresión (4.11) se observa que cuando $w \longrightarrow 0$ la parte real de la deformación tiende a desaparecer.

$$\epsilon = -1/(q_1\,w) \qquad (4.12)$$

El comportamiento del modelo, en estas condiciones, tiende a ser el de un fluido viscoso de Newton.

Cuando la frecuencia se hace muy grande, $w \longrightarrow \infty$, la componente imaginaria de la deformación se anula, por tanto;

$$\epsilon = p_1/q_1 \qquad (4.13)$$

Para altas frecuencias, el modelo de Maxwell se deforma independientemente de la frecuencia y su comportamiento se aproxima al de un material elastico lineal.

Al aplicar la definición (3.33), se obtiene que para este modelo la disipación resulta ser independiente de la frecuencia, como lo indica la expresión (2.24).

$$D = 1/2\ \sigma_o^2 (1/q_1) \tag{4.14}$$

4.3 Aplicación al modelo de Kelvin-Voigt

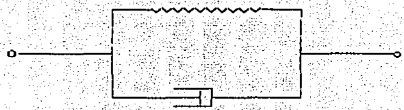


Fig. 4.3 Modelo de Kelvin-Voigt

La ecuación que caracteriza a este material es:

$$\sigma = q_o \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} \tag{4.15}$$

De sustituir (2.23) y (2.29) en la ecuación (4.15), se obtiene:

$$\sigma_o e^{iwt} = q_o \epsilon_o e^{iwt} + q_1 \epsilon_o (iw) e^{iwt} \tag{4.16}$$

Al realizar cancelaciones y sacar factor común ϵ_o, se encuentra:

$$\sigma_o = \epsilon_o (q_o + q_1 iw) \tag{4.17}$$

De igualar (4.17) con (2.40) resulta:

$$G(w) = G_1(w) + iG_2(w) = \frac{1}{(q_o + q_1 iw)} \tag{4.18}$$

Después de separar las componentes real e imaginaria de (4.18), mediante:

$$G(w) = \frac{1}{(q_o + q_1 iw)} \times \frac{[q_o - q_1 iw]}{[q_o - q_1 iw]} = \frac{(q_o - q_1 iw)}{(q_o^2 + q_1^2 w^2)} \tag{4.19}$$

se llega, finalmente, a las expresiones:

$$G_1(w) = \frac{q_0}{q_0^2 + q_1^2 w^2} \qquad (4.20a)$$

$$G_2(w) = - \frac{q_1 w}{q_0^2 + q_1^2 w^2} \qquad (4.20b)$$

De introducir (4.20a) y (4.20b) en (2.39) se obtiene la expresión para la deformación del modelo:

$$\epsilon = \frac{q_0}{q_0^2 + q_1^2 w^2} \cos wt + \frac{q_1 w}{q_0^2 + q_1^2 w^2} \operatorname{sen} wt \qquad (4.22)$$

Resulta interesante observar la variación de la respuesta de este sólido con la frecuencia. Cuando $w \rightarrow 0$, la componente imaginaria de la deformación tiende a desaparecer y ϵ queda expresada por:

$$\epsilon = 1 / q_0$$

Este resultado indica, que para pequeñas velocidades de oscilación de la carga, el cuerpo de Kelvin-Voigt se tiende a comportar como un sólido elástico de Hooke.

Cuando la frecuencia alcanza valores altos, $w \rightarrow \infty$, las componentes real e imaginaria de la deformación tienden a anularse, es decir, la respuesta tiende a cero. Esto muestra que para altas frecuencias de carga, el modelo de Kelvin se comporta como un fluido incompresible.

4.4 Aplicación al sólido de tres parámetros

Este modelo, usualmente, se representa por el esquema mostrado en la Fig. 4.4. Consiste en un cuerpo de Kelvin-Voigt y un modelo de Hooke dispuestos en serie.

Fig. 4.4 Sólido de tres parámetros

La ecuación que representa al comportamiento de este modelo es la siguiente:

$$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\epsilon + q_1\dot{\epsilon} \tag{4.23}$$

Al aplicar (2.23) y (2.29) sobre (4.23), ésta última se puede escribir como:

$$\sigma_0 e^{i\omega t} + p_1\sigma_0(i\omega)e^{i\omega t} = \epsilon_0 q_0 e^{i\omega t} + q_1\epsilon_0(i\omega)e^{i\omega t} \tag{4.24}$$

De eliminar el término exponencial y reordenar la ecuación anterior resulta:

$$\sigma_0 \, (1 + p_1 \, i\omega) = \epsilon_0 \, (q_0 + q_1 \, i\omega) \tag{4.25a}$$

$$\epsilon_0 = \sigma_0 \frac{(1 + p_1 \, i\omega)}{(q_0 + q_1 \, i\omega)} \tag{4.25b}$$

Al igualar (4.25b) y (2.39) se obtiene:

$$G(\omega) = G_1(\omega) + iG_2(\omega) = \frac{(1 + p_1 \, i\omega)}{(q_0 + q_1 \, i\omega)} \tag{4.26}$$

Después de multiplicar el numerador y el denominador de (4.26) por $(q_0 - q_1 \, i\omega)$, es posible separar las componentes real e imaginaria de $G(\omega)$, las cuales resultan ser:

$$G_1(\omega) = \frac{(q_0 + p_1 q_1 \omega^2)}{(q_0^2 + q_1^2\omega^2)} \tag{4.27a}$$

$$G_2(\omega) = -\frac{(q_1 - p_1 q_0)\omega}{(q_0^2 + q_1^2\omega^2)} \tag{4.27b}$$

Como se puede observar, en éste y en todos los modelos anteriores, $G_2(\omega)$ es una cantidad negativa, es aquí donde adquiere verdadero significado la desigualdad:

$$q_1 > p_1 q_0 \tag{4.28}$$

Al sustituir (4.27a) y (4.27b) en la ecuación (2.43), la respuesta del modelo queda expresada por:

$$\epsilon = \frac{(q_0 + p_1 q_1 w^2)}{q_0^2 + q_1^2 w^2} \cos wt + \frac{(q_1 - p_1 q_0) w}{q_0^2 + q_1^2 w^2} \operatorname{sen} wt \qquad (4.29)$$

Así, ya que la función seno está defasada con la función coseno en 90°, la deformación estará defasada entre 0° y 90° con respecto al esfuerzo.

Cuando se imponen frecuencias de carga, w, próximas a cero o a infinito, el argumento de la función seno se hace cero, y la diferencia de fase entre el esfuerzo y la deformación desaparece, aproximándose el comportamiento del modelo al de un sólido elástico.

$$\text{Cuando } w \longrightarrow 0; \qquad \epsilon = 1/q_0$$

$$\text{Cuando } w \longrightarrow \infty; \qquad \epsilon = p_1/q_1$$

Al aplicar la ecuación (3.33) se obtiene que la disipación para este material está dada por:

$$D = \frac{1}{2} \sigma_0^2 \frac{(q_1 - p_1 q_0) w^2}{q_0^2 - q_1^2 w^2} \qquad (4.30)$$

En la Fig. 4.5 se representan los parámetros del sólido en estudio, en un sistema coordenado G_1, G_2.

Para altas frecuencias, $w \longrightarrow \infty$, la disipación se aproxima a un valor finito, sin embargo, para una frecuencia nula, la disipación se desvanece y el comportamiento tiende a ser el de un material elástico lineal.

Como se puede observar, en la segunda columna de la tabla 1.1, el sólido de tres parámetros degenera en un cuerpo de Kelvin si se anula el parámetro p_1. Esto induce cambios cuantitativos en

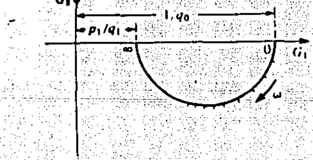


Fig. 4.5 Deformabilidad compleja del Sólido de tres parámetros

los términos G_2 y D, mientras que G_1 presenta cambios cualitativos. De esta manera:

$$G_1(w) = \frac{q_o}{q_o^2 + q_1^2 w^2}$$

$$G_2(w) = -\frac{(q_1 - p_1 q_o)}{((q_o^2/w^2)+q_1^2)w}$$

De la expresiones anteriores se deduce que ; cuando $w \longrightarrow \infty$, $G_1(w)$ y $G_2(w)$ tienden a cero . Esto significa que para altas frecuencias el ángulo de fase entre esfuerzos y deformaciones se aproxima a 90° y el comportamiento del sólido de Kelvin tiende a ser el de un fluido viscoso. En la Fig. 4.5 , el semicírculo alcanza ,en su extremo izquierdo, el origen del sistema de coordenadas.

Si en las ecuaciones (4.26),(4.27),(4.28),(4.29) y (4.30) se fija el valor de p_1 y se le asigna a q_o el valor cero, los resultados que se obtienen indican que el sólido de tres parámetros degenera en un fluido de Maxwell. Así, el extremo derecho del semicirculo de la Fig. 4.5, se moverá infinitamente, y la curva tenderá a volverse una linea recta vertical, como se muestra en la Fig. 4.6. Ambas componentes de la deformabilidad compleja cambian sustancialmente para llegar a ser ahora;

$$G_1(w) = p_1 / q_1 \qquad y \qquad G_2(w) = -1 / (q_1 w) \qquad (4.31)$$

G_2 tenderá a desaparecer cuando $w \longrightarrow \infty$, pero cuando $w \longrightarrow 0$, G_2 crecerá indefinidamente y deja de ser importante el término real, G_1. Esto significa, que para altas frecuencias, el material de Maxwell se aproxima a un sólido elástico, mientras que para bajas frecuencias, tiende a comportarse como un fluido viscoso. La disipación, entonces, se volverá independiente de la frecuencia y podrá expresarse como:

$$D = \sigma_o^2 / 2\, q_1 \qquad (4.32)$$

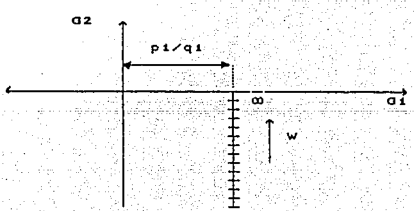


Fig. 4.6 Deformabilidad compleja del Fluido de Maxwell

4.5 Aplicación al modelo de Burgers

Fig. 4.7 Modelo de Burgers

La ecuación diferencial que caracteriza a este modelo es:

$$\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} = q_1\dot{\epsilon} + q_2\ddot{\epsilon} \qquad (4.33)$$

Al introducir las expresiones (2.23) y (2.29) en (4.33), ésta última puede escribirse como:

$$\sigma_0 e^{iwt} + p_1 iw\,\sigma_0 e^{iwt} - w^2\sigma_0\, p_2 e^{iwt} = q_1\, iw\,\epsilon_0 e^{iwt} - q_2\, w^2\epsilon_0 e^{iwt} \qquad (4.34)$$

Al reordenar la ecuacion anterior se obtiene:

$$\sigma_0\,[\,1 + p_1\, iw - w^2 p_2\,] = \epsilon_0\,[\,-w^2 q_2 + q_1\, iw\,]$$

Por tanto;

$$\epsilon_0 = \sigma_0 \frac{[1 + p_1\, iw - w^2 p_2]}{[-w^2 q_2 + q_1\, iw]} \qquad (4.35)$$

De multiplicar el numerador y el denominador de la ecuación (4.35) por el conjugado del denominador se tiene:

$$G_1(w) = \frac{(p_1 q_1 - q_2) + p_2 q_2 w^2}{q_1^2 + q_2^2\, w^2} \qquad (4.36)$$

$$G_2(w) = -\frac{q_1 + (q_2 p_1 - p_2 q_1)w}{(q_1^2 + q_2^2 w^2)} \qquad (4.37)$$

Al sustituir las ecuaciones (4.36) y (4.37) en (2.39) se obtiene:

$$\epsilon = \frac{(p_1 q_1 - q_2) + p_2 q_2\, w^2}{q_1^2 + q_2^2\, w^2}\cos wt + \frac{(q_1 + (q_2 p_1 - p_2 q_1))w}{q_1^2 + q_2^2\, w^2}\,\mathrm{sen}\, wt \qquad (4.38)$$

Al sustituir (4.37) en la ecuación (3.33) resulta:

$$D = 1/2\ \sigma_o^2 \frac{q_1 + (q_2 p_1 - p_2 q_1) w^2}{q_1^2 + q_2^2 w^2} \qquad (4.39)$$

Cuando $w \longrightarrow 0$, el término G_2 tiende a desaparecer y la deformación queda de la forma:

$$\epsilon = (p_1/q_1) - (q_2/q_1^2)$$

y la disipación del modelo se aproxima a cero.

Cuando $w \longrightarrow \infty$, G_2 se anula y la respuesta queda en términos de:

$$\epsilon = p_2 / q_2$$

y la disipación de energía interna del material se hace cero.

Debido a las desigualdades:

$$p_1 q_1 > q_2 \quad ; \quad p_1^2 > 4p_2 \quad \text{y} \quad p_1 q_1 q_2 > p_2 q_1^2 + q_2^2$$

para cualquier frecuencia, w, entre cero e infinito, la deformación estará retrasada con respecto al esfuerzo en un ángulo de fase cuyo valor está entre 0° y 90°.

Para $w = 0$, el término imaginario se anula y la deformación se pone en fase con el esfuerzo. Lo mismo ocurre cuando $w \longrightarrow \infty$, en consecuencia, la disipación tiende a cero, sin que por esta razón la deformación sea la de un sólido elástico lineal.

Cuando $w \longrightarrow 0$, el modelo de Burgers degenera en un material cuya deformación resulta ser menor que la de un fluido de Maxwell, en una cantidad igual a (q_2/q_1^2). Mientras que para altas frecuencias, el comportamiento de la deformación tiene la forma de la de un fluido de Maxwell, pero en términos de q_2 y p_2 y resulta de la forma:

$$\epsilon = p_2 / q_2$$

En muchos materiales, como se verá más adelante, el comportamiento de las deformaciones, bajo esfuerzo constante, queda definido por el sólido de tres parámetros y por el modelo de Burgers. El primero representa al comportamiento del material real, sometido a la componente volumétrica del tensor de esfuerzos, es decir, a un estado de esfuerzos isotrópico, y el segundo, describe a las deformaciones obtenidas de aplicar un estado de esfuerzo uniaxial sobre un elemento cilíndrico de dicho material.

CAPÍTULO V

RELACIONES ENTRE LA DEFORMABILIDAD DE FLUENCIA Y DEFORMABILIDAD COMPLEJA. APLICACIONES A MODELOS ESPECÍFICOS

5.1 Cálculo de G(w) a partir de J(t)

Hasta ahora , se han obtenido las expresiones correspondientes a la deformabilidad compleja, G(w), a partir de la ecuación diferencial (2.8a), del material genérico de N parámetros.

De la ecuación (2.20a) :

$$\epsilon(t) = \sigma_0\, J(t) + \int_0^t J(t-t')\, \frac{d\sigma'}{dt'}\, dt'$$

ó bien;

$$e(t) = \sigma_0\, J(t) + [J(t-t')\, \sigma(t')]_0^t - \int_0^t \sigma(t')\, \frac{dJ(t-t')}{dt'}\, dt'$$

se obtiene la deformabilidad de fluencia , J(t), y se puede determinar completamente la deformación producida asociada a un esfuerzo aplicado. Por tanto, debería ser posible obtener G(w) cuando solo se conoce J(t).

Como se estudió en el capitulo II, en la ecuación (2.43), los esfuerzos , σ = cos wt , producen en un elemento de material viscoelástico una deformación periódica, $\epsilon = G_1\cos wt - G_2 \text{sen} wt$. Sin embargo, si se aplica este esfuerzo sobre el material en un instante t = 0, la deformación obtenida resulta ser una oscilación más una parte de la deformación, que es de naturaleza transitoria. Para fines de cálculo, se trata de suprimir ésta última parte de la deformación, al suponer que los esfuerzos periódicos han actuado sobre el material durante un período de tiempo muy largo, pero finito. Así, se dirá que t = -T, con esta modificación, la integral hereditaria (2.20a) produce una deformación:

$$\epsilon(t) = \sigma(-T)\, J(t + T) + \int_{-T}^{t} J(t-t')\, \frac{d\sigma(t')}{dt'}\, dt' \qquad (5.1)$$

Al hacer T $\rightarrow \infty$, la deformación esperada queda descrita por:

$$G_1(w)\cos wt - G_2(w)\,\text{sen}\, wt =$$

$$\lim_{T\rightarrow\infty} [J(t+T)\cos wT - w\int_{-T}^{t} J(t-t')\,\text{sen}\, wt'\, dt'] \qquad (5.2)$$

5.2 Aplicaciones a modelos viscoelásticos comunes

En esta sección se estudiará el empleo de la ecuación (5.2) en su aplicación a los materiales viscoelásticos más utilizados.

5.2.1 Aplicación al modelo de Hooke

De la tabla 1.1 se toma la expresión para la deformabilidad de fluencia , correspondiente al material idealmente elástico lineal:

$$J(t) = 1/q_o \tag{5.3}$$

Al sustituir esta ecuación en (5.2) se obtiene:

$$G_1(w) \cos wt - G_2(w) \text{ sen } wt =$$

$$\frac{1}{q_o} \lim_{T \Rightarrow \infty} (\cos wT - w \int_{-T}^{t} \text{sen } wt' \, dt') \tag{5.4}$$

El término que precede a la integral, resulta ser una función acotada:

$$(1/q_o) \cos wT$$

La solución de la integral es:

$$(1/q_o)(\cos wt - \cos wT)$$

Finalmente, el resultado de (5.4) viene a ser:

$$G_1(w) \cos wt - G_2(w) \text{ sen } wt = (1/q_o)(\cos wT + \cos wt - \cos wT)$$

De agrupar los términos de la solución anterior se obtienen las expresiones para las componentes de la deformabilidad compleja del modelo:

$$G_1 = 1/q_o \qquad \text{y} \qquad G_2 = 0 \tag{5.5}$$

que son exactamente iguales a las que aparecen en la tabla 1.1 .

5.2.2 Aplicación al fluido de Maxwell

De la tabla 1.1 , se obtiene que la ecuación para la deformabilidad de fluencia de este material es:

$$J(t) = (p_1 + t)/q_1 \qquad (5.6)$$

De introducir la expresión anterior en (5.2) se tiene:

$$G_1(w)\cos wt - G_2(w)\,\mathrm{sen}\, wt =$$
$$\frac{1}{q_1}\ \mathrm{Lim}\,[(p_1 + t + T)\cos wT - w\int_{-T}^{t}(p_1 + t - t')\,\mathrm{sen}\, wt'\,dt'] \qquad (5.7)$$

El término que precede a la integral resulta:

$$(1/q_1)\,p_1 \cos wT$$

Al resolver la integral se obtiene:

$$(1/q_1 w)(\mathrm{sen}\, wt - \mathrm{sen}\, wT)$$

Por tanto, el resultado de (5.7) es:

$$\frac{1}{q_1}\lim_{T\to\infty}[p_1 \cos wt + (1/w)(\mathrm{sen}\, wt - \mathrm{sen}\, wT)]$$

Al agrupar términos, se llega a las siguientes expresiones:

$$G_1 = \frac{p_1}{q_1} \qquad y \qquad G_2 = -\frac{1}{q_1 w} + \frac{1}{q_1 w}\,\mathrm{sen}\, wT \qquad (5.8)$$

Puede observarse, que G_1 coincide con el de la tabla 1.1, sin embargo, la componente G_2 presenta un término adicional, que es función del periodo y que corresponde a la deformación transitoria que nunca desaparece, (Ref. 3). Esto indica, que la atenuación de la deformación en un periodo largo de tiempo, depende de la historia de cargas establecidas sobre el material.

Un término de esta naturaleza, puede esperarse siempre que en el modelo exista un amortiguador viscoso en serie con otros elementos, es decir, cuando el material sea un fluido. Para esos materiales, la deformación, ϵ, constante, es una solución de la ecuación diferencial homogénea $Q\epsilon = 0$, y deberá sumarse a la ecuación particular.

5.5.3 Aplicación al modelo de Kelvin-Voigt

La expresión que define a la deformabilidad compleja de este material es:

$$J(t) = (1/q_o)(1 - e^{-\lambda t}) \qquad (5.9)$$

$$\text{con } \lambda = q_o/q_1$$

Al introducir la ecuación (5.9) en (5.2) se obtiene:

$$\frac{1}{q_o} \lim_{T\to\infty} [(1 - e^{-\lambda(t+T)})\cos wT - w \int_{-T}^{t} (1 - e^{-\lambda t} e^{\lambda t'})\text{sen } wt'dt' \qquad (5.10)$$

En el término fuera de la integral, $(1 - e^{-\lambda(t+T)})$, cuando $T\longrightarrow\infty$, se hace igual a la unidad, por tanto, queda:

$$(1/q_o) \cos wT$$

Este resultado indica que la pendiente debe descender rápidamente.

La solución de la integral conduce al siguiente resultado:

$$\frac{1}{q_o} \left\{\cos wt' + \frac{w\, e^{-\lambda t}}{\lambda^2 + w^2} [(\lambda \text{ sen } wt' - w \cos wt')e^{\lambda t'}] \right\}_{-T}^{t}$$

De sustituir los límites de integración y agrupar los términos, reales e imaginarios, se llega a las expresiones de las componentes de la deformabilidad compleja del modelo. Éstas resultan ser:

$$G_1 = \frac{q_o}{q_o^2 + w^2 q_1^2} \qquad \text{y} \qquad G_2 = \frac{q_1 w}{q_o^2 + w^2 q_1^2} \qquad (5.11)$$

que son exactas a las que aparecen en la tabla 1.1 .

5.2.4 Aplicación al sólido de tres parámetros

La expresión correspondiente a la deformabilidad de fluencia de este modelo es :

$$J(t) = \frac{p_1}{q_1} e^{-\lambda t} + \frac{1}{q_o} (1 - e^{-\lambda t}) \qquad (5.12)$$

donde $\lambda = q_o/q_1$

Al sustituir la ecuación (5.12) en (5.2) se obtiene:

$G_1(w)$ cos wt - $G_2(w)$ sen wt =

$$\lim_{T \to \infty} \{ [(\frac{p_1}{q_1} e^{-\lambda(t+T)}) + \frac{1}{q_o} (1 - e^{-\lambda(t+T)}) \cos wt]$$

$$- w \int_{-T}^{t} [(\frac{p_1}{q_1} e^{-\lambda(t-t')}) + \frac{1}{q_o} (1 - e^{-\lambda(t-t')})] \text{sen } wt' dt' \} \qquad (5.13)$$

En el término que precede a la integral, los exponenciales tienden a cero cuando $T \to \infty$, es decir, la pendiente de la curva decrece rápidamente, y la solución de esa parte de (5.13) es:

$$(1/q_o) \cos wT$$

Al resolver la integral y sustituir los límites de integración, la expresión (5.13) se puede escribir como:

$G_1(w)$ cos wt - $G_2(w)$ senwt =

$$\frac{-p_1}{q_1} \frac{w}{(\lambda^2 + w^2)} (\lambda \text{sen } wt - w\cos wt) + \frac{1}{q_o} \frac{w}{(\lambda^2 + w^2)} (\lambda \text{sen} wt - w \cos wt)$$

$$+ \frac{1}{q_o} \cos w$$

De agrupar los términos en seno y coseno, resultan las siguientes expresiones para las componentes real e imaginaria de la deformabilidad compleja del modelo:

$$G_1 = \frac{q_1 p_1 w^2 + q_o}{(q_o^2 + q_1^2 w^2)} \quad \text{y} \quad G_2 = -\frac{(q_1 - q_o p_1) w}{q_o^2 + q_1^2 w^2} \qquad (5.14)$$

Las expresiones (5.14) representan a la descomposición de la oscilación armónica, en sus partes real e imaginaria, y resultan ser iguales a las que aparecen en la tabla 1.1 .

5.2.5 Aplicación al modelo de Burgers

De la tabla 1.1 se obtiene la ecuación correspondiente a la deformabilidad de fluencia de este modelo;

$$J(t)=\frac{t}{q_1}+\frac{p_1q_1-q_2}{q_1^2}(1-e^{-\lambda t})+\frac{p_2}{q_2}e^{-\lambda t} \quad (5.15)$$

$$\text{donde } \lambda = q_1/q_0$$

Al sustituir la expresión (5.15) en (5.2), ésta última se puede escribir como:

$$G_1(w)\cos wt - G_2(w)\,\text{sen}\,wt =$$

$$\lim_{T\to\infty}\Big\{\Big[\frac{t+T}{q_1}+\frac{p_1q_1-q_2}{q_1^2}(1-e^{-\lambda(t+T)})\Big]\cos wT +$$

$$- w\int_{-T}^{t}\Big[\frac{t-t'}{q_1}+\frac{p_1q_1-q_2}{q_1^2}(1-e^{-\lambda(t-t')})+\frac{p_2}{q_2}e^{-\lambda(t-t')}\Big]\text{sen}\,wt'dt'\Big\}$$

(5.16)

El término previo a la integral, cuando $T\to\infty$, presenta las siguientes características:

$$e^{-\lambda(t+T)}\to 0 \quad ; \quad (1-e^{-\lambda(t+T)})\to 1 \quad y \quad \frac{t+T}{q_1}\to\frac{T}{q_1}$$

Por tanto, esta parte del límite presenta el siguiente resultado:

$$\frac{T}{q_1}\cos wT + \frac{p_1q_1-q_2}{q_1^2}\cos wT$$

La pendiente de la curva deformación - tiempo decaerá rápidamente cuando el término exponencial tienda a cero.

Al resolver la integral , introducir los límites de integración y sustituir el resultado de (5.16) en (5.2), ésta queda de la forma:

$G_1(w)$ cos wt $-$ $G_2(w)$ sen wt $=$

$$- \frac{t}{q_1} \cos wT + \frac{1}{wq_1} \text{sen } wT + \left(\frac{p_1q_1-q_2}{q_1^{\,2}}\right) \cos wt + \left(\frac{p_1q_1-q_2}{q_1^{\,2}}\right) \frac{w\,\lambda}{w^2+\lambda^2} \;*$$

$$* \text{ sen } wt - \left(\frac{p_1q_1-q_2}{q_1^{\,2}}\right) \frac{w^2}{w^2+\lambda^2} \cos wt - \frac{p_2}{q_2} \frac{w\lambda}{w^2+\lambda^2} \text{ sen } wt + \frac{p_2}{q_2} \;*$$

$$\frac{w^2}{w^2+\lambda^2} \cos wt$$

La expreseión anterior, al ser separada en sus términos en seno y coseno, da como resultado las componentes real e imaginaria de la deformabilidad compleja del modelo;

$$G_1 = \frac{(p_1q_1 - q_2)+p_2q_2\, w^2}{(q_1^{\,2} + q_2^{\,2} w^2\,)} - \frac{1}{q_1w} \cos wT \qquad (5.17)$$

$$G_2 = - \frac{q_1 + (q_2p_1 - q_2) + p_2q_2\, w^2}{(q_1^{\,2} + q_2^{\,2}\; w^2)} + \frac{1}{q_1w} \text{ sen } wT$$

5.3 Obtención de $J(t)$ de un material a partir de $G(w)$

En esta sección se intenta invertir el proceso anterior, o sea, conocida la deformabilidad compleja de un material viscoelástico, interesa investigar si es posible, a partir de ese dato, encontrar la deformabilidad de fluencia del mismo, que como se sabe, es un parámetro único de cada modelo y permite caracterizarlo completamente.

Para encontrar la respuesta a esta incógnita, se recurrirá al uso de la integral de Fourier, (Ref. 9).

La función escalón unitaria puede escribirse como:

$$\Delta(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen } wt}{w}\, dw \qquad (5.18)$$

El segundo término de la derecha resulta ser función de t y cambiará de signo cuando t sea reemplazado por $-t$. La ecuación (5.18) establece que para todo $t > 0$, $\Delta(t)$ tiene un valor igual a 1/2.

Como se estudió en el capítulo II, la deformabilidad de fluencia , $J(t)$, de un material, es producida por una unidad de esfuerzo aplicado en la forma de una función escalón unitaria, $\sigma = \Delta(t)$.

La ecuación (5.18) muestra como el esfuerzo, $\sigma = \Delta(t)$, puede tomarse como el promedio de $\sigma = 1/2$ más la sumatoria de un número infinito de oscilaciones, de amplitudes infinitesimales iguales a: $dw/(\pi w)$. Al aplicar a éstas últimas la ecuación (2.44), se obtiene la función de la deformación correspondiente. No obstante, habrá que encontrar una manera de eliminar la constante promedio; $\sigma = 1/2$.

Para hacer posible la aplicación de la ecuación (2.44), es necesario interpretar a la deformación como una función coseno de una oscilación, cuando la frecuencia tiende a cero, es decir :

$$\frac{1}{2} \cong \frac{1}{2} \lim_{w \to 0} \cos wt \qquad (5.19)$$

Al aplicar la ecuación (5.19) sobre (2.44) se obtiene:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = {} & \frac{1}{2} \lim_{w \to 0} [G_1(w) \cos wt - G_2(w) \operatorname{sen} wt] + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [G_1(w) \operatorname{sen} wt + G_2(w) \cos wt] \frac{dw}{w} \end{aligned} \qquad (5.20)$$

La ecuación (5.20) debe ser igual a $J(t)$. Al resolver el límite de la primera línea, el término $G_1(0)$ puede salir del corchete y debido a que $w \to 0$, el argumento de la función seno se aproxima a él mismo, por tanto, se puede asumir que:

$$\operatorname{sen} wt \cong wt$$

De realizar los cambios descritos en (5.20) se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} J(t) = {} & \frac{1}{2} G_1(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_2(w) \cos wt \frac{dw}{w} + \\ & - \frac{1}{2} t \lim_{w \to 0} [wG_2(w)] + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_1(w) \operatorname{sen} wt \frac{dw}{w} \end{aligned} \qquad (5.21)$$

En la expresión anterior se pueden hacer arreglos, de tal manera que la primera línea sea siempre función del tiempo, t. Ahora, considérese que $t<0$. Para $J(t) = 0$ se observa que las dos líneas de (5.21) deben tener la misma magnitud pero signos opuestos. Si se cambia el signo de t, $t>0$, la segunda línea cambiará de signo y ambas líneas serán exactamente iguales. Así, se puede concluir que cada una de las líneas de la ecuación (5.21) corresponde a 1/2 J(t). De esta manera, se obtienen dos fórmulas para la deformabilidad de fluencia, a partir de la deformabilidad compleja de un material:

$$J(t) = G_1(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} G_2(w)\cos wt\,\frac{dw}{w} \qquad (5.22a)$$

$$J(t) = -t\lim_{w\to 0}[wG_2(w)] + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} G_1(w)\,\mathrm{sen}\,wt\,\frac{dw}{w} \qquad (5.22b)$$

De lo anterior se puede observar, que bajo un esfuerzo senoidal aplicado, se puede producir una deformación tal, que adicionalmente a los términos : sen wt y cos wt, contenga un término constante, $\epsilon = c$, indefinido. Así, la segunda línea de (5.21) puede no representar a J(t), pero si a J(t) + c.

Por tanto, esa deformación constante, $\epsilon = c$, que es una función de t, debería aparecer en la primera línea, ó bien, en (5.22a). De lo anterior se puede suponer que la expresión (5.22b) proporciona el valor exacto de J(t), mientras que (5.22a) da un error, debido a la función constante, c .

Hay algunos materiales para los cuales las integrales suelen ser más difíciles y se requiere de un entorno de integración complejo, ya que al integrar con respecto al tiempo, puede ocurrir que el denominador se anule.

En esta situación, al introducir $G_1(w)$ y $G_2(w)$ del material en las expresiones (5.22a) y (5.22b) , queda el tiempo en el denominador del integrando y se hace necesario un cambio de variables para trabajar en el campo complejo, que conduce a la integral:

$$H = \int_0^{\infty} \frac{\cos z}{a^2 + z^2}\,dz \qquad (5.23)$$

donde ($z = x + iy$), se interpreta como una variable compleja. El patrón de integración será la parte positiva del eje real mostrado en la Fig. 5.1. De esta manera, el integrando es una función exacta. La integral sobre el eje real entero es 2H, y ésto no cambia al sumar una integral sobre una función particular que , por sí misma, sea igual a cero, (Ref. 3).

$$2H = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos z}{a^2 + z^2}\,dz + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}\,z}{a^2 + z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{a^2 + z^2}\,dz \qquad (5.24)$$

En la teoría de la variable compleja, se demuestra que una integral no cambia su valor si se modifica el patrón de integración, al conectar los mismos puntos extremos, y se encuentra un punto singular entre los dos patrones, como se indica en la Fig. 5.1 con la línea llena.

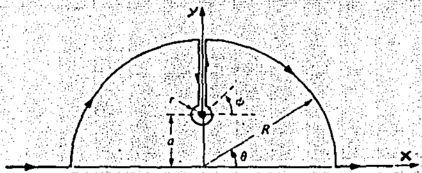


Fig. 5.1 Integral en el campo complejo.

Esta condición, consiste en las partes externas del eje real y el perímetro de la circunferencia, pero este contorno es interrumpido por una desviación, escogida en el punto singular, en el cual $z = i\alpha$ y para el cual $(\alpha^2 + z^2) = 0$, lo que produce una atenuación en el patrón de integración mencionado.

Para resolver la ecuación (5.24) existirán, entonces, tres trayectorias de integración:

La primera de estas trayectorias consiste en el contorno de la circunferencia de mayor diámetro:

$$z = Re^{i\varphi}$$

donde:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$$

Por tanto;

$$z = R\cos\varphi + i R \operatorname{sen}\varphi$$

El término en coseno corresponde al eje real y el término en seno corresponde a la proyección sobre el eje imaginario.

La segunda trayectoria consiste en el contorno de la circunferencia de menor diámetro:

$$z = i\alpha + re^{i\varphi}$$

que a su vez, se puede expresar como:

$$z = i\alpha + ir \operatorname{sen}\varphi + r\cos\varphi$$

La tercera trayectoria es sobre las líneas verticales de la desviación, las cuales coinciden con el eje Y. Para ambas el integrando resulta tener el mismo valor pero de signos opuestos, por tanto, la contribución de 2H sobre esta trayectoria es nula.

Cuando $R \longrightarrow \infty$, la parte horizontal del patron desaparece completamente y se llega a la expresión:

$$2H = \lim_{R\to\infty} \int_{\pi}^{0} \frac{e^{iRe^{i\phi}}}{a^2+R^2e^{2i\phi}} Rie^{i\phi}d\phi + \lim_{r\to 0} \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \frac{e^{i(ia+re^{i\phi})}}{a^2+(ia+re^{i\phi})} rie^{i\phi}d\phi \qquad (5.25)$$

Al desarrollar las exponenciales de la expresión anterior; quedan de la forma:

$$e^{iRe^{i\phi}} = e^{iR(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)} = e^{iR\cos\phi}e^{-R\,\mathrm{sen}\,\phi}$$

$$e^{iRe^{i\phi}} = [\cos(R\cos\phi) + i\,\mathrm{sen}\,(R\cos\phi)]e^{-R\,\mathrm{sen}\,\phi} \qquad (5.26)$$

Obsérvese que cuando $R \longrightarrow \infty$, el factor dentro de los corchetes es una función acotada, multiplicada por un término exponencial que tiende a cero, por tanto, toda la expresión tiende a anularse. Así, al sustituir en (5.26) todo el término que corresponde a la trayectoria sobre la circunferencia de mayor diámetro se hace cero.

Cuando se integra sobre la circunferencia de menor diámetro, es posible escribir:

$$2H = \lim_{r\to 0} \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \frac{e^{-a}\,e^{ir\cos\phi}\,e^{-r\,\mathrm{sen}\,\phi}}{a^2 - a^2 + 2iare^{i\phi} + r^2e^{2i\phi}}\, r\,i\,e^{i\phi}\,d\phi$$

ó bien;

$$2H = ie^{-a} \lim_{r\to 0} \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \frac{e^{ir\cos\phi}\,e^{-r\,\mathrm{sen}\,\phi}}{2ia + re^{i\phi}}\,d\phi \qquad (5.27)$$

Al resolver el límite cuando $r \longrightarrow 0$, en el numerador cada factor se aproxima a la unidad y en el denominador, el segundo término desaparece. El integrando resulta ser una constante y lo anterior conduce a la expresión:

$$2H = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-a}}{2a}\,2\pi = \frac{\pi}{2a}\,e^{-a} \qquad (5.28)$$

5.4 Aplicación a diversos modelos

Para ilustrar el uso de las expresiones desarrolladas en la sección anterior, se resolverán varios ejemplos; en los cuales, se buscará obtener una ecuación para la deformabilidad de fluencia , a partir de la deformabilidad compleja conocida.

5.4.1 Aplicación al modelo de Hooke

De la tabla 1.1 se obtiene:

$$G_1(w) = (1/q_o) \qquad y \qquad G_2(w) = 0 \qquad (5.29)$$

La sustitución de las expresiones (5.29) en la ecuación (5.22a) conduce a:

$$J(t) = \frac{1}{q_o} + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (0)\cos\ wt\ \frac{dw}{w} = \frac{1}{q_o} \qquad (5.30)$$

Nótese que el valor de J(t) es el mismo que aparece en la tabla 1.1 y , a pesar de que fué obtenido a partir de la ecuación (5.22a), no presenta la función $\epsilon = \epsilon(t)$, mencionada en la sección anterior. En este caso no debe aparecer ningún término adicional , debido a que se trata de un material elástico lineal.

5.4.2 Aplicación al modelo de Newton

Para este material las componentes de la deformabilidad compleja vienen dadas por:

$$G_1(w) = 0 \qquad y \qquad G_2(w) = -1/(q_1 w) \qquad (5.31)$$

De sustituir los valores anteriores en la ecuación (5.22a) resulta:

$$J(t) = -\frac{2}{\pi q_1}\int_0^\infty \cos\ wt\ \frac{dw}{w^2}$$

y al multiplicar el numerador y el denominador del integrando por t^2, se obtiene:

$$J(t) = -\frac{2t}{\pi q_1}\int_0^\infty \frac{\cos\ wt}{(wt)^2}\ dwt \qquad (5.32)$$

Al realizar el siguiente cambio de variables:

$$dv = 1/(wt)^2$$

$$u = \cos\ wt$$

se llega a la expresión:

$$J(t) = -\frac{2t}{\pi q_1}\left[\left(-\frac{\cos wt}{wt}\right)_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{\text{sen } wt}{wt}\,dwt\right] \qquad (5.33)$$

La integral entre los corchetes, produce una función trascendental poco común, ésta es la integral de la función seno, definida por la fórmula:

$$\text{Si}x = \int_0^x \frac{\text{sen } Y}{Y}\,dY \qquad (5.34)$$

La función Six describe una onda acotada, que se atenúa al crecer el valor de x, para llegar al valor límite $\pi/2$, cuando $x \to \infty$, como se muestra en la Fig. 5.2 .

Por tanto, la ecuación (5.33) también se puede escribir como:

$$J(t) = -\frac{2t}{\pi q_1}\left[-\frac{\cos wt}{wt} - \text{Si}x\right]_0^{\infty} = -\frac{2}{\pi q_1}\left(\infty - \frac{\pi t}{2}\right)$$

Como puede observarse, el resultado carece de significado. En este caso, la ecuación (5.22a) arroja una solución errada y se hace necesario trabajar con la ecuación (5.22b).

Al sustituir las expresiones (5.31) en (5.22b) se obtiene:

$$J(t) = -t \lim_{w\to 0}\left[-\frac{1}{q_1}\right] = \frac{t}{q_1} \qquad (5.35)$$

Este valor resulta ser igual al indicado en la tabla 1.1 para el modelo de Newton.

5.4.3 Aplicación al modelo de Maxwell

La deformabilidad compleja, correspondiente a este fluido, queda definida por:

$$G_1(w) = p_1/q_1 \qquad y \qquad G_2(w) = -1/(q_1 w) \qquad (5.36)$$

Al introducir los valores de la ecuación (5.36) en (5.22b) se obtiene:

$$J(t) = -t \lim_{t\to 0}\left[w\left(-\frac{1}{q_1 w}\right)\right] + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{p_1}{q_1}\cos wt\,\frac{dw}{w} \qquad (5.37)$$

Al resolver la ecuación anterior, resulta:

$$J(t) = \frac{t}{q_1} + \frac{p_1}{q_1}\,\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(p_1 + t)}{q_1} \qquad (5.38)$$

Este resultado coincide con el que aparece en la tabla 1.1 para el modelo de Maxwell.

5.4.4 Aplicación al modelo de Kelvin-Voigt

De la tabla 1.1 se obtiene:

$$G_1(w) = \frac{q_0}{q_0^2 + q_1^2 w^2} \quad \text{y} \quad G_2(w) = -\frac{q_1\ w}{q_0^2 + q_1^2 w^2} \tag{5.39}$$

de donde:

$$G_1(0) = 1/q_0 \tag{5.40}$$

Al sustituir (5.39) y (5.40) en (5.22a), la expresión para J(t) del cuerpo de Kelvin resulta ser:

$$J(t) = \frac{1}{q_0} - \frac{2q_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos\ wt}{q_0^2 + q_1^2 w^2}\, dw$$

Al multiplicar y dividir la integral de la ecuación anterior por:

$$\frac{t^2}{t^2 (q_1^2 / q_1^2)}$$

se obtiene:

$$J(t) = \frac{1}{q_0} - \frac{2t}{\pi q_1} \int_0^{\infty} \frac{\cos\ wt}{\lambda^2 t^2 + (wt)^2}\, dwt \tag{5.41}$$

donde: $\lambda = q_0/q_1$.

Se observa en la expresión anterior, que el denominador contiene al argumento de la función coseno elevado al cuadrado y, adicionalmente, a otro término que no es función de w. Esto dificulta la aplicación de los procedimientos usados en los ejemplos anteriores. Es recomendable utilizar la integración en el campo complejo , estudiada en la sección 5.3. Entonces, se debe hallar la integral:

$$H = \int_0^{\infty} \frac{\cos\ z}{\alpha^2 + z^2}\, dz \ ,$$

para ello, se realiza el siguiente cambio de variables:

$$\alpha^2 = (\lambda t)^2 \ , \qquad z = wt$$

donde; z representa a la variable compleja.

La sustitución de α y z en el resultado (5.29) conduce a:

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-\alpha}}{2\alpha}\,2\pi = \frac{\pi}{2\alpha}\,e^{-\alpha} = \frac{\pi q_1}{2q_o t}\,e^{-\lambda t} \qquad (5.42)$$

Al introducir la ecuación (5.42) en (5.41) resulta:

$$J(t) = \frac{1}{q_o} - \frac{2t}{\pi q_1}\,\frac{\pi q_1}{2q_o t}\,e^{-\lambda t} = \frac{1}{q_o}\,(1 - e^{-\lambda t}) \qquad (5.43)$$

que es la expresión que aparece en la tabla 1.1 para este modelo.

5.4.5 Aplicación al sólido de tres parámetros

Para este material, las componentes de la deformabilidad compleja son:

$$G_1(w) = \frac{q_o + p_1 q_1 w^2}{q_o^2 + q_1^2\, w^2} \qquad G_2(w) = -\frac{(q_1 - q_o p_1)\, w}{q_o^2 + q_1^2\, w^2} \qquad (5.44)$$

donde:

$$G_1(0) = (1/q_o) \qquad (5.45)$$

De la sustitución de (5.44) y (5.45) en la ecuación (5.22a), resulta:

$$J(t) = \frac{1}{q_o} - \frac{2(q_1 - q_o p_1)}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos wt}{q_o^2 + q_1^2 w^2}\,dw \qquad (5.46)$$

De seguir un procedimiento análogo al que se empleó en el problema anterior, se llega a la expresión:

$$J(t) = \frac{1}{q_o} - \frac{2t(q_1 - q_o p_1)}{\pi\, q_1^2}\int_0^{\infty} \frac{\cos wt}{(\lambda t)^2 + (wt)^2}\,dwt \qquad (5.47)$$

Después de realizar una cambio de variables adecuado e introducir lo anterior en la expresión (5.28) se llega a:

$$H = \frac{\pi q_1}{2q_o t}\,e^{-\lambda t}$$

a partir de lo cual, se encuentra la expresión:

$$J(t) = \frac{p_1}{q_1}\,e^{-\lambda t} + \frac{1}{q_o}\,(1 - e^{-\lambda t}) \qquad (5.48)$$

la cual, coincide con la que aparece en la tabla 1.1 para este modelo.

5.4.6 Aplicación al modelo de Burgers

La deformabilidad compleja de este material está dada por:

$$G_1(w) = \frac{(p_1q_1-q_2)+p_2q_2\,w^2}{q_1^2+q_2^2\,w^2} \qquad G_2(w) = -\frac{q_1+(q_2p_1-p_2q_1)w}{q_1^2+q_2^2\,w^2} \qquad (5.49)$$

de donde;

$$G_1(0) = (p_1q_1 - q_2)/\,q_1^2$$

Al sustituir lo anterior en la ecuación (5.22a) y realizar las operaciones matemáticas adecuadas , se llega a la expresión:

$$J(t) = \frac{(p_1q_1-q_2)}{q_1^2} - \frac{2t^3q_1}{\pi q_2^2}\int_0^\infty \frac{\cos wt}{(\lambda t)^2(wt)^2}\,\frac{dwt}{(wt)^2} - \frac{2(q_2p_1-p_2q_1)t}{\pi q_2^2}\,*$$

$$*\int_0^\infty \frac{\cos wt}{(\lambda t)^2+(wt)^2}\,dwt \qquad , \qquad \text{donde: } \lambda = q_1/q_2$$

De seguir un procedimiento análogo al usado en los problemas anteriores se obtiene, para la primera de las integrales que presenta la expresión anterior, el siguiente resultado:

$$H = \int_0^\infty \frac{\cos z}{z^2(a^2+z^2)}\,dz = \frac{\pi}{2a^3}\,e^{-a} - \frac{\pi}{2a^2} \qquad (5.50)$$

La solución de la segunda integral, viene dada por la ecuación (5.28).

De lo anterior, al realizar las sustituciones correspondientes, se llega a:

$$J(t) = \frac{t}{q_1} + \frac{(p_1q_1 - q_2)}{q_1^2}\,(1 - e^{-\lambda t}) + \frac{p_2}{q_2}\,e^{-\lambda t}$$

Con estos ejemplos, se concluye el estudio sobre el comportamiento de los materiales viscoelásticos bajo la aplicación de esfuerzos oscilatorios. En lo que sigue, se fijará la atención en el tratamiento de sistemas mecánicos compuestos de masas y resortes viscoelásticos en vibración libre y vibración forzada.

CAPÍTULO VI

SISTEMAS MECÁNICOS COMPUESTOS POR MASAS Y RESORTES VISCOELÁSTICOS EN VIBRACIÓN LIBRE

6.1 Vibración libre en modelos elásticos, sin amortiguamiento

En esta sección, se considerarán las soluciones para un sistema vibratorio de un grado de libertad. En ese sistema, la posición en cualquier instante, de todas las partes que lo componen, puede ser descrita mediante una expresión de una sola variable. Si un sistema requiere más de una variable para definir su posición, significa que éste tiene más que un grado de libertad. En general, el número de grados de libertad de un sistema es igual al número de variables independientes, requerido para determinar la posición de todas sus partes en cualquier instante.

6.1.1 Sistema con un solo grado de libertad

El sistema mostrado en la Fig. 6.1(*a*) consiste en un resorte lineal, de constante K y un peso, F, con masa , $m = F/g$. La constante K se define como la fuerza que se genera cuando se alarga ó acorta el resorte, en una cantidad unitaria.

La masa solo podrá moverse en dirección vertical y todas las rotaciones y movimientos horizontales estarán restringidos.

Se busca la solución del problema, al calcular los desplazamientos, u, a partir de una posición , u_s, para la cual, la fuerza del resorte es igual a cero.

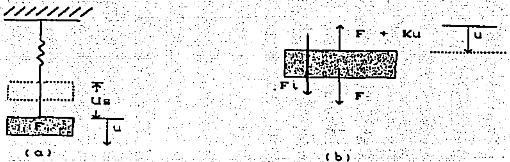


Fig. 6.1 Sistema masa-resorte sin amortiguamiento

La distancia u_s representa el alargamiento del resorte y está dada por:

$$u_s = F/K \tag{6.1}$$

La ecuación diferencial de movimiento se obtiene mediante el empleo de la segunda Ley de Newton, la cual establece que ; la fuerza neta que desequilibra a un sistema de masa constante resulta ser igual a dicha masa multiplicada por su aceleración. Si el sistema mostrado por la Fig. 6.1 es desplazado una distancia u respecto a la posición de reposo, la fuerza en el resorte será igual a: $F_t = F + Ku$, así, por la segunda Ley de Newton:

$$F - (F + Ku) = \frac{F}{g}\ddot{u} = m\ddot{u} \qquad (6.2)$$

lo cual se reduce a:

$$m\ddot{u} + Ku = 0 \qquad (6.3)$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$u = C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{K}{m}}\, t + C_2 \cos \sqrt{\frac{K}{m}}\, t \qquad (6.4)$$

en la cual, C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que se evalúan al sustituir las condiciones iniciales del problema.

El término radical corresponde a la frecuencia natural circular de vibración del sistema no amortiguado;

$$w_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{(rad/seg.)} \qquad (6.5)$$

y la frecuencia natural de oscilación del sistema sin amortiguamiento es:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{(ciclos/seg.)} \qquad (6.6)$$

ó bien;

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{u_s}} \qquad (6.7)$$

De lo anterior, puede observarse que para una vibración no amortiguada , en un sistema de un grado de libertad, el movimiento es armónico y ocurre a la frecuencia natural de vibración, f_n. La amplitud del movimiento se determina a partir de las condiciones iniciales, de las cuales, al menos dos deben ser especificadas. Si el desplazamiento y la velocidad para $t = 0$ son datos conocidos y denotados por u_o y $\dot{u}_o$, respectivamente, se obtienen los valores de las constantes C_1 y C_2 de la ecuación (6.4):

$$C_1 = \dot{u}_o / w_n \qquad (6.8a)$$
$$C_2 = u_o \qquad (6.8b)$$

6.2 Vibración libre en medios elásticos con amortiguamiento

Si al sistema mostrado en la Fig. 6.1 , se le agregara un elemento adicional tal que, produjera disipación de energía durante la vibración libre, éste , sería más representativo de un sistema físico real,(Ref. 11).

Desde el punto de vista matemático, el elemento mas simple que puede cumplir con esa acción disipadora es el fluido viscoso de Newton. El arreglo quedará como el mostrado en la Fig. 6.2.

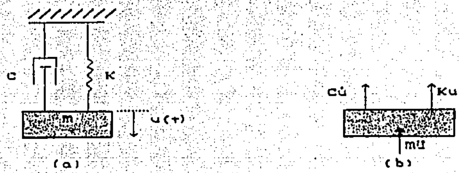


Fig. 6.2 Sistema de un grado de libertad con amortiguamiento

La fuerza en el amortiguador viscoso es directamente proporcional a la velocidad, $\dot{u}$, y tiene un valor, calculado a partir del coeficiente de amortiguamiento del mismo, C . Esta fuerza actúa en oposición al movimiento de la masa.

Cuando el sistema de la Fig. 6.2 se somete a vibración libre, la ecuación diferencial de movimiento se puede obtener a partir de la segunda Ley de Newton, al producirse un desplazamiento con respecto a la posición de reposo. Este desplazamiento , u , produce una fuerza sobre el resorte, que actúa sobre la masa en dirección negativa , y una velocidad positiva que ocasiona una fuerza de amortiguamiento negativa. El estado de fuerzas que se presenta sobre la masa del sistema, se muestra en la Fig. 6.2b.

Al realizar sumatoria de fuerzas verticales, se obtiene:

$$m\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \tag{6.9}$$

Si $\ddot{u} = e^{\beta t}$, lo anterior se puede escribir como:

$$mw^2 + Cw + K = 0 \tag{6.10}$$

La ecuación (6.10) presenta las siguientes soluciones:

$$w_1 = \frac{1}{2m} [-C + \sqrt{C^2 - 4Km} \qquad (6.11a)$$

$$w_2 = \frac{1}{2m} [-C - \sqrt{C^2 - 4Km} \qquad (6.11b)$$

A partir de las ecuaciones (6.11) se pueden considerar tres posibilidades:

a) Cuando $C > 4Km$, las raices de (6.11) serán reales y la solución de (6.9) será:

$$u = C_1 e^{w_1 t} + C_2 e^{w_2 t} \qquad (6.12)$$

Así, w_1 y w_2 resultarán ser negativas, u decrecerá exponencialmente sin cambio de signo, como muestra la Fig. 6.3*a*. En este caso, no habrá oscilación del sistema y se dirá que es *sobreamortiguado*.

b) Cuando $C^2 = 4Km$, ambas raices de (6.11) serán iguales. Este resultado solo tiene significado matemático, y conduce a la solución:

$$u = (C_1 + C_2 t)^{(-Ct/(2m))} \qquad (6.13)$$

Este problema es similar al anterior, solo que ahora, u si podrá cambiar de signo como muestra la Fig. 6.3b. El valor de C requerido para satisfacer a esta condición se conoce como *amortiguamiento crítico*, Cc.

$$C_c = 2\sqrt{Km} \qquad (6.14)$$

y la *relación de amortiguamiento crítico*, será definida como:

$$B = \frac{C}{C_c} \qquad (6.15)$$

c) Cuando $C^2 < 4Km$, el amortiguamiento del sistema será menor que el crítico y las raices de (6.11) serán complejas conjugadas. Al introducir la expresión de Cc, las raices w_1 y w_2 se pueden escribir de la siguiente forma:

$$w_1 = w_n (-B + i\sqrt{1 - B^2}) \qquad (6.16a)$$

$$w_2 = w_n (-B - i\sqrt{1 - B^2}) \qquad (6.16b)$$

Al introducir las expresiones (6.16) en la ecuación (6.12) y aplicar sobre ésta la fórmula de Euler, se obtiene:

$$u=e^{(-W_n B t)}(C_3 \operatorname{sen} w_n t\sqrt{1-B^2}+C_4 \cos w_n t\sqrt{1-B^2}) \qquad (6.17)$$

donde C_3 y C_4 son constantes arbitrarias. La ecuación (6.17) indica que habrá un movimiento oscilatorio cuya amplitud decaerá con el tiempo , proporcionalmente al término exponencial de la derecha, como lo muestra la Fig. 6.3c.

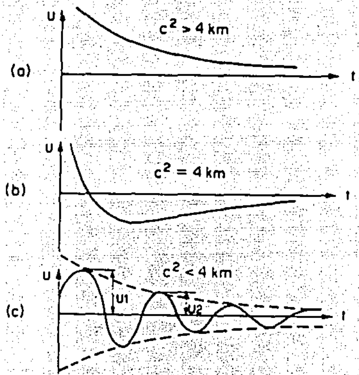


Fig. 6.3 Vibración libre de un sistema amortiguado

Al analizar la ecuación (6.17) , se puede observar que la frecuencia de vibración libre , wd, es menor que la frecuencia natural circular de vibración del sistema no amortiguado y que la relación B tiende a la unidad cuando la frecuencia tiende a cero.

$$w_d = w_n \sqrt{1-B^2} \qquad (6.18)$$

El desarrollo anterior, representa una simplificación del caso real , de un sistema de un grado de libertad en vibración libre. En la sección 6.1 se puede observar que un medio contínuo es discretizado como un sistema de una masa y un resorte elástico lineal (modelo de Hooke).

En la sección 6.2, el medio contínuo se supone como un sistema discreto de un grado de libertad análogo al modelo de Kelvin-Voigt, estudiado en capítulos anteriores, en el cual; ocurre disipación de energía y la vibración se atenúa con el tiempo hasta volver la masa a su posición de reposo.

6.3 Vibración libre de sistemas formados por materiales viscoelásticos

En la Fig. 6.4a, se muestra el prototipo de todos los osciladores de un grado de libertad: una masa ,m, conectada a un punto fijo mediante un resorte, que ahora no es elástico lineal; se trata de una barra compuesta por un material viscoelástico, de sección transversal A. El desplazamiento u de la masa, m, se mide a partir de una posicion de reposo, en la cual el sistema se encuentra en equilibrio, antes de empezar la vibración.

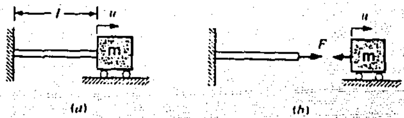


Fig. 6.4 Sistema masa-resorte viscoelástico.

Para hallar la ecuación de movimiento del sistema, se cuenta con las siguientes expresiones:

Ecuación dinámica para un material elástico:

$$m\ddot{u} + F = 0 \qquad (6.19)$$

Relación cinemática:

$$\epsilon = u/l \qquad (6.20)$$

y la ecuación constitutiva del material que forma al resorte viscoelástico.

Al inducir al sistema un movimiento oscilatorio de la forma:

$$u = u_o\, e^{i\nu t} \qquad (6.21)$$

y sustituir la ecuación (2.37) en (6.21), es posible escribir:

$$\epsilon = \frac{u_o}{l} e^{ivt} \qquad (6.22)$$

De la ecuación (6.19) se obtiene:

$$A\sigma = F$$

$$F = -m\ddot{U} = mu_o w^2 e^{ivt} \qquad (6.23)$$

de donde;

$$\epsilon_o = u_o/l \qquad y \qquad \sigma_o = (mu_o w^2)/A$$

Cuando estas dos últimas expresiones se introducen en la ecuación (2.37) , el término uo, que representa a la amplitud compleja de la oscilación , desaparece y se obtiene:

$$w^2 G(w) = A/(ml) \qquad (6.24)$$

Esta es la ecuación de la frecuencia del oscilador mostrado en la Fig. 6.4 ,la cual es aplicable a materiales inelásticos. G(w), es una cantidad compleja, mientras que la frecuencia es un término real, por tanto, la expresión (6.24) conduce a una solución de naturaleza compleja. Lo anterior implica , que todo oscilador que contenga un resorte viscoelástico , produce una vibración amortiguada.

6.4 Aplicación a materiales específicos

En esta sección se hallará la frecuencia natural de vibración del oscilador de la Fig. 6.3 , así como una expresión adecuada para el desplazamiento ,u, cuando el resorte viscoelástico está formado por cada uno de los materiales estudiados en los capítulos anteriores.

6.4.1 Respuesta del modelo de Maxwell

Para este material, la deformabilidad compleja está dada por:

$$G(w) = \frac{p_1}{q_1} - \frac{i}{q_1 w}$$

Al sustituir en la ecuación (6.24) se llega a:

$$\frac{1}{q_1}(p_1 w^2 - iw) = \frac{A}{m\ l}$$

que es una ecuación cuadrática en w, cuyas raíces quedan representadas por:

$$w_1 = \frac{\iota}{2p_1} + \sqrt{\frac{Aq_1}{m\ell p_1} - \frac{1}{4\ p_1^{\,2}}}$$

$$w_2 = \frac{\iota}{2p_1} - \sqrt{\frac{Aq_1}{m\ell p_1} - \frac{1}{4\ p_1^{\,2}}}$$

Al estudiar el radical, se observa que cuando la masa sea muy pequeña, ó bien, que el resorte sea muy rígido, de manera que el módulo; $E_o = q_1/p_1$, tienda a un valor muy grande, la raíz cuadrada resulta ser una cantidad real, la cual se representa por el símbolo ν.

Lo anterior conduce a un valor de la fracuencia, w, igual a:

$$\iota w = - \frac{1}{2p_1} \pm \iota\nu$$

Así, el desplazamiento, u, quedará descrito por la expresión:

$$u = e^{-t/(2p_1)}(C_1\, e^{\iota\nu t} + C_2\, e^{-\iota\nu t})$$

ó bien;

$$u = e^{-t/(2p_1)}(\beta_1 \cos \nu t + \beta_2 \,\text{sen}\, \nu t)$$

Esta última ecuación representa la vibración libre amortiguada del sistema de la Fig. 6.3, cuando la barra está formada por un material maxwelliano y el término radical es un valor real.

Cuando la masa sea grande ó el resorte resulte ser muy flexible, es decir, el módulo $E_o = q_1/p_1$ sea pequeño, el radical conduce a una cantidad imaginaria, la cual será representada por $\iota\nu$. Al sustituir en las ecuaciones de frecuencia se obtiene:

$$\iota w = - \frac{1}{2p_1} \pm \nu = - w_{1,2} \quad ; \quad \text{para} \quad w_{1,2} > 0$$

Para este problema, el desplazamiento, u, está dado por la función:

$$u = C_1\, e^{-v_1 t} + C_2\, e^{-v_2 t}$$

es decir, el movimiento resulta aperiódico. Aunque este modelo es el más usado en vibraciones en medios elásticos, es uno de los menos empleados para reproducir vibraciones en medios viscoelásticos.

6.4.2 Aplicación al sólido de tres parámetros

Este material resulta ser verdaderamente interesante y merece ser estudiado con detenimiento.

De las dos últimas columnas de la tabla 1.1 se puede extraer:

$$G(w) = \frac{q_0 + q_1 p_1 w^2}{q_0^2 + q_1^2 w^2} - \frac{i(q_1 - q_0 p_1)w}{q_0^2 + q_1^2 w^2}$$

y al sustituir en la ecuación (6.24) y multiplicar por el comun denominador, conduce a una expresión de cuarto grado en w:

$$(q_0 + p_1 q_1 w^2)w^2 - i(q_1 - q_0 p_1)w^3 - \frac{p_1}{ml}(q_0^2 + q_1^2 w_2) = 0 \qquad (6.25a)$$

Esta ecuación tiene cuatro raíces, lo que hace pensar que habrá cuatro modos de vibración. Sin embargo, si se usa la ecuación (2.40) para calcular G(w), se llega a la siguiente expresión:

$$G(w) = \frac{1 + p_1 i w}{q_0 + q_1 i w}$$

que al ser sustituida en (6.24) da lugar a una ecuación de tercer grado en w:

$$(1 + p_1 i w)w^2 - \frac{p_1}{ml}(q_0 + q_1 i w) = 0 \qquad (6.25b)$$

La diferencia entre (6.25a) y (6.25b) se debe a que la primera contiene una raiz extraña. G_1 y G_2 están definidas por el segundo miembro de (2.40), como las partes real e imaginaria de la deformabilidad compleja, G(w), respectivamente, mientras que w es una cantidad real.

La descomposición de G(w) en sus partes real e imaginaria, se consigue al multiplicar el numerador y el denominador de la ecuación (2.39) por $\sum q_k(-i)^k w^k$. Esta operación incrementa el grado del numerador en una unidad y la w hace que desaparezca la raiz extraña de (6.25a), la cual no tiene relación con el problema mecánico planteado.

Para hallar el movimiento del oscilador, es posible utilizar, en lugar de la expresión (6.24), la ecuación diferencial correspondiente , para ésto se emplea a (6.22). Como ecuación constitutiva del material se usa la ecuación diferencial (2.8c):

$$P\sigma = Q\epsilon$$

En el lado derecho se introduce la deformación, ϵ, obtenida de (6.20) y en el lado izquierdo, la deformación obtenida de (6.19). De esta manera:

$$\sigma = \frac{F}{A} = -\frac{M}{A}\ddot{u}$$

De lo anterior se obtiene:

$$-\frac{m}{A}P(\ddot{u}) = \frac{1}{l}Q(u) \qquad (6.26)$$

Así, P es un operador de orden (m) y Q es un operador de orden (n < m+2) y la ecuación (6.26) resulta ser una ecuación diferencial de orden (m+2).

Al revisar las ecuaciones diferenciales listadas en la tabla 1.1, se puede concluir que para el fluido de Newton y para el sólido de Kelvin las ecuaciones resultan de segundo orden, al igual que para un sólido elástico. Para el fluido de Maxwell y el sólido de cuatro parámetros, las ecuaciones serán de tercer orden y para el modelo de Burgers, la ecuación de movimiento resulta ser de cuarto orden.

Para poder obtener una solución única, se requiere que el número de condiciones iniciales del problema coincida con el orden de la ecuación diferencial de movimiento del mismo. En todo problema dinámico, se conocen los valores iniciales de u y $\dot{u}$, sin embargo, en ocasiones puede que haga falta conocer otros valores iniciales para obtener la solución del problema.

A fín de ilustrar el procedimiento, se estudiará la respuesta del modelo de Maxwell, asociado a una masa.

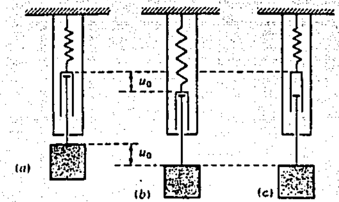


Fig. 6.5 Oscilador simple con resorte maxwelliano

La Fig. 6.5 muestra el oscilador en tres posiciones; en la Fig. 6.5a el sistema está en la posición de reposo, la posición de la Fig. 6.5b se obtiene al tirar de la masa suavemente. Cuando el amortiguador no ha tenido tiempo de deformarse,el resorte permanece en su estado inicial. Una vez que la masa se detiene, se logra la condición $\dot{u} = 0$, entonces, el resorte empieza a estirarse y se crea una vibración. La deformación del amortiguador en el tiempo, permite el abatimiento gradual de la energía del sistema, al disiparla por fricción viscosa.

El sistema de la Fig. 6.5a puede alcanzar la posición de la Fig. 6.5b, al tirar de la masa muy suavemente y la deformación completa estará dada por el desplazamiento del amortiguador. Si se fija la masa en una posición tal que $\dot{u} = 0$ y luego se suelta, no pasará nada, el oscilador permanecerá en su posición de reposo.

En ambos casos, se tendrá que para $t = 0$, $u = 0$ y $\dot{u} = 0$ y la diferencia se ubicará en la junta interna entre el resorte y el amortiguador.

En la Fig. 6.5b, la deformación repentina, $\epsilon_o = u_o/l$, produce un esfuerzo, $\sigma_o = E_o\epsilon_o$, por tanto, se origina una aceleración, $\ddot{u} = E_oA\epsilon_o/m$, mientras que en la Fig. 6.5c no hay fuerza aplicada, por lo que la aceleración, $\ddot{u}$, resulta ser nula.

A continuación se resolverá la ecuación de equilibrio dinámico (6.26) para cada modelo, a fín de hallar las frecuencias naturales de vibración correspondientes.

6.4.3 Aplicación al modelo de Newton:

De la tabla 1.1 se extrae:

$$\sigma = q_1\dot{\epsilon}$$

que es la relación constitutiva del modelo y que puede ser escrita como:

$$(1)\sigma = q_1 \frac{d}{dt} \epsilon$$

De la ecuación (2.8c) se obtienen los operadores:

$$P = 1 \qquad \text{y} \qquad Q = q_1\frac{d}{dt}$$

De sustituir (6.19) y (6.20) en la ecuación (2.8c) e introducir el resultado en (6.26) se llega a:

$$\frac{m}{A}\ddot{u} + \frac{q_1}{l}\frac{d}{dt}u = 0$$

ó bien;

$$\ddot{u} + \frac{q_1A}{ml}\frac{d}{dt}u = 0 \qquad (6.27)$$

que es la ecuación de equilibrio dinámico del modelo.

La ecuación (6.27) es una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes, de segundo grado, por tanto, acepta la solución:

$$
\begin{aligned}
u &= e^{vt} \\
\dot{u} &= we^{vt} \\
\ddot{u} &= w^2e^{vt}
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

Sustituir esta solución en la expresión (6.27) conduce a:

$$
\begin{aligned}
w^2 + \frac{q_1}{l}\,w &= 0 \\
w(w + \frac{q_1}{l}) &= 0
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

Las raíces de la ecuación (6.29) resultan ser:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= 0 \\
w_2 &= -\frac{q_1 A}{ml}
\end{aligned}
$$

lo anterior conduce a la solución:

$$
\begin{aligned}
u &= (C_1\, e^{w_1 t} + C_2\, e^{w_2 t}) \\
u &= C_1 + C_2\, e^{-q_1 At/(ml)}
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

Si se toma como condiciones iniciales, para $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
u &= u_o \\
\dot{u} &= \frac{du_o}{dt} = v_o
\end{aligned}
$$

entonces;

$$
\begin{aligned}
u_{o\,t=0} &= C_1 + C_2 \\
\dot{u}_{o\,t=0} &= C_1 w_1 + C_2 w_2 = -\frac{q_1 A}{ml}\,C_2
\end{aligned}
$$

por tanto, las constantes C_1 y C_2 resultan ser:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= u_o + u\,(\frac{ml}{Aq_1}) \\
C_2 &= -\frac{uml}{Aq_1}
\end{aligned}
$$

Al sustituir las constantes en la ecuación (6.30) se obtiene:

$$u(t) = \dot{u}_o + u\left(\frac{ml}{Aq_1}\right)\left(1 - e^{-q_1At/(ml)}\right)$$

6.4.4 Aplicación al modelo de Kelvin

La relación constitutiva que caracteriza al modelo es:

$$\sigma = q_o\,\epsilon + q_1\,\dot{\epsilon}$$

que también se puede escribir como:

$$(1)\sigma = \left(q_o + \frac{d}{dt}\right)\epsilon \qquad (6.31)$$

De la ecuación (6.31), los operadores diferenciales resultan ser:

$$P = 1 \qquad y \qquad Q = \left(q_o + \frac{d}{dt}\right)$$

De seguir un procedimiento análogo al del modelo anterior, se obtiene que la ecuación de equilibrio dinámico para este material es:

$$\frac{m}{A}\ddot{u} + \frac{q_1}{l}\dot{u} + \frac{q_o}{l}u = 0 \qquad (6.32)$$

la cual ,resulta una ecuación homogénea de coeficientes constantes de segundo orden, cuya solución está dada por:

$$u = e^{wt}$$
$$\dot{u} = we^{wt}$$
$$\ddot{u} = w^2e^{wt}$$

y al ser sustituida en (6.32) conduce a:

$$w^2 + \frac{q_1Aw}{ml} + \frac{q_oA}{ml} = 0 \qquad (6.33)$$

Al resolver la ecuación (6.33) se obtienen las raíces:

$$w_{1,2} = -\frac{q_1A}{2ml} \pm \sqrt{\frac{q_1^2A^2}{4m^2l^2} - \frac{q_oA}{ml}} \qquad (6.34)$$

La expresión anterior muestra que existen tres alternativas:
Cuando

$$\frac{q_1^2A^2}{4m^2l^2} > \frac{q_oA}{ml}$$

la frecuencia, w, resulta ser un término real. Si se denota el radical con el símbolo ν, la frecuencia será:

$$w_{1,2} = -\frac{q_1 A}{2ml} \pm \nu$$

y conduce a una amplitud de desplazamiento, u(t);

$$u = e^{-q_1 A/(2ml)}(C_1 e^{\nu t} + C_2 e^{\nu t}) \qquad (6.34)$$

y se dice que el sistema es superamortiguado en vibración libre, es decir, no habrá vibración.

Cuando

$$\frac{q_1^2 A^2}{4m^2 l^2} = \frac{q_o A}{ml}$$

la frecuencia estará dada por:

$$w_{1,2} = -\frac{q_1 A}{2ml}$$

y la amplitud del desplazamiento, resulta:

$$u = e^{-q_1 A/(2\nu l)}$$

Se tiene así, la condición de amortiguamiento crítico, para la cual el sistema no vibra.

Cuando;

$$\frac{q_1^2 A^2}{4m^2 l^2} < \frac{q_1 A}{2ml}$$

la frecuencia natural de vibración está dada por:

$$w_{1,2} = -\frac{q_1 A}{2ml} \pm i\nu$$

donde; $i\nu$ representa al radical, el cual resulta ser imaginario. Esta frecuencia conduce a la siguiente expresión para la amplitud de desplazamiento:

$$u = e^{-q_1 A t/(2ml)}(C_1 e^{i\nu t} + C_2 e^{-i\nu t}) \qquad (6.35)$$

Esta ecuación representa la vibración libre amortiguada del sistema y también se puede escribir como:

$$u = e^{-q_1At/(2ml)}(\beta_1 \cos \nu t + \beta_2 \operatorname{sen} \nu t)$$

Al establecer las condiciones iniciales , para t=0;

$$u = 0$$
$$\dot{u} = \frac{du_o}{dt} = v_o$$

se obtiene;

$$u_o\Big|_{t=0} = C_1 + C_2$$
$$\dot{u}_o\Big|_{t=0} = C_1\left(-\frac{q_1A}{2ml} + i\nu\right) + C_2\left(-\frac{q_1A}{2ml} - i\nu\right)$$

De lo anterior resulta:

$$C_1 = \frac{\dot{u}_o}{2i\nu} + u\left(\frac{q_1A}{4i\nu ml} + \frac{1}{2}\right)$$

$$C_2 = -\frac{\dot{u}_o}{2i\nu} + u\left(\frac{q_1A}{4i\nu ml} + \frac{1}{2}\right)$$

Al sustituir las constantes C_1 y C_2 en la ecuación (6.35) se obtiene la función que describe la amplitud de desplazamiento del sistema.

$$u = e^{-q_1At/(2ml)}\left[\left(\frac{\dot{u}_o}{2i\nu} + u_o\left(\frac{q_1A}{4i\nu ml} + \frac{1}{2}\right)\right)e^{i\nu t} + \right.$$
$$\left. +\left(-\frac{\dot{u}_o}{2i\nu} - u_o\left(\frac{q_1A}{4i\nu ml} - \frac{1}{2}\right)\right)e^{i\nu t}\right] \quad (6.36)$$

6.4.5 Sólido de tres parámetros en vibración libre

Para este material, la relación constitutiva es:

$$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_o\epsilon + q_1\dot{\epsilon}$$

que también se puede escribir como:

$$(1)\sigma + p_1 \frac{d}{dt}\sigma = (q_o + q_1 \frac{d}{dt})$$

Por tanto;

$$P = (1 + p_1 \frac{d}{dt}) \qquad y \qquad Q = (q_0 + q_1 \frac{d}{dt})$$

De seguir el procedimiento anterior, se obtiene la ecuación de equilibrio dinámico del sistema:

$$\frac{m}{A} p_1 \dddot{u} + \frac{m}{A} \ddot{u} + \frac{q_1}{l} \dot{u} + \frac{q_0}{l} u = 0 \qquad (6.37)$$

La ecuación diferencial (6.37) acepta la solución propuesta para los ejemplos anteriores. De lo anterior se obtiene:

$$w^3 + \frac{1}{p_1} w^2 + \frac{q_1 A}{p_1 m l} + \frac{q_0 A}{p_1 m l} = 0 \qquad (6.38)$$

Cualquier ecuación cúbica de la forma:

$$Y^3 + p\,Y^2 + q\,Y + r = 0 \qquad (a)$$

podrá ser reducida a otra ecuación como:

$$X^3 + \alpha X + b = 0 \qquad (b)$$

al sustituir $Y = (X - p/3)$ en la expresión (a).

La solución algebráica de (b), se consigue al suponer;

$$A = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{(b/2)^2 + (a/3)^3}}$$

$$B = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{(b/2)^2 + (a/3)^3}}$$

de esta forma, las raíces de la ecuación serán:

$$X_1 = A + B$$

$$X_2 = -\frac{A + B}{2} + \frac{A - B}{2}\sqrt{-3} \qquad (6.39)$$

$$X_3 = -\frac{A + B}{2} - \frac{A - B}{2}\sqrt{-3}$$

Al observar las raíces (6.39) se puede ver que existen tres posibilidades para definir la naturaleza de las mismas;

Si $[(b/2)^2+(a/3)^3] > 0$, existirá una raiz real y dos raíces conjugadas imaginarias.

Si $[(b/2)^2+(a/3)^3] = 0$, habrá tres raíces reales , de las cuales dos serán iguales.

Si $[(b/2)^2+(a/3)^3] < 0$, resultarán tres raíces reales y diferentes.

Para asegurar la existencia de vibración, se escoge la primera condición, en la cual, la raíz real quedará representada por ; $w_1 = R_1 + \nu_1$, y las raíces conjugadas imaginarias por; $w_{2,3} = R_2 \pm i\nu$.

De este modo, la amplitud del desplazamiento está dada por:

$$u = e^{R_1 t}(C_1 e^{\nu_1 t}) + e^{R_2 t}(C_2 e^{i\nu t} + C_3 e^{-i\nu t}) \qquad (6.40)$$

Al sustituir las condiciones iniciales siguientes:

$$u_{t=0} = u_0$$

$$\dot{u}_{t=0} = \frac{du_0}{dt} = v_0$$

$$\ddot{u}_{t=0} = \frac{d^2u_0}{d^2t} = \alpha_0$$

se llega al sistema de ecuaciones:

$$u_0 = C_1 + C_2 + C_3$$

$$\dot{u}_0 = (R_1+\nu_1)C_1 + (R_2+i\nu)C_2 + (R_2-i\nu)C_3$$

$$\ddot{u}_0 = (R_1+\nu_1)^2C_1 + (R_2+i\nu)^2C_2 + (R_2-i\nu)^2C_3 \quad ,$$

el cual debe ser resuelto a fin de encontrar el valor de las constantes C_1, C_2 y C_3.

De lo anterior se obtiene:

$$C_1 = u_0 - \left(\frac{\ddot{u} - \dot{u}_0 + u_0 w_1(1-w_1)}{w_2 - w_1}\right) - \left(\frac{\dot{u}_0 - u_0 w_1}{w_3 - w_1}\right)$$

$$C_2 = \frac{\ddot{u}_0 - \dot{u}_0 + u_0 w_1(1-w_1)}{w_2 - w_1}$$

$$C_3 = \frac{\dot{u}_0 - u_0 w_1}{w_3 - w_1}$$

que al sustituirse en (6.45) conduce a la siguiente solución:

$$u = \left\{ \left[u_o - \left(\frac{\ddot{u}_o - \dot{u}_o + u_o w_1 (1 - w_1)}{w_2 - w_1} \right) - \left(\frac{\dot{u}_o - u_o w_1}{w_3 - w_1} \right) \right] e^{w_1 t} + \left[\frac{\ddot{u}_o - \dot{u}_o + u_o w_1 (1 - w_1)}{w_2 - w_1} \right] e^{w_2 t} + \left[\frac{\dot{u}_o - u_o w_1}{w_3 - w_1} \right] e^{w_3 t} \right\} \qquad (6.41)$$

La ecuación (6.41) describe el desplazamiento , u, del sistema en vibración libre para una barra representada por un sólido de tres parámetros.

6.4.6 Aplicación al modelo de Burgers

De la tabla 1.1 se obtiene:

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \ddot{\epsilon}$$

ó bien;

$$(1)\sigma + p_1 \frac{d}{dt} \sigma + p_2 \frac{d^2}{dt^2} \sigma = q_1 \frac{d}{dt} \epsilon + q_2 \frac{d^2}{dt^2} \epsilon$$

de lo que resultan los operadores:

$$P = \left(1 + p_1 \frac{d}{dt} + p_2 \frac{d^2}{dt^2} \right)$$

$$Q = \left(q_1 \frac{d}{dt} + q_2 \frac{d^2}{dt^2} \right)$$

que al ser sustituidos en la ecuación (6.26) conducen a la siguiente ecuación diferencial en u:

$$\overset{\cdots\cdot}{u} + \frac{p_1}{p_2} \dddot{u} + \left(\frac{1}{p_2} + \frac{q_2 A}{m\, l} \right) \ddot{u} + \frac{q_1 A}{m\, l} \dot{u} = 0 \qquad (6.42)$$

La ecuación (6.42) acepta la solución:

$$u = e^{wt} \qquad \dddot{u} = w^3 e^{wt}$$

$$\dot{u} = w e^{wt} \qquad \overset{\cdots\cdot}{u} = w^4 e^{wt}$$

$$\ddot{u} = w^2 e^{wt}$$

que cuando se sustituye en la ecuación (6.42), permite obtener la expresión:

$$w^4 + \frac{p_1}{p_2} w^3 + \left(\frac{1}{p_2} + \frac{q_2 A}{m\, l} \right) w^2 + \frac{q_1 A}{m\, l} w = 0 \qquad (6.43)$$

La ecuación (6.43) tiene la raiz $w = 0$, que se obtiene al sacar a w como factor común, ésto permite reducir la expresión anterior a:

$$w^3 + \frac{p_1}{p_2} w^2 + \left(\frac{1}{p_2} + \frac{q_2 A}{m\, l}\right) w + \frac{q_1 A}{m\, l} = 0$$

La aplicación de un procedimiento análogo al empleado en los ejemplos anteriores, conduce a la ecuación:

$$u = C_1 e^{w_1 t} + C_2 e^{w_2 t} + C_3 e^{w_3 t} + C_4 \qquad (6.44)$$

donde:

w_1 : raiz real diferente de cero representada por:

$$w_1 = R_1 + \nu_1$$

w_2 y w_3: raíces conjugadas imaginarias descritas como:

$$w_{2,3} = R_2 \pm i\nu$$

w_4: raiz nula de la ecuación (6.43)

Al sustituir las condiciones iniciales;

$$u_{t=0} = u_0$$

$$\dot{u}_{t=0} = \frac{du_0}{dt} = v_0$$

$$\ddot{u}_{t=0} = \frac{d^2 u_0}{dt^2} = \alpha_0$$

$$\dddot{u}_{t=0} = \frac{d^3 u_0}{dt^3} = \alpha_0'$$

se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$u_0 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$
$$\dot{u}_0 = w_1 C_1 + w_2 C_2 + w_3 C_3$$
$$\ddot{u}_0 = w_1^2 C_1 + w_2^2 C_2 + w_3^2 C_3$$
$$\dddot{u}_0 = w_1^3 C_1 + w_2^3 C_2 + w_3^3 C_3$$

que al ser resuelto, proporciona el valor de las constantes:

$$C_1 = \dddot{u}\left[-\frac{1}{w_2-w} - \left(-\frac{1}{w_2 w_3} - \frac{(w_3-w_1)+(w_2-w_1)}{w_3^2(w_3-w_2-w_1)} + \frac{1}{w_3 w_2 w_1}\right)\right] +$$

$$+ \ddot{u}_o\left[-\frac{1}{w_2-w}\left(\frac{1}{w_2} + \frac{(w_2-w_1)}{(w_3-w_2)} + \frac{(w_2+w_1)(2w_1-w_3)+(w_2^2-w_1^2)}{w_3^2(w_3-w_1-w_2)}\right) +\right.$$

$$\left. - \frac{1}{w_1 w_2}\left(1 + \frac{(w_2+w_1)}{w_3} + \frac{(w_1+w_2)w_1 w_2}{w_3^2(w_3-w_2-w_1)}\right)\right] + \dot{u}_o\left[-\frac{1}{(w_2-w_1)} *\right.$$

$$*\left(-\frac{(w_2-w_1)}{w_3} + \frac{w_1}{w_2} + \frac{(w_1-(w_3-w_1)w_1 w_2}{w_3^2(w_3-w_2-w_1)} + 1\right) - \frac{-w_1 w_2}{w_3^2(w_3-w_2-w_1)} +$$

$$\left. + \frac{1}{w_1 w_2}\left((w+w_1) + \frac{w_1 w_2}{w_3} + \frac{w_1 w_2}{w_3^2(w_3-w_2-w_1)}\right)\right] \qquad (6.45a)$$

$$C_2 = \frac{1}{(w_2-w_1)}\left[\dddot{u}_o\left(-\frac{1}{w_2 w_3} - \frac{(w_3-w_1)}{w_3^2(w_3-w_2-w_1)}\right) + \ddot{u}_o\left(\frac{1}{w_2} + \frac{(w_2+w_1)}{w_2 w_3} +\right.\right.$$

$$(6.45b)$$

$$\left.\left. + \frac{(w_2+w_1)(w_1-(w_3-w_1))}{w_3^2(w_3-w_2-w_1)}\right) + u_o\left(-\frac{(w_2+w_1)}{w_2} + \frac{w_1}{w_2} + \frac{(w_1-(w_3-w_1)w_1 w_1)}{w_3^2(w_3-w_2-w_1)} + 1\right)\right]$$

$$C_3 = \frac{\dddot{u} - \ddot{u}_o(w_2+w_1) + \dot{u}_o w_1 w_2}{w_3^2(w_3-w_2-w_1)} \qquad (6.45c)$$

$$C_4 = -\frac{\dddot{u}_o}{(w_3 w_2 w_1)} + \frac{\ddot{u}_o}{w_1 w_2}\left(1 + \frac{(w_2+w_1)}{w_3} + \frac{(w_2+w_1)w_1 w_2}{w_3^2(w_3-w_2-w_1)}\right) - \frac{\dot{u}_o}{w_1 w_2} *$$

$$*\left((w_2+w_1) + \frac{w_1 w_2}{w_3} + \frac{w_1 w_2}{w_3^2(w_3-w_2-w_1)}\right) + u_o \qquad (6.45d)$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (6.44) , se obtiene la expresión correspondiente a la amplitud de desplazamiento, u, para este modelo.

CAPITULO VII

RESPUESTA VISCOELASTICA ANTE EXCITACIONES CONOCIDAS

7.1 Vibraciones Forzadas

Como se ha visto hasta ahora, las vibraciones libres de un oscilador compuesto por materiales viscoelásticos, serán siempre amortiguadas, es decir, la solución, w , de la ecuación de frecuencia (6.24) debe ser compleja, con una parte imaginaria positiva.

Considérese que ahora se le aplica a la misma masa, una fuerza externa:

$$P = P_o e^{iw_o t} \tag{7.1}$$

como se muestra en la Fig. 7.1, con una frecuencia arbitraria , w_o.

La amplitud P_o de esta *fuerza impulsora* podrá ser compleja, es decir, la parte real de P podrá contener tanto un término en seno como en coseno.

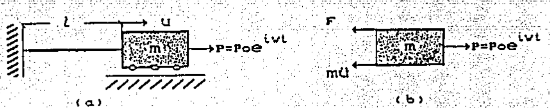


Fig. 7.1 Vibración forzada de un oscilador viscoelástico simple.

A partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la Fig. 7.1b, se puede notar como esta fuerza modifica a la ecuación de equilibrio dinámico (6.19), la cual se puede escribir ahora como:

$$m\ddot{u} + F = P_o\, e^{iw_o t} \tag{7.2}$$

Cuando la ecuación (7.2) se combina con (6.20) y con (2.8c) se llega a obtener una ecuación diferencial no homogénea, equivalente a la expresión (6.26):

$$\frac{m}{A} P(\ddot{u}) + \frac{1}{l} Q(u) = P_o e^{iw_o t} \tag{7.3}$$

Por tanto, la solución que satisface a esta ecuación, resulta ser la solución particular del problema, mientras que la solución homogénea corresponde a la encontrada para vibración libre en el capítulo anterior.

La ecuación (7.3) acepta:

$$u = u_o e^{iw_o t} \tag{7.4}$$

y sus derivadas.

Esta solución describe el movimiento que se desarrolla en el oscilador, una vez que la vibración libre decae debido al amortiguamiento.

Si se introducen las expresiones (6.20) y (2.37) en la ecuación 7.2), se puede efectuar un desarrollo para hallar la expresión que define a la amplitud del desplazamiento, así como la velocidad:

$$\epsilon_o = \frac{u_o}{l} \tag{7.5a}$$

$$\epsilon_o = G(w_o)\sigma_o \tag{7.5b}$$

De (7.2) se puede escribir:

$$A\frac{F}{A} = P_o e^{iw_o t} - m\ddot{u}$$

donde:

$$\frac{F}{A} = \sigma \qquad y \qquad \sigma = \sigma_o e^{iw_o t}$$

Al sustituir las expresiones de σ en (7.2) se obtiene:

$$A = P_o + m w_o^2 u_o$$

Por tanto;

$$\sigma_o = \frac{P_o + w_o^2 u_o m}{A} \tag{7.6}$$

Al sustituir (7.5a) y (7.6) en la ecuación (7.5b), se llega a la relación:

$$\frac{u_o}{l} = \frac{G(w_o)}{A}(P_o + w_o^2 u_o m)$$

ó bien;

$$u_o = [\frac{G(w_o)P}{A} + \frac{G(w_o)w_o^2 u_o m}{A}]L \tag{7.7}$$

De la ecuación (6.24) se obtiene:

$$w^2 G(w) = A/(ml)$$

a partir de lo cual, la expresión (7.7) se puede escribir como:

$$u_o = \frac{P_o}{m} \frac{G(w_o)}{w^2 G(w) - w_o^2 G(w_o)} \quad (7.8a)$$

Esta ecuación define la amplitud del desplazamiento del oscilador sometido a vibración forzada.

De lo anterior , se obtiene que la amplitud de la velocidad está dada por:

$$v_o = \frac{\dot{u}}{e^{iw_o t}} = \frac{i w_o P_o}{m} \frac{G(w_o)}{w^2 G(w) - w_o^2 G(w_o)} \quad (7.8b)$$

donde:

- P_o : Amplitud de la fuerza excitadora.
- w : Frecuencia natural de vibración de sistema , en vibración libre.
- w_o : Frecuencia arbitraria de aplicación de la fuerza P.
- $G(w_o)$: Deformabilidad compleja del material viscoelástico a la frecuencia , w_o.
- $G(w)$: Deformabilidad compleja del material viscoelástico a la frecuencia, w.

Nótese que $w^2 G(w)$, resulta ser una cantidad real, mientras que w debe ser compleja para que exista vibración.

7.2 Admitancia e Impedancia

La *admitancia* se define como la amplitud de velocidad que produce una fuerza unitaria. Esta describe la respuesta de un oscilador sobre el cual se aplica una fuerza excitadora de naturaleza periódica y se representa por el símbolo $\mathcal{A}$.

La admitancia , $\mathcal{A}$, del sistema, será una cantidad compleja. De este modo, puede ser escrita como:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2 \quad (7.9)$$

y de acuerdo con su definición queda expresada por:

$$\mathcal{A} = \frac{v_o}{P_o} = \frac{1}{m} \frac{i w_o G(w_o)}{w^2 G(w) - w_o^2 G(w_o)} \quad (7.10a)$$

La *impedancia* de un oscilador se define como la fuerza necesaria para producir una velocidad unitaria. Es una cantidad recíproca a la admitancia, de naturaleza compleja y se representa por: $1/\mathscr{A}$, cuya ecuación se puede escribir como:

$$\frac{1}{\mathscr{A}} = \frac{P_o}{v_o} = m\,\frac{w^2G(w) - w_o{}^2G(w_o)}{i\,w_oG(w_o)} \tag{7.10b}$$

7.3 Aplicación a modelos específicos

En esta sección se intenta obtener la respuesta de los modelos viscoelásticos más comunes ante la excitación que les produce una fuerza oscilatoria de la forma:

$$P = P_oe^{iw_ot}$$

aplicada axialmente sobre una masa, m, a una frecuencia conocida, w_o.

El oscilador , en todos los ejemplos, será igual al representado por la Fig. 7.1.

7.3.1 Aplicación al modelo de Newton

De la tabla 1.1 se obtiene:

$$G_1(w) = 0 \qquad y \qquad G_2(w) = -1/(q_1w)$$

de lo cual, se obtienen las expresiones:

$$G(w) = -i/(q_1w) \qquad y \qquad G(w_o) = -i/(q_1w_o)$$

Al sustituir lo anterior en la ecuación (7.8a), se encuentra que la amplitud de desplazamiento es:

$$u_o = \frac{P_o}{m}\,\frac{w}{w_o\,(w^2 - w_o{}^2)} \tag{7.11}$$

Por tanto, la amplitud de la velocidad del sistema resulta ser:

$$v_o = \frac{i\,w\,P_o}{m\,(w^2 - w_o{}^2)} \tag{7.12}$$

obtenida a partir de la ecuación (7.8b).

La admitancia de este modelo se define por:

$$\mathscr{A} = \frac{i\,w}{m\,(w^2 - w_o{}^2)} \tag{7.13}$$

De lo anterior, se encuentra que la solución particular del problema está dada por:

$$u(t)_p = \left(\frac{Po}{m}\frac{w}{wo\,(w^2 - wo^2)}\right)e^{iwot} \qquad (7.14)$$

a la cual se debe sumar la solución obtenida para vibración libre, que es la solución homogénea del problema, para obtener:

$$u(t) = uo + \dot{u}o\left(\frac{ml}{Aq_1}\right)(1-e^{-q_1At/(ml)}) + \left(\frac{Po}{m}\frac{w}{wo\,(w^2 - wo^2)}\right)e^{iwot} \qquad (7.15)$$

donde; uo y u̇o son funciones descritas por las condiciones iniciales del problema de vibración libre.

7.3.2 Aplicación al modelo de Maxwell

De la ecuación (4.8) se obtiene que la deformabilidad compleja de este fluido es:

$$G(w) = \frac{1 + iwp_1}{(iwq_1)}$$

Por tanto;

$$G(wo) = \frac{1 + iwop_1}{(iwoq_1)}$$

Al aplicar sobre el oscilador, una fuerza excitadora igual a:

$$P = Poe^{iwot}$$

se obtiene, a partir de (7.8a) la amplitud de desplazamiento del sistema:

$$uo = \frac{Po}{m}\frac{(1 + iwop_1)}{wo[w(1+iwp_1) - wo(1+iwop_1)]}$$

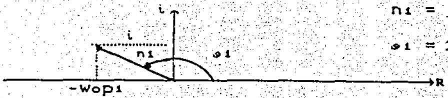
Al multiplicar el numerador y el denominador de la expresión anterior por:

$$[(1-iwp_1) - (1-iwop_1)]$$

se obtiene la ecuación:

$$uo = \frac{Po}{m}\frac{(i-wop_1)}{-wo(wo-w)(i-wop_1-w)}$$

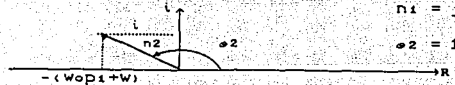
Si se utiliza un sistema de ejes coordenados tal; que en el eje de las abcisas, R, se representen las partes reales de los términos complejos de la expresión anterior y en el eje de las ordenadas, i, las partes imaginarias de los mismos, como muestra la Fig. 7.2, se consigue el resultado para u_o.



$$n_1 = \sqrt{1+w_o^2 p_1^2}$$

$$\phi_1 = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{1}{w_o\, p_1}\right)$$

(a) Solución al numerador



$$n_1 = \sqrt{1+(w_o p_1+w)^2}$$

$$\phi_2 = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{1}{w_o p_1+w}\right)$$

(b) solución al denominador

Fig. 7.2 Solución compleja a Uo

De aqui;

$$u_o = -\frac{P_o}{m}\;\frac{(1+w_o^2 p_1^2)^{(1/2)}\; e^{i\phi_1}}{w_o(w_o-w)(1+(w_o p_1+w)^2)^{(1/2)}\; e^{i\phi_2}}$$

Por tanto, la solución particular del problema está dada por:

$$u(t)_p = -\frac{P_o}{m}\;\frac{(1+w_o^2 p_1^2)^{(1/2)}}{w_o(w_o-w)(1+(w_o p_1+w)^2)^{(1/2)}}\; e^{i(w_o t+\phi_1-\phi_2)} \qquad (7.16)$$

donde; ϕ_1 y ϕ_2 son los ángulos de fase de la respuesta con respecto a la excitación aplicada.

La solución total al problema consiste en la suma de la solución homogénea, que es la respuesta del modelo en vibración libre, y la solución particular. De aquí:

$$u(t) = e^{-t/(2p_1)}(C_1 e^{i\nu t} + C_2 e^{i\nu t}) - \frac{P_o}{w_o(w_o-w)m} \;*$$

$$*\;\frac{(1+(w_o^2 p_1^2))^{(1/2)}}{(1+(w_o p_1+ w)^2)^{(1/2)}}\; e^{i(w_o t+\phi_1-\phi_2)} \qquad (7.17a)$$

para la solución homogénea (6.11a);

$$u(t) = (C_1 e^{-w_1 t} + C_2 e^{-w_2 t}) - \frac{P_o}{w_o(w_o-w)m} * $$
$$* \frac{(1+(w_o{}^2 p_1{}^2))^{(1/2)}}{(1+(w_o p_1 + w)^2)^{(1/2)}} e^{i(w_o t+\phi_1-\phi_2)} \qquad (7.17b)$$

para la solución homogénea (6.11b)

7.3.3 Aplicación al modelo de Kelvin

De la ecuación (4.18) se obtiene:

$$G(w) = \frac{1}{q_o + q_1 i w}$$

Por tanto;

$$G(w_o) = \frac{1}{q_o + q_1 i w_o}$$

Al sustituir los valores anteriores en la ecuación (7.8a), se obtiene la expresión para la amplitud del desplazamiento de la solución particular:

$$u_o = \frac{P_o}{m} \frac{(q_o + q_1 i w)}{w^2(q_o+q_1 i w_o) - w_o{}^2(q_o+q_1 i w)} \qquad (7.18)$$

De separar en la ecuación (7.18) los términos del denominador en sus partes real e imaginaria resulta:

$$u_o = \frac{P_o}{m} \frac{(q_o + q_1 i w)}{(w^2 - w_o{}^2)q_o + q_1\, w\, w_o(w-w_o)i} \qquad (7.19)$$

y al darle un tratamiento complejo como el que se indica en la Fig. 7.2 y hacer las sustituciones adecuadas conduce a la siguiente solución particular :

$$u(t)_p = \frac{P_o}{m} \frac{(q_o{}^2 + q_1{}^2 w^2)^{(1/2)} e^{i(w_o t+\phi_1-\phi_2)}}{w_o{}^2(q_o{}^2((\frac{w}{w_o})^2-1)^2 + q_1{}^2 w^2(\frac{w}{w_o} - 1)^2} \qquad (7.20)$$

Para obtener la solución completa, debe sumarse la ecuación (7.20) a la solución homogénea, correspondiente a la respuesta en vibración libre del sistema:

$$u(t) = e^{-q_1At/(2ml)}\left[\left(\frac{\dot{u}_o}{2i\nu} + u_o\left(\frac{q_1A}{4i\nu ml} + \frac{1}{2}\right)\right)e^{i\nu t} + \right.$$

$$\left. +\left(-\frac{\dot{u}_o}{2i\nu} - u_o\left(\frac{q_1A}{4i\nu ml} - \frac{1}{2}\right)\right)e^{i\nu t}\right] +$$

$$+ \frac{P_o}{m}\,\frac{(q_o^2 + q_1^2w^2)^{(1/2)}\;e^{i(W_ot+\phi_1-\phi_2)}}{w_o^2(q_o^2((\frac{w}{w_o})^2-1)^2+q_1^2w^2(\frac{w}{w_o}-1)^2} \qquad (7.21)$$

7.3.4 Aplicación al sólido de tres parámetros

De la ecuación (4.26) se obtiene la deformabilidad compleja de este material:

$$G(w) = \frac{1+p_1iw}{q_o+q_1iw}$$

de aquí que:

$$G(w_o) = \frac{1+p_1iw_o}{q_o+q_1iw_o}$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (7.8a), se obtiene la amplitud del desplazamiento:

$$u_o = \frac{P_o}{m}\,\frac{(1+p_1iw_o)\,(q_o+q_1iw)}{w^2(1+p_1iw)(q_o+q_1iw_o)-w_o^2(1+p_1iw_o)(q_o+q_1iw)}$$

De separar en el numerador y en el denominador de la expresión anterior, los términos reales e imaginarios, se obtiene:

$$u_o = \frac{P_o}{m}\,\frac{(q_o-q_1p_1w_ow)+(q_1w+q_op_1w_o)i}{(w^2-w_o^2)(q_o-q_1p_1w_ow)+(w^3-w_o^3)q_op_1i+ww_oq_1i(w-w_o)} \qquad (7.22)$$

Al resolver la ecuación (7.22) mediante el procedimiento mostrado en la Fig. 7.2, y hacer las sustituciones adecuadas, se obtiene la solución particular del problema, la cual está dada por:

$$u_p(t)=\frac{P_o\,((q_o-q_1p_1w_ow)^2+(q_1w+q_op_1w_o)^2)^{(1/2)}e^{i(w_ot+\phi_1-\phi_2)}}{m\,[((w^2-w_o^2)(q_o-q_1p_1w_ow))^2+((w^3-w_o^3)q_op_1i+ww_oq_1i(w-w_o))^2]^{1/2}}$$ (7.23)

La solución completa del problema estará dada por la suma de la ecuación (7.23) a la solución homogénea que corresponde a la respuesta del modelo en vibración libre , obtenida en el capítulo anterior. Lo anterior, conduce a:

$$u(t)=\frac{P_o\,((q_o-q_1p_1w_ow)^2+(q_1w+q_op_1w_o)^2)^{(1/2)}e^{i(w_ot+\phi_1-\phi_2)}}{m\,[((w^2-w_o^2)(q_o-q_1p_1w_ow))^2+((w^3-w_o^3)q_op_1i+ww_oq_1i(w-w_o))^2]^{1/2}}+$$

$$+\left\{\left[u_o-\left(\frac{\dot{u}_o-u_o+u_ow_1(1-w_1)}{w_2-w_1}\right)-\left(\frac{\dot{u}_o-u_ow_1}{w_3-w_1}\right)\right]e^{w_1t}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\ddot{u}_o-\dot{u}_o+u_ow_1(1-w_1)}{w_2-w_1}\right]e^{w_2t}+\left[\frac{\dot{u}_o-u_ow_1}{w_3-w_1}\right]e^{w_3t}\right\}$$ (7.24)

7.3.5 Aplicación al modelo de Burgers

De la ecuación (4.35) se obtiene:

$$G(w)=\frac{[(1-w^2p_2)+iwp_1]}{q_1iw-w^2q_2}$$

Por tanto;

$$G(w_o)=\frac{[(1-w_o^2p_2)+iw_op_1]}{q_1iw_o-w_o^2q_2}$$

Al sustituir los valores anteriores en la ecuación (7.8*a*) y separar los términos reales e imaginarios, se obtiene lo siguente:

Si

$$A=(w_o^2wp_2q_2-wq_2-p_1q_1w_o)+(q_1-w_o^2p_2q_1-w_owp_1q_1)i$$

$$B=w_o\{[(w_o^2-w^2)(p_1q_1-w_ow^2p_2q_2)]+[q_1(w-p_2w^3-w_o+p_2w_o^3)+$$
$$+q_2(w_o^2wp_1-w^2w_op_1)]i\}$$

entonces;

$$u_o=\frac{P_o}{m}*\left(\frac{A}{B}\right)$$

Al aplicar a la ecuación anterior el tratamiento complejo descrito en la Fig. 7.2, resulta lo siguiente:

Si

$$C = \sqrt{(w_o^2 w p_2 q_2 - w q_2 - p_1 q_1 w_o)^2 + (q_1 - w_o^2 p_2 q_1 - w_o w p_1 q_1)^2}$$

$$D = \{[(w_o^2 - w^2)(p_1 q_1 - w_o w^2 p_2 q_2)]^2 + [q_1(w - p_2 w^3 - w_o + p_2 w_o^3) +$$

$$+ q_2(w_o^2 w p_1 - w^2 w_o p_1)]^2\}^{(1/2)}$$

entonces, la solución particular del problema está dada por la expresión:

$$u(t)_p = \frac{P_o}{m} * (\frac{C}{D}) e^{i(Wot+\phi 1-\phi 2)}$$

De realizar la suma de la ecuación anterior con la solución homogénea, obtenida en el capítulo anterior para vibración libre, se obtiene:

$$u(t) = \frac{P_o}{m} * (\frac{C}{D}) e^{i(Wot+\phi 1-\phi 2)} +$$

$$+C_1 e^{W_1 t} + C_2 e^{W_2 t} + C_3 e^{W_3 t} + C_4 \quad (7.25)$$

donde; C_1, C_2, C_3 y C_4 son las constantes descritas por las ecuaciones (6.45), correspondientes a la respuesta del modelo de Burgers en vibración libre.

Puede observarse en las ecuaciones (7.15), (7.17), (7.21), (7.24) y (7.25), la respuesta de los modelos viscoelásticos ante una excitación conocida, $P = P_o e^{iwt}$, están dadas por una parte que corresponde a la respuesta en vibración libre, la cual está presente en los primeros instantes de excitación y que proporciona al sistema amortiguamiento, aún cuando la frecuencia de excitación se aproxime a cualquiera de las raíces que representan las frecuencias naturales de vibración del sistema. Sin embargo, al transcurrir un tiempo relativamente largo, el efecto de la vibración libre se atenúa. Es en ese momento, cuando la solución particular, correspondiente a la vibración forzada, adquiere significado, ya que pasa a ser la solución única del problema. Es decir, para un tiempo largo, cuando w_o se aproxime a cualquiera de las raíces de la frecuencia natural de vibración, se presentará el efecto de resonancia en el oscilador y se alcanzará la máxima amplitud de desplazamiento hasta presentarse la inestabilidad del sistema.

CAPÍTULO VIII

SOLUCIÓN VISCOELÁSTICA PARA UNA PROBETA DE ARCILLA DE LA CIUDAD DE MÉXICO BAJO ESFUERZOS CONSTANTES

Con la finalidad de corroborar la aplicabilidad de los desarrollos teóricos hechos en los capítulos precedentes a materiales reales, se escogió una muestra inalterada de arcilla, procedente de la zona del lago de la Ciudad de México. (Parque Ramón López Velarde, Delegación Benito Juárez).

Se aplicó sobre este material una serie de ensayes de laboratorio, a fin de conocer sus propiedades índice, su curva de compresibilidad y esfuerzo de preconsolidación. Adicionalmente, se siguió un programa de pruebas de consolidación en cámara triaxial para obtener la relación esfuerzo-deformación-tiempo, lo que condujo a la modelación teórica de esta arcilla, a la obtención de sus parámetros viscoelásticos y al cálculo teórico de la respuesta del material bajo carga axial cíclica.

Debe destacarse, que debido al enfoque que se le da a los materiales en este trabajo, el suelo fué considerado como un medio contínuo, lo cual obligó a trabajar en términos de esfuerzos totales y a que las consolidaciones fueran realizadas a esfuerzos menores al de preconsolidación, de este modo se garantiza la conservación de la estructura original del material; por esta misma razón, en las pruebas de consolidación a esfuerzo constante en cámara triaxial, no se utilizó la saturación por contrapresión y se ensayó, prácticamente, a la humedad natural de la muestra.

8.1 Material ensayado.

Los especímenes ensayados procedían de una misma muestra de arcilla inalterada , obtenida en un lugar de la zona del lago de la Ciudad de México, con un muestreador tipo Shelby de diámetro igual a 6 pulgadas.

El material resultó ser una arcilla de alta compresibilidad, CH, de consistencia suave y alto contenido de agua. Las características y propiedasdes índice se encuentran en las hojas de datos generales, en los apéndices B y C.

8.2 Programa de pruebas.

El programa de pruebas realizadas sobre este material consistió en lo siguiente.

a) Pruebas para la determinación de propiedades índice.
b) Prueba de consolidación unidimensional, para la obtención de la curva de compresibilidad y esfuerzo de preconsolidación del

material en el consolidómetro.
c) Prueba de consolidación isotrópica en cámara triaxial , para la obtención de la curva de compresibilidad y esfuerzo de preconsolidación. Los resultados de esta prueba fueron comparados con los obtenidos de la consolidación unidimensional.
d) Prueba de consolidación isotrópica en cámara triaxial bajo un esfuerzo isotrópico total constante , cuyo valor fué de aproximadamente el 33% del esfuerzo de preconsolidación de la muestra.
e) Prueba de consolidacion anisotropica en cámara triaxial bajo un esfuerzo axial total constante de aproximadamente el 33% del esfuerzo de preconsolidación de la muestra.

Las pruebas de los incisos (b) y (c) se realizaron una vez cada una y se obtuvo de ellas un esfuerzo de preconsolidación de; σ_p = 0.52 y 0.67 Kg/cm^2 respectivamente ,por lo que se tomó un σ_p promedio de 0.60 kg/cm^2. Los resultados de la prueba (b) aparecen en el apéndice B de este trabajo y los resultados de la prueba (c), en el apéndice C.

Las pruebas (d) y (e) fueron realizadas sobre la misma probeta de suelo, alternativamente, es decir, una después de la otra ,repitiéndose en este orden tres veces, sin interrupción o descarga axial, entre una y otra prueba. Esto se hizo con la finalidad de observar si la curva deformación-tiempo sufría alguna variación importante ó por el contrario, el comportamiento se mantenía , de ser así, se podría asegurar que la estructura del material no había sido alterada .

Como se muestra en el apéndice D y se explica más adelante, las pruebas (d) se realizaron con el objeto de hallar la componente volumétrica del tensor de deformaciones unitarias, mencionado en el capítulo I, y encontrar un modelo que se asemejara a la ley de variación de la deformación en el tiempo, en condiciones isotrópicas.

En el apéndice E, aparecen los resultados de las pruebas (e), los cuales condujeron a la modelación teórica de la respuesta de una probeta cilíndrica del material bajo esfuerzo axial total uniformemente constante y que permitió, al utilizar el principio de superposición de Boltzmann, encontrar un modelo que se ajustara a la componente distorsional del tensor de deformaciones unitarias, como se verá posteriormente.

8.3 Equipo Utilizado

8.3.1 Consolidómetro

El consolidómetro utilizado para la prueba de consolidación unidimensional , es un aparato que puede usarse en pruebas estáticas y dinámicas. Consiste en una base fija, dentro de la cual se encuentra un piston neumático, éste está conectado, mediante tubos sarán a un regulador de aire a presión cuya válvula de control se encuentra en la parte frontal de la base.

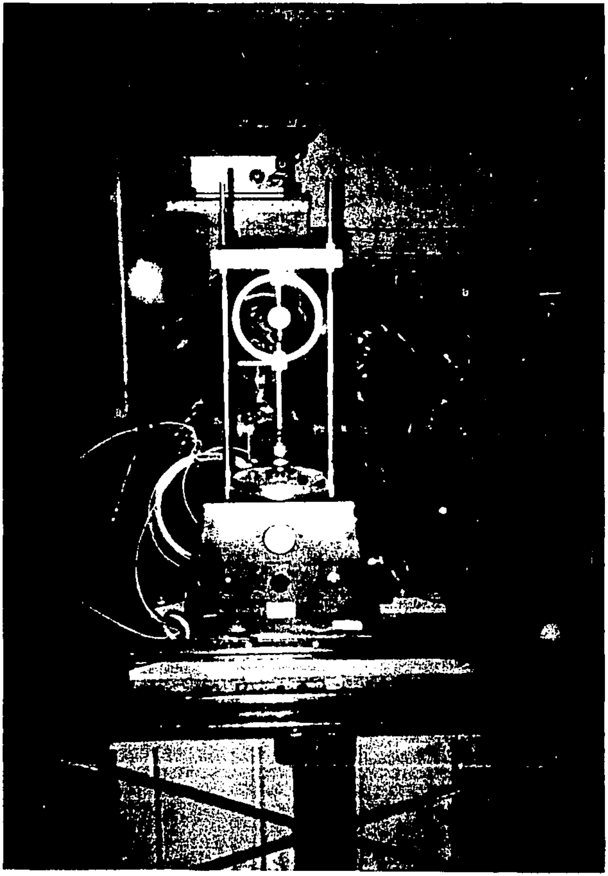


Fig. 8.1 Consolidómetro Dinámico

En la parte superior de la base se encuentra un pequeño marco, en el cual se sujeta un anillo metálico, en cuyo centro se coloca un micrómetro de carátula que permite obtener los desplazamientos verticales de la muestra.

Al centro de la base, sobresale el eje del pistón en el cual se apoya la taza del consolidómetro. Esta se encuentra formada por un disco metálico (base), rodeado por una camisa de lucita. En su interior se coloca el conjunto de piedras porosas, muestra y anillo de la misma forma que en los consolidómetros estáticos. Sobre la piedra porosa superior, se apoya una placa metálica cuyo diámetro es ligeramente inferior al diámetro interior del anillo de consolidación, ésta tiene en el centro una depresión en la cual apoya el vástago que sobresale de la parte inferior del anillo.

La carga en este aparato, es suministrada de abajo hacia arriba por el pistón de la base, el cual tiende a subir la taza del consolidómetro , presionándola contra el anillo fijo en el marco. La fuerza es controlada por el regulador de presión. La Fig. 8.1 muestra una fotografía del aparato.

8.3.2 Equipo triaxial cíclico

Este equipo está formado por cuatro partes fundamentales: cámara triaxial , pánel de saturación , equipo de carga dinámica y sistema de medición y registro de resultados. Las Figs. (8.2),(8.3),(8.4) y (8.5) muestran una descripción esquemática del equipo.

8.3.2.1 Cámara triaxial

Este dispositivo cuenta con una camisa de lucita de 22mm de espesor, capaz de resistir 21 Kg/cm^2 de presión. Su base y tapa son metálicas. En la base se encuentran dos válvulas que permiten el drenaje superior e inferior de la probeta hacia los tanques de saturación y viceversa. La tapa descansa sobre cuatro barras metálicas a las cuales se fija por medio de cuatro tornillos. Esta cuenta con dos conectores rápidos, uno se utiliza para aplicar la presión confinante y el otro, para verificar dicha presión en cualquier instante de la prueba, a través de un manómetro de precisión.

La aplicación de los esfuerzos axiales se lleva a cabo mediante un vástago de acero inoxidable, el cual transmite la carga desde el exterior y se apoya en la tapa de la cámara. La verticalidad del vástago queda asegurada por un mecanismo de baleros axiales. La fricción se reduce al mínimo al lubricar el sistema con un aceite de baja viscosidad. El diámetro de la cabeza y base de la probeta es de 38mm. El drenaje se asegura mediante la colocación de piedras porosas perfectamente limpias y saturadas.

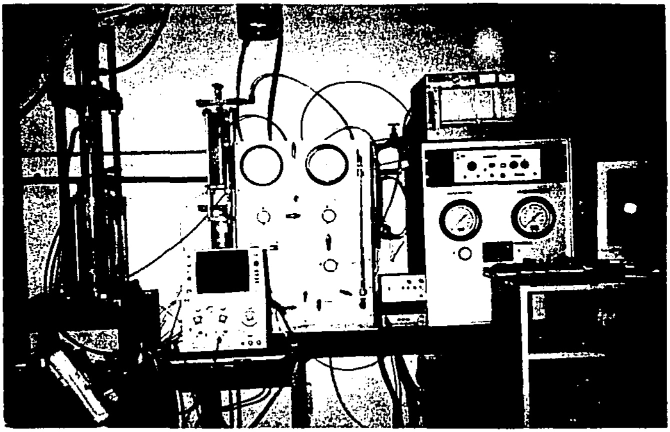


Fig. 8.2 Equipo Triaxial Cíclico

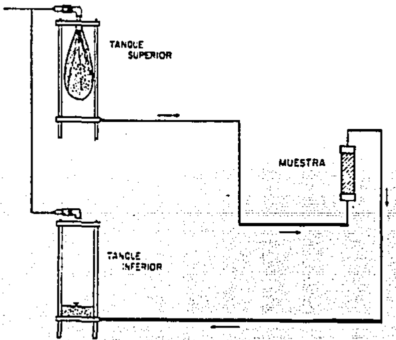


Fig. 8.3 Tanques de Saturación

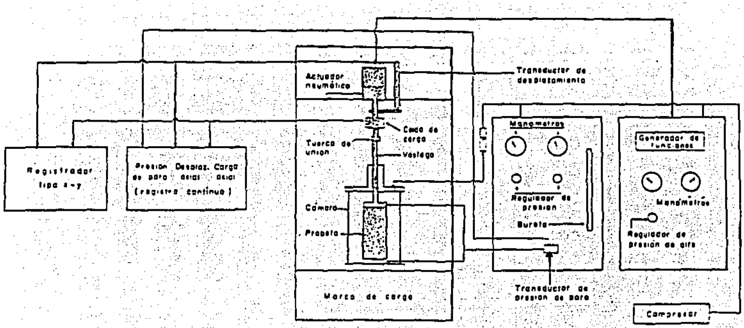


Fig. 8.4 Esquema del Equipo Triaxial Cíclico

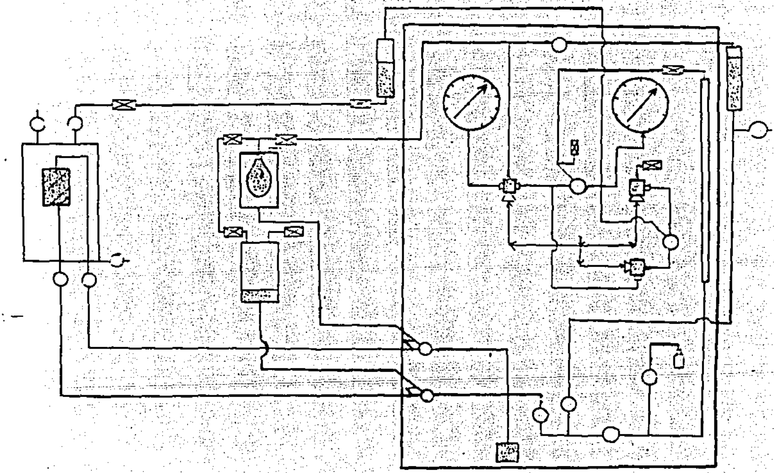


Fig. 8.5 Esquema del Sistema de Saturación

8.3.2.2 Pánel de saturación

En la Fig. 8.5 se muestra el sistema del pánel de saturación. Éste consta de tres reguladores de presión de aire, dos de los cuales están destinados a dar presión confinante y el tercero a dar contrapresión, sin embargo, uno de ellos es capaz de dar presión confinante y contrapresión simultáneamente, debido a su diseño de dos entradas y una sola salida, éste presenta la ventaja de que permite mantener la relación entre las dos presiones constante en todo momento.

Los reguladores están conectados con tubos sarán, a la cabeza y a la base de la muestra, por lo que es posible medir la presión de poro y la presión confinante existente, mediante el mismo transductor de presión.

Para la saturación del especímen se utilizan dos tanques, cuyas paredes son de acrílico de 9mm de espesor. El tanque superior se conecta a la base de la probeta y el inferior a la cabeza de la misma. El tanque superior contiene un globo de goma que funciona como interfase entre el aire a presión y el agua desaereada, destinada a la saturación. El tanque inferior, solo contiene un pequeño tirante de agua y recibe el agua que sale de la cabeza de la probeta , la cual arrastra el aire contenido en el material (Fig. 8.B).

8.3.2.3 Equipo de carga dinámica

El equipo de carga dinámica utilizado para las pruebas triaxiales cíclicas de esfuerzo controlado, consta de un pistón neumático colocado en la parte superior del marco de carga. La carga axial se transmite desde el exterior , por medio del vástago, a la cámara.

Se dispone, además, de una consola que incluye un generador de funciones, un electro-regulador de aire y un contador de ciclos. La variación cíclica de la presión se obtiene con el generador de funciones el cual proporciona; la amplitud, la forma de la señal y la frecuencia, en términos de una señal eléctrica. Esta señal es transformada por un regulador eléctrico, en una señal neumática, la cual se amplifica y actúa en la parte inferior del pistón de doble acción. En la parte superior de éste, se da una carga estática, de manera que la probeta va a recibir un esfuerzo axial de la forma: $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ sen wt, en donde: σ_0 es el esfuerzo estático aplicado por la cámara superior del pistón de doble acción y σ_1 será la amplitud del esfuerzo dinámico.

Este equipo permite aplicar cargas cíclicas con frecuencias efectivas desde 0.2 hasta 4.0 hertz con formas de onda cuadrada, triangular y senoidal. El aire a presión es suministrado por un compresor con capacidad igual a 7 Kg/cm^2. Este aire pasa por un secador, para asegurar la ausencia de humedad, antes de entrar al sistema.

8.3.2.4 Sistema de registro.

El sistema de medición está constituido por cuatro transductores eléctricos; una celda de carga con capacidad máxima de 45 Kg-f y una resolución de 0.01 lb. que permite medir la fuerza aplicada a la probeta durante la fase dinámica de la prueba; un transductor de presión con una capacidad de 7.0 Kg/cm^2 y una resolución de 0.01 Kg/cm^2, un transductor de desplazamiento, D.C.D.T., para medir los desplazamientos axiales de la probeta con un intervalo de variación de 50mm y una resolución de 0.002mm. El cuarto transductor es un sensor de presiones diferenciales por medio del cual es posible medir los cambios de altura en la columna de agua de la bureta, con lo cual se puede registrar los cambios volumétricos de la probeta saturada , en cualquier instante de la prueba.

Existen en este equipo dos sistemas para capturar los datos resultantes de una prueba; un sistema tradicional de registro gráfico y un sistema de captura electrónica que vierte la información a un ordenador digital (PC). Ambos sistemas pueden trabajar en paralelo .

Sistema gráfico:

Transforma las señales eléctricas de los transductores, mediante amplificadores calibrados, a valores de fuerza, desplazamiento , presión y presión diferencial. Cada uno de estos amplificadores está conectado a un canal de un graficador de puntas calientes, de cuatro canales, para obtener un registro gráfico contínuo durante la prueba dinámica (Fig. 8.6).

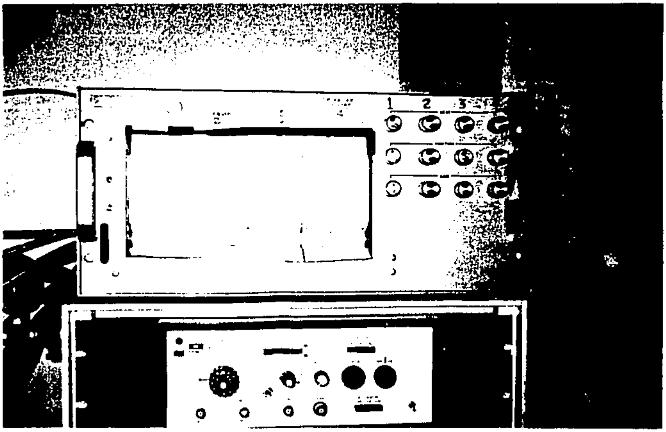
Sistema electrónico de captura de datos

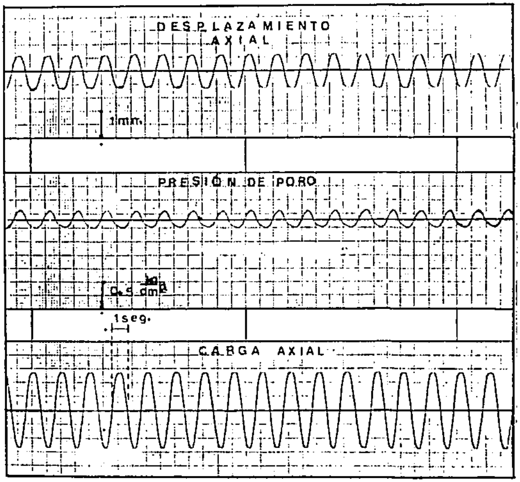
Consiste en circuitos electrónicos que reciben directamente las señales de los transductores y transforman los voltajes en cantidades físicas. Estos circuitos están conectados a una tarjeta de adquisición de datos que regulan los voltajes de entrada a una PC, mediante un programa,que permite un listado de los resultados en columnas, la graficación de los mismos y el cálculo de los parámetros de interés en cualquier prueba dinámica de laboratorio.

En las pruebas estáticas; de saturación, consolidación ó pruebas de resistencia, las deformaciones axiales se pueden medir, tanto por los sistemas anteriores, como a través de un micrómetro de carátula. Generalmente se hace de ésta última manera, en pruebas de fluencia, debido al tiempo prolongado de estos ensayes.

8.4 Procedimientos de prueba.

8.4.1 Consolidación unidimensional





* VALORES ESTABLECIDOS EN LA CALIBRACIÓN ANTES DE EFECTUAR LA PRUEBA DINÁMICA

Fig. 8.6 Sistema Gráfico de Registro

Preparación del especímen:

Las muestras recibidas en los tubos Shelby se protegieron con papel de aluminio, parafina y brea, y fueron almacenadas en el cuarto húmedo. Para el ensaye, se cortó el tubo a una longitud de 5 cm aproximadamente. Se extrajo el material, después de romper la adherencia con el tubo, mediante un hilo de acero muy delgado. Se procedió , entonces, a labrar la probeta.

El labrado se realizó en un torno de madera, en el cual se coloca el anillo del consolidómetro y se utilizó para ello un cortador de muestra para retirar el material lentamente. Las dimensiones de la probeta resultaron de 7.1 cm de diámetro y 2 cm de altura.

Antes de montar la probeta, se calibró el consolidómetro a fín de obtener la deformación del aparato.

El montaje de la probeta se efectuó en la forma convencional, de acuerdo a los procedimientos recomendados para ello, (Ref. 12).

Saturación:

Después del tercer incremento de esfuerzo se saturó el material , por inundación.

Etapa de carga:

Con el regulador de presión que ajustó la posición de la base del consolidómetro contra el anillo de deformación, se proporcionó la presión necesaria para obtener el esfuerzo vertical deseado.

Se aplicaron cuatro incrementos de esfuerzo, de 0.2 Kg/cm^2 cada uno, en intervalos de 0.20 Kg/cm^2 por día, y se tomaron lecturas de desplazamiento vertical, mediante un micrómetro de carátula, con precisión de 0.001mm y capacidad de 5mm.

A partir de un esfuerzo igual a 0.8 Kg/cm^2, se aplicaron dos incrementos de 0.1 Kg/cm^2/día, hasta alcanzar un esfuerzo igual a 1 Kg/cm^2. Finalmente, se aplicó un último incremento de presión , con lo cual se alcanzó un esfuerzo de 1.5 Kg/cm^2, que marca el último punto de la curva de compresibilidad mostrada en el apéndice B de este trabajo.

8.4.2 Consolidación isotrópica en cámara triaxial

Preparación del especímen:

Para esta prueba, se cortó el tubo Shelby que contenía la muestra a una longitud de 15cm, aproximadamente. Una vez rota la adherencia entre la muestra y el tubo mediante el uso de un hilo de acero muy delgado, se extrajo la muestra.

El labrado se realizó en un torno, con el empleo de un arco de alambre de acero humedecido y con el cabeceador se dió a la probeta la altura adecuada. Para esta prueba se utilizó una cámara triaxial igual a la descrita en la sección 8.3.2 , con excepción de las dimensiones de la cabeza y base,que en ésta, son de 36mm de diámetro.

Las dimensiones de la probeta fueron de ; 36mm de diámetro promedio y 83.3mm de altura.

El montaje de la probeta en la cámara triaxial se realizó en la forma convencional recomendada para ello, (Ref. 12).

Saturación:

Antes de realizar el ensaye, se saturó la muestra por contrapresión para reducir el volumen de aire dentro del material. De esta forma se asegura una medición correcta de los cambios volumétricos y de la presión de poro en pruebas de consolidación estándar.

La saturación por contrapresión consiste en aplicar una presión al líquido intersticial del material, con el fin de comprimir y hacer salir el aire contenido en la probeta. La satuarción del especímen se verifica a través del uso del parámetro B de Skempton (Ref. 13) de la manera siguiente:

i) Sin permitir el drenaje, se aplica un incremento de presión confinante, $\Delta\sigma_3$, menor que el esfuerzo efectivo , σ_3', bajo el cual se desee realizar la consolidación.

ii) Se permite entonces que la presión de poro se estabilice, y se toma la lectura, $\Delta\mu$.

iii) Se calcula el parámetro B de Skempton dado por:

$$B = \Delta\mu \;/\; \Delta\sigma_3 \qquad (8.1)$$

donde:

$\Delta\mu$: Incremento de la presión de poro, correspondiente al incremento de la presión confinante, $\Delta\sigma_3$.

B : Parámetro de Skempton que indica el progreso de la saturación del especímen. Cuando B > 0.96 la probeta se considera saturada.

iv) Si el valor de B es menor a 0.96, deberá repetirse el procedimiento desde i) hasta iii), tantas veces como haga falta.

Con este procedimiento se aplica a la probeta la contrapresión necesaria para saturarla completamente. Esta, dependerá del grado de saturación inicial del material. Es decir, se puede llegar a tener sometida a la probeta, a esfuerzos totales muy grandes, pero la presión confinante efectiva será la misma que al inicio del procedimiento, por lo que teóricamente, el estado de esfuerzos efectivos no se altera. Esta última afirmación, podría ser objeto de largas discusiones que escapan al alcance de este trabajo, sin embargo, basta reflexionar sobre el paso ii), para dudar de la veracidad de la permanencia del estado de esfuerzos efectivos. Al mencionar que se debe esperar la estabilización de la presión de poro, se está involucrando un lapso de tiempo durante el cual los esfuerzos van a estar cambiando a través de la probeta y evidentemente los esfuerzos efectivos no serán los mismos en todos los puntos de la misma. Otro aspecto interesante de este procedimiento de saturación sería medir los cambios de estructura que se le inducen al suelo mediante la aplicación de la contrapresión y su influencia sobre el comportamiento que se desea medir; ésto dependerá, en parte, del nivel de esfuerzos efectivos que se intente aplicar en relación con la rama de la curva de compresibilidad que se pretenda investigar.

Consolidación:

Una vez saturada la probeta, se llevó a cabo la consolidación isotrópica del especímen. Esta prueba se realizó con aplicaciones de incrementos de esfuerzos isotrópicos efectivos, a razón de 0.2 $Kg/cm^2/día$ hasta alcanzar 1.0 Kg/cm^2, a partir del cual se realizaron dos incrementos de 0.25 $Kg/cm^2/día$, para llegar a un esfuerzo isotrópico esfectivo de 1.5 Kg/cm^2 . Se tomaron lecturas de los cambios volumétricos con un patrón de tiempo pre-establecido. Los resultados de esta prueba aparecen en el apéndice C.

8.4.3 Consolidación isotrópica en cámara triaxial bajo esfuerzos isotrópicos totales constantes de 0.20 Kg/cm^2

Preparación del especímen:

Se siguió el mismo procedimiento del ensaye de consolidación isotrópica en cámara triaxial de la sección anterior. Se obtuvo una probeta de 86mm de altura y con un diámetro promedio de 38mm.

Saturación:

No se utilizó ningún método de saturación; se realizó el ensaye a la humedad natural que presentó el material en ese momento.

Consolidación:

Obtenidas las curvas de compresibilidad de los dos ensayes anteriores, se decidió aplicar esfuerzos isotrópicos totales equivalentes a un 33% del esfuerzo efectivo de preconsolidación, a fín de garantizar que la estructura original del material no fuera modificada, debido al nivel de esfuerzos.

Se aplicaron los esfuerzos isotrópicos totales de 0.2 Kg/cm^2 en un solo incremento y se tomaron lecturas de deformación axial, obtenidas a través de un micrómetro de carátula de 0.001mm de precisión y 5.0mm de capacidad.

Se tomó la lectura en el momento de la aplicación simultánea de los esfuerzos isotrópicos totales, que aparece en las hojas de registro (apéndice D) como la lectura para t=0, y las siguientes lecturas se realizaron con un patrón de tiempo pre-establecido, que permitiera el trazado adecuado de la curva deformación-tiempo.

8.4.4 Consolidación anisotrópica en cámara triaxial bajo esfuerzo vertical total constante de 0.20 Kg/cm^2

Este ensaye se realizó sobre la misma probeta utilizada en la prueba descrita en la sección anterior.

Al obtener la curva deformación-tiempo correspondiente a la consolidación isotrópica, se procedió a fijar el vástago de aplicación de carga, se retiró la presión confinante de la cámara y se colocó el peso necesario para obtener un esfuerzo axial total, sobre la probeta, de 0.2 Kg/cm^2.

Se ajustó el micrómetro en cero y se liberó el vástago para tomar simultáneamente la lectura , correspondiente a t=0. Posteriormente la toma de lecturas se hizo con el mismo patrón de tiempo que en el ensaye de consolidación isotrópica. Sin embargo, esta prueba duró más tiempo que la anterior, para definir la pendiente del tramo recto de la curva deformación-tiempo obtenida.

De esta, manera se realizaron sobre la misma probeta dos ensayes de consolidación isotrópica y dos ensayes de consolidación anisotrópica alternados, sin dejar reposar, libre de cargas, a la probeta entre uno y otro. Los resultados aparecen en los apéndices D y E, y se indican como pruebas 1 y 2 en cada ensaye.

Se ensayó una segunda probeta en una cámara más pequeña a la descrita en este capítulo, y se alternó una consolidación isotrópica y una anisotrópica en idénticas condiciones a las pruebas anteriores, cuyos resultados aparecen identificados como prueba 3 en los apéndices D y E, respectivamente.

8.5 Análisis de resultados.

Para cada una de las seis pruebas, identificadas como pruebas 1 ,2, y 3 , en consolidación isotrópica y consolidación anisotrópica , en cámara triaxial, se trazó la gráfica deformación específica-tiempo, ϵ/σ vs. t , a fín de proceder a encontrar un modelo viscoelástico , cuyo comportamiento se aproximara al del material utilizado y se halló lo siguiente:

CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA
Prueba No.1 Esfv= 0.20 kg/cm2

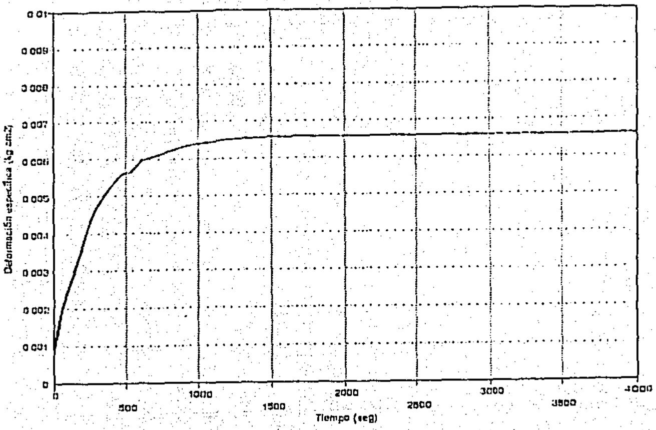


Fig 8.7

CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA
Prueba No.2 Esfv= 0.20 kg/cm2

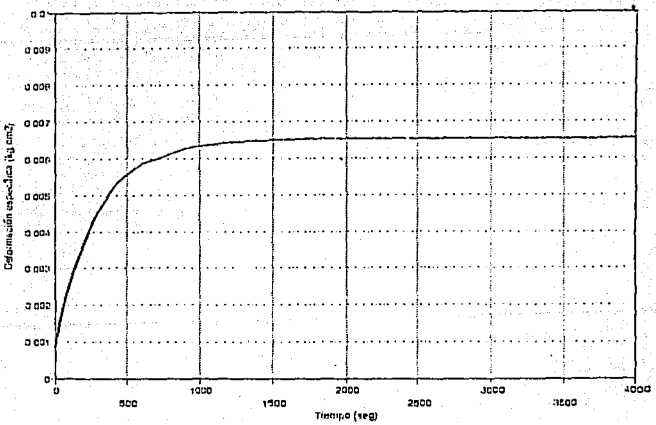


Fig 8.8

CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA
Prueba No.3 Esfv= 0.20 kg/cm2

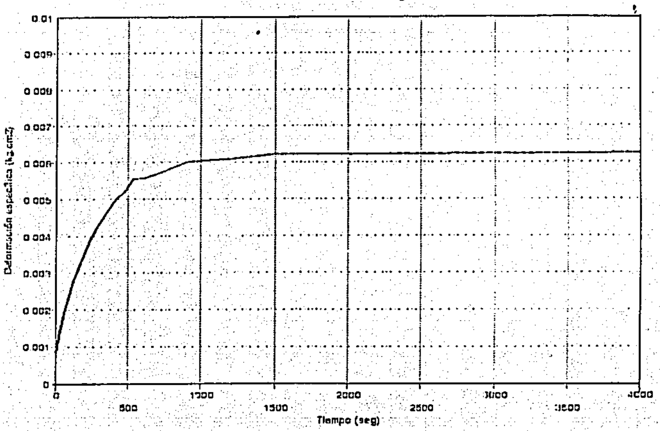


Fig. 8.9

CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA
Curva Promedio

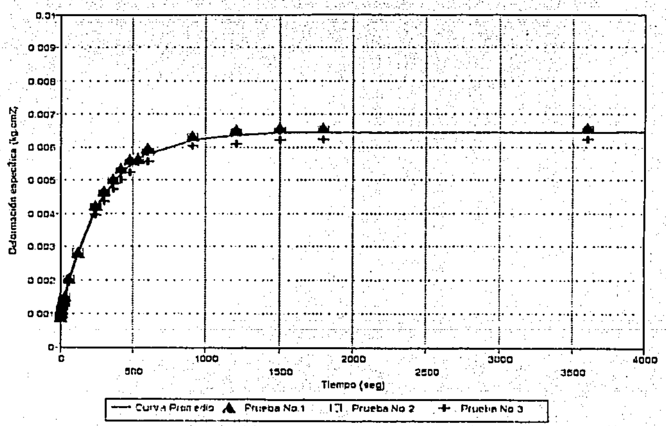


Fig. 8.10

8.5.1 Pruebas de consolidación isotrópica

Las Figs. 8.7, 8.8 y 8.9 muestran los resultados de las pruebas 1, 2 y 3, respectivamente; aparece en el eje de las abscisas el tiempo en segundos y en el eje de las ordenadas las deformaciones específicas, en cm^2/Kg.

Estas tres gráficas muestran una tendencia claramente semejante al comportamiento de un sólido de tres parámetros, estudiado en los capítulos anteriores, por lo que resultó razonable utilizar este modelo para representar a la componente volumétrica del tensor de deformaciones unitarias. Entonces, se procedió a realizar el ajuste de curvas.

Ajuste de curvas:

Como primer paso, se optó por calcular para cada tiempo, t, el promedio de las tres deformaciones específicas obtenidas en el laboratorio.

Una vez calculada la curva promedio de los datos experimentales, se revisó que ninguno de los puntos para un tiempo, t, de las cuatro curvas, es decir, las tres curvas experimentales y la curva promedio, presentaran diferencias de más de un 3%, Fig. 8.10.

Como tercer paso, se determinaron las constantes viscoelásticas de la curva promedio, como lo indica la Fig. 8.11.

De la tabla 1.1 se obtiene que la relación constitutiva que caracteriza a un sólido de tres parámetros es:

$$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\epsilon + q_1\dot{\epsilon}$$

y debe cumplirse además la condición termodinámica:

$$q_1 > p_1q_0$$

como se expuso en el capítulo II, para satisfacer la segunda ley de la Termodinámica.

De la curva promedio, Fig. 8.11, se llegó a:

$$\frac{1}{q_0} = 0.006500 \ cm^2/Kg \qquad \therefore \qquad q_0 = 153.846 \ Kg/cm^2$$

$$\frac{p_1}{q_1} = 0.000872 \ cm^2/(Kg \ seg) \ \therefore \qquad \tau_K = 253.906 \ seg.$$

$$p_1 = 34.0625 \ seg.$$

$$q_1 = 39062.5 \ Kg \ seg/cm^2$$

$$p_1q_0 = 5240.38 < q_1$$

CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA
Constantes Viscoelásticas

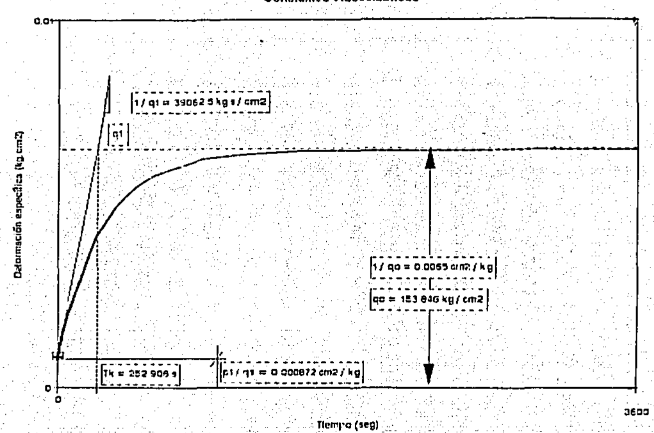


Fig. 6.11

CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA
Ajuste de la curva teórica

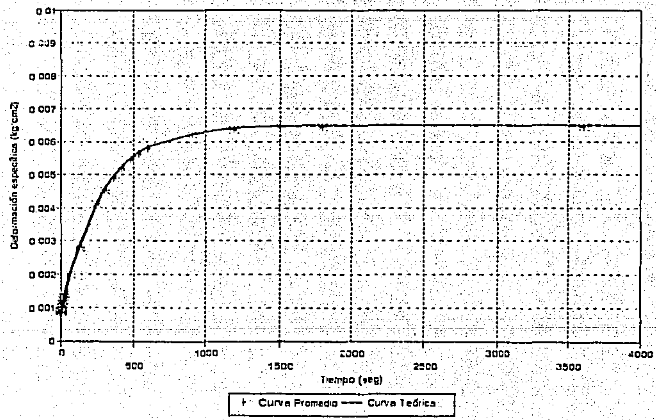


Fig. 6.12

Al introducir estas constantes en la ecuación de la deformabilidad de fluencia , J(t), del modelo, obtenida de la tabla 1.1 , y graficar contra el tiempo, se encontró la curva mostrada en la Fig. 8.12; la línea llena representa a la curva teórica, mientras que los puntos indican la curva promedio experimental de la que se extrajeron las constantes viscoelásticas.

Nótese que ni aún en los puntos más alejados entre las dos curvas se encontró una diferencia mayor del 3%, por lo que se aceptó como válido el modelo dado por la expresión:

$$\sigma + 34.0625\ \dot{\sigma} = 153.846\ \epsilon + 3.90625E{+}04\ \dot{\epsilon} \qquad (8.2)$$

donde:

σ : esfuerzo isotrópico, en Kg/cm^2
ϵ : deformación unitaria ,

para representar la componente volumétrica del tensor de deformaciones unitarias de este material.

8.5.2 Consolidación anisotrópica

Las Figs. 8.13, 8.14 y 8.15 exhiben las gráficas deformación específica-tiempo correspondientes a las pruebas 1, 2 y 3, respectivamente.

Para estas pruebas, las tres gráficas muestran una deformación específica instantánea, cuyo valor se aproxima mucho a la deformación final , constante, que presentaron las curvas deformación específica-tiempo de los ensayes de consolidación isotrópica. Las curvas muestran un rápido aumento de la deformación específica durante un cierto intervalo de tiempo, después del cual las tangentes a la curva disminuyen gradualmente su pendiente hasta hacerse constantes, sin llegar a la horizontalidad, es decir, no se anula.

Esta misma tendencia, observada en las tres curvas experimentales, condujo a escoger como posible modelo para el tensor de deformaciones unitarias general, a un fluido, que podía ser un modelo de Burgers.

Sin embargo, el hecho de que las deformaciones instantáneas en consolidación anisotrópica fueran mayores que las deformaciones instantáneas en consolidación isotrópica, hizo que se descartara la idea de utilizar el modelo de Burgers como tal, pues ésto hubiera implicado que la componente distorsional del tensor de deformaciones unitarias fuera un amortiguador viscoso de Newton, para ello se requería que las deformaciones instantáneas de ambas pruebas fuesen iguales.

Con base en lo anterior, se optó por escoger un modelo de

CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA
Prueba No.1, Esfv.= 0.20 kg/cm2

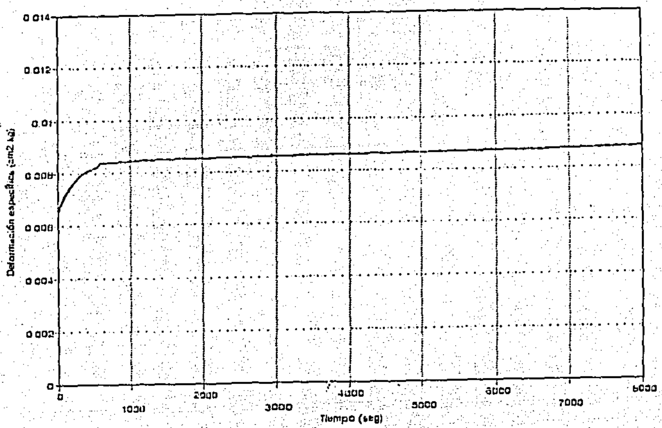


Fig. 6.13

CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA
Prueba No.2, Esfv.= 0.20 kg/cm2

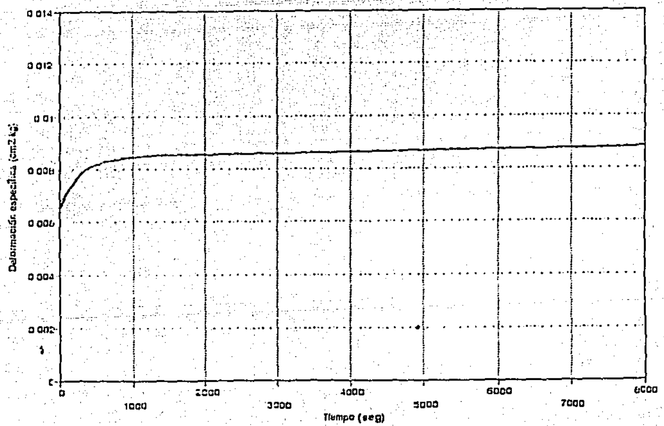


Fig. 6.14

CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA
Prueba No.3, Esfv.= 0.20 kg/cm2

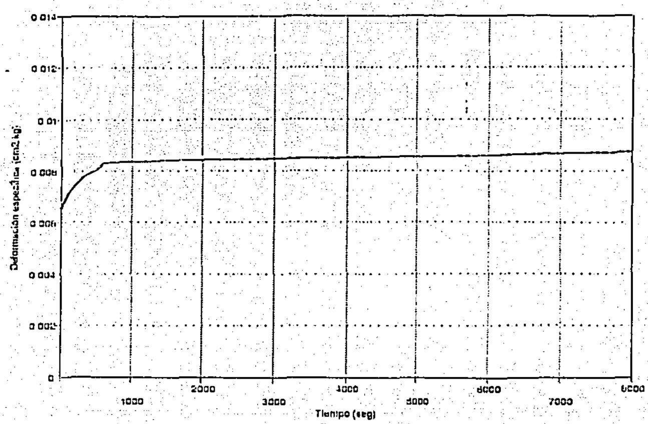


Fig. 6.15

CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA
Curva Promedio

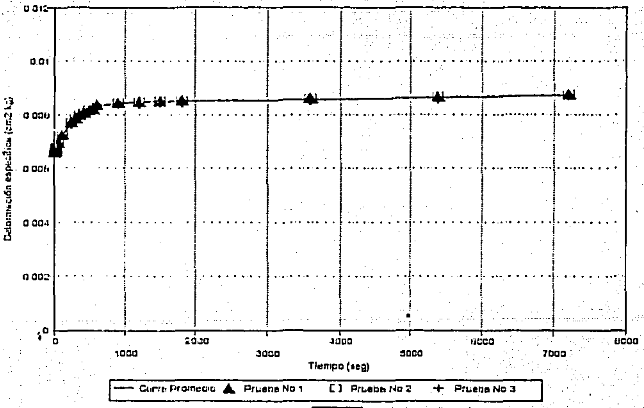


FIG. 6.16

CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA
Parámetros viscoelásticos

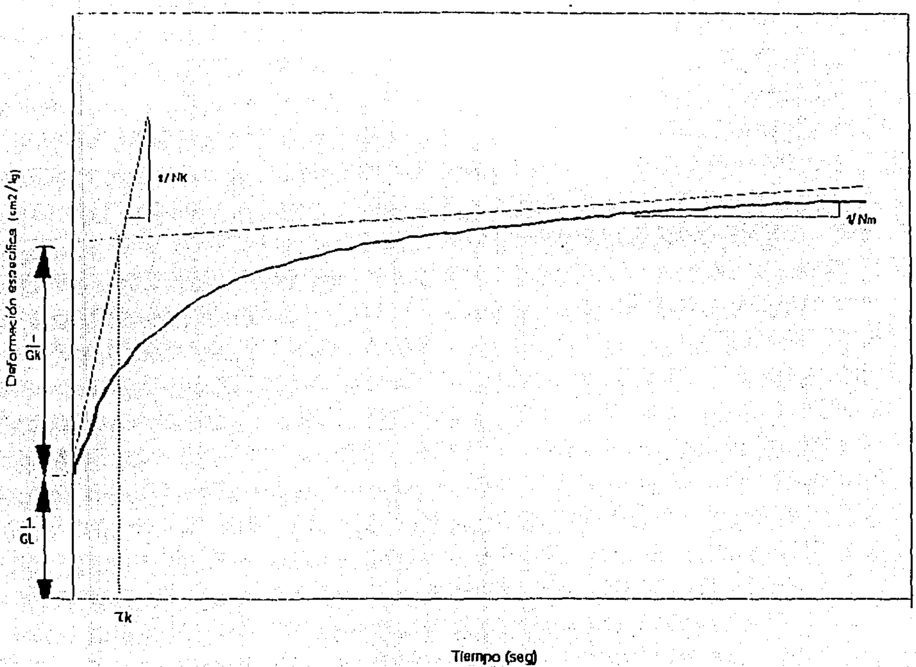


FIG. 8.17

Burgers modificado, el cual consiste en un sólido de tres parámetros dispuesto en serie con un fluido de Maxwell y a partir de esta hipótesis se procedió a realizar el ajuste de curvas, para este modelo de cinco parámetros.

Ajuste de curvas:

Se sacó el promedio de las curvas experimentales y se corroboró que ningún punto para un tiempo, t, se alejara de la curva promedio en más de un 3% (Fig. 8.16).

Por tratarse de un modelo de Burgers modificado, éste presentaba una dificultad. De la curva promedio podían obtenerse los parámetros G_K, η_K y η_M, pero el parámetro correspondiente a la ordenada inicial ya no estaría definido por G_M. Éste ahora se llamó G_L (Fig. 8.17) y requería una expresión teórica para ser calculado.

Con los últimos puntos de la curva promedio se obtuvo la pendiente de la recta, ésta, debe ser la misma pendiente de la curva deformación especifica-tiempo del modelo de Maxwell, es decir, la componente distorsional.

Se planteó la solución eslástica teórica al problema de una probeta cilíndrica sometida a esfuerzo axial uniforme y constante dada por la expresión:

$$\epsilon_x = \sigma_x / E \tag{8.3}$$

donde:

ϵ_x : deformación unitaria en dirección axial
σ_x : esfuerzo vertical total
E : Módulo de Young del material

Para transformar la solución elástica anterior en la solución al problema viscoelástico planteado, se recurre a la transformada de Laplace. De esta forma se obtiene que :

$$\bar{\epsilon}_x = \frac{\bar{\sigma}_x}{E^*} = \frac{\mathcal{L}(\sigma_x)}{E^*} \tag{8.4}$$

donde:

$\mathcal{L}_*(\sigma_x) = \sigma_x/s$, por tratarse de un esfuerzo constante
E^*, en términos de los operadores diferenciales Q y P definidos por la ecuación (2.9), puede ser escrito como:

$$E^* = \frac{3\ Q_o\ Q_v}{2Q_v\mathcal{P}_o + Q_o\mathcal{P}_v} \tag{8.5}$$

en donde:

$\mathcal{Q}_o$ y $\mathcal{P}_o$ son los operadores algebráicos correspondientes a la componente distorsional de la deformación, es decir, al modelo de Maxwell.

$\mathcal{Q}_v$ y $\mathcal{P}_v$ son los operadores algebráicos correspondientes a la componente volumétrica del tensor de deformaciones unitarias, seleccionado como un sólido de tres parámetros.

La expresión (8.5) también se puede escribir como:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{P}_o}{\mathcal{Q}_o} + \frac{1}{3}\frac{\mathcal{P}_v}{\mathcal{Q}_v} \tag{8.6}$$

Al sustituir la ecuación (8.6) en (8.4) se obtiene:

$$\frac{\overline{\epsilon x}}{\sigma x} = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{P}_o}{s\mathcal{Q}_o} + \frac{1}{3}\frac{\mathcal{P}_v}{s\mathcal{Q}_v} \tag{8.7}$$

que es la expresión de la deformación específica en el espacio S de Bromwich.

Nótese que en la ecuación (8.7) se presenta una solución interesante. Si se sustituye la ecuación (2.17) en (8.7) resulta:

$$\frac{\overline{\epsilon x}}{\sigma x} = \frac{2}{3} J_o(s) + \frac{1}{3} J_v(s) \tag{8.8}$$

Al aplicar la antitransformada de Laplace a la ecuación (8.8) se obtiene la deformación específica del modelo de Burgers modificado en función del tiempo, que viene dada por:

$$\frac{\epsilon x}{\sigma x} = \frac{2}{3} J_o(t) + \frac{1}{3} J_v(t) \tag{8.9}$$

donde:

$J_o(t)$ es la deformabilidad de fluencia del modelo de Maxwell, que se puede escribir como:

$$J_o(t) = (p_{1_o} + t)/q_{1_o} \tag{8.10}$$

$J_v(t)$ es la deformabilidad de fluencia del sólido de tres parámetros. De la tabla 1.1 se obtiene:

$$J_v(t) = \frac{p_{1_v}}{q_{1_v}} e^{-\lambda t} + \frac{1}{q_{o_v}} (1 - e^{-\lambda t}) \tag{8.11}$$

con ; $\lambda = q_{o_v} / q_{1_v}$

Los subíndices (v y o) , en adelante serán utilizados para distinguir las constantes viscoelásticas de los modelos que representan a la componente volumétrica y a la componente distorsional del tensor de deformaciones, respectivamente.

La expresión (8.9) resulta ser, entonces, la relación que existe entre el modelo de Maxwell y el sólido de tres parámetros. Esto es, si de la curva promedio de la Fig. 8.16 se obtienen los valores de $\epsilon x/\sigma x$ para cada tiempo, t, y además, se conocen las constantes viscoelásticas del sólido de tres parámetros obtenidos en la sección 8.5.1, por aplicación de una simple fórmula debería encontrarse los parámetros viscoelásticos del modelo de Maxwell, que mejor se ajuste a los resultados experimentales.

De (8.9) se obtiene que:

$$J_o(t) = \left\{ \frac{\epsilon x}{\sigma x} - \frac{1}{3} J_v(t) \right\} * \frac{2}{3} \qquad (8.12)$$

Una vez que se aplica esta ecuación para todos los instantes , t , de los cuales se conoce $\epsilon x/\sigma x$ y $J_v(t)$, se obtiene un listado de puntos $\epsilon_o/\sigma x$ tales, que al graficarlos contra el tiempo reproducen una curva deformación específica-tiempo correspondiente a un modelo bastante próximo a un modelo de Maxwell.

De la ordenada inicial y de la recta que se obtiene al hacer un ajuste lineal con todos los puntos del listado, calculado a partir de (8.12), se obtuvieron las posibles constantes viscoelásticas del modelo de Maxwell.

$$p_{1_o} = 167559.4300 \text{ seg.}$$

$$q_{1_o} = 17761228.65 \text{ Kg seg/cm}^2$$

Para verificar la aproximación de este modelo a los resultados obtenidos de los ensayes de consolidación anisotrópica, se sustituyeron las constantes en las ecuaciones (8.10) y (8.11), de donde:

$$J_o(t) = 0.0094340 + 5.6302411\text{E-}08\ t \qquad (8.13)$$

y

$$J_v(t) = 0.000872\ e^{-3.94\text{E-}03t} + 6.500\text{E-}03(1 - e^{-3.94\text{E-}03t}) \qquad (8.14)$$

La sustitución de (8.13) y (8.14) en la ecuación (8.9) conduce a la expresión:

$$\frac{\epsilon x}{\sigma x} = \{8.4559\text{E-}03 + 3.7535\text{E-}08t - 0.00187\ e^{-3.94\text{E-}03t}\} \qquad (8.15)$$

CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA
Ajuste de curva teórica

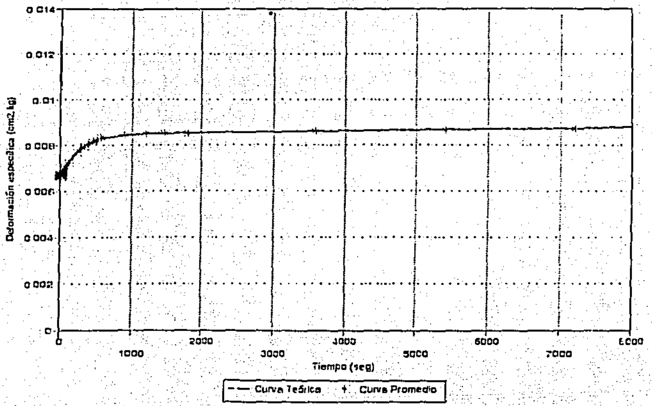


Fig. 8.18

MODELO DE BURGERS MODIFICADO
Parámetros Viscoelásticos

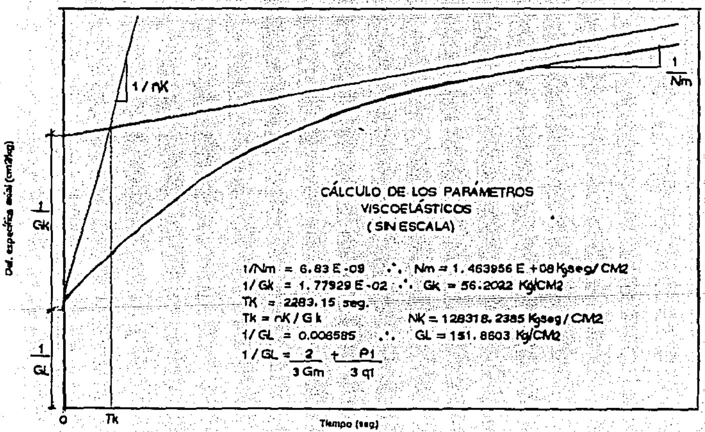


FIG. 8.19

que viene a ser la solución teórica al problema de una probeta cilíndrica del material en estudio, sometida a esfuerzo axial uniforme constante en el tiempo. En ésta, el tiempo se expresa en segundos.

La Fig. 8.18 muestra la curva obtenida a partir de esta solución en línea llena, superpuesta a los puntos que representan a la curva promedio de los datos experimentales. La máxima diferencia encontrada correspondió al tiempo , t=36000 seg y fué de 0.281% .

Con base en los resultados obtenidos, se aceptó como modelo representativo del problema planteado; un modelo de Burgers modificado como el mostrado en la Fig.8.19, cuyos parámetros viscoelásticos resultaron ser:

$G_K = 56.2022$ Kg/cm^2

$\eta_K = 128318.2386$ Kg seg/cm^2

$\eta_M = 1.463966E-08$ Kg seg/cm^2

$$G_L = \frac{2}{3G_M} + \frac{p_{1_v}}{3q_{1_v}} = 161.8603 \text{ Kg/cm}^2$$

$\tau_K = 2283.15$ seg.

8.6 Cálculo de la solución teórica al problema de una probeta cilíndrica de arcilla sometida a un esfuerzo axial oscilatorio

Supóngase que ahora se somete a una probeta cilíndrica del material , modelado en las secciones anteriores, a un esfuerzo vertical oscilatorio de la forma:

$$\sigma_x = \sigma_o + \sigma \text{ sen } wt \qquad (8.16)$$

donde:

σ_x : esfuerzo vertical total uniforme sobre la probeta.
σ_o : esfuerzo vertical estático total sobre la probeta.
σ : amplitud del esfuerzo vertical cíclico total.

Para conocer la respuesta del material en términos de la deformación específica, se recurre nuevamente a la solución (8.3). De esta forma:

$$\overline{\epsilon_x} = \frac{\mathcal{L}(\sigma_o) + \mathcal{L}(\sigma \text{ sen } wt)}{E^*} \qquad (8.17)$$

ó bien;

$$\overline{\epsilon_x} = \frac{\mathcal{L}(\sigma_o)}{E^*} + \frac{\sigma \, \mathcal{L}(\text{sen } wt)}{E^*} \qquad (8.18)$$

Al sustituir el valor E^* dado en la expresión (8.5), la transformada del primer término a la derecha de (8.18) conduce a la solución:

$$\frac{\epsilon x}{\sigma o} = \{8.4559E\text{-}03 + 3.7535E\text{-}08t - 0.00187\ e^{-3.94E\text{-}03t}\} \qquad (8.19a)$$

en la cual el tiempo se expresa en segundos. Ésta representa la parte de la respuesta correspondiente al esfuerzo estático total uniforme que actúa sobre la probeta en forma constante, dada en la ecuación (8.15).

La transformada del segundo término a la derecha de la ecuación (8.18) se puede escribir como:

$$\overline{\epsilon x} = \frac{\mathcal{L}\,(\sigma o)}{E^*} = \sigma \left\{ \frac{2}{3}\frac{\mathcal{P}o}{Qo} + \frac{1}{3}\frac{\mathcal{P}v}{Qv} \right\} \frac{w}{(s^2 + w^2)} \qquad (8.19b)$$

donde: $\frac{w}{(s^2+w^2)}$ es la transformada de (sen wt).

$\mathcal{P}o = 1 + 167559.44\ s \quad \therefore \quad \mathcal{P}o = 1 + p1_o s$

$Qo = 17761228.65\ s \quad \therefore \quad Qo = q1_o s$

$\mathcal{P}v = 1 + 34.0625\ s \quad \therefore \quad \mathcal{P}v = 1 + p1_v s$

$Qv = 153.846 + 39062.5\ s \quad \therefore \quad Qv = qo_v + q1_v s$

donde $\mathcal{P}$ y Q están dados por (2.11).

De lo anterior resulta la expresión:

$$\overline{\epsilon x} - \frac{\mathcal{L}\,(\sigma o)}{E^*} = \frac{\sigma}{153.976}\left[\frac{s^2 + 5.0889E\text{-}03\ s + 2.246E\text{-}08}{s(3.9400E\text{-}03 + s)(s^2 + w^2)}\right] w \qquad (8.20)$$

Al descomponer la expresión entre los corchetes de la ecuación (8.20) en fracciones parciales para aplicar la antitransformada de Laplace, se obtiene:

$$\epsilon x - \frac{\mathcal{L}\,(\sigma o)}{E^*} = \frac{\sigma}{153.976} * \left\{\left[\frac{sw}{(s + 3.94E\text{-}03)(s-wi)(s+wi)}\right] + \left[\frac{5.0689E\text{-}03\ w}{(s + 3.94E\text{-}03)(s-wi)(s+wi)}\right] + \left[\frac{2.247E\text{-}08\ w}{s(s + 3.94E\text{-}03)(s-wi)(s+wi)}\right]\right. \qquad (8.21)$$

La antitransformada del primer término entre corchetes de la ecuación (8.21) resulta ser:

$$\sigma\left[-\frac{2.593E-05\ w}{(1.550E-05 + w^2)}e^{-3.94E-03t}+\frac{6.5799E-03w\ e^{iwt}}{2(3.94E-03 + wi)}-\frac{6.5799E-03w\ e^{-iwt}}{2(3.94E-03 - wi)}\right] \qquad (a)$$

La antitransformada del segundo término entre corchetes de la ecuación (8.21) da como resultado:

$$\sigma\left[\left(\frac{3.335E-05\ w}{1.550E-05 + w^2}\right)e^{-4.55E-03t}-\left(\frac{3.335E-05\ w}{2(3.94E-03 + wi)wi}\right)e^{iwt}+\left(\frac{3.335E-05\ w}{2(3.94E-03 - wi)wi}\right)e^{-iwt}\right] \qquad (b)$$

La aplicación de la antitransformada de Laplace sobre el tercer término entre corchetes de la ecuación (8.21) da como resultado:

$$\sigma\left[\left(\frac{3.752E-08}{w}\right)-\left(\frac{3.752E-08\ w}{1.550E-05 + w^2}\right)e^{-9.94E-03}+\left(\frac{7.391E-11\ e^{-iwt}}{w(3.94E-03 - wi)}\right)-\left(\frac{7.391E-11\ e^{iwt}}{w(3.94E-03 + wi}\right)\right] \qquad (c)$$

La agrupación de los términos de las soluciones (a), (b) y (c) y la aplicación de un tratamiento complejo similar al descrito en el capítulo VII, Fig.7.2, conduce a la expresión:

$$\frac{\epsilon x}{\sigma x}=\left\{\frac{\sqrt{2.7806E-10+(3.289E-03\ w^2-7.391E-11)^2}}{\sqrt{w^2+1.550E-05}}(2\cos(\phi_1+wt-\phi_2))+\right.$$
$$\left.+\frac{7.38748E-06\ w}{(1.550E-05 + w^2)}e^{-3.94E-03t}+\frac{3.752E-08}{w}\right\} \qquad (8.22)$$

donde;

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left[\frac{3.2899E-03\ w^2-7.391E-11}{-1.668(E-5)\ w}\right]$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}\left[\frac{3.9400(E-03)}{w}\right]$$

$\cos(\phi_1-\phi_2+wt)$ es la parte real de la expresión ,

$e^{(\phi_1-\phi_2+wt)i} = \cos(\phi_1-\phi_2+wt) + i\,\text{sen}(\phi_1-\phi_2+wt)$, que resulta de aplicar la solución compleja de la Fig. 7.2.

Al sustituir las ecuaciones (8.19) y (8.22) en la expresión (8.17) se obtiene:

$$\epsilon x=\sigma_o[8.4559E{-}03 + 3.7535E{-}08t - 0.00187e^{-9.94E-03t}] +$$

$$\sigma\left\{\frac{[2.7806E{-}10 + (3.29E{-}03w^2 - 7.392E{-}11)^2]^{(1/2)}}{[w^2 + 1.5500\ E{-}05]^{(1/2)}} (2\cos(\phi_1-\phi_2+wt))+\right.$$

$$\left.\frac{(7.38748E{-}06\ w)}{(1.550E{-}05 + w^2)} e^{-3.94E-03t} + \frac{3.752E{-}08}{w}\right\} \qquad (8.23)$$

Esta última expresión representa la solución al problema de una probeta cilíndrica del material modelado, sometida al esfuerzo vertical total dado por la ecuación (8.16); y proporciona la deformación axial unitaria que produce el esfuerzo axial aplicado sobre la misma. Nótese que las deformaciones axiales resultan ser dependientes de la frecuencia de aplicación y del nivel del esfuerzo.

Las Figs. 8.20, 8.21, 8.22, 8.23, 8.24 y 8.25 , muestran la variación de las deformaciones unitarias con el tiempo y las gráficas esfuerzo-deformación teóricas, obtenidas a partir de la ecuación (8.23) , para una probeta del material modelado sometida a un esfuerzo periódico igual a: σ = 0.275 + 0.075 sen wt, en Kg/cm^2, al aplicar cargas cuyas frecuencias fueron de : 0.2, 0.5 y 1.0 hertz, respectivamente.

Estos resultados y algunos otros serán comparados con la respuesta experimental del material, obtenida de pruebas dinámicas de laboratorio, en el capítulo IX.

RESPUESTA TEÓRICA
Esf.v. =0.275+0.075sen(wt), f=0.1 hz.

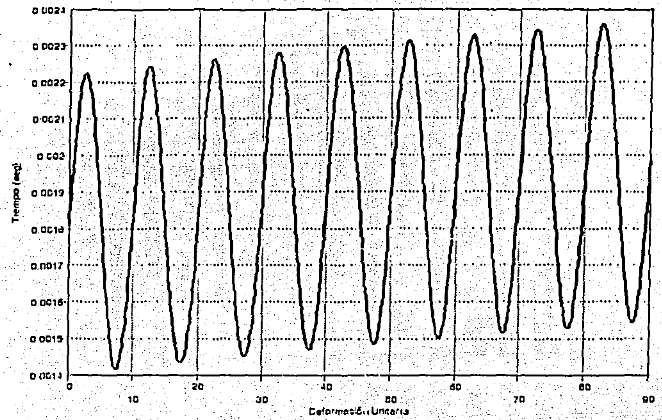


Fig 6 20

CURVA ESFUERZO DEFORMACIÓN TEÓRICA
Esf.v. =0.275+0.075sen(wt), f=0.1 hz.

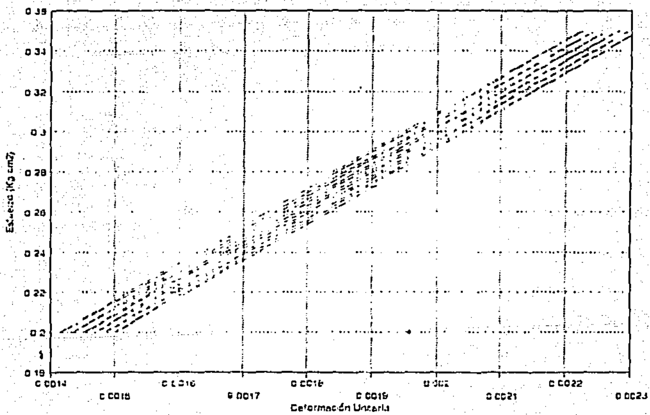


Fig 6 21

RESPUESTA TEÓRICA
Esf.v = 0.275 + 0.075 sen(wt), f = 0.5 Hz.

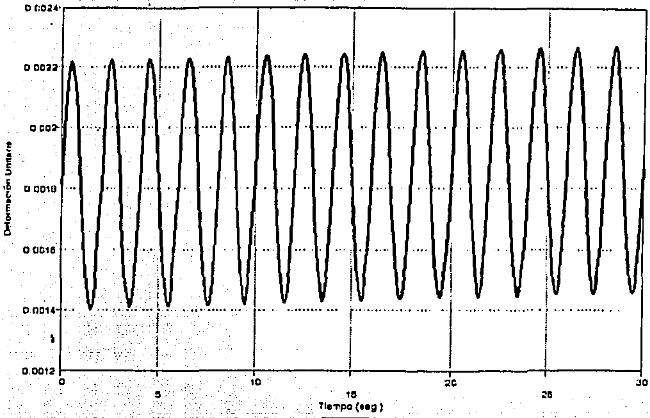


Fig. 6.22

CURVA ESFUERZO-DEFORMACIÓN TEÓRICA
Esf.v = 0.275 + 0.075 sen(wt), f = 0.5 Hz.

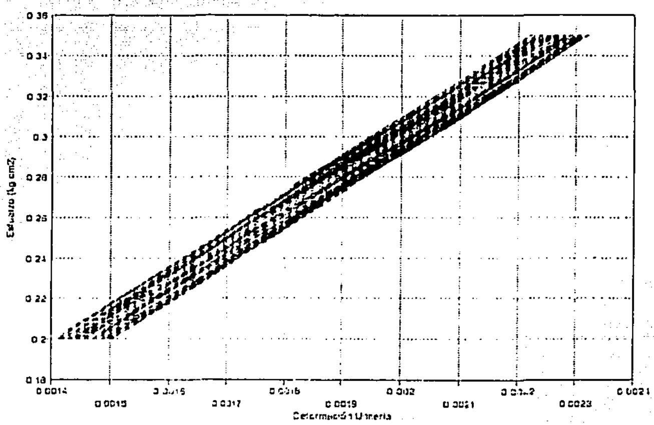


Fig. 6.23

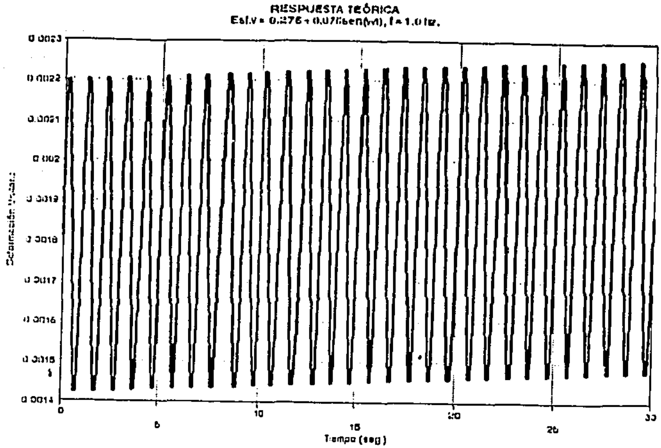


Fig. 8.24

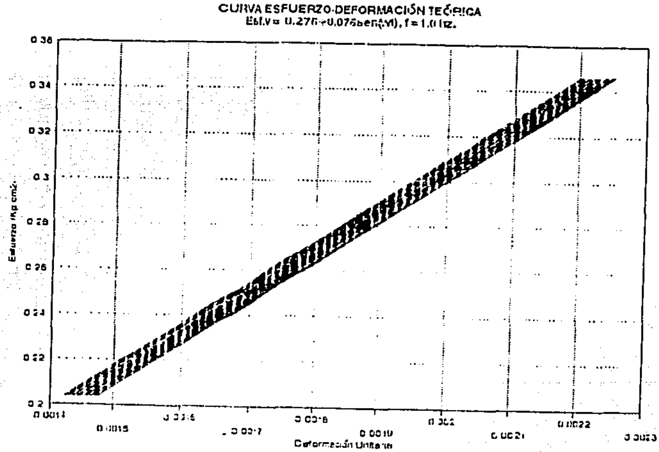


Fig. 8.25

CAPÍTULO IX

PROPIEDADES DINÁMICAS DEL MATERIAL ESTUDIADO

En el capítulo anterior se estableció un modelo matemático capaz de reproducir el comportamiento de una probeta de arcilla sometida a esfuerzo vertical total estático, constante y uniforme y se propuso la solución teórica al problema de una probeta cilíndrica del mismo material bajo esfuerzo vertical cíclico.

Para comprobar la eficiencia del modelo en la predicción del comportamiento dinámico de la arcilla, se realizaron pruebas de laboratorio y se compararon los resultados experimentales con los teóricos.

9.1 Procedimiento de prueba

Se realizaron tres pruebas triaxiales cíclicas no consolidadas sobre la misma probeta.

9.1.1 Preparación del especímen

El labrado de la probeta, de la misma muestra utilizada para la obtencion del modelo, se realizó en un torno de labrado con el uso de un hilo de acero muy fino humedecido, con el cabeceador se dió la altura adecuada.

Las dimensiones de la probeta resultaron ser: 38mm de diámetro promedio y 90mm de altura.

El montaje en la cámara se realizó de la forma convencional recomendada para ello, (Ref. 12).

9.1.2 Prueba triaxial cíclica

No se realizó saturación del material. No se aplicó más presión confinante que la que ejerce el tirante de agua que contiene la cámara triaxial.

Con los drenajes de la cabeza y la base de la probeta abiertos, se aplicó sobre ésta un esfuerzo vertical cíclico :

$$\sigma_x = \sigma_{est} + \sigma_o \text{ sen } wt$$

donde:

$$\sigma_{est} = 0.275 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_o = 0.075 \text{ Kg/cm}^2$$

De esta manera, sobre el especímen se ejerció un esfuerzo estático constante de 0.20 Kg/cm^2 y un esfuerzo cíclico que varió entre 0.20 y 0.35 Kg/cm^2.

La lectura de la fuerza aplicada y de los desplazamientos del material asociados, se inició al tiempo en que se liberó el vástago de la cámara y se despreciaron los datos de los dos primeros ciclos, por mostrar que el sistema no se había estabilizado.

Con el mismo esfuerzo, se ensayó la probeta a frecuencias desde 0.2 hasta 2.0 hertz , en intervalos de 0.1 hertz y se efectuaron 20 ciclos a la misma frecuencia.

Una vez finalizada la primera prueba, se descargó la probeta y se dejó en reposo por un lapso de dos horas después del cual se repitió el procedimiento anterior. La tercera prueba, señalada como prueba 3, se inició inmediatamente después de haber finalizado la prueba 2, sin dejar reposar la probeta.

Las Figs. 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5 y 9.6, muestran la variación de la deformación unitaria en el tiempo y las curvas esfuerzo-deformación de las pruebas (1,2 y 3) para una frecuencia de 0.5 hertz.

9.2 Comparación de la respuesta teórica con los resultados experimentales

Se calculó el error del modelo en cada punto de las curvas esfuerzo-deformación para cada frecuencia en cada prueba. Se obtuvo el error promedio correspondiente a cada frecuencia en cada uno de los ensayes.

La Fig. 9.7, muestra estos valores como puntos aislados, y con línea llena, el promedio general del error por frecuencia. De esta manera , se obtuvo que el error promedio del modelo es de 2.6734 % , con una desviación estándar de ± 0.625 %. El 82.93 % de los valores se encuentran a $\pm\sigma$ del valor promedio, un 14.69 % a $\pm 2\sigma$ del valor promedio y un 2.38 % de los datos se alejan más de 2σ de éste. (El símbolo σ se utiliza en esta ocasión para representar a la desviación estándar y no a un esfuerzo).

Lo anterior condujo a considerar el modelo satisfactorio en la predicción de la respuesta dinámica del material bajo las condiciones ensayadas.

La linealidad del modelo, permite la superposición de estados de esfuerzo que reproduzcan las condiciones reales en las que se encuentra el material en el depósito natural y/ó en las pruebas dinámicas convencionales de laboratorio, al modificar la ecuación (8.23). Sin embargo, este estudio escapa al objetivo del presente trabajo.

CURVA ESFUERZO-DEFORMACIÓN EXPERIMENTAL
Prueba No. 1, frecuencia 0.5 Hz.

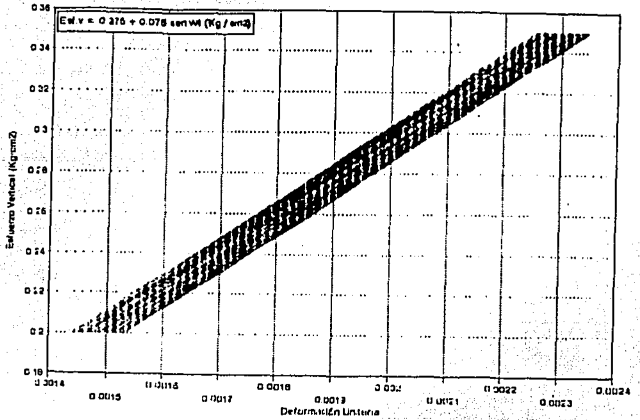


Fig. 9.2

RESPUESTA EXPERIMENTAL
Prueba No. 1, frecuencia 0.5 Hz.

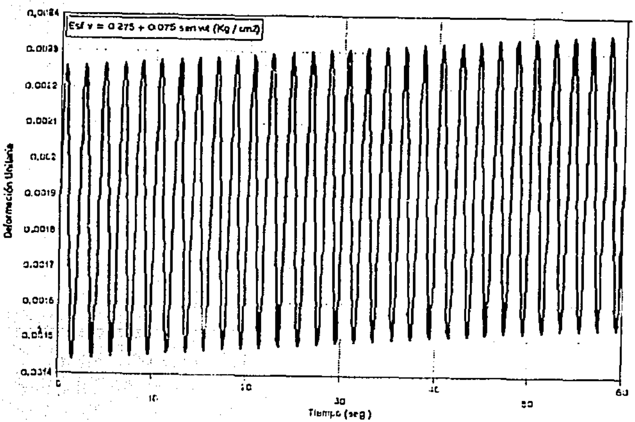


Fig. 9.1

RESPUESTA EXPERIMENTAL
Prueba No. 2 , frecuencia 0.5 Hz.

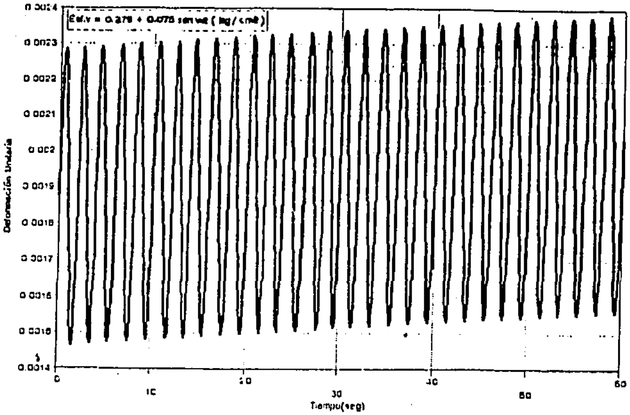


Fig 9.3

CURVA ESFUERZO DEFORMACIÓN EXPERIMENTAL
Prueba No. 2 , frecuencia 0.5 Hz.

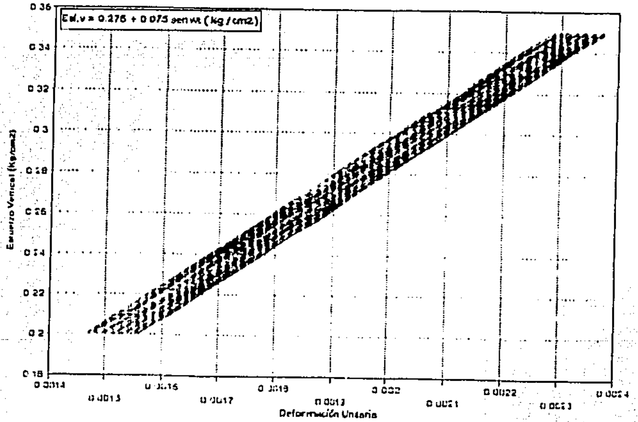


Fig 9.4

RESPUESTA EXPERIMENTAL
Prueba No. 3 , frecuencia 0.5 hz.

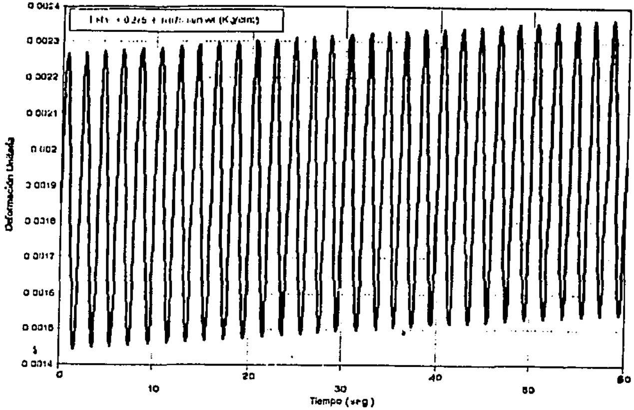


Fig. 9.5

CURVA ESFUERZO-DEFORMACIÓN EXPERIMENTAL
Prueba No. 3 , frecuencia 0.5 hz.

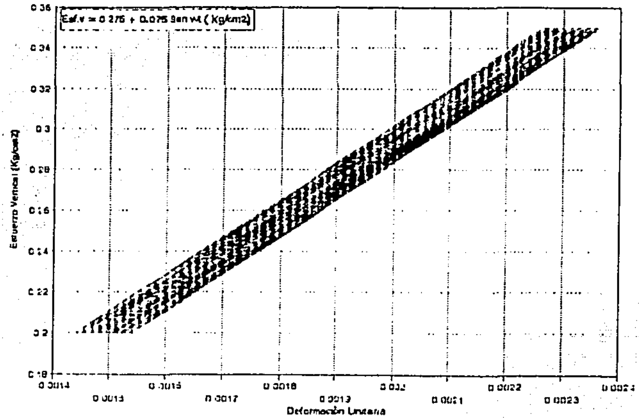


Fig. 9.6

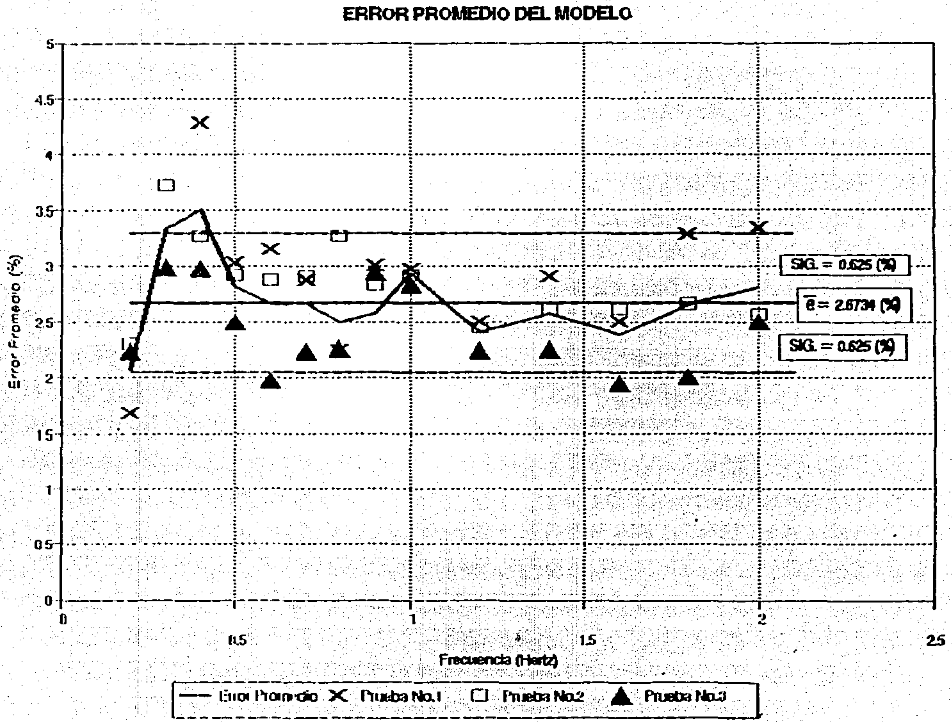

ERROR PROMEDIO DEL MODELO
Error Promedio (%)
Frecuencia (Hertz)
SIG. = 0.625 (%)
$\bar{e}$ = 2.6734 (%)
SIG. = 0.625 (%)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Error Promedio
Prueba No.1
Prueba No.2
Prueba No.3

Fig. 9.7

9.3 Análisis de los resultados y determinación de las propiedades dinámicas del material

En la presente sección , se analizarán las tendencias de las respuestas teórica y experimental de algunos parámetros como son ; el trabajo histerético por ciclo y acumulado, la relación de amortiguamiento y el módulo medio de rigidez del material con respecto a la frecuencia y al número de ciclos.

9.3.1 Trabajo histerético.

Así se define al área encerrada en una lazo de histéresis de la curva esfuerzo-deformación de un material ensayado bajo carga cíclica.

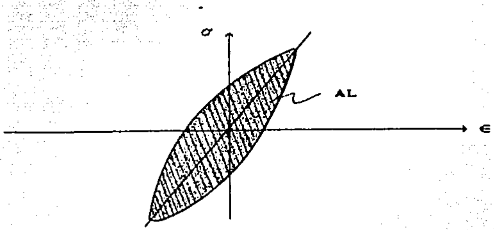


Fig. 9.8 Lazo de histéresis

Este área, como se menciona en el capítulo III, es una medida de la energía disipada en el material durante el proceso de carga y descarga en una unidad de período , T, y conduce físicamente a una deformación permanente, no recuperable del material.

En la Fig. 9.9 se muestra como el trabajo histerético obtenido en una frecuencia determinada, disminuye para cada ciclo, tanto para el modelo , como en el material real y se mantiene la misma tendencia en todos los ciclos.

El error entre los resultados obtenidos del modelo y la respuesta experimental disminuye a medida que el número de ciclos aumenta.

La Fig 9.10 representa el trabajo histerético del primer ciclo con respecto a la frecuencia de prueba. Se observa que a medida que la frecuencia aumenta, el trabajo histerético disminuye, sin embargo, no se anula. Como se estudió en el capítulo IV, ésto puede explicarse a partir del modelo teórico formado por un sólido de tres parámetros y un material de Maxwell.

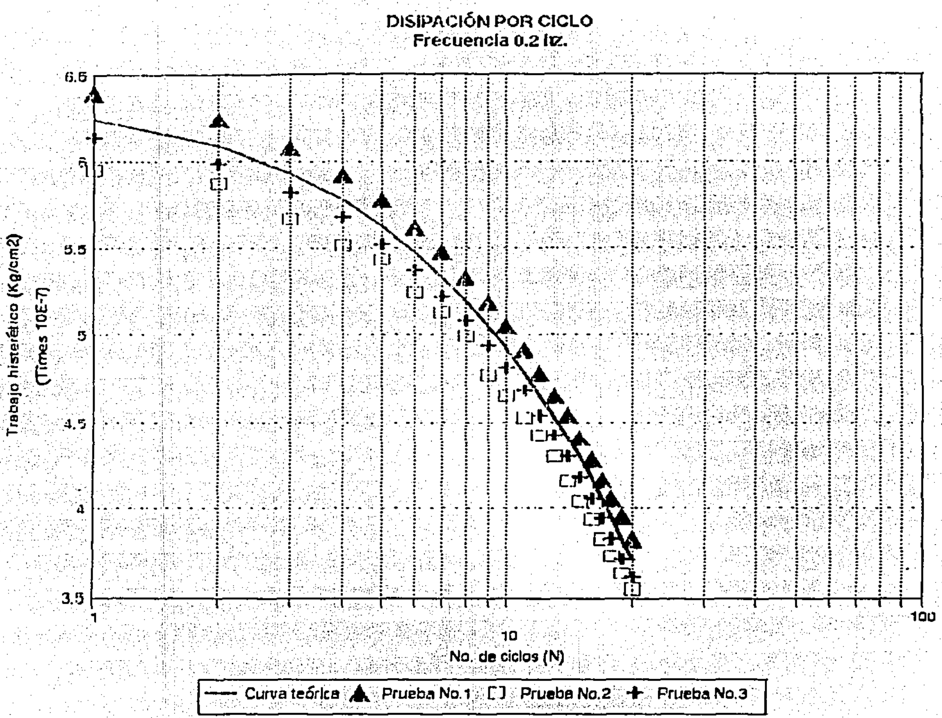

DISIPACIÓN POR CICLO
Frecuencia 0.2 Hz.
Trabajo histerético (Kg/cm2)
(Times 10E-7)
6.5
6
5.5
5
4.5
4
3.5
1
10
100
No. de ciclos (N)
Curva teórica
Prueba No.1
Prueba No.2
Prueba No.3

Fig. 9.9

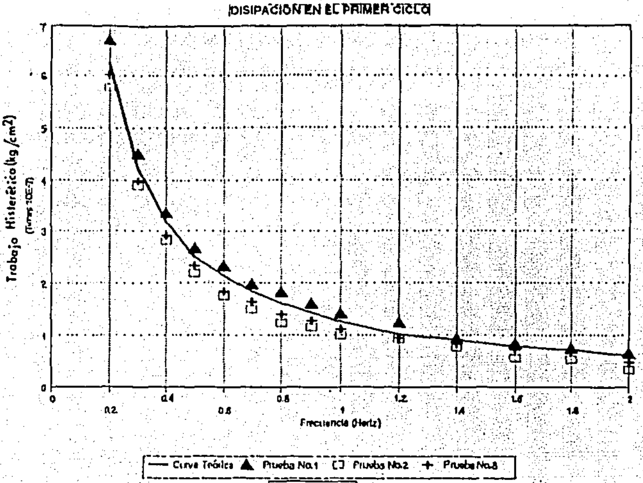


FIG. 9.10

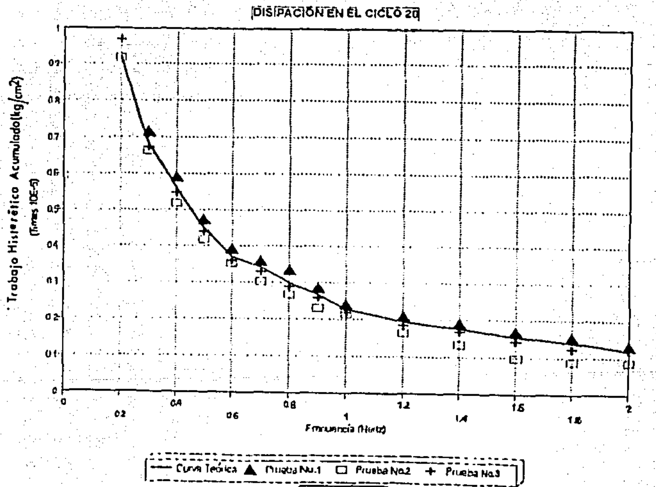


FIG. 9.11

Para el sólido de tres parámetros, se observa una tendencia de aproximación a un fluido viscoso para frecuencias altas, mientras que el modelo de Maxwell se aproxima a un sólido elástico para las mismas condiciones. Por esto disminuye el trabajo histerético, sin embargo, nunca se presentará un comportamiento elástico; éste será asintótico al llegar a un punto donde la disipación se haga independiente de la frecuencia.

Se observó que el error del modelo disminuye a medida que crece la frecuencia de prueba.

La Fig. 9.11 muestra la misma tendencia anterior para el trabajo histerético acumulado en 20 ciclos, contra la frecuencia de aplicación de la carga.

9.3.2 Relación de amortiguamiento

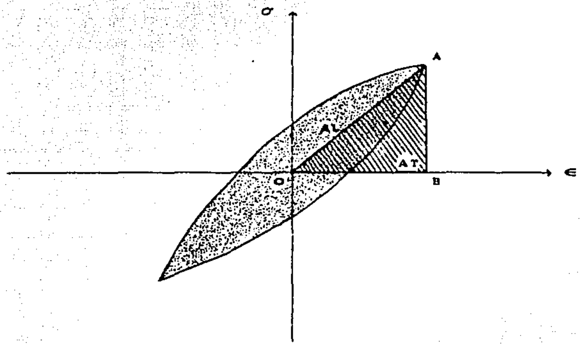


Fig. 9.12 Relación de amortiguamiento

Se define como relación de amortiguamiento crítico ,B, al resultado de dividir el trabajo histerético de un ciclo completo de carga y descarga, entre el área del triángulo OABO y multiplicar por $1/(4\pi)$:

$$B(\%) = \frac{AL}{AT * 4\pi} * 100 \qquad (9.1)$$

La Fig. 9.13 muestra la variación de la relación de amortiguamiento, B, con respecto al número de ciclos, para una frecuencia de prueba dada.

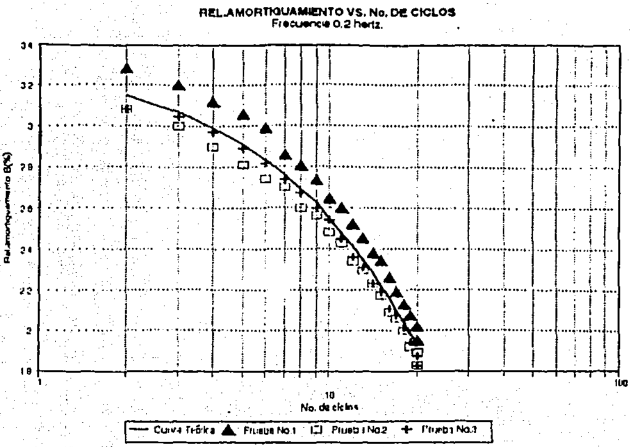


Fig. 9.13

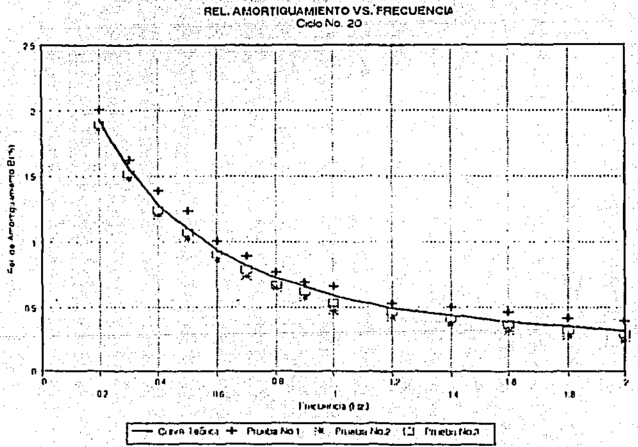


Fig. 9.14

REL. AMORTIGUAMIENTO VS. FRECUENCIA
Ciclo No. 1

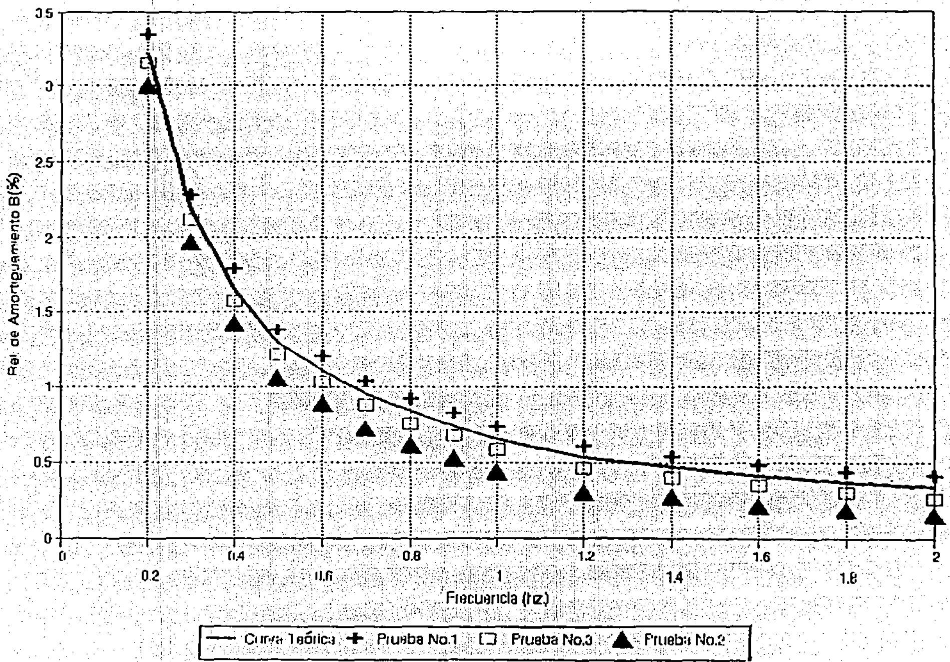


Fig. 9.15

Se observa una tendencia a disminuir con el incremento del número de ciclos. Esta misma tendencia se observa en el error del modelo.

Las Figs. 9.14 y 9.15 indican que para un ciclo determinado la relación de amortiguamiento disminuye al aumentar la frecuencia y el error del modelo permanece casi constante a lo largo de toda la curva. Esta presenta una ley de variación que se pudo aproximar a la ecuación:

$$B \cong 1.788\ (0.38175)^{f}$$

donde; f es la frecuencia de aplicación de la carga, para el ciclo 20. La expresión anterior tiene un factor de correlación de 98.33 % . Para el primer ciclo, no se encontró ninguna correlación satisfactoria.

9.3.3 Módulo medio de rigidez (Ee)

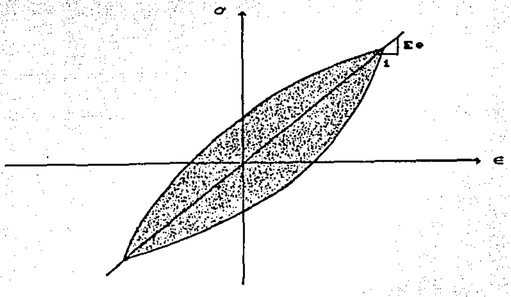


Fig. 9.16 Módulo medio de rigidez (Ee)

El módulo de rigidez , Ee, en cada ciclo fué calculado como el módulo secante, es decir, como la pendiente de la recta secante a cada lazo de histéresis.

Se observó que el módulo ,Ee , se deteriora a medida que aumenta el número de ciclos de prueba, a una frecuencia dada,como se muestra en la Fig. 9.17.

Las Figs. 9.18 y 9.19 exhiben una tendencia al aumento del módulo Ee al incrementarse la frecuencia de carga.

Esto último es de esperarse, debido a que mientras mayor sea la velocidad de aplicación de la carga, la pendiente de la tangente inicial al lazo de histéresis tiende a incrementarse, como se indicó en el capitulo II (Fig. 2.2) siempre que el modelo involucre un cuerpo de Kelvin, como en este caso. Por tanto, el módulo secante también tiende a aumentar.

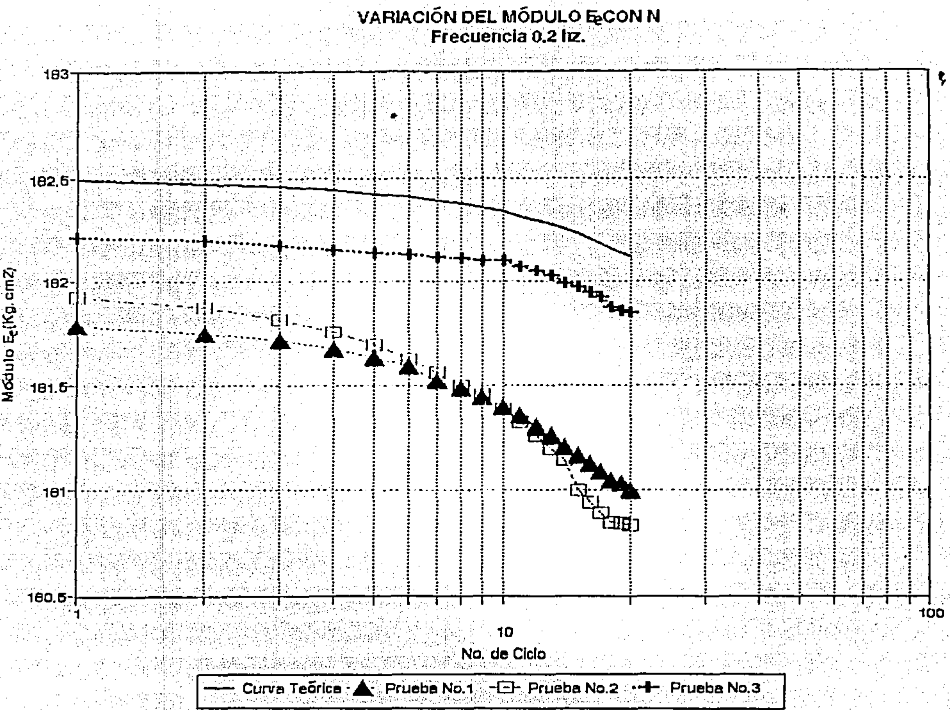

VARIACIÓN DEL MÓDULO E₂CON N
Frecuencia 0.2 hz.
183
182.5
182
181.5
181
180.5
Módulo E₂(Kg.cm2)
1
10
100
No. de Ciclo
Curva Teórica
Prueba No.1
Prueba No.2
Prueba No.3

Fig. 9.17

La relación entre el módulo ,Ee, más pequeño, encontrado en los resultados experimentales y el módulo $E_{est.}$ estático del material, resultó ser de 1.19 % y la relación entre el módulo experimental mayor y el módulo estático fué de 1.206 % ,donde; $E_{est.}$ = 151.82 Kg/cm^2.

Para este parámetro, el modelo presentó un error promedio de 0.83 %, con respecto a los resultados experimentales.

9.4 Disipación de energía del material a partir de las expresiones de trabajo

En el capítulo anterior se obtuvieron expresiones que describen la respuesta del material utilizado, bajo esfuerzo vertical constante y oscilatorio. Se halló que la deformabilidad de fluencia del modelo representativo de la arcilla estudiada está definida por:

$$J(t) = \frac{2}{3}\;\frac{p_{1_o} + t}{q_{1_o}} + \frac{1}{3}\left\{ \frac{p_{1_v}}{q_{1_v}} e^{-\lambda t} + \frac{1}{q_{o_v}} (1 - e^{-\lambda t}) \right. \qquad (9.2)$$

donde; $\lambda = \dfrac{q_{o_v}}{q_{1_v}}$

Para obtener los términos real e imaginario que componen a la deformabilidad compleja, G(w), del modelo se recurre a la ecuación (5.2). Al sustituir en ésta la expresión (9.2), se obtiene:

$$G_1(w) \cos wt - G_2(w) \operatorname{sen} wt =$$

$$\lim_{T\to\infty} \left\{ \left[\frac{2}{3} J_o(t+T) + \frac{1}{3} J_v(t+T)\right] - w\left[\frac{2}{3} \int_{-T}^{t} J_o(t-t') \operatorname{sen} wt'dt' - \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{1}{3} \int_{-T}^{t} J_v(t-t') \operatorname{sen} wt'dt' \right]\right\} \qquad (9.3)$$

De aplicar propiedades de los límites y propiedades de la integral a la ecuación (9.3), ésta última se puede escribir como la suma de las dos expresiones siguientes:

$$G_{1_o}(w) \cos wt - G_{2_o}(w) \operatorname{sen} wt =$$

$$\lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{2}{3} J_o(t+T) - \frac{2}{3} w \int_{-T}^{t} J_o(t-t') \operatorname{sen} wt'dt' \right\} \qquad (9.4a)$$

$$G_{1_v}(w) \cos wt - G_{2_v}(w) \operatorname{sen} wt =$$

$$\lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{3} J_v(t+T) - \frac{1}{3} w \int_{-T}^{t} J_v(t-t') \operatorname{sen} wt'dt' \right\} \qquad (9.4b)$$

Esto significa que las componentes de la deformabilidad compleja del modelo pueden ser expresadas como:

$$G_1(w) = \frac{2}{3}\, G_{1_o}(w) + \frac{1}{3}\, G_{1_v} \qquad (9.5a)$$

$$G_2(w) = \frac{2}{3}\, G_{2_o}(w) + \frac{1}{3}\, G_{2_v} \qquad (9.5b)$$

donde:

G_{1_o} y G_{2_o} son las componentes de la deformabilidad compleja correspondientes al modelo de Maxwell, dadas por las expre - siones (5.8).

G_{1_v} y G_{2_v} son las componentes de la deformabilidad compleja correspondientes al sólido de tres parámetros dadas en (5.14)

Al sustituir (5.8) y (5.14) en las expresiones (9.5a) y (9.5b) se obtiene:

$$G_1(w) = \frac{2}{3}\;\frac{p_{1_o}}{q_{1_o}} + \frac{1}{3}\;\frac{q_{1_v}\, p_{1_v}\, w^2 + q_{o_v}}{q_{o_v}^2 + q_{1_v}^2\, w^2} \qquad (9.6a)$$

$$G_2(w) = \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{q_{1_o} w} + \frac{1}{q_{1_o} w}\,\mathrm{sen}\, wT\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{(q_{1_v} - q_{o_v} p_{1_v})\, w}{q_{o_v}^2 + q_{1_v}^2\, w^2}\right] \qquad (9.6b)$$

donde T es el período.

Al introducir la ecuación (9.6b) en (3.7) se obtiene:

$$W = -\sigma_o^2 w\,\frac{\pi}{w}\, G_2 = -\pi\sigma_o^2\left[\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{q_{1_o} w} + \frac{1}{q_{1_o} w}\,\mathrm{sen}\, wT\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{(q_{1_v} - q_{o_v} p_{1_v})\, w}{q_{o_v}^2 + q_{1_v}^2\, w^2}\right)\right.$$

$$(9.7)$$

donde:

W : trabajo y está dado en Kg/cm^2
σ_o: amplitud del esfuerzo, en Kg/cm^2
w : frecuencia circular, en rad/seg.
T : período, en seg.

Las unidades de los parámetros viscoelásticos son las mismas utilizadas en el capítulo anterior.

Esta ecuación representa el trabajo realizado por la fuerza durante un período de carga y muestra la cantidad de energía que se disipa en un ciclo.

Al sustituir en la expresión (9.7) los parámetros viscoelásticos del modelo , se llega a la ecuación:

$$W = -\pi\sigma_o^2\left[\frac{3.7535E-08}{w}(\text{sen } wT-1) - \frac{(39062.5 - 5240.385)w}{71005.8 + 4577636718\ w^2}\right] \quad (9.8)$$

donde W = B

De la Fig. 9.20 se puede concluir que esta ecuación proporciona valores de trabajo histerético muy cercanos a los valores teóricos para el primer ciclo . Esto es de esperarse cuando se trabaja con unidades completas de período, como se discutió en el capítulo III.

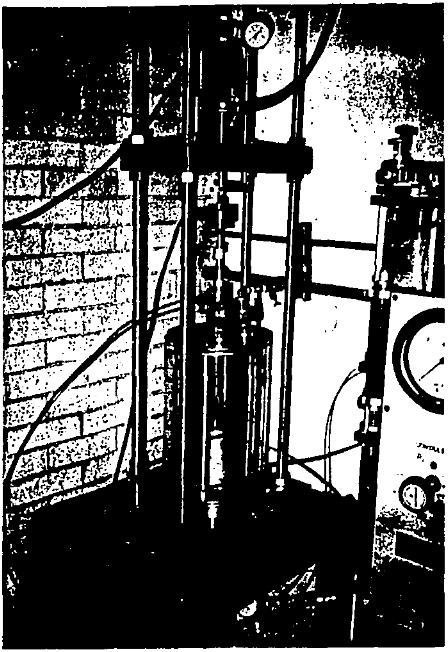


Fig. 9.17(b) Probeta de arcilla después de la aplicación del esfuerzo post-cíclico de falla

VARIACIÓN DEL MÓDULO E_c CON F
Ciclo No.1

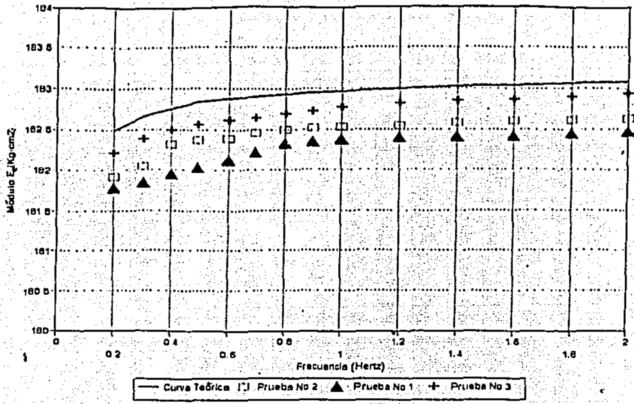


Fig 9.18

VARIACIÓN DEL MÓDULO E_c CON F
Ciclo No. 20

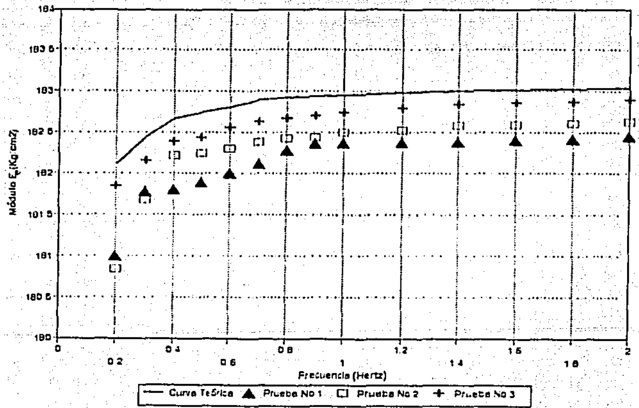


Fig 9.19

DISIPACION EN EL PRIMER CICLO

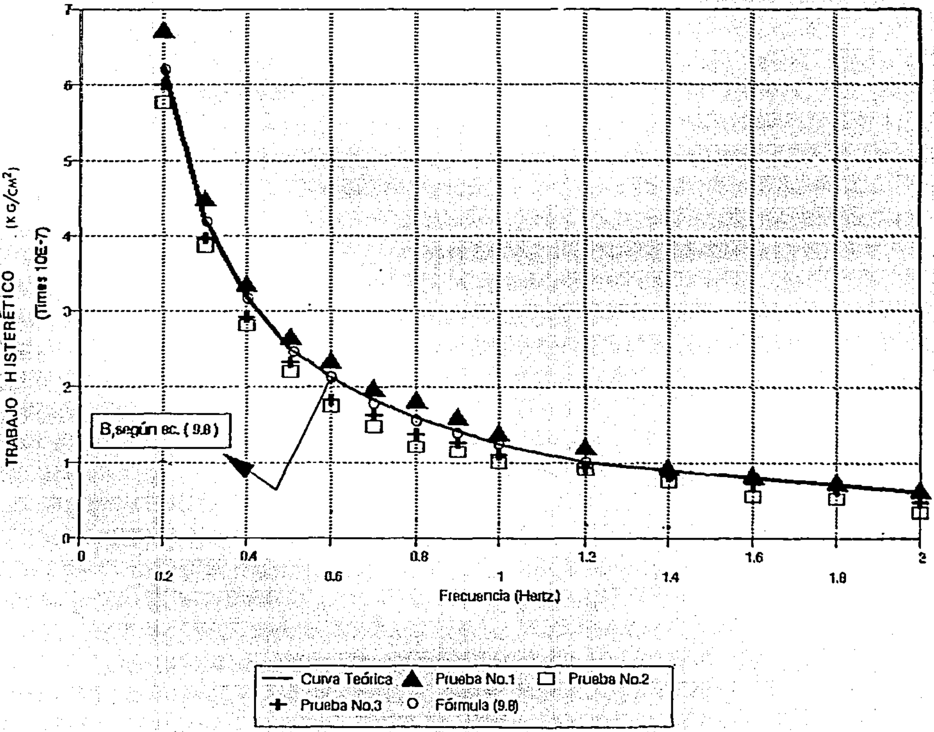


FIG. 9.20

CAPÍTULO X

CONCLUSIONES

En el enfoque inicial de esta tesis, se buscó comparar el comportamiento dinámico de probetas de arcilla, obtenidas en el Parque Ramón López Velarde, de la zona del Lago del Valle de México, con un modelo viscoelástico lineal, cuyas constantes viscoelásticas se obtuvieron de pruebas de control.

Al conocer las constantes que identifican al material, según criterios termodinámicamente válidos, se sometió el material a carga senoidal controlada, dentro de un intervalo cuyo límite superior no sobrepasó la carga de preconsolidación obtenida de pruebas de consolidación comunes en Geotecnia. Los ensayes de laboratorio y los resultados teóricos obtenidos permiten postular las siguientes conclusiones:

1) Las pruebas de consolidación isotrópica en cámara triaxial, bajo esfuerzos uniformes constantes permitieron definir un modelo capaz de reproducir la respuesta del suelo, bajo esas condiciones, que resultó ser un sólido de tres parámetros. Este modelo representa la relación constitutiva entre las componentes volumétricas de los tensores de deformaciones unitarias y esfuerzos

2) Se ensayaron especímenes de arcilla en consolidación anisotrópica en cámara triaxial, con esfuerzo vertical uniforme y constante en el tiempo, cuya respuesta condujo a la modelación del tensor general de deformaciones unitarias mediante un modelo de Burgers modificado, de cinco parámetros, compuesto por un sólido de tres parámetros, en componente volumétrica, y un modelo de Maxwell, en componente distorsional

3) En condiciones de carga axial estática uniforme, constante en el tiempo, el modelo de cinco parámetros presentó un error máximo de 0.28% con respecto a la respuesta experimental

4) En condiciones de carga axial dinámica , el modelo de cinco parámetros reprodujo la respuesta del suelo con un error promedio de 2.6734% y presentó una desviación estándar, σ = 0.625%, durante 42 pruebas controladas. El 82.93% de los errores promedio por frecuencia se encontró dentro del intervalo $\pm\,\sigma$, el 14.69% dentro del intervalo $\pm\,2\sigma$ y un 2.38% se alejó más de $\pm\,2\sigma$ del error promedio del modelo

5) Lo anterior permite afirmar que el modelo de cinco parámetros encontrado es capaz de reproducir la respuesta estática y dinámica de un especímen cilíndrico de la arcilla estudiada sometido a carga axial uniforme, en las condiciones de ensaye analizadas, dentro de los intervalos de aceptación comúnmente usados en pruebas controladas

6) La linealidad del modelo viscoelástico encontrado permite la superposición de estados de esfuerzo para reproducir la respuesta del material en estado natural, durante pruebas dinámicas de laboratorio convencionales, al recurrir al modelo viscoelástico representativo. Este aspecto debe ser estudiado con mayor amplitud

7) El resultado de los ensayes mostró que la disipación histerética de energía en el material, disminuye a medida que aumenta el número de ciclos de carga. El modelo viscoelástico presenta la misma tendencia y muestra un error máximo 3.51% y un error mínimo de 0.66% ; el error disminuye al aumentar el número de ciclos

8) La disipación histerética de energía, tanto en el material como en el modelo, disminuye a medida que la frecuencia aumenta, sin que se anule. El error del modelo disminuye al incrementarse la frecuencia. Las expresiones desarrolladas en el capítulo IX representan debidamente la disipación de energía medida durante los ensayes, con la misma aproximación que la del modelo de Burgers modificado

9) Los resultados experimentales muestran que la relación de amortiguamiento de la arcilla ensayada es inferior al 4% del amortiguamiento crítico y disminuye al aumentar el número de ciclos de carga y la frecuencia de prueba. Así mismo el error del modelo resultó menor a 2.5%, con un error mínimo igual a 0.38%

10) El módulo secante medio de rigidez se degrada en función del número de ciclos de carga; se observó que ese módulo se incrementa en función de la frecuencia de ensaye, tal como lo establece el modelo viscoelástico representativo. Esto se debe a la baja compresibilidad del líquido intersticial del material y a la baja permeabilidad del suelo. Esto se puede atribuir al comportamiento del cuerpo de Kelvin involucrado en el modelo de Burgers modificado que se utilizó. El error máximo del modelo viscoelástico para reproducir el cambio del módulo secante medio de rigidez del suelo, fué igual a 0.796%

11) Tanto la arcilla como el modelo de cinco parámetros, exhiben deformaciones irrecuperables muy pequeñas en condiciones de consolidación isotrópica, mientras que en consolidación anisotrópica, las deformaciones irrecuperables adquieren valores importantes, aún a bajos niveles de esfuerzo. Se observó que la relación entre los esfuerzos principales influye de manera evidente en la respuesta del suelo, al igual que en la respuesta del modelo

12) Con base en los resultados obtenidos, se juzga necesario continuar con un programa experimental en muestras de otros materiales comunes en suelos, para obtener sus modelos viscoelásticos representativos y corroborar la aplicación de modelos reológicos simples, cuyas relaciones constitutivas permitan establecer respuestas teóricas representativas, dentro de intervalos de aceptación comunes.

REFERENCIAS

1 RODRIGUEZ CUEVAS, Neftalí

''*Apuntes de clase del curso de Mecánica Avanzada I*'',1993, D.E.P.F.I. , UNAM, México D.F. , México.

2 LEVI , Enzo

''*Elementos de la Mecánica del Medio Continuo*'', 1992, Noriega Editores, LIMUSA, México D.F. , México.

3 FLÜGGE , Wilhelm

''*Viscoelasticity*'',1967, Blaisdell Publishing Company, Massachusetts, U.S.A.

4 ZILL , Dennis G.

''*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*'', 1982 , Wadsworth Internacional/Iberoamérica, Belmont, California, U.S.A .

5 PASSAGLIA, E. y KNOX , J. R.

''*Viscoelastic Behavior and Time-Temperature Relationships*'', 1964, Polymer Science and Engineering Series, New York, U.S.A .

6 CRANDALL, S. H.

''*The Role of Damping in Vibration Theory*'', 1970, Journal of Sound and Vibration, V.11, Academic Press, London.

7 ZENER, B. J.

''*Elasticity and Anelasticity of Metals*'',1948 , Chicago: University of Chicago Press. U.S.A .

8 LAZAN, B. J.

''*Damping of Materials and Members in Structural Mechanics*'', 1968, Oxford: Pergamon Press.

9 PAPOULIS, A.

''*The Fourier Integral and Its Applications*'', 1962, McGraww - Hill Book Company, New York, U.S.A .

10 SEED, B. L.

''*Increased Resistance to Deformation of Clay Caused by Repeated Loading*'', 1958, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division; Proc. of The American Society of Civil Engineers.

11 THOMSON, William T.

''*Teoría de Vibraciones . Aplicaciones*'', 1983, Editorial Prentice/Hall Internacional, Bogotá, Colombia.

12 HEAD, K. H.

''*Manual of Soil Laboratory*'', 1984, Pentech Press Limited. Gran Bretaña.

13 SILVER, M. L.

''*Laboratory Triaxial Testing Procedures to Determine The Cyclic Strenght of Soil*'', 1977, Dpt. of Material Engineering, Illinois University, Chicago, U.S.A.

14 FOSS, K. A.

''*Coordinates which uncouple the equations of motion of damped linear dynamic systems*'', 1958, J. appl. Mech. 25, 361.

15 CRANDALL, S. H. and McCALLEY, R. B.

''*Shock and Vibration Handbook*'', Vol. 2, chapter 28, 1961, ed. by C. M. Harris and C. E. Crede, New York: McGraw-Hill Book Co. Numerical methods of analysis.

16 CAUGHEY, T. K. and O'KELLY, M. E. J.

''*Effect of Damping on the natural frequencies of linear dynamics systems*'', 1961, J. acoust. Soc. Amer. 33, 1458.

17 CAUGHEY, T. K.

''*Random excitation of a system with bilinear hysteresis*'', 1960, J. appl. Mech. 27, 649.

18 CRANDALL, S. H., KHABBAZ, G. R. and MANNING, J. E.

''*Random vibration of an oscillator with nonlinear damping* '', 1964, J. acoust. Soc. Amer. 36, 1330.

19 TORRES, M. R. and MOTE, C. D.

''*Expected equivalent damping under random excitation*'',1969 , ASME Paper No. 69- Vibr- 34 .

20 FRAEIJS DE VEUBEKE, B. M.

''*Influence of internal damping on aircraft resonance*'', 1962, AGARD Manual of Elasticity, Vol. 1 , chapter 3.

21 CAUGHEY, T. K.

''*Vibration of Dynamic Systems with Linear Hysteretic Damping*'', 1962, Proc. Fourth U.S. natn. Congr. appl. Mech. 87, New York.

22 CRANDALL, S. H.

'' *Dynamic Response of Systems with Structural Damping*'', 1963, Air , Space and Instruments, Draper Anniversary Volume, p. 183, ed. by S. Lees, New York: McGraw-Hill Book Co.

A P E N D I C E A

ASPECTOS BASICOS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$. La integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} e^{-st} f(t)\, dt \qquad (1)$$

se llama *Transformada de Laplace* de f, siempre que el límite exista.

Simbólicamente, la transformada de Laplace de f se denota por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ y puesto que el resultado depende de s se escribe $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

Para una suma de funciones se puede escribir:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \qquad (2)$$

cuando ambas integrales convergen. Por lo tanto se tiene que:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta f(t)\} = \alpha\, \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\, \mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s) \qquad (3)$$

La integral que define a la transformada de Laplace no converge necesariamente. Por ejemplo, ni $\mathcal{L}\{1/t\}$ ni $\mathcal{L}\{e\wedge t^2\}$ existen . En este caso sólo se formulan condiciones suficientes que garanticen la existencia de $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Teorema:

Sea $f(t)$ continua en intervalos para $t \geq 0$. Si

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \; t > T \qquad (4)$$

para alguna constante c y $T > 0$, entonces $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

Si por ejemplo f es una función creciente, entonces la la condición $|f(t)| \leq Me^{ct}$, $t > T$, simplemente expresa que la gráfica de f en el intervalo (T, ∞) no crece más rápidamente que la gráfica de Me^{ct}, donde c es u a constante positiva.

Se dice que las funciones que tienen a ésta función exponencial como cota superior para $t > T$ son de orden exponencial.

Teorema:

(a)- $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$

(b)- $\mathcal{L}\{t^n\} = n!/(s^{n+1})$, $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots$

(c)- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)$

(d)- $\mathcal{L}\{sen\ kt\} = k/(s^2+k^2)$

(e)- $\mathcal{L}\{cos\ kt\} = s/(s^2+k^2)$

(f)- $\mathcal{L}\{senh\ kt\} = k/(s^2-k^2)$

(g)- $\mathcal{L}\{cosh\ kt\} = s/(s^2-k^2)$

Transformada Inversa de Laplace:

Al hacer uso de la definición integral de la transformada de Laplace de una función f se determina otra función F, ésto es, una función del parámetro s de la transformada.

Si ahora se invierte el problema, es decir, dada $F(s)$ se desea encontrar la función $f(t)$, se dice que ésta última es la *Transformada inversa de Laplace* de $F(s)$ y se denota como

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Teorema:

(a)- $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$

(b)- $\mathcal{L}^{-1}\{n!/s^{n-1}\} = t^n$

(c)- $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)\} = e^{at}$

(d)- $\mathcal{L}^{-1}\{k/(s^2+k^2)\} = sen\ kt$

(e)- $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2+k^2)\} = cos\ kt$

(f)- $\mathcal{L}^{-1}\{k/(s^2-k^2)\} = senh\ kt$

(g)- $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2-k^2)\} = cosh\ kt$

La transformada inversa de Laplace es también una transformación lineal con las mismas propiedades que la transformada.

Fracciones Parciales:

El uso de las *fracciones parciales* es muy importante en la búsqueda de las transformadas inversas de Laplace. Aquí se hará un breve repaso de los tres casos básicos de dicha teoría. Por ejemplo, los denominadores de:

$$(a)\ F(s)=\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}$$
$$(b)\ F(s)=\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}$$
$$(c)\ F(s)=\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}$$

contienen , respectivamente,

(a)- solamente factores lineales distintos
(b)- factores lineales repetidos
(c)- un factor cuadrático.

Teorema:

Sea $f(t)$ una función continua en intervalos para $t \geq 0$ y de orden exponencial para $t > T$. Entonces

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = 0$$

Propiedades Operacionales:

Teorema:

Si a es un número real cualquiera, entonces

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

La forma recíproca del teorema anterior puede escribirse como:

$$e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}$$

En ingeniería se encuentran a menudo funciones que pueden interrumpirse. Por ejemplo, una fuerza exterior que actúa sobre un sistema mecánico ó un voltaje suministrado a un circuito pueden ser retirados después de cierto período de tiempo. Es por tanto conveniente definir una función especial llamada *Función Escalón*.

La función $\mathcal{U}(t-a)$ se define como

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

La función escalón, al ser combinada con otras funciones definidas para $t \geq 0$, elimina una parte de sus gráficas.

Teorema:

Si $a > 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s)$$

La forma recíproca del teorema anterior es

$$f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$$

donde $a > 0$ y $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Teorema:

Si $f(t)$, $f'(t)$,..............,$f^{(n-1)}(t)$, son funciones contínuas para $t \geq 0$, y de orden exponencial, y si $f^{n}(t)$ es contínua en intervalos para $t \geq 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{f^{n}(t)\} = s^{n}F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) -\ldots-f^{n-1}(0)$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Teorema:

Sea $f(t)$ contínua en intervalos para $t \geq 0$ y de orden exponencial. Entonces

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

Teorema:

Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones contínuas en intervalos para $t \geq 0$ y de orden exponencial. Entonces

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right] = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Transformada de una función periódica:

Si una función periódica tiene período T, T > 0 , entonces $f(t + T) = f(t)$. La transformada de Laplace de una función periódica puede obtenerse al integrar sobre un período.

Tabla A-I   Transformadas de Laplace

FUNCIÓN F(t)	TRANSFORMADA DE LAPLACE F(s)
1	$1/s$
t	$1/s^2$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)}$	$1/s^n$
$e^{\pm mt}$	$1/(m \pm s)$
$\frac{(1-e^{-mt})}{m}$	$\frac{1}{s(s+m)}$
$\frac{(e^{-mt}+mt-1)}{m^2}$	$\frac{1}{s^2(s+m)}$
$\operatorname{sen} \alpha t$	$\frac{\alpha}{(\alpha^2+s^2)}$
$\cos \alpha t$	$\frac{s}{(\alpha^2+s^2)}$
$\frac{\operatorname{sen} \alpha t}{\alpha}$	$\frac{1}{(\alpha^2+s^2)}$
te^{-mt}	$\frac{1}{(s+m)^2}$
$e^{-mt}(1-mt)$	$\frac{s}{(s+m)^2}$
$\frac{t \operatorname{sen} \alpha t}{2\alpha}$	$\frac{s}{(s^2+\alpha^2)^2}$
$t \cos \alpha t$	$\frac{(s^2-\alpha^2)}{(s^2+\alpha^2)^2}$

(Ref. 4)

APÉNDICE B

RESULTADOS DE LA PRUEBA DE CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL

R E S U M E N   D E   P R U E B A

LUGAR: P. R. L. V.

SONDEO: SM - 2

MUESTRA: 12

TRAMO: 8.50 - 8.70m

PROF.: 8.60m

DESCRIPCIÓN : El material resultó ser una mezcla de arcilla color café claro . de consistencia muy suave , con limo arenoso de color gris claro.

P R O P I E D A D E S

CLASIFICACIÓN SUCS.: CH

DENSIDAD DE SÓLIDOS: 2.605

CONTENIDO DE AGUA INICIAL: 369 %

CONT. DE AGUA FINAL: 225 %

RELACIÓN DE VACIOS INICIAL: 9.98

REL. DE VACIOS FINAL: 5.75

GRADO DE SATURACIÓN : 98 %

INDICE PLASTICO: 249.9 %

LIMITE LIQUIDO: 400 %

LIMITE PLASTICO: 150 %

CONTENIDO DE ARENA: 15 %

CONTENIDO DE FINOS: 85 %

CONSOLIDACION UNIDIMENSIONAL

ANTES DE LA PRUEBA

CONTENIDO DE AGUA

tara no	W tara	Wm+tara	Ws+tara	Ww	Ws	W(%)
25	9.36	29.59	13.64	15.94	4.28	372.4
58	9.16	37.22	15.15	22.07	5.99	368.4
5	9.24	34.53	14.67	19.86	5.43	365.8

Peso de probeta + anillo: 272.81 gr

Peso de los solidos: 24.42 gr

Altura de los solidos $Hs = 10\ Ws/(A*Ss) = \dfrac{10 \times 24.42}{50.52 \times 2.65} = 1.824$ mm

$Sr = Ss\ W/e = \dfrac{2.65 \times 3.69}{9.96} * 100 = 98$ %

$e = (Hi - Hs)/Hs = \dfrac{20 - 1.824}{1.824} = 9.96$

$\gamma m = Wm/Vm = \dfrac{114.45}{101.04} = 1.133$ gr/cm^3

DESPUES DE LA PRUEBA

CONTENIDO DE AGUA

tara no	W tara	Wm+tara	Ws+tara	Ww	Ws	W(%)
83	9.63	33.93	17.15	16.78	7.52	223.1
84	9.27	31.74	16.07	15.67	6.80	230.4
58	9.03	39.94	18.70	21.24	9.67	219.6

Peso de probeta + anillo: 238.73 gr.

$Sr = Ss\ W/e = \dfrac{2.65 \times 2.244}{5.759} * 100 = 103$ %

$e = (Hi - Hs)/Hs = \dfrac{12.317 - 1.824}{1.824} = 5.750$

$\gamma m = Wm/Vm = \dfrac{80.38}{62.371} = 1.289$ gr/cm^3

C O N S O L I D A C I O N   U N I D I M E N S I O N A L

POYECTO: P. R. L. V. SONDEO: SM-2

MUESTRA No. 12 PROF. 8.60m TRAMO: 8.50m-8.70m

REGISTRO DE CARGAS

ESFUERZOS

$\sigma_i = 0.0\ kg/cm^2$

$\Delta\sigma = 0.2\ kg/cm^2$

$\sigma_f = 0.2\ kg/cm^2$

DEF. DEL APARATO

$\delta_i = 0.00$ mm

$\Delta\delta = 0.022$ mm

$\delta_f = 0.022$ mm

Temperatura máxima: 24 C

Temperatura mínima: 21 C

To C	hora	tiempo	L. micróm. mm	Def. tot. mm	Def. del suelo mm
21	6:40	0.00	5.450	—	0.000
		5''	5.419	—	0.009
		10''	5.399	—	0.029
		15''	—	—	—
		20''	5.365	—	0.063
		30''	5.348	—	0.080
21	8:41	1'	5.318	—	0.110
21	6:42	2'	5.287	—	0.141
21	6:44	4'	5.242	—	0.188
21	6:50	10'	5.185	—	0.243
21	7:00	20'	5.150	—	0.278
22	7:10	30'	5.135	—	0.293
22	7:40	1h	5.105	—	0.323
22	8:40	2h	5.080	—	0.348
22	9:40	3h	5.071	—	0.357
23	11:40	5h	5.065	—	0.363
24	15:40	9h	5.062	—	0.366
23	17:40	11h	5.060	—	0.368
21	6:40	24h	5.058	—	0.370

C O N S O L I D A C I O N   U N I D I M E N S I O N A L

POYECTO: P. R. L. V.   SONDEO: SM - 2

MUESTRA No. 12   PROF. 8.60m   TRAMO: 8.50m - 8.70m

REGISTRO DE CARGAS

ESFUERZOS

σ_i = 0.2 kg/cm^2

$\Delta\sigma$ = 0.2 kg/cm^2

σ_f = 0.4 kg/cm^2

DEF. DEL APARATO

δ_i = 0.022 mm

$\Delta\delta$ = 0.011 mm

δ_f = 0.033 mm

Temperatura maxima: 24 C

Temperatura minima: 21 C

To C	hora	tiempo	L. microm. mm	Def. tot. mm	Def. del suelo mm
21	6:50	0	5.058	—	0.370
		5''	5.028	—	0.389
		10''	5.021	—	0.398
		20''	4.994	—	0.423
		30''	4.974	—	0.443
21	6:51	1'	4.957	—	0.460
21	6:52	2'	4.927	—	0.490
21	6:54	4'	4.889	—	0.528
22	7:00	10'	4.837	—	0.580
22	7:10	20'	4.803	—	0.614
22	7:20	30'	4.787	—	0.630
22	7:50	1h	4.742	—	0.675
23	8:50	2h	4.712	—	0.705
24	9:50	3h	4.697	—	0.720
24	11:50	5h	4.686	—	0.731
24	15:50	9h	4.677	—	0.740
23	19:50	13h	4.676	—	0.741
21	5:50	23h	4.676	—	0.742

CONSOLIDACION UNIDIMENSIONAL

POYECTO: P.R.L.V. SONDEO: SM - 2

MUESTRA No. 12 PROF. 8.60m TRAMO: 8.50m - 8.70m

REGISTRO DE CARGAS

ESFUERZOS **DEF. DEL APARATO**

$\sigma_i = 0.4\ kg/cm^2$ $\delta_i = 0.033$ mm

$\Delta\sigma = 0.2\ kg/cm^2$ $\Delta\delta = 0.017$ mm

$\sigma_f = 0.6\ kg/cm^2$ $\delta_f = 0.050$ mm

Temperatura máxima: 26 C

Temperatura mínima: 22 C

To C	hora	tiempo	L. micróm. mm	Def. tot. mm	Def. del suelo mm
22	7:00	0	4.676		0.742
		5''	—	—	—
		10''	4.605		0.795
		20''	4.581		0.819
		30''	4.554		0.846
22	7:01	1'	4.525		0.875
22	7:02	2'	4.470		0.930
22	7:04	4'	4.430		0.970
22	7:10	10'	4.350		1.050
22	7:20	20'	4.280		1.120
23	7:30	30'	4.217		1.183
23	8:00	1h	4.099		1.301
23	9:00	2h	4.004		1.396
23	10:00	3h	3.964		1.436
24	12:00	5h	3.937		1.463
25	14:00	7h	3.932		1.468
23	18:00	11h	3.924		1.476
22	6:00	23h	3.922		1.478

CONSOLIDACION UNIDIMENSIONAL

POYECTO: P. R. L. V. SONDEO: SM - 2

MUESTRA No. 12 PROF. 8.60m TRAMO: 8.50m - 8.70m

REGISTRO DE CARGAS

ESFUERZOS **DEF. DEL APARATO**

σ_i = 0.6 kg/cm² δ_i = 0.050 mm
$\Delta\sigma$ = 0.2 kg/cm² $\Delta\delta$ = 0.006 mm
σ_f = 0.8 kg/cm² δ_f = 0.056 mm

Temperatura máxima: 25 C
Temperatura mínima: 22 C

To C	hora	tiempo	L. micróm. mm	Def. tot. mm	Def. del suelo mm
22	6:10	0	3.922	—	1.478
		5''	3.907	—	1.487
		10''	3.900	—	1.494
		20''	3.892	—	1.502
		30''	3.882	—	1.512
22	6:11	1'	3.865	—	1.529
22	6:12	2'	3.844	—	1.550
22	6:14	4'	3.800	—	1.594
22	6:20	10'	3.718	—	1.676
22	6:30	20'	3.613	—	1.781
22	6:40	30'	3.547	—	1.847
22	7:10	1h	3.402	—	1.992
23	8:10	2h	3.184	—	2.210
23	9:10	3h	3.031	—	2.363
24	11:10	5h	2.864	—	2.530
25	14:10	8h	2.783	—	2.611
24	15:10	9h	2.725	—	2.669
22	6:10	24h	2.693	—	2.701

CONSOLIDACION UNIDIMENSIONAL

POYECTO: P. R. L. V. SONDEO: SM - 2

MUESTRA No. 12 PROF. 8.60m TRAMO: 8.50m - 8.70m

REGISTRO DE CARGAS

ESFUERZOS **DEF. DEL APARATO**

$\sigma_i = 0.8\ kg/cm^2$ $\delta_i = 0.056$ mm

$\Delta\sigma = 0.1\ kg/cm^2$ $\Delta\delta = 0.005$ mm

$\sigma_f = 0.9\ kg/cm^2$ $\delta_f = 0.061$ mm

Temperatura maxima: 25 C

Temperatura minima: 20 C

To C	hora	tiempo	L. microm. mm	Def. tot. mm	Def. del suelo mm
21	6:20	0	2.693	–	2.701
		5''	2.649	–	2.740
		10''	2.645	–	2.744
		20''	2.642	–	2.747
		30''	2.641	–	2.748
21	6:21	1'	2.637	–	2.752
21	6:22	2'	2.629	–	2.760
21	6:24	4'	2.620	–	2.769
21	6:30	10'	2.600	–	2.789
21	6:40	20'	2.571	–	2.818
21	6:50	30'	2.549	–	2.840
22	7:20	1h	2.509	–	2.880
23	8:20	2h	2.428	–	2.961
23	9:20	3h	2.370	–	3.019
24	11:20	5h	2.281	–	3.108
24	13:20	7h	2.212	–	3.177
25	15:20	9h	2.121	–	3.268
20	3:20	21h	2.064	–	3.325
21	6:20	24h	2.038	–	3.351

C O N S O L I D A C I O N   U N I D I M E N S I O N A L

POYECTO: P. R. L. V.　　SONDEO: SM - 2

MUESTRA No. 12　　PROF. 8.50m　　TRAMO: 8.50m - 8.70m

REGISTRO DE CARGAS

ESFUERZOS

$\sigma_i = 0.9\ kg/cm^2$

$\Delta\sigma = 0.1\ kg/cm^2$

$\sigma_f = 1.0\ kg/cm^2$

DEF. DEL APARATO

$\delta_i = 0.061$ mm

$\Delta\delta = 0.003$ mm

$\delta_f = 0.064$ mm

Temperatura maxima: 25 C

Temperatura minima: 22 C

To C	hora	tiempo	L. micróm. mm	Def. tot. mm	Def. del suelo mm
22	6:30	0	2.038	—	3.351
		5''	2.024	—	3.362
		10''	2.016	—	3.370
		20''	2.011	—	3.375
		30''	2.005	—	3.381
22	6:31	1'	1.994	—	3.392
22	6:32	2'	1.980	—	3.406
22	6:34	4'	1.966	—	3.420
22	6:40	10'	1.951	—	3.435
23	6:50	20'	1.887	—	3.499
24	7:00	30'	1.849	—	3.537
24	7:30	1h	1.782	—	3.604
24	8:30	2h	5.300	—	3.710
24	10:30	4h	5.228	—	3.782
25	12:30	6h	5.093	—	3.853
24	16:30	10h	5.043	—	3.903
22	18:30	12h	4.869	—	4.077
22	6:30	24h	4.842	—	4.104

C O N S O L I D A C I O N   U N I D I M E N S I O N A L

POYECTO: P. R. L. V. SONDEO: SM - 2

MUESTRA No. 12 PROF. 8.60m TRAMO: 8.50m - 8.70m

REGISTRO DE CARGAS

ESFUERZOS

$\sigma_i = 1.0\ kg/cm^2$

$\Delta\sigma = 0.5\ kg/cm^2$

$\sigma_f = 1.5\ kg/cm^2$

DEF. DEL APARATO

$\delta_i = 0.064$ mm

$\Delta\delta = 0.013$ mm

$\delta_f = 0.077$ mm

Temperatura máxima: 24 C

Temperatura mínima: 21 C

To C	hora	tiempo	L. micróm. mm	Def. tot. mm	Def. del suelo mm
22	7:00	0	4.842	—	4.104
		5''	—	—	—
		10''	4.826	—	4.107
		20''	4.825	—	4.108
		30''	4.824	—	4.109
21	7:01	1'	4.818	—	4.115
21	7:02	2'	4.812	—	4.121
21	7:04	4'	4.763	—	4.170
21	7:10	10'	4.613	—	4.320
21	7:20	20'	4.433	—	4.500
22	7:30	30'	4.313	—	4.620
22	8:00	1h	4.052	—	4.881
23	9:00	2h	3.653	—	5.280
23	10:00	3h	3.423	—	5.510
24	12:00	5h	3.193	—	5.740
24	14:00	7h	2.803	—	6.130
23	17:00	10h	2.723	—	6.210
22	10:30	27.30h	2.644	—	6.289

C O N S O L I D A C I O N   U N I D I M E N S I O N A L

POYECTO: P. R. L. V.   SONDEO: SM - 2

MUESTRA No. 12   PROF. 8.60m   TRAMO: 8.50m - 8.60m

REGISTRO DE CARGAS

ESFUERZOS

$\sigma_i = 1.5\ kg/cm^2$

$\Delta\sigma = 0.5\ kg/cm^2$

$\sigma_f = 2.0\ kg/cm^2$

DEF. DEL APARATO

$\delta_i = 0.077$ mm

$\Delta\delta = 0.012$ mm

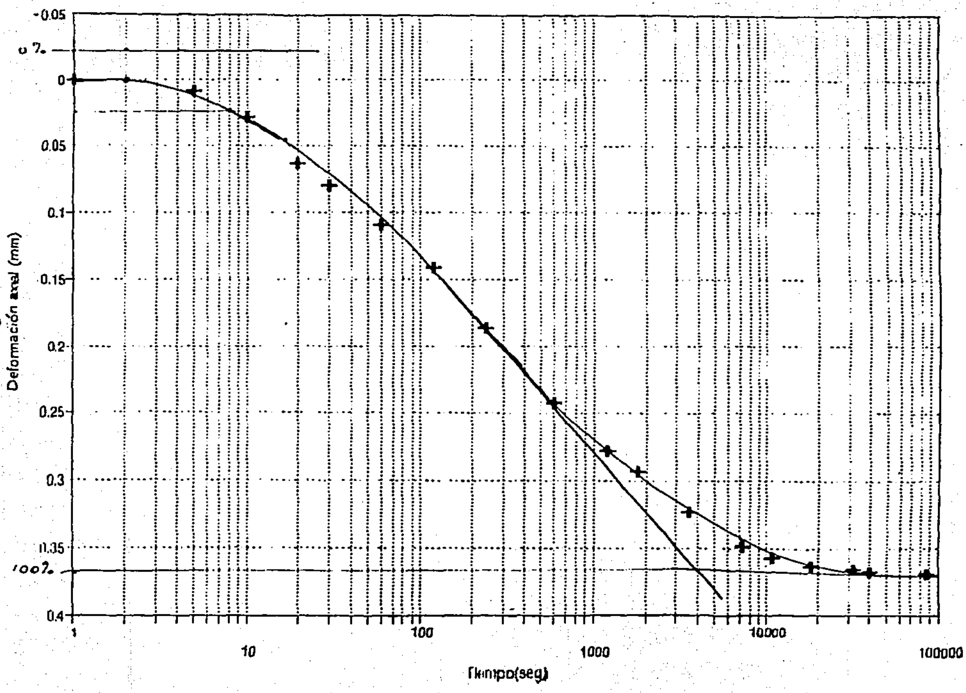
$\delta_f = 0.089$ mm

Temperatura máxima: 25 C

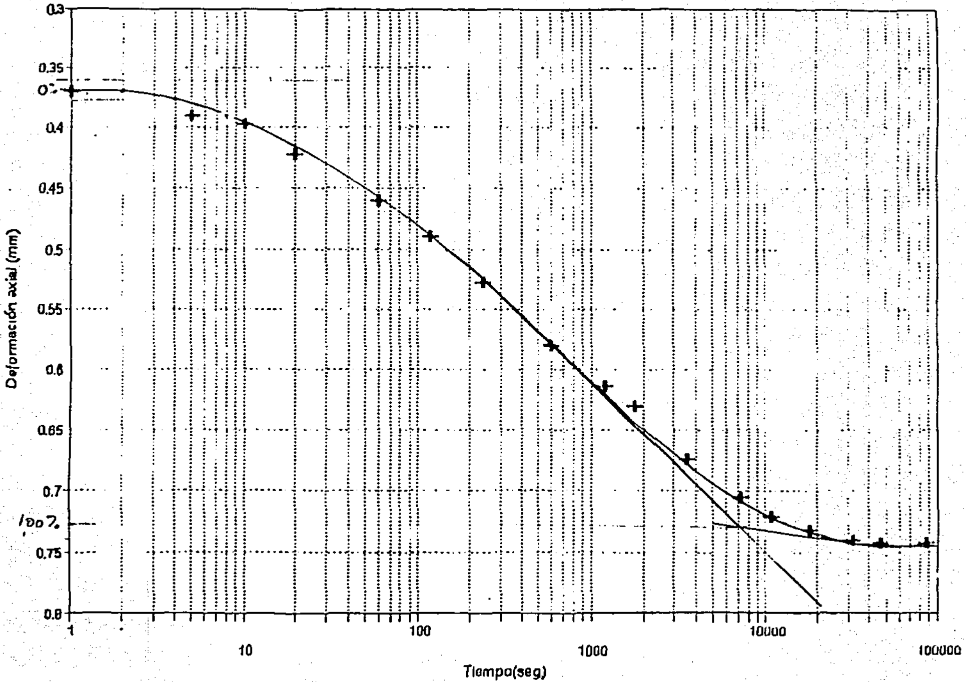
Temperatura mínima: 22 C

To C	hora	tiempo	L. microm. mm	Def. tot. mm	Def. del suelo mm
23	10:35	0	2.644	—	6.289
		5''	—	—	—
		10''	2.622	—	6.299
		20''	2.618	—	6.303
		30''	2.618	—	6.305
23	10:36	1'	2.608	—	6.313
23	10:37	2'	2.592	—	6.329
23	10:39	4'	2.558	—	6.363
23	10:45	10'	2.510	—	6.411
24	10:55	20'	2.448	—	6.473
24	11:05	30'	2.367	—	6.554
24	11:35	1h	2.233	—	6.688
24	12:35	2h	1.981	—	6.940
25	13:35	3h	1.801	—	7.120
25	15:35	5h	1.569	—	7.352
24	17:35	7h	1.408	—	7.513
23	20:35	10h	1.304	—	7.617
22	22:35	12h	1.266	—	7.655
22	24:35	14h	1.234	—	7.687
22	10:35	24h	1.198	—	7.723

CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL
Primer Incremento. Esf.v = 0.20 kg/cm2

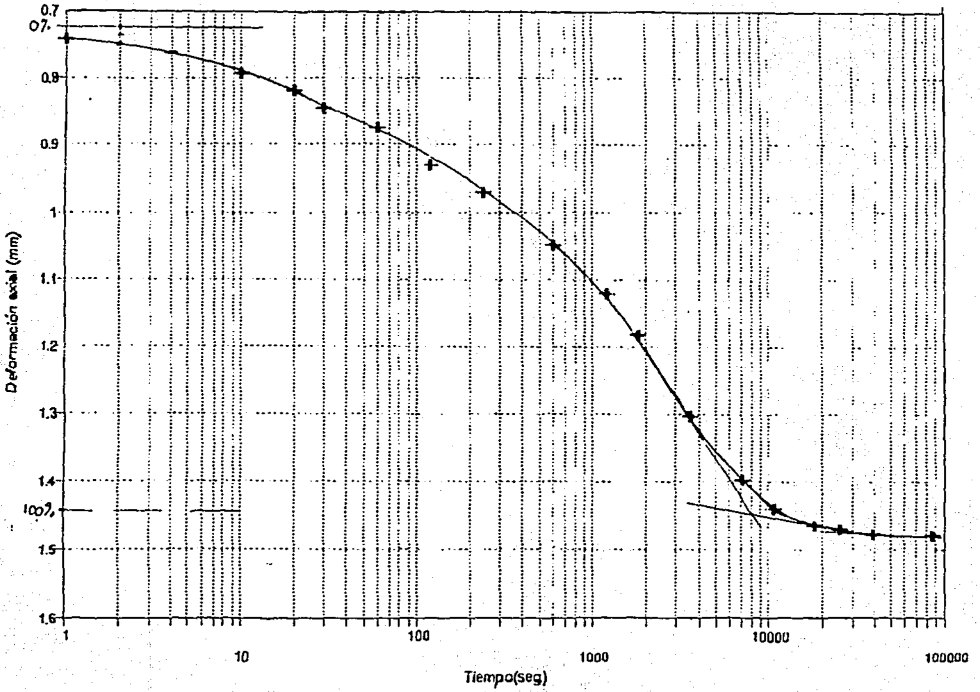


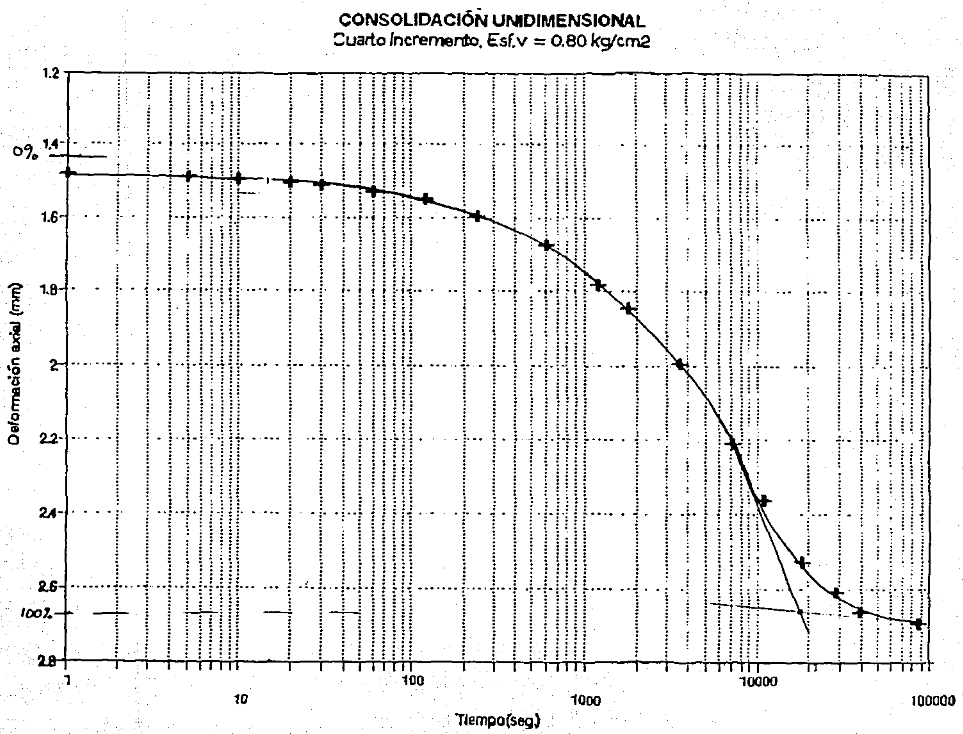
CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL
Segundo Incremento Esf.v = 0.40 kg/cm2



CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL

Tercer Incremento. Esf.v = 0.60 kg/cm2

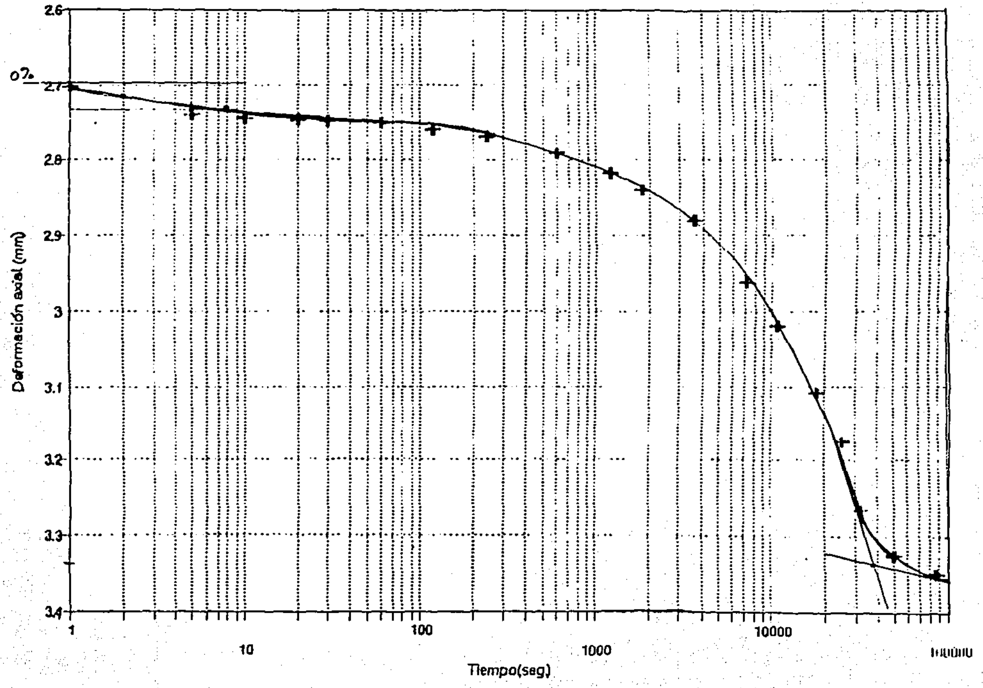



CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL
Cuarto Incremento, Esf.v = 0.80 kg/cm2
Deformación axial (mm)
Tiempo(seg)
0%
100%
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4
2.6
2.8
1
10
100
1000
10000
100000

197

CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL

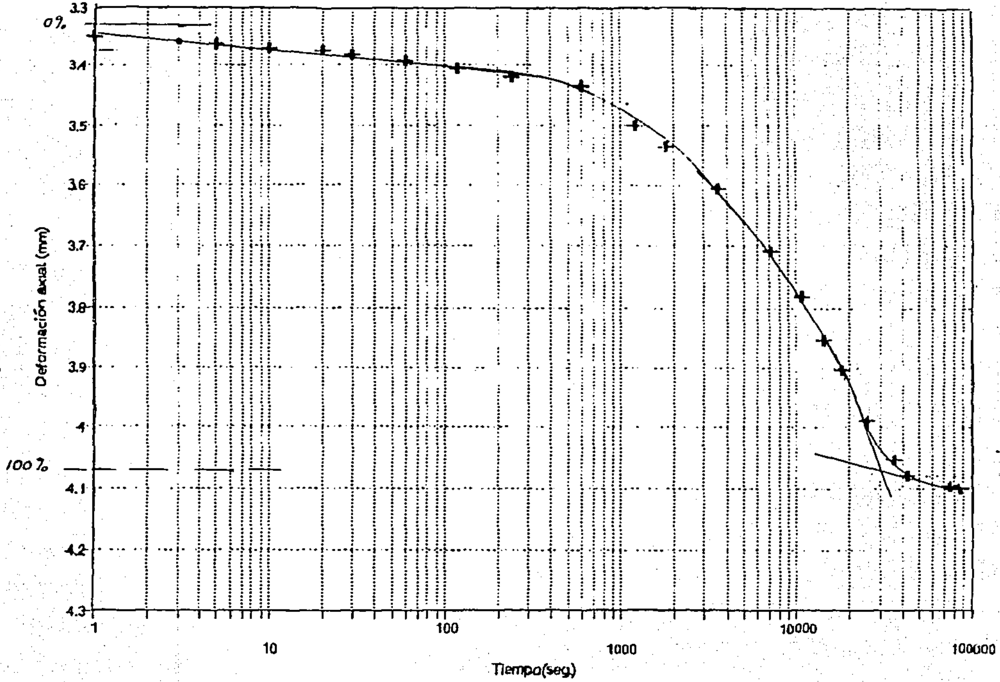
Quinto Incremento. Esf.v = 0.90 kg/cm2



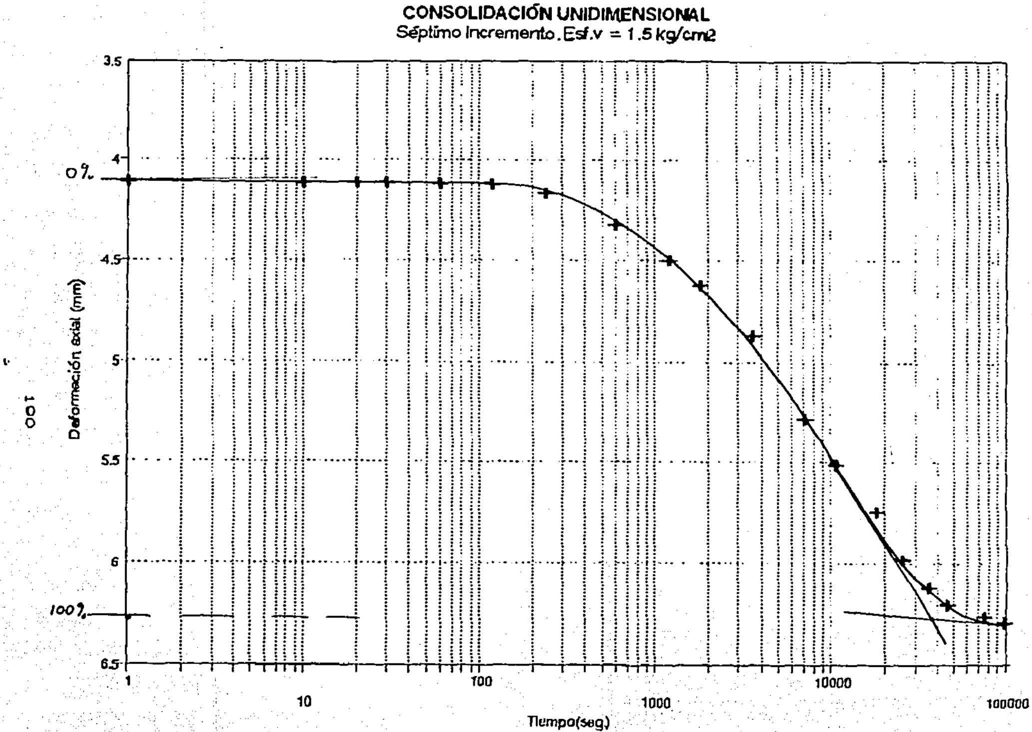
189

CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL

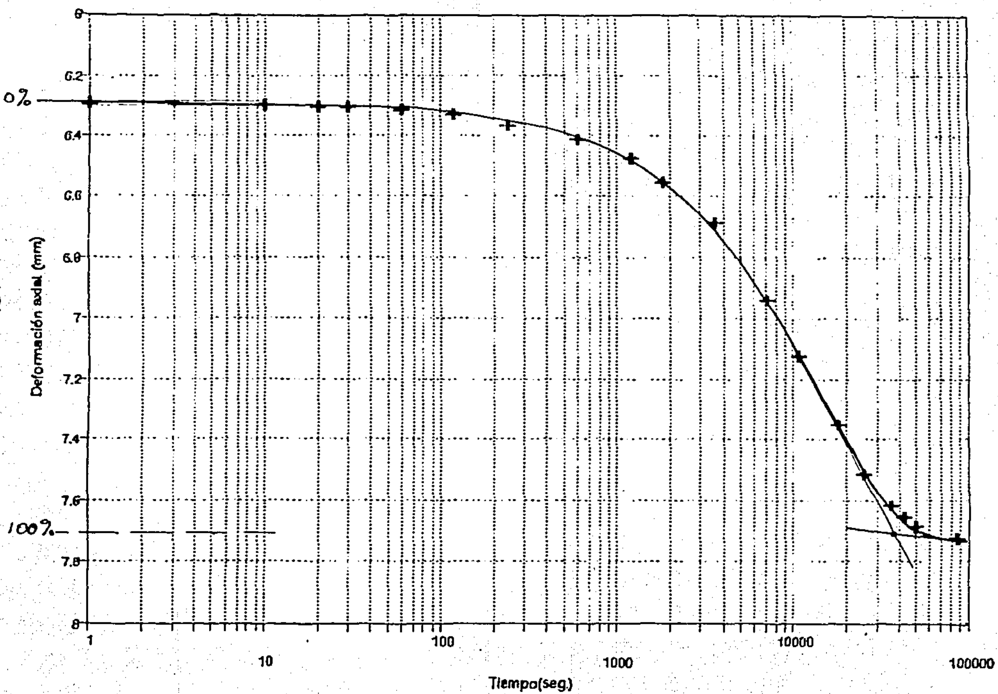
Sexto Incremento. Esf.v = 1.0 Kg/cm2



189


CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL
Séptimo Incremento. Esf.v = 1.5 kg/cm2
Deformación axial (mm)
Tiempo(seg)
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
1
10
100
1000
10000
100000
0%
100%
100

CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL
Octavo Incremento. Esf.v = 2.0 kg/cm2



191

C O N S O L I D A C I O N   U N I D I M E N S I O N A L

RELACIONES DE VACIOS

$\sigma_1 = \underline{0.00\ kg/cm^2}$ $\Delta\sigma = \underline{0.20\ kg/cm^2}$ $\sigma_f = \underline{0.20\ kg/cm^2}$

$\Delta H = \underline{0.400\ mm}$ $H_f = H_i - \Delta H\ \underline{20 - 0.400} = \underline{19.6}\ mm$

$$e = \frac{H_f - H_s}{V_s} = \frac{19.6 - 1.824}{1.824} = \underline{9.746}$$

$\sigma_1 = \underline{0.20\ kg/cm^2}$ $\Delta\sigma = \underline{0.20\ kg/cm^2}$ $\sigma_f = \underline{0.40\ kg/cm^2}$

$\Delta H = \underline{0.750\ mm}$ $H_f = H_i - \Delta H\ \underline{20 - 0.750} = \underline{19.250}\ mm$

$$e = \frac{H_f - H_s}{V_s} = \frac{19.250 - 1.824}{1.824} = \underline{9.550}$$

$\sigma_1 = \underline{0.40\ kg/cm^2}$ $\Delta\sigma = \underline{0.20\ kg/cm^2}$ $\sigma_f = \underline{0.60\ kg/cm^2}$

$\Delta H = \underline{1.490\ mm}$ $H_f = H_i - \Delta H\ \underline{20 - 1.490} = \underline{18.510}\ mm$

$$e = \frac{H_f - H_s}{V_s} = \frac{18.510 - 1.824}{1.824} = \underline{9.148}$$

$\sigma_1 = \underline{0.60\ kg/cm^2}$ $\Delta\sigma = \underline{0.20\ kg/cm^2}$ $\sigma_f = \underline{0.80\ kg/cm^2}$

$\Delta H = \underline{2.750\ mm}$ $H_f = H_i - \Delta H\ \underline{20 - 2.750} = \underline{17.250}\ mm$

$$e = \frac{H_f - H_s}{V_s} = \frac{17.250 - 1.824}{1.824} = \underline{8.457}$$

$\sigma_1 = \underline{0.80\ kg/cm^2}$ $\Delta\sigma = \underline{0.10\ kg/cm^2}$ $\sigma_f = \underline{0.90\ kg/cm^2}$

$\Delta H = \underline{3.400\ mm}$ $H_f = H_i - \Delta H\ \underline{20 - 3.400} = \underline{16.600}\ mm$

$$e = \frac{H_f - H_s}{V_s} = \frac{16.600 - 1.824}{1.824} = \underline{8.100}$$

$\sigma_1 = \underline{0.90\ kg/cm^2}$ $\Delta\sigma = \underline{0.10\ kg/cm^2}$ $\sigma_f = \underline{1.00\ kg/cm^2}$

$\Delta H = \underline{4.090\ mm}$ $H_f = H_i - \Delta H\ \underline{20 - 4.090} = \underline{15.910}\ mm$

$$e = \frac{H_f - H_s}{V_s} = \frac{15.910 - 1.824}{1.824} = \underline{7.720}$$

CONSOLIDACION UNIDIMENSIONAL

RELACIONES DE VACIOS

σ_i = 1.00 kg/cm^2 $\Delta\sigma$ = 0.50 kg/cm^2 σ_f = 1.50 kg/cm^2

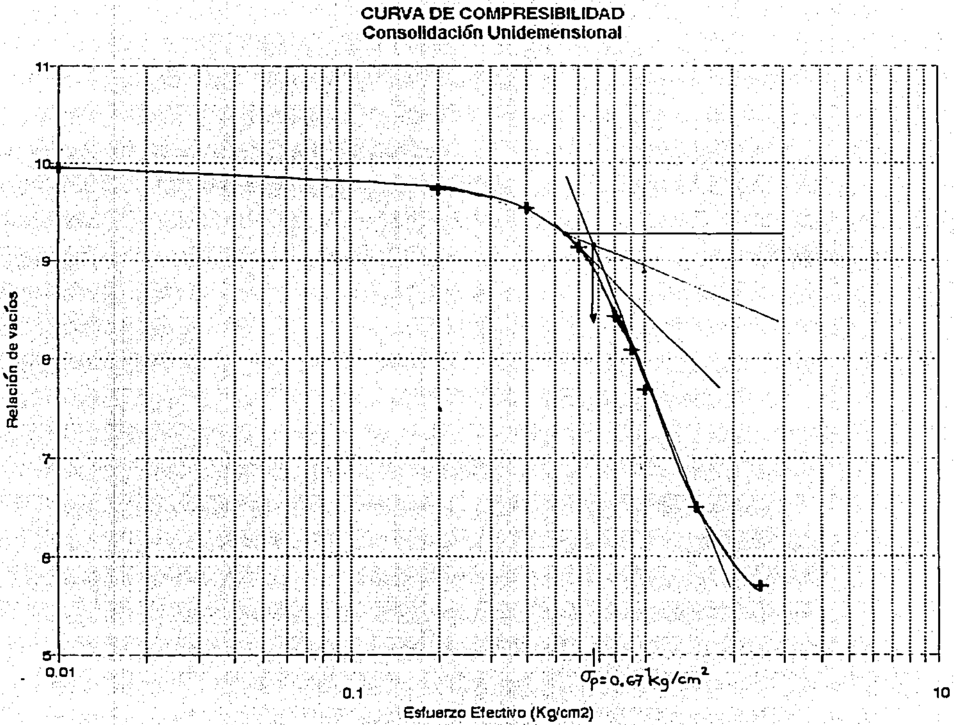
ΔH = 6.285 mm $H_f = H_i - \Delta H$ 20 - 6.285 = 13.715 mm

$$e = \frac{H_f - H_s}{V_s} = \frac{13.715 - 1.824}{1.824} = 6.519$$

σ_i = 1.50 kg/cm^2 $\Delta\sigma$ = 0.50 kg/cm^2 σ_f = 2.00 kg/cm^2

ΔH = 7.683 mm $H_f = H_i - \Delta H$ 20 - 7.683 = 12.317 mm

$$e = \frac{H_f - H_s}{V_s} = \frac{12.317 - 1.824}{1.824} = 5.750$$


CURVA DE COMPRESIBILIDAD
Consolidación Unidemensional
Relación de vacíos
11
10
9
8
7
6
5
0.01
0.1
10
Esfuerzo Efectivo (Kg/cm2)
σp= 0.67 Kg/cm²

APÉNDICE C

RESULTADOS DE LA PRUEBA DE CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA EN CÁMARA TRIAXIAL

R E S U M E N   D E   P R U E B A

LUGAR: P. R. L. V. TRAMO: 8.50 - 8.70m
SONDEO: SM - 2 PROF.: 8.60m
MUESTRA: 12

DESCRIPCIÓN : El material resultó ser una mezcla de arcilla color café claro , de consistencia muy suave , con limo arenoso de color gris claro.

P R O P I E D A D E S

CLASIFICACIÓN SUCS.: CH
CONTENIDO DE AGUA INICIAL: 413 %
RELACIÓN DE VACIOS INICIAL: 9.963
GRADO DE SATURACIÓN : 100 %
LIMITE LIQUIDO: 400 %
CONTENIDO DE ARENA: 15 %

DENSIDAD DE SÓLIDOS: 2.605
CONT. DE AGUA FINAL: 230 %
REL. DE VACIOS FINAL: 6.974
INDICE PLASTICO: 250. %
LIMITE PLASTICO: 150 %
CONTENIDO DE FINOS: 85 %

D A T O S   G E N E R A L E S

RELACION DE VACIOS : 9.963

CONTENIDO DE AGUA : 413.3 %

PESO DE LA PROBETA : 96.08 gr

DIAMETRO INFERIOR 3.50 DIAMETRO MEDIO 3.53 DIAMETRO SUP. 3.52

DIAMETRO PROMEDIO : 3.52 cm.

ALTURA: 8.68cm VOLUMEN: 84.809 cm^3 PESO VOLUMETRICO: 1.133gr/cm^3

PESO DE LOS SOLIDOS: 18.7525 gr

VOLUMEN DE LOS SOLIDOS: 7.066 cm^3

D E S P U E S   D E   L A   P R U E B A

RELACIÓN DE VACIOS : 6.974

PESO DE LA PROBETA : 62.70 gr

DIAMETRO INFERIOR 2.78 DIAMETRO MEDIO 2.72 DIAMETRO SUP. 2.77

DIAMETRO PROMEDIO : 2.763 cm.

ALTURA : 8.15cm VOLUMEN: 48.41cm^3 PESO VOLUMEETRICO: 1.30 gr/cm^3

C O N T E N I D O   D E   A G U A

tara no	W tara	Wm+tara	Ws+tara	Ww	Ws	WC%)
81	9.09	31.92	16.04	15.88	6.95	228
4	9.08	25.88	14.23	11.65	5.15	226
5	9.30	32.59	15.93	16.66	6.63	251

C O N S O L I D A C I O N   I S O T R O P I C A

ESFUERZO AXIAL

σ_1(Kg/cm^2): 0.00 $\Delta\sigma$(kg/cm^2): 0.20 σ_1(kg/cm^2): 0.20

To C	hora	tiempo	H. bureta. cm	L. microm μ	Def. vol cm^3	Def. axial mm
	6:40	0	1.20	—	0.000	—
		5''	1.38	—	0.080	—
		10''	1.54	—	0.150	—
		20''	1.70	—	0.220	—
		30''	1.79	—	0.259	—
	6:41	1'	2.06	—	0.380	—
	6:42	2'	2.27	—	0.470	—
	6:44	4'	2.61	—	0.620	—
	6:50	10'	3.02	—	0.800	—
	7:00	20'	3.18	—	0.870	—
	7:10	30'	3.26	—	0.908	—
	7:40	1h	3.40	—	0.970	—
	8:40	2h	3.51	—	1.018	—
	9:40	3h	3.56	—	1.040	—
	11:40	5h	3.65	—	1.078	—
	13:40	7h	3.70	—	1.098	—
	16:40	10h	3.72	—	1.110	—
	18:40	12h	3.75	—	1.120	—
	6:40	24h	3.77	—	1.130	—

CONSOLIDACION ISOTROPICA

ESFUERZO AXIAL

σ_1(Kg/cm²): 0.20 $\Delta\sigma$(kg/cm²): 0.20 σ_1(kg/cm²): 0.40

To C	hora	tiempo	H. bureta. cm	L. micróm u	Def. vol cm³	Def. axial mm
	6:53	0	3.77	—	1.130	—
		5"	3.91	—	1.192	—
		10"	4.11	—	1.281	—
		20"	4.26	—	1.347	—
		30"	4.36	—	1.391	—
	6:54	1'	4.61	—	1.502	—
	6:55	2'	5.02	—	1.679	—
	6:57	4'	5.62	—	1.944	—
	7:03	10'	6.72	—	2.430	—
	7:13	20'	7.43	—	2.739	—
	7:23	30'	7.80	—	2.905	—
	7:53	1h	8.95	—	3.410	—
	8:53	2h	9.73	—	3.752	—
	9:53	3h	10.29	—	3.999	—
	11:53	5h	10.79	—	4.220	—
	13:53	7h	11.02	—	4.320	—
	16:53	10h	11.14	—	4.375	—
	6:53	24h	11.50	—	4.531	—

CONSOLIDACION ISOTROPICA

ESFUERZO AXIAL

σ_1(kg/cm^2): 0.40 $\Delta\sigma$(kg/cm^2): 0.20 σ_1(kg/cm^2): 0.60

To C	hora	tiempo	H. bureta. cm	L. microm μ	Def. vol cm^3	Def. axial mm
	7:00	0	1.20	—	4.531	—
		5''	1.50	—	4.663	—
		10''	1.53	—	4.674	—
		20''	1.68	—	4.740	—
		30''	1.78	—	4.784	—
	7:01	1'	2.05	—	4.907	—
	7:02	2'	2.30	—	5.017	—
	7:04	4'	2.65	—	5.168	—
	7:10	10'	3.15	—	5.389	—
	7:20	20'	4.13	—	5.821	—
	7:30	30'	4.63	—	6.041	—
	8:00	1h	5.74	—	6.528	—
	9:00	2h	7.62	—	7.356	—
	10:00	3h	8.65	—	7.810	—
	12:00	5h	9.84	—	8.332	—
	14:00	7h	10.63	—	8.681	—
	17:00	10h	11.04	—	8.860	—
	19:00	12h	11.17	—	8.917	—
	5:00	20h	11.71	—	9.154	—

CONSOLIDACION ISOTROPICA

ESFUERZO AXIAL

$\sigma i (Kg/cm^2)$: 0.60 $\Delta\sigma (kg/cm^2)$: 0.20 $\sigma i (kg/cm^2)$: 0.80

To C	hora	tiempo	H. bureta. cm	L. microm μ	Def. vol cm^3	Def. axial mm
	5:00	0	1.00	—	9.154	—
		5''	1.20	—	9.242	—
		10''	1.25	—	9.264	—
		20''	1.30	—	9.286	—
		30''	1.35	—	9.309	—
	5:01	1'	1.50	—	9.375	—
	5:02	2'	1.73	—	9.475	—
	5:04	4'	1.96	—	9.575	—
	5:10	10'	2.28	—	9.715	—
	5:20	20'	2.45	—	9.790	—
	5:30	30'	2.83	—	9.961	—
	6:00	1h	3.85	—	10.409	—
	7:00	2h	5.87	—	11.296	—
	9:00	4h	7.99	—	12.229	—
	11:00	6h	9.23	—	12.774	—
	15:00	10h	10.18	—	13.191	—
	5:00	24h	10.55	—	13.355	—
	6.00	25h	10.75	—	13.445	—

C O N S O L I D A C I O N   I S O T R O P I C A

ESFUERZO AXIAL

σ_1(Kg/cm^2): 0.80 $\Delta\sigma$(kg/cm^2): 0.20 σ_1(kg/cm^2): 1.00

To C	hora	tiempo	H. bureta cm	L. micróm μ	Def. vol cm^3	Def. axial mm
	6:25	0	1.00	—	13.445	—
		5''	—	—	—	—
		10''	1.15	—	13.511	—
		20''	1.20	—	13.533	—
		30''	1.25	—	13.555	—
	6:26	1'	1.30	—	13.577	—
	6:27	2'	1.45	—	13.645	—
	6:29	4'	1.60	—	13.711	—
	6:35	10'	1.81	—	13.800	—
	6:45	20'	2.16	—	13.956	—
	6:55	30'	2.73	—	14.207	—
	7:25	1h	3.93	—	14.732	—
	8:25	2h	5.67	—	15.500	—
	9:25	3h	6.90	—	16.043	—
	11:25	5h	8.43	—	16.716	—
	13:25	7h	9.48	—	17.174	—
	5:25	23h	9.98	—	17.397	—
	6:25	24h	10.28	—	17.530	—

C O N S O L I D A C I O N   I S O T R O P I C A

ESFUERZO AXIAL

$\sigma_i (Kg/cm^2)$: 1.00 $\Delta\sigma (kg/cm^2)$: 0.25 $\sigma_1 (kg/cm^2)$: 1.25

To C	hora	tiempo	H. bureta cm	L. microm μ	Def. vol cm^3	Def. axial mm
	6:40	0	0.90	—	17.530	—
		5''	1.00	—	17.575	—
		10''	1.05	—	17.596	—
		20''	1.10	—	17.618	—
		30''	1.20	—	17.662	—
	6:41	1'	1.30	—	17.707	—
	6:42	2'	1.40	—	17.751	—
	6:44	4'	1.60	—	17.839	—
	6:50	10'	1.90	—	17.972	—
	7:00	20'	2.28	—	18.136	—
	7:10	30'	2.68	—	18.313	—
	7:40	1h	3.28	—	18.578	—
	8:40	2h	4.55	—	19.136	—
	9:40	3h	6.08	—	19.808	—
	11:40	5h	5.18	—	20.204	—
	13:40	7h	7.80	—	20.567	—
	5:10	22.5h	8.28	—	20.779	—
	6:40	24h	8.76	—	20.990	—
	7:40	25h	9.03	—	21.105	—
	8:10	25.5h	9.25	—	21.205	—

CONSOLIDACION ISOTROPICA

ESFUERZO AXIAL

σi(Kg/cm²): 1.25 Δσ(kg/cm²): 0.25 σi(kg/cm²): 1.50

To C	hora	tiempo	H. bureta. cm	L. microm μ	Def. vol cm³	Def. axial mm
	8:20	0	0.90	—	21.205	—
		10''	0.92	—	21.215	—
		20''	1.00	—	21.249	—
		30''	1.05	—	21.269	—
	8:21	1'	1.07	—	21.280	—
	8:22	2'	1.21	—	21.340	—
	8:24	4'	1.34	—	21.400	—
	8:30	10'	1.55	—	21.490	—
	8:40	20'	1.82	—	21.611	—
	8:50	30'	2.13	—	21.744	—
	9:20	1h	2.69	—	21.993	—
	10:20	2h	3.44	—	22.323	—
	11:20	3h	4.18	—	22.649	—
	13:20	5h	5.09	—	23.050	—
	15:20	7h	5.89	—	23.399	—
	19:20	10h	6.40	—	23.624	—
	21:20	12h	6.70	—	23.756	—
	8:20	24h	6.86	—	23.826	—

CONSOLIDACION ISOTROPICA

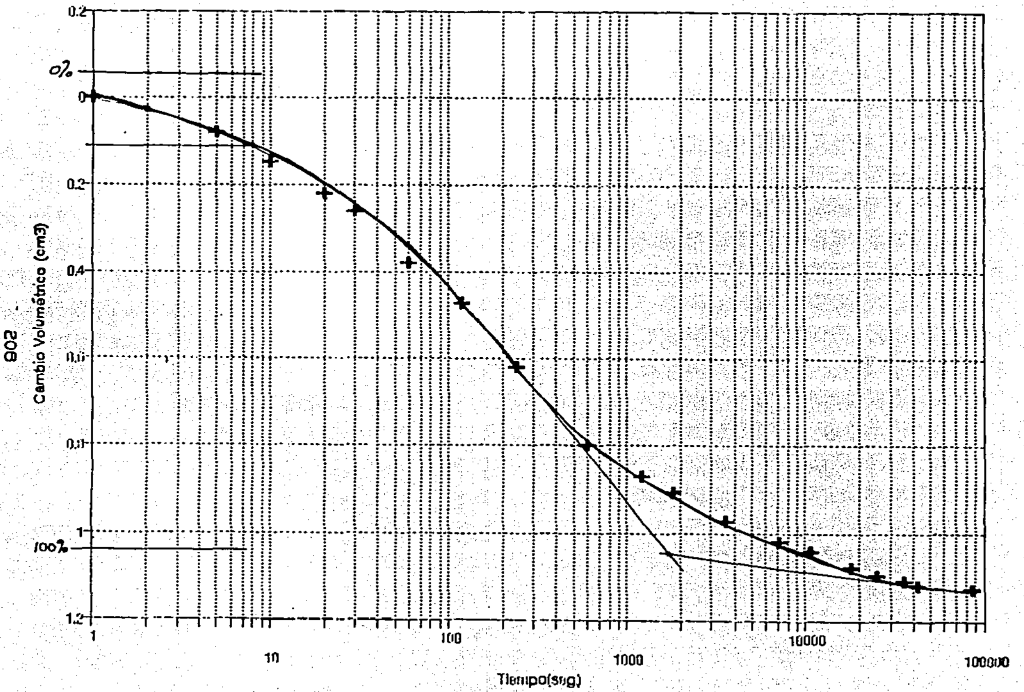
ESFUERZO AXIAL

σ_1(Kg/cm^2): 1.50 $\Delta\sigma$(kg/cm^2): 1.00 σ_1(kg/cm^2): 2.50

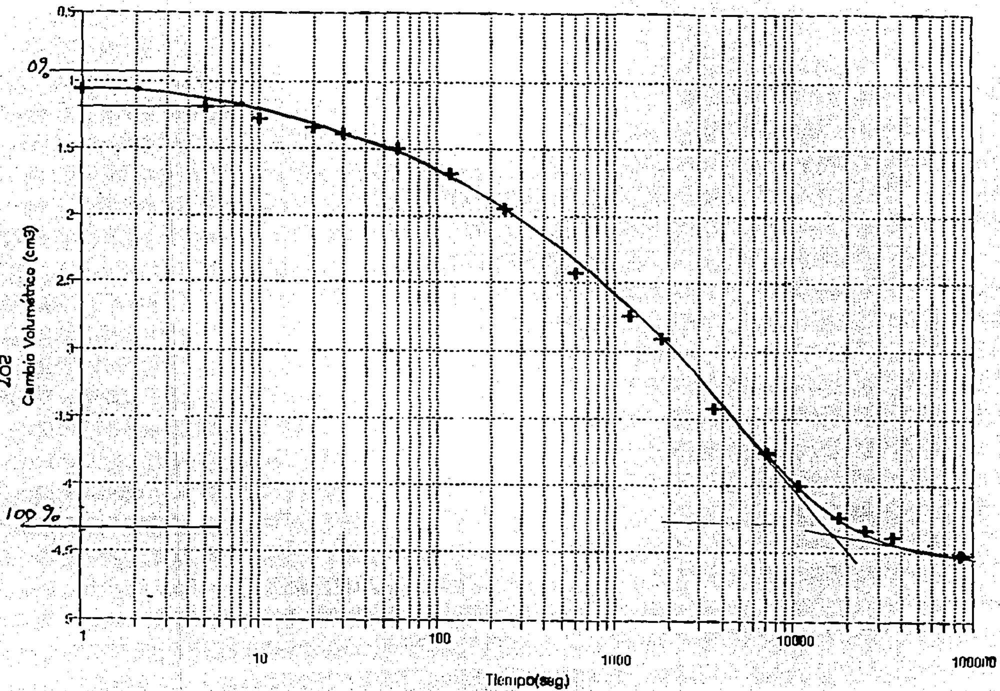
To C	hora	tiempo	H. bureta. cm	L. micróm μ	Def. vol cm^3	Def. axial mm
	8:45	0	1.00	—	23.826	—
		5''	1.40	—	24.003	—
		10''	1.50	—	24.135	—
		20''	1.90	—	24.223	—
		30''	2.20	—	24.356	—
	8:46	1'	2.81	—	24.621	—
	8:47	2'	3.50	—	24.926	—
	8:49	4'	4.08	—	25.182	—
	8:55	10'	5.31	—	25.723	—
	9.05	20'	5.66	—	25.878	—
	9.15	30'	8.14	—	26.968	—
	9:45	1h	11.25	—	28.336	—
	10:45	2h	13.57	—	29.356	—
	12:45	3h	16.37	—	30.590	—
	14:45	5h	1.00	—	31.859	—
	17:45	8h	2.87	—	32.680	—
	21:45	13h	3.82	—	33.098	—
	7:45	23h	4.62	—	33.450	—
	10:45	26h	5.50	—	33.837	—

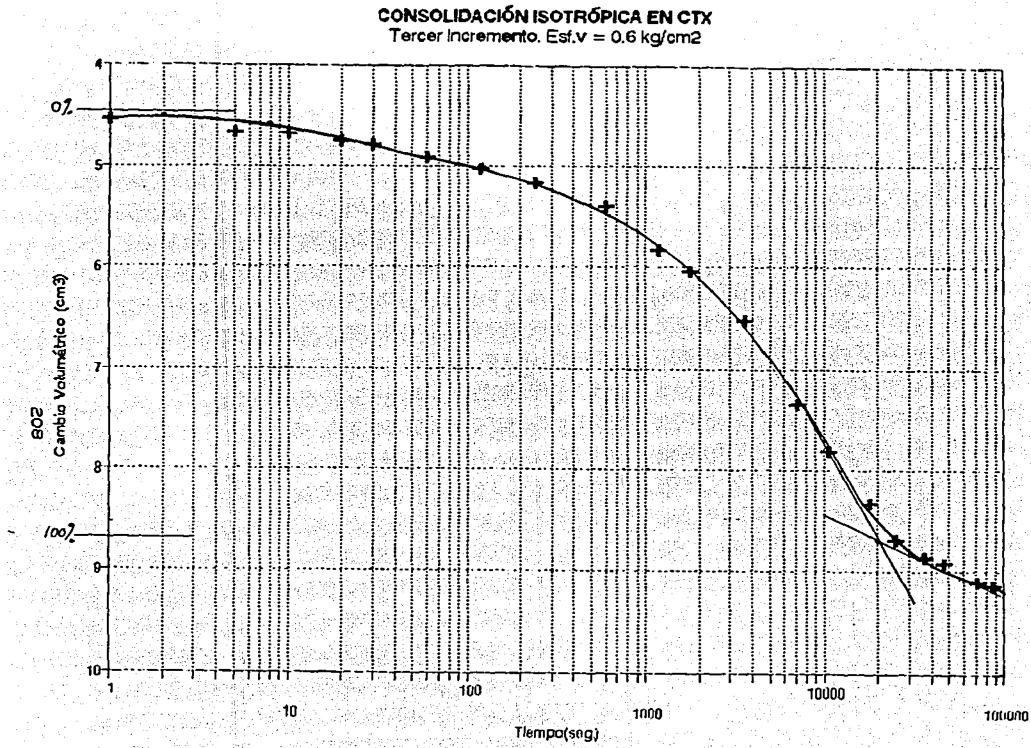
CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA EN CTX

Primer Incremento. Esf.v = 0.2 kg/cm2

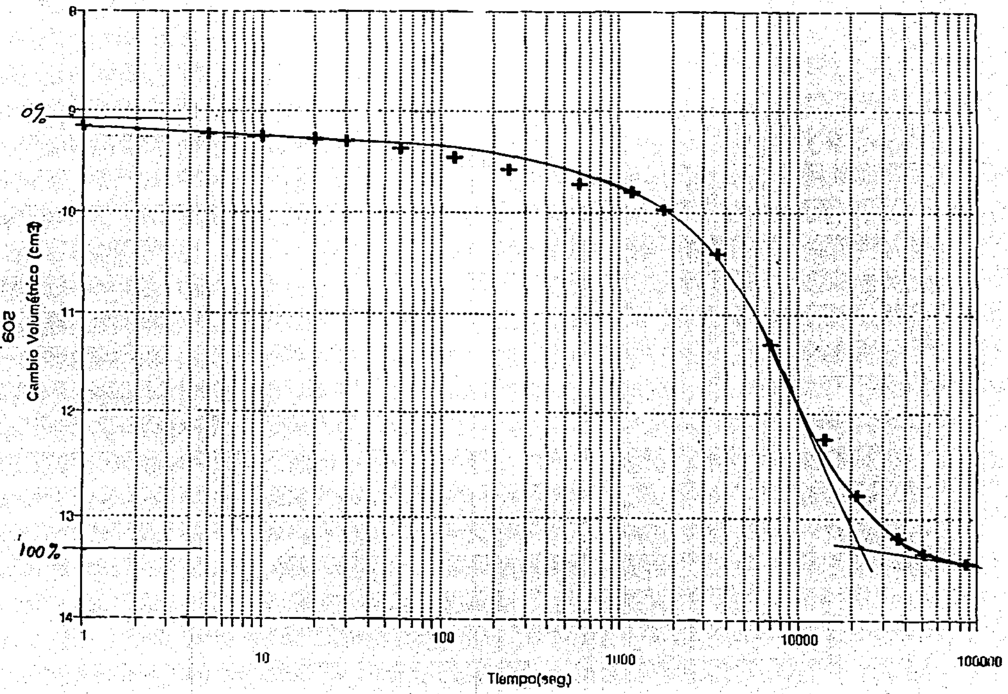


CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA EN CTX
Segundo Incremento Esf.v = 0.4 kg/cm2



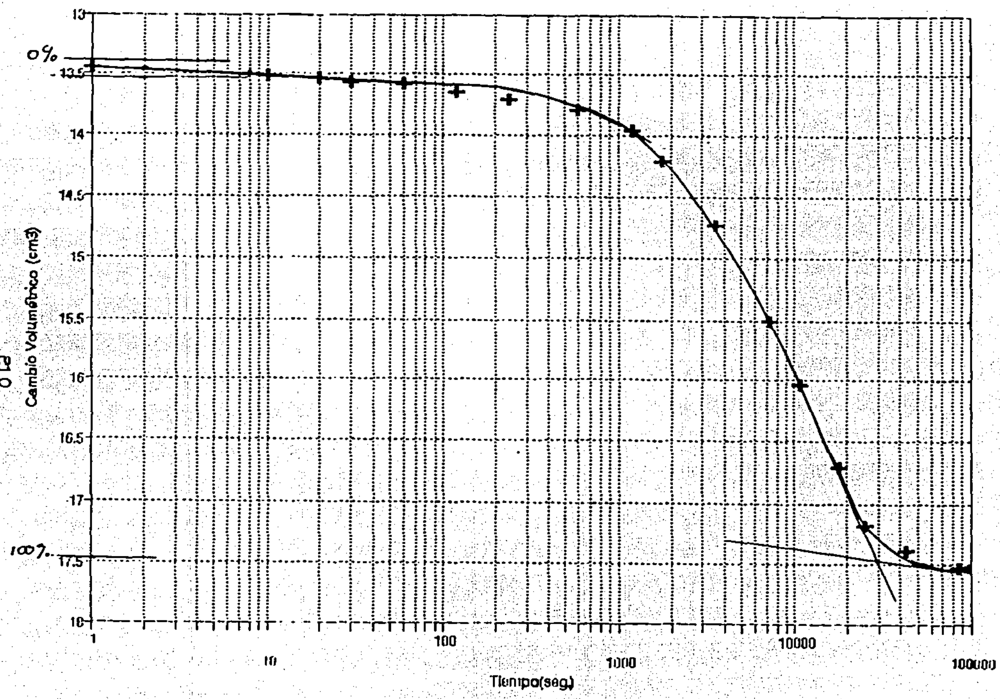

CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA EN CTX
Tercer Incremento. Esf.v = 0.6 kg/cm2
802
Cambio Volumétrico (cm3)
Tiempo(seg)
0%
100%
4
5
6
7
8
9
10
1
10
100
1000
10000
100000

CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA EN CTX
Cuarto Incremento. Esf.v = 0.8 kg/cm2



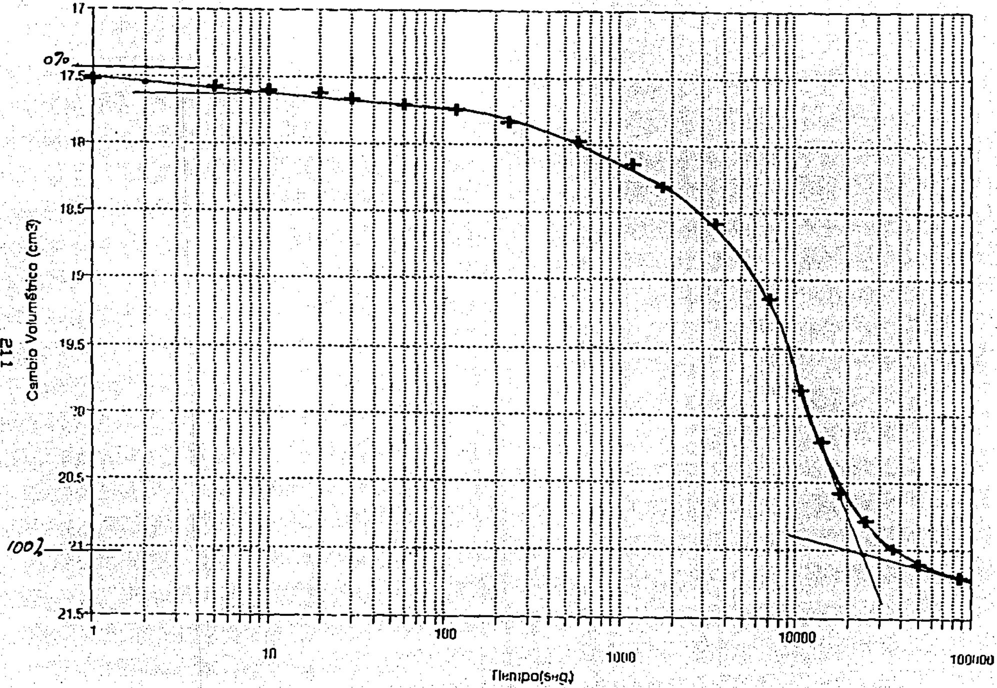
CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA EN CTX

Quinto Incremento. Esf.v = 1.0 kg/cm2



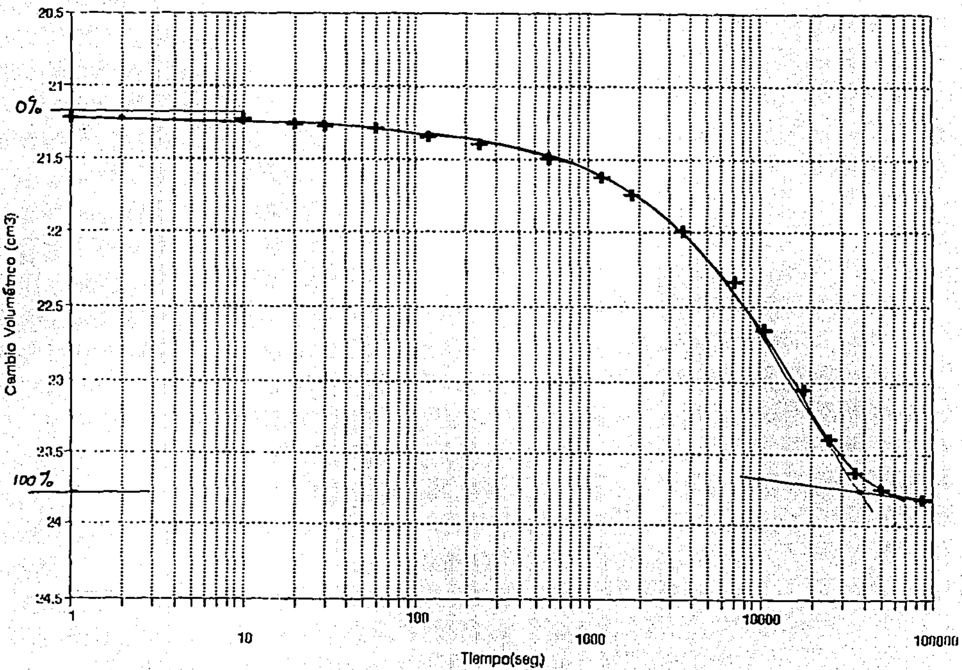
CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA EN CTX

Sexto Incremento. Esf.v = 1.25 kg/cm2



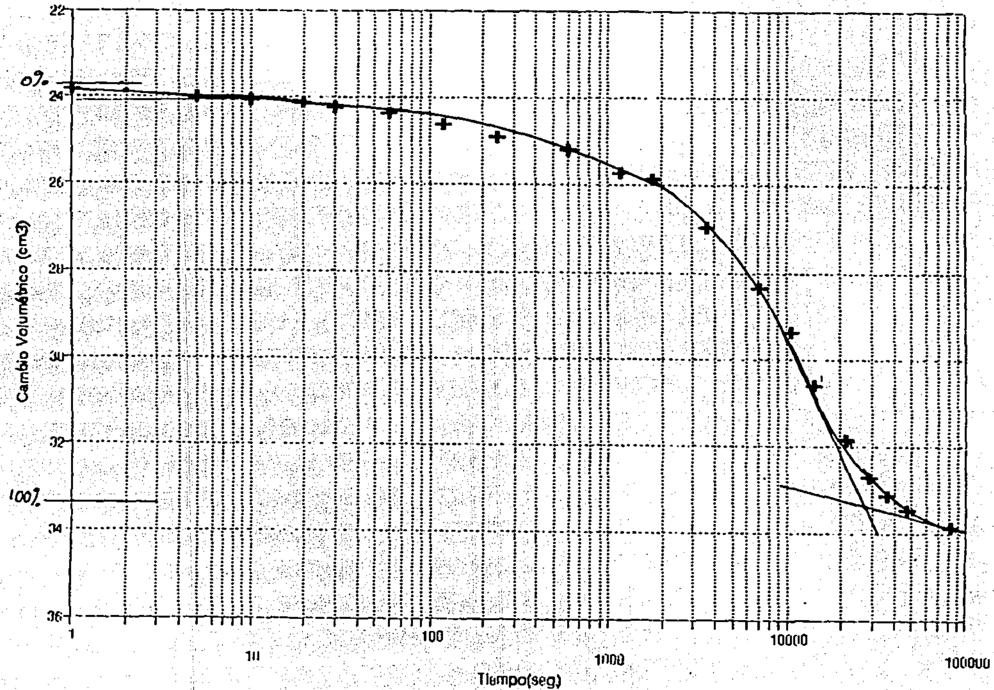
211

CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA EN CTX
Séptimo Incremento. Esf.v = 1.5 kg/cm2



CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA EN CTX

Octavo incremento. Esf.v = 2.5 kg/cm2



CONSOLIDACION ISOTROPICA

RELACIONES DE VACIOS

$\sigma_i = 0.00\ kg/cm^2 \qquad \Delta\sigma = 0.20\ kg/cm^2 \qquad \sigma_f = 0.20\ kg/cm^2$

$V_f = V_i - \Delta V = 84.809 - 1.073 = 83.736\ cm^3$

$e = \dfrac{V_f - V_s}{V_s} = \dfrac{83.736 - 7.066}{7.066} = 10.852$

$\sigma_i = 0.20\ kg/cm^2 \qquad \Delta\sigma = 0.20\ kg/cm^2 \qquad \sigma_f = 0.40\ kg/cm^2$

$V_f = V_i - \Delta V = 84.809 - 4.520 = 80.289\ cm^3$

$e = \dfrac{V_f - V_s}{V_s} = \dfrac{80.289 - 7.066}{7.066} = 10.3627$

$\sigma_i = 0.40\ kg/cm^2 \qquad \Delta\sigma = 0.20\ kg/cm^2 \qquad \sigma_f = 0.60\ kg/cm^2$

$V_f = V_i - \Delta V = 84.809 - 8.800 = 76.009\ cm^3$

$e = \dfrac{V_f - V_s}{V_s} = \dfrac{75.009 - 7.066}{7.066} = 9.757$

$\sigma_i = 0.60\ kg/cm^2 \qquad \Delta\sigma = 0.20\ kg/cm^2 \qquad \sigma_f = 0.80\ kg/cm^2$

$V_f = V_i - \Delta V = 84.809 - 13.151 = 71.658\ cm^3$

$e = \dfrac{V_f - V_s}{V_s} = \dfrac{71.658 - 7.066}{7.066} = 9.141$

$\sigma_i = 0.80\ kg/cm^2 \qquad \Delta\sigma = 0.20\ kg/cm^2 \qquad \sigma_f = 1.00\ kg/cm^2$

$V_f = V_i - \Delta V = 84.809 - 17.330 = 67.479\ cm^3$

$e = \dfrac{V_f - V_s}{V_s} = \dfrac{67.479 - 7.066}{7.066} = 8.549$

$\sigma_i = 1.00\ kg/cm^2 \qquad \Delta\sigma = 0.25\ kg/cm^2 \qquad \sigma_f = 1.25\ kg/cm^2$

$V_f = V_i - \Delta V = 84.809 - 21.030 = 63.779\ cm^3$

$e = \dfrac{V_f - V_s}{V_s} = \dfrac{63.779 - 7.066}{7.066} = 8.026$

CONSOLIDACION ISOTROPICA

RELACIONES DE VACIOS

$\sigma_1 = \underline{1.25\ kg/cm^2}$ $\Delta\sigma = \underline{0.25\ kg/cm^2}$ $\sigma_f = \underline{1.50\ kg/cm^2}$

$V_f = V_i - \Delta V = \underline{84.809 - 23.710} = \underline{61.099}\ cm^3$

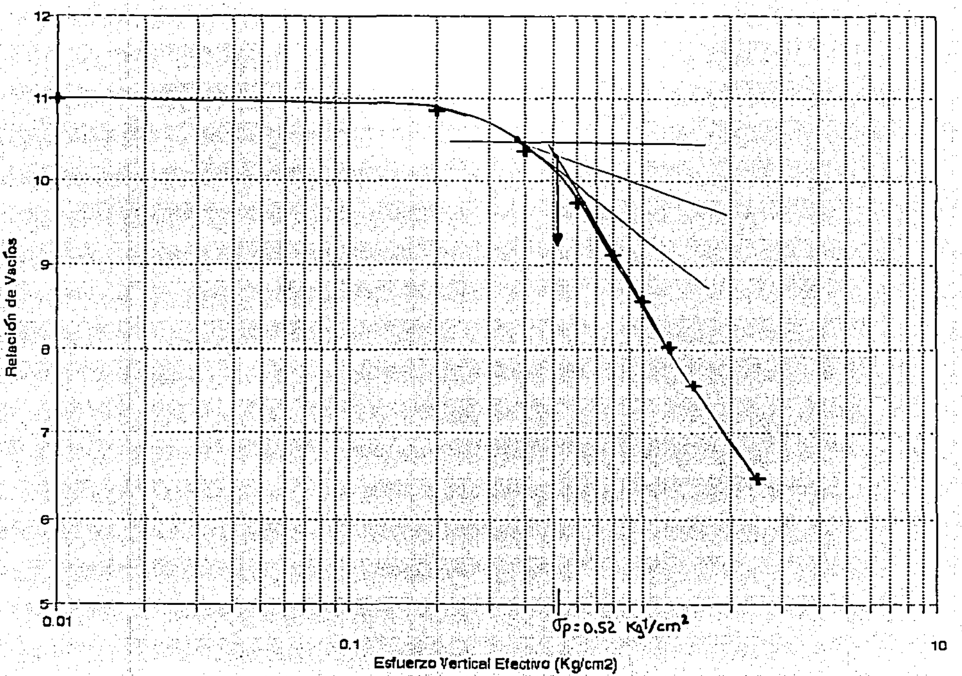
$e = \dfrac{V_f - V_s}{V_s} = \dfrac{61.099 - 7.066}{7.066} = \underline{7.647}$

$\sigma_1 = \underline{1.50\ kg/cm^2}$ $\Delta\sigma = \underline{1.00\ kg/cm^2}$ $\sigma_f = \underline{2.50\ kg/cm^2}$

$V_f = V_i - \Delta V = \underline{84.809 - 28.460} = \underline{56.349}\ cm^3$

$e = \dfrac{V_f - V_s}{V_s} = \dfrac{56.349 - 7.066}{7.066} = \underline{6.974}$

CURVA DE COMPRESIBILIDAD
Consolidación Isotrópica en C.Tx.



APÉNDICE D

RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DE CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA EN CÁMARA TRIAXIAL 1, 2 Y 3 A ESFUERZO CONSTANTE

CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA

Prueba No. 1

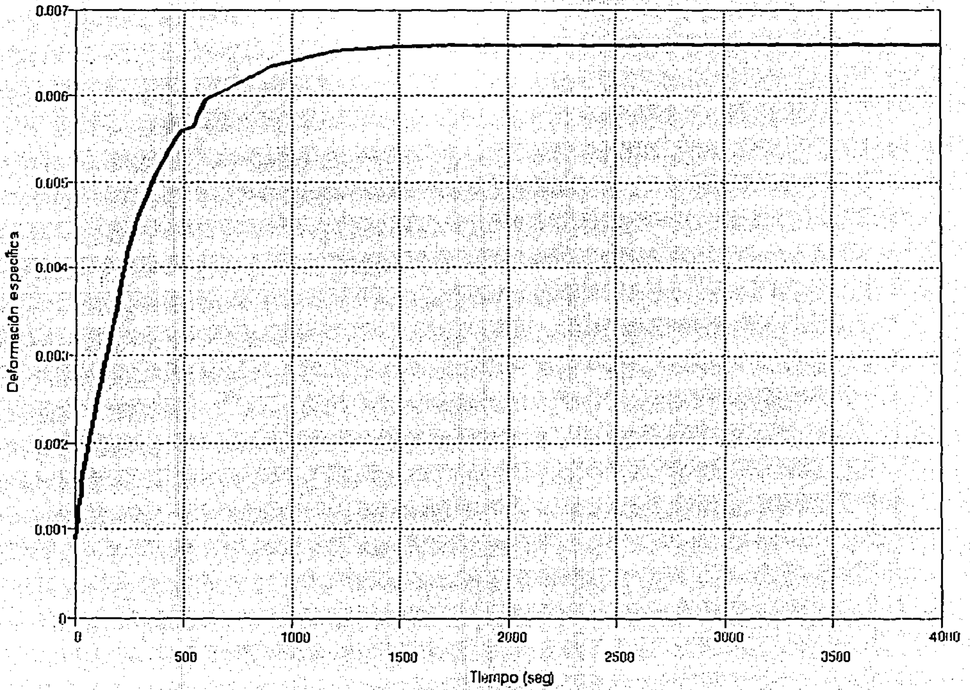
ESFUERZOS ISOTRÓPICOS

$\sigma o(Kg/cm^2)$: 0.20 H. probeta: 86.00mm

25/Julio/94

fecha	hora	tiempo seg.	L. microm. μ	Deform. mm	Def. uni	Def. espec cm^2/kg
25/07	6:30	0	0.00	0.0000	0.000	0.000000
		0	15.43	0.0154	1.79E-4	0.000897
		5	17.50	0.0175	2.03E-4	0.001017
		10	19.50	0.0195	2.27E-4	0.001135
		15	21.20	0.2120	2.47E-4	0.001233
		20	23.01	0.2301	2.68E-4	0.001338
		25	24.40	0.2440	2.84E-4	0.001419
		30	26.00	0.2600	3.02E-4	0.001512
	6:31	60	35.35	0.3535	4.11E-4	0.002055
	6:32	120	48.44	0.4844	5.63E-4	0.002816
	6:34	240	72.82	0.7282	8.47E-4	0.004234
	6:35	300	80.32	0.8032	9.34E-4	0.004670
	6:36	360	86.76	0.8676	1.01E-3	0.005044
	6:37	420	91.92	0.9192	1.07E-3	0.005344
	6:38	480	96.32	0.9632	1.12E-3	0.005600
	6:39	540	97.11	0.9711	1.13E-3	0.005646
	6:40	600	102.40	1.0240	1.19E-3	0.005953
	6:45	900	109.05	1.0905	1.27E-3	0.006340
	6:50	1200	112.00	1.1200	1.30E-3	0.006511
	6:55	1500	113.00	1.1300	1.31E-3	0.006567
	7:00	1800	113.16	1.1316	1.31E-3	0.006579
	7:30	3600	113.20	1.1320	1.31E-3	0.006584
	8:00	5400	—	—	—	—
	8:30	7200	113.40	1.1340	1.32E-3	0.006591
	9:30	10800	113.42	1.1342	1.32E-3	0.006594
	10:30	14400	113.50	1.1350	1.32E-3	0.006597
	12:30	21600	113.52	1.1352	1.32E-3	0.006600
	13:30	25200	113.52	1.1352	1.32E-3	0.006600
	14:30	28800	113.52	1.1352	1.32E-3	0.006600
	15:30	32400	113.52	1.1352	1.32E-3	0.006600
	16:30	36000	113.52	1.1352	1.32E-3	0.006600
26/07	6:30	86400	113.52	1.1352	1.32E-3	0.006600
	8:30	93600	113.52	1.1352	1.32E-3	0.006600
	11:30	104400	113.52	1.1352	1.32E-3	0.006600
	12:30	108000	113.52	1.1352	1.32E-3	0.006600

CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA
Prueba No. 1



CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA

Prueba No. 2

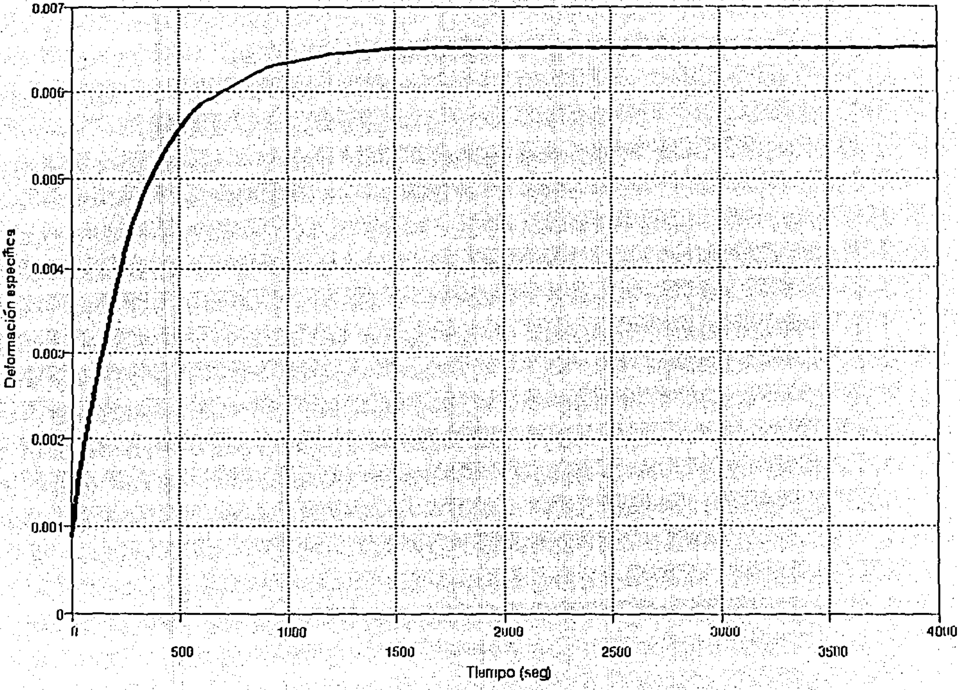
ESFUERZOS ISOTRÓPICOS

$\sigma o (Kg/cm^2)$: 0.20 H. probeta: 86.00mm

02/Agosto/94

fecha	hora	tiempo seg.	L. micróm. μ	Deform. mm	Def. uni	Def. espec cm^2/kg
02/08	7:00	0	0.00		0.00000	0.000000
		0	15.20		1.77E-4	0.000883
		5	17.22		2.00E-4	0.001001
		10	19.19		2.23E-4	0.001116
		15	20.90		2.43E-4	0.001213
		20	22.60		2.63E-4	0.001314
		25	24.08		2.80E-4	0.001400
		30	25.47		2.96E-4	0.001481
	7:01	60	34.81		4.05E-4	0.002024
	7:02	120	48.86		5.68E-4	0.002841
	7:04	240	71.62		8.33E-4	0.004164
	7:05	300	78.91		9.17E-4	0.004588
	7:06	360	85.40		9.93E-4	0.004966
	7:07	420	90.60		1.05E-3	0.005268
	7:08	480	94.80		1.10E-3	0.005512
	7:09	540	97.90		1.14E-3	0.005697
	7:10	600	100.70		1.17E-3	0.005855
	7:15	900	108.20		1.26E-3	0.006289
	7:20	1200	110.70		1.29E-3	0.006434
	7:25	1500	111.80		1.30E-3	0.006501
	7:30	1800	112.09		1.30E-3	0.006517
	8:00	3600	112.10		1.30E-3	0.006518
	9:00	7200	112.30		1.31E-3	0.006534
	10:00	10800	112.70		1.31E-3	0.006555
	11:00	14400	113.00		1.31E-3	0.006570
	13:00	21600	113.10		1.32E-3	0.006577
	14:00	25200	113.20		1.32E-3	0.006581
	15:00	28800	113.20		1.32E-3	0.006581
	16:00	32400	113.20		1.32E-3	0.006581
	17:00	36000	113.20		1.32E-3	0.006581
09/08	7:00	86400	113.20		1.32E-3	0.006581
	9:00	93600	113.20		1.32E-3	0.006581
	12:00	104400	113.20		1.32E-3	0.006581
	13:00	108000	113.20		1.32E-3	0.006581

CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA:
Prueba No. 2



CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA

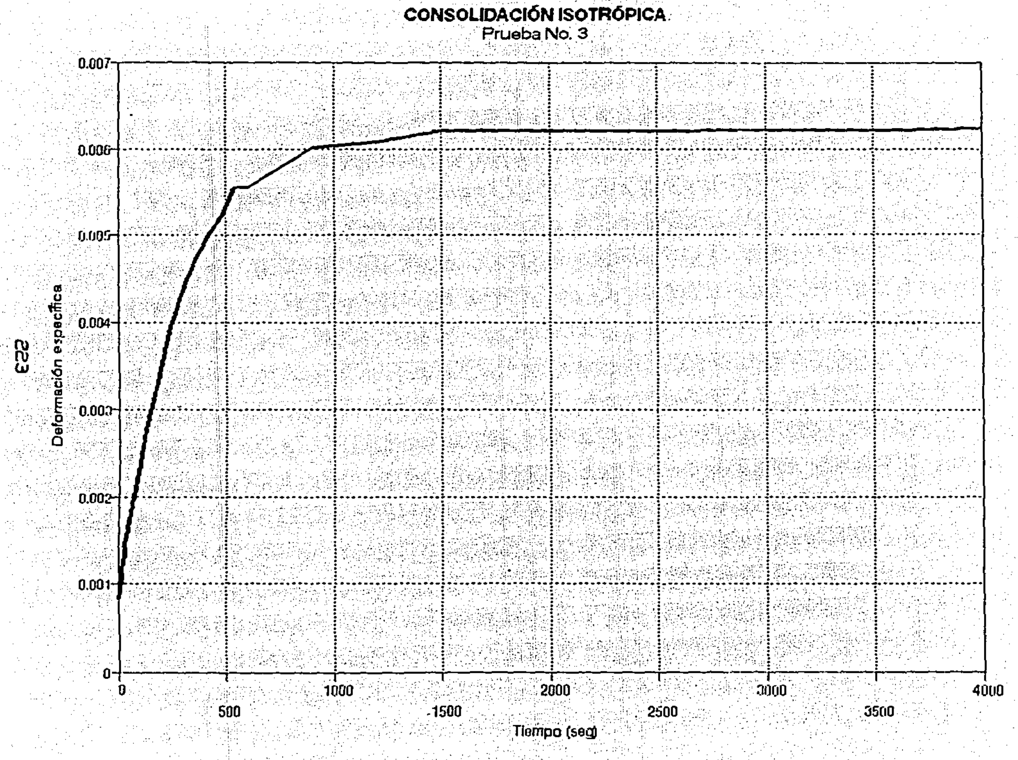
Prueba No. 3

ESFUERZOS ISOTRÓPICOS

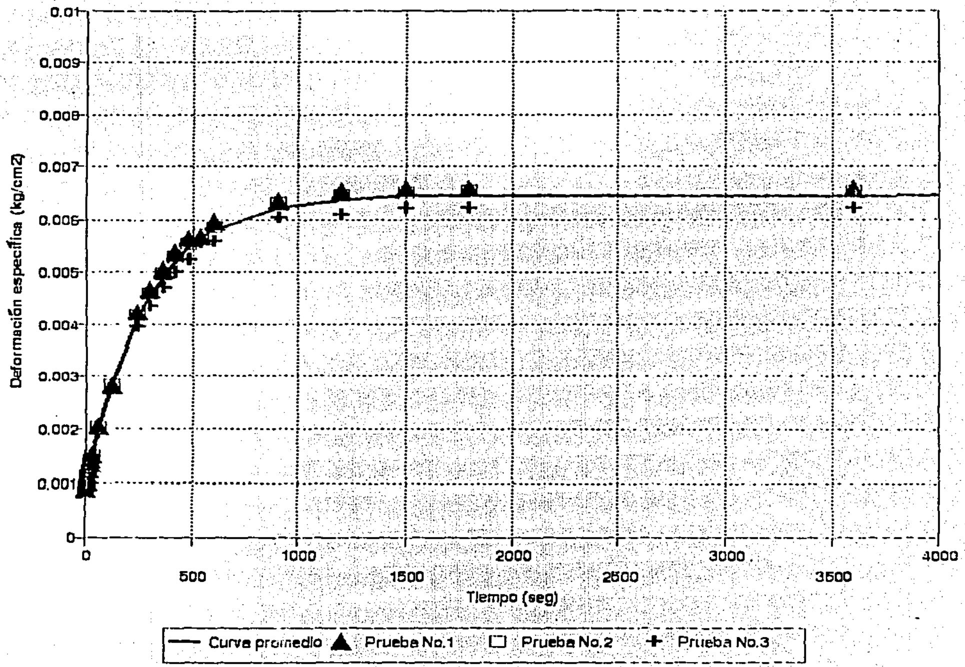
$\sigma o(Kg/cm^2)$: 0.2 H. probeta: 72.00 mm

22/Agosto/94

fecha	hora	tiempo seg.	L. micróm. μ	Deform. mm	Def. uni	Def. espec cm^2/kg
22/08	7:00	0	0.00	0.000	0.00	0.000000
		0	12.00	0.1200	1.67E-4	0.008360
		5	13.60	0.1360	1.89E-4	0.000947
		10	15.20	0.1520	2.11E-4	0.001059
		15	16.60	0.1660	2.31E-4	0.001156
		20	17.90	0.1790	2.49E-4	0.001245
		25	19.20	0.1920	2.66E-4	0.001331
		30	20.60	0.2060	2.86E-4	0.001430
	7:01	60	27.70	0.2770	3.84E-4	0.001921
	7:02	120	39.80	0.3980	5.53E-4	0.002766
	7:04	240	56.90	0.5690	7.89E-4	0.003948
	7:05	300	62.60	0.6260	8.69E-4	0.004347
	7:06	360	67.80	0.6780	9.42E-4	0.004711
	7:07	420	72.10	0.7210	1.00E-3	0.005005
	7:08	480	75.20	0.7520	1.04E-3	0.005225
	7:09	540	79.90	0.7990	1.11E-3	0.005549
	7:10	600	80.00	0.8000	1.11E-3	0.005556
	7:15	900	86.70	0.8670	1.20E-3	0.006021
	7:20	1200	87.60	0.8760	1.22E-3	0.006082
	7:25	1500	89.50	0.8950	1.24E-3	0.006218
	7:30	1800	89.60	0.8960	1.24E-3	0.006223
	8:00	3600	89.70	0.8970	1.25E-3	0.006228
	9:00	7200	89.90	0.8990	1.25E-3	0.006246
	10:00	10800	90.60	0.9060	1.26E-3	0.006293
	11:00	14400	90.80	0.9080	1.26E-3	0.006306
	13:00	21600	91.00	0.9100	1.26E-3	0.006319
	14:00	25200	91.00	0.9100	1.26E-3	0.006319
	15:00	28800	91.00	0.9100	1.26E-3	0.006319
	16:00	32400	91.00	0.9100	1.26E-3	0.006319
	17:00	36000	91.00	0.9100	1.26E-3	0.006319
23/08	7:00	86400	91.00	0.9100	1.26E-3	0.006319
	9:00	93600	91.00	0.9100	1.26E-3	0.006319
	12:00	104400	91.00	0.9100	1.26E-3	0.006319
	13:00	108000	91.00	0.9100	1.26E-3	0.006319


CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA
Prueba No. 3
0.007
0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0
ε22
Deformación específica
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
Tiempo (seg)

CONSOLIDACIÓN ISOTRÓPICA
Curva Promedio



A P É N D I C E   E

RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DE CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA EN CÁMARA TRIAXIAL 1, 2 Y 3 A ESFUERZO AXIAL CONSTANTE

CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA

Prueba No.1

ESFUERZO AXIAL

σo(Kg/cm²): 0.20 H. probeta: 86.00 mm

27/Julio/94 hoja 1/2

fecha	hora	tiempo seg.	L. micróm. μ	Deform. mm	Def. uni	Def. espec cm²/kg
27/07	6:35	0	0.00	0.0000	0.0000	0.000000
		0	113.40	0.1134	1.32E-3	0.006593
		5	114.10	0.1141	1.33E-3	0.006634
		10	114.80	0.1148	1.34E-3	0.006673
		15	115.30	0.1153	1.34E-3	0.006706
		20	115.90	0.1159	1.35E-3	0.006741
		25	116.40	0.1164	1.35E-3	0.006768
		30	116.90	0.1169	1.36E-3	0.006799
	6:36	60	120.00	0.1200	1.40E-3	0.006982
	6:37	120	124.50	0.1245	1.44E-3	0.007237
	6:39	240	132.70	0.1327	1.54E-3	0.007715
	6:40	300	135.20	0.1352	1.57E-3	0.007862
	6:41	360	137.40	0.1374	1.60E-3	0.007989
	6:42	420	139.20	0.1392	1.62E-3	0.008091
	6:43	480	140.50	0.1405	1.63E-3	0.008171
	6:44	540	141.00	0.1410	1.64E-3	0.008197
	6:45	600	142.80	0.1428	1.66E-3	0.008301
	6:50	900	145.20	0.1452	1.69E-3	0.008442
	6:55	1200	146.40	0.1564	1.70E-3	0.008510
	7:00	1500	146.90	0.1469	1.71E-3	0.008540
	7:05	1800	147.10	0.1471	1.71E-3	0.008555
	7:35	3600	148.30	0.1483	1.73E-3	0.008624
	8:05	5400	149.50	0.1495	1.74E-3	0.008694
	8:35	7200	150.70	0.1507	1.75E-3	0.008763
	9:35	10800	153.10	0.1531	1.78E-3	0.008899
	10:35	14400	155.40	0.1554	1.81E-3	0.009035
	12:35	21600	160.00	0.1600	1.86E-3	0.009305
	13:35	25200	162.40	0.1624	1.89E-3	0.009440
	14:35	28800	164.80	0.1648	1.92E-3	0.009581
	15:35	32400	166.00	0.1660	1.93E-3	0.009649
	16:35	36000	168.40	0.1684	1.96E-3	0.009788
28/07	6:35	86400	195.80	0.1958	1.98E-3	0.011385
	8:35	93600	199.30	0.1993	2.32E-3	0.011590
	11:35	104400	208.10	0.2081	2.92E-3	0.012101
	12:35	108000	209.80	0.2098	2.44E-3	0.012199

CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA

Prueba No. 1

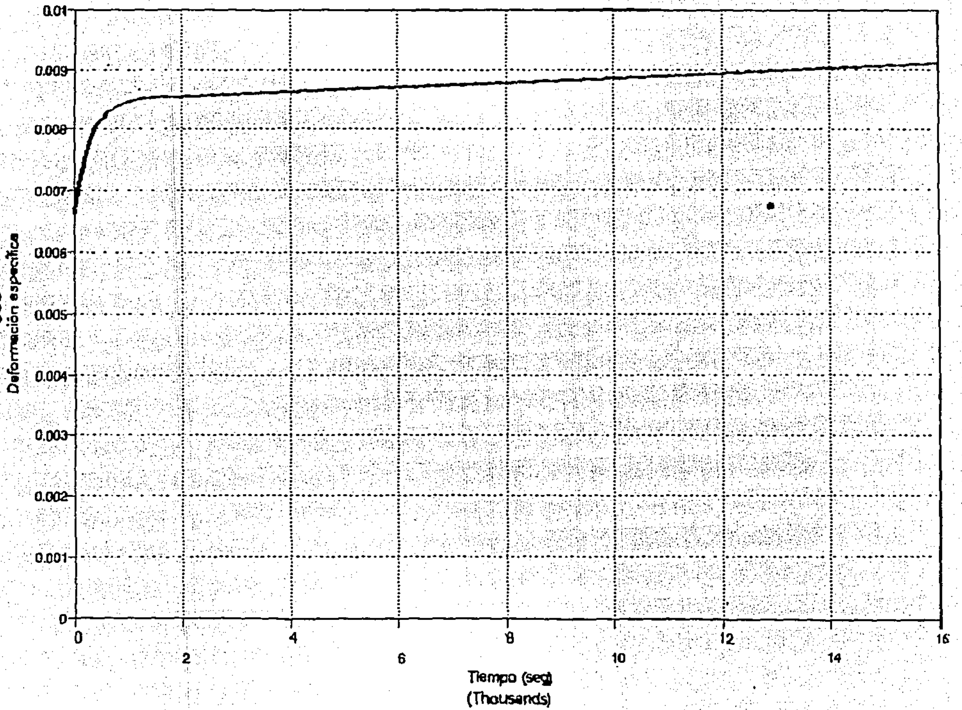
ESFUERZO AXIAL

$\sigma o (Kg/cm^2)$: 0.2 H. probeta: 86.00 mm

hoja 2/2

fecha	hora	tiempo	L. micróm. μ	Deform. mm	Def. uni	Def. espec cm^2/kg
	14:35	115200	214.30	0.2143	2.49E-3	0.012458
29/07	6:35	172800	250.90	0.2509	2.92E-3	0.014590
	10:35	187200	258.00	0.2580	3.00E-3	0.015000
	18:35	216000	279.00	0.2790	3.24E-3	0.016220
30/07	6:35	259200	306.70	0.3067	3.57E-3	0.017830
	10:35	273600	317.50	0.3175	3.69E-3	0.018461
	14:35	288000	326.80	0.3268	3.80E-3	0.018998
31/07	6:35	345600	363.70	0.3637	4.23E-3	0.021148
	18:35	388800	391.20	0.3912	4.55E-3	0.022743
01/08	6:35	432000	429.50	0.4295	4.99E-3	0.024969
02/08	6:35	518400	473.20	0.4732	5.50E-3	0.027513

CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA
Prueba No. 1



CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA

Prueba No. 2

ESFUERZO AXIAL

$\sigma o(Kg/cm^2)$: 0.20 H. probeta: 86.00 mm

04/Agosto/94 hoja 1/2

fecha	hora	tiempo	L. micróm. μ	Deform. mm	Def. uni	Def. espec cm^2/kg
04/08	6:30	0	0.00	0.0000	0.0000	0.00000
		0	113.70	0.1137	1.32E-3	0.00661
		5	114.30	0.1143	1.33E-3	0.00665
		10	114.90	0.1149	1.34E-3	0.00668
		15	115.40	0.1154	1.34E-3	0.00671
		20	116.20	0.1162	1.35E-3	0.00675
		25	116.60	0.1166	1.36E-3	0.00678
		30	117.10	0.1171	1.36E-3	0.00681
	6:31	60	120.00	0.1200	1.40E-3	0.00698
	6:32	120	125.00	0.1250	1.45E-3	0.00727
	6:34	240	133.00	0.1330	1.54E-3	0.00773
	6:35	300	135.10	0.1351	1.57E-3	0.00785
	6:36	360	137.30	0.1373	1.60E-3	0.00798
	6:37	420	139.10	0.1391	1.62E-3	0.00809
	6:38	480	140.50	0.1405	1.63E-3	0.00817
	6:39	540	141.60	0.1416	1.65E-3	0.00823
	6:40	600	144.30	0.1443	1.68E-3	0.00839
	6:45	900	145.20	0.1452	1.69E-3	0.00844
	6:50	1200	146.40	0.1464	1.70E-3	0.00851
	6:55	1500	146.70	0.1467	1.71E-3	0.00853
	7:00	1800	147.00	0.1470	1.71E-3	0.00855
	7:30	3600	148.30	0.1483	1.73E-3	0.00862
	8:00	5400	149.60	0.1496	1.74E-3	0.00870
	8:30	7200	150.70	0.1507	1.75E-3	0.00876
	9:30	10800	153.30	0.1533	1.78E-3	0.00891
	10:30	14400	155.80	0.1558	1.81E-3	0.00906
	12:30	21600	160.40	0.1604	1.87E-3	0.00933
	13:30	25200	162.40	0.1624	1.90E-3	0.00944
	14:30	28800	164.70	0.1647	1.92E-3	0.00958
	15:30	32400	166.20	0.1662	1.93E-3	0.00966
	16:30	36000	169.70	0.1697	1.97E-3	0.00986
05/08	6:30	86400	209.00	0.2090	2.43E-3	0.01215
	8:30	93600	210.40	0.2107	2.45E-3	0.01223
	11:30	104400	220.70	0.2207	2.57E-3	0.01283
	12:30	108000	223.50	0.2235	2.60E-3	0.01300

CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA

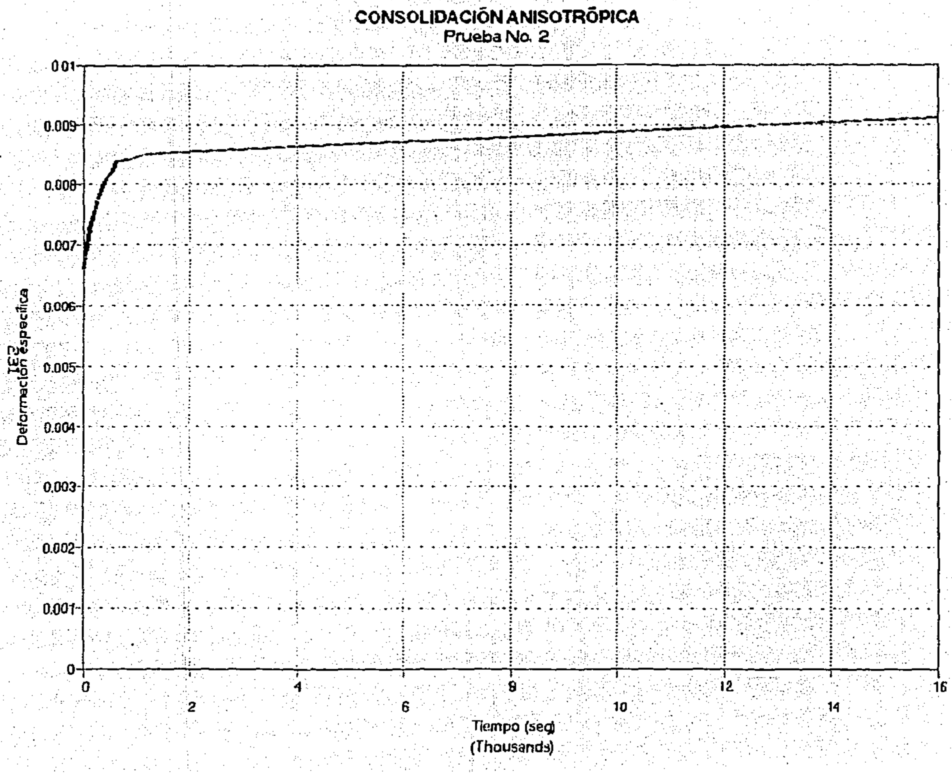
Prueba No. 2

ESFUERZO AXIAL

$\sigma o(Kg/cm^2)$: 0.20   H. probeta: 86.00 mm

hoja 2/2

fecha	hora	tiempo	L. micróm. μ	Deform. mm	Def. uni	Def. espec cm^2/kg
	14:30	115200	227.60	0.2276	2.65E-3	0.01323
06/08	6:30	172800	266.80	0.2668	3.10E-3	0.01551
	10:30	187200	273.50	0.2735	3.18E-3	0.01590
	18:30	216000	292.50	0.2925	3.40E-3	0.01701
07/08	6:30	259200	320.90	0.3209	3.73E-3	0.01866
	10:30	273600	330.80	0.3308	3.85E-3	0.01923
	14:30	288000	338.70	0.3387	3.94E-3	0.01969
08/08	6:30	354600	375.10	0.3751	4.36E-3	0.02181
	18:30	388800	404.70	0.4047	4.71E-3	0.02353
09/08	6:30	432000	433.10	0.4331	5.04E-3	0.02518
10/08	6:30	518400	491.20	0.4912	5.71E-3	0.02856


CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA
Prueba No. 2
Deformación específica
Σ31
0.01
0.009
0.008
0.007
0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
Tiempo (seg)
(Thousands)

CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA

Prueba No. 3

ESFUERZO AXIAL

$\sigma o(Kg/cm^2)$: 0.20 H. probeta: 72.00 mm

24/Agosto/94 hoja 1/2

fecha	hora	tiempo	L. micróm. μ	Deform. mm	Def. uni	Def. espec cm^2/kg
24/08	6:30	0	0.00	0.0000	0.00000	0.00000
		0	94.40	0.0944	1.31E-3	0.00655
		5	95.60	0.0956	1.33E-3	0.00664
		10	95.70	0.0957	1.33E-3	0.00665
		15	96.10	0.0961	1.34E-3	0.00668
		20	96.20	0.0962	1.34E-3	0.00668
		25	96.90	0.0969	1.35E-3	0.00673
		30	97.40	0.0974	1.35E-3	0.00676
	6:31	60	99.80	0.0998	1.39E-3	0.00693
	6:32	120	104.00	0.1040	1.44E-3	0.00721
	6:34	240	109.30	0.1093	1.52E-3	0.00759
	6:35	300	112.20	0.1122	1.56E-3	0.00779
	6:36	360	113.30	0.1133	1.57E-3	0.00788
	6:37	420	114.80	0.1148	1.59E-3	0.00797
	6:38	480	115.90	0.1159	1.61E-3	0.00805
	6:39	540	117.20	0.1172	1.63E-3	0.00814
	6:40	600	119.70	0.1197	1.66E-3	0.00831
	6:45	900	120.50	0.1205	1.67E-3	0.00837
	6:50	1200	120.60	0.1206	1.67E-3	0.00838
	6:55	1500	121.10	0.1211	1.68E-3	0.00841
	7:00	1800	121.40	0.1214	1.68E-3	0.00843
	7:30	3600	122.30	0.1223	1.70E-3	0.00849
	8:00	5400	123.30	0.1233	1.71E-3	0.00857
	8:30	7200	125.20	0.1252	1.74E-3	0.00869
	9:30	10800	127.10	0.1271	1.76E-3	0.00883
	10:30	14400	129.10	0.1291	1.79E-3	0.00897
	12:30	21600	133.00	0.1330	1.85E-3	0.00924
	13:30	25200	135.10	0.1351	1.87E-3	0.00938
	14:30	28800	136.80	0.1368	1.90E-3	0.00950
	15:30	32400	138.70	0.1387	1.93E-3	0.00963
	16:30	36000	140.70	0.1407	1.95E-3	0.00977
25/08	6:30	86400	163.20	0.1632	2.27E-3	0.01133
	8:30	93600	166.00	0.1660	2.31E-3	0.01153
	11:30	104400	169.90	0.1699	2.36E-3	0.01180
	12:30	108000	174.90	0.1749	2.43E-3	0.01215

CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA

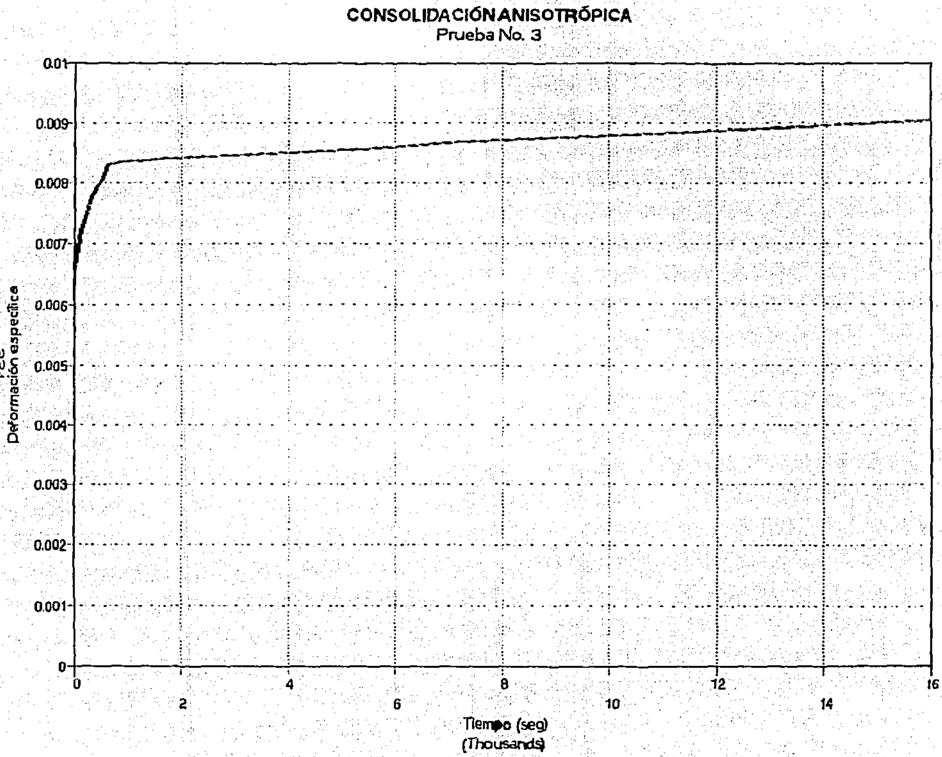
Prueba No. 3

ESFUERZO AXIAL

σo(Kg/cm²): 0.20 H. probeta: 72.00 mm

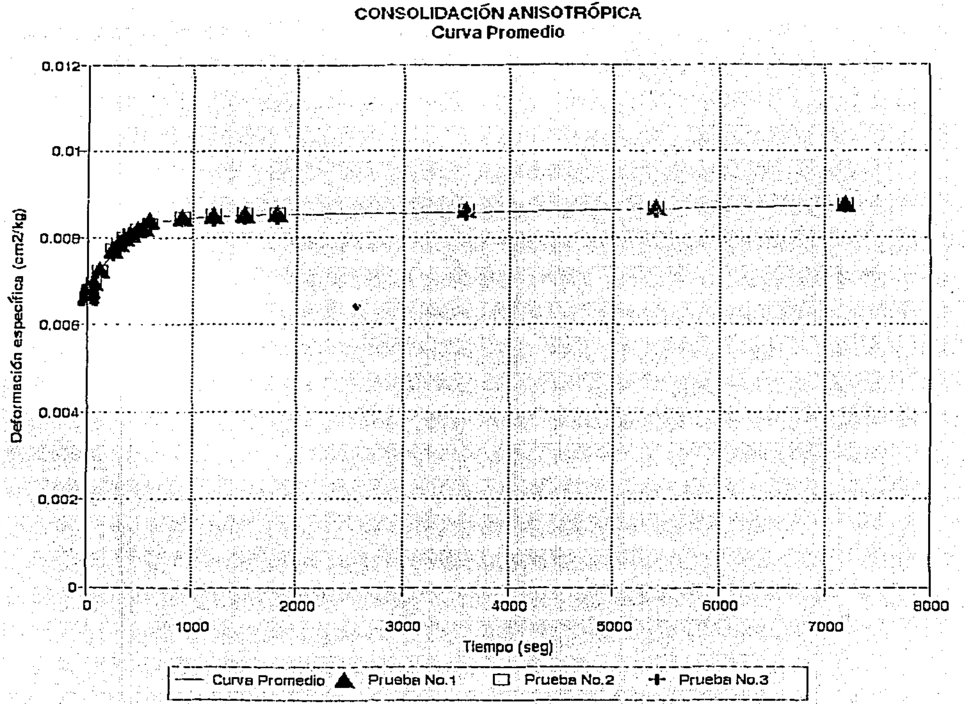
hoja 2/2

fecha	hora	tiempo	L. micróm. μ	Deform. mm	Def. uni	Def. espec cm²/kg
	14:30	115200	176.70	0.1767	2.45E-3	0.01227
26/08	6:30	172800	210.20	0.2102	2.92E-3	0.02460
	10:30	187200	218.20	0.2182	3.03E-3	0.01515
	18:30	216000	234.00	0.2340	3.25E-3	0.01625
27/08	6:30	259200	254.80	0.2548	3.54E-3	0.01770
	10:30	273600	263.40	0.2634	3.66E-3	0.01829
	14:30	288000	270.20	0.2702	3.75E-3	0.01877
28/08	6:30	345600	302.10	0.3021	4.20E-3	0.02098
	18:30	388800	327.90	0.3279	4.55E-3	0.02277
29/08	6:30	432000	348.50	0.3485	4.84E-3	0.02420
30/08	6:30	518400	397.40	0.3974	5.52E-3	0.02760



CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA
Prueba No. 3
Deformación específica
0.01
0.009
0.008
0.007
0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
Tiempo (seg)
(Thousands)

234


CONSOLIDACIÓN ANISOTRÓPICA
Curva Promedio
Deformación específica (cm2/kg)
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
Tiempo (seg)
Curva Promedio
Prueba No.1
Prueba No.2
Prueba No.3