UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ENEP ACATLAN

EL MODELO DE RICHARDSON: UN MODELO PARA PREDICCION DE COMPETENCIAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LIC. EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

FALLA DE ORIGEN

PRESENTA:

PEREZ SEGURA, MARIA DEL PILAR

1995

21

24

INDICE

INTRODUCCION

Introducción

A lo largo del desarrollo de las computadoras, ,éstas han estado asociadas en gran medida con las ciencias biológicas y físicas, pero los politólogos han comenzado a encontrar usos en las ciencias sociales. Muchas universidades están adquiriendo microcomputadoras o minicomputadoras dentro de sus departamentos de ciencias políticas para lograr que los estudiantes de esta área las utilicen como sus similares en los campos de física o ingeniería.

Tradicionalmente, el uso primario de las computadoras en ciencia política, ha sido para el análisis estadístico. Las computadoras ahora están siendo aplicadas cada vez más al estudio de modelos formales de sistemas políticos. Algunos de estos modelos son, a gran escala, simulaciones con requerimientos de memoria que exceden a la capacidad de las microcomputadoras, pero muchos son lo bastante pequeños para ser programados en una máquina con solo 640 kbytes de RAM.

El presente trabajo tiene como fin el analizar y desarrollar uno de los modelos de predicción poco conocidos tanto en el área de simulación como en las ciencias políticas, llamado el Modelo de Richardson el cuál recibe el nombre de su creador el meteorólogo británico Richardson Lewis quien, preocupado por las consecuencias desastrosas generadas por las guerras, decidió aplicar sus conocimientos matemáticos para formular un modelo que permitiera predecir a tiempo las guerras.

Para desarrollar el modelo, éste se ha presentado como un par de ecuaciones de diferencias finitas, en lugar de usar las ecuaciones diferenciales originales de Richardson, debido a que es la forma más usada en la mayoría de las investigaciones y la forma más fácil para resolverlas.

Aunque este modelo fue aplicado principalmente a las Competencias de las Carreras Armamentistas; en este estudio se desarrolla un programa de computadora que pretende generalizar el Modelo de Richardson para competencias en cualquier área, ya sea deportiva, económica, industrial etc., de tal forma que las personas que piensan que las computadoras y las matemáticas sólo son aplicables en ciertos campos, tengan una idea más clara del alcance que pueden lograr estas dos herramientas operando conjuntamente en un Modelo de Simulación.

La belleza del Modelo de Richardson es que está contenido en sí mismo: si se saben los valores de niveles de armas de X y Y para un año, se puede predecir los niveles de armas para años futuros. Esto da al modelo el potencial, en teoría, de predecir el futuro.

CAPITULO I

CAPITULO I.

LOS MODELOS DE SIMULACION.

I.1 CONCEPTO DE SIMULACION

A partir del advenimiento de las computadoras electrónicas, la simulación ha sido una de las herramientas más importantes y útiles para analizar el diseño y operación de complejos procesos o sistemas, ya que cada modelo o representación de una cosa es una forma de simulación. Simular, según el diccionario significa "fingir, llegar a la esencia de algo, prescindir de la realidad". De una forma técnica, la simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y realizar experimentos con él para entender el comportamiento del sistema o evaluar varias estrategias para la operación del sistema. Se entiende entonces, que el proceso de simulación incluye tanto la construcción del modelo como su uso analítico para estudiar un problema.

Tenemos pues, que el modelado de la simulación es una metodología aplicada y experimental que intenta:

a) Describir el comportamiento de sistemas

b) Postular teorías e hipótesis que expliquen el comportamiento observado.

c) Usar las teorías para predecir un comportamiento futuro.

A diferencia de la mayoría de las tecnologías, las cuales pueden clasificarse de acuerdo con la disciplina de la que se originan, la simulación puede aplicarse a todas las disciplinas. Por ejemplo, existen libros acerca del uso de la simulación en administración, economía. mercadotecnia, educación, política, ciencias políticas, ciencias del comportamiento, relaciones internacionales, transporte, mano de obra, cumplimiento de la ley, estudios urbanos e innumerables áreas.

Debido a que la simulación es solamente una técnica de moderación, es necesario dejar claro el concepto de Modelo para poder así, analizar los tipos de modelos que son posibles de desarrollar al simular un sistema.

Dado esto, y basándome en varias definiciones expuestas por diferentes autores, diré, que un Modelo es una representación de un objeto, sistema o idea de forma diferente a la de la identidad misma, siendo su propósito usual, ayudar a explicar, entender o mejorar un sistema.

Se considera que las funciones de un modelo son la predicción y la comparación para proporcionar una manera lógica de predecir los resultados que siguen las acciones alternativas, e indicar una preferencia entre ellas. Dicho modelo puede tomar muchas formas, pero una de las más útiles es la matemática, la cual expresa por medio de un conjunto de ecuaciones las características esenciales del sistema ò los fenómenos en estudio. Ya que generalmente el empleo de una computadora es para evaluar matemáticamente el modelo y los datos recolectados con el fin de estimar las verdaderas características del modelo, suele caracterizarse a los modelos de simulación como modelos de entrada-salida. Es decir, ellos producen la salida del sistema si se les da la entrada a sus subsistemas interactuantes. Por tanto, los modelos de simulación se corren en vez de resolverse, para obtener la información o los resultados deseados. Son incapaces de generar una solución por sí mismos en el sentido de los modelos analíticos; sólo pueden servir como herramienta para el análisis del comportamiento de un sistema en condiciones especificadas por el experimentador. Por lo tanto, la simulación no es una teoría, sino una metodología de resolución de problemas. Además, la simulación es sólo una de varias formas valiosas para resolver problemas que están disponibles para un analista de sistemas.

Dado que la definición de simulación es bastante amplia, restringiremos nuestra definición solamente a los experimentos con modelos lógicos o matemáticos ya que son los que se pueden realizar en una computadora digital y que ocurren en períodos extensos de tiempo, bajo condiciones estocásticas o dinámicas y cuyas soluciones por métodos estrictamente analíticos no son necesariamente del todo determinísticas.

Es útil entonces, para nuestro propósito clasificar los modelos de simulación en tres dimensiones diferentes:

1. Modelos de Simulación Estáticos o Dinámicos. Un modelo de simulación estático es una representación de un sistema en un

tiempo particular o un modelo que puede ser usado para representar un sistema en el cual el tiempo no importa. Por el contrario, un modelo de simulación dinámico representa un sistema que se desarrolla sobre el tiempo.

2. Modelos de Simulación Determinísticos o Estocásticos. En un Modelo de Simulación Determinístico, no se permite a las variables de entrada ni a las variables de estado, ser variables al azar, ya que se suponen relaciones exactas para las características de operación en lugar de funciones de densidad de probabilidad. Muchos sistemas, sin embargo, deben ser modelados teniendo al menos algunos componentes aleatorios de entrada dados por una función de probabilidad lo que los caracteriza como modelos de simulación Estocásticos.

3. Modelos de Simulación Continuos o Discretos. Dado que estos tipos de modelos mantienen una relación estrecha con el análisis del Modelo de Richardson, ser n analizados en el apartado siguiente.

Finalmente, diremos que, aunque la técnica de simulación generalmente se ve como un método de último recurso para la resolución de modelos complejos, recientes avances en las metodologías de simulación y la gran disponibilidad de software que actualmente existe en el mercado, han hecho que la técnica de simulación sea una de las herramientas más ampliamente usadas en el análisis de sistemas.

I.2. MODELOS DE SIMULACION DE SISTEMAS CONTINUOS

Anteriormente, la simulación de sistemas continuos fue usada para estudiar sistemas complejos.

Un sistema continuo está caracterizado por las actividades predominantes del sistema que causan cambios en los atributos de las entidades del sistema. Cuando tal sistema es modelado matemáticamente, las variables del modelo representan los atributos que son controlados por funciones continuas.

Más generalmente, en los sistemas continuos, las relaciones describen las tasas en las que los atributos cambian, así que el modelo consiste de ecuaciones diferenciales.

Simulación continua es el nombre que se le da a el uso de una computadora digital para resolver modelos con estados cambiando continuamente, ya que tales modelos están generalmente compuestos de un número de ecuaciones diferenciales las cuales son resueltas numéricamente para ver cómo se desarrolla el modelo. El nombre de simulación es aplicado a tales estudios debido a que la variable independiente para ser resuelta en estas ecuaciones es usualmente el tiempo, ya que se quiere calcular el estado del sistema en algún tiempo en el futuro, comenzando a partir de una configuración inicial conocida. Más explícitamente, esto puede ser llamado simulación de tiempo continuo.

Planear un modelo de simulación continua es un poco diferente que el planear una simulación de eventos discretos. En general, las ecuaciones diferenciales en el modelo pueden incluir variables aleatorias generadas usando exactamente las mismas t,técnicas como en simulación de eventos discretos. Para simulaciones continuas con variables aleatorias, la teoría estadística para guiar el diseño de simulación y la interpretación de sus salidas, casi no existe. En el caso de la simulación continua el analista tiene un segundo trabajo, especialmente para escoger un algoritmo apropiado para realizar las integraciones numéricas, necesarias y para librar la inestabilidad y los errores numéricos en los resultados.

El cambio que el analista tiene que hacer está entre los algoritmos simples y de tamaño de paso grande, los cuales pueden dar resultados altamente erróneos; y los algoritmos sofisticados y de longitud de paso muy pequeña los cuales pueden conducir a cálculos costosos. La velocidad de computación puede ser también importante si el modelo es parte de un sistema de tiempo real. En otras palabras, las simulación continua generalmente plantea problemas no sólo de estadísticas sino también de análisis numérico.

Los modelos más simples de ecuaciones diferenciales tienen una o más ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Es entonces posible resolver el modelo sin el uso de simulación. Aunque aquí el trabajo envuelto puede ser tan grande que es preferible usar técnicas de simulación. Sin embargo, cuando las no-linearidades son introducidas en el modelo, frecuentemente llega a ser imposible o al menos muy difícil resolver los modelos.

Los métodos de simulación para la resolución de modelos no cambian necesariamente cuando la no-linearidad ocurre. Los métodos de aplicación de simulación a modelos continuos pueden ser desarrollados mostrando su aplicación a modelos donde las ecuaciones diferenciales son lineales y tengan coeficientes constantes, y entonces generalizarlo a ecuaciones más complejas.

I.2.1. CARACTERÍSTICAS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN LOS SISTEMAS CONTINUOS.

Ahora que ya se ha mencionado el uso de ecuaciones diferenciales dentro de la simulación, es necesario conocer las características de éstas.

"Se dice que si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, es entonces una ecuación diferencial."[1]

Las ecuaciones diferenciales se clasifican siguiendo tres propiedades:

Tipo.- Si una ecuación contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces será una **ecuación diferencial ordinaria.** Si una ecuación contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes

---

[1] Dennis G. Zill
Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones
Grupo Editorial Iberoamérica.

de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial.**

Orden.- El orden de la más alta derivada en una ecuación diferencial se llama orden de la ecuación. De acuerdo a esto, las ecuaciones diferenciales pueden ser de primer orden, segundo orden, ..., hasta de orden n. En ésta propiedad se consideran también a las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales parciales.

Dado que las ecuaciones diferenciales parciales requieren una sólida base en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, la tercera propiedad se refiere a éstas últimas:

Linealidad o No-linealidad.- Las ecuaciones diferenciales lineales se caracterizan por dos propiedades:

a) la variable dependiente y junto con todas sus derivadas son de primer grado.

b) cada coeficiente depende sólo de la variable independiente x y está dada por:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)...(1.1)$$

La ecuación que no cumpla con estas propiedades se denomina **No lineal.** Cuando n=1, se obtiene una ecuación lineal de primer orden

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)...(1.2)$$

Dividiendo entre $a_1(x)$ resulta:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)...(1.3)$$

Se busca la solución de esta ecuación en un intervalo I en el cuál P(x) y f(x) son continuas.

Supóngase que la ecuación se escribe en la forma diferencial,

$$dy+[P(x)y-f(x)]dx=0 \ldots (1.4)$$

"las ecuaciones lineales tienen la propiedad de que siempre es posible encontrar una función $\mu(x)$ tal que el múltiplo de la ecuación (1.3)

$$\mu(x)dy+\mu(x)[P(x)y-f(x)]dx=0 \ldots (1.5)$$

es una Ecuación Difernciał Exacta".[2] El primer miembro de la ecuación (1.5) será una diferencial exacta si

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)=\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[P(x)y-f(x)] \ldots (1.6)$$

[2] Dennis G. Zill
Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones
Grupo Editorial Iberoamérica.

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right]=e^{\int P(x)dx}f(x)\ldots(1.12)$$

y por último se integran ambos miembros

$$e^{\int P(x)dx}y=\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx+c$$

ó

$$y=e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx+ce^{-\int P(x)dx}\ldots(1.13)$$

Ahora, si se supone que P(x) y f(x) son continuas en un intervalo *I* y que x_0 es un punto cualquiera del intervalo, entonces se tendrá un problema de valor inicial:

$$\begin{gathered}\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)\\ y(x_0)=y\end{gathered}\ldots(1.14)$$

para el que existe una sola solución y un valor apropiado de c.

I.2.3. TRANSICION DE ESTADOS

Muchos fenómenos que son simulados mediante modelos continuos son descritos muy frecuentemente y predichos a través de modelos de transición de estados. Asumiendo que se conoce el valor de X(t) de una variable de estado X en algún tiempo t, un modelo de transición de estados especifica el valor de X en un tiempo futuro t+dt mediante una ecuación de estado:

$$X(t+dt)=S[X(t),t,dt]...(1.7)$$

es decir, el estado futuro X(t+dt) es una función dada del estado actual X(t), del tiempo actual t y del incremento del tiempo dt. Tal modelo de transición de estados puede explicar los efectos de los retrasos y las condiciones iniciales típicas de muchos sistemas dinámicos. Si nuestro modelo especifica la función S a partir de consideraciones empíricas o teóricas aún para un rango pequeño de incrementos de tiempo $dt(0 \leq dt < h)$, entonces la ecuación 1.7 permite la computación recursiva de la variable de estado X(t) para todos los valores de t una vez que un valor inicial X(0), es conocido.

Es solamente necesario comenzar con

$$X(0)=S[X(0),0,dt].$$

y continuar con

$$X(dt+dt')=S[X(dt),dt,dt']$$

El modelo de transición de estados así f ácilmente predice estados futuros.

El modelo de transición de estados es fácilmente generalizado, si el estado es especificado por N variables de estado X1, X2,..., XN o por el vector X={X1,X2,...,XN}, entonces la ecuación (1.7) puede ser interpretada como una ecuación de N elementos de vector la cuál l representa N ecuaciones de estado:

$$XI(t+dt)=SI[X1(t),X2(t),...;t,dt];(I=1,2,...,N)...(1.8)$$

la cuál I puede ser resuelta recursivamente con la ayuda de N condiciones iniciales dados los valores iniciales X1(0), X2(0),..., XN(0). Las ecuaciones de estado (1.8) son ecuaciones de diferencias para ser satisfechas por valores de solución X(t) y X(t+dt).

El tiempo de incremento dt es una constante dada. En este caso, se especifica y se predicen los valores de la variable de estado X(t) a tiempos uniformemente espaciados 0, dt, 2dt,...,dt, donde dt podría ser un milisegundo, un mes, un año, etc. Este tipo de descripción trabaja adecuadamente para modelos que envuelven series de tiempo económicas.

Algunos de los más importantes modelos de transición de estados, especialmente en física, asumen continuamente las variables t y X (sistemas continuos, sistemas dinámicos continuos) y expresan las ecuaciones de estado (1.7) para pequeños dt, en la forma "incremental":

$$\begin{aligned} X(t+dt) &= X(t)+dX(t) \\ &= X(t)+G[X(t),t] \end{aligned} \quad \ldots(1.9)$$

En el caso limitante de que $dt \to 0, dX \to 0$, las ecuaciones de estado entonces llegan a ser un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

dXI/dt=GI[X1(t), X2(t),...;t] (I=1,2,...,N) ... (1.10)

Estas ecuaciones diferenciales deben ser satisfechas por la solución X(t) o X1(t), X2(t),..., XN(t) junto con N condiciones de valor inicial.

En muchas aplicaciones de los modelos de transición de estados, es usual introducir, además de las variables de estado X(t), un conjunto de variables definidas:

YI(t)=FI[X1(t), X2(t),...;Y1(t), Y2(t),...;t] (I=1,2,...,M)

Las YI(t) son variables de salida y los resultados intermedios FI se introducen para simplificar el cálculo de las funciones s o G en una ecuación de estado como las expresiones (1.7, 1.9 y 1.10).

Todos o algunos de los tiempos dependientes de las funciones S, G y F en las ecuaciones (1.7, 1.9, 1.10), están expresados convenientemente en t,érminos de variables de entrada U(t), las cuales pueden ser físicamente interpretadas como funciones de fuerza o estímulo causando cambios de estado. Y las funciones que definen el modelo S, G y F pueden contener los parámetros del sistema P(ó P1, P2,...) los cuales permanecen constantes para cada simulación pero pueden ser cambiados para modificar el modelo.

Los modelos de transición de estados para poder ser simulados, generalmente se implementan con base en ecuaciones de diferencias. Para aproximar la solución de un modelo de ecuaciones diferenciales:

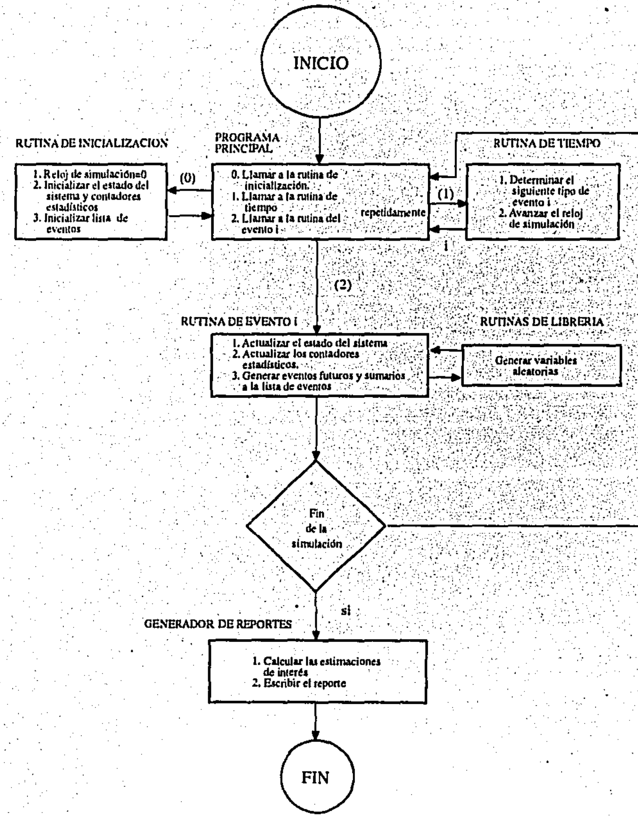
$$dX/dt=G(X,t) \quad \ldots. (1.11)$$

(donde G puede también,n envolver variables definidas como sean necesarias), uno puede escribir una ecuación de diferencias aproximando

$$X(t+dt)=X(t)+G[X(t),t]dt \quad \ldots.(1.12)$$

donde dt es un pequeño incremento de tiempo. Se comienza con el estado inicial conocido X(0) para t=0 y calcula valores sucesivos X(t+dt) recursivamente.

La siguiente figura muestra un diagrama general para la representación de un modelo de ecuaciones diferenciales con variables de estado, variables definidas, variables de entrada y parámetros del sistema. Una representación completamente análoga se aplica a los modelos de ecuaciones de diferencias:



ESTRUCTURA GENERAL DE UN MODELO PARA SISTEMAS DISCRETOS

I.3. MODELOS DE SIMULACION DE SISTEMAS DISCRETOS

La simulación de eventos discretos concierne al modelado de un sistema que se desarrolla sobre el tiempo mediante una representación en la cual el estado de las variables cambia instantáneamente en puntos separados en el tiempo. Estos puntos en el sistema son en los que ocurren los eventos, donde un evento es definido como una ocurrencia instantánea que puede cambiar el estado del sistema.

Aunque la simulación ha sido aplicada a una gran diversidad de sistemas del mundo real, todos los modelos de simulación de eventos discretos comparten un número común de componentes y existe una organización lógica para estos componentes que implica la codificación y depuración y el cambio futuro de un programa de computadora para un modelo de simulación. A continuación se mencionar n los componentes b ásicos de los modelos de simulación de eventos discretos:

1) Estado del sistema: Es la colección de variables de estado necesarias para describir el sistema en un tiempo particular.

2) Reloj de Simulación: Es una variable que da el valor actual del tiempo simulado.

3) Contadores Estadísticos: Son variables usadas para almacenar información estadística acerca del funcionamiento del sistema.

4) Rutina de Inicialización: Es un subprograma para inicializar el modelo de simulación en el tiempo cero.

5) Rutina de Tiempo: Es un subprograma que determina el siguiente evento a partir de la lista de eventos y hace que el reloj de simulación avance al tiempo en el que ese evento ocurra.

6) Rutina de eventos: Es un subprograma que actualiza el estado del sistema cuando un tipo de evento ocurre.

7) Rutinas de Librería: Es un conjunto de subprogramas usados para generar observaciones aleatorias a partir de distribuciones de probabilidad que fueron determinadas como parte de la simulación del modelo.

8) Generador de Reportes: Es un subprograma que calcula y produce un reporte cuando la simulación termina.

9) Programa Principal: Es un subprograma que llama a la rutina de tiempo para determinar el siguiente evento y entonces transfiere el control a la rutina de evento correspondiente para actualizar apropiadamente el estado del sistema. El programa principal también,n verifica la terminación y llama al generador de reportes cuando la simulación termina.

Las relaciones lógicas entre estos componentes son las siguientes:

La simulación comienza en el tiempo cero con la llamada desde el programa principal a la rutina de inicialización, donde el reloj de simulación es cero, el estado del sistema y los contadores estadísticos son inicializados, y la lista de eventos es también inicializada. Después de que el control ha sido regresado al programa principal, este llama a la rutina de tiempo para determinar el tipo de evento. Si un evento tipo i es el siguiente a ocurrir, el reloj de simulación avanza al tiempo en el que el evento i ocurrir y el control es regresado al programa principal. Entonces el programa principal llama a la rutina de evento i, donde pueden presentarse tres tipos de actividades: (1) el estado del sistema es actualizado para justificar el hecho de que un evento tipo i ha ocurrido; (2) la información acerca del funcionamiento del sistema es recopilada actualizando los contadores estadísticos; y (3) los tiempos de ocurrencia de futuros eventos son generados y esta información es añadida a la lista de eventos. Frecuentemente es necesario generar observaciones aleatorias a partir de distribuciones de probabilidad a fin de determinar los tiempos de eventos futuros. Después de que todo el proceso se ha completado, ya sea en la rutina de eventos i o en el programa principal, se verifica mediante una condición de terminación si la simulación mostrada ha terminado. Si es tiempo de que la simulación termine, el generador de reportes es llamado desde el programa principal para evaluar los c cálculos de las medidas deseadas del funcionamiento y produce un reporte. Si no es tiempo de que la simulación termine, el control es regresado al programa principal y el ciclo "programa principal-rutina de tiempo-programa principal-rutina de eventos-verificación de terminación" es repetido hasta que la condición de terminación se satisface. Este proceso es mostrado en el siguiente diagrama:

CAPITULO II

CAPITULO II

DINAMICA DE SISTEMAS

INTRODUCCION

Existen muchos ejemplos fuera del campo de la ingeniería en los cuales puede ocurrir alguna forma de inestabilidad u oscilación. Los ciclos de los negocios causan fluctuaciones en el nivel general de la actividad económica. En las industrias individuales existen ciclos similares donde los precios y los materiales fluctúan o aparecen temporalmente fuera de control. También hay muchos ejemplos de oscilaciones en el campo de la biología, o explosiones en poblaciones. Es natural especular sobre si estos fenómenos pueden ser controlados. Claramente, la precisión obtenida en la ingeniería no podrá ser igual en las ciencias sociales o económicas. Sin embargo, el conocimiento ganado de la teoría de control puede ser usado para analizar los sistemas y sugerir cambios que mejorarán el desarrollo.

El principal interés del estudio de los sistemas dinámicos es entender las fuerzas que operan en un sistema para determinar su influencia en la estabilidad o crecimiento del sistema. La salida del estudio, se espera, sugerirá alguna reorganización o cambio en la política que puede resolver un problema existente o guiar desarrollos hacia direcciones potencialmente peligrosas. No es usual esperar que un estudio de sistemas dinámicos produzca números específicos para rediseñar un sistema como ocurre con sistemas de ingeniería. Correspondientemente, muchos de los coeficientes en los modelos de los estudios de sistemas dinámicos consisten de estimaciones o aciertos a partir de que los modelos deben reducir algunas veces tales factores cualitativos según las preferencias personales o la tensión social, a una forma cuantitativa. Sin embargo, la falta de precisión que puede ser tolerada no destruye el valor del estudio. El modelo puede establecer la efectividad relativa de políticas diferentes bajo las mismas condiciones o marcar valores fuera de rango que puede esperarse produzcan un tipo dado de salida.

Un aspecto de los comportamientos dinámicos de un sistema se concentra en las tasas a las cuales varias cantidades cambian y expresan las tasas como variables continuas.

Debido a la gran necesidad por construir modelos matemáticos del comportamiento dinámico de algunos sistemas y poder así establecer las relaciones funcionales entre los diferentes componentes de estos sistemas, se llegó a desarrollar una metodología llamada dinámica de sistemas, la cuál ha permitido desde hace algún tiempo, construir modelos dinámicos en los que juegan un papel primordial los bucles de realimentación empleando las computadoras como herramienta básica de simulación.

2.1 ORIGEN HISTORICO DE LA DINAMICA DE SISTEMAS.

El origen de la dinámica de sistemas se encuentra ligado al desarrollo de una aplicación práctica para la compañía Sprague Electric. La compañía Sprague Electric era una empresa que fabricaba componentes electrónicos de alta precisión. Normalmente sus clientes eran empresas de material electrónico destinado a usuarios altamente especializados. Por la naturaleza del mercado, constituido por pocos clientes muy fuertes, cabría esperar que el flujo de pedidos se mantuviese aproximadamente constante. Sin embargo, a mediados de los años 50's se observó que los pedidos sufrían unas fuertes oscilaciones. Oscilaciones que, por otra parte, recuerdan a las que presentan los servomecanismos[3] incorrectamente compensados.

Se encargó a un equipo de científicos, bajo la dirección de Jay W. Forrester, el estudio de este problema. Inicialmente se emplearon las técnicas de investigación operativa, construyéndose un modelo muy complejo con el que se pudieran realizar simulaciones del tipo Monte Carlo. Sin embargo, Forrester comprendió pronto que este tipo de estudios no conducían a resultados satisfactorios, al tiempo que descubría el papel primordial que jugaban en el funcionamiento del proceso las estructuras de realimentación de información que se presentaban en el mismo. En particular, observó cómo la combinación de los retrasos en la transmisión de información con las estructuras de realimentación estaban, en gran medida, en el origen de las oscilaciones. Esta observación constituye una inteligente aplicación de la teoría de los sistemas realimentados. Según esta última, es bien sabido que si se tiene una cadena cerrada de acciones, que sea

[3] Dispositivo que sirve para dar movimiento mediante una forma mecánica.

autorreguladora, y en esta cadena se introducen importantes retrasos en la transmisión, el sistema puede convertirse en oscilante.

Esta idea fundamental, de que un bucle de realimentación con retardo en su cadena puede producir oscilación, es la que intentó aplicar Forrester al estudio del problema de la Spraque. A partir de esta idea observó los elementos que intervenían en el proceso, así como las relaciones entre los mismos, descubriendo cadenas de realimentación negativa que justificaban la existencia de las oscilaciones. De este estudio surgió una comprensión del fenómeno y, por lo tanto, de las medidas que debían tomarse para corregirlo.

A partir de este trabajo, Forrester sistematizó sus ideas y su metodología dando lugar a la Dinámica Industrial, que a finales de la década de los años 50's estaba ya elaborada y comenzó a ser objeto de una aplicación sistemática a distintos casos prácticos. En la actualidad se han realizado cientos de aplicaciones de estas técnicas con resultados positivos. Se puede considerar ya una metodología convencional.

Hacia la mitad de los años 60's, cuando las aplicaciones de la dinámica industrial ya habían alcanzado un grado aceptable de madurez, se inició la extensión de la metodología a otros tipos de sistemas. En concreto, se aplicó al estudio de las ciudades en la denominada Dinámica Urbana.

En junio de 1970, Forrester fue requerido por el Club de Roma para realizar un intento de aplicación de su metodología al estudio del mundo, considerado como un sistema dinámico. El resultado fue un modelo del mundo, publicado por Forrester en su libro "World Dynamics" y posteriormente fue reelaborado por Meadows en su informe al Club de Roma.

Las aplicaciones urbana y mundial de la dinámica industrial hicieron comprender que la primera denominación era insatisfactoria, y que la metodología era lo suficientemente potente como para abordar una amplia clase de sistemas sociales. Por ello, se cambió la denominación de dinámica industrial por la de dinámica de sistemas, que es la que se utiliza hasta ahora.

La dinámica de sistemas ha tenido amplia difusión, y en la actualidad se investiga con y sobre ella en múltiples instituciones distribuidas por todo el mundo. Se publica desde 1962 un boletín, el "Systems Dynamics Newsletter", en el que se reúnen noticias sobre los distintos grupos que en el mundo, emplean la dinámica de sistemas.

La dinámica de sistemas está íntimamente ligada al área de conocimiento a la que pertenecen la teoría general de sistemas, la teoría de la automática y la cibernética. Está basada en métodos para el estudio de los sistemas complejos que pueden considerarse un puente entre los métodos empleados por los ingenieros y los métodos específicos de estudio de los sistemas sociales. Constituye el estudio de cómo la estructura de realimentación de un sistema produce su comportamiento dinámico. En términos generales, la dinámica de sistemas, trata de describir de una forma peculiar, las fuerzas que surgen en el interior del sistema para producir sus cambios a través del tiempo, y como se interrelacionan estas fuerzas entre sí en un modelo unitario.

Un estudio como los que realiza la dinámica de sistemas se desarrolla en distintos pasos. En primer lugar se observan los modos de comportamiento del sistema real para tratar de identificar los elementos fundamentales del mismo; en segundo lugar se buscan las estructuras de realimentación que puedan producir el comportamiento observado. En tercer lugar, a partir de la estructura identificada, se construye el modelo matemático de comportamiento del sistema en forma idónea para ser tratado sobre una computadora. En cuarto lugar, el modelo se emplea para simular como en un laboratorio, el comportamiento dinámico implícito en la estructura identificada. En quinto lugar, la estructura se modifica hasta que sus componentes y el comportamiento resultante coincidan con el comportamiento observado en el sistema real. Por último, se modifican las decisiones que pueden ser introducidas en el modelo de simulación hasta encontrar decisiones aceptables y utilizables que den lugar a un comportamiento real mejorado.

2.2 FUNDAMENTOS DE LA DINAMICA DE SISTEMAS.

La dinámica de sistemas, como se mencionó anteriormente, surge en un contexto histórico definido en el que se desarrollan movimientos intelectuales, de tipo científico y técnico, que determinan sus características esenciales. En este sentido cabe decir que en la dinámica de sistemas se combinan tres líneas de desarrollo científico-técnico: 1) las técnicas tradicionales de gestión de sistemas, 2) la teoría de sistemas realimentados y 3) la simulación por computadora.

La gestión implica una serie de toma de decisiones que se pretende sean óptimamente racionales y consistentes.

Los métodos tradicionales de gestión están basados en la experiencia acumulada por el que toma la decisión. Tal experiencia, en último extremo, se reduce a una información, recogida más o menos directamente sobre situaciones previas. De la siguiente cantidad de información que constituye la experiencia personal se extraen aquellas pautas repetitivas a partir de las cuales es posible hacer predicciones.

Para la construcción de modelos matemáticos de los sistemas con comportamiento dinámico, la dinámica de sistemas se ha basado en los estudios que desde finales de la Segunda Guerra Mundial se vienen realizando en torno a los sistemas realimentados no lineales en el campo de la cibernética y de la automática. Estos estudios, desarrollados inicialmente para sistemas realimentados particularmente simples, han alcanzado un alto grado de extensión y desarrollo. En este contexto cabe resaltar la aparición formal del concepto de sistema dinámico como una suma abstracta de los datos de observación de un sistema real. La teoría de sistemas realimentados nos da estructuras básicas que permiten generar una amplia variedad de comportamientos dinámicos y que pueden emplearse para describir las formas de comportamiento dinámico encontradas en la realidad. Al mismo tiempo se dispone de técnicas específicas que permiten realizar la integración de la información obtenida de la realidad en los modelos.

Por último, y gracias al desarrollo de las computadoras, se pueden conseguir a un bajo costo y en tiempos muy cortos, los cálculos implícitos en un modelo, pudiéndose realizar diferentes corridas del modelo, correspondientes a las distintas condiciones que se requieren analizar.

2.3 ESTRUCTURA DE UN SISTEMA DINAMICO

"Se puede decir que un sistema dinámico, en cuanto modelo de una cierta parte de la realidad, constituye un resumen abstracto de los datos observados en la misma."[4]

El caracter dinámico del sistema se refiere a que es primordial la consideración de su evolución en el tiempo. En esta evolución las variaciones que se producen en él son consecuencia, fundamentalmente, de las propias interacciones. Estas interacciones constituyen la estructura del sistema. De ahí que se dice que bajo el punto de vista de la dinámica de sistemas, el comportamiento dinámico de un sistema está determinado por su estructura.

Dentro de los componentes de la estructura básica de un sistema dinámico, se mencionarán a continuación aquellos componentes que se han considerado como vitales para el desarrollo de un modelo:

2.3.1. Límites del sistema.

Al considerar un sistema dinámico como una unidad, se asume que existen unos límites que separan esta unidad del medio en el que está inserta. En el interior de estos límites, se genera un comportamiento que en un principio, puede no estar determinado únicamente por acciones aplicadas al sistema desde el medio. Un sistema dinámico puede estudiarse como una entidad aislada del medio que genera su propio comportamiento dinámico. En la teoría de los sistemas dinámicos se dice, en ese caso, que se considera el comportamiento autónomo del mismo.

Los límites del sistema deben escogerse de manera que se incluyan en su interior aquellos componentes necesarios para generar los modos de comportamiento que nos interesan. Si se trata de estudiar una cierta peculiaridad del sistema, los elementos descritos en el interior de los límites deben ser capaces de generar este problema. El concepto de límite pretende explicar que el comportamiento de interés del sistema se genera en el interior de los límites, y no viene

[4] Javier Aracil
"Introducción a la Dinámica de Sistemas"
pág. 40

determinado desde el exterior. Lo cual no quiere decir que el comportamiento del sistema no vaya a estar afectado desde el exterior de los límites, sino que la acción del medio sobre el sistema puede ser considerada como una perturbación que afecta al comportamiento autónomo del sistema; pero ella misma no suministra al sistema sus características particulares.

Al construir un modelo de simulación de un sistema, se debe estimar qué componentes interactúan para producir el comportamiento que se está investigando. La elección implica la selección de aquellos componentes situados en el interior de los límites del sistema que tengan interés para el estudio concreto que se está realizando, y excluye todos aquellos componentes potenciales que son irrelevantes al caso y que por consiguiente, se sitúan fuera de los límites considerados.

Los elementos que se encuentran fuera de los limites del sistema están relacionados con aquellos que se encuentran dentro, de manera muy diferente a cómo los elementos que se encuentran dentro están interrelacionados entre sí. Las relaciones de causa a efecto entre el medio y el sistema son unidireccionales, mientras que los elementos en el interior del sistema están estructurados por medio de bucles de realimentación que determinan una fuerte interacción entre ellos. Es decir, el medio está constituido por el conjunto de todos los objetos situados en el exterior de los límites del sistema y tales que un cambio en ciertos atributos afecta al sistema y otros atributos distintos de los anteriores son afectados por el comportamiento del sistema.

2.3.2. Elementos y relaciones en los modelos.

Un sistema está formado por un conjunto de elementos en interacción, lo cual se hace explícito en su modelo. De un mismo sistema real se pueden establecer distintos modelos según los aspectos que interese considerar de aquél. La elección de los elementos y de las relaciones de interés constituye una opción en la que se pone de manifiesto la capacidad del especialista que construye el modelo.

Los distintos elementos o variables, que intervienen en el modelo pueden clasificarse en exógenos y endógenos. Las variables exógenas sirven para describir aquellos efectos sobre el sistema que

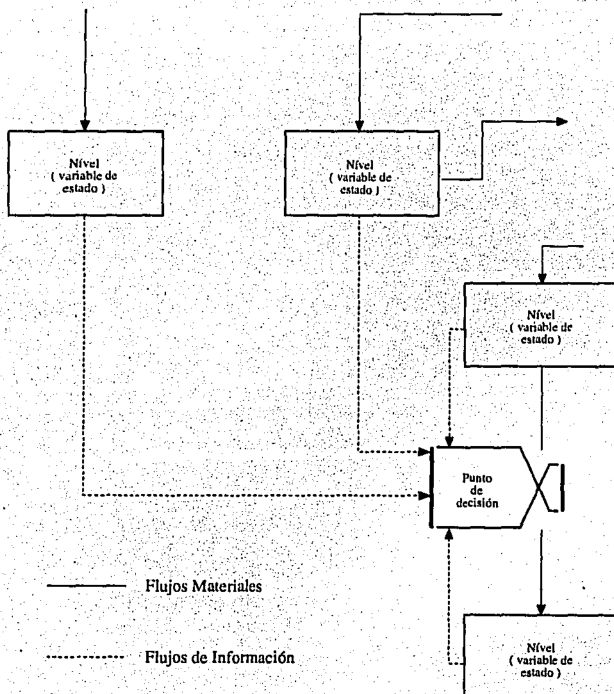


FIG. 2.1 CONEXION ENTRE LAS VARIABLES DE NIVEL (DE ESTADO) Y LOS PUNTOS DE DECISION (VARIABLE DE FLUJO)

En la figura 2.1 se presenta un diagrama llamado Diagrama de Forrester[5] que muestra cómo las variaciones de un nivel son el resultado de una decisión tomada a partir de información que proviene del resto de los niveles.

2.3.3. Variables de Niveles.

Las variables de nivel constituyen aquel conjunto de variables cuya evolución es significativa para el estudio del sistema. Los niveles representan magnitudes que acumulan los resultados de acciones tomadas en el pasado. Esta función de acumulación puede entenderse como la función del nivel alcanzado por un líquido en un depósito, de ahí proviene la denominación de nivel, siguiendo un modelo hidrodinámico.

Las variables de nivel, o simplemente niveles, equivalen a las variables de estado de la teoría de sistemas. Es decir, el estado de un sistema se representa por medio de las variables de nivel. Los niveles determinan la futura evolución del sistema, a partir de un instante determinado, en la medida en que determinan los valores tomados por los flujos, es decir, por las variaciones de los propios niveles.

En los diagramas de Forrester los niveles se representan por medio de rectángulos. La variación de un nivel tiene lugar por medio de variables de flujo.

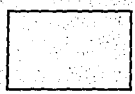
A cada nivel N se le puede asociar un flujo de entrada FE y un flujo de salida FS, de manera que la ecuación que representa la evolución del nivel es la siguiente,

$$N(t) = N(0) + \int_0^T (FE - FS)dt \quad ...(2.1)$$

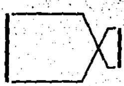
---

[5] Se emplea esta denominación de Diagrama de Forrester para referirse a lo que se conoce también como Diagrama Dynamo. Dynamo es un lenguaje dee computación especialmente para simular sistemas dinámicos. Es justificada la denominación adoptada ya que en estos diagramas se encuentra la aportación más peculiar de Forrester al modelado de sistemas.

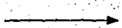
NUBE: Representa una fuente o un pozo; puede interpretarse como un nivel que no tiene interés y es prácticamente inagotable.



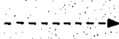
NIVEL: Representa un acumulación de un flujo: la variable de estado.



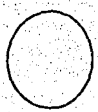
FLUJO: Variación de un nivel: representa un cambio en el estado del sistema.



CANAL DE MATERIAL: Canal de transmisión de una magnitud física que se conserva.



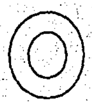
CANAL DE INFORMACION: Canal de transmisión de una cierta información, que no es necesario que se conserve.



VARIABLE AUXILIAR: Una cantidad con un cierto significado físico en el mundo real y con un tiempo de respuesta instantáneo.

CONSTANTE: Un elemento del modelo que no cambia de valor.

RETARDO: Un elemento que simula retrasos de transmisión de información o de material.



VARIABLE EXOGENA: Variable cuya evolución es independiente de las del resto del sistema. representa una acción del medio sobre el sistema.

FIG. 2.2 SIMBOLOS QUE SE UTILIZAN EN LOS DIAGRAMAS DE FORRESTER

o lo que es lo mismo,

$$dN/dt = FE - FS \text{ ...... } (2.2)$$

Esta ecuación se puede escribir de forma aproximada, empleando el método de Euler de integración numérica

$$N(t + dt) = N(t) + dt[FE(t) - FS(t)] \text{ . .... } (2.3)$$

Esta última forma de escribir la ecuación de un nivel es la que se emplea comúnmente en dinámica de sistemas.

2.3.4. Variables de flujo.

Las variables de flujo determinan las variaciones en los niveles del sistema. Las variables de flujo caracterizan las acciones que se toman en el sistema, las cuales quedan acumuladas en los correspondientes niveles. Las variables de flujo determinan cómo se convierte la información disponible en una acción o actuación.

Debido a su naturaleza se trata de variables que no son medibles en sí, sino por los efectos que producen en los niveles con los que están relacionadas. Se representan por símbolos especiales mostrados en la figura 2.2, que están inspirados en un modelo hidrodinámico, según el cual las variables de flujo se pueden asociar a válvulas que regulan los caudales que alimentan determinados depósitos cuyos niveles materializan el estado del sistema.

A las variables de flujo se asocian ecuaciones que definen el comportamiento del sistema. El bloque representativo de un flujo admite como señal de entrada, la información proveniente de los niveles o de variables auxiliares del sistema y da como salida el flujo que alimenta a un nivel. Las ecuaciones asociadas a una variable de flujo reciben el nombre de ecuaciones de flujo o funciones de decisión.

La ecuación de flujo representa la función desarrollada por el observador del modelo. A todo nivel se asocia al menos una variable de flujo.

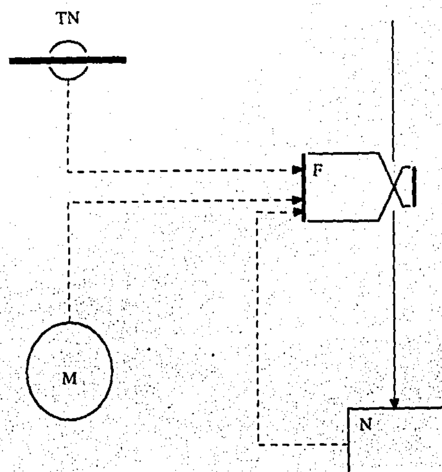


FIG. 2.3 REPRESENTACION EN EL DIAGRAMA DE FORRESTER DE UN FLUJO F CUYO VALOR ESTA DADO POR UNA TASA NORMAL TN AFECTADA POR UN NULTIPLICADOR M.

Una forma que toma muy frecuentemente la ecuación de un flujo es la que se representa en la figura 2.3. La ecuación de flujo correspondiente es la siguiente

$$F(t)=TN * M(t) * N(t)....(2.4)$$

en donde TN es el flujo normal y M es lo que se denomina un multiplicador de flujo normal. Si $M(t)=1$ se tiene una situación neutral en la que $F(t)=TN*N(t)$, es decir, el flujo es una fracción constante y normal del nivel.

El multiplicador $M(t)$ refleja el efecto de otros factores sobre la variable de nivel en cuestión. El multiplicador tiene la forma

$$M(t)=M1[V1(t)]*M2[V2(t)]...Mk[Vk(t)]....(2.5)$$

en donde cada factor $Mi[Vi(t)]$ es una función no lineal de una variable Vi, la cual puede ser un nivel o una variable auxiliar. Los multiplicadores Mi son tales que para un valor considerado normal de la variable Vi toman el valor 1.

Las decisiones que aparecen en una ecuación de flujo pueden ser abiertas, si implican la intervención de un agente externo al sistema, o implícitas, si están completamente determinadas por las variables internas al sistema, es decir, por los niveles.

Las unidades en que se mide una variable de flujo deben ser consistentes con las de las variables que relaciona. En particular, una variable de flujo siempre vendrá medida por la unidad del nivel al que alimenta, dividida por el tiempo.

Las variables de flujo tienen como entradas exclusivamente a niveles y a variables auxiliares. Es decir, dos variables de flujo no pueden conectarse entre sí.

La evolución del sistema en el tiempo comprende variaciones en los distintos niveles. Estas variaciones se deben no sólo a la acción de factores externos, sino, y sobretodo, a decisiones en un sentido amplio, tomadas en el interior del sistema, que se interpretan con ayuda de las funciones de decisión asociadas a las variables de flujo. En este sentido es como debe entenderse el que el sistema genere su propio comportamiento y la existencia de unos límites para el mismo.

2.3.5. Variables auxiliares.

Las variables auxiliares representan pasos o etapas en que se descompone el cálculo de una variable de flujo a partir de los valores tomados por los niveles. Se representan por medio de círculos como los que se muestran en la figura 2.2.

Las variables auxiliares unen los canales de información entre variables de nivel y de flujo; en realidad son parte del flujo. Sin embargo, se distinguen de ellas en la medida en que tengan un significado real por sí mismas, o sencillamente, porque hacen más fácil la comprensión de las ecuaciones de flujo.

Las variables auxiliares se pueden emplear para representar las no linealidades que aparecen en el sistema.

2.4 Estructuras Elementales de Realimentación.

Debido a que un modelo del comportamiento dinámico de diferentes sistemas puede contener aspectos que caractericen estructuralmente a dichos sistemas, es importante mencionar que los modelos dinámicos serán diferenciados unos de otros, a partir de las estructuras de realimentación así como los modos de comportamiento asociados a las mismas que sean utilizadas en el modelado. El conocimiento de las estructuras elementales de realimentación que pueden producir un comportamiento determinado puede ayudar a buscar la clase de relaciones estructurales que pueden producir este comportamiento.

Los tipos de estructuras simples más interesantes que se encuentran en la práctica son:

- bucles de primer orden de realimentación negativa, asociados a procesos de autorregulación u homeostá ticos, tambié,n llamados "fenómenos de decaimiento"[6].

---

[6] Gordon Geoffrey

- bucles de primer orden con realimentación positiva, asociados a fenómenos de crecimiento.

- curvas de crecimiento en S, que modelan procesos de crecimiento muy frecuentes en la práctica.

- fenómenos de acoplamiento entre dos bucles, uno de realimentación positiva y otro de realimentación negativa.

Debe considerarse que el objeto de la dinámica de sistemas es construir modelos de sistemas en los que se reproduzcan los modos de comportamiento observados en la realidad. Estos modos de comportamiento comprenden características de tipo crecimiento, oscilación, estancamiento, etc. y es este tipo de características el que se pretende que se reproduzcan en los modelos mencionados anteriormente.

2.4.1 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN.

Los sistemas de primer orden son aquellos que poseen un sólo nivel en su estructura. Los sistemas de primer orden pueden estar formados por bucles de realimentación positiva o por bucles de realimentación negativa. Esta distinción tiene gran importancia en orden al comportamiento dinámico del sistema, dando lugar, a estructuras de crecimiento o de autorregulación respectivamente. Estos dos tipos de comportamiento se encuentran frecuentemente en la realidad.

2.4.2. SISTEMAS DE PRIMER ORDEN LINEALES

El modelar sistemas lineales es importante por cuatro razones:

1. Los sistemas de ingeniería y sus simulaciones son lineales, al menos dentro de ciertos límites.

2. Pueden encontrarse fácilmente soluciones exactas de sistemas lineales de ecuaciones.

System Simulation,
Prentice Hall
pág. 87.

3. Existen métodos especiales para simular sistemas lineales.

4. Los sistemas lineales pueden dar un bosquejo de los problemas en los sistemas no-lineales.

Para los sistemas lineales, las ecuaciones que constituyen el modelo son lineales

La propiedad más importante de los sistemas lineales es que el Principio de Superposición sea aplicable. Este principio establece que "la respuesta producida por aplicaciones simultáneas de dos funciones o entradas es la suma de dos respuestas individuales"[7] Consecuentemente, para los sistemas lineales, la respuesta a varias entradas pueden ser calculadas tratando con una entrada a la vez y sumando los resultados.

Supóngase que una función $f_1(t)$, la cuál varía con el tiempo, produce una respuesta $r_1(t)$ y que la segunda función $f_2(t)$ produce una segunda respuesta $r_2(t)$. Entonces:

$$f_1(t) \rightarrow r_1(t)$$
$$f_2(t) \rightarrow r_2(t)$$

Para un sistema lineal

$$f_1(t) + f_2(t) \rightarrow r_1(t) + r_2(t) \ldots (1.2)$$

ésta ecuación describe el Principio de Superposición.

Uno de los Corolarios de este principio dice que "si n funciones idénticas controlan un sistema lineal en el mismo lugar, entonces

$$nf(t) \rightarrow nr(t)"$$

De ahí que los sistemas lineales conservan el factor de escala (n) de la función en la transición de la entrada a la salida. Esta

---

[7] Smith John M.
"Mathematical Modeling and Digital Simulation"
pág. 156

propiedad de los sistemas lineales es llamada Principio de Homogeneidad.

Considérese la ecuación diferencial

$$a_2 \frac{d^2 r}{dt^2} + a_1 \frac{dr}{dt} + a_0 r = f(t) \quad ...(1.3)$$

donde t es la variable independiente, f es una función y r es la función de respuesta. Los coeficientes a_0, a_1 y a_2 son parámetros del sistema. Los coeficientes pueden estar o no variando en el tiempo; éstos son determinados por el número y tipo de elementos en el sistema. La ecuación es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Si aplicamos el Principio de Superposición:

$$\begin{aligned} a_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} + a_1 \frac{dr_1}{dt} + a_0 r_1 &= f_1 \\ a_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} + a_1 \frac{dr_2}{dt} + a_0 r_2 &= f_2 \end{aligned} \quad ...(1.4)$$

Sumando obtenemos

$$a_2 \frac{d^2 r_1}{dt^2}(r_1 + r_2) + a_1 \frac{dr}{dt}(r_1 + r_2) + a_0 (r_1 + r_2) = (f_1 + f_2) ...(1.5)$$

De aquí que una ecuación diferencial lineal ordinaria de orden n puede escribirse como:

$$a_n(t) \frac{d^n}{dt^n}(r) + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(r) + ... + a_0(t) r(t) = f(t) ...(1.6)$$

donde los coeficientes y las funciones son funciones dependientes de t.

2.4.1.1 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN CON REALIMENTACIÓN NEGATIVA

Los sistemas con realimentación negativa se caracterizan por estar determinado su comportamiento por un cierto objetivo. Los sistemas de realimentación negativa reciben también el nombre de sistemas autorreguladores, homeostáticos o de decaimiento, y en su comportamiento está implícito la definición de un objetivo.

El estudio de los sistemas de control proporciona una gran cantidad de ejemplos de sistemas con realimentación negativa.

La estructura más simple que se puede concebir para un sistema de primer orden con realimentación negativa es la que se muestra en la figura 2.4 Observando esta figura se dice que los cuatro elementos que forman esta estructura son:

- el valor del nivel (estado) deseado u objetivo

- el error o discrepancia

- la acción correctora (flujo)

- el nivel o estado del sistema

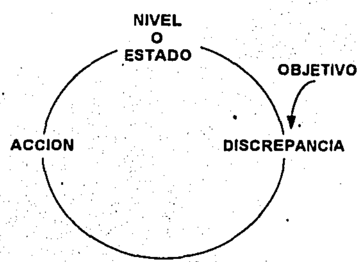


FIGURA 2.4 Diagrama causal de la regulación de una variable con relación a un objetivo

El objetivo se determina externamente; es por lo tanto, una variable exógena. El nivel o estado del sistema, es el objeto de control y constituye la acumulación de todas las acciones pasadas. El nivel del sistema sólo puede ser variado por medio del elemento de acción (flujo).

Se tiene que las ecuaciones que rigen el comportamiento de este sistema son las siguientes:

$$N(t+dt)=N(t)+dt*F(t) \quad ....(2.5)$$

$$F(t)=FT*D(t) \quad ....(2.6)$$

$$D(t)=OB-N(t) \quad ....(2.7)$$

La ecuación de flujo puede escribirse también así:

$$F(t)=FT*[OB-N(t)] \quad ....(2.8)$$

En la figura 2.5 se tiene una gráfica en la que se han representado, en el eje de las abscisas, el nivel N, y en el eje de las ordenadas el flujo F. El plano así obtenido se denomina Plano Fase y el trazado de la expresión (2.8) en dicho plano se denomina Trayectoria en el Plano Fase.

Se observa sobre la figura 2.5, que la pendiente de la recta viene dada por la fracción por unidad de tiempo (FT) y que el punto de corte con el eje de las abscisas viene dado por el objetivo OB.

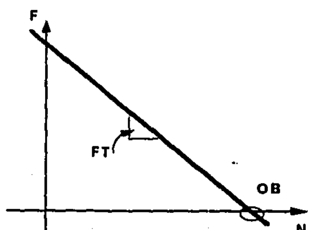


FIGURA 2.5. Trayectoria en el plano fase de la evolución de un sistema con realimentación negativa.

Para dar una solución de forma analítica, las ecuaciones anteriores pueden escribirse como sigue:

$$dN/dt=F(t)=$$

$$=FT*(OB-N)\ldots.(2.9)$$

es decir, el nivel N está regido por una ecuación diferencial de Primer Orden siendo FT una constante k y (OB-N) una variable y. De ahí la denominación de Sistemas de Primer Orden.

La solución de esta ecuación diferencial es desarrollada en el apéndice A, de acuerdo a lo mencionado en el capítulo I apartado 1.2.1, la cuál conduce a:

$$N(t)=OB+[N(0)-OB]*\exp(-FT*t)\ldots.(2.10)$$

La evolución del nivel N en el tiempo se tiene representada en la figura 2.6. En esta figura se pueden distinguir dos zonas, que constituyen las llamadas Zona de Régimen Transitorio y Zona de Régimen Permanente.

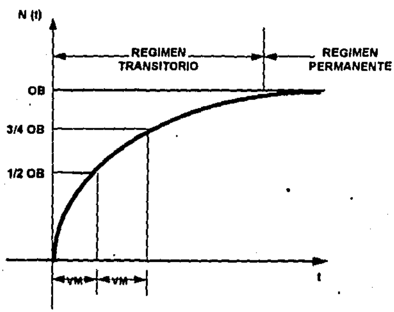


FIGURA 2.6. Evolución en el tiempo de la variable de nivel N en un sistema lineal de primer orden con realimentación negativa.

La constante FT tiene las siguientes propiedades. Para $t=1/FT$ se tiene que:

$$N(t=1/FT)=OB+[N(0)-OB]*\exp(-1)$$

$$=OB+0.368*[N(0)-OB]$$

$$=N(0)+0.632*[OB-N(0)] \quad ....(2.11)$$

es decir, que cuando ha transcurrido un período de tiempo igual al inverso de FT, el nivel N ha alcanzado el 63% de la discrepancia entre OB y N(0). El inverso de FT recibe la denominación de Constante de Tiempo t del sistema.

El valor de FT no altera el comportamiento general del sistema, que siempre tendrá la forma de la figura 2.7. Sin embargo un cambio de signo en FT sí lo hace.

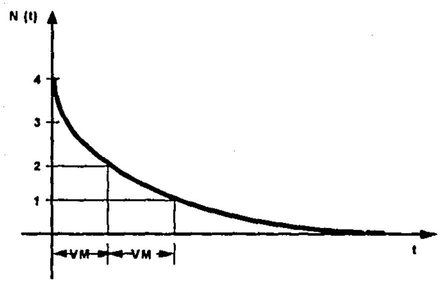


FIGURA 2.7. Evolución en el tiempo de la variable de nivel N de un sistema con realimentación negativa y objetivo OB = 0.

Un caso especial del sistema de primer orden que se ha considerado es aquel en el cuál el objetivo se hace cero. Es evidente que cuando las condiciones iniciales para el nivel N sean N(0)=0 el comportamiento será el de estabilidad en el reposo. Para el caso en el que el nivel no sea inicialmente nulo, la evolución del mismo vendrá dada por:

$$N(t)=N(0)*\exp(-t/t) \qquad ....(2.12)$$

En un sistema de primer orden, cuya evolución es tal que el nivel tienda asintóticamente a cero, se define la vida media como el tiempo necesario para que el nivel se reduzca a la mitad. De acuerdo con esta función y llamando VM a la vida media, se tiene:

$$N(VM)/N(0)=\exp(-VM/t)=1/2$$

$$-VM/t=\ln(1/2)$$

$$VM=0.7t \qquad ....(2.13)$$

Estas relaciones se ejemplifican en las figuras 2.5 y 2.8.

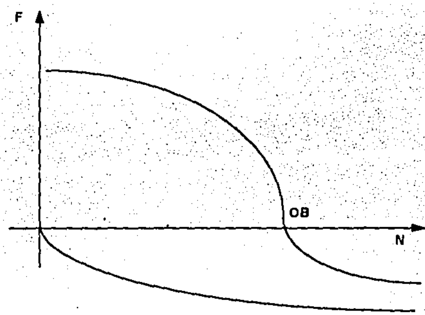


FIGURA 2.8. Trayectorias en el plano fase de sistemas no lineales de primer orden con realimentación negativa.

Hasta aquí el sistema que se ha considerado presenta un comportamiento lineal. Es decir, que la ecuación diferencial que gobierna al mismo es lineal. En general esto no ser así y la acción F puede que sea una función no lineal de la discrepancia. En tal caso, la trayectoria en el plano fase ya no será una recta, sino que tendrá una forma arbitraria tal como las que se representan en la figura 2.9.

3.4.1.2 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN CON REALIMENTACIÓN POSITIVA

La realimentación positiva da lugar a un proceso de crecimiento. En la figura 2.10 se muestra el diagrama de Forrester de un sistema de primer orden con realimentación positiva. El flujo que alimenta al nivel es una fracción positiva y constante del mismo nivel. En consecuencia se produce un proceso de crecimiento de tipo exponencial, ya que al aumentar el nivel se aumenta el flujo con que se alimenta el mismo, lo que determina a su vez un aumento creciente de nivel.

El estudio de los sistemas de primer orden con realimentación positiva es análogo al de los sistemas con realimentación negativa, la única diferencia que existe entre ambos, desde un punto de vista formal, es el signo de la constante de tiempo, o la pendiente de la trayectoria de la evolución del sistema en el plano fase.

Con los sistemas de primer orden con realimentación positiva se modelan procesos de crecimiento. En ellos, por lo tanto, no existe un objetivo que sea necesario mantener.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de un sistema de primer orden con realimentación positiva son las siguientes:

$$N(t+dt)=N(t)+dt*F(t)$$

$$F(t)=(1/t)*N(t) \quad ...(2.14)$$

La segunda de las ecuaciones establece la trayectoria en el plano fase. La forma de esta trayectoria es mostrada en la figura 2.10. Se observa que al carecer de un objetivo, en los sistemas de realimentación positiva, normalmente la trayectoria en el plano fase pasa por el origen.

Empleando ecuaciones diferenciales, el comportamiento de un sistema de primer orden con realimentación positiva, está dado por

$$dN/dt=F=N/t \quad ....(2.15)$$

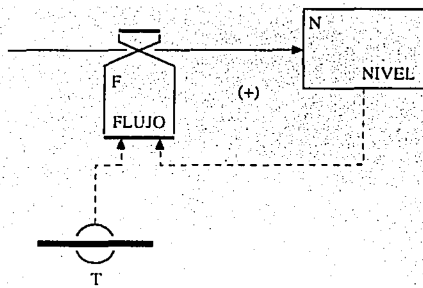


FIG. 2.9 DIAGRAMA DE FORRESTER DE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN CON REALIMENTACION POSITIVA

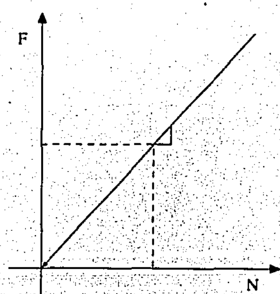


FIG. 2.10 TRAYECTORIA EN EL PLANO FASE DE UN SISTEMA LINEAL DE PRIMER ORDEN CON REALIMENTACION POSITIVA

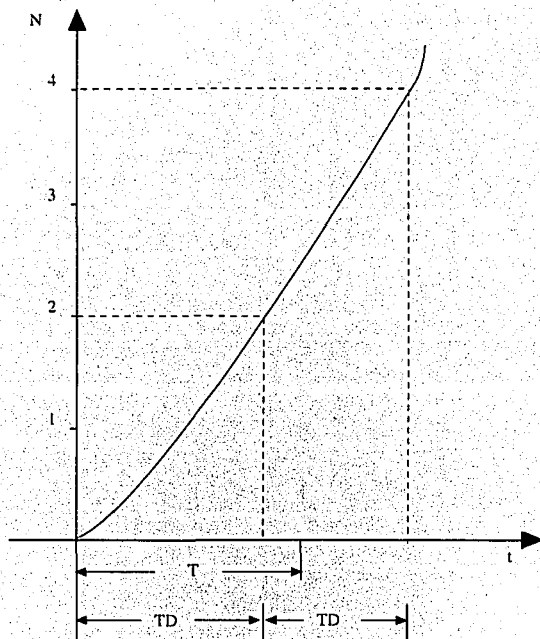


FIG. 2.11 EVOLUCION DE LA VARIABLE DE NIVEL N EN UN SISTEMA LINEAL DE PRIMER ORDEN CON REALIMENTACION POSITIVA. SE PRESENTA LA CONSTANTE DE TIEMPO T Y EL TIEMPO DE DUPLICAMIENTO TD

cuya solución nos lleva a

$$N(t)=N(0)*\exp(t/t)....(2.16)$$

En la figura 2.11 se tiene una representación gráfica de la evolución en el tiempo del nivel de un sistema de primer orden con realimentación positiva. Se trata de un proceso de crecimiento exponencial.

Una característica interesante de un proceso de crecimiento exponencial es el tiempo en que el nivel se duplica, llamado tiempo de duplicamiento. Llamando TD al tiempo de duplicamiento se tendrá , de acuerdo a la expresión (2.16)

$$N(TD)=2*N(0)$$

$$=N(0)*\exp(TD/t)....(2.17)$$

luego

$$\exp(TD/t)=2$$

Por lo tanto de tendrá que el tiempo de duplicamiento vendrá dado por

$$TD=0.7t...(2.18)$$

La inversa de la constante de tiempo recibe el nombre de tasa de crecimiento, y está dada por

$$\text{tasa de crecimiento}=1/t=0.7/TD...(2.19)$$

2.4.2 CRECIMIENTO EN S

El crecimiento en S está caracterizado por la existencia en su régimen transitorio de dos fases perfectamente diferenciadas: un crecimiento exponencial y un decrecimiento asintótico. En la figura 2.12 se muestra la forma general de un crecimiento en S. El crecimiento en S recibe también los nombres de "crecimiento sigmoidal" y de "crecimiento logístico".[8]

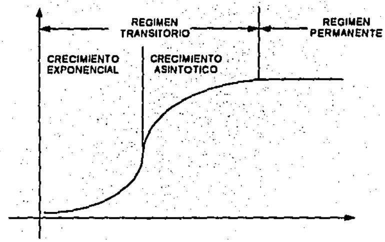


FIGURA 2.12.- Crecimiento en S de una variable

La primera de las fases del régimen transitorio corresponde a un comportamiento de crecimiento exponencial, del mismo tipo que el que se encuentra en los sistemas con realimentación positiva. Por otra parte, el decrecimiento asintótico encontrado en la segunda fase es análogo al que presentan los sistemas con realimentación negativa.

Esta forma de crecimiento en S se encuentra muchas veces en la realidad.

Para estudiar la estructura que da lugar a un crecimiento en S debe partirse de la consideración de que durante un tiempo el comportamiento es parecido al de un sistema con realimentación positiva, mientras que en el período siguiente el comportamiento es parecido al de un sistema con realimentación negativa.

En la figura 2.13 se tiene una estructura formada por dos bucles, uno positivo y otro negativo, que alimentan al mismo nivel N. El comportamiento de este sistema dependerá de cuál de las dos constantes de tiempo sea la dominante.

[8] Gordon Geoffrey
System Simulation,
Prentice Hall
pág. 97.

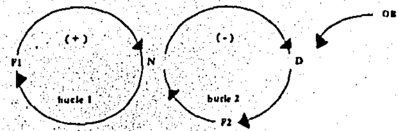


FIGURA 2.13.- Diagrama formado por 2 bucles : uno de realimentación positiva y otro de realimentación negativa

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema son

$$N(t+dt)=N(t)+dt^*[F1(t)+F2(t)]$$

$$F1(t)=K1^*N(t)$$

$$F2(t)=K2^*D(t)$$

$$D(t)=OB-N(t)\ldots(2.20)$$

de las que se obtiene

$$N(t+dt)=N(t)+dt^*[K1^*N(t)-K2^*N(t)+OB^*K2]\ldots(2.21)$$

Observando esta ecuación se concluye que, en el caso en que OB sea nulo, se tendrán respuestas que se muestran en la figura 2.14 según los valores relativos de las constantes K1 y K2 que allí se indican.

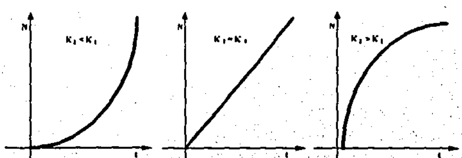


FIGURA 2.14.- Evolución de la variable de nivel N según los valores relativos de las constantes K1 y K2

Suponiendo que los dos bucles 1 y 2 presentan un comportamiento no lineal de manera que K1>K2 para 0<N<Ni y k2>k1 para NI<N<OB. Es decir, de manera que hasta que el nivel N alcance el valor de NI el bucle 1 sea el dominante, mientras que

cuando el nivel N sobrepasa el valor NI el bucle 2 es el dominante; por lo tanto hasta alcanzar el valor NI se tendrá un proceso de crecimiento, pero a partir de este valor se tendrá un proceso de crecimiento asintótico. En la figura 2.15 se muestra la evolución en el plano fase de un sistema con estas características, tal que durante el crecimiento y el decrecimiento el comportamiento es lineal.

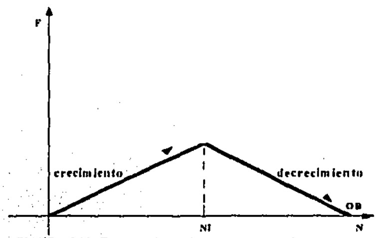


FIGURA 2.15.- Trayectoria en el plano fase de un sistema que representa un crecimiento hasta que la variable de nivel N alcanza el valor NI, y un decrecimiento desde este valor hasta que se hace N=OB.

Observando esta figura se entiende que el sistema, para valores bajos de N, por ejemplo N=0, presentará un crecimiento exponencial hasta que se alcance el nivel de inflexión NI y el flujo máximo FN. A partir de este momento, el sistema evoluciona tendiendo al objetivo OB de forma asintótica, con un comportamiento propio de un sistema con realimentación negativa. En el punto de inflexión NI se produce una transición de un comportamiento con realimentación positiva a un comportamiento con realimentación negativa.

Un crecimiento en S se puede obtener con otras formas de comportamiento no-lineal. En la figura 2.16 se tienen distintas trayectorias en el plano fase que dan lugar, de igual forma, a crecimiento en S.

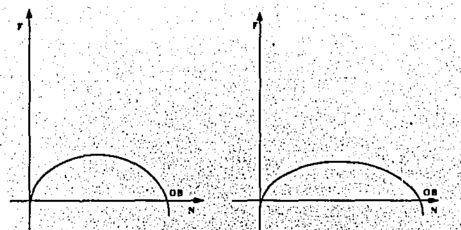


FIGURA 2.16.- Formas de la trayectoria en el Plano Fase de sistemas con crecimiento en S.

2.4.3. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Un sistema de segundo orden tiene como características importantes dos niveles en su estructura. Estos dos niveles se encuentran contenidos en un número de hasta tres bucles realimentados, de los cuales uno es el principal y los otros dos son secundarios. El bucle principal conecta entre sí los dos niveles. Los bucles secundarios se conectan a un nivel consigo mismo, tal como sucedía en los sistemas de primer orden.

Los dos niveles que forman un sistema de segundo orden pueden estar unidos entre si por las transferencias materiales entre los mismos o por canales de información. En la figura 2.17 muestra los diagramas de Forrester correspondientes a estas dos formas.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de un sistema lineal de segundo orden son las siguientes:

$$N1(t+dt)=N1(t)+dt*[F11(t)+F12(t)]$$

$$N2(t+dt)=N2(t)+dt*[F21(t)+F22(t)]$$

$$F11(t)=A11*N1(t)$$

F12(t)=A12*N2(t)

F21(t)=A21*N1(t)

F22(t)=A22*N2(t) . . . . (2.22)

Escritas en forma de ecuaciones diferenciales toman la forma siguiente:

dN1/dt=A11*N1+A12*N2

dN2/dt=A21*N1+A22*N2 .. .(2.23)

cuya solución analítica se puede obtener aplicando las técnicas de resolución correspondiente.

Si los coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden de la expresión (2.23) son constantes, es decir, si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, la forma de la solución de dicho sistema de ecuaciones diferenciales depende de los eigenvalores de la matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Por ejemplo si los eigenvalores son complejos, entonces el comportamiento temporal del sistema presentará oscilaciones. Según si las partes reales son positivas o negativas, el comportamiento será de crecimiento asintótico.

Sin embargo, en las aplicaciones normales de la dinámica de sistemas, las anteriores consideraciones suelen tener interés limitado, porque normalmente no se buscan soluciones analíticas sino integraciones numéricas, por medio de la computadora.

La presencia de dos niveles en los sistemas de segundo orden permite este modo de comportamiento al producirse movimientos oscilatorios entre ambos. Estas oscilaciones pueden atenuarse o amplificarse con el transcurso del tiempo; el análisis de los

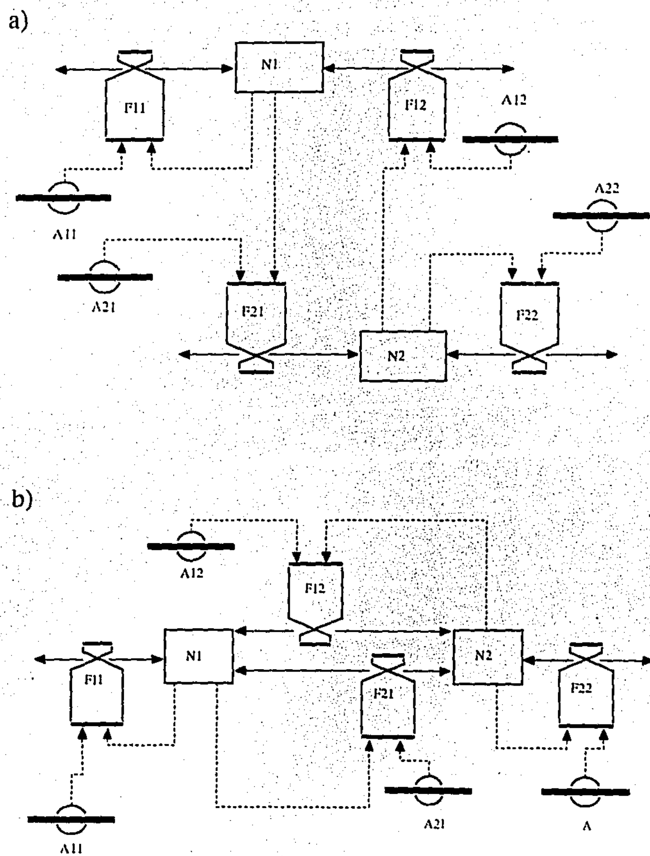


FIG. 2.17 DIAGRAMAS DE FORRESTER DE SISTEMAS DE SGUNDO ORDEN

comportamientos oscilatorios tiene gran importancia en el estudio de ciertos comportamientos dinámicos encontrados en la realidad.

2.4.4. RETRASOS.

En el estudio de los sistemas dinámicos la consideración del tiempo es esencial; la evolución de los sistemas dinámicos transcurre en el tiempo. Una caracteristica importante que debe tomarse en cuenta en el estudio de los sistemas dinámicos es el retraso que se produce en la transmisión de la información o de los bienes materiales, a lo largo de los mismos. Es decir, "al construir el diagrama de un sistema debe considerarse que la relación causal que liga a las dos variables puede implicar una transmisión para la que se requiera el transcurso de un cierto tiempo. Se tendrá entonces un retraso"[9].

Los retrasos se producen en cualquier caracterización del mundo real. Por ejemplo, la gente basa normalmente sus decisiones en la percepción que tiene del mundo, y no en el estado real del mismo. Se necesita un cierto tiempo para formarse una idea sobre la situación real de un determinado problema antes de tomar una decisión, debe transcurrir algún tiempo hasta que se observen los efectos de la misma.

Para los microprocesos los retrasos se convierten en pausas. Sin embargo, para las variables agregadas, los retrasos producen ajustes graduales entre las variables relacionadas.

Un retraso siempre implica la realización de una acumulación del material o de la información que se retrasa, por consiguiente, implican la aparición de niveles adicionales en la construcción del modelo.

2.4.4.1 RETRASOS EN LA TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN

Los retrasos en la transmisión de la información son el resultado de la necesidad de conservar y almacenar información del sistema

---

[9] Javier Aracil
"Introducción a la Dinámica de Sistemas"
pág. 121

antes de proceder a una toma de decisión. De hecho, los retrasos en la transmisión de información actúan como filtros alisadores (smoothing) que son capaces de alisar los picos que presenta la evolución de una variable tomando un valor promedio de la misma, tal como se presenta en la figura 2.18. En el proceso de promediar se ponderan los datos disponibles de manera que los más recientes influyan en el promedio de forma más significativa que los más antiguos.

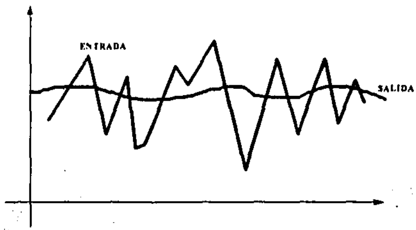


FIGURA 2.18.- Efecto de un filtro alisador sobre la evolución de una variable

La información normalmente empleada para tomar decisiones conlleva irregularidades debidas a errores, comportamientos individuales o en grupo, períodos no uniformes, intermitencias, etc. Estas irregularidades deben filtrarse para determinar las variaciones significativas subyacentes. El proceso se denomina proceso de promedio o alisado. "Un proceso de alisado elimina el ruido de alta frecuencia e introduce retrasos en la transmisión de información"[10]. En todo proceso de alisado debe establecerse un compromiso entre un alisado intenso para reducir el ruido no significativo, a costa de un retraso importante, o un alisado menor, con lo que se arrastra un cierto ruido, pero un tiempo de retraso menor.

Debe observarse, que el tiempo de ajuste de cada uno de los flujos es un tercio del tiempo de ajuste total de retraso.

[10] Javier Aracil
"Introducción a la Dinámica de Sistemas"
pág. 123

2.4.4.2. REGLAS PARA LA APLICACIÓN DE RETRASOS.

La introducción de retrasos en la dinámica de sistemas puede parecer artificiosa y no justificada más que por la bondad de los resultados finales que desde un punto de vista práctico se alcanza con ellos. Por eso, para una correcta utilización de los mismos se requiere un cierto número de reglas prácticas cuya justificación hay que buscarla en la experiencia, y con las cuales es fácil familiarizarse.

Respecto a cuándo se puede incluir un retraso, es importante decir que debe hacerse siempre que el tiempo de ajuste esté comprendido entre 1/20 y 10 veces el horizonte temporal del modelo.

En cuanto a la selección del orden del sistema, éste será de primer orden si el retraso responde inmediatamente a un cambio de flujo de entrada. Si se requiere de cierto tiempo para que la salida responda, se debe usar un retraso de tercer orden. Debe considerarse, que el orden de un retraso tiene normalmente poco efecto en el comportamiento del modelo. La variable más importante para caracterizar un retraso es el tiempo de ajuste.

El tiempo de ajuste corresponde al tiempo medio empleado en un retraso material. El ajuste a una perturbación se completa aproximadamente después de tres veces el tiempo de ajuste.

Los efectos de los retrasos sobre la estabilidad pueden ser muy variados. Si el retraso atenúa las acciones sobre el sistema de manera que el órgano de control pueda responder a los cambios con tiempo suficiente, el retraso estabiliza el sistema. Por otra parte, si el retraso incrementa el tiempo para la percepción de una variación, el órgano de control no será capaz de responder a los cambios con la suficiente rapidez y el retraso inestabilizará al sistema.

El funcionamiento del modelo de un retraso está afectado por los valores relativos del tiempo de ajuste TA, el orden del retraso n y DT. La razón de esto reside en que si DT es demasiado grande, los niveles internos del retraso acumulan una cantidad demasiado grande de aquello que se está retrasando y, posiblemente, el flujo de salida alcanzará valores demasiado grandes. Ello, a su vez, puede vaciar excesivamente los niveles internos de manera que un instante posterior los flujos de salida se hagan demasiado pequeños o incluso negativos.

CAPITULO III

CAPITULO III.

EL MODELO GENERAL DE RICHARDSON.

INTRODUCCION

La teoría en la cuál se basa el Modelo de Richardson trata sobre las tendencias generales comunes a todas las naciones; sobre cómo se ofenden por el desafío, cómo ellas sospechan que la defensa tiene una agresión oculta, cómo responden a las importaciones enviando exportaciones; respecto a cómo está restringido el gasto de armamento por la dificultad para pagarlo y últimamente sobre las ofensas y sus formas irracionales, al grado que una disculpa puede ser recibida como un insulto.

Una regla del juego teórico es que una nación será representada por una sola variable: su actitud de amenaza o cooperación hacia el exterior. Así, el gran estadista quien colecta, enfatiza y dirige la voluntad nacional, no necesita ser mencionado por un nombre.

Por simplicidad, las naciones están consideradas en dos grupos. Existen algunos motivos tales como la venganza o el descontento con los resultados de los Tratados entre naciones; estos motivos son independientes de los armamentos existentes. Entonces existe el temor, el cual mueve a cada grupo a incrementar sus armamentos debido a la existencia de los del grupo opuesto. También existe la rivalidad, la cuál se refiere a la diferencia entre los armamentos de los dos grupos.

3.1 CARACTERISTICAS MATEMATICAS

Richardson estableció su modelo a partir de un discurso emitido por el Ministro de Defensa de Jedesland quien dijo:

"Las intenciones de nuestro país son enteramente pacíficas. Hemos dado amplia evidencia de esto por los Tratados que hemos concluído recientemente con nuestros vecinos. Todavía, cuando consideramos el estado de inquietud en el mundo, y las amenazas por las cuales estamos sitiados, debemos estar flaqueando en nuestra obligación como gobierno si no tomamos pasos adecuados para incrementar las defensas de nuestra tierra amada"[11].

Se tendrá ahora que traducir esto a matemáticas. A primera vista se observa que no existe manera de hacerlo, y en segundo tal vez hay muchas formas. El problema se puede librar tratando con el razonamiento de Ockham.[12] Este principio en su forma usual dice: " las entidades no tienen que ser multiplicadas sin necesidad". Los físicos matemáticos han progresado tratando primero la fórmula más simple que describe las amplias características de los primeros experimentos dejando las fórmulas complicadas para experimentos más precisos.

Por entidades debemos entender los términos y coeficientes en la fórmula y debemos entender la regla de Ockham como "probar primero la fórmula más fácil".

Para poder llevar a cabo su modelo, Richardson siguió la siguiente metodología[13].

Se construye un modelo matemático en cuatro etapas:

1. Se definen ciertas variables: son cantidades que en el transcurso del fenómeno examinado, pueden tomar valores diferentes. En este caso, las variables son los gastos de armamento de un país, sus tasas de evolución y el tiempo.

2. Se establece y se formula en ecuaciones, ciertas relaciones entre las variables. En este caso, la tasa de evolución de los gastos de

[11] Richardson Lewis F.
"Arms and Insecurity"
pág. 24
[12] Anatol Rapoport
"Jeux, Débats et Conflits
pág. 13
[13] Idem 12

armamento de un país depender de los gastos de armamento del país rival.

3. Se resuelven las ecuaciones. Aquí se deducen las nuevas relaciones de las variables, las cuales son las consecuencias de las relaciones que se han establecido.

4. Se interpretan los resultados.

El primer paso es dar nombres matemáticos a estas variables. Llámese x y y a los gastos de armamento de cada país expresados en la misma moneda y t el tiempo transcurrido expresado en años. Las tasas de evolución de x y y serán respectivamente llamadas dx/dt (producto de una pequeña variación de x sobre la variación t durante la que ella se produce) y dy/dt.

La primera etapa ha concluido: se han identificado las variables. Evidentemente, existen otras variables posibles, pero es necesario conservar un modelo lo más simple que sea posible.

La etapa siguiente consiste en establecer las ecuaciones. Ellas van a precisar lo que anteriormente se ha sugerido con palabras.

Ahora, la representación más simple de lo que generalizado el ministro de defensa dijo , es:

$$dx/dt = ay \quad ...(3.1)$$

donde t es el tiempo, x representa sus propias defensas, y representa las amenazas por las cuales el país está sitiado, y a es una constante positiva, la cual deberá llamarse "coeficiente de defensa".

Por simplicidad se debe asumir que lo que el Ministro llamó "sitiadores" es, de hecho, una sola nación, cuya ecuación es similar:

$$dy/dt = bx \quad ...(3.2)$$

La tasa de crecimiento de los gastos de armamento (a la izq.) es igual a los gastos del armamento del país rival (a la der.) multiplicados por una constante apropiada a o b, constantes de proporcionalidad.

Si x y y son siempre positivas, las cuáles, de acuerdo a las ecuaciones (3.1) y (3.2) están incrementándose, éstas llegarían a ser más positivas y se incrementarían cada vez más r pido sin un final en el proceso. El sistema descrito por las ecuaciones (3.1) y (3.2) es evidentemente INESTABLE. De hecho, se sabe que el proceso de incremento de defensa fue alterado por el estallamiento de guerra. Pero no se puede creer realmente que el sistema internacional es inevitablemente inestable, ya que generalmente el costo de armas ejerce una restricción. Los jefes de estado han expresado ésta opinión.

Debido a esto, las ecuaciones mejoradas serán:

$$dx/dt=ay - mx \quad .....(3.3)$$

$$dy/dt=bx - ny \quad .....(3.4)$$

donde m y n son constantes positivas representando el cansancio y los gastos de mantener al día las defensas, a y b son coeficientes de defensa positiva, los cuales ahora se consideran como posiblemente desiguales.

Insertando los términos adicionales, nombrando g y h para representar los resentimientos y ambiciones provisionalmente vistos como constantes, así las ecuaciones llegan a ser:

$$\frac{dx}{dt}=ay-mx+g \quad ... (3.5)$$

$$\frac{dy}{dt}=bx-ny+h \quad ... (3.6)$$

Estas ecuaciones fueron publicadas en 1935 como la forma definitiva del modelo matemático de una carrera armamentista teórica.

Estas ecuaciones dicen que la tasa de crecimiento de los gastos de armamento de un país dependerá positivamente del nivel de gastos del rival, negativamente de sus propios gastos y positivamente de quejas permanentes.

Las respectivas constantes de proporcionalidad nos dan el grado de dependencia interna; a y b el grado positivo de dependencia debido a la estimulación mutua; m y n el grado negativo de dependencia debido a los propios gastos de armamento.

Desde el punto de vista matemático, g y h representa algunos motivos que, mientras afectan a los preparativos belicosos, permanecen constantes independientemente de la cantidad de tales preparativos en casa o el extranjero .

Usualmente g y h son llamadas "los resentimientos" - un nombre el cual indica que g es un número positivo cuando su lado está insatisfecho y un número negativo cuando el modo que prevalece de ese lado está satisfecho.

Es importante notar que las variables x y y pueden ser contadas en hombre o dinero, y que x y y son en parte los efectos numéricos de esos imponderables.

Los preparativos para guerra de los dos grupos pueden ser vistos gráficamente como las coordenadas rectangulares de una partícula en un plano internacional, así que cada punto en este plano representa una situación internacional concebible instantánea. Las ecuaciones diferenciales son entonces las ecuaciones del movimiento de la partícula.

Las ecuaciones ahora pueden satisfacer una gran cantidad de condiciones.

Recordando que no se ha especificado la magnitud de los parámetros a, b , m, n, g y h, no se puede, sin traicionar las hipótesis de base del modelo, dar un valor negativo a los parámetros. Si se hace, el modelo se invierte, es decir, que las armas del rival provocarán un freno y las propias provocarán un estímulo. Los coeficientes x y y en la parte derecha de las ecuaciones (3.5) y (3.6) podrán tomar todo valor, excepto negativo. Los términos de queja, g y h, son libres de variar en el rango de las cifras reales, positivas y negativas. Si son positivas se puede interpretar como reservas de "buena voluntad" y no de quejas. Estos casos son muy importantes en las situaciones inestables.

Dar el valor de cero a una constante significa que se descuida el efecto que se le asocia. Por ejemplo, si m o n es igual a cero, es que no hay freno en la carrera armamentista; si g o h son nulos, es que no se toma en cuenta la queja correspondiente.

Si g, h, x y y llegan todas a cero simultáneamente, las ecuaciones muestran que x y y permanecen en cero. Esa condición ideal es la paz permanente por desarmamento y satisfacción.

Las ecuaciones además significan que el desarmamento mutuo sin satisfacción no es permanente, ya que si x y y desaparecen instantáneamente, entonces dx/dt = g y dy/dt = h.

El desarme unilateral corresponde a poner y = 0 en cierto instante.

Tenemos a ese tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = -mx + g \quad ...(3.7)$$

$$\frac{dy}{dt} = bx + h \quad ...(3.8)$$

La segunda de estas ecuaciones implica que y no permanecerá en cero sin resentimiento, h es positivo; más tarde cuando y ha crecido el término ay causará que x también crezca. Así de acuerdo a las ecuaciones , el desarmamento unilateral no es permanente.

Una competencia en armamentos ocurre cuando los términos de defensa predominan en los segundos miembros de la ecuación. Si aquellos fueron solamente los términos, deberíamos tener:

$$\frac{dx}{dt} = ay \quad ...(3.9)$$

$$\frac{dy}{dt} = bx \quad ...(3.10)$$

x y y podrían tender al mismo infinito, el cuál si es positivo, podemos interpretar como guerra. Pero por grandes x y y, linealmente pueden fallar.

Debido a que las ecuaciones fueron escritas durante la Primera Guerra Mundial, y dada la posición del autor, el pelear es visto como una actividad positiva y el hacer amigos como una actividad negativa. De hecho, en la mayoría de los trabajos descritos por otros autores, la conversión de los signos no se ha efectuado, por no alterar el sentido de las ecuaciones.

En la formulación general que se mencionó anteriormente, la magnitud relativa de las constantes expresa el peso asignado a los diferentes factores. De hecho, este modelo matemático es extremadamente limitado; no considera que otros factores puedan influenciar las tasas de desarrollo de armas, la mayoría de estas influencias son adicionales. Es necesario remarcar que aunque extremadamente limitada, esta teoría cubre muchos argumentos frecuentemente sostenidos: las armas se acumulan por temor mutuo; existen ciertos límites en la acumulación de armamentos; ciertos factores que no dependen de los niveles de armamento influencian la acumulación de armas.

De acuerdo con la bien conocida teoría de las dimensiones físicas es obvio que cualquiera que sean las dimensiones de x y y, las dimensiones de m y n son recíprocas de un tiempo. Los físicos podrían llamar a m^{-1} n^{-1} tiempos de relajación. Por lo que si y y g fueran permanentemente cero como debía ocurrir si b=0, h=0, entonces la ecuación (3.5) podría simplificarse a dx/dt=-mx, desde lo cual puede ser deducido que $\log_e x=-mt+\text{cte}$. Es decir, que x podría decrementar en razón de 2:718 cada vez que mt se incremente por unidad.

Ahora nos dirigiremos a los coeficientes de defensa a y b. Dado que x es medido en las mismas unidades que y, es obvio que a y b son cada uno el recíproco de un tiempo. Para estimar este tiempo, se tomará un caso hipotético en el cuál g=0 y $y=y_1$ una constante, así que:

$$\frac{dx}{dt}=ay_1-mx \quad ...(3.11)$$

en el instante que x=0,

$$\frac{1}{a}=\frac{y1}{dx/dt}\text{...(3.12)}$$

así que 1/a es la razón de la distancia y1, la cual x tiene que recorrer para ser igual a y, a la rapidez dx/dt. Por consiguiente, se puede llamar a 1/a tiempo aparente de alcance, en una competencia de armas desde cero con ninguna ofensa.

Suponiendo que la nación x fuera mucho más poblada y organizada industrialmente que la nación y, el tiempo aparente requerido para que la nación x se empareje con y podría ser mucho más corto que el tiempo aparente para que y alcance a x. Es decir, el coeficiente de defensa es proporcional al tamaño de la nación, el tamaño es medido no por el área territorial sino como alguna función de incremento de población e industria.

El coeficiente de defensa de la nación x es también, por x y y positivas, incrementada por algunas sospechas y decrementada por alguna neutralidad, confidencia o pacifismo que la nación x pueda tener.

3.2 IDEAS GENERALES ACERCA DEL EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD

En el habla popular y en los escritos políticos, la idea de estabilidad es rara vez distinguida claramente del balance.

Las definiciones siguientes evitan alguna mención de las oscilaciones, pero están de acuerdo con la mecánica elemental y son apropiadas para la discusión de las competencias de armas.

Para distinguir entre el equilibrio de diferentes tipos, se debe observar lo que el sistema hizo después de que fue ligeramente movido del equilibrio por alguna influencia temporal que viene desde fuera del sistema. El equilibrio será llamado estable, neutral o inestable de acuerdo a como el sistema comience, después de que la influencia temporal ha cesado, cada uno respectivamente regresa al equilibrio para estar en su nueva posición o desplazarse fuera del equilibrio.

La noción de una influencia temporal exterior es bastante clara cuando el sistema es una máquina, pero ocasionalmente puede no ser muy obvia cuando el sistema es un aspecto de la sociedad. Sin embargo, es permitido definir el sistema como se desee. Puede en ocasiones ser conveniente poner fuera del sistema tales eventos como sequías, inundaciones y buenas cosechas, posiblemente también nuevos inventos, el incremento y decremento de poblaciones y la maduración y muerte de individuos.

En una competencia de armas los lados opuestos tratan, con algunos sucesos, de mantener un balance de fuerzas. Es decir, la razón o diferencia entre sus armamentos se mantienen completamente estables cerca de una constante. Mientras tanto, el total de sus armas se incrementan rápidamente, mostrando inestabilidad.

Cuando la estabilidad o la inestabilidad existen al mismo tiempo, es usualmente la inestabilidad la cual produce los efectos más sorprendentes. Es sentido práctico llamar a un sistema inestable, si es inestable por algún tipo de desplazamiento; puede sin embargo, ser simultáneamente estable en otras formas. El balance estable de fuerza es de menos interés que el desplazamiento inestable hacia la guerra.

La estabilidad en el sentido que aquí empleo esta palabra, exige en definitivo, una constancia de los niveles de gastos de armamento. Matemáticamente significa que las tasas son dadas por las ecuaciones (3.5) y (3.6). Si las igualamos a cero, se tendrán las condiciones de equilibrio, es decir, estas deben ser reemplazadas si se quiere mantener el equilibrio. Para saber si esta condición es suficiente, es decir, si ella garantiza un equilibrio persistente, se procede al análisis que sigue. Estableciendo estas condiciones:

$$ay - mx + g = 0 \quad \ldots (3.13)$$

$$bx - ny + h = 0 \quad \ldots (3.14)$$

Si las constantes a, b, m, n, g y h fueran conocidas, se tendrían dos ecuaciones con dos incógnitas a resolver en x y y.

Pero las constantes no son mejor conocidas que las incógnitas, las variables x y y. No se pueden resolver numéricamente. Podrían resolverse por resultado a las constantes, pero esta solución explícita no interesa, ya que se desea saber en qué condiciones el equilibrio es estable, es decir, en qué momento el equilibrio persistirá después de que se obtenga.

Un método gráfico permite responder a esta pregunta:

Digamos que un par de ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas puede ser representado en un plano por dos líneas rectas, donde la intersección (si existe una) es la solución. Para dibujar las rectas reales en una gráfica se deben conocer las constantes. Lo que se sabe de las constantes a, b, m , n. es que ellas no son negativas. Además, x y y representan los gastos de armamento, darles valores negativos en un tiempo dado, no tendría significado; es suficiente por el momento tomar la porción de la gráfica que se encuentre en el primer cuadrante, allí en donde x y y son positivas.

Las dos rectas representadas por las ecuaciones (3.5) y (3.6) tendrán pendientes positivas, es decir, orientadas de suroeste al noroeste. Esta particularidad es debido al hecho de que a, b , m y n son positivas. Considerando solamente el caso donde las dos rectas se cortan en el primer cuadrante, "el equilibrio de las fuerzas" (la intersección) es expresada por los niveles correspondientes a los gastos de armamento.

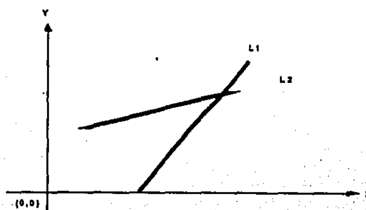


FIGURA 3.1. Representación gráfica de el equilibrio de fuerzas. El punto de intersección representa los niveles de gastos de armamento para los que la tasa de evolución de estos es nulo.

Examinando la situación representada por la figura 3.1 la recta L1 cuya ecuación es la (3.13) contiene todos los puntos (x,y) para los que dx/dt es nulo; es decir, cuando los gastos de armamento respectivos a x y y tienen valores tales que el punto (x,y) está situado sobre L1, los gastos de armamento del país 1 son estabilizados. De la misma forma si el punto (x,y) está situado sobre la recta L2, dy/dt es nulo y los gastos de armamento del país 2 están estabilizados. Llamando L1 y L2 a las rectas del país 1 y país 2 respectivamente, si un punto (x,y) está situado al mismo tiempo sobre las dos rectas, se obtendrá que los gastos de armamento de los dos países serán constantes, además de que sus tasas de evolución respectivas serán nulas. La intersección de L1 y L2 representa el PUNTO DE EQUILIBRIO de las fuerzas. Nótese que L1 corta al eje de las x para un valor positivo de x y L2 corta al eje de las y para un valor positivo de y. Esto significa que los términos de amenaza son positivos y que, si el desarmamento de los dos países interviniera de golpe (x y y estarían situados en el origen de las coordenadas), ellos se armarían de nuevo, empujados por sus amenazas.

Analizando si el sistema es estable, supóngase que el nivel de gastos de armamento no está en su punto de equilibrio, pero está en algún otro punto, por ejemplo (x0,y0) como en la fig.3.2.

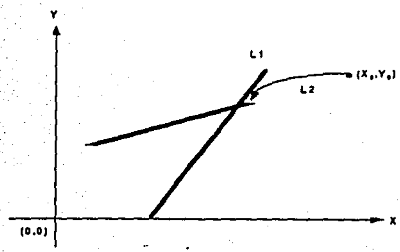
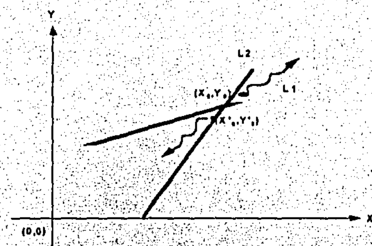


FIGURA 3.2. Tendencia de los gastos de armamento hacia el punto de equilibrio de las fuerzas, en el caso de la estabilidad.

El sistema no permanece así, las tasas de evolución de x y y no serán nulas en este punto. El punto (x,y) se desplazará a partir del punto inicial (x0,y0) en una dirección determinada por los valores de dx/dt y de dy/dt. En general se dirigirá horizontalmente sobre L1 en un movimiento condicionado por el país 1 y verticalmente sobre la dirección controlada por el país 2. Se puede considerar estos dos movimientos por separado para comodidad y verificarlos en la gráfica (fig. 3.2); se puede probar matemáticamente que, cualquiera que sea el punto inicial de los gastos de armamento, éste se desplaza hacia el punto de equilibrio de las fuerzas representado en la fig. 3.2. Es el caso del EQUILIBRIO ESTABLE: Una desviación lejos de este punto de equilibrio no importa en qué dirección, tenderá a corregirse.

Examinemos mientras tanto una situación diferente representada por la fig. 3.3.



FIOURA 3.3. Alineación de los gastos de armamento desde el punto de equilibrio de las fuerzas, en el caso de la inestabilidad.

En este caso, las posiciones de L1 y L2 están invertidas. Su intersección se encuentra en el primer cuadrante, allí se puede llegar si y sólo si al menos uno de los términos de ofensa es negativo, es decir, si uno de los países mantiene una reserva de buena voluntad frente a otro.

Supongamos entonces un punto inicial (x0,y0) en la fig.3.3. Los esfuerzos de cada país para que el nivel de sus gastos se sitúen sobre sus rectas vienen a hacerse en un movimiento opuesto al punto de equilibrio de las fuerzas. Los dos niveles de armamento van a crecer indefinidamente. Los frenos representados por m y n no son suficientes para parar la carrera. Pero suponiendo algún otro punto inicial (x0',y0') en la figura, allí aún el nivel de gastos se va a alejar del punto de equilibrio de las fuerzas, pero en un sentido opuesto al anterior, hacia el desarmamento total representado por el origen de las coordenadas (0,0). Si el punto inicial se encuentra fuera de la zona de los ángulos agudos delimitados por las rectas L1 y L2, el análisis es más complicado.

La situación de la fig. 3.3 es una situación INESTABLE. Esto puede desembocar en una carrera armamentista desenfrenada, es decir, un desarmamento total según la posición del punto inicial (x,y) en el interior de los ángulos agudos (al noroeste o suroeste del punto de equilibrio de las fuerzas).

Esta situación no está libre de ironía, si existen las ofensas subyacentes, un equilibrio de fuerzas es posible. En cambio, cuando en la actitud entre dos naciones reina una cierta cordialidad, se puede producir, o una loca carrera armamentista o un desarmamento total. Pero antes de discernir sobre los efectos estabilizadores de las ofensas y los efectos perturbadores de la "simpatía", es necesario recordar que se ha puesto una condición a la situación dada: el punto de intersección de dos rectas debe estar en el primer cuadrante; si se encontrara en el tercer cuadrante y los términos de amenazas fueran negativos, cualquiera que sea la posición inicial del punto (x,y) en el primer cuadrante, tenderá hacia el punto (0,0), o sea al desarmamento total; en otros casos, se puede producir un desarmamento unilateral y la evolución estaría determinada por las magnitudes relativas de los parámetros a, b, m, n, g y h.

Se tiene entonces, que dx/dt es positiva sobre la línea

$$ay - mx + g = 0 \quad ...(3.15)$$

Similarmente, dy/dt es positiva a la derecha de la línea

$$bx - ny + h = 0 \quad ...(3.16)$$

en la cuál x es mayor. Si la inclinación de la recta dada por la expresión (3.16) excede la inclinación de la recta dada por la ecuación (3.15), habrá una región en la cual dx/dt y dy/dt son positivas,dirigiéndose al lado del punto de equilibrio (x0,y0) en el que x>x0 y y>yo; y de acuerdo al régimen ser inestable. Pero por la ecuación (3.15), tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{a} \quad ...(3.17)$$

y por la ecuación (3.16)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{n} \quad ...(3.18)$$

La INESTABILIDAD ocurre cuando b/n>m/a, esto es, cuando

$$ab > mn \quad ...(3.19)$$

Por un argumento similar es fácilmente mostrado que el régimen será ESTABLE si

$$ab < mn \quad ...(3.20)$$

Cuatro casos típicos pueden resumir la discusión:

Primer caso: Si mn > ab, g > 0, h > 0, habrá un equilibrio estable de las fuerzas. Es decir, si el producto de los gastos de mantenimiento de defensas de ambos países es **mayor** que el producto de las defensas mismas y **existen** resentimientos, entonces se logrará un equilibrio estable del modelo.

Segundo caso: Si mn > ab, g < 0, h < 0 habrá desarmamento total. Dicho de otra manera, si el producto de los gastos de mantenimiento de defensas de ambos países es **mayor** que el producto de las defensas mismas pero **no existen** resentimientos, entonces tendrá lugar un desarmamento total.

Tercer caso: Si mn < ab, g > 0, h > 0 habrá una carrera armamentista continua (Inestabilidad). Esto es, si el producto de los gastos de mantenimiento de defensas de ambos países es **menor** que el producto de las defensas mismas y los coeficientes de resentimientos son positivos, entonces se presentará una carrera armamentista que puede no tener fin.

Cuarto caso: Si $mn < ab$, $g < 0$, $h < 0$, la situación ser ambigua: la carrera armamentista o el desarmamento total son posibles, según el nivel de los gastos de armamento. En este caso, si el producto de las defensas de ambos países es mayor que el producto de los gastos de éstas defensas, pero los coeficientes de los resentimientos son negativos, entonces cualquiera de las situaciones extremas pueden presentarse.

En todos estos casos, se ha supuesto que sólo los valores positivos de x y y ser n significativos.

3.2 CAMPOS SUSCEPTIBLES DE APLICACION DEL MODELO DE RICHARDSON.

El Modelo de Richardson fue desarrollado para problemas internacionales muy específicos que para la mayoría de la gente es difícil encontrar a menos que ellos realicen un análisis de riesgo político. El proceso Richardson, sin embargo, puede ser aplicado de una forma muy general. En muchas situaciones sociales, políticas y económicas, dos partes opuestas son impulsadas a incrementar un comportamiento de amenaza mutua, pero están obligadas a incrementarlo, más por factores económicos u otras consecuencias. Algunos ejemplos de esto son:

a) Dos tenistas están compitiendo para llegar a ser el campeón del Torneo de Singles. Cada uno realiza un tiempo de práctica adicional que perfeccionará su juego. Cuanto más practique uno, tanto más practicará el otro. Pero el tiempo de práctica de cada uno está restringido por el hecho de que practicando el tenis, descuida el resto de su vida social, la cuál, con el estatus de campeón de tenis se supone que mejorará.

b) Dos gasolineras están enfrascadas en una guerra de precios. Los precios bajarán antes de subir. Cada estación se siente obligada a bajar los precios para igualar el precio más bajo de su competidor, pero esto está restringido por la necesidad de mantener un margen de ganancia.

c) Dos Compañías están intentando contratar cada una a otro programador, ofreciendo salarios y beneficios más altos. Por cada uno de los aumentos de salario ofrecido por una compañía, la otra deberá igualarlo o perderá a un empleado valioso. Ambas compañías, sin embargo, están limitadas por la necesidad de mantener un nivel de ganancia e inversión.

d) Dos firmas importantes, están tratando de adquirir una compañía proponiendo competitivamente sus mercancías. Cada propuesta por parte de una firma debe ser combatida por la otra, pero ambas están restringidas por la cantidad total disponible para la adquisición.

La mayoría de estas situaciones son candidatas para seguir un Modelo de Richardson a corto término.

CAPITULO IV

CAPITULO IV. IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL DEL MODELO DE RICHARDSON

INTRODUCCION

En este capítulo se encuentra la aportación principal de este trabajo: establecer el Modelo de Richardson en un programa para computadora el cuál sea capaz de predecir la estabilidad o inestabilidad del modelo en diferentes situaciones de competencia.

Además, y tal como un programa lo requiere, se ha construido el diagrama de Flujo correspondiente a este programa, el cuál podrá ser utilizado por el usuario o por alguna otra persona que lo desee, para codificar el algoritmo en cualquier otro lenguaje de computación.

Como se mencionó anteriormente, el modelo se establece como un par de ecuaciones de diferencias finitas debido a la facilidad para resolverlas y por ser el método más utilizado por los programadores.

4.1. DIAGRAMAS DE FLUJO

Para poder llevar a cabo la diagramación del programa que muestra el comportamiento del Modelo de Richardson, fue necesario establecer primero la forma en que se analizaría y resolvería el modelo, es decir, desarrollar el algoritmo con las herramientas matemáticas necesarias para la solución del sistema de ecuaciones de diferencias finitas ya establecidas.

Debido a que en la programación es más recomendable usar un diagrama estructurado, se utilizaron varios módulos o procedimientos con los que será posible hacer modificaciones o correcciones de forma más rápida y fácil. Esto no significa que sea un trabajo muy simple el modificar o corregir el programa, sino que el usuario sabrá a cuál de los módulos referirse cuando tenga algún problema o inquietud.

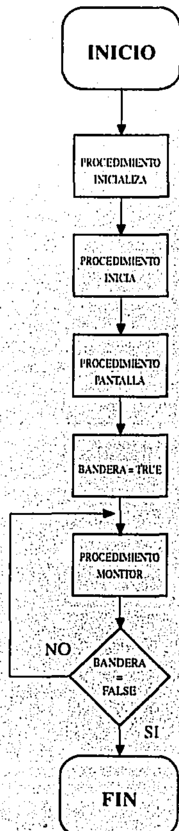
Como se verá a continuación, las estructuras en el diagrama son estructuras sencillas y fáciles de codificar, ya que contiene varios ciclos repetitivos que podrían crear confusión en el momento de escribir el programa.

El orden de los procedimientos obedece a la forma en que son llamados para su ejecución en el programa.

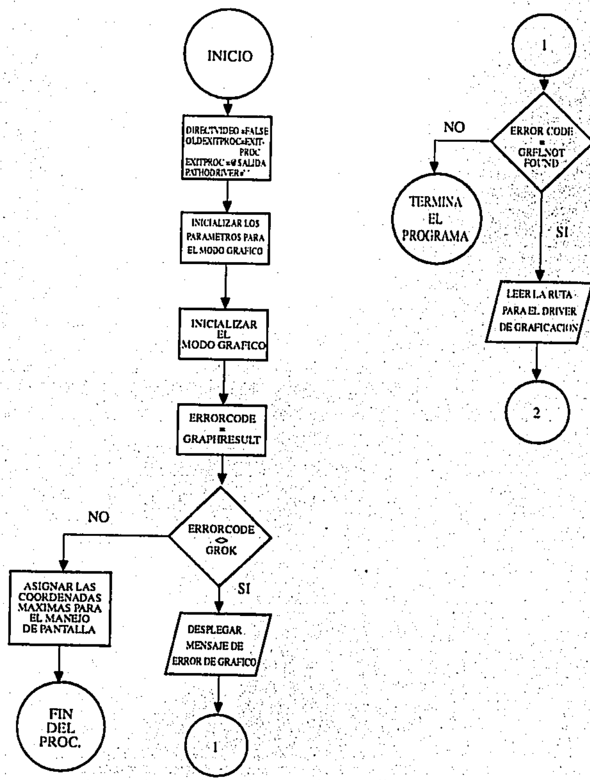
Para tener una visión general del programa se incluye el diagrama de flujo principal en el cuál están implícitos todos los módulos restantes.

Es importante señalar que debido a la sencillez de las estructuras, el diagrama de flujo es extenso pero fácil de comprender y codificar.

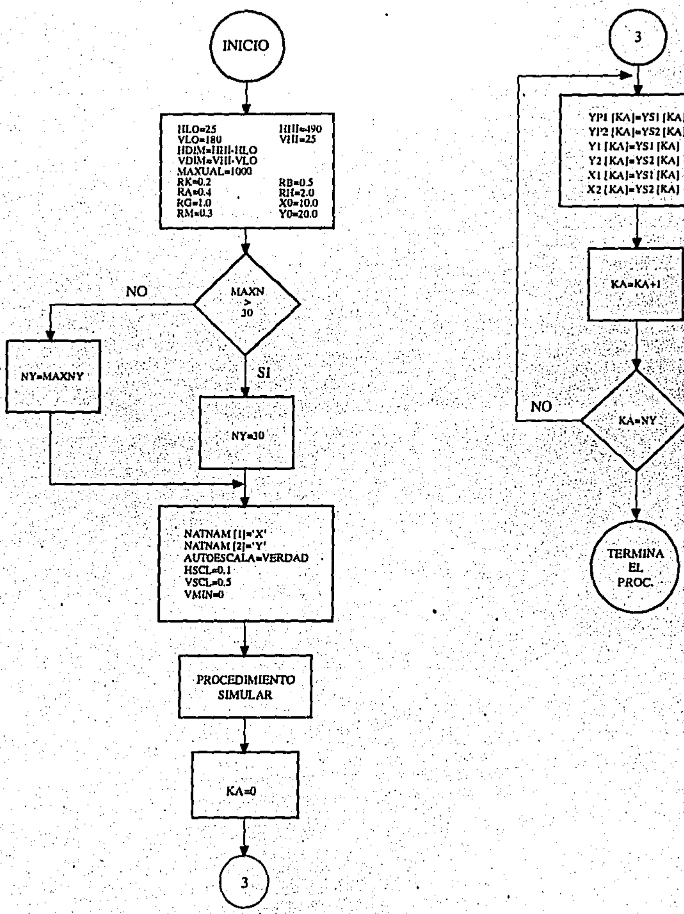
DIAGRAMA DE FLUJO PRINCIPAL



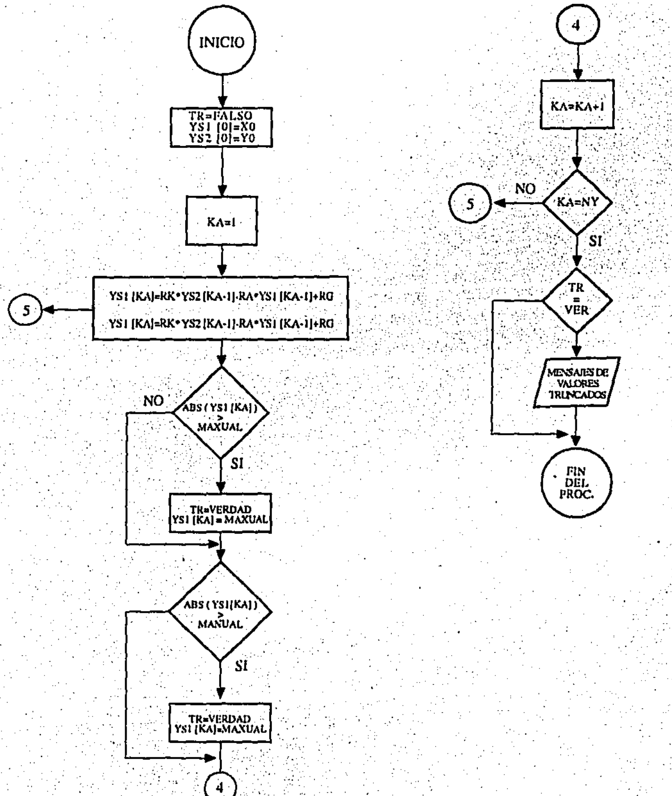
PROCEDIMIENTO INICIALIZA



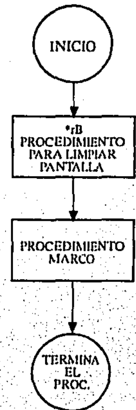
PROCEDIMIENTO INICIA



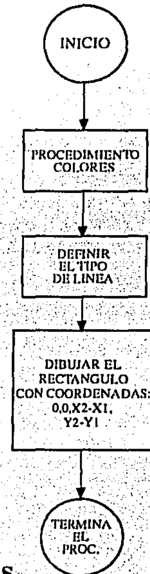
PROCEDIMIENTO SIMULAR



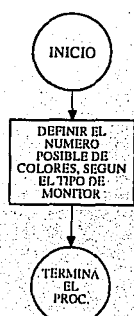
PROCEDIMIENTO PANTALLA



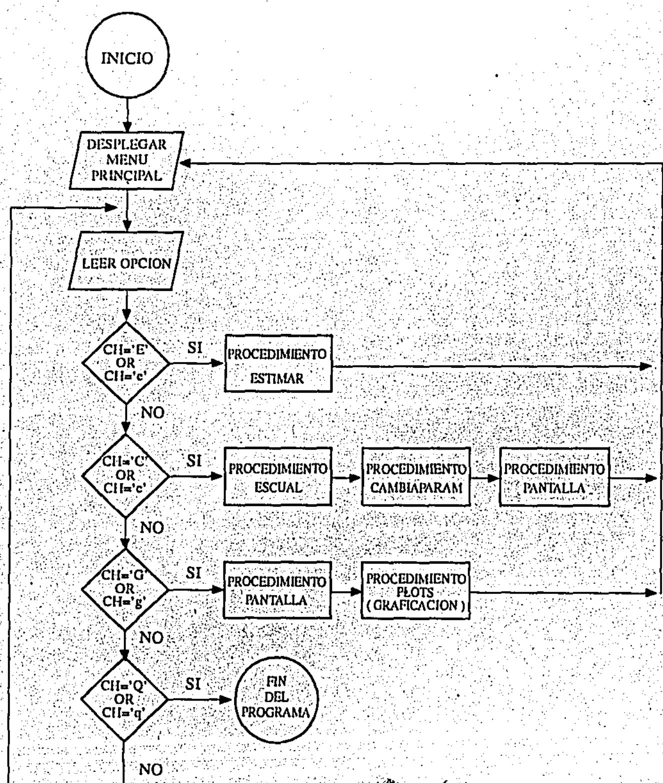
PROCEDIMIENTO MARCO



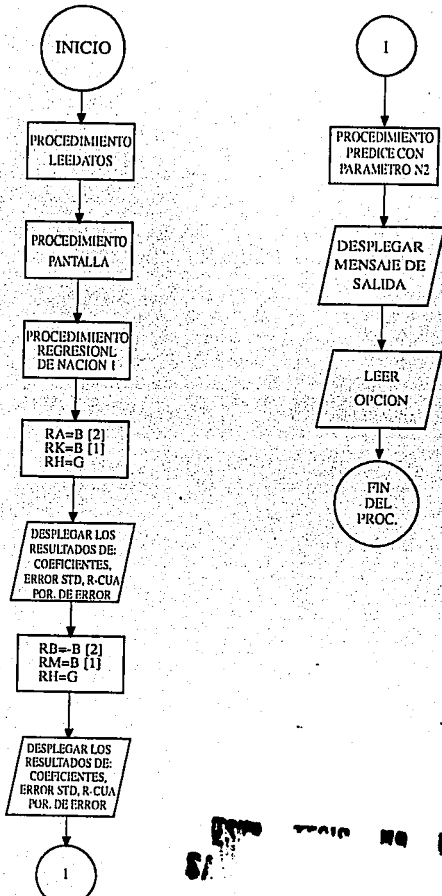
PROCEDIMIENTO COLORES



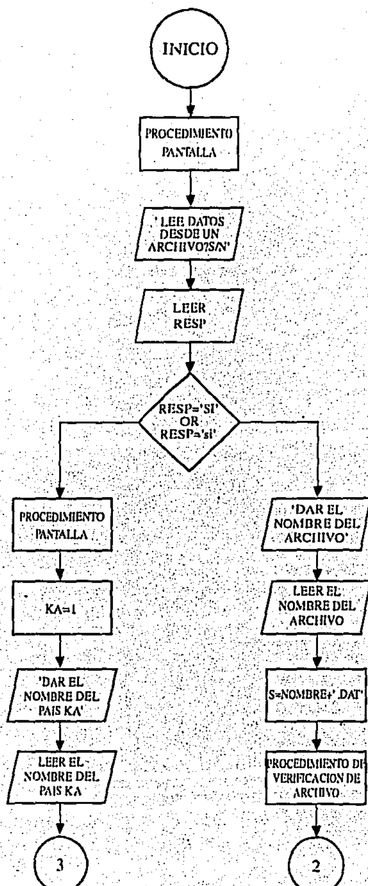
PROCEDIMIENTO MONITOR



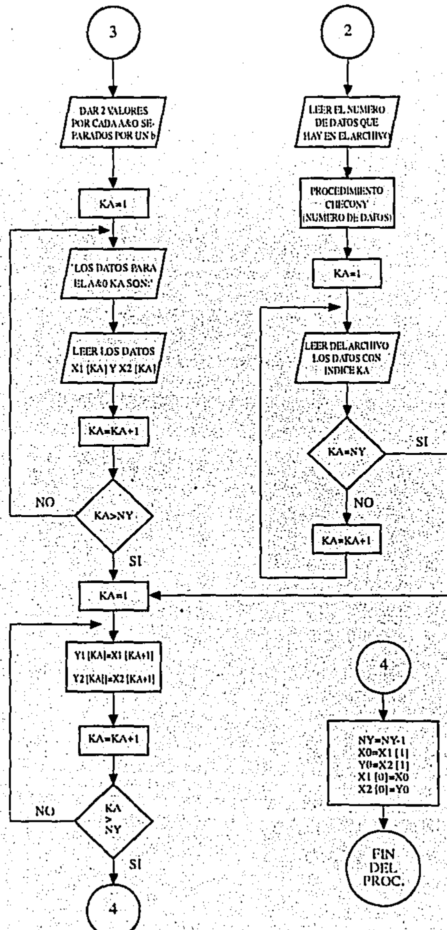
PROCEDIMIENTO ESTIMAR



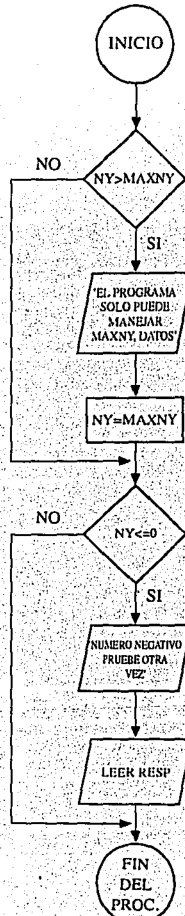
PROCEDIMIENTO LEEDATOS



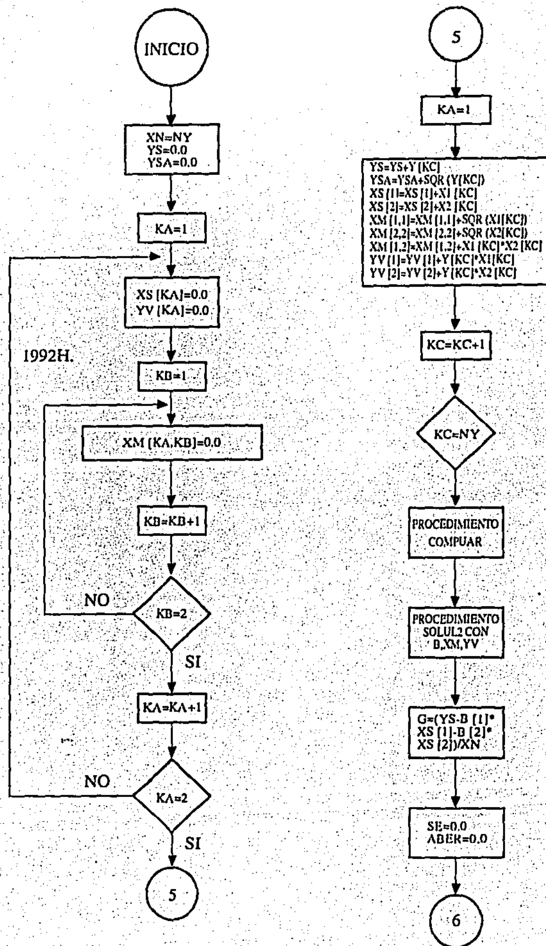
PROCEDIMIENTO LEEDATOS
(CONTINUA)



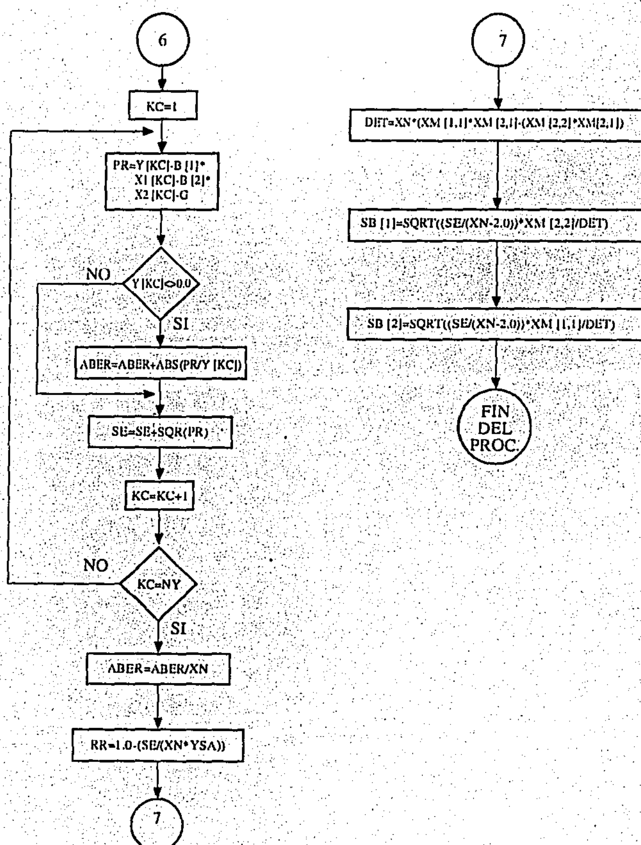
PROCEDIMIENTO CHECONY



PROCEDIMIENTO REGRESIONAL

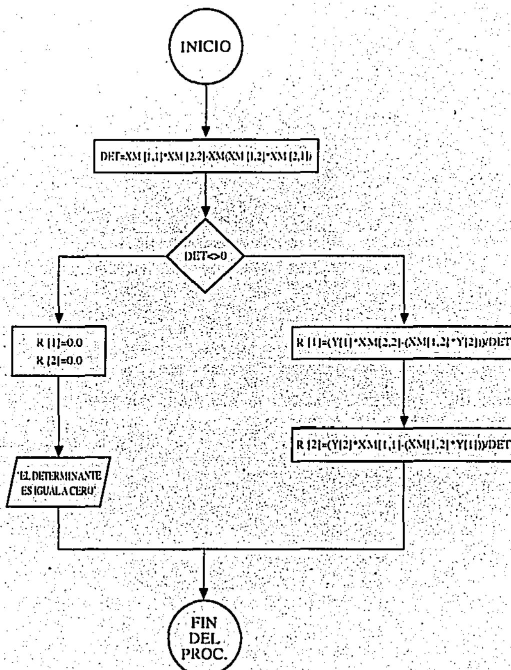


PROCEDIMIENTO REGRESIONL
(CONTINUA)

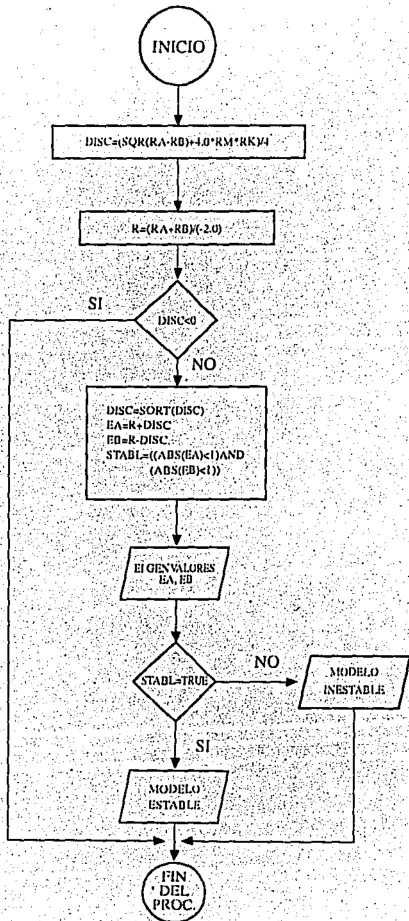


PROCEDIMIENTO COMPVAR

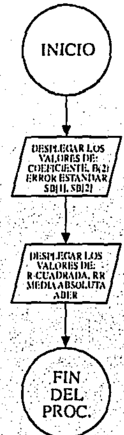
PROCEDIMIENTO SOLVL2



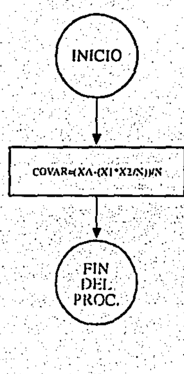
PROCEDIMIENTO ESCEING



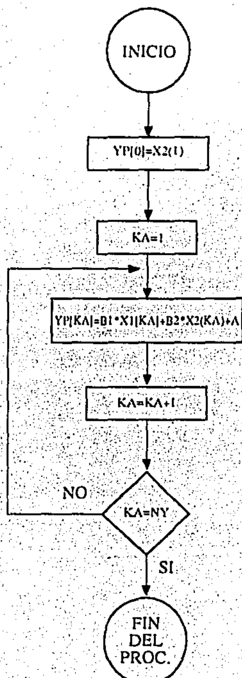
PROCEDIMIENTO ESCRESUL



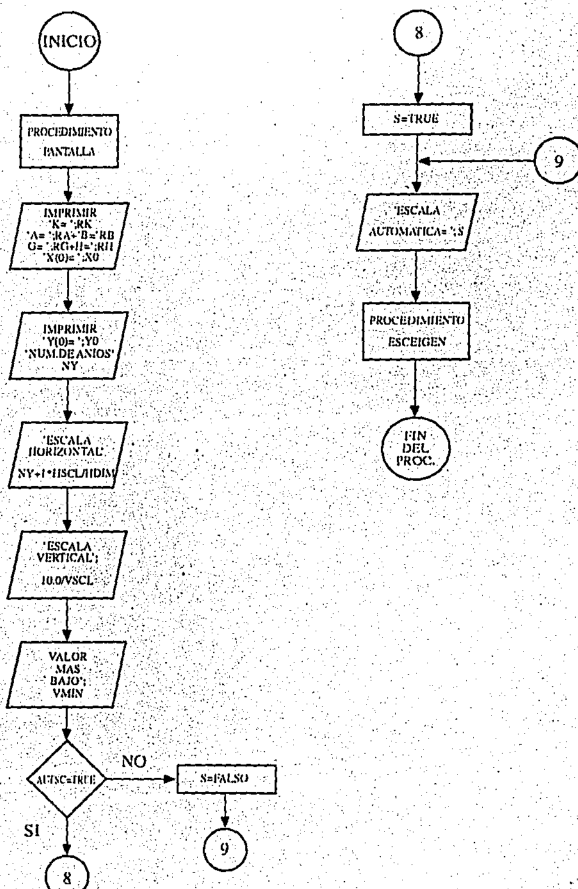
FUNCION COVARIANZA CON PARAMETROS XA, X1, X2, N



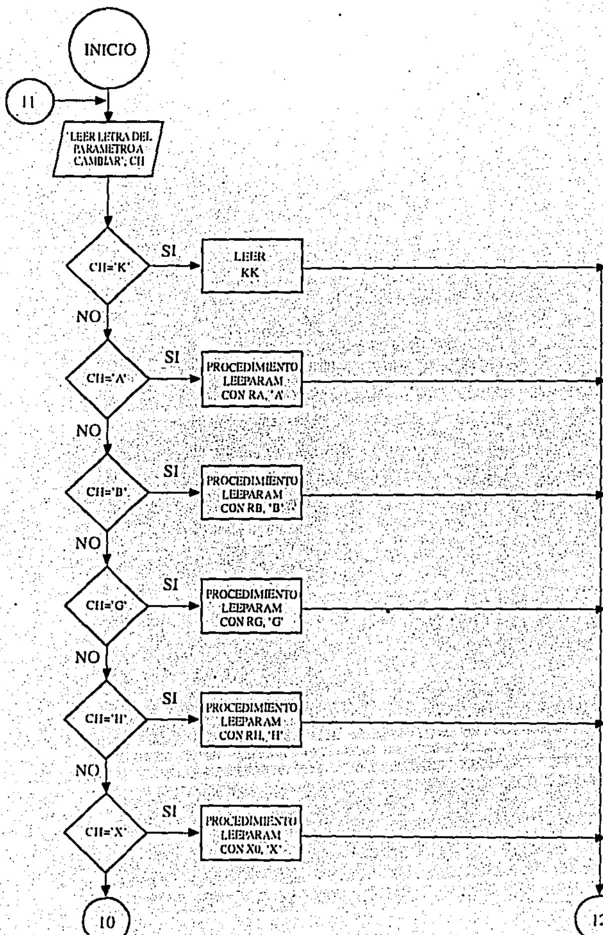
PROCEDIMIENTO PREDICE



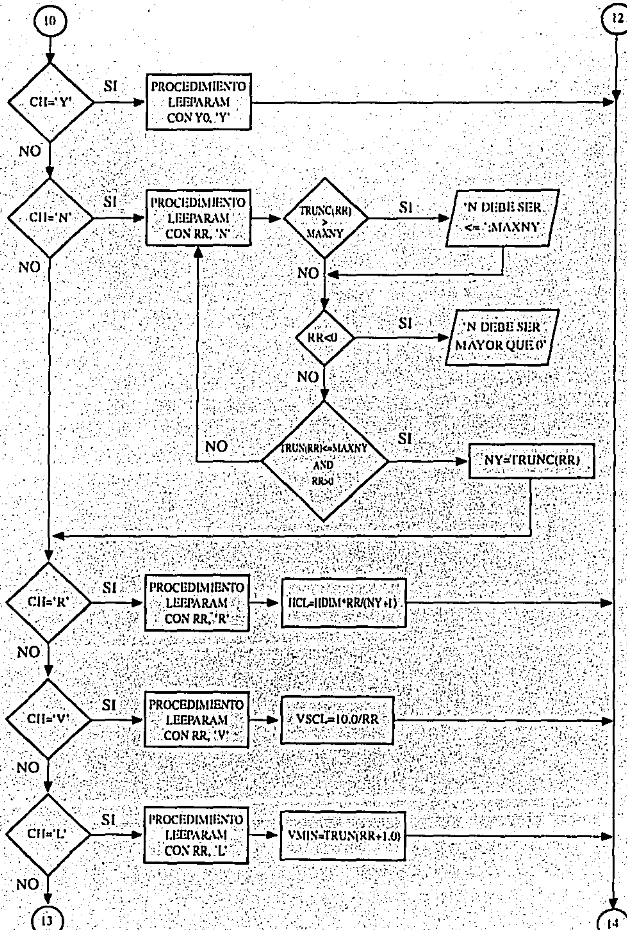
PROCEDIMIENTO ESCVAL



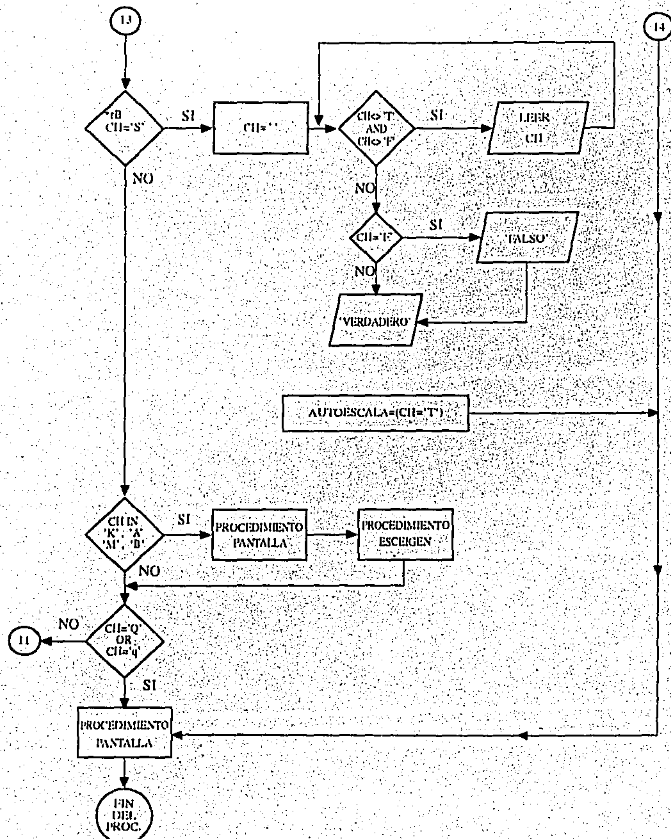
PROCEDIMIENTO CAMBIAPARAM



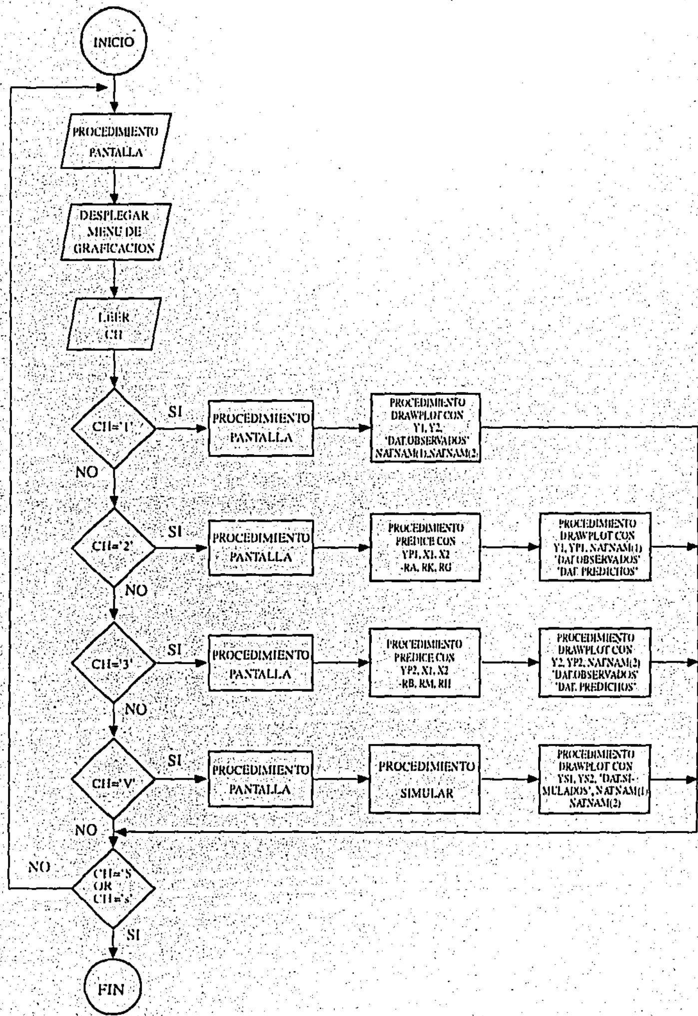
PROCEDIMIENTO CAMBIAPARAM
(CONTINUA)



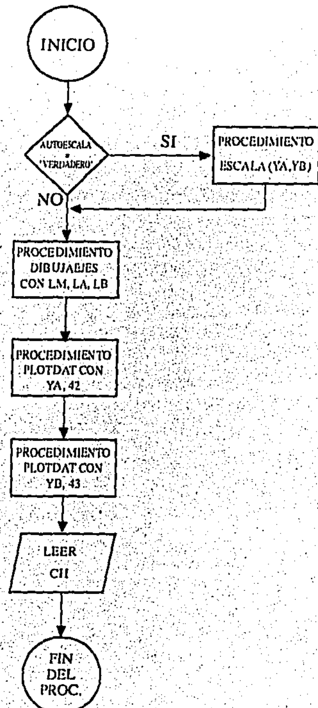
PROCEDIMIENTO CAMBIAPARAM
(CONTINUA)



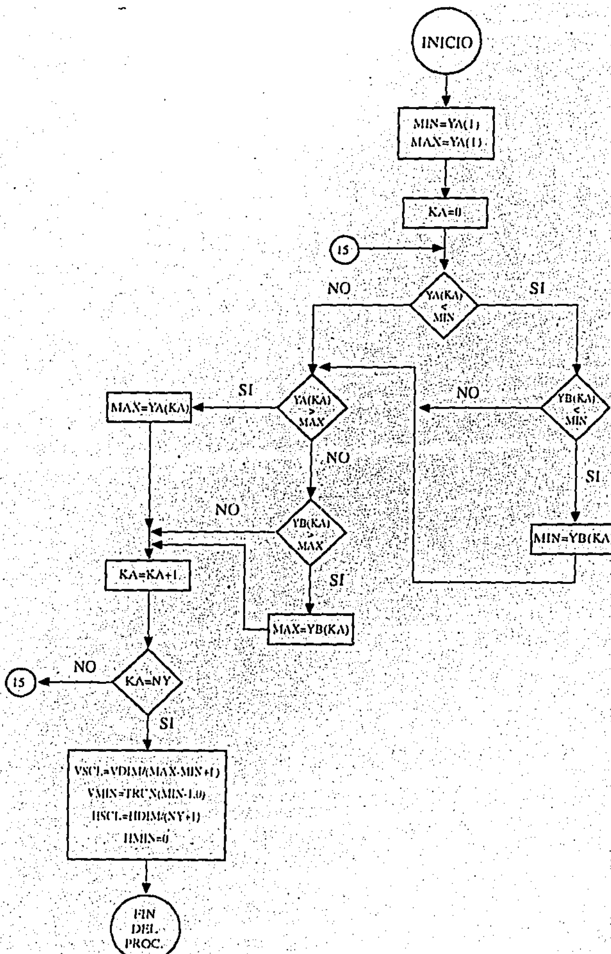
PROCEDIMIENTO PLOTS (GRAFICAR)



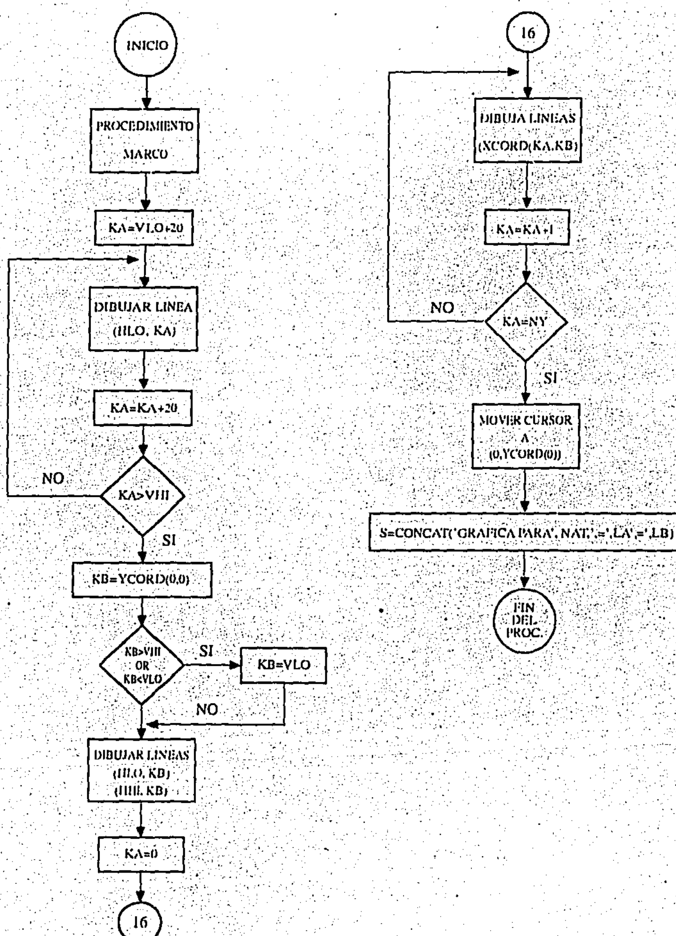
PROCEDIMIENTO DRAWPLOT



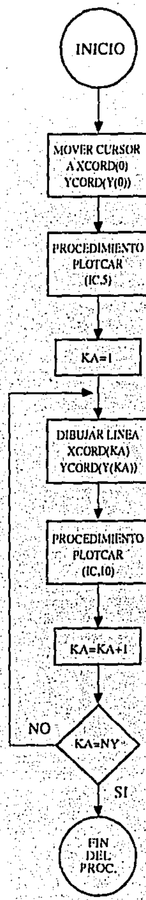
PROCEDIMIENTO ESCALA



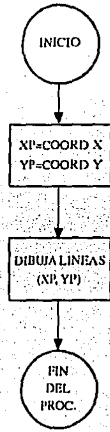
PROCEDIMIENTO DIBUJAEJES



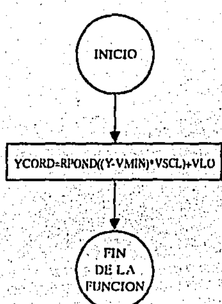
PROCEDIMIENTO PLOTDAT



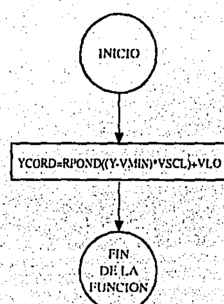
PROCEDIMIENTO PLOTCAR



FUNCION YCORD



FUNCION XCORD



4.2.PROGRAMACION

La programación del modelo se realizó en Lenguaje Turbo Pascal versión 5.0 debido a la forma de programación que se debe utilizar en este lenguaje (programación estructurada), además de que las instrucciones son bastante comprensibles y el uso de arreglos y archivos es sencillo.

También en este lenguaje resulta fácil la interacción entre los modos de despliegue de la información como los son el modo texto y el modo gráfico en pantalla dentro del mismo programa.

En el programa se notarán algunos comentarios anexos a los procedimientos o módulos para que el usuario que lo requiera tenga idea del proceso que se lleva a cabo en ese módulo.

4.2.1 DESCRIPCION DEL PROGRAMA RICHDEMO.

Richdemo es un programa escrito en Lenguaje Pascal, que sirve para mostrar las características del Modelo de Richardson. El programa contiene tres módulos, los cuales se pueden accesar tecleando la primera letra del nombre del módulo.

Cada módulo está desarrollado con varios procedimientos (programación estructurada) cuyos nombres especifican exactamente el proceso que se lleva a cabo en esas líneas. Debido a esto, si el usuario deseara en algún momento realizar alguna modificación al programa, sólo tendrá que dirigirse a un procedimiento específico y no será necesario que recorra todo el programa.

Módulo E)stimar.

Este módulo estima los parámetros del modelo desde un conjunto de datos. Se pueden alimentar los datos desde un archivo de texto ya existente o desde el teclado. El usuario deberá teclear los datos en este orden: los dos nombres de los competidores, el número de datos, y los datos mismos. Deberá introducir dos valores para cada año, separados con un espacio en blanco. Debido a restricciones de la memoria de la computadora, sólo se podrán introducir un máximo de 50 datos; sin embargo, el usuario puede ser capaz de ampliar ligeramente este número. El programa muestra el cursor (prompt) para la introducción de los datos por teclado.

Los datos que son alimentados desde el archivo de texto, estarán en el mismo orden que desde el teclado, con la excepción de que el primer número en cada línea de datos es omitido, lo cuál permite que el archivo contenga el número de años u otros números identificadores.

El programa proporciona automáticamente el sufijo ". DAT" para el nombre del archivo de datos. Los coeficientes para el modelo son estimados usando Estimación de Mínimos Cuadrados. También calcula los coeficientes del modelo, el Error Estándar de estos coeficientes y dos medidas de ajuste para la predicción:

El coeficiente de correlación R-cuadrada.- es una medida estadística del ajuste de los valores predichos y observados - una R-cuadrada de 0.0 significará que no existe ajuste y una R-cuadrada de 1.0 significará un ajuste perfecto-.

El porcentaje de error de la Media Absoluta.- es una medida más convencional: el promedio de error de la predicción como un porcentaje del valor que está siendo predicho.

El error estándar de los coeficientes da una idea de si los coeficientes son distintos de cero -(por ejemplo si un competidor está actualmente reaccionando a una amenaza o presión económica). En muchas pruebas, un coeficiente que es el doble del tamaño de su error estándar significa que el usuario puede estar el 95% seguro de que el coeficiente es actualmente diferente de cero y que no fue obtenido por azar.

El módulo Estimar contiene todas las rutinas necesarias para una Regresión Lineal Múltiple con dos variables.

Módulo de C)ambio de Parámetros.

Una vez que los parámetros han sido estimados, son incorporados en la lista de parámetros, la cuál es desplegada tecleando la letra C. Alternativamente el usuario puede saltarse la estimación y el conjunto de parámetros introducidos manualmente, ya que el modelo cuenta con parámetros propios para que el usuario pueda experimentar con el comportamiento del modelo.

El usuario puede también, cambiar los parámetros tecleando la primera letra de cada parámetro y escribiendo el nuevo valor. Se puede cambiar las escalas sobre las gráficas y el número de años en la misma forma.

En el modelo están contenidos tres parámetros de escala. Cuando la escala horizontal es igual a 1, todos los datos de los años son desplegados. Ajustando la escala horizontal a un número mayor que 1.0, la gráfica se expandirá horizontalmente y algunos de los últimos años no serán dibujados. Fijando la escala horizontal a un número menor que 1.0, la gráfica se comprimirá. La escala horizontal es cambiada por la letra R.

La escala vertical es el número de unidades entre las marcas sobre el eje vertical; el valor menor es el valor al final de la pantalla. El eje horizontal es dibujado en el valor 0 si éste está en la gráfica, de otro modo, el eje horizontal es dibujado en el valor más bajo.

Este módulo también calcula los Eigenvalores del modelo. Estos dos números son una función de los parámetros k, m, a y b, y determinan la estabilidad del modelo. Si ambos Eigenvalores son reales y menores que 1.0 en valor absoluto, el modelo es estable; de otra forma, el modelo será inestable. Los eigenvalores complejos producirán un comportamiento oscilatorio.

Módulo G)raficar.

Este módulo dibuja en la pantalla una gráfica de:

1) Los datos introducidos en el Módulo Estimar

2) Los valores observados de uno de los competidores

3) Los valores predichos de uno de los competidores dados en el Módulo Estimar.

4) Los valores producidos por la simulación del comportamiento del sistema, usando las

ecuaciones con los parámetros actuales y los valores iniciales x0 y y0.

Este procedimiento sirve para experimentar con el comportamiento del modelo. Si los valores del modelo llegan a ser muy grandes, el programa trunca la simulación para evitar errores de tamaño de memoria (overflow). Esta opción permite mostrar el comportamiento de sistemas de ecuaciones de diferencias.

4.3. CORRIDAS DEL PROGRAMA RICHDEMO

4.3.1. EL CONFLICTO IRAN--IRAQ

El primer ejemplo se realizó con los datos del conflicto entre IRAN e IRAQ, el cuál, como se sabe, terminó con el estallamiento de la guerra.

Los datos para este ejemplo están contenidos en un archivo llamado IRAN.DAT que fue creado mediante un programa editor para ahorrar tiempo de captura al mostrar el modelo.

Los datos fueron tomados de las estadísticas existentes en la Comisión Internacional de Desarme de la Organización de las Naciones Unidas.

```
                    PROGRAMA PARA DEMOSTRAR
        EL MODELO DE COMPETENCIA DE ARMAS DE RICHARDSON



                       DAR LA OPCION -->

                        E)STIMAR

                        C)AMBIAR VALORES DE LOS PARAMETROS

                        G)RAFICAR

                        Q)SALIR
```

La primer pantalla muestra el menú principal para probar el Modelo de Richardson. Como en este caso lo que se desea es Estimar los parámetros del modelo, se elige la opción E.

Al escoger esta opción, se piden los datos que están contenidos en el archivo IRAN.DAT, al leer el programa este archivo, se obtiene la siguiente pantalla:

```
           ***   COEFICIENTES ESTIMADOS   ***

                  ECUACION PARA :   IRAN
                   AMENAZA              ECONOMIA            OFENSA
COEFICIENTE    : 1.9136886663E+00  5.9658846184E-01 -7.5985477622E+01
ERROR STANDARD: 7.9596771878E-01  2.2908236316E-01
R-CUADRADA:      8.9947041264E-01
MEDIA ABSOLUTA, PORCENTAJE DE ERROR:  1.0017920571E-01



                  ECUACION PARA :   IRAQ
                   AMENAZA              ECONOMIA            OFENSA
COEFICIENTE    : 2.9793853572E-01  1.5350991763E-01  4.4636177845E+01
ERROR STANDARD: 8.2898739667E-02  2.0803941340E-01
R-CUADRADA:      8.6426211611E-01
MEDIA ABSOLUTA, PORCENTAJE DE ERROR:  7.9000754976E-02



     EIGENVALORES :     1.1619680217E+00
                       -4.1186964226E-01

                        EL MODELO ES
                                INESTABLE
```

En esta pantalla se obtienen lo coeficientes estimados del modelo, los eigenvalores y se dice si el modelo es estable o inestable. Desde este momento, ya podremos decir cómo se comportará el conflicto entre las dos partes de acuerdo al análisis obtenido en el desarrollo de las ecuaciones del modelo.

Si el modelo es inestable, como en este caso, se predice que llegará un momento en que la competencia tendrá un fin, y el fin predicho para este ejemplo fue la guerra.

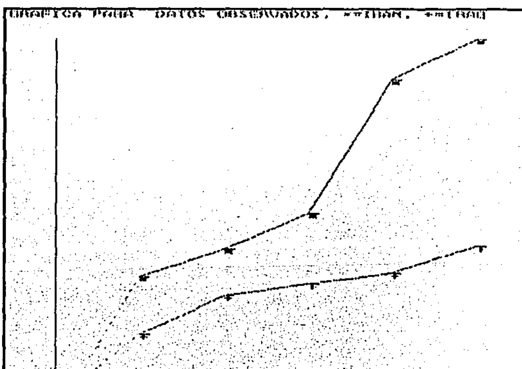
```
                    CAMBIO DE PARAMETROS
         MODELO DE COMPETENCIA DE ARMAS DE RICHARDSON
              X(T+1) = KY(Y) - AX(Y) + G

              Y(Y+1) = MX(T) - BY(Y) + H
      K  =   1.9136006663E+00 M  =   2.9793053572E-01
      A  =  -5.9658846184E-01 B  =  -1.5350991763E-01
      G  =  -7.5985477622E+01 H  =   4.4636177045E+01
      X(0) =  7.0000000000E+01
      Y(0) =  7.5000000000E+01
      NUMERO DE AÑOS =  5.0000000000E+00
      ESCALA HORIZ.:  1.5384615385E-03
      ESCALA VERTIC.:  2.0000000000E+02
      VALOR MAS BAJO:  0.0000000000E+00
      ESCALA AUTOMATICA:TRUE



EIGENVALORES :     1.1619680217E+00
                  -4.1186964226E-01

                 EL MODELO ES
                         INESTABLE

      DAR LA LETRA DEL PARAMETRO A CAMBIAR: (Q PARA SALIR)
```

Esta parte del modelo, permite experimentar haciendo cambios en algunos de los coeficientes estimados, para lograr un modelo contrario al que se obtiene y de esta manera poder analizar en qué situaciones el modelo podrá comportarse diferente al estimado al prrincipio.

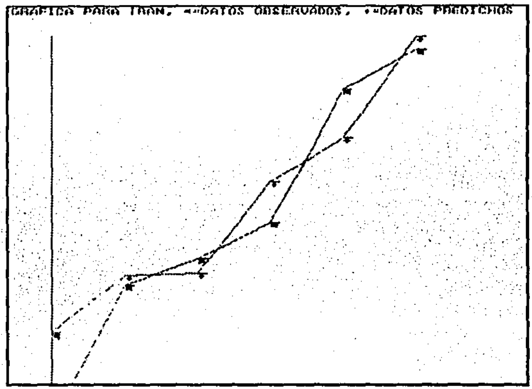
El experimentar en ésta sección del modelo nos puede dar la opción de rectificar a tiempo algún aspecto de una competencia que esté en nuestras manos corregir sin arriesgar a los dos rivales en un fin irreparable.

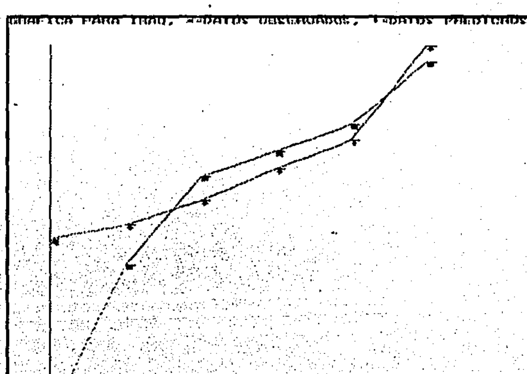
```
*** MENU DE GRAFICAS ***

DAR LA OPCION DE DIBUJO -->

1. DATOS OBSERVADOS

2. OBSERVADOS Y PREDICHOS PARA IRAN

3. OBSERVADOS Y PREDICHOS PARA IRAQ

4. DATOS SIMULADOS

5. SALIR

PARA SALIR DE LA GRAFICA PRESIONAR RETURN
```

Si el análisis de los datos estimados no fuera muy claro, se cuenta con este módulo para graficar los comportamientos del modelo para ambas partes en competencia y poder así tener una idea más clara de la predicción establecida por el modelo.

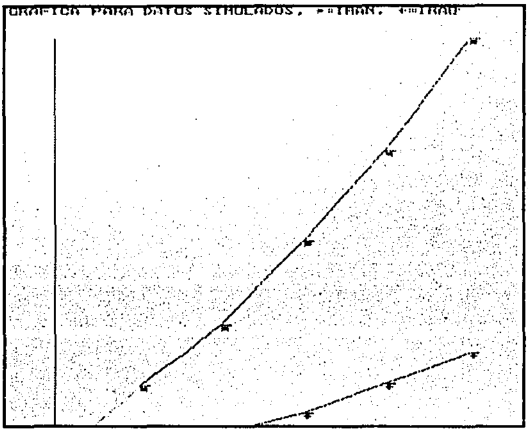


Primero se muestran los datos que se alimentaron mediante el archivo IRAN.DAT para ambas partes.





Segundo, se grafican los datos predichos y observados para ambos rivales lo que nos permite observar las diferencias estimadas entre ambos tipos de datos.



Tercero, se muestran los datos que simula el modelo, es decir, los datos a partir de los que se predice si el modelo será estable o inestable.

Si tenemos una gráfica en donde se observe que los datos tienden hacia el infinito sin probabilidad de que en algún momento las rectas se crucen, entonces se dice que el modelo es inestable y que el conflicto podrá terminar en guerra.

Para este ejemplo, es bien sabido que el conflicto terminó en guerra, pero sólo se supo siete u ocho años después de que se predijera con el Modelo de Richardson.

4.3.2. LA GUERRA DE LAS COLAS

En la actualidad se sabe que las dos compañias más importantes de la industria refresquera como lo son la Pepsi Co. y la Coca Cola Company, han entablado una guerra publicitaria sin cuartel desde hace muchos años.

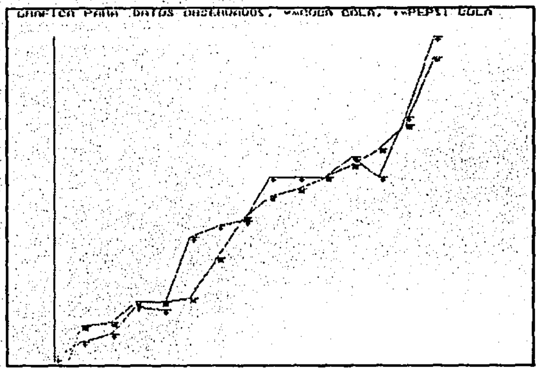
Debido a la naturaleza de su competencia, el Modelo de Richardson se adapta muy bien para simular el comportamiento de esta rivalidad.

El archivo generado para este ejemplo se llama COCAS.DAT y son valores expresados en millones de dólares que reportan los gastos de publicidad. Contiene quince datos históricos y los nombres de ambos competidores.

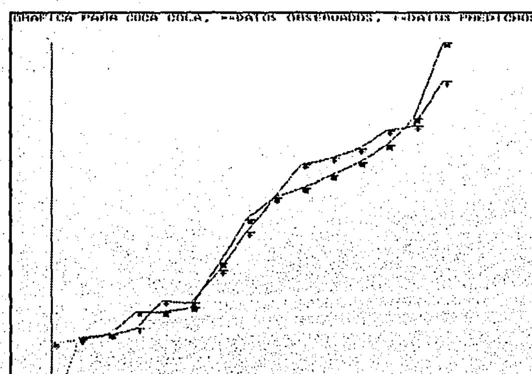
```
          ***   COEFICIENTES ESTIMADOS   ***

                ECUACION PARA :   COCA COLA
                 AMENAZA           ECONOMIA          OFENSA
COEFICIENTE    : 3.6716084573E-01  7.3956813442E-01 -7.5850374102E-0
ERROR STANDARD: 5.8664546703E-02  6.0131616585E-02
R-CUADRADA:      9.6786541346E-01
MEDIA ABSOLUTA, PORCENTAJE DE ERROR:  4.8872059264E-02


                ECUACION PARA :   PEPSI COLA
                 AMENAZA           ECONOMIA          OFENSA
COEFICIENTE    : 8.0915672010E-01  5.0537141987E-01  2.4096617475E-0
ERROR STANDARD: 1.1488836329E-01  1.1209511372E-01
R-CUADRADA:      8.9359777898E-01
MEDIA ABSOLUTA, PORCENTAJE DE ERROR:  1.1174578510E-01



     EIGENVALORES :       1.1096766345E+00
                          1.3526291803E-01

                            EL MODELO ES
                                   INESTABLE


         <RETURN> PARA MENU PRINCIPAL
```

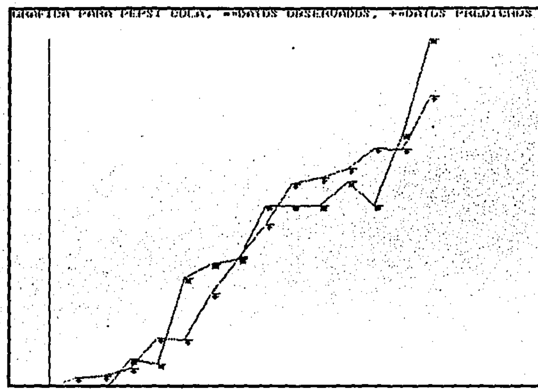
Al aplicar el porgrama RICHDEMO a este archivo obtenemos que el modelo tiene un comportamiento inestable.

Si analizamos el modelo mediante el método gráfico obtendremos:

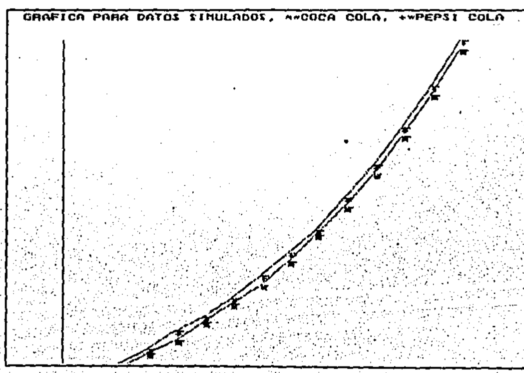


Al analizar el comportamiento que han tenido ambas compañías se puede observar que las dos han tenido épocas en que les resulta difícil emparejar a su rival teniendo que hacer grandes esfuerzos por alcanzar su nivel e incluso sobrepasarlo.





Los datos observados y predichos para los dos competidores, no difieren mucho como en el ejemplo del conflicto entre Irán e Iraq, lo que nos da una idea de cómo será el comportamiento de este modelo por lo menos para los cinco próximos años.



Resulta interesante observar los datos simulados para el modelo aquí expuesto, dado que ambos conjuntos de datos están bastante emparejados, pero no se espera que las curvas tengan un punto de intersección, lo que resultará en probable quiebra de alguna de las dos compañías, a menos de que una de ellas o ambas rectifiquen algunos de sus coeficientes existentes.

```
PROGRAM RICHDEMO;
                    { PROGRAMA PARA ESTIMAR Y DEMOSTRAR EL MODELO DE COMPETENCIA DE ARMAS
                               DE RICHARDSON}
{$S+}      {PONE EL COMPILADOR EN MODO DE INTERCAMBIO}

USES CRT ,graph;
CONST
 MAXNY = 50;     {TAMAÑO DEL VECTOR DE DATOS}

TYPE
 DATOSVECT=ARRAY[0..MAXNY] OF REAL;
 MATRIX=ARRAY[1..2,1..2]OF REAL;
 VECT2=ARRAY[1..2]OF REAL;

VAR
 INF:TEXT;
 A,B1,VMIN,HMIN,HHI,HLO,VHI,VLO,HDIM,VDIM,NY,KA,KB,KC: INTEGER;
 X0,Y0,RK,RM,RA,RB,RG,RH: REAL;
 MAXVAL,PR,ABER,VSCL,HSCL,RR,G: REAL;
 SE,DET,XN,YS,YSA: REAL;
 YS1,YS2,YP1,YP2,Y1,Y2,X1,X2: DATOSVECT;
 YV,XS,B,SB:VECT2;
 NATNAM:ARRAY[1..2] OF STRING;
 p,P1,S:STRING;
 RESP,CH:CHAR;
 XM:MATRIX;
 AUTOESCALA:BOOLEAN;
 maxx,maxy:word;
 graphdriver:integer;
 graphmode:integer;
 errorcode:integer;
 maxcolor:word;
 oldexitproc:pointer;

 {$F+}
 procedure salida;
 begin
  exitproc:=oldexitproc;
  closegraph;
 end;
 {$F-}.

 procedure inicializa;
 type
  vresolucion=(Lower,Higher);

 var
  maxdelta:integer;
  resolucion:vresolucion;
  ingraphicsmode:boolean;
  s,pathtodriver:string;

 begin
   resolucion:=Lower;
   if paramcount>0 then
    begin
     s:=paramstr(1);
     if s[1]='/' then
      if upcase(s[2])='H' then
```

```
      resolucion:=Higher;
   end;
 graphdriver:=detect;
 detectgraph(graphdriver,graphmode);
 errorcode:=graphresult;
 repeat
  if errorcode <> grok then
   begin
    writeln('graphics error: ',grapherrormsg(errorcode));
    if errorcode = grfilenotfound then
     begin
      writeln('Enter full path to BGI driver or type <Ctrl-Break> to Quit:');
      readln(pathtodriver);
      writeln;
     end
    else
     halt(1);
   end
  until errorcode=grok;
  Case graphdriver of
   CGA   : begin
            maxdelta:=7;
            graphdriver:=CGA;
            graphmode:=CGAC1;
           end;
   MCGA :  begin
            maxdelta:=7;
            Case graphmode of
             MCGAMed, MCGAHi:  graphmode:=MCGAC1;
            end;
           end;
   EGA :   begin
            maxdelta:=16;
            if resolucion=Lower then graphmode:=EGALo
            else graphmode:=EGAHi;
           end;
   EGA64:  begin
            maxdelta:=16;
            if resolucion=Lower then graphmode:=EGA64Lo
            else graphmode:=EGA64Hi;
           end;
  Hercmono: Maxdelta:=16;
  EGAmono : Maxdelta:=16;
  PC3270  : begin
             maxdelta:=17;
             graphdriver:=CGA;
             graphmode:=CGAC1;
            end;
  ATT400 :  Case graphmode of
             ATT400C1, ATT400C2, ATT400Med,
             ATT400Hi: begin
                        maxdelta:=7;
                        graphmode:=ATT400C1;
                       end;
            end;
  VGA    :  begin
             maxdelta:=16;
            end;
end;
```

```
 initgraph(graphdriver,graphmode,'');
 errorcode:=graphresult;
 repeat
   if errorcode <> grok then
    begin
     writeln('graphics error: ',grapherrormsg(errorcode));
     if errorcode = grfilenotfound then
      begin
       writeln('Enter full path to BGI driver or type <Ctrl-Break> to Quit:');
       readln(pathtodriver);
       writeln;
      end
     else
      halt(1);
    end;
   until errorcode=grok;
 MAXX:=GETMAXX;
 MAXY:=GETMAXY;
END;


PROCEDURE ESTIMAR;FORWARD;
PROCEDURE MONITOR;FORWARD;


FUNCTION NUMASTR(L:real):STRING;
                      {CONVIERTE UN NUMERO A STRING PARA PODER IMPRIMIRLO}
BEGIN
 STR(L,p);
 NUMASTR:=p;
END;

FUNCTION NUMASTR2(L:INTEGER):STRING;
                      {CONVIERTE UN NUMERO A STRING PARA PODER IMPRIMIRLO}
BEGIN
 STR(L,p1);
 NUMASTR2:=p1;
END;


procedure colores;
 var
  maxcolor:word;

 begin
  maxcolor:= getmaxcolor;
  setcolor(maxcolor);
 end;

 procedure marco;
 var
  maxcolor:word;
  portada:viewporttype;

 begin
  colores;
  setlinestyle(solidln,0,normwidth);
  getviewsettings(portada);
  with portada do
   begin
```

```
    rectangle(0,0,x2-x1,y2-y1);
   end;
 end;


{**** PROCEDIMIENTOS PARA ESTIMAR ****}

FUNCTION COVAR(XA,X1,X2,N:REAL):REAL;  {CALCULA LA VARIANZA O COVARIANZA}
BEGIN
 COVAR:=(XA-(X1*X2/N))/N;
END;

PROCEDURE SOLVL2(VAR R:VECT2;XM:MATRIX;Y:VECT2);
 { RESUELVE CONJUNTO DE 2 ECUACIONES SIMULTANEAS }

VAR
 DET:REAL;
BEGIN
 DET:=XM[1,1]*XM[2,2]-(XM[1,2]*XM[2,1]);
 IF DET<>0.0 THEN
  BEGIN
   R[1]:=(Y[1]*XM[2,2]-(XM[1,2]*Y[2]))/DET;
   R[2]:=((Y[2]*XM[1,1])-(XM[1,2]*Y[1]))/DET;
  END
 ELSE
  BEGIN
   R[1]:=0.0;R[2]:=0.0;
   outtextxy(100,40,'EL DETERMINANTE ES CERO EN SOLVL2;R SET TO ZERO ');
  END;
END;

PROCEDURE COMPVAR;    {CALCULA COVARIANZAS}
BEGIN
 YSA:=COVAR(YSA,YS,YS,XN);
 YV[1]:=COVAR(YV[1],YS,XS[1],XN);
 YV[2]:=COVAR(YV[2],YS,XS[2],XN);
 XM[1,1]:=COVAR(XM[1,1],XS[1],XS[1],XN);
 XM[2,2]:=COVAR(XM[2,2],XS[2],XS[2],XN);
 XM[1,2]:=COVAR(XM[1,2],XS[1],XS[2],XN);
 XM[2,1]:=XM[1,2];
END;

PROCEDURE REGRESIONL(Y,X1,X2:DATOSVECT); {AJUSTE DE MINIMOS CUADRADOS DE Y
                                          CON X1 Y X2}
BEGIN
 XN:=NY;YS:=0.0;YSA:=0.0;
                            { HACE EL SORT DE LA SUMA DE LOS CUADRADOS}
 FOR KA:=1 TO 2 DO
  BEGIN
   XS[KA]:=0.0;YV[KA]:=0.0;
   FOR KB:=1 TO 2 DO
    XM[KA,KB]:=0.0;
  END;
  FOR KC:=1 TO NY DO
   BEGIN
    YS:=YS+Y[KC];YSA:=YSA+SQR(Y[KC]);
    XS[1]:=XS[1]+X1[KC];XS[2]:=XS[2]+X2[KC];
    XM[1,1]:=XM[1,1]+SQR(X1[KC]);
    XM[2,2]:=XM[2,2]+SQR(X2[KC]);
    XM[1,2]:=XM[1,2]+X1[KC]*X2[KC];
```

```
   YV[1]:=YV[1]+Y[KC]*X1[KC];
   YV[2]:=YV[2]+Y[KC]*X2[KC];
  END;
 COMPVAR;
 SOLVL2(B,XM,YV);
 G:=(YS-B[1]*XS[1]-B[2]*XS[2])/XN;
               {CALCULO DE R-CUADRADA}
 SE:=0.0; ABER:=0.0;
 FOR KC:=1 TO NY DO
  BEGIN
   PR:=Y[KC]-B[1]*X1[KC]-B[2]*X2[KC]-G;
   IF Y[KC]<>0.0 THEN ABER:=ABER+ABS(PR/Y[KC]);
   SE:=SE+SQR(PR);
  END;
 ABER:=ABER/XN;RR:=1.0-(SE/(XN*YSA));
 DET:=XN*(XM[1,1]*XM[2,2])-(XM[1,2]*XM[2,1]);
 SB[1]:=SQRT((SE/(XN-2.0))*XM[2,2]/DET);
 SB[2]:=SQRT((SE/(XN-2.0))*XM[1,1]/DET);
END;

PROCEDURE PREDICE(VAR YP:DATOSVECT;X1,X2:DATOSVECT;B1,B2,A:REAL);
                         { PREDICE YP DESDE X1*B1+X2*B2+A }
BEGIN
 YP[0]:=X2[1];
 FOR KA:=1 TO NY DO YP[KA]:=B1*X1[KA]+B2*X2[KA]+A;
END;

PROCEDURE CHECONY;   {CHECA LIMITES SOBRE NY --USADO EN LEEDATOS}
BEGIN
 IF NY>MAXNY THEN
  BEGIN
   outtextxy(100,10,' ¡¡¡¡ EL PROGRAMA SOLO PUEDE MANEJAR '+numastr2(MAXNY)+' PUNTOS !!!');
   NY:=MAXNY;
  END;
 IF NY<=0 THEN
  BEGIN
   outtextxy(100,20,' NEGATIVO!!!--PRUEBA OTRA VEZ...<RETURN>');
   gotoxy(10,20);READLN(S);EXIT;
  END;
END;

PROCEDURE LEEDATOS;   {LEE LOS DATOS EN EL VECTOR}
VAR
 RESP:STRING[3];

BEGIN
 CLEARDEVICE;
 marco;
 outtextxy(20,20,'LEE DATOS DESDE UN ARCHIVO? SI/NO -->');
 GOTOXY(45,2);readln;READLN(RESP);
 IF (RESP='SI') OR (RESP='si') THEN
    BEGIN
      outtextxy(20,60,'DAR EL NOMBRE DEL ARCHIVO .dat -->');
      gotoxy(45,5);READLN(S);
      S:=CONCAT(S,'.dat');
      assign(INF,s);
      RESET(INF);
      READLN(INF,NATNAM[1]);READLN(INF,NATNAM[2]);
      READLN(INF,NY);
      CHECONY;
```

```
     FOR KA:=1 TO NY DO
     READLN(INF,G,X1[KA],X2[KA]);
    END
ELSE
 BEGIN
  CLEARDEVICE;
  marco;
  FOR KA:=1 TO 2 DO
   BEGIN
    outtextxy(20,10+KA*10,'DAR EL NOMBRE DEL COMPETIDOR  -->');
    gotoxy(38,1+KA);READLN(NATNAM[KA]);
   END;
  outtextxy(20,48,'DAR EL NUMERO DE VALORES -->');
  GOTOXY(38,4);READ(NY);
  CHECONY;
  outtextxy(20,65,'DAR 2 VALORES PARA CADA AÑO,SEPARADOS POR UN BLANCO');
  FOR KA:=1 TO NY DO
   BEGIN
    OUTTEXTXY(20,68+KA*15,'LOS DATOS PARA EL AÑO '+NUMASTR2(KA));
    GOTOXY(38,5+KA);READLN(X1[KA],X2[KA]);
   END;
 END;
                               { MOVER LOS DATOS A Y1,Y2}
 FOR KA:=1 TO NY-1 DO
  BEGIN
   Y1[KA]:=X1[KA+1]; Y2[KA]:=X2[KA+1];
  END;
 NY:=NY-1; X0:=X1[1]; Y0:=X2[1]; X1[0]:=X0; X2[0]:=Y0;
END;


PROCEDURE ESCEIGEN;   {CALCULA Y ESCRIBE LOS EIGENVALORES }
VAR
 R,DISC,EA,EB:REAL;
 STABL:BOOLEAN;

BEGIN
 GOTOXY(0,17);
 DISC:=(SQR(RA-RB)+4.0*RM*RK)/4.0;
 R:=(RA+RB)/(-2.0);
 IF DISC<0.0 THEN
  BEGIN
   DISC:=SQRT(-DISC);
   outtextxy(40,250,'EIGENVALORES COMPLEJOS: PARTE REAL='+numastr(R));
   outtextxy(40,260,'                        PARTE COMPLEJA='+numastr(DISC));
   outtextxy(100,270,'EL MODELO ESTA OSCILANDO');
  END
 ELSE
  BEGIN
   DISC:=SQRT(DISC);
   EA:=R+DISC;
   EB:=R-DISC;
   STABL:=((ABS(EA)<1.0) AND (ABS(EB)<1.0));
   outtextxy(40,250,' EIGENVALORES :   '+numastr(EA));
   outtextxy(183,260,numastr(EB));

   {*****TRATAR DE CAMBIAR EL TAMAÑO DE LAS LETRAS****}
   outtextxy(200,280,' EL MODELO ES ');
   IF STABL THEN outtextxy(250,290,'  ESTABLE')
    ELSE outtextxy(250,290,'  INESTABLE');
```

```
   END;
  END;

PROCEDURE ESCRESUL(S:STRING;y:integer);   {ESCRIBE LOS RESULTADOS DE MINIMOS CUADRADOS}
BEGIN
 outtextxy(20,30+y,'                    ECUACION PARA :    '+S);
 outtextxy(20,40+y,'                     AMENAZA          ECONOMIA         OFENSA');
 outtextxy(10,50+y,'COEFICIENTE    :'+numastr(B[1])+' '+numastr(B[2])+' '+numastr(G));
 outtextxy(10,60+y,'ERROR STANDARD:'+numastr(SB[1])+' '+numastr(SB[2]));
 outtextxy(10,70+y,'R-CUADRADA:     '+numastr(RR));
 outtextxy(10,80+y,'MEDIA ABSOLUTA, PORCENTAJE DE ERROR: '+numastr(ABER));
END;

PROCEDURE ESTIMAR;  { PRINCIPAL PARA ESTIMAR}
var
 y:integer;

BEGIN
 LEEDATOS;
 CLEARDEVICE;
 MARCO;
 outtextxy(20,10,'          ***   COEFICIENTES ESTIMADOS   ***');
 REGRESIONL(Y1,X2,X1);
 RA:=-B[2]; RK:=B[1]; RG:=G;ESCRESUL(NATNAM[1],0);
 REGRESIONL(Y2,X1,X2); RB:=-B[2]; RM:=B[1]; RH:=G;ESCRESUL(NATNAM[2],100);
 ESCEIGEN;
 PREDICE(YP1,X1,X2,RA,RK,RG); PREDICE(YP2,X1,X2,RM,RB,RH);
 outtextxy(100,350,'<RETURN> PARA MENU PRINCIPAL ');gotoxy(10,23);READLN(S);
END;

{   ***** RUTINAS DE DIBUJO *****   }

PROCEDURE ESCALA(YA,YB:DATOSVECT);  {ENCUENTRE LA ESCALA DE FACTORES
                                           PARA DIBUJAR}
VAR
 MAX,MIN:REAL;

BEGIN
 MIN:=YA[1];MAX:=YA[1];
 FOR KA:=0 TO NY DO
  BEGIN
   IF YA[KA]<MIN THEN MIN:=YA[KA]; IF YB[KA]<MIN THEN MIN:=YB[KA];
   IF YA[KA]>MAX THEN MAX:=YA[KA]; IF YB[KA]>MAX THEN MAX:=YB[KA];
  END;
 VSCL:=VDIM/(MAX-MIN+1);
 VMIN:=TRUNC(MIN-1.0);
 HSCL:=HDIM/(NY+1); HMIN:=0;
END;

{FUNCIONES PARA CALCULAR LAS COORDENADAS DE PANTALLA PARA LA ESCALA ACTUAL}
FUNCTION YCORD(Y:REAL):INTEGER;
BEGIN
 YCORD:=ROUND((Y-VMIN)*VSCL)+VLO;
END;

FUNCTION XCORD(X:INTEGER):INTEGER;
 BEGIN
```

```
   XCORD:=ROUND(((X-HMIN)*HSCL))+HLO;
  END;


PROCEDURE DIBUJAEJES(NAT,LA,LB:STRING);  {EJE Y}
 BEGIN
  MARCO;
  moveto(HLO,VLO);SETCOLOR(3);LINETO(HLO,VHI);
  KA:=VLO+20;
  REPEAT
   LINETO(HLO,KA);
   KA:=KA+20;
  UNTIL KA>VHI;

  {*** EJE X ***}
  KB:=YCORD(0.0);
  IF (KB>VHI) OR (KB<VLO) THEN KB:=VLO;
  SETCOLOR(3); LINETO(HLO,KB); LINETO(HHI,KB);
  FOR KA:=0 TO NY DO
   BEGIN
    LINETO(XCORD(KA),KB);
    SETCOLOR(3);
   END;
  SETCOLOR(3); moveto(0,YCORD(0));

 {** IMPRIME LOS ENCABEZADOS PARA LAS GRAFICAS **}
 setcolor(2); S:=CONCAT('GRAFICA PARA ',NAT,', *=',LA,', +=',LB);outtextxy(50,5,S);
 END;

 PROCEDURE PLOTCAR(I,x:INTEGER);    {DIBUJA CARACTER I CENTRADO EN LA POS.ACT.DE LA TORT.}
 VAR
  XP,YP:INTEGER;
 BEGIN
  XP:=getx;YP:=gety;SETCOLOR(x);
  SETCOLOR(x);outtext(CHR(I));SETCOLOR(x);
  LINETO(XP,YP);SETCOLOR(x);
 END;

 PROCEDURE PLOTDAT(Y:DATOSVECT;IC:INTEGER);
 {DIBUJA EL VECTOR DE DATOS Y CON LA ESCALA ACTUAL, ETIQUETANDO CON CHR(I)}
 BEGIN
  SETCOLOR(5);moveto(XCORD(0),YCORD(Y[0]));PLOTCAR(IC,11);
{   SETCOLOR(3);}PLOTCAR(14,7);
  FOR KA:=1 TO NY DO
   BEGIN
   LINETO(XCORD(KA),YCORD(Y[KA]));PLOTCAR(IC,10);SETCOLOR(3);
   END;
 END;


 PROCEDURE SIMULAR;  {GENERA VALORES SIMULADOS USANDO LOS COEF. ACTUALES}
  VAR
   TR:BOOLEAN;

  BEGIN
   TR:=FALSE;
   YS1[0]:=X0; YS2[0]:=Y0;
   FOR KA:=1 TO NY DO
    BEGIN
       YS1[KA]:=ROUND(RK*YS2[KA-1]-RA*YS1[KA-1] + RG);
```

```
    YS2[KA]:=ROUND(RM*YS1[KA-1]-RB*YS2[KA-1]+RH);
    IF ABS(YS1[KA])>MAXVAL THEN BEGIN TR:=TRUE; YS1[KA]:=MAXVAL; END;
    IF ABS(YS2[KA])>MAXVAL THEN BEGIN TR:=TRUE; YS2[KA]:=MAXVAL; END;
   END;
  IF TR THEN
   BEGIN
    outtextxy(80,20,' NOTICIA -- VALORES TRUNCADOS EN SIMULAR ');
   END;
 END;

PROCEDURE DRAWPLOT(YA,YB:DATOSVECT;LM,LA,LB:STRING);
{ DIBUJA UN PLANO DE VECTORES YA Y YB, DESIGNADOS CON LM,LA,LB}
BEGIN
 IF AUTOESCALA THEN ESCALA(YA,YB);
 DIBUJAEJES(LM,LA,LB);
 PLOTDAT(YA,42);PLOTDAT(YB,43);
 READln(CH);
END;


PROCEDURE PLOTS;     {PROCEDIM. PRINCIPAL DE PLOT}
BEGIN
 repeat
  CLEARDEVICE;
  MARCO;
  OUTTEXTXY(100,30,'        *** MENU DE GRAFICAS ***');
  OUTTEXTXY(90,80,'     DAR LA OPCION DE DIBUJO -->');
  OUTTEXTXY(90,130,'      1. DATOS OBSERVADOS');
  OUTTEXTXY(90,180,'      2. OBSERVADOS Y PREDICHOS PARA '+NATNAM[1]);
  OUTTEXTXY(90,230,'      3. OBSERVADOS Y PREDICHOS PARA '+NATNAM[2]);
  OUTTEXTXY(90,280,'      4. DATOS SIMULADOS');
  OUTTEXTXY(90,330,'      5. SALIR');
  OUTTEXTXY(90,380,'PARA SALIR DE LA GRAFICA PRESIONAR RETURN ');
  GOTOXY(47,6);READ(CH);
  CASE CH OF
   '1':begin
       CLEARDEVICE;
       MARCO;
       DRAWPLOT(Y1,Y2,' DATOS OBSERVADOS',NATNAM[1],NATNAM[2]);
      end;
   '2':BEGIN
       CLEARDEVICE;
       MARCO;
       PREDICE(YP1,X1,X2,-RA,RK,RG);
       DRAWPLOT(Y1,YP1,NATNAM[1],'DATOS OBSERVADOS','DATOS PREDICHOS');
      END;
   '3':BEGIN
       CLEARDEVICE;
       MARCO;
       PREDICE(YP2,X1,X2,RM,-RB,RH);
       DRAWPLOT(Y2,YP2,NATNAM[2],'DATOS OBSERVADOS','DATOS PREDICHOS');
       END;
   '4':BEGIN
       CLEARDEVICE;
       MARCO;
       SIMULAR;
       DRAWPLOT(YS1,YS2,'DATOS SIMULADOS',NATNAM[1],NATNAM[2]);
      END;
  END;
```

```
  until (ch='5') or (ch='S') or (ch='s');
 END;

PROCEDURE LEEPARAM(VAR R:REAL;L:CHAR);
 {MUEVE EL CURSOR A (X,Y), UN NUMERO DE BLANCOS, LEE EL NUEVO VALOR}
 BEGIN
  OUTTEXTXY(100,340,'ESCRIBIR NUEVO VALOR PARA '+L);
  GOTOXY(40,22);READLN(R);
 END;


PROCEDURE CAMBIAPARAM;
  { CAMBIA LOS VALORES DE LOS PARAMETROS }
 BEGIN
  REPEAT
   outtextxy(100,320,'DAR LA LETRA DEL PARAMETRO A CAMBIAR: (Q PARA SALIR) ');
   gotoxy(66,21);READ(CH);
  CASE CH OF
    'K':BEGIN
         outtextxy(100,340,'DAR EL VALOR DE K: ');
         gotoxy(35,23);READln(RK);
        END;
    'A':LEEPARAM(RA,'A');'B':LEEPARAM(RB,'B');
    'G':LEEPARAM(RG,'G');'H':LEEPARAM(RH,'H');
    'X':LEEPARAM(X0,'X');'Y':LEEPARAM(Y0,'Y');
    'N':BEGIN
         REPEAT LEEPARAM(RR,'N');
          IF TRUNC(RR)>MAXNY THEN
           BEGIN
            OUTTEXTXY(80,320,'N DEBE SER <='+NUMASTR(MAXNY));END;
          IF RR<0.0 THEN OUTTEXTXY(80,320,'N DEBE SER >0');
         UNTIL (TRUNC(RR)<=MAXNY) AND (RR>0.0);
         NY:=TRUNC(RR);
        END;
    'R':BEGIN LEEPARAM(RR,'R');HSCL:=HDIM*RR/(NY+1);END;
    'V':BEGIN LEEPARAM(RR,'V');VSCL:=10.0/RR;END;
    'L':BEGIN LEEPARAM(RR,'L');VMIN:=TRUNC(RR+1.0);END;
    'S':BEGIN CH:=' ';
         WHILE (CH<>'T') AND (CH<>'F') DO
          BEGIN
           OUTTEXTXY(100,330,'¿ LA ESCALA ES AUTOMATICA T)RUE/F)ALSE?');
           GOTOXY(10,24);READ(CH);
          END;
         IF CH='F' THEN WRITE('FALSE') ELSE WRITE('TRUE');
         AUTOESCALA:=(CH='T');
        END;
   END;  {CASE}
   IF CH IN ['K','A','M','B'] THEN
    BEGIN
     CLEARDEVICE;
     MARCO;
     OUTTEXTXY(180,150,'LOS NUEVOS EIGENVALORES SON:');
     ESCEIGEN;
    END;
 UNTIL (CH='Q') or (ch='q');
 CLEARDEVICE;MARCO;
 MONITOR;
END;
```

```
PROCEDURE ESCVAL;  {ESCRIBE LOS VALORES ACTUALES DE LOS PARAMETROS}
VAR
 CA:CHAR;

BEGIN
 CLEARDEVICE;
 marco;
 OUTTEXTXY(120,10,'               CAMBIO DE PARAMETROS');
 outtextxy(120,30,'  MODELO DE COMPETENCIA DE ARMAS DE RICHARDSON');
 outtextxy(150,50,'  X(T+1) = KY(Y) - AX(Y) + G');
 outtextxy(150,80,'  Y(Y+1) = MX(T) - BY(Y) + H');
 outtextxy(100,100,'K  =  '+numastr(RK)+' M  =  '+numastr(RM));
 outtextxy(100,110,'A  =  '+numastr(RA)+' B  =  '+numastr(RB));
 outtextxy(100,120,'G  =  '+numastr(RG)+' H  =  '+numastr(RH));
 outtextxy(100,130,'X(0) = '+numastr(X0));
 outtextxy(100,140,'Y(0) = '+numastr(Y0));
 outtextxy(100,150,'NUMERO DE AÑOS = '+numastr(NY)); {11 ANIOS}
 outtextxy(100,160,'ESCALA HORIZ.: '+numastr(((NY+1)*HSCL/HDIM)));
 outtextxy(100,170,'ESCALA VERTIC.: '+numastr((10.0/VSCL)));
 outtextxy(100,180,'VALOR MAS BAJO: '+numastr(VMIN));
 IF AUTOESCALA THEN S:='TRUE' ELSE S:='FALSE';
 outtextxy(100,190,'ESCALA AUTOMATICA:'+S);  {16}
 ESCEIGEN;
END;


                    { PROCEDIMIENTOS PRINCIPALES }

PROCEDURE MONITOR;
BEGIN
 CLEARDEVICE;
 marco;
 outtextxy(160,30,'     PROGRAMA PARA DEMOSTRAR');
 outtextxy(100,45,'EL MODELO DE COMPETENCIA DE ARMAS DE RICHARDSON');
 outtextxy(160,120,'        DAR LA OPCION -->');
 outtextxy(160,160,'         E)STIMAR ');
 outtextxy(160,200,'         C)AMBIAR VALORES DE LOS PARAMETROS');
 outtextxy(160,240,'         G)RAFICAR');
 outtextxy(160,280,'         Q)SALIR ');
 gotoxy(47,8);
 READ(CH);
 CASE CH OF
  'E','e':ESTIMAR;
  'C','c':BEGIN
           ESCVAL;
           CAMBIAPARAM;
          END;
  'G','g':PLOTS;
  'Q','q':halt(1);
 END; {CASE}
END;


PROCEDURE INICIA;  { PROGRAMA PARA ORDENAR LOS PARAMETROS }
BEGIN
 HLO:=85; HHI:=475; VLO:=445; VHI:=35;
 HDIM:=HHI-HLO; VDIM:=VHI-VLO;
 MAXVAL:=1000;
 RK:=0.2; RA:=0.4; RG:=1.0; RM:=0.3; RB:=0.5; RH:=2.0;
```

```
  X0:=10.0; Y0:=20.0;
  IF MAXNY>30 THEN NY:=30 ELSE NY:= MAXNY;
  NATNAM[1]:=' X '; NATNAM[2]:=' Y';
  AUTOESCALA:=TRUE;
  HSCL:=0.1; VSCL:=0.05; VMIN:=0;
  SIMULAR;
  FOR KA:=0 TO NY DO
   BEGIN
    YP1[KA]:=YS1[KA];YP2[KA]:=YS2[KA];
    Y1[KA]:=YS1[KA];Y2[KA]:=YS2[KA];
    X1[KA]:=YS1[KA];X2[KA]:=YS2[KA];
   END;
 END;

 { PROGRAMA PRINCIPAL }
 BEGIN
  INICIALIZA;
  INICIA;
  CLEARDEVICE;
  MARCO;
  REPEAT
   CLEARDEVICE;
   MARCO;
   MONITOR
  UNTIL FALSE;
  CLEARDEVICE;
END.
```

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

Después de haber realizado el presente trabajo, se demuestra que la importancia de la aplicación de los Modelos de Simulación en la vida diaria es innegable, ya que en un modelo de simulación correctamente establecido y analizado, es menor el riesgo de ignorar o excluir alguna variable que sea representativa en el comportamiento del modelo real. Considero que ésta capacidad de análisis, es la que el Lic. en Matemáticas Aplicadas y Computación adquiere y se forma durante la duración de la carrera, la cuál cuenta con una magnífica herramienta como lo es la computación, que a diario nos brinda la posibilidad de mejorar los procesos y programas creados por nosotros.

Dadas las bases matemáticas en las que se ha cimentado el Modelo de Richardson, dicho modelo se ha presentado en este trabajo como una fuerte herramienta que puede servir como plataforma para predecir y prevenir conflictos de importancia trascendental en las áreas económica, política, deportiva y comercial.

La aplicación del Modelo de Richardson en combates que no son necesariamente bélicos, muestra la versatilidad que la mayoría de los modelos matemáticos nos brindan al encauzarlos hacia situaciones sociales en donde es difícil cuantificar las variables cualitativas o de comportamiento que siempre están presentes en los modelos sociales. Es aquí, en donde se podrá evaluar el trabajo realizado por el profesionista en Matemáticas Aplicadas y Computación.

El Modelo de Richardson permite mediante la descripción matemática, experimentar con situaciones y parámetros que en la realidad representan cantidades importantes de gente, dinero o relaciones con las cuáles resultaría un gran riesgo involucrarse debido a la sensibilidad con la que pueden variar.

Debido a que el porcentaje de error en la predicción del Modelo de Richardson ha sido mínimo en los ejemplos aquí expuestos, se puede concluir que dicho modelo genera predicciones lo suficientemente confiables en todas las áreas de aplicación.

APENDICE

APENDICE A. SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN EN LOS SISTEMAS DINAMICOS CON REALIMENTACION NEGATIVA.

Tenemos que la ecuación que rige el comportamiento de un sistema dinámico de primer orden con realimentación negativa tiene la forma:

$$F(t)=FT*[OB-N(t)]$$

para dar una solución analítica, la ecuación se puede escribir como

$$\frac{dN}{dt}=F(t)$$
$$F(t)*(OB-N)$$

La solución teniendo a OB y FT como constantes de entrada sería:

$$\frac{dN}{dt}-FT[OB-N]=0$$

$$e^{\int -FTdt}\frac{dN}{dt}-FTe^{\int -FTdt}[OB-N]=0$$
$$\frac{d}{dt}\left[e^{\int -FTdt}[OB-N]\right]=0$$
$$e^{-FTt}[OB-N]=c$$
$$y=ce^{-FTt}$$

Si $N(t)=ce^{-FTt}$ y $t=0$ entonces $N_0=ce^0=c$, por lo tanto

$$N(t)=N_0e^{-FTt}$$

y dado que $N(t_0)=OB$ entonces

$$N(t+dt) = N(t) + FT[OB - N(t)]dt$$
$$N(t) = OB + e^{-FTt}[N(t) - OB]$$

DESCRIPCION DE VARIABLES.

1/a	Tiempo aparente de alcance
1/T	Tasa de crecimiento
A_{ij}	Valores de una matriz
a, b	Coeficientes de defensa o amenaza
dt	Incremento de tiempo
dX	Diferencial de X
dx/dt	Producto de la variación de x sobre la variación de t.
dy/dt	Producto de la variación de y sobre la variación de t.
F(t)	Variable de flujo en el tiempo t
FE	Flujo de entrada
FI[XM(t)]	Valor intermedio de las variables de salida
FN	Flujo máximo
FS	Flujo de salida
FT	Fracción por unidad de tiempo
G	Función de X y T
g, h	Coeficientes de resentimiento u ofensa
K1, K2	Constantes
M	Multiplicador del flujo normal
m, n	Coeficientes de gasto económico
N	Número de elementos
N(t)	Variable de la evolución del nivel en el tiempo t

NI	Nivel o punto de inflexión
OB	Objetivo
P	Parámetros del Sistema
t	Tiempo actual
TD	Tiempo de duplicamiento
TN	Flujo normal
U(t)	Variable de entrada
Vi(t)	Variable auxiliar o nivel en el tiempo t
VM	Vida media
x, y	Gastos de armamento de 2 países
X(t)	Variable de estado en el tiempo T
X(t+dt)	Variable de estado futuro
YI(t)	Variable de salida

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

Aracil Santoja Javier,
"Introducción a la Dinámica de Sistemas",
Barcelona, España,
Alianza Editorial, 1976.

Beltrami Edward J.,
"Mathematics for Dynamic Modelling"
New York, E.U.A.,
Prentice Hall, 1978

Gordon Geoffrey,
"System Simulation",
New York, E.U.A.,
Prentice Hall, 1980

Guetzkow H.,
"Simulation in Social Science",
New York, E.U.A.,
Prentice Hall, 1962

Korn Granino Arthur,
"Digital Continuous System Simulation",
Toronto, E.U.A.,
Ed. Prentice Hall, 1978

Mcleod J.,

"Simulation, Dynamic Modelling of Systems and Ideas with Computers",

New York, E.U.A.,

McGraw-Hill, 1968.

Olnick Michel,

"An Introduction to Mathematical Models in The Social and Life Sciences",

Ed. Addison Wesley 1978.

Payne James Andrew,

"Introduction to Simulation".

Rapoport Anatol,

"Jeux, Débats et Conflits",

University of Michigan Press, E:U:A:, 1974.

Richardson Lewis F.,

"Statistics of Deadly Quarrels",

Quadrangle Books, 1973

Richardson Lewis F.,

"Arms and Insecurity",

Quadrangle Books, 1960.

Shannon Robert E.,
"Simulación de Sistemas",
México, D.F.,
Ed. Trillas., 1988.

Smith John M.
"Mathematical Modelling and Digital Simulation",
Cambridge University Press., E.U.A., 1985

Zinnes Dina A.,
"Contemporany Research in International Relations",
Free Press, 1976.

TESIS

Rivera Porto Fco. Eduardo,
"Simulación y Análisis Interactivos de los Sistemas Dinámicos en las Ciencias Sociales"
Facultad de Ingeniería, UNAM, 1977.

Vargas Aguayo Alberto,
"Eficiencia de las Técnicas de Simulación en la Elaboración de Modelos"
Facultad de Ingeniería, UNAM, 1971.