UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE: CIENCIAS

TITULO: SISTEMAS DE RESERVA MODIFICADA EN EL SEGURO DE VIDA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

SANDOVAL GARCIA, OSCAR

MEXICO D.F. 1994

CIUDAD UNIVERSITARIA

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios
Profesionales
Exp. Núm. 55

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. JOAQUIN CIFUENTES BLANCO
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Universidad Nacional Autónoma de México
P r e s e n t e .

Por medio de la presente, nos permitimos informar a Usted, que habiendo revisado el trabajo de tesis que realiz ó el pasante Oscar Sandoval García

con el título: SISTEMAS DE RESERVA MODIFICADA EN EL SEGURO DE VIDA

consideramos que reune los méritos necesarios para obtener el título de - - - Actuario.

Comunicamos lo anterior para los fines a que haya lugar.

A t e n t a m e n t e .
México, D.F., a

1.- ACT. Y MAT. JORGE MANUEL OCHOA UGALDE
grado Nombre(s) Apellidos completos firma

2.- ACT. PEDRO MEJIA TAPIA
grado Nombre(s) Apellidos completos firma

3.- ACT. GUILLERMO CALDERON FABELA
grado Nombre(s) Apellidos completos firma

4.- Sup. ACT. MARCELO DE JESUS KROEPFLY SAURY
grado Nombre(s) Apellidos completos firma

5.- Sup. ACT. ROBERTO PACHECO CUTIÑO
grado Nombre(s) Apellidos completos firma

NOTA: El interesado deberá ponerse de acuerdo con el jurado para fijar fecha (día y hora) del examen, para evitar problemas de asistencia. ES IMPORTANTE LA PUNTUALIDAD.

A mis padres............

RAFAEL SANDOVAL CASTRO

Y

LEONORA GARCIA DE SANDOVAL

Con profundo amor, admiración, respeto y agradecimiento.....

GRACIAS ESPECIALES SON DADAS AL:

ACT. Y MAT. JORGE MANUEL OCHOA UGALDE
Director de esta tesis.

Por sus valiosos y detallados comentarios expresados a lo largo de la conducción de este trabajo, los cuales estuvieron siempre dirigidos a enriquecer el contenido del mismo, a fin de que se lograse proporcionar a los estudiantes en general de las ciencias actuariales, y en particular a los alumnos de la Carrera de Actuaría de la Facultad de Ciencias de la UNAM, un material que les permita conocer con detalle uno de los aspectos más importantes de la técnica aplicada a los seguros de vida.

AGRADEZCO AL:

ACT. PEDRO MEJIA TAPIA
ACT. GUILLERMO CALDERON FABELA
ACT. MARCELO DE JESUS KROEPFLY SAURY
ACT. ROBERTO PACHECO CUTIÑO

Por haber aceptado ser mis sinodales y por su valiosa ayuda brindada durante la realización y revisión del presente trabajo.

TAMBIEN AGRADEZCO AL:

ACT. RAFAEL NAVA ACOSTA

Por su apoyo brindado en la revisión del contenido del trabajo, por sus valiosas observaciones y por su tiempo dedicado a la investigación para demostrar como pueden manipularse y transformarse las fórmulas actuariales, a fin de conseguir nuevos métodos útiles de cálculo.

(El piensa que esta tesis es un mejor material que conjunta todos los conocimientos básicos e indispensables, que son necesarios dominar para entender los sistemas de reservas de los seguros de vida. Además, asegura que este trabajo podría convertirse en un buen material de consulta.)

TAMBIEN ESTOY AGRADECIDO CON LOS LICENCIADOS **BASILIO GONZALEZ NUÑEZ** y **MARIO MONTERO HIDALGO**, quienes me bindaron su apoyo y comprensión, y me han estimulado para la conclusión de este trabajo.

INDICE

INTRODUCCION

Sin duda, el campo de los seguros es de una importancia máxima para el buen desarrollo de las economías de los países y de quienes participan en su sano crecimiento. Su estudio tiene que ver con todos los aspectos sociales, económicos y hasta políticos de las naciones. En particular el seguro de vida, con los avances alcanzados en muchos años, no nada más nos ha permitido aceptar que, una realidad insoslayable, la pérdida de una vida, trae consigo además de una invaluable afectación moral, pérdidas económicas que en muchas ocasiones limitan la existencia de otras vidas, si no que también nos ha provisto de los medios para eliminar las afectaciones económicas sufridas por quienes pudiesen quedar desamparados.

El estudio de los riesgos es el campo del actuario, para dominarlo hace uso de un buen cúmulo de técnicas y conocimientos del comportamiento humano.

Matemáticas avanzadas, estudios socio-demográficos, actividades económicas a las que se dedican las personas, enfermedades que padecen las gentes, leyes y reglamentos que regulan las actividades sociales y económicas de los que vivimos en sociedad, son algunos de los aspectos que se tratan a lo largo de su formación.

La carrera de Actuaría que se imparte en la Universidad Nacional Autónoma de México, tiene un alto nivel académico con un sólido contenido técnico, sin descuidar los aspectos sociales que nos obligan, a nosotros sus alumnos, a continuar nuestras vidas con el muy satisfactorio compromiso de servir profesionalmente a nuestro país y a nuestros semejantes. Para mi es un gran orgullo el haber sido estudiante de tan importante Universidad, y el poder presentar esta tesis que me da la oportunidad de contribuir con una aportación personal, con mi grano de arena, al contínuo proceso de formación de personas en el ramo de los seguros de vida.

Durante el tiempo que he estado en contacto con diferentes instituciones de seguros, he podido darme cuenta y a la vez observar que, dentro de las principales necesidades que estas instituciones tienen en relación al desarrollo técnico de sus productos, es la dificultad de contar con profesionales que puedan tener la capacidad de crear y transformar las fórmulas actuariales que se utilizan el cálculo de las primas y reservas de dichos productos, lo que implica dominar con precisión la teoría del seguro de vida.

Lo anterior me motivó a desarrollar un trabajo que contemplara de manera ordenada, un conjunto integral de conocimientos técnicos y prácticos sobre los diferentes métodos que se utilizan para calcular las reservas de los planes de seguro de vida. Y que, por otra parte, fuera una herramienta de consulta que sirvierá a los nuevos egresados de la carrera de actuaría demandantes de empleo, y a los técnicos que ya trabajan en las instituciones de seguros.

Es por tanto, el objeto de esta tesis que el alumno que estudia las matérias de: Introducción al Seguro de Vida y Cálculo Actuarial I, tenga un material complementario que le permita llegar a una mejor comprensión de los diferentes elementos técnicos que conforman el seguro de vida y pueda, al mismo tiempo, tener la capacidad de crear y transformar las fórmulas actuariales que a éstos atañen.

El título de la tesis "Sistemas de Reserva Modificada en el Seguro de Vida", se debe a que es éste uno de los temas donde el estudiante tiene un mayor grado de confusión y para el cual existe una reducida bibliográfia que presenta un considerable grado de dificultad al ser estudiada, lo que conlleva a una perdida de interés por uno de los aspectos que revisten gran importancia en el seguro de vida.

Como todos sabemos, las reservas de una compañía de seguros juegan un papel importante en la economía de la misma, pues son éstas las que le permiten hacer frente a su obligación principal, es decir, el pago de los siniestros. Sin embargo, existen otros compromisos que se consideran de importancia, tal es el caso del costo de los gastos de administración (costo del examen médico, la inspección del riesgo y el costo de preparar y emitir una póliza) y el costo del pago de las comisiones que estas compañías hacen a sus agentes por la adquisición de nuevos negocios, y que en los primeros años son gastos que representan un alto porcentaje de la prima pagada por el asegurado. El gasto que por estos conceptos realizan las compañías de seguros, es alto en los primeros años y bajo en los últimos y, aunque éstos son considerados en el cálculo de la prima de tarifa, ésta supone que tales gastos de deben amortizar en forma constante durante todo el período de pago de primas del seguro sin tomar en cuenta la situación que realmente se presenta, esto es, que la mayor parte de los gastos se efectuan justo al momento de contratar el seguro, lo que tiene como consecuencia que las empresas pierdan liquidez.

Como solución a la problemática anterior, los gobiernos de diferentes países han dado ciertas facilidades que permiten a las empresas aseguradoras un mayor desahogo económico. Surgiendo así los sistemas modificados de reserva que tienen como fin permitir que durante el primer año se utilice una porción de la prima neta para cubrir los gastos excedentes iniciales, y reponer la parte así utilizada, en los años posteriores (lo cual se logra recargando las primas netas que faltan por pagar). Cabe señalar que esto no implica que el asegurado tenga que pagar primas más altas, ya que esta operación queda a cargo de las compañías de seguros y es una forma de administración interna que consiste en distribuir de manera conveniente el importe de las primas netas que se espera pagarán los asegurados, mediante primas de tarifa constantes durante el plazo del pago de primas del seguro.

Estos sistemas modificados de reserva han permitido a las compañías no tener que financiar a muy largo plazo los planes de seguros o, mejor dicho, financiar cantidades menores, lo cual también ha evitado incrementar el costo para el asegurado al no obligarlo a cubrir intereses sobre los gastos todavía no amortizados.

Se han ideado varios sistemas modificados de reserva que permiten hacer frente a tales condiciones. Y todos ellos se basan en el hecho de que los recargos son insuficientes para pagar los gastos de los primeros años de la poliza y que son más que suficientes en los años posteriores. Todos permiten el uso de alguna porción de las primas netas para pagar los gastos excedentes de los primeros años. Los sistemas más importantes que se utilizan en México son: el "Sistema Año Temporal Preliminar Completo" y el "Sistema Año Temporal Preliminar Modificado" y su completa comprensión forma parte del objeto del presente trabajo.

Esta tesis se planeó de forma tal que, en los capítulos 1 al 3, se dan la herramientas necesarias para que el lector adquiera los conocimientos que le permitan tener una mejor comprensión del Capítulo 3 relativo a los "Metodos Tradicionales de Cálculo de las Reservas Matemáticas", para así tener los elementos necesarios que se utilizan en el Capítulo 4, "Análisis de los Sistemas Modificados de Reserva". En el Capítulo 5, "Aplicación de los Sistemas Modificados de Reserva a los Seguros de Vida en México", se efectua una aplicación práctica de la metodología a los seguros de vida más utilizados en el mercado de seguros de México, Seguro Ordinario de Vida, Seguro Temporal y Seguro Dotal.

Los capítulos de esta tesis fueron desarrollados para que el lector pueda adquirir una comprensión completa y autosuficiente de lo que son los sistemas modificados reserva; completa, en razón de que se contemplan la mayoría de los métodos que se aplican en nuestro país. Y, autosuficiente, porque para cualquier persona que necesite conocer la manera como se calculan las reservas de los seguros de vida mediante los sistemas modificados de reserva, se encontrará con todos los elementos teórico pácticos necesarios para su aplicación.

En el Capítulo 3 inciso 3.7 y como una aportación resultado de la investigación realizada conjuntamente con el actuario Rafael Nava Acosta, se propone un nuevo método de cálculo de las reservas metemáticas a los métodos ya existentes, asimismo, en el inciso 3.7.1., se demuestra su equivalencia matemática con el método Prospectivo, y por lo tanto con los otros métodos ya conocidos.

Lo anterior demuestra que a partir de un razonamiento sencillo, es posible generar nuevas fórmulas de cálculo que pueden ser útiles en investigaciones posteriores.

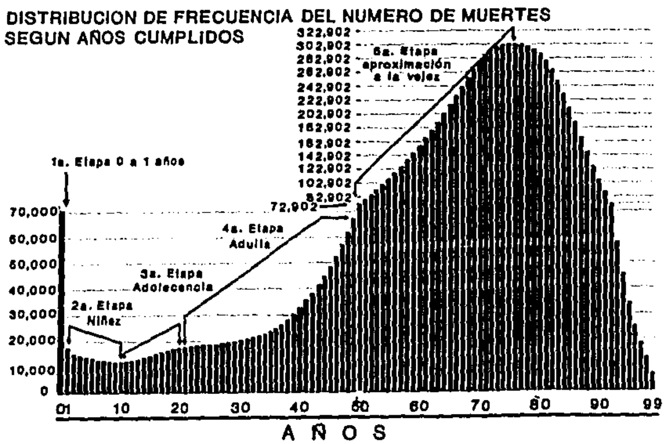
Por último, es mi más sincero deseo que este trabajo motive a los estudiantes que pretendan desarrollarse en el campo de los seguros de vida, y que les sirva de consulta a las personas interesadas en el tema.

Capítulo 1 Elementos técnicos del seguro de vida

1.1 Distribuciones de mortalidad

Al estudiar los fenómenos aleatorios que afectan la vida del ser humano en el marco de sus expectativas de permanecer o no con vida, debemos apoyarnos en el comportamiento que sigue la mortalidad, para lo cual, el uso de las distribuciones de frecuencias con que ocurre la muerte (***distribuciones de mortalidad***) nos permiten desde el punto de vista estadístico y de la teoría de probabilidades hacer una estimación de la ocurrencia de un evento, que en este sentido es por demás, desfavorable.

Si analizamos gráficamente la experiencia que al respecto proporciona la Tabla de Mortalidad Américana de los Comisionados de 1958 (*Tabla CSO*) construida sobre una base de 10 millones de recién nacidos, podemos claramente identificar cinco etapas [2] en el proceso de eliminación por muerte del grupo. A saber, en la primera etapa de menos de un año, el número de (*70,800*) muertes es alto, tanto que en términos absolutos casi es igual a la suma de las muertes ocurridas entre uno y cinco años (*74,147*), o a las que suceden a los 50 años (*72,902*). En la segunda etapa, la niñez, la mortalidad decrece para luego invertir su tendencia al entrar a la adolecencia y continuar aumentando cuando se transita por la etapa adulta. La quinta etapa, como se aprecia en la gráfica, se caracteriza por un acelerado incremento de la mortalidad conforme se aproxima la vejez, logrando su punto más alto a los 75 años, siendo esta edad alrededor de la cual se suceden la mayor cantidad de decesos, por lo que podría esperarse que a los 75 años una persona se debería morir por causa natural, esto es, si no influyeran circunstancias adversas. Las muertes comprendidas entre los 60 y 88 años forman una campana casi simétrica determinando el rango de los decesos normales y situando al resto de las muertes, en el contexto de los sucesos debidos a causas perturbadoras.



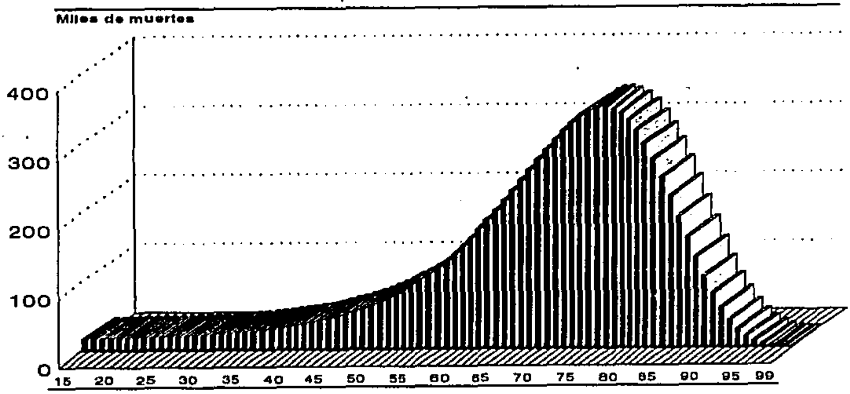
FUENTE: Tabla de Mortalidad Ordinaria Estándar de los Comisionados de 1958.

[2] Estas cinco etapas, fueron por primera vez analizadas por el demógrafo alemán GUILLERMO LEXIS, quien a través de la descomposición de la distribución de mortalidad de un grupo de 1,000 recién nacidos, hizo notar lo que aquí se explica. (véase González Gale, José.- Elementos del cálculo actuarial. Buenos Aires; Ediciones Macchi, 4a. Ed. pág. 5, 1968).

Es conveniente aclarar que los patrones de mortalidad cambian con el tiempo y difieren entre países e incluso entre grupos sociales, en virtud de las diferentes condiciones de desarrollo y de las cambiantes condiciones de sanidad, aunque en general las cinco etapas analizadas conforman lo que se conoce como el patrón normal de la mortalidad.

La experiencia mexicana proporciona un comportamiento similar, como se aprecia en la gráfica siguiente.

DISTRIBUCION DE FRECUENCIA DEL NUMERO DE MUERTES
SEGUN AÑOS CUMPLIDOS
- Experiencia mexicana 62-67 -



FUENTE: Tabla de Mortalidad Mexicana (Experiencia 1962-1967)

1.2 Función de supervivencia

Distribuciones de mortalidad como las que se comentaron, nos permiten crear modelos probabilísticos que nos ayudan a calcular entre otras variables, el tiempo que transcurrirá vivo un individuo y la correspondiente edad probable que éste tendrá al momento de morir.

Consideremos la frecuencia acumulada de las muertes que se suceden en el caso de la experiencia de la Tabla CSO.

edad (x)	No. de muertes ($frec_x$)	Acumulado $\Sigma frec_x$
0	70,800	70,800
1	17,475	88,275
2	15,066	103,341
3	14,449	117,790
4	13,835	131,625
5	13,322	144,947
6	12,812	157,759
7	.	.
.	.	.
.	.	.
99	6,415	10,000,000

Consideremos también la variable aleatoria continua X, definida como: "***edad al momento de morir, que tiene una persona al momento de nacer***", y la función de distribución asociada a dicha variable.

Por definición de función de distribución $F(x) = P[X \leq x]$, donde x representa la edad en años de una vida humana y por lo tanto, puede tener cualquier valor entre cero y el límite superior de la duración máxima de la vida, que denotaremos por ω y que en el caso de la experiencia analizada $\omega = 100$.

Esta función de distribución nos indica la probabilidad que tiene un recién nacido de morir en cualquier edad x, que puede ser cualquiera siempre que **X** sea menor o igual que x.

Con el propósito de tener una medida de la función $F(x)$ para una edad de 5 años, consideremos la función de densidad $f(x)$ asociada a $F(x)$ y la frecuencia acumulada de nuestra distribución de mortalidad, por tanto:

$$F(5) = P[X \leq 5] = \int_0^5 f(x)\,dx$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de **X**, es decir $f(x) = F'(x)$. Adicionalmente, sabemos que

$$f(x) \simeq \frac{\text{frec}_x}{\sum_{x=0}^{\omega-1} \text{frec}_x},$$

por lo tanto

$$F(5) = P[X \leq 5] \simeq \frac{\sum_{x=0}^{5} \text{frec}_x}{\sum_{x=0}^{\omega-1} \text{frec}_x} = \frac{144{,}947}{10{,}000{,}000} = 0.0144947 \; .$$

Ahora bien, si nos preguntamos por la probabilidad de que un recién nacido sobreviva más alla de la edad 5 años, tenemos que:

$$P[X>5] = 1 - P[X \leq 5] = 1 - 0.0144947 = 0.9855053$$

y de manera general

$$P[X>5] = 1 - P[X \leq x] = 1 - F(x) = s(x) \qquad 0 \leq x \leq \omega \tag{1.2.1}$$

donde $s(x)$ es llamada la ***función de supervivencia***, la cual, tiene propiedades que caracterizan un patrón normal de mortalidad. Esto es, en primer lugar se trata de una función decreciente, toda vez que conforme x crece la probabilidad de sobrevivir decrece, y en segundo lugar, es una función continua, en virtud de que el tiempo es el dominio de la misma. Adicionalmente,

cuando $x=0$, tenemos que:

$$s(0) = P[X>0] = 1 - P[X \leq 0] = 1 - 0 = 1$$

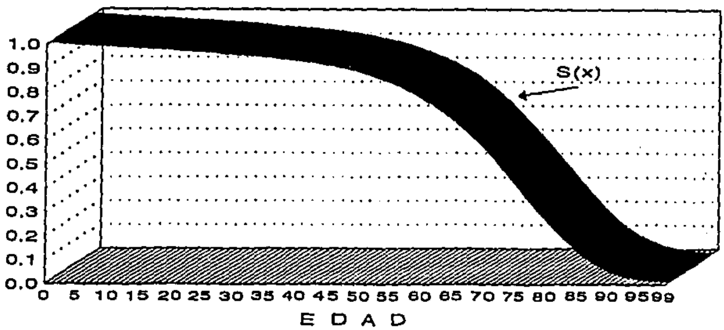
y cuando $x=\omega$

$$s(\omega) = P[X > \omega] = 1 - P[X \leq \omega] = 1 - 1 = 0 \ .$$

En resumen, $s(x)$ es una función continua de x, definida en el intervalo $0 \leq x \leq \omega$, la cual decrece del valor $s(0)=1$ al valor $s(\omega)=0$, de tal forma que $s(x)>s(x+t) \ \ \forall t>0$, y mide la probabilidad de que un recién nacido alcance cuando menos la edad x.

La gráfica siguiente, muestra el comportamiento de la función de supervivencia derivada de la experiencia de mortalidad de la Tabla CSO de 1958, aplicando el procedimiento antes descrito.

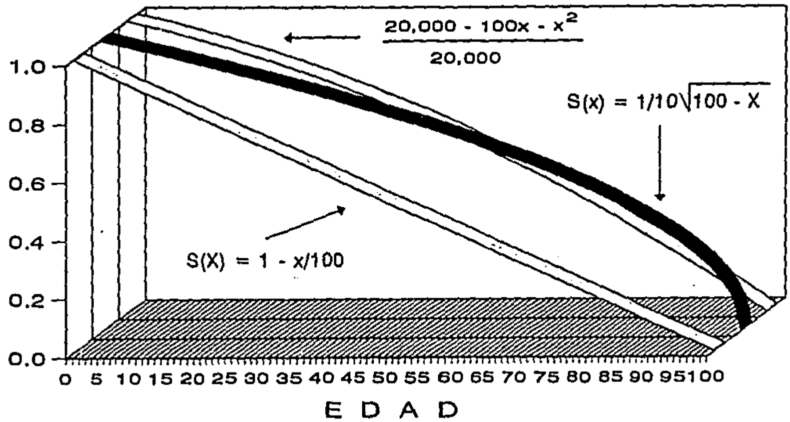
FUNCION DE SUPERVIVENCIA
EXPERIENCIA DE MORTALIDAD CSO - 1958



Hasta aquí, hemos definido la función de supervivencia a través de la función de distribución $F(x)=P[X \leq x]$ y nos hemos apoyado en la distribución acumulada de mortalidad de la Tabla CSO 1958 para obtener algunos valores, pero es evidente que la función $s(x)$ puede tener una expresión matemática cuya regla de correspondencia cumple con las propiedades definidas.

Las funciones que se muestran esquemáticamente en la gráfica de la página siguiente, son ejemplos sencillos de expresiones que cumplen con las propiedades de función de supervivencia, pero como se puede apreciar, no describen de manera precisa el comportamiento normal de la mortalidad.

FUNCIONES DE SUPERVIVENCIA



A continuación se presentan tres aplicaciones generales de la función de supervivencia que se derivan de la definición de la probabilidad condicional de dos eventos cualesquiera. Para esto, impondremos en todos los casos la condición de que primero se debe sobrevivir hasta la edad x.

La probabilidad condicional de dos eventos cualesquiera A y B, se denota por $P[\mathrm{A} \mid \mathrm{B}]$ y representa la reevaluación de la probabilidad de A bajo la condición de que B ha ocurrido. Esto es:

$$P[\mathrm{A} \mid \mathrm{B}] = \frac{P[\mathrm{A} \cap \mathrm{B}]}{P[\mathrm{A}]} .$$

1.- La probabilidad de que un recién nacido sobreviva hasta llegar a la edad x, pero que muera entre las edades x y $x+t$, $t>0$.

$$P[x < \mathrm{X} \leq x+t \mid \mathrm{X} > x] = \frac{P[x < \mathrm{X} \leq x+t]}{P[\mathrm{X} > x]} = \frac{P[\mathrm{X} \leq x+t] - P[\mathrm{X} \leq x]}{P[\mathrm{X} > x]} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}$$

$$= \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = {}_tq_x \qquad (1.2.2)$$

donde ${}_tq_x$, es la notación de esta probabilidad.

2.- La probabilidad de que un recién nacido sobreviva hasta llegar a la edad x, y que a partir de este momento sobreviva hasta una edad $x+t$, $t>0$.

$$P[X > x+t \mid X > x] = \frac{P[X > x+t]}{P[X > x]} = \frac{1 - P[X \leq x+t]}{P[X > x]} = \frac{1 - F(x+t)}{1 - F(x)}$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)} = {}_tp_x \tag{1.2.3}$$

donde ${}_tp_x$, es la notación de esta probabilidad.

3.- La probabilidad de que un recién nacido sobreviva hasta llegar a la edad x, y que a partir de ese momento sobreviva hasta una edad $x+t$, $t>0$, pero que muera entre las edades $x+t$ y $x+t+u$ $t, u>0$.

$$P[x+t < X \leq x+t+u \mid X > x] = \frac{P[x+t \leq X \leq x+t+u]}{P[X > x]} = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)}$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)} - \frac{s(x+t+u)}{s(x)} = {}_{t\backslash u}q_x \tag{1.2.4}$$

donde ${}_{t\backslash u}q_x$, es la notación de esta probabilidad.

1.3 Tablas de mortalidad

Un distinguido actuario escoses, G. Low, nos ha dicho que el seguro sobre la vida considerado como un negocio se funda sobre el principio que dice que el número de muertes que ocurren en un grupo suficientemente numeroso de personas, no es del todo arbitrario, sino que está sometido a leyes de promedios cuyo grado de uniformidad y exactitud permite establecer bases de cálculo sobre las cuales pueden arriesgar, sin temor, los aseguradores su capital, y los asegurados, el porvenir de aquellos por los que deben velar.

De acuerdo con este principio se han construido tablas de mortalidad, en las cuales, utilizando datos obtenidos en diversos lugares y circunstancias y depurados por diferentes procedimientos que presentan un mayor o menor grado de precisión, se tiene para un grupo inicial de personas, en número arbitrario y de una edad dada, arbitraria también, el número de personas que sobreviven en cada aniversario y, por consiguiente, el de las personas que han fallecido en el período de observación, que usualmente es de un año.

Dichas tablas permiten a las compañías de seguros fijar las tasas de contribución que corresponden a sus clientes, y de la suficiencia de la tabla de mortalidad fijada en cada caso, depende también la suficiencia de las primas que las compañías cobran.

En tiempos pasados, George King, autor del primitivo "Text Book", definió la tabla de mortalidad y expresó que era el instrumento destinado a medir las probabilidades de vida y de muerte. Para darnos una idea de como podría construirse dicha tabla, supuso un numeroso grupo de recien nacidos cuya vida iba siguiendo año con año hasta la total extinción del grupo.

Es evidente que dicho método no se podría aplicar en la realidad ya que sí el grupo fuese lo suficientemente grande como para que las observaciones hechas pudiesen tener algún valor, este grupo tardaría alrededor de un siglo en extinguirse.

Aparte de la imposiblidad material de seguir sus evoluciones, se nos presentaría un hecho de mayor importancia por señalar, el de la sustitución, pues nos evitaría caer en la tentación de reemplazar el grupo original por una serie de grupos subsidiarios que año tras año y con leves diferencias, pudiesen tomar el lugar del primitivo. Además, en una centuria las condiciones de vida se modifican considerablemente merced a múltiples causas, unas favorables y otras contrarias. Los adelantos de la higiene, los progresos en la medicina, sobre todo en lo relativo al combate de enfermedades infecciosas, la realización de obras sanitarias en las ciudades y en los pueblos que contribuyen a prolongar la vida del hombre. En cambio, la industrialización siempre creciente que va transformando braceros rurales en obreros urbanos, la exacerbación por la lucha por la existencia que produce agitación en los espíritus y desgasta como consecuencia los cuerpos, son causas que disminuyen la vitalidad de la especie humana.

Po lo que es imposible, aún en el caso de que se disponga de un grupo de población que ha ello se preste, cosa que nunca ocurre, construir una tabla de mortalidad siguiendo a un numeroso grupo de individuos desde que nacen hasta que mueren. Si tal tabla llegase a construirse carecería de todo valor al ser terminada, ya que correspondería a condiciones de vida sucesivas, pasadas, no actuales y coexistentes.

Otros son los procedimientos que se emplean para construir las tablas de mortalidad. En vez de tomar a un grupo de individuos para seguirlos durante toda su vida y determinar el número de los que sobreviven a cada edad, deduciendo de dicho número de sobrevivientes las probabilidades de vida y muerte, se prefiere determinar mediante grupos de personas fácilmente observables y respondiendo cada grupo a una misma edad, las probabilidades de vida o de muerte para cada una de esas edades, y deducir de tales probabilidades el correspondiente número de sobrevivientes, partiendo de un número básico que se dá, de antemano, para la edad inicial que puede ser la edad cero. Dicho número inicial se llama base o raíz de la tabla.

Sin embargo las compañías de seguros no podrían utilizar tablas de mortalidad que tuvieran como base una población común y corriente, ya que los asegurados constituyen un grupo especial que ingresa al seguro. En la mayor parte de los casos se aplica, previamente, un examen médico en el que se decide que aquéllos que no gozan de perfecta salud, únicamente son admitidos bajo condiciones especiales o son sencillamente rechazados.

La selección previo examen médico influye sobre la mortalidad del grupo durante cierto tiempo, en general, se admite que sus efectos duran cinco años y, naturalmente, año con año esos efectos van disminuyendo.

En el campo asegurador se consideran tres clases de población y por lo tanto tres tipos de tablas de mortalidad:

a).- **Las tablas selectas** que ofrecen la mortalidad de los asegurados en los primeros años del seguro, frecuentemente son tres o cinco, durante los cuales se admite actúa la selección médica. Dicha mortalidad es clasificada por edad del asegurado y por su antigüedad en el seguro.

b).- **Las tablas finales** que consideran la mortalidad de los asegurados cuya antigüedad en el seguro, excede el tiempo que dura el efecto de la selección.

c).- **Las tablas de conjunto** en las cuales se dá la mortalidad de todos los asegurados en conjunto, sin hacer distinción alguna respecto a la antigüedad en el seguro.

Las diferentes tablas de mortalidad que se construyen no concuerdan entre sí, y es lógico que así suceda, porque la mortalidad difiere debido a los diferentes factores a los que ya se ha hecho referencia. Cabe reiterar que, aún en una misma región, una tabla construida con datos que se refieren a la población en general diferirá, y no poco, de otra basada en datos que se refieren a un grupo especial determinado, que bien podría ser: asegurados de una compañía, trabajadores de algún sindicato, individuos que ejercen profesiones peligrosas, etcétera.

Con el propósito de ilustrar una tabla de conjunto, se presenta a continuación la Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana 1962 - 1967, para la cual se hacen breves observaciones.

TABLA DE MORTALIDAD MEXICANA

(E.M. 62-67)

x	$1{,}000q_x$	l_x	d_x	$1{,}000\mu_x$	x	$1{,}000q_x$	l_x	d_x	$1{,}000\mu_x$
15	1.781	10,000,000	17,810	1.775	58	15.697	8,202,709	128,758	15.098
16	1.799	9,982,190	17,958	1.792	59	17.223	8,073,951	139,058	16.570
17	1.819	9,964,232	18,125	1.811	60	18.912	7,934,893	150,065	18.204
18	1.841	9,946,107	18,311	1.832	61	20.783	7,784,828	161,792	20.015
19	1.866	9,927,796	18,525	1.855	62	22.854	7,623,036	174,217	22.024
20	1.893	9,909,271	18,758	1.881	63	25.146	7,448,819	187,308	24.253
21	1.923	9,890,513	19,019	1.909	64	27.682	7,261,511	201,013	26.725
22	1.957	9,871,494	19,319	1.941	65	30.488	7,060,498	215,260	29.467
23	1.994	9,852,175	19,645	1.976	66	33.590	6,845,238	229,932	32.509
24	2.035	9,832,530	20,009	2.016	67	37:019	6,615,306	244,892	35.883
25	2.080	9,812,521	20,410	2.059	68	40.809	6,370,414	259,970	39.625
26	2.131	9,792,111	20,867	2.107	69	44.995	6,110,444	274,939	43.777
27	2.187	9,771,244	21,370	2.160	70	49.618	5,835,505	289,546	48.381
28	2.249	9,749,874	21,927	2.220	71	54.718	5,545,959	303,464	53.489
29	2.318	9,727,947	22,549	2.285	72	60.344	5,242,495	316,353	59.154
30	2.395	9,705,398	23,244	2.358	73	66.546	4,926,142	327,815	65.438
31	2.480	9,682,154	24,012	2.439	74	73.376	4,598,327	337,407	72.409
32	2.574	9,658,142	24,860	2.529	75	80.894	4,260,920	344,683	80.140
33	2.679	9,633,282	25,808	2.628	76	89.163	3,916,237	349,183	88.717
34	2.795	9,607,474	26,853	2.738	77	98.247	3,567,054	350,452	98.230
35	2.923	9,580,621	28,004	2.861	78	108.217	3,216,602	348,091	108.781
36	3.066	9,552,617	29,288	2.996	79	119.148	2,868,511	341,777	120.486
37	3.224	9,523,329	30,703	3.147	80	131.115	2,526,734	331,293	133.469
38	3.399	9,492,626	32,265	3.314	81	144.200	2,195,441	316,583	147.870
39	3.594	9,460,361	34,001	3.499	82	158.483	1,878,858	297,767	163.843
40	3.809	9,426,360	35,905	3.705	83	174.048	1,581,091	275,186	181.562
41	4.048	9,390,455	38,013	3.932	84	190.976	1,305,905	249,397	201.215
42	4.314	9,352,442	40,346	4.185	85	209.348	1,056,508	221,178	223.015
43	4.608	9,312,096	42,910	4.466	86	229.238	835,330	191,489	247.197
44	4.934	9,269,186	45,734	4.776	87	250.717	643,841	161,422	274.019
45	5.295	9,223,452	48,838	5.121	88	273.841	482,419	132,106	303.771
46	5.696	9,174,614	52,259	5.504	89	298.658	350,313	104,624	336.772
47	6.141	9,122,355	56,020	5.928	90	325.194	245,689	79,897	373.378
48	6.634	9,066,335	60,146	6.399	91	353.455	165,792	58,600	413.982
49	7.180	9,006,189	64,664	6.921	92	383.421	107,192	41,100	459.021
50	7.786	8,941,525	69,619	7.501	93	415.037	66,092	27,431	508.979
51	8.457	8,871,906	75,030	8.143	94	448.214	38,661	17,328	564.393
52	9.201	8,796,876	80,940	8.856	95	482.819	21,333	10,300	625.860
53	10.026	8,715,936	87,386	9.646	96	518.669	11,033	5,722	694.040
54	10.940	8,628,550	94,396	10.523	97	555.536	5,311	2,950	769.667
55	11.954	8,534,154	102,017	11.495	98	593.136	2,361	1,400	853.555
56	13.076	8,432,137	110,259	12.574	99	1,000.000	961	961	946.604
57	14.320	8,321,878	119,169	13.771					

Como se puede apreciar, los valores: $1000q_x$, l_x y d_x, están desarrollados sobre una base l_{15} *-población inicial-* de 10 millones de personas.

Para utilizar el concepto de grupo de supervivencia probabilístico que se presentó en el inciso 1.2 de este Capítulo, se supone que las probabilidades obtenidas en la tabla de mortalidad fueron apropiadas para los tiempos de vida de aquéllos que participaron en el estudio y que también lo serán para los que pertenecen a nuestro grupo de supervivencia actual.

En general, algunas de las observaciones más importantes de la Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana 62-67, son las siguientes:

A).- Las estadísticas utilizadas corresponden al período de observación del año 1962 al año 1967.

B).- La tabla no fue contruida siguiendo, durante toda su vida, a un grupo de 10 millones de personas que se inician a la edad de 15 años hasta que mueran, sino que se basó en estudiar las probabilidades de muerte por grupos de edad, y aplicar éstas al grupo que sobrevive.

C).- Se espera que alrededor de un 82% de las vidas a la edad de 15 años sobrevivan a la edad de 58 años.

D).- La tabla se inicia a edad de 15 años porque, en México, está prohibido el seguro para menores de 12 años en caso de fallecimiento.

E).- La edad límite de la tabla está definida ya que se especifica cuando $s(\omega)=0$.

F).- A pesar de que los valores de l_x = número de vivos a edad x han sido redondeados a enteros, no hay una razón específica que obligue a ello.

Hasta este punto se han presentado tablas de mortalidad desde una perspectiva basada en conceptos probabilísticos. Sin embargo, existe una interpretación que está al margen de la teoría de la probabilidad, la cual consiste en construir una tabla de mortalidad en base al concepto de tasas de decremento que por su naturaleza constituye un concepto determinista.

Un grupo de supervivencia deternimista representado en particular por una tabla de mortalidad, tiene las características siguientes:

- En su inicio el grupo está formado por las personas vivas de edad cero.

- Todos los miembros del grupo estan sujetos, de acuerdo a su edad, a tasas anuales de mortalidad específicas en cada caso, medidas por los valores q_x, de la tabla de mortalidad.

- El grupo es cerrado, es decir, no son permitidos nuevos miembros y el único factor que puede disminuir el número de miembros en el grupo son las tasas de mortalidad.

Por último, con base en estos supuestos, el proceso está determinado por:

$$l_1 = l_0 \cdot (1 - q_0) = l_0 - l_0 q_0 = l_0 - (l_0 - l_1) = l_0 - d_0$$

$$l_2 = l_1 \cdot (1 - q_1) = l_1 - d_1 = l_0 - (d_0 + d_1)$$

$$\vdots$$

$$l_x = l_{x-1} \cdot (1 - q_{x-1}) = l_{x-1} - d_{x-1} = l_0 - \sum_{y=0}^{y=x-1} d_y \,.$$

En donde l_x representa el número de vidas que han alcanzado la edad x en el grupo de supervivencia.

1.4 Funciones Biométricas

Las funciones que se desarrollarán en esta sección se consideran elementales y se denominan biométricas , en virtud de que se utilizan para medir aspectos que incolucran la vida. A su vez, forman parte de la tabla de mortalidad presentada y se basan en el concepto de grupo determinista.

La primer función elemental que analizaremos en esta sección queda representada por "l_x", inicial de la palabra inglesa living (*viviente*), que significa el número de personas que de un grupo inicial dado, alcanzan exactamente una determinada edad "x", indicada por el subíndice respectivo.

Sea "r" la edad inicial de la tabla, l_r representa el número de vivientes a dicha édad r que normalmente suele ser la edad cero y a la vez la base o raíz de la tabla.

La función l_x es esencialmente decreciente, ya que en el transcurso del tiempo el grupo se ve disminuído por la bajas que, en forma natural, produce en él la muerte.

Si ahora representamos por "d_x", inicial de la palabra inglesa dying (*agonizante, moribundo*), el número de personas del grupo que mueren después de cumplir la edad "x" y antes de cumplir la edad "$x+1$", tenemos la siguiente función.

$$d_x = l_x - l_{x+1} \tag{1.4.1}$$

Si por otra parte, a partir de la edad x se suma el número de personas que mueren en cada uno de los años siguientes, hasta la edad límite de la tabla, es decir, hasta la total extinción del grupo, esa suma es igual al número de personas l_x que componían el grupo inicial, por lo tanto:

$$l_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} d_{x+t}$$

donde la letra griega "ω" representa la edad de la tabla para la cual no queda ningún sobreviviente, de manera que,

$$l_\omega = 0 \qquad y \qquad l_{\omega-1} = d_{\omega-1}\,.$$

Ahora definamos la función "p_x", como la probabilidad que tiene una persona que ha cumplido la edad "x" de sobrevivir un año más, es decir, de llegar con vida a la edad "$x+1$". Esta probabilidad será:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

De la misma forma, la función que representa la probabilidad que tiene una persona que acaba de cumplir la edad "x" de no vivir un año más, y que se simboliza por "q_x", será igual a:

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \tag{1.4.2}$$

sustituyendo (1.4.1.) en (1.4.2) se tiene que,

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}.$$

Las funciones l_x, d_x, p_x y q_x definidas, determinan las cuatro columnas principales de una tabla de mortalidad, es decir, la que da el número de sobrevivientes año tras año, la que nos ofrece el número de personas que mueren entre dos edades consecutivas y las que sirven para calcular la probabilidad de vivir un año más y de morir en el transcurso del año.

La función L_x.

Supongamos que existe una población cuyas condiciones de vida son tales que permanece estacionaria, es decir, el movimiento migratorio es nulo y únicamente se satisfacen las necesidades esenciales, compensándose en cada momento las cifras de los nacimientos y de las defunciones y supóngase, además, que el número de fallecimientos se distribuye año con año del mismo modo, de manera que la compensación de la población es siempre la misma.

Lo anterior tiene como consecuencia que el censo levantado hoy sea exactamente igual al levantado hace "n" años.

Este censo registra el número de personas que al levantarlo, han cumplido ya la edad $x, x+1, x+2, \ldots\ldots, x+n$.

Definamos a L_x, como el número de personas que habiendo cumplido la edad x, no han alcanzado aún la edad $x+1$.

Si se admite que las muertes están igualmente distribuidas en todo el año, principio de uniformidad, el número L_x puede considerarse aproximadamente igual al de $l_{x+\frac{1}{2}}$ personas que tienen exactamente la edad $x+\frac{1}{2}$, es decir,

$$L_x \simeq l_{x+\frac{1}{2}} .$$

Pero este número de personas no se halla tabulado; luego, es preferible adoptar la siguiente forma de representación:

$$L_x \simeq l_x - \tfrac{1}{2}d_x . \qquad (1.4.3)$$

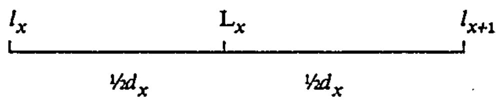
Lo que quiere decir que L_x es igual al número de personas que tenían exactamente la edad x, menos la mitad de los fallecidos en el año.

Otra forma de aproximar L_x, está dada por:

$$L_x \simeq l_{x+1} + \tfrac{1}{2}d_x . \qquad (1.4.4)$$

Lo que quiere decir que el número L_x es igual al número de personas que llegan con vida a la edad $x+1$, más la mitad de los muertos entre esa edad y la anterior.

Los dos casos anteriores de aproximación de L_x se pueden representar gráficamente de la siguiente manera:



sumando ahora las ecuaciones (1.4.3.) y (1.4.4), se obtiene que:

$$L_x + L_x \simeq l_x - \tfrac{1}{2}d_x + l_{x+1} + \tfrac{1}{2}d_x$$

simplificando

$$2L_x \simeq l_x + l_{x+1}$$

despejando

$$L_x \simeq \tfrac{1}{2}(l_x + l_{x+1}) \qquad (1.4.5)$$

lo que quiere decir que L_x es aproximadamente igual al promedio del número de personas que cumplen exactamente las edades x y $x+1$.

Resulta lógico suponer que entre las personas que componían el grupo l_x, el número de muertos sea menor al poco tiempo de cumplir la edad "x" que al acercarse a la edad $x+1$. Pero salvo en los primeros años de la vida, el error que se comete es de escasa importancia, razón por la que en la práctica se utilizan las fórmulas anteriores como si fueran exactas y no aproximadas.

Tasa central de mortalidad.

La probabilidad de que una persona de edad x, muera dentro del año, es:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

dicho cociente también se denomina "***tasa de mortalidad***".

Si ahora comparamos el número d_x, personas que mueren entre las edades x y $x+1$, con el número de los que en un momento dado declaran tener la edad x (*lo que equivale a considerar el número* Lx *de personas que tienen todas las edades posibles entre* x y $x+1$), el cociente será igual a:

$$m_x = \frac{d_x}{Lx} = \frac{d_x}{½(l_x + l_{x+1})} \,. \tag{1.4.6}$$

La ecuación (1.4.6) se denomina "***tasa central de mortalidad***". Si ahora sustituimos $d_x = l_x - l_{x+1}$ en la fórmula anterior, se obtiene que:

$$m_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{½(l_x + l_{x+1})} = \frac{2 \cdot (l_x - l_{x+1})}{l_x + l_{x+1}} \,,$$

dividiendo el numerador y el denomidador por l_x, se obtiene

$$m_x = \frac{2 \cdot \left[\dfrac{l_x}{l_x} - \dfrac{l_{x+1}}{l_x} \right]}{\dfrac{l_x}{l_x} + \dfrac{l_{x+1}}{l_x}} = \frac{2 \cdot (1 - p_x)}{1 + p_x} \tag{1.4.7}$$

que es el valor de m_x, en función de p_x.

Para obtener el valor de m_x en función de q_x, basta sustituir en la ecuación (1.4.7), $p_x = 1 - q_x$ y entonces se obtiene que:

$$m_x = \frac{2 \cdot (1 - (1 - q_x))}{1 + (1 - q_x)}$$

por lo tanto

$$m_x = \frac{2 \cdot q_x}{2 - q_x} \qquad (1.4.8)$$

Si despejamos p_x y q_x de la ecuación (1.4.7) y (1.4.8), respectivamente, se obtiene que:

$$p_x = \frac{2 - m_x}{2 + m_x} \qquad (1.4.9)$$

y que:

$$q_x = \frac{2 - m_x}{2 + m_x}. \qquad (1.4.10)$$

Las ecuaciones (1.4.6) a la (1.4.10), permiten calcular los valores de l_x, d_x, p_x y q_x en función de m_x, e inversamente.

Para poder determinar dichos valores se tiene que partir de datos tan exactos como sea posible. Estos deben ser obtenidos de distintas fuentes como son: libros del Registro Civil, fichas de los censos, registros parroquiales, archivos de las compañías de seguros, etcétera.

La información anterior presenta un cierto grado de error que es preciso eliminar hasta donde sea posible, ya que los datos obtenidos no pueden suministrar probabilidades, sino frecuencias y éstas no son representativas del grado de regularidad que la naturaleza del fenómeno en estudio presupone.

Organizar, depurar y regularizar la información reunida, es objeto de una operación que técnicamente se denomina "*ajustamiento*". La cual se vale de diversos procedimientos que se pueden clasificar en tres grupos.

a).- **Gráficos.**

Tienen por objeto sustituir por una curva lo más regular que se pueda, la línea poligonal resultante de registrar gráficamente las observaciones hechas.

b).- **Mecánicos.**

Tienen por objeto llegar al mismo resultado utilizando en vez de las ordenadas de la curva, promedios numéricos determinados mediante ciertos procedimientos de cálculo puramente mecánicos.

c).- **Analíticos.**

Son métodos que tratan de encontrar una expresión analítica que al variar, refleje con la mayor exactitud posible, las fluctuaciones de la función biométrica observada.

Estos últimos se consideran mejores que los procedimientos anteriores. Ya que, si se tiene la forma de la ecuación de una curva, es fácil trazar la curva que la representa. En cambio, los procedimientos iniciales implican la seria dificultad de asignarle una ecuación a una curva que se construye en forma empírica.

1.5 Valores conmutados

Capital Diferido.

El capital diferido es la operación más sencilla que existe en el seguro de vida y sirve para encontrar el valor actual de un capital pagadero dentro de "n" años, considerando que el asegurado que tiene actualmente edad "x" llegue con vida a la edad "$x+n$".

Ese valor actual se denomina prima pura única. Pura, porque se cálcula sin tomar en cuenta los gastos que origina la operación, y única porque se paga sólo una vez al inicio del contrato.

Como se puede deducir, son tres los elementos que conforman la prima: el capital asegurado, el factor de descuento que incluye una tasa de interés y que tiene por objeto traer el capital al momento presente, y la probabilidad de que dentro de "n" años la persona de edad "x" aún se encuentre con vida.

Sea ${}_nE_x$, la notación del valor actual (*prima pura única*) que le corresponde a un capital diferido de un peso. Entonces v^n será el valor actual de dicho capital pagadero dentro de "n" años. Y ${}_np_x$, la probabilidad de que una persona de edad "x" llegue con vida a la edad "$x+n$". Se tiene entonces que:

$${}_nE_x = v^n \cdot {}_np_x$$

y como

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad (1.5.1)$$

implica que

$${}_nE_x = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}. \qquad (1.5.2)$$

Con el objeto de facilitar ciertos cálculos que se utilizan frecuentemente en el seguro de vida, se ideó la construcción de fórmulas auxiliares llamadas de "***comnutación***", ya que conmutan y transforman los cálculos.

Así, al multiplicar el numerador y el denominador de la ecuación (1.5.2) por v^x, se tiene que:

$$ {}_nE_x = \frac{v^{x+n} \cdot l_{x+n}}{v^x \cdot l_x} . \tag{1.5.3}$$

En la expresión anterior, los productos $v^x \cdot l_x$ y $v^{x+n} \cdot l_{x+n}$, tienen la característica de que el exponente de v es igual al subíndice de l.

Dichos productos reciben el nombre de valores conmutados y se representan por D_x y D_{x+n}, esto es:

$$ D_x = v^x \cdot l_x \tag{1.5.4}$$

$$ D_{x+n} = v^{x+n} \cdot l_{x+n} . \tag{1.5.5}$$

Definamos otro valor conmutado denominado "N_x", el cual será igual a:

$$ N_x = \sum_{t=0}^{t=\omega-x-1} D_{x+t} . \tag{1.5.6}$$

En el cálculo de las primas de los seguros de vida se utilizan, además, otros valores conmutados los cuales se representan por "C_x" y "M_x", y se definen como:

$$ C_x = v^{x+1} d_x \tag{1.5.7}$$

y

$$ M_x = \sum_{t=0}^{t=\omega-x-1} C_{x+t} . \tag{1.5.8}$$

Por último definamos el valor conmutado "S_x", como:

$$S_x = \sum_{t=0}^{t=\omega-x-1} N_{x+t} \qquad (1.5.9)$$

y "R_x" como:

$$R_x = \sum_{t=0}^{t=\omega-x-1} M_{x+t} \quad . \qquad (1.5.10)$$

Las fórmulas (1.5.1) a la (1.5.10) son de gran utilidad en casi todo tipo de cálculo actuarial, ya que nos permiten simplificar otras fórmulas que debido al gran número de términos que contienen, hacen difícil e impráctica su manipulación.

1.6 Rentas vitalicias constantes

Renta vitalicia vencida.

El valor actual o la prima pura única de una renta vitalicia de \$1.00 pagadera al final de cada año, mientras el asegurado se encuentra con vida, la denominaremos "***Renta vitalicia vencida unitaria***", y queda representada por a_x. La cual se cálcula de la siguiente forma.

Utilizando el capital diferido $_nE_x$, se tiene que a_x es igual a la suma de los capitales diferidos por 1, 2, 3,....,ω-x-1 años. Se tiene entonces la siguiente expresión:

$$a_x = \sum_{t=1}^{t=\omega-x-1} {}_tE_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + ... + {}_{\omega-x-1}E_x \tag{1.6.1}$$

que en valores conmutados se expresa como:

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + ... + D_{\omega-1}}{D_x}, \tag{1.6.2}$$

utilizando ahora la fórmula (1.5.6) en (1.6.2), se tiene finalmente que:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \tag{1.6.3}$$

Renta vitalicia anticipada.

El valor actual o la prima pura única de una renta vitalicia de $1.00 pagadera al inicio de cada año mientras el asegurado se encuentra con vida, la denominaremos "***Renta vitalicia anticipada unitaria***" y queda representada por $\ddot{a}_x$. La cual se cálcula de la siguiente manera.

Utilizando el capital diferido $_nE_x$, se tiene que:

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{t=1}^{t=\omega-x-1} {}_tE_x = 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + ... + {}_{\omega-x-1}E_x \qquad (1.6.4)$$

que en valores conmutados se expresa como:

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + ... + D_{\omega-1}}{D_x} . \qquad (1.6.5)$$

Sustituyendo ahora: $1 = \dfrac{D_x}{D_x}$ en la ecuación (1.6.5),

se tiene que:

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + ... + D_{\omega-1}}{D_x} . \qquad (1.6.6)$$

Utilizando la fórmula (1.5.6) en (1.6.6), resulta que:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} . \qquad (1.6.7)$$

Cabe agregar que las rentas $\ddot{a}_x$ y a_x, se pueden relacionar sustituyendo (1.6.3) en (1.6.5), de la siguiente manera:

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{N_x}{D_x} = 1 + a_x . \qquad (1.6.8)$$

Renta temporal vencida.

El valor actual o la prima pura única de la renta de un $1.00 pagadera al final de cada año durante "n" años mientras el asegurado se encuentra con vida, se denomina "***Renta temporal vencida unitaria***". Dicha renta queda representada por $a_{x:\overline{n}|}$, y se calcula de la siguiente forma.

Utilizando el capital diferido ${}_{n}E_{x}$, se tiene que:

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{t=n} {}_{t}E_{x} = {}_{1}E_{x} + {}_{2}E_{x} + {}_{3}E_{x} + \dots + {}_{n}E_{x} \qquad (1.6.9)$$

que en valores conmutados se expresa como:

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots + D_{x+n}}{D_{x}}, \qquad (1.6.10)$$

por último:

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x}}. \qquad (1.6.11)$$

Renta temporal anticipada.

El valor actual o la prima pura única de una renta de $1.00 pagadera al inicio de cada año durante "n" años, si el asegurado se encuentra con vida, se denomina "***Renta temporal anticipada unitaria***", la cual se representa por $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$.

Dicha renta se cálcula de manera similar a la anterior, es decir:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + \sum_{t=1}^{t=n-1} {}_{t}E_{x} = 1 + {}_{1}E_{x} + {}_{2}E_{x} + {}_{3}E_{x} + ... + {}_{n-1}E_{x} \quad (1.6.12)$$

que en valores conmutados es igual a:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + ... + D_{x+n-1}}{D_{x}} \quad (1.6.13)$$

sustituyendo ahora $1 = \dfrac{D_x}{D_x}$

en la ecuación (1.6.13), se tiene que:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x} + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + ... + D_{x+n-1}}{D_{x}} \quad (1.6.14)$$

finalmente:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x} - N_{x+n}}{D_{x}} \; . \quad (1.6.15)$$

Capítulo 2 Prima neta única y prima neta nivelada de los seguros de vida

2.1 Introducción

El seguro de vida se constituye como una rama del seguro en general, en él se refleja el principio fundamental del seguro toda vez que su característica central, radica en el hecho de que un gran número de personas aceptan cooperar proporcionalmente contra los transtornos económicos producto de la eventualidad desfavorable de morir.

*El seguro de vida se define como la operación que se efectúa mediante un contrato que se llama **póliza** por medio del cual el **asegurador** que es la persona o entidad que toma a cargo el riesgo, promete a otra que se denomina **tomador** a cambio de una cantidad de dinero que se llama **prima**, pagar a una tercera persona, el **beneficiario**, una cantidad de dinero nombrada **suma asegurada** bajo la condición o término que depende de la vida de otra persona, a la que se le da el nombre de **asegurado**.*

Cabe aclarar que en la generalidad de las situaciones el tomador del seguro resulta ser también el asegurado y no con menor frecuencia, se da también el caso de que el beneficiario es más de uno. En lo sucesivo y con propósitos de simplificación consideraremos que el tomador del seguro es también el asegurado y que se tiene involucrado un único beneficiario.

Como se desprende de la definición, la prima es la cantidad de dinero que la persona asegurada paga a la compañía de seguros por una póliza de seguro de vida. Esta prima puede consistir de un único pago o de una serie de pagos que por lo general son realizados anualmente o en lapsos menores a un año.

Los elementos que intervienen en el calculo de la prima son: la tasa de mortalidad, la tasa de interés y la tasa de gastos que incluye cualquier previsión para contingencias no cubiertas por los margenes esperados en las tasas de mortalidad y de interés.

En el Capítulo anterior se definió la prima pura única para una dotalidad involucrando la sobrevivencia de (x) y una tasa de interés. Para los seguros de vida, la prima neta única consiste en algo muy similar ya que se considera a diferencia del elemento sobrevivencia una tasa de mortalidad por lo que, únicamente la mortalidad y el interés determinan el importe de la prima neta única. De esta forma, la prima neta única para un seguro de vida se define como la cantidad que cada asegurado debe pagar por anticipado y al contado para quedar protegido contra el riesgo de muerte; y que, en conjunto dichos pagos deben ser suficientes para cubrir todas las reclamaciones bajo los supuestos de que las muertes se sucederán de acuerdo con la tabla de mortalidad utilizada como base para el cálculo, y de que las primas netas únicas serán invertidas de manera tal que rindan la tasa de interés que se supone en los cálculos.

Existen diferentes razones por las cuales un único pago resulta por lo general oneroso para el asegurado, pero posiblemente la más importante está en función de la solvencia del propio asegurado. El seguro recoge esta importante situación y a fin de poder dirigirse también a personas de recursos económicos modestos, se opta por calcular una prima llamada neta nivelada, pagadera alicuotamente por un tiempo determinado y a intervalos equidistantes en el tiempo. Esta prima a su vez también debe ser suficiente para cubrir todas las reclamaciones por muerte a medida que éstas se van sucediendo.

Por lo anterior se aplica la regla general siguiente. Si **A** es la prima neta única de un seguro cualquiera y **P** es la prima neta nivelada que debe pagarse constantemente a intervalos iguales de tiempo durante el lapso estipulado en el contrato, y si $\ddot{a}$ es una anualidad pagadera exactamente igual que lo convenido para **P**, se tiene que el valor presente de los pagos **P** es $\mathbf{P} \cdot \ddot{a}$.

Este valor presente obviamente coincide en el momento de la firma de la póliza, con la prima neta única **A**. Esto es:

$$A = P \cdot \ddot{a} \qquad \text{siendo entonces} \qquad P = \frac{A}{\ddot{a}}. \tag{2.1.1}$$

Existen diferentes clases de contratos de seguro de vida, mismos que están en función del tipo de riesgo a cubrir, que pueden ser: la sobrevivencia, la muerte, o la combinación de ambos estados del asegurado, así como de la duración del compromiso, de la forma del pago de primas y de la suma asegurada involucrada.

Las fórmulas para el cálculo de las primas de los distintos tipos de seguro de vida, que se manejan mediante las formas estándar de pólizas emitidas generalmente por la mayoría de las compañías de seguros serán deducidas en este Capítulo.

A lo largo de la deducción de las fórmulas se irán utilizando como en el caso de las anualidades de vida, los valores conmutados necesarios que permiten manipular eficientemente las expresiones.

Es importante aclarar que las fórmulas que serán deducidas para el cálculo de las primas, supondrán que el pago de la suma asegurada se hace al final del año en que ocurre la muerte del asegurado aunque realmente, en la práctica, las reclamaciones por muerte se pagan por la compañía de seguros a los beneficiarios después de la muerte del asegurado, tan pronto como se comprueba legalmente el deceso y las circunstancias en que éste ocurrió.

El supuesto anterior se hace con el objeto de obtener valores congruentes con los datos contenidos en la tabla de mortalidad utilizada, dado que las tablas de mortalidad presentan los datos de las funciones biométricas evaluadas al final de cada año.

2.2 Seguro ordinario de vida y ordinario de vida pagos limitados

El **seguro ordinario de vida** se define a través de una póliza que cubre el riesgo de muerte por toda la vida del asegurado, siempre y cuando el contrato no se anule previamente por falta de pago de una prima vencida o si no se rescata por su valor en efectivo. La suma asegurada se paga al beneficiario sólo en el caso de fallecimiento del asegurado y las primas se pagan durante toda la vida del mismo.

El valor de rescate en efectivo de una poliza, es un beneficio del tenedor de una póliza de seguro que le garantiza al momento de terminar anticipadamente su relación con la companía de seguros, el poder recuperar, por lo menos, parte de los sobrepagos acumulados que hubiera hecho.

Consideremos una suma asegurada de $1.00 que será pagada al fin del año en que ocurra la muerte del asegurado. Se trata de determinar cual será la prima neta única A_x, que deberá pagar de contado un asegurado de edad x al momento de firmar una póliza ordinaria de vida.

Para esto, sean l_x los asegurados que contratan a la vez el seguro. Durante el primer año morirán d_x de ellos. Por lo tanto la obligación de la compañía en este primer año será pagar un peso a cada uno de los beneficiarios, d_x pesos en total. El valor de esta cantidad al momento de contratar el seguro está determinado por vd_x.

En los años siguientes la compañía de seguros deberá pagar d_{x+1}, d_{x+2}, d_{x+3}, ..., $d_{x+(\omega-x-1)}$ pesos a los beneficiarios correspondientes en cada año, de igual manera que en el primer año se pueden deducir los valores presentes de estas obligaciones como v^2d_{x+1}, v^3d_{x+2}, ..., $v^{\omega-x}d_{x+(\omega-x-1)}$, de lo que se desprende que la obligación total de la compañía en valor presente está dada por:

$$vd_x + v^2d_{x+1} + v^3d_{x+2} + ...+ v^{\omega-x}d_{x+(\omega-x-1)}.$$

Por el lado de los asegurados, el compromiso que éstos tienen al momento de firmar la póliza es el de pagar cada uno de ellos la prima neta única A_x, lo que da como resultado que $l_x \cdot A_x$ sea el compromiso total de los asegurados. Igualando ambas obligaciones a la firma del contrato se tiene que:

$$l_x \cdot A_x = vd_x + v^2d_{x+1} + v^3d_{x+2} + ...+ v^{\omega-x}d_{x+(\omega-x-1)}.$$

Despejando A_x y multiplicando por v^x el numerador y el denominador, obtenemos la prima neta única que le corresponderá pagar a cada asegurado, esto es:

$$A_x = \frac{v^{x+1}d_x + v^{x+2}d_{x+1} + v^{x+3}d_{x+2} + \ldots + v^{\omega}d_{\omega-1}}{v^x l_x}.$$

En este momento se hace uso del valor conmutado C_{x+t} y de la suma de estos valores sobre la duración total del compromiso, es decir M_x:

$$C_{x+t} = v^{x+t+1}d_{x+t} \qquad\qquad M_x = \sum_{t=0}^{t=\omega-x-1} C_{x+t}.$$

Por lo tanto

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+(\omega-x-1)}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}. \qquad (2.2.1)$$

La fórmula (2.2.1) mide entonces la prima neta única que al momento de contratar un seguro ordinario de vida debe pagar de contado cada asegurado de edad x para quedar protegido contra el riesgo de muerte durante el resto de su vida.

De la definición de seguro ordinario de vida, se desprende que el asegurado debe pagar una prima durante la vigencia del contrato, esto es, mientras permanezca con vida. Esta prima es precisamente la prima neta nivelada.

Consideremos que la prima neta nivelada deberá ser pagada anualmente al inicio de cada año. Se trata ahora de obtener la prima P_x que deberán pagar los sobrevivientes que inicialmente contrataron la póliza a edad x. Sabemos de (2.1.1), que el valor presente de los pagos P_x está dado por el producto de P_x por una anualidad anticipada $\ddot{a}_x$ en virtud de que el primer pago de un seguro ordinario de vida tiene que hacerse al momento de la firma del contrato.

Tenemos entonces que A_x es la prima neta única que se desea diferir en pagos constantes a intervalos de un año durante toda la vida del asegurado, y $P_x \cdot \ddot{a}_x$ es el valor presente de dichos pagos, así

$$A_x = P_x \cdot \ddot{a}_x$$

despejando P_x y sustituyendo en terminos de valores conmutados, tenemos que:

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x}{D_x}} = \frac{M_x}{N_x}. \tag{2.2.2}$$

La fórmula (2.2.2) mide entonces la prima neta nivelada correspondiente a un seguro ordinario de vida.

En (2.2.1), se vio que la prima neta única de un seguro ordinario de vida es el pago que en el momento de contratar el seguro se realiza en una sola exhibición, y en (2.2.2) la prima neta nivelada que se paga en forma constante durante toda la vida del asegurado. Si consideramos que la prima neta nivelada se paga en un número limitado de veces nos encontramos con el seguro ordinario de vida pagos limitados. Es claro que la prima neta única es el límite mínimo de pagos posibles y que, sí el número de pagos se extiende sobre toda la vida del asegurado se está en el caso del seguro ordinario de vida.

El *seguro ordinario de vida pagos limitados* se define a través de una póliza que cubre el riesgo de muerte por toda la vida del asegurado, siempre y cuando el contrato no se anule previamente por falta de pago de una prima vencida o si no se rescata por su valor en efectivo. La suma asegurada se paga al beneficiario sólo en el caso de fallecimiento del asegurado y las primas se pagan durante un número específico de años.

En el pasado, las pólizas ordinarias de vida pagos limitados se emitían indicando un número específico de pagos, como por ejemplo 10, 15, 20. Actualmente, las pólizas se emiten estipulando el pago sólo hasta una edad específica del asegurado, tal como 60 ó 65 años. Sobre cualquier base que se considere, siempre se tiene la posibilidad de determinar un número de pagos; esto es, que el asegurado seleccione el plazo de su conveniencia o que en función de su edad x se determine el número de pagos a realizar como $65-x$, suponiendo que 65 años es el tope máximo determinado por la compañía.

Un seguro de vida pagos limitados a diferencia de un ordinario de vida, tiene la ventaja de limitar los pagos hasta antes de que la fuerza productiva del asegurado termine, permitiendo así afianzar la cobertura del riesgo cuando presumiblemente los recursos pudieren no ser suficientes para pagar la prima. Adicionalmente, se considera que debido a que generalmente las responsabilidades familiares decrecen de los 65 a 70 años en adelante, la importancia de un seguro ordinario de vida, disminuye.

En términos del precio no existe diferencia comparativa entre ambos planes, ya que en los dos casos la prima se calcula sobre las mismas suposiciones de interés y mortalidad. De manera individual, comprobar que un plan es más económico que otro, depende del tiempo que transcurra antes de que suceda el fallecimiento del asegurado.

Como en el caso del seguro ordinario de vida, consideremos una suma asegurada de \$1.00 que será pagada al fin del año en que ocurra la muerte del asegurado.

Al momento de comprar la póliza, es evidente que el compromiso por parte de la compañía es el mismo que en el caso del seguro ordinario de vida.

Por parte de los asegurados, el compromiso se limita al pago de la prima neta única A_x en un número de m primas constantes, de donde se desprende que el valor presente de los m pagos ${}_mP_x$ que serán realizados a partir del momento de contratar la póliza hasta la edad $x+m$-1 del asegurado es ${}_mP_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$, así

$$A_x = {}_mP_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

despejando ${}_mP_x$ y sustituyendo en términos de valores conmutados, tenemos que:

$${}_mP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}} = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \qquad (2.2.3)$$

La fórmula (2.2.3) mide entonces la prima neta nivelada para un seguro ordinario de vida pagos limitados.

El seguro ordinario de vida y el ordinario de vida pagos limitados, se caracterizan por cubrir el riesgo de muerte durante toda la vida del asegurado, motivo por el que se les denomina seguros de vida entera. En ambos casos, se consideró que las primas netas niveladas se pagan de manera anticipada, es decir, inician al momento de firmar el contrato.

2.3 Seguros ordinarios de vida entera variables.

Hasta aquí, las fórmulas para el cálculo de primas de los seguros de vida entera que se han presentado, suponen que la suma asegurada involucrada es de \$1.00. Una modalidad más de estos seguros, consiste en considerar que la suma asegurada que se compromete a pagar la compañía de seguros a los beneficiarios de una póliza, varía aritméticamente conforme transcurre el tiempo. La variabilidad de la suma asegurada se considera en aumento o en decremento dependiendo de la dirección de la variación aritmética supuesta, aunque la variación más comunmente aplicada en la práctica consiste en ir incrementando año con año la suma asegurada.

Esta modalidad de suma asegurada creciente es muy importante, en virtud de que la suma contratada en un principio, va perdiendo poder adquisitivo con el transcurrir del tiempo y la suma asegurada que originalmente es suficiente para atenuar los transtornos económicos que sufren los beneficiarios con el deceso del asegurado puede, en el futuro, ser insuficiente debido a un entorno económico que evoluciona a ritmo inflacionario elevado.

Los seguros ordinarios de vida que cubren el riesgo de muerte durante toda la vida del asegurado y que consideran una suma asegurada variable, reciben el nombre de ***seguros ordinarios de vida entera con suma asegurada variable.***

El problema de la dedución de la fórmula para el cálculo de la prima neta única, que se denota por $({}_{v}A)_x$, se plantea de manera general a continuación.

Supongamos una suma asegurada inicial de k pesos, por lo tanto el compromiso de la compañía de seguros en el primer año será pagar precisamente k pesos a cada uno de los beneficiarios correspondientes a los d_x fallecidos en el año $(x, x+1]$, $k \cdot d_x$ pesos. Supongamos que para el segundo período la suma asegurada pactada es igual a la inicial más una variación de h, la compañía de seguros deberá pagar en el segundo año $(k+h) \cdot d_{x+1}$, en el tercer período la suma asegurada será $(k+2h)$, por lo que el compromiso para la conpañía de seguros será $(k+2h) \cdot d_{x+2}$, y así sucesivamente.

El valor presente del compromiso total de la compañía de seguros será:

$$v \cdot k \cdot d_x + v^2 \cdot (k+h) \cdot d_{x+1} + v^3 \cdot (k+2h) \cdot d_{x+2} + \ldots\ldots + v^{\omega-x} \cdot (k+(\omega-x-1) \cdot h) \cdot d_{x+(\omega-x-1)}$$

Por el lado de los asegurados, el compromiso consiste en pagar cada uno de ellos la prima neta única $({}_{v}A)_x$, si suponemos que l_x personas contratan el seguro a la vez, se tiene que el compromiso conjunto de los asegurados es $l_x \cdot ({}_{v}A)_x$. Igualando el valor presente de ambos compromisos se tiene la siguiente ecuación:

$$l_x \cdot ({}_{v}A)_x = v \cdot k \cdot d_x + v^2 \cdot (k+h) \cdot d_{x+1} + v^3 \cdot (k+2h) \cdot d_{x+2} + \ldots\ldots + v^{\omega-x} \cdot (k+(\omega-x-1) \cdot h) \cdot d_{x+(\omega-x-1)}$$

multiplicando ambos lados de la ecuación por v^x se tiene que:

$$v^x \cdot l_x \cdot ({}_vA)_x = v^{x+1} \cdot k \cdot d_x + v^{x+2} \cdot (k+h) \cdot d_{x+1} + v^{x+3} \cdot (k+2h) \cdot d_{x+2} + \ldots\ldots + v^{\omega} \cdot (k+(\omega-x-1) \cdot h) \cdot d_{\omega-1}$$

sustituyendo en términos de valores conmutados la ecuación anterior, se convierte en:

$$D_x \cdot ({}_vA)_x = C_x \cdot k + C_{x+1} \cdot (k+h) + C_{x+2} \cdot (k+2h) + \ldots\ldots + C_{\omega-1} \cdot (k+(\omega-x-1) \cdot h)$$

distribuyendo los productos y ordenando los sumandos por columnas y factorizando tenemos:

$$\begin{aligned} D_x \cdot ({}_vA)_x = {} & k \cdot C_x + k \cdot C_{x+1} + k \cdot C_{x+2} + k \cdot C_{x+3} + \ldots\ldots + k \cdot C_{\omega-1} + \\ & h \cdot C_{x+1} + 2h \cdot C_{x+2} + 3h \cdot C_{x+3} + 4h \cdot C_{x+4} + \ldots\ldots + (\omega-x-1) \cdot h \cdot C_{\omega-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x \cdot ({}_vA)_x = {} & k \cdot C_x + k \cdot C_{x+1} + k \cdot C_{x+2} + k \cdot C_{x+3} + \ldots\ldots + k \cdot C_{\omega-1} + \\ & h \cdot C_{x+1} + h \cdot C_{x+2} + h \cdot C_{x+3} + h \cdot C_{x+4} + \ldots\ldots + h \cdot C_{\omega-1} + \\ & h \cdot C_{x+2} + h \cdot C_{x+3} + h \cdot C_{x+4} + h \cdot C_{x+5} + \ldots\ldots + h \cdot C_{\omega-1} + \\ & h \cdot C_{x+3} + h \cdot C_{x+4} + h \cdot C_{x+5} + \ldots\ldots + h \cdot C_{\omega-1} + \\ & h \cdot C_{x+4} + h \cdot C_{x+5} + \ldots\ldots + h \cdot C_{\omega-1} + \\ & h \cdot C_{x+5} + \ldots\ldots + h \cdot C_{\omega-1} + \\ & \vdots \\ & + h \cdot C_{\omega-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x \cdot ({}_vA)_x = {} & k[C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots\ldots + C_{\omega-1}] + \\ & h[C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + C_{x+4} + \ldots\ldots + C_{\omega-1}] + \\ & h[C_{x+2} + C_{x+3} + C_{x+4} + C_{x+5} + \ldots\ldots + C_{\omega-1}] + \\ & h[C_{x+3} + C_{x+4} + C_{x+5} + \ldots\ldots + C_{\omega-1}] + \\ & h[C_{x+4} + C_{x+5} + \ldots\ldots + C_{\omega-1}] + \\ & h[C_{x+5} + \ldots\ldots + C_{\omega-1}] + \\ & \vdots \\ & + h[C_{\omega-1}] \end{aligned}$$

Recordando que $\quad M_x = \sum_{t=0}^{t=\omega-x-1} C_{x+t}, \quad$ tenemos que:

$$D_x \cdot ({}_vA)_x = k \cdot M_x + h \cdot [M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} + \ldots\ldots + M_{x+(\omega-x-1)}].$$

Hagamos uso ahora de la función conmutada R_x definida como:

$$R_x = \sum_{t=0}^{t=\omega-x-1} M_{x+t}$$

sustituyéndola en la ecuación anterior, resulta que:

$$D_x \cdot ({}_vA)_x = k \cdot M_x + h \cdot R_{x+1}$$

finalmente, despejando $({}_vA)_x$ se tiene que:

$$({}_vA)_x = \frac{k \cdot M_x + h \cdot R_{x+1}}{D_x} \qquad (2.3.1)$$

La fórmula (2.3.1) sirve para obtener la prima neta única de un seguro ordinario de vida con suma asegurada variable.

Siendo esta prima la cantidad que al momento de contratar el seguro, debe pagar de contado cada asegurado de edad x para quedar protegido contra el riesgo de morir durante toda su vida. La suma asegurada es "k", y "h" representa el incremento o decremento que cada año modifica la suma asegurada. En la práctica la variación constante "h" se expresa en términos de un porcentaje de la suma asegurada inicial.

Por su parte, los asegurados tienen el compromiso de pagar la prima neta única $({}_vA)_x$, que de conformidad con la definición de los seguros de vida entera, se desprende que el asegurado puede pagarla en forma vitalicia, es decir, el valor presente de los pagos $({}_vP)_x$ que serán realizados a partir del momento de contratar la póliza hasta la muerte del asegurado está determinado por el producto:

$$({}_vA)_x = ({}_vP)_x \cdot \ddot{a}_x$$

despejando $({}_vP)_x$, y sustituyendo en terminos de valores comutados, tenemos que:

$$({}_vP)_x = \frac{\dfrac{k \cdot M_x + h \cdot R_{x+1}}{D_x}}{\dfrac{N_x}{D_x}} = \frac{k \cdot M_x + h \cdot R_{x+1}}{N_x} . \qquad (2.3.2)$$

La fórmula (2.3.2), sirve para calcular la prima neta nivelada de un seguro ordinario de vida entera variable.

2.4 Seguro temporal.

El *seguro temporal* se define a través de una póliza que cubre el riesgo de muerte por un período determinado (*temporalidad del plan*), siempre y cuando el contrato no se anule previamente por falta de pago de una prima vencida o si no se rescata por su valor en efectivo, la suma asegurada se paga al beneficiario sólo si el asegurado fallece dentro del período establecido y las primas se pagan durante la temporalidad del plan.

La temporalidad puede ser uno o más años, tales como 5, 10, 15 ó 20 años, aunque no existe motivo alguno para que una compañía pueda considerar períodos distintos.

Vale la pena observar que bajo este plan únicamente se cubre la contingencia de morir durante un período de tiempo, lo que resulta en que pocas pólizas se pagan porque suceda la muerte, toda vez que es muy probable que el asegurado llegue con vida al final del período, adicionalmente se tiene que comparativamente el costo de la prima neta única con un seguro de vida entera es menor, lo cual no implica que el seguro temporal sea más económico sino que el beneficio se reduce a un lapso más corto de tiempo.

Supongamos una suma asegurada de $1.00 pagadera al fin de año en que ocurre la muerte del asegurado. La prima neta única para un plan temporal normal se denota por $A^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ y como se sabe es la cantidad de dinero que por única vez, de contado y por anticipado, el asegurado debe pagar a la compañía de seguros para quedar protegido por el riesgo de muerte durante la temporalidad del plan.

Por lo que la obligación total de la compañía en valor presente está determinada por:

$$vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \ldots + v^n d_{x+n-1}.$$

Igualando los compromisos se tiene que:

$$l_x \cdot A^{\,1}_{x:\overline{n}|} = vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \ldots + v^n d_{x+n-1}.$$

Despejando $A^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ y multiplicando por v^x el numerador y el denominador, obtenemos la prima neta única que le corresponderá pagar a cada asegurado, es decir:

$$A^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \frac{vd^{x+1}{}_x + v^{x+2} d_{x+1} + v^{x+3} d_{x+2} + \ldots + v^{x+n} d_{x+n-1}}{v^x\, l_x}$$

que en valores conmutados queda expresada de la siguiente manera:

$$A^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x}$$

y por último

$$A^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}\,. \qquad (2.4.1)$$

Si por su parte, el asegurado elije pagar la prima neta única $A^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ en un número de n primas constantes, se tiene que el valor presente de dichos pagos será igual a $P^{\,1}_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Por lo que igualando los compromisos del asegurado y de la aseguradora, se obtiene la siguiente ecuación:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{\dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}{\dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \ . \qquad (2.4.2)$$

Para el caso en que el asegurado decida comprar el seguro en sólo m primas, donde $m < n$, es decir, en un período de pagos menor a la vigencia del seguro, que es de n años, la fórmula a utilizar será la siguiente:

$$_mP^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \ . \qquad (2.4.3)$$

2.5 Seguro temporal variable.

Los seguros temporales de vida que cubren al asegurado el riesgo de muerte durante un período determinado de n años, y que consideran una suma asegurada variable, reciben el nombre de ***seguros temporales de vida con suma asegurada variable.***

El problema de la deducción de la fórmula para el cálculo de la prima neta única, que se denota por $_vA^1_{x:\overline{n}|}$, se plantea de manera general a continuación.

Supongamos una suma asegurada inicial de k pesos, por lo tanto el compromiso de la compañía de seguros en el primer año será pagar precisamente k pesos a cada uno de los beneficiarios correspondientes a los d_x fallecidos en el año $(x, x+1]$, $k \cdot d_x$ pesos. Supongamos que para el segundo período la suma asegurada pactada es igual a la inicial más una variación de h, la compañía de seguros deberá pagar en el segundo año $(k+h) \cdot d_{x+1}$, en el tercer período la suma asegurada será $(k+2h)$, por lo que el compromiso para la conpañía de seguros será $(k+2h) \cdot d_{x+2}$ y así sucesivamente hasta llegar al n-ésimo año en donde el compromiso de la compañía de seguros será igual a $(k+(n-1) \cdot h) \cdot d_{x+n-1}$ pesos.

El valor presente del compromiso total de la compañía de seguros será:

$$v \cdot k \cdot d_x + v^2 \cdot (k+h) \cdot d_{x+1} + v^3 \cdot (k+2h) \cdot d_{x+2} + \ldots\ldots + v^n \cdot (k+(n-1) \cdot h) \cdot d_{x+n-1} .$$

Por el lado de los asegurados, su compromiso consiste en pagar cada uno de ellos la prima neta única ${}_v A^{\,1}_{x\,:\overline{n}|}$, si suponemos que l_x personas contratan el seguro a la vez, se tiene que el compromiso conjunto de los asegurados es $l_x \cdot {}_v A^{\,1}_{x\,:\overline{n}|}$. Igualando el valor presente de ambos compromisos se tiene la siguiente ecuación:

$$l_x \cdot {}_v A^{\,1}_{x\,:\overline{n}|} = v \cdot k \cdot d_x + v^2 \cdot (k+h) \cdot d_{x+1} + v^3 \cdot (k+2h) \cdot d_{x+2} + \ldots\ldots + v^n \cdot (k+(n-1) \cdot h) \cdot d_{x+n-1} ,$$

multiplicando ambos lados de la ecuación por v^x, se tiene que:

$$v^x \cdot l_x \cdot {}_v A^{\,1}_{x\,:\overline{n}|} = v^{x+1} \cdot k \cdot d_x + v^{x+2} \cdot (k+h) \cdot d_{x+1} + v^{x+3} \cdot (k+2h) \cdot d_{x+2} + \ldots\ldots + v^{x+n} \cdot (k+(n-1) \cdot h) \cdot d_{x+n-1}$$

sustituyendo en términos de valores conmutados, la ecuación anterior se convierte en:

$$D_x \cdot {}_v A^{\,1}_{x\,:\overline{n}|} = C_x \cdot k + C_{x+1} \cdot (k+h) + C_{x+2} \cdot (k+2h) + \ldots\ldots + C_{x+n-1} \cdot (k+(n-1) \cdot h)$$

distribuyendo los productos y ordenando los sumandos por columnas y factorizando tenemos:

$$\begin{aligned} D_x \cdot {}_v A^{\,1}_{x\,:\overline{n}|} = {} & k \cdot C_x + k \cdot C_{x+1} + k \cdot C_{x+2} + k \cdot C_{x+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + k \cdot C_{x+n-1} + \\ & h \cdot C_{x+1} + 2h \cdot C_{x+2} + 3h \cdot C_{x+3} + 4h \cdot C_{x+4} + \ldots + (n-1) \cdot h \cdot C_{x+n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x \cdot {}_v A^{\,1}_{x\,:\overline{n}|} = k \cdot C_x + {} & k \cdot C_{x+1} + k \cdot C_{x+2} + k \cdot C_{x+3} + k \cdot C_{x+4} + \ldots\ldots + k \cdot C_{x+n-1} + \\ & h \cdot C_{x+1} + h \cdot C_{x+2} + h \cdot C_{x+3} + h \cdot C_{x+4} + \ldots\ldots + h \cdot C_{x+n-1} + \\ & \qquad\quad h \cdot C_{x+2} + h \cdot C_{x+3} + h \cdot C_{x+4} + \ldots\ldots + h \cdot C_{x+n-1} + \\ & \qquad\qquad\qquad h \cdot C_{x+3} + h \cdot C_{x+4} + \ldots\ldots + h \cdot C_{x+n-1} + \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad h \cdot C_{x+4} + \ldots\ldots + h \cdot C_{x+n-1} + \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + h \cdot C_{x+n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x \cdot {}_vA'_{x:\overline{n}|} = k[C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots\ldots + C_{x+n-1}] &+ \\ h[C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + C_{x+4} + \ldots\ldots + C_{x+n-1}] &+ \\ h[C_{x+2} + C_{x+3} + C_{x+4} + \ldots\ldots + C_{x+n-1}] &+ \\ h[C_{x+3} + C_{x+4} + \ldots\ldots + C_{x+n-1}] &+ \\ h[C_{x+4} + \ldots\ldots + C_{x+n-1}] &+ \\ \vdots \\ +h[C_{x+n-1}] \end{aligned}$$

Recordando que $\quad M_x = \sum_{t=0}^{t=\omega-x-1} C_{x+t}, \quad$ tenemos:

$$D_x \cdot {}_vA'_{x:\overline{n}|} = k\cdot(M_x - M_{x+n}) + h\,[(M_{x+1} - M_{x+n}) + (M_{x+2} - M_{x+n}) + \ldots\ldots + (M_{x+n-1} - M_{x+n})]$$

entonces

$$D_x \cdot {}_vA'_{x:\overline{n}|} = k\cdot(M_x - M_{x+n}) + h\,[M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots\ldots + M_{x+n-1} - (n\text{-}1)\cdot M_{x+n}\,].$$

Hagamos uso ahora de la función conmutada R_x, definida como:

$$R_x = \sum_{t=0}^{t=\omega-x-1} M_{x+t}$$

que sustituyéndola en la ecuación anterior, resulta:

$$D_x \cdot {}_vA'_{x:\overline{n}|} = k\cdot(M_x - M_{x+n}) + h\cdot(R_{x+1} - R_{x+n+1} - n\cdot M_{x+n})$$

finalmente, despejando ${}_{v}A^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ se obtiene:

$$ {}_{v}A^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \frac{k\cdot(M_x - M_{x+n}) + h\cdot(R_{x+1} - R_{x+n+1} - n\cdot M_{x+n})}{D_x} \quad . \tag{2.5.1} $$

La fórmula (2.5.1) sirve para obtener la prima neta única de un seguro temporal con suma asegurada variable.

Si el asegurado elije pagar la prima neta única ${}_{v}A^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ en un número de n primas constantes, se tiene que el valor presente de dichos pagos será igual a ${}_{v}P^{\,1}_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Por lo que igualando los compromisos del asegurado y de la aseguradora, se obtiene la siguiente ecuación:

$$ {}_{v}A^{\,1}_{x:\overline{n}|} = {}_{v}P^{\,1}_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} $$

$$ {}_{v}P^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\dfrac{k\cdot(M_x - M_{x+n}) + h\cdot(R_{x+1} - R_{x+n+1} - n\cdot M_{x+n})}{D_x}}{\dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} $$

$$ {}_{v}P^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \frac{k\cdot(M_x - M_{x+n}) + h\cdot(R_{x+1} - R_{x+n+1} - n\cdot M_{x+n})}{N_x - N_{x+n}} \quad . \tag{2.5.2} $$

La fórmula (2.5.2) sirve para obtener la prima neta nivelada de un seguro temporal con suma asegurada variable.

2.6 Seguro dotal mixto.

El **seguro dotal mixto** se define a través de una poliza que cubre al asegurado el riesgo de muerte y su sobrevivencia por un período determinado (***temporalidad del plan***), siempre y cuando el contrato no se anule previamente por la falta de pago de una prima vencida o si no se rescata su valor en efectivo. La suma asegurada se paga a los beneficiarios sí el asegurado fallece dentro del período establecido y también si llega con vida al final de la temporalidad del plan entregándose, en este último caso, el capital diferido a los beneficiarios o al propio asegurado. La prima se paga durante la temporalidad del plan.

El valor actual o prima neta única de este seguro se denota por $A_{x:\overline{n|}}$. La prima está conformada por la suma de la prima neta única de un seguro temporal más la prima neta única del capital diferido.

Por lo tanto:

$$A_{x:\overline{n|}} = A^{1}_{x:\overline{n|}} + {}_{n}E_{x}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

sumando términos se tiene que:

$$A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \,. \qquad (2.6.1)$$

Para obtener la prima neta nivelada $P_{x:\overline{n|}}$ pagadera durante "n" años de este seguro, es suficiente dividir la fórmula (2.6.1) por la anualidad $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$, por lo tanto:

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

sustituyendo se obtiene:

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{\dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}}{\dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$$

de donde, finalmente:

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \; . \qquad (2.6.2)$$

La fórmula (2.6.2) sirve para calcular la prima neta nivelada de un seguro dotal mixto.

Capítulo 3 Métodos tradicionales de cálculo de las reservas matemáticas

3.1 Introducción

Antes de comenzar a explicar lo que son los sistemas de reserva modificada, es importante tener una noción precisa de lo que es la reserva matemática de una póliza y de los diferentes métodos que existen para su cálculo. Lo anterior nos llevará a lograr una mejor comprensión de los capítulos posteriores.

Los planes de prima neta nivelada analizados en el Capítulo anterior, introducen un elemento enteramente nuevo en el esquema de operación, el fondo de inversión formado por los pagos exedentes. Este fondo se llama la *reserva*, el cual es un término más bien desafortunado puesto que en realidad no es una reserva en el sentido ordinario comercial que implica superávit, sino un fondo que la compañía debe mantener para poder pagar todas las reclamaciones por muerte y sin el cual, sería insolvente. Adicionalmente, la existencia de esta reserva ocasiona un cambio radical en el verdadero costo del seguro.

Si analizaramos una póliza de prima nivelada, notaríamos que cuando un tenedor de póliza muere, la reserva acumulada queda disponible como parte del "*valor nominal*" pagadero, y como consecuencia, a medida que la reserva aumenta, el seguro real o como es llamado, la cantidad neta en riesgo, disminuye (*valor nominal menos la reserva*).

Así, la tasa de fallecimiento en aumento es compensada por un importe decreciente de seguro efectivo, y el costo se mantiene a una cifra razonablemente baja. Cabe señalar, que la reserva se acumula con base en las tasas de mortalidad supuestas y no sobre la base de la mortalidad realmente ocurrida. Si, como será habitualmente el caso, los supuestos hechos acerca de las futuras tasas de mortalidad e interés son conservadoras, se produciran utilidades. Es decir, las reclamaciones por muerte reales serán más bajas que las supuestas y provistas en la prima neta, la diferencia será una ganancia de la mortalidad, la cual aumentará el fondo del superávit de la compañía. Por su parte, la tasa de interés que se usará en el cálculo de la prima neta seguramente se escogerá menor a la tasa considerada como probable a ganarse, lo cual también aumentará el fondo hasta que se distribuya entre los asegurados vía dividendos.

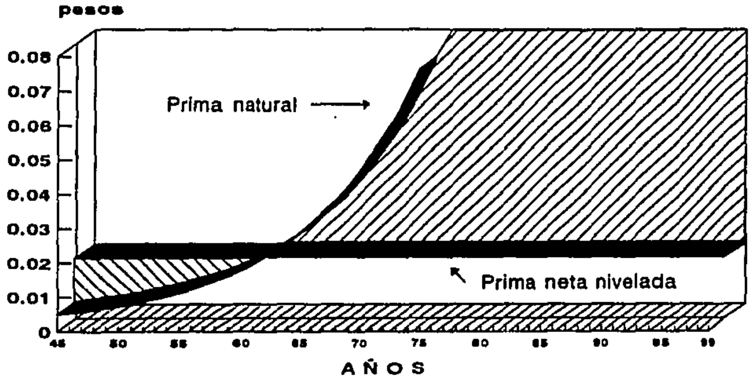
Los dividendos, son las partes del superávit de la compañía repartidos a los asegurados de pólizas con participación, generalmente en forma anual, bien sea en efectivo o de otra manera.

Otra forma de analizar la formación de las reservas es la siguiente.

Supóngase que una persona desea tomar un seguro de vida entera, y que en lugar de pagar la prima neta única o la prima neta nivelada, decide buscar otra combinación: renueva todos los años su seguro y paga la prima que de año en año, va siendo necesaria según su edad. Esta operación no da lugar a reservas, puesto que la prima se devenga al fin de cada año. La prima neta que en un año dado le corresponde pagar, será, de conformidad con su edad x, $v \cdot q_x$, para una suma asegurada de $1.00. Esta prima es conocida con el nombre de ***prima natural***, y es proporcional a la probabilidad de muerte, esto es, crece a medida que aumenta la edad del asegurado. Como consecuencia, para edades muy avanzadas el seguro resultaría incosteable, razón por lo que las compañías aseguradoras la reemplazan por la prima neta nivelada.

Como se aprecia en la gráfica, la prima natural aumenta con los años y la prima neta nivelada es mayor durante los primeros años del seguro. Así, durante estos primeros años el asegurado paga un excedente sobre el riesgo del año en curso, el cual, es capitalizado para cubrir el déficit producido cuando las primas netas niveladas son inferiores a las primas naturales, en años posteriores.

EVOLUCION DE LA PRIMA NETA NIVELADA Y DE LA PRIMA NATURAL PARA UNA PERSONA DE EDAD 45 Y UNA SUMA ASEGURADA DE $1.00



FUENTE: Cálculos elaborados utilizando la Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana 67-67 y una tasa de interés de 6.0%.

Es necesario entonces, reservar y capitalizar esos excedentes. Quedando así, explicado el objeto central de las reservas.

Lo que se ha ido acumulando de esos excedentes es en realidad lo que vale una póliza en un momento dado, por ese motivo los actuarios ingleses denominan a dichos excedentes "*Valores de póliza*", toda vez que el nombre de ***Reserva*** sugiere la idea de un sobrante destinado a cubrir contingencias imprevistas, y no el de ser un fondo que sirva para cubrir riesgos futuros, es decir, un pasivo del asegurador.

Técnicamente hablando, tenemos que para todo seguro contratado a primas netas niveladas pagaderas anualmente se cumple, al inicio del contrato, la ecuación:

$$A_x = P_x \cdot \ddot{a}_x \qquad (3.1.1)$$

lo cual quiere decir que en ese momento, los compromisos del asegurado y de la compañía son iguales.

Pero, conforme comienza a transcurrir el tiempo, inmediatamente se rompe el equilibrio de los compromisos y al cabo de t años, se tiene que:

$$A_{x+t} \neq P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} \; . \qquad (3.1.2)$$

Esta diferencia se debe a que la prima neta nivelada, que debe corresponder a la prima neta única A_{x+t} debe ser P_{x+t}, cumpliendose así la siguiente ecuación:

$$A_{x+t} = P_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t} \; . \qquad (3.1.3)$$

A continuación se demuestra, el porque de la diferencia involucrada en la fórmula (3.1.2).

Como es del conocimiento, en la generalidad de los planes de seguros, la prima neta nivelada para un seguro del mismo tipo crece al crecer la edad, y por consiguiente se cumple la siguiente desigualdad.

$$P_{x+t} > P_x \qquad (3.1.4)$$

ahora si multiplicamos ambos lados de la desigualdad por $\ddot{a}_{x+t}$, se tiene que:

$$P_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t} > P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}.$$

Pero como $A_{x+t} = P_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t}$, se tiene entonces que:

$$A_{x+t} > P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} ,$$

lo cual quiere decir que el compromiso de la aseguradora en el año t, es mayor que el del asegurado, y es precisamente esta diferencia, lo que se conoce con el nombre de ***reserva***, mísma que se simboliza con la letra V_x (*inicial de la expresión inglesa -value of police-*). Obteniendose así la siguiente ecuación:

$${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

que es el valor de la reserva en el año t.

3.1.1 Reservas negativas

En el seguro de vida entera, se tiene que las reservas representan un pasivo de la compañía de seguros. Sin embargo, es importante dar una respuesta a la siguiente pregunta: ¿habrá otros tipos de seguros en el que las reservas puedan representar, en un momento dado, un activo para el asegurador?. La respuesta es afirmativa, y el caso más claro lo representa el seguro a prima constante con suma asegurada decreciente; que cubre, por ejemplo, el saldo de una deuda que se amortiza con cuotas periódicas. Por lo tanto, los aseguradores toman ciertas medidas para evitar que se produzcan las que, en el técnisismo profesional se denominan "***Reservas negativas***", y que representan no un pasivo, sino un activo para la compañía de seguros; es decir, tenemos el caso en el que los compromisos del asegurado son mayores a los del asegurador.

El motivo del porqué el asegurador debe evitar dichas reservas es obvia, ya que éste debe cumplir con su compromiso hasta el final, en tanto que el asegurado puede romperlo con únicamente dejar de pagar las primas. En consecuencia, el activo que pudiera representar una reserva negativa, una deuda que el asegurado pudiere pagar o no, según su conveniencia, sería un activo eventual que no podría ser tomado en cuenta por la empresa aseguradora.

En el ejemplo anterior, seguro de saldo de una renta, se puede establecer que las primas se cubran durante un número de años menor al que tarda en terminarse la deuda, o se puede cobrar de inmediato una porción determinada de la prima neta única, fraccionando en cuotas el resto.

3.2 Método prospectivo

En el cálculo de las reservas se utilizan distintos métodos. Sin embargo, el más común es el que se desprende de la definición, es decir, el que considera los compromisos futuros del asegurador y el asegurado. Razón por la que que se le denomina método de ***previsión*** o de ***expectativa.***

De acuerdo con lo anterior, basta encontrar la diferencia entre el valor actual del beneficio del seguro menos el valor actual de las primas netas que faltan por pagar.

En el caso de un seguro de vida entera contratado a edad "x", y pagadero con primas anuales durante toda la vida, es decir, el seguro ordinario de vida. La reserva matemática al cabo de "t" años, queda representada por la ecuación siguiente:

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} \tag{3.2.1} $$

Sin embargo, si en la ecuación (3.2.1) se hacen los cambios correspondientes para cada uno de los tipos de seguros mencionados en el Capítulo anterior, en lo que toca a la prima neta única, a la prima neta nivelada y a la anualidad, tendremos la ecuación que servirá para calcular por el Método Prospectivo, la reserva para el "t"-ésimo año, en cada caso.

3.3 Método retrospectivo

Otra forma de calcular las reservas es utilizando el ***Método Retrospectivo***, el cual se basa en los hechos ya cumplidos, siendo así un método de acumulación. Es decir, la reserva se constituye tomando en cuenta lo cobrado y lo pagado por la compañía de seguros (*considerando los intereses devengados por una y otra parte*).

Al igual que el caso anterior, trataremos de ilustrar el método, por medio de una aplicación al seguro ordinario de vida.

Consideremos l_x personas al inicio del contrato, y sea t el año para el cual queremos calcular la reserva matemática. Al final de dicho año quedan con vida l_{x+t} asegurados, para cada uno de ellos la compañía de seguros debe constituír una reserva ${}_tV_x$ y en conjunto para los sobrevivientes un fondo de $l_{x+t} \cdot {}_tV_x$.

Los cobros realizados por la compañía, tomando en cuenta los intereres devengados hasta el momento en que se calcula la reserva, son los siguientes:

1er. año.- l_x primas con un valor de P_x cada una, que invertidas a una tasa i durante t años, acumularán un total de:

$$P_x \cdot l_x \cdot (1+i)^t$$

2o. año.- l_{x+1} primas con un valor de P_x, que invertidas a una tasa i durante t-1 años, acumularán un total de:

$$P_x \cdot l_{x+1} \cdot (1+i)^{t-1}$$

t-ésimo año.- l_{x+t-1} primas con un valor de P_x, que invertidas a una tasa i durante un año, acumularán un total de:

$$P_x \cdot l_{x+t-1} \cdot (1+i)$$

Asimismo, los pagos hechos por la compañía de seguros serán:

1er. año.- Un peso por cada fallecimiento ocurrido, en total, d_x pesos, que invertidos a una tasa i durante t-1 años, acumularán $d_x \cdot (1+i)^{t-1}$ pesos. En virtud de que se supone que las reclamaciones por muerte se pagan al final de cada año.

2o. año.- Una suma de d_{x+1} pesos, que invertidos a una tasa i durante t-2 años, acumularán $d_{x+1} \cdot (1+i)^{t-2}$ pesos.

t-ésimo año.- En total, d_{x+t-1} pesos, dado que estamos precisamente en el año de valuación t.

Igualando la diferencia entre lo cobrado y lo pagado por la compañía de seguros, con la reserva que debe tener constituída la compañía para el año t, se tiene:

$$l_{x+t} \cdot {}_tV_x = [\, P_x \cdot l_x \cdot (1+i)^t + P_x \cdot l_{x+1} \cdot (1+i)^{t-1} + \dots\dots + P_x \cdot l_{x+t-1} \cdot (1+i) \,]$$
$$- [\, d_x \cdot (1+i)^{t-1} + d_{x+1} \cdot (1+i)^{t-2} + \dots\dots + d_{x+t-2} \cdot (1+i) + d_{x+t-1} \,] .$$

Multiplicando ahora ambos lados de la ecuación por el factor v^{x+t}, se tiene:

$$v^{x+t} \cdot l_{x+t} \cdot {}_tV_x = P_x \cdot [\, l_x \cdot v^x + l_{x+1} \cdot v^{x+1} + \dots\dots l_{x+t-1} \cdot v^{x+t-1} \,]$$
$$- [\, d_x \cdot v^{x+1} + d_{x+1} \cdot v^{x+2} + \dots\dots + d_{x+t-1} \cdot v^{x+t} \,] .$$

Despejando ${}_tV_x$ de la ecuación anterior y utilizando valores conmutados se obtiene:

$${}_tV_x = \frac{P_x \cdot [\, D_x + D_{x+1} + \dots\dots + D_{x+t-1} \,] - [\, C_x + C_{x+1} + \dots\dots\dots + C_{x+t-1} \,]}{D_{x+t}}$$

que es igual a:

$$_{t}V_{x} = \frac{P_{x} \cdot (N_{x} - N_{x+t}) - (M_{x} - M_{x+t})}{D_{x+t}} \quad . \qquad (3.3.1)$$

Al igual que en el método anterior, basta sustituir la prima neta nivelada de cada uno de los diferentes seguros para que la ecuación (3.3.1) se considere de aplicación general.

3.4 Método de Fouret o de recurrencia

El Actuario francés Georges Fouret, ideó un procedimiento para calcular la reserva de un año en función de la reserva del año anterior. Este método es de gran utilidad para comprobar reservas calculadas por otros métodos o para encontrar las de ciertos tipos de seguros cuyas primas requieran de un cálculo demasiado laborioso.

El razonamiento para llegar a la fórmula de Fouret es el siguiente:

Al inicio de t-ésimo año, la compañía de seguros tiene constituída, para cada asegurado, la reserva del año t-1, es decir, $_{t-1}V_{x}$. Y al cobrar la siguiente prima neta nivelada se tiene en total $_{t-1}V_{x} + P_{x}$, por asegurado. Para los l_{x+t-1} que quedan con vida, tendrán un total de:

$$l_{x+t-1} \cdot (\,_{t-1}V_{x} + P_{x})$$

que invertidos a una tasa de interés i, durante un año, constituirá un total de:

$$l_{x+t-1} \cdot (\,_{t-1}V_{x} + P_{x}) \cdot (1+i)$$

Con este fondo, se deben pagar los seguros de los d_{x+t-1} fallecimientos que se producen en el año $(t\text{-}1, t]$, suponiendo que las reclamaciones se pagan al final del año. Asimismo, se deberá constituír una reserva final ${}_tV_x$, para cada uno de los l_{x+t} asegurados que sobrevivan hasta el año t, lo que en conjunto deberá ser:

$$d_{x+t-1} + l_{x+t} \cdot {}_tV_x \;.$$

Igualando las dos obligaciones anteriores, se obtiene la siguiente ecuación:

$$l_{x+t-1} \cdot ({}_{t-1}V_x + \mathrm{P}_x) \cdot (1+i) = d_{x+t-1} + l_{x+t} \cdot {}_tV_x$$

de donde despejando ${}_tV_x$ se tiene que:

$$ {}_tV_x = \frac{l_{x+t-1} \cdot ({}_{t-1}V_x + \mathrm{P}_x) \cdot (1+i) - d_{x+t-1}}{l_{x+t}} \;. \tag{3.4.1}$$

La fórmula (3.4.1) es la fórmula que sirve para calcular la reserva términal ${}_tV_x$, en función de la reserva anterior ${}_{t-1}V_x$. Se señala también que se puede generalizar la fórmula (3.4.1), si se sustituye en ella la expresión que sirve para calcular la prima neta nivelada de cada uno de los diferentes tipos de seguros.

3.5 Fórmula de acumulación de Fackler

Dentro de las fórmulas de reservas términales sucesivas se tiene la fórmula de Fackler, que la podemos obtener a partir de la ecuación (3.4.1), de la manera siguiente.

Sí multiplicamos el numerador y el denominador de la ecuación (3.4.1) por el factor v^{x+t} se tiene:

$$ {}_tV_x = \frac{v^{x+t-1} \cdot l_{x+t-1} \cdot ({}_{t-1}V_x + P_x) - v^{x+t} \cdot d_{x+t-1}}{v^{x+t} \cdot l_{x+t}} \; . $$

Sustituyendo en terminos de valores conmutados, se obtiene:

$$ {}_tV_x = \frac{D_{x+t-1} \cdot ({}_{t-1}V_x + P_x) - C_{x+t-1}}{D_{x+t}} \qquad (3.5.1) $$

ahora, separando en la ecuación (3.5.1) los dos términos del lado derecho, y definiendo:

$$ \frac{D_{x+t-1}}{D_{x+t}} = U_{x+t-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{C_{x+t-1}}{D_{x+t}} = K_{x+t-1} $$

y sustituyendo, se tiene que:

$$ {}_tV_x = ({}_{t-1}V + P_x) \cdot U_{x+t-1} - K_{x+t-1} \; . \qquad (3.5.2) $$

La ecuación (3.5.2) es entonces, la fórmula de acumulación de Fackler que sirve para calcular la reserva matemática de una poliza en el año "t".

Otra forma de ver la ecuación (3.5.2), y que se utiliza frecuentemente es la siguiente.

Dividiendo el numerador y el denominador de la ecuación (3.4.1) por el factor l_{x+t-1}, tenemos:

$$
{}_tV_x = \frac{\dfrac{l_{x+t-1}}{l_{x+t-1}} \cdot ({}_{t-1}V_x + \mathrm{P}_x) \cdot (1+i) - \dfrac{d_{x+t-1}}{l_{x+t-1}}}{\dfrac{l_{x+t}}{l_{x+t-1}}}
$$

entonces:

$$
{}_tV_x = \frac{({}_{t-1}V_x + \mathrm{P}_x) \cdot (1+i) - q_{x+t-1}}{p_{x+t-1}} \; . \tag{3.5.3}
$$

La fórmula (3.5.3), es también otra fórmula de acumulación. Cabe señalar que si en las ecuaciones (3.5.2) y (3.5.3), sustituímos las primas netas anuales de los diferentes tipos de seguros, veremos que también tienen aplicación general.

3.6 Equivalencia matemática

Sean **A**, **B**, y **C** tres fórmulas tales que sí **A** ≡ **B** y **B** ≡ **C**, entonces si aplicamos la propiedad transitiva a la relación de equivalencia entre fórmulas, se tiene que **A** ≡ **C**.

Las relaciones anteriores nos servirán para demostrar la equivalencia matemática entre el método retrospectivo, el prospectivo y el de Fackler, siguiendo ese orden y tomando como ejemplo el seguro ordinario de vida (*aunque se podría tomar cualquier otro*).

<u>**Demostración**</u>

Sean:

A = La fórmula del Método Retrospectivo.

B = La fórmula del Método Prospectivo.

C = La fórmula del Método de Fackler.

En primer lugar se demostrará que **A** ≡ **B**

A, es la fórmula (3.3.1) a saber:

$$ {}_tV_x = \frac{P_x \cdot (N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}} $$

De la cual, separando los dos términos del numerador del segundo miembro, se tiene:

$$ {}_tV_x = P_x \cdot \frac{(N_x - N_{x+t})}{D_{x+t}} - \frac{(M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}} $$

$$ = P_x \cdot \frac{N_x}{D_{x+t}} - P_x \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{D_{x+t}} + \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} \qquad (3.6.1) $$

Por otra parte sabemos que:

$$\text{i).-}\quad P_x \cdot \frac{N_x}{D_{x+t}} = \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_x}{D_{x+t}} = \frac{M_x}{D_{x+t}}$$

$$\text{ii).-}\quad P_x \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} = P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

Sustituyendo i) y ii) en (3.6.1), se tiene que:

$$_tV_x = \frac{M_x}{D_{x+t}} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} - \frac{M_x}{D_{x+t}} + \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}}$$

El primer y tercer términos del segundo miembro de la ecuación anterior se eliminan, quedando:

$$_tV_x = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

y como $A_{x+t} = \dfrac{M_{x+t}}{D_{x+t}}$, se tiene que:

$$_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} \; .$$

Que es la fórmula (3.2.1) del método Prospectivo, y que en nuestra demostración esta representada por **B**. Hasta aquí, se ha demostrado que **A** ≡ **B**. Es decir que **A** es equivalente a **B**.

En segundo lugar demostraremos que **B ≡ C.**

Partiremos entonces de la fórmula: ${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}$

a la que sumando el factor P_x a ambos lados de la igualdad, nos queda de la siguiente forma:

$${}_tV_x + P_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} + P_x$$

que es igual a:

$${}_tV_x + P_x = A_{x+t} - P_x \cdot (\ddot{a}_{x+t} - 1)$$

sustituyendo $a_{x+t} = \ddot{a}_{x+t} - 1$ en la fórmula anterior, se tiene que:

$${}_tV_x + P_x = A_{x+t} - P_x \cdot a_{x+t} \qquad (3.6.2)$$

recordando que, $A_{x+t} = v \cdot q_{x+t} + v \cdot p_{x+t} \cdot A_{x+t+1}$ y que, $a_{x+t} = v \cdot p_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t+1}$ donde q_{x+t} y p_{x+t} son probabilidades de muerte y de supervivencia respectivamente.

Sustituyendo en (3.6.2), se tiene:

$$\begin{aligned} {}_tV_x + P_x &= v \cdot q_{x+t} + v \cdot p_{x+t} \cdot A_{x+t+1} - P_x \cdot (v \cdot p_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t+1}) \\ &= v \cdot q_{x+t} + v \cdot p_{x+t} \cdot (A_{x+t+1} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t+1}) \end{aligned}$$

entonces:

$$ {}_tV_x + P_x = v \cdot q_{x+t} + v \cdot p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x $$

de donde despejando ${}_{t+1}V_x$

$$ {}_{t+1}V_x = \frac{({}_tV_x + P_x) - v \cdot q_{x+t}}{v \cdot p_{x+t}} $$

que es igual a tener:

$$ {}_{t+1}V_x = \frac{({}_tV_x + P_x) - v \cdot \dfrac{d_{x+t}}{l_{x+t}}}{v \cdot \dfrac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}}} $$

ahora, multiplicando el numerador y el denominador del segundo miembro de la ecuación anterior, por el factor $v^{x+t} \cdot l_{x+t}$, resulta que:

$$ {}_{t+1}V_x = \frac{v^{x+t} \cdot l_{x+t} \cdot ({}_tV_x + P_x) - v^{x+t+1} \cdot d_{x+t}}{v^{x+t+1} \cdot l_{x+t+1}} $$

Sustituyendo en terminos de valores conmutados, se tiene:

$$ {}_{t+1}V_x = \frac{D_{x+t} \cdot ({}_tV_x + P_x) - C_{x+t}}{D_{x+t+1}} \tag{3.6.3} $$

ahora, separando los dos términos del lado derecho:

$$_{t+1}V_x = ({}_tV_x + P_x) \cdot \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} - \frac{C_{x+t}}{D_{x+t+1}}$$

en donde si hacemos:

$$\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} = U_{x+t} \qquad \text{y} \qquad \frac{C_{x+t}}{D_{x+t+1}} = K_{x+t}$$

resulta finalmente que:

$$_{t+1}V_x = ({}_tV_x + P_x) \cdot U_{x+t} - K_{x+t}$$

que es la fórmula (3.5.2) del método de Fackler y que en nuestra demostración es **C**, por lo que hemos demostrado que **B** ≡ **C**. Es decir, que **B** es equivalente a **C**.

Finalmente, se ha demostrado que **A** es equivalente a **B** y que **B** es equivalente a **C**, por lo que se concluye que **A** es equivalente a **C** y por lo tanto los tres métodos son equivalentes entre sí.

Que los tres métodos sean equivalentes entre sí, quiere decir que el valor de la reserva es el mismo bajo los tres métodos. Es importante aclarar, que sólo se consideraron estos tres métodos para la demostración, en virtud de que éstos son los más utilizados y los más representativos en el cálculo de las reservas del seguro tradicional.

3.7 Método de la diferencia en primas

El método de la diferencia en primas tiene similitud con el método retrospectivo, siendo por lo tanto de acumulación y de valuación de compromisos en un año determinado.

El nombre del método surgió debido a que nació del razonamiento siguiente.

Supóngase:

- Una persona de edad "x".

- Un seguro ordinario de vida A_x (podría ser cualquier otro) al que deseamos calcular su reserva en el t-ésimo año, con una suma asegurada de $1.00 pagadero al final del año en que ocurre la muerte del asegurado.

- Un seguro temporal $A^{1}_{x:\overline{t|}}$ con una duración de t-años y una suma asegurada de $1.00 pagadero al final del año en que ocurre la muerte del asegurado.

Con estos supuestos, se garantiza que en ambos seguros se constituye una reserva que corresponde a una suma asegurada de $1.00.

Debido a que la reserva del seguro temporal es igual a cero al final del año t, se deduce que la diferencia de primas de los dos seguros, ordinario de vida menos temporal, acumuladas hasta ese año es igual a la reserva del t-ésimo año del seguro vitalicio que deseamos calcular.

Técnicamente sería lo siguiente:

La prima neta nivelada del seguro ordinario de vida se expresa como:

$$P_x = \frac{M_x}{N_x} \ .$$

La prima neta nivelada del seguro temporal es igual a:

$$P^{1}_{x:\overline{t|}} = \frac{M_x - M_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}$$

La reserva en el año t que debemos constituir para las personas que contrataron el seguro ordinario de vida esta dada por:

$$l_{x+t} \cdot {}_tV_x$$

La diferencia de las primas valuadas en el año t son iguales a:

$$(P_x - P^{\prime}_{x:\overline{T}|}) \cdot l_x \cdot (1+i)^t + (P_x - P^{\prime}_{x:\overline{T}|}) \cdot l_{x+1} \cdot (1+i)^{t-1} + \dots + (P_x - P^{\prime}_{x:\overline{T}|}) \cdot l_{x+t-1} \cdot (1+i)$$

por lo que, igualando los compromisos anteriores se obtiene:

$$l_{x+t} \cdot {}_tV_x = (P_x - P^{\prime}_{x:\overline{T}|}) \cdot \left[l_x \cdot (1+i)^t + l_{x+1} \cdot (1+i)^{t-1} + \dots + l_{x+t-1} \cdot (1+i) \right] .$$

Si ahora multiplicamos la ecuación anterior por v^{x+t}, resulta que:

$$v^{x+t} \cdot l_{x+t} \cdot {}_tV_x = (P_x - P^{\prime}_{x:\overline{T}|}) \cdot \left[v^{x+t} \cdot l_x \cdot (1+i)^t + v^{x+t} \cdot l_{x+1} \cdot (1+i)^{t-1} + \dots + v^{x+t} \cdot l_{x+t-1} \cdot (1+i) \right]$$

que es igual a:

$$v^{x+t} \cdot l_{x+t} \cdot {}_tV_x = (P_x - P^{\prime}_{x:\overline{T}|}) \cdot \left[v^x \cdot l_x + v^{x+1} \cdot l_{x+1} + \dots + v^{x+t-1} \cdot l_{x+t-1} \right]$$

sustituyendo en términos de los valores conmutados correspondientes, resulta:

$$D_{x+t} \cdot {}_tV_x = (P_x - P^{\prime}_{x:\overline{T}|}) \cdot \left[D_x + D_{x+1} + \dots + D_{x+t-1} \right] .$$

Por lo tanto, la reserva del seguro vitalicio en el t-ésimo año es igual a:

$$_tV_x = \frac{(P_x - P^{\prime}_{x:\overline{T}|}) \cdot (N_x - N_{x+t})}{D_{x+t}} \tag{3.7.1}$$

La fórmula anterior se obtuvo a partir del método que se ha denominado "***Método de la diferencia en primas***". El método, siempre considera la prima neta nivelada de un seguro temporal.

3.7.1 Equivalencia matemática del método de la diferencia en primas con el método prospectivo.

Con el propósito de darle la validez necesaria al método que se ha expuesto en el inciso 3.7 de este Capítulo, se presenta a continuación la demostración de la equivalencia matemática entre la fórmula (3.7.1) del método de las diferencias en primas con la fórmula (3.2.1) del método prospectivo.

La fórmula (3.7.1), se puede ver como:

$$ {}_tV_x = P_x \cdot \frac{(N_x - N_{x+t})}{D_{x+t}} - P'_{x:\overline{t|}} \cdot \frac{(N_x - N_{x+t})}{D_{x+t}} $$

sustituyendo ahora P_x y $P'_{x:\overline{t|}}$ en la ecuación anterior tenemos:

$$ {}_tV_x = \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{(N_x - N_{x+t})}{D_{x+t}} - \frac{(M_x - M_{x+t})}{(N_x - N_{x+t})} \cdot \frac{(N_x - N_{x+t})}{D_{x+t}} $$

distribuyendo el producto del primer término, y eliminando términos en el segundo, tenemos:

$$ {}_tV_x = \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_x}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{(M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}} $$

$$ {}_tV_x = \frac{M_x}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{D_{x+t}} + \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} $$

por lo tanto:

$$ {}_tV_x = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} $$

lo que demuestra que ambos métodos son equivalentes.

Capítulo 4 Análisis de los sistemas modificados de reserva

4.1 Reservas cargadas

Cuando el asegurado contrata un seguro a prima neta nivelada anual, los gastos corrientes se reparten facilmente sobre toda la duración del seguro, pues se cobran y se pagan año con año con la misma prima, incluida en la prima de tarifa (*prima neta nivelada más gastos y previsiones*). Los gastos de adquisición se abonan por adelantado y se recuperan, poco a poco, en las primas futuras. En los primeros tiempos no ocurria así, los gastos de adquisición se diluían en las primas futuras y se pagaban a medida que se iban cobrando, pero la competencia obligó a buscar una forma atrayente de retribuir el trabajo de los agentes vendedores, quienes viéndose cada vez más solicitados, elevaron gradualmente sus exigencias. Esto último, dio origen a un problema: el de distribuir ese fuerte recargo en las primas sucesivas, esto es, desde que el asegurado empezaba a pagar sus primas siempre iguales, es decir, primas de tarifa niveladas. Adicionalmente, esta situación generó un nuevo problema, que se da cuando el asegurado abandona el seguro antes de tiempo y origina una pérdida al asegurador por los gastos de adquisición realizados por anticipado en favor del asegurado, y no recuperados aún (*pérdida que al momento de contratar el seguro, es igual al valor presente de las fracciones de dichos gastos incluidos en las primas que faltó de pagar*). Este segundo problema será considerado posteriormente, en cuanto al primero, es de fácil solución.

La compañía de seguros adelanta el pago de la comisión, para recuperar ese anticipo debe percibir del asegurado un recargo anual, recargo que constituye sencillamente, una renta que se extiende sobre la duración completa del contrato de seguro, exactamente igual que la misma prima. Si es "C" la suma anticipada por gastos de adquisición, el recargo anual que la compensa es

$$\frac{C}{\ddot{a}},$$

sí la comisión "C" está calculada como una proporción de la suma asegurada. Y será

$$\frac{\alpha \cdot P'}{\ddot{a}}$$

cuando la comisión será igual a un porcentaje, "α" de la prima de tarifa, P'.

Por su parte, los gastos de administración pueden también establecerse mediante un coeficiente "k" proporcional a la suma asegurada y mediante un porcentaje "β" de la prima de tarifa, es decir, $\beta \cdot P'$.

Sea P la prima neta nivelada, si consideramos un seguro en el que los gastos tanto de adquisición como de administración se distribuyen, parte como proporción de la suma asegurada y parte en proporción a la prima de tarifa, se llega a la siguiente ecuación:

$$P' = P + \frac{C}{\ddot{a}} + \frac{\alpha \cdot P'}{\ddot{a}} + k + \beta \cdot P' \qquad (4.1.1)$$

de la que, despejando P', se tiene:

$$P' = \frac{P + \dfrac{C}{\ddot{a}} + k}{1 - \beta - \dfrac{\alpha}{\ddot{a}}}$$

que es la prima de tarifa anual que incluye todos los gastos.

Las reservas puras vistas en el Capítulo anterior no consideran el gasto que realiza la companía de seguros por concepto de adquisición, en virtud de que únicamente se han calculado a manera de anticipo, y con cargo de irse reembolsando en los años siguientes.

Visto de otra manera, esas reservas puras son superiores a las que se obtienen reemplazando la prima neta anual niveleda P, con cargo al asegurado, por otra prima P'' que incluye la parte de carga que corresponde a los gastos de adquisición. Las reservas que se constituyen de esta manera reciben el nombre de ***Reservas Cargadas***.

Técnicamente las reservas cargadas están representadas de la siguiente manera.

Si "C" representa los gastos de adquisición, entonces se tiene que:

$$P'' = P + \frac{C}{\ddot{a}} = P \cdot \left(1 + \frac{C}{P \cdot \ddot{a}}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{C}{A}\right)$$

siempre que $\vartheta = \dfrac{C}{A} = \dfrac{C}{P \cdot \ddot{a}}$

y que $C = \vartheta \cdot A = \vartheta \cdot P \cdot \ddot{a}$,

por lo tanto:

$$P'' = P \cdot (1 + \vartheta).$$

Si consideramos la ecuación del método prospectivo

$$V_{(m)} = A_{(m)} - P \cdot \ddot{a}_{(m)}$$

donde "m" significa el año m-ésimo, y substituimos los valores anteriores se tiene que:

$$V'_{(m)} = A_{(m)} - P'' \cdot \ddot{a}_{(m)} \tag{4.1.2}$$

$$V'_{(m)} = A_{(m)} - P \cdot (1 + \vartheta) \cdot \ddot{a}_{(m)}$$

$$V'_{(m)} = A_{(m)} - P \cdot \ddot{a}_{(m)} - P \cdot \vartheta \cdot \ddot{a}_{(m)} \tag{4.1.2.a}$$

$$V'_{(m)} = V_{(m)} - P \cdot \vartheta \cdot \ddot{a}_{(m)} \tag{4.1.3}$$

donde $V'_{(m)}$ representa la reserva cargada.

Por otra parte, si sustituimos $A_{(m)} = P_{(m)} \cdot \ddot{a}_{(m)}$ en (4.1.2) obtenemos que:

$$\begin{aligned} V'_{(m)} &= P_{(m)} \cdot \ddot{a}_{(m)} - P'' \cdot \ddot{a}_{(m)} \\ &= [P_{(m)} - P''] \cdot \ddot{a}_{(m)} \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

o si substituimos $\ddot{a}_{(m)} = \dfrac{A_{(m)}}{P_{(m)}}$ en la misma fórmula, nos queda que:

$$V'_{(m)} = A_{(m)} - \frac{P'' \cdot A_{(m)}}{P_{(m)}}$$

$$V'_{(m)} = A_{(m)} \cdot \left[1 - \frac{P''}{P_{(m)}} \right] \tag{4.1.5}$$

Las ecuaciones (4.1.5), (4.1.4) y (4.1.4) son tres fórmulas que sirven para calcular las reservas cargadas.

Consideremos ahora cuál sería la fórmula para calcular la reserva cargada de un plan de seguro ordinario de vida entera.

Haciendo uso de la siguiente igualdad

$$ {}_mV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}_x} $$

y substituyendola en (4.1.3) se tiene que:

$$ V'_{(m)} = 1 - \frac{\ddot{a}_{(m)}}{\ddot{a}_x} - P \cdot \vartheta \cdot \ddot{a}_{(m)} $$

$$ V'_{(m)} = 1 - \frac{\ddot{a}_{(m)}}{\ddot{a}_x} - P \cdot \vartheta \cdot \ddot{a}_x \cdot \frac{\ddot{a}_{(m)}}{\ddot{a}_x} $$

$$ V'_{(m)} = 1 - \frac{\ddot{a}_{(m)}}{\ddot{a}_x} - C \cdot \frac{\ddot{a}_{(m)}}{\ddot{a}_x} $$

lo que implica que:

$$ V'_{(m)} = 1 - (1 + C) \cdot \frac{\ddot{a}_{(m)}}{\ddot{a}_x} \tag{4.1.6} $$

y por lo tanto,

$$ V'_{(m)} = V_{(m)} - C \cdot \frac{\ddot{a}_{(m)}}{\ddot{a}_x}. \tag{4.1.7} $$

Las fórmulas (4.1.6) y (4.1.7) sirven para calcular la reserva cargada correspondiente al m-ésimo año de un seguro ordinario de vida entera, en función de las rentas vitalicias que corresponden a los gastos de adquisición, y en las cuales se observa claramente que las reservas así calculadas, son menores a las reservas puras.

4.2 El método de Zillmer

El posible derroche en gastos de adquisición, la fabricación de dividendos ficticios y la generación de reservas negativas, son causas que podrían dar lugar a un mal uso de las reservas por parte de las compañías de seguros a fin de evitar la quiebra. La constitución de reservas negativas es, entre las anteriores, la causa más grave de todas. Al respecto, en el año de 1863, el doctor Augusto Zillmer fue el primero en abordar el problema desde un punto de vista rigurosamente científico, logró dar una solución y eliminar los efectos perniciosos del caso.

El método utilizado por el Dr. Zillmer, se denominó "*Método de Zillmer*" y supone que en lugar de que todas las primas sean iguales, la primera debe ser inferior a las demás, en una suma dada, digamos "*C*". Si consideramos que $\bar{P}$ es la prima neta nivelada que deberá pagarse a partir del segundo año, la que corresponde al primero será:

$$\bar{P} - C$$

si ahora tomamos como ejemplo al seguro de vida entera y lo ponemos en función de estas primas, obtenemos la siguiente ecuación:

$$A_x = \bar{P} - C + \bar{P} \cdot a_x \qquad (4.2.1)$$

utilizamos la renta vencida a_x para una edad "x", por que los pagos de las primas se continuan a partir del segundo año, y éstas al momento de contratar el seguro equivalen a una renta vencida.

De la fórmula (4.2.1) se tiene que:

$$A_x = \bar{P} \cdot (1 + a_x) - C$$

$$A_x = \bar{P} \cdot \ddot{a}_x - C$$

despejando $\bar{P}$, obtenemos:

$$\bar{P} = \frac{A_x + C}{\ddot{a}_x}$$

$$\bar{P} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \frac{C}{\ddot{a}_x}$$

$$\bar{P} = P_x + \frac{C}{\ddot{a}_x} \qquad (4.2.2)$$

obteniendo así, el valor de la prima cargada.

Si ahora obtenemos la reserva del primer año bajo el *Método de Zillmer*, se tiene la siguiente ecuación:

$$\bar{V}_{(1)} = A_{x+1} - \bar{P} \cdot \ddot{a}_{x+1}$$

$$\bar{V}_{(1)} = P_{x+1} \cdot \ddot{a}_{x+1} - \bar{P} \cdot \ddot{a}_{x+1}$$

$$\bar{V}_{(1)} = (P_{x+1} - \bar{P}) \cdot \ddot{a}_{x+1}$$

y como esta reserva no debe ser menor que cero, se tiene que como máximo,

$$(P_{x+1} - \bar{P}) = 0$$

$$\bar{P} = P_{x+1}$$

Por otra parte, esta prima así obtenida, no debe ser superior a la prima pura que corresponda a la edad inmediata superior.

Bajo estas condiciones, la carga máxima que debe destinarse a gastos de adquisición se desprende de la fórmula (4.2.2). Ya que, substituyendo en ella:

$$P_{x+1} \quad \text{por} \quad \bar{P}$$

obtenemos:

$$P_{x+1} = P_x + \frac{C}{\ddot{a}_x}$$

donde:

$$C = (P_{x+1} - P_x)\cdot \ddot{a}_x$$

$$C = P_{x+1}\cdot(1 + a_x) - P_x\cdot \ddot{a}_x$$

$$C = P_{x+1} - (P_x\cdot \ddot{a}_x - P_{x+1}\cdot a_x)$$

Si ahora substituimos en esta última ecuación los valores conmutados correspondientes, obtenemos que:

$$C = P_{x+1} - \left[\frac{M_x}{N_x}\cdot\frac{N_x}{D_x} - \frac{M_{x+1}}{N_{x+1}}\cdot\frac{N_{x+1}}{D_x}\right]$$

$$C = P_{x+1} - \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x}$$

$$C = P_{x+1} - \frac{C_x}{D_x}$$

pero como:

$$\frac{C_x}{D_x} = v\cdot q_x = P^{1}_{x:\overline{1}|}$$

que es la prima pura única de un seguro temporal a un año para una persona de edad "x", se tiene entonces que:

$$C = P_{x+1} - P'_{x:\overline{1|}}$$

Lo que quiere decir que la primera prima debe considerarse como la correspondiente a un seguro temporal a un año, de tal forma que el excedente entre la prima cobrada y la natural del año pueda ser aplicado a cubrir los gastos de adquisición, los cuales no deben ser mayores a dicho margen.

El seguro normal empezará un año después y con la prima correspondiente a la edad "$x+1$".

Cabe agregar que si el margen estimado para los primeros gastos es insuficiente, la compañía de seguros tiene que adelantar los fondos necesarios, para reembolsarlos más adelante.

El actuario inglés Thomas Bond Spragne, refiriéndose al mismo asunto, obtuvo conclusiones análogas a las del doctor Zillmer, expresándose de la manera siguiente:

> *"Si los gastos para obtener nuevos negocios han sido tales que los siniestros y los gastos han absorbido la totalidad de las primas del primer año, entonces un método muy sencillo de evaluación y que yo considero perfectamente justificado será el de reservar, para las pólizas en el primer año, la cantidad que baste para cubrir los riesgos corrientes y no vencidos y considerar que todas las otras pólizas han sido efectuadas a la edad inmediata superior."*

La reserva para el año "t" será, según el Método de Zillmer:

$${}_tV_x = A_{x+t} - P_{x+1} \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

$${}_tV_x = P_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t} - P_{x+1} \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

$${}_tV_x = [\, P_{x+t} - P_{x+1} \,] \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

En realidad, la única diferencia entre el Método de Zillmer y el de Spragne, estriba en que el primero sólo trata de cubrir los gastos de la primera comisión, mientras que el segundo, considera que el margen que se le deja a la compañía puede ser invertido en dicha comisión y en los gastos iniciales como son honorarios médicos, análisis clínicos, etcétera.

4.3 Utilidad de las reservas cargadas

Una vez resuelto el problema de las reservas negativas, quedan por discutir las objeciones que se refieren al cercenamiento de las reservas y a su posible inversión en excesivos gastos de adquisición, de administración, o de los posibles dividendos fabricados en forma indebida.

En este sentido, es de importancia reconocer que es la naturaleza misma de las cosas, y no la voluntad de los directores de las compañías de seguros, la que exige que para cada nuevo seguro se tenga que invertir en los primeros gastos una suma que, en ocasiones, llega a ser mayor que la misma prima.

Sin embargo, las compañías en su afán por adquirir nuevos negocios, pueden exagerar en los primeros gastos. Asimismo, puede suceder que con el fin de atraer una mayor clientela, rebajen con exceso sus tarifas, esta forma de actuar es justificable, pues el temor de que se abuse de uno u otro caso, no es razón suficiente para prohibir su uso; lo que debe hacerse, en todo caso, es reglamentar dicha situación o atender la reglamentación existente. Pues tan peligroso es, prescindir de los gastos de adquisición como invertir en ellos sumas exageradas.

Desde el momento que es necesario realizar tales gastos, las compañías necesitan proveerse de los recursos suficientes para poder hacerles frente. Así, algunas destinan al inicio de sus operaciones, una cierta cantidad de su capital con el fin de cubrir las pérdidas eventuales que originan sus primeros negocios, formando así un fondo muerto que de antemano, se resignan a perder, con la esperanza de recuperarlo más adelante.

Un actuario alemán G. Hockner, en su artículo "*La contienda sobre el método de Zillmer en los seguros sobre la vida*", cita el ejemplo de tres compañías alemanas de seguros, que en los respectivos años de su fundación 1896, 1898 y 1900 destinaron para tal efecto 450 000, 600 000 y 900 000 marcos respectivamente, en tres partidas sucesivas de 300 000 marcos cada una. Al principio del año 1902, de tales sumas no quedaba ya nada ni en la primera, ni en la segunda compañía y en la última quedaba sólo una pequeña parte.

Lo anterior muestra lo necesario que es el que las compañías nuevas, tomen en cuenta aunque sea con ciertas restricciones y limitaciones, los gastos iniciales al hacer el cálculo de sus reservas. Mas aún, es claro que si se pretende obligar a las compañías a formar únicamente reservas puras en las primeros años de su fundación, se les podría poner en una situación en la que pueden declararse insolventes, cuando en realidad no lo estuviesen. Podría ocurrir también, que por velar en extremo por los intereses de los asegurados se les perjudicara realmente, pues en ocasiones se liquidarían compañías que podrían estar en condiciones de seguir trabajando. La exageración en cualquier sentido, puede acarrear funestas consecuencias.

La circunstancia de que para las nuevas compañías o para las que están en pleno crecimiento sea de vital importancia poder calcular reservas menores a las puras para poder tomar en cuenta siquiera en parte los gastos de adquisición, es lo que ha hecho calificar de "*muleta*" y de ayuda para cojos el método de Zillmer, o cualquier otro método parecido.

G. Hockner, en su citado artículo, considera que los que así se expresan de dichos métodos están acostumbrados a no considerar dentro del seguro, más factores que la mortalidad y el interés, olvidandose de que no hay seguro posible, si no se toman en cuenta los gastos de adquisición, los de gestión y las oscilaciones imprevistas en las tasas de mortalidad y en la tasa de interés. Agrega además, que "*La teoría es la que cojea si no toma en cuenta elementos sin los cuales el seguro es prácticamente imposible. Tomándolos todos en cuenta no puede hablarse de cercenamiento de reservas desde que no se puede prescindir por completo de los gastos anticipados*".

Un punto importante relacionado con el planteamiento anterior, es el que se refiere a la propiedad de la reserva. Se cree frecuentemente aunque es un error, y algunos juristas no son ajenos a la propagación del mismo, que la reserva es propiedad del asegurado. Ahora bien, es preciso aclarar que una reserva relativa a una póliza, es algo que, de por sí, carece técnicamente de sentido, aunque por comodidad se le calcule de esa manera, sin embargo, decir que la reserva global pertenece a un grupo numeroso de pólizas, sí tiene sentido, aunque su valor no sea en sí una cantidad exacta, sino un valor estimado en el cual intervienen factores convencionales, como son la tasa de interés y la tabla de mortalidad, que no representan cifras matemáticas precisas sino algo que se aproxima mucho a la realidad, y la reserva de una póliza aislada no es más que un promedio de todas las pólizas del mismo grupo.

Hasta aquí, se ha hecho un análisis de un método que permite que las compañías de seguros cubran con cierta comodidad sus gastos iniciales, distribuyéndolos en un período de tiempo más o menos largo, es decir, sobre la duración del seguro, y aunque sólo se tome como base al seguro ordinario de vida entera, es evidente que el mismo análisis se puede aplicar de forma similar a distintas combinaciones de seguro. Naturalmente, cuanto menor sea el número de primas que el asegurado tenga que pagar, tanto más prudente se habrá de ser, al determinar el margen para los primeros gastos. Y no será lícito disponer de todo el excedente de la primera prima. Tal excedente por otra parte, es un límite máximo, es decir, una suma que no se puede superar, pero de ello, no se deduce que sea forzoso gastarla totalmente.

Finalmente, el Método de Zillmer requiere ser utilizado con mucha cautela, pues si bien, es cierto que el no utilizarlo generaría ciertas clases de peligros, su uso inmoderado resultaría de desastrozas consecuencias.

Es por esto que en Alemania, el artículo 11 de la Ley de 1901, estableció de un modo imperativo que:

> "*Deberá indicarse así mismo, si para el cálculo de las reservas se emplea un método según el cual no se constituye, al principio, la reserva entera, indicando el quantum correspondiente; en tal caso, por lo demás, la base del 12.5 0/00 de la suma asegurada no podrá ser superada.*"

Otros países siguen el ejemplo de Francia, en donde sólo se autoriza el uso de una prima levemente cargada, a la que denominan "*Prima de inventario*".

4.4 Sistemas modificados de reserva

4.4.1 Introducción

Como ya se vió en capítulos anteriores, la prima neta nivelada básicamente hace frente a los beneficios contractuales de la póliza, esto es, a las reclamaciones por muerte, las sumas aseguradas que se pagan al vencimiento de las pólizas dotales y los beneficios de valores garantizados tales como los valores en efectivo. Cuando se ilustró el cálculo de la reserva de prima neta nivelada, se vió que con el fin de constituir la reserva necesaria, el saldo de la prima neta de cada año, una vez deducido el costo del seguro, debe acumularse a la tasa de interés supuesta.

De acuerdo con lo anterior, bajo el sistema de prima neta nivelada ninguna fracción de la prima neta estará disponible para los gastos que afronta la compañía de seguros.

Por otra parte, durante el primer año o tal vez en los primeros dos o tres años, los gastos son mayores que el recargo que se hace a la prima. Ya que los gastos no se comparten de manera uniforme a través de la duración del contrato, algunos gastos como el costo del exámen médico, la inspección del riesgo y el costo de preparar y emitir la póliza, se incurren sólo una vez.

Más importante, es el hecho de que bajo el sistema usual de compensación a los agentes, se paga a éstos una tarifa de comisión más elevada en el primer año, o en los primeros años, que en los años posteriores. Dado que el importe del recargo es uniforme; pues se paga la misma prima todos los años, la situación real nos muestra que durante los primeros años, el recargo es insuficiente para pagar los gastos, mientras que de cierto año en adelante es más que suficiente.

Con el objeto de ilustrar lo anterior se presenta abajo una tabla donde se indican los porcentajes de la prima que por comisión se otorgan a los agentes para un plan de seguro ordinario de vida. Los porcentajes que se indican operan actualmente en el mercado mexicano de seguros.

PLAN ORDINARIO DE VIDA

AÑO	COMISION	
1	60%	de la prima
2	30%	"
3	15%	"
4	15%	"
5 y +	5%	"

FUENTE: Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

El resultado de esta situación es que para establecer las reservas de prima neta nivelada, la compañía debe hacer uso temporal de sus fondos del superávit con el fin de saldar los gastos excedentes en los primeros años. Los importes así obtenidos, o sea, los importes pedidos en préstamo al superávit, pueden reembolsarse más tarde, cuando los recargos corrientes sean mayores que los gastos corrientes.

En el caso que una compañía de seguros bien establecida cuente con amplios fondos de superávit, no se deberían tener dificultades de esta índole, pues para cualquier año las disposiciones hechas sobre el superávit para complementar los gastos de las pólizas nuevas se compensarán por el excedente de los recargos sobre los gastos de las pólizas más antigüas.

Cabe agregar que el efecto que se produce en los fondos del superávit carece de importancia, si la compañía logra incrementar gradualmente el importe de nuevos seguros emitidos.

Por otra parte, la situación es muy diferente para el caso de una compañía recientemente organizada, la cual está incrementando rápidamente su cartera de seguros, o para aquélla que no posea amplios fondos de superávit, ya que para los primeros años de una nueva compañía en la cual, las pólizas se han emitido recientemente y no ha tenido el tiempo suficiente de acumular cierto superávit, podría serle imposible el establecer reservas de prima neta nivelada. Es en estas circunstancias cuando es necesario hacer modificaciones al sistema de reservas.

Existen varios "*sistemas modificados de reserva*" que hacen frente a los problemas antes expuestos, y todos se basan en el hecho de que los recargos son insuficientes para pagar los gastos en los primeros años de la póliza, y que son más que suficientes, en los años posteriores.

Así mismo, todos permiten el uso de una parte de las primas netas para pagar los gastos excedentes de los primeros años, previendo lo necesario para que dichas cantidades así utilizadas, se repongan de los recargos de los años posteriores. Dado que se supone que el total de las primas netas son suficientes para pagar las reclamaciones, cualquier parte de dicha prima que se utilice para pagar los gastos debe recuperarse, a como de lugar, bien sea del superávit o de los recargos de las primas de renovación.

Dentro de los sistemas modificados de reserva que se conocen, existen tres, cuyas características los hacen ver como los más importantes, a saber:

1. *Sistema Temporal Preliminar Completo*
2. *Sistema Temporal Preliminar Modificado*
3. *Método de Valuación de Reserva de los Comisionados.*

Cabe señalar que en México, se utilizan básicamente los dos primeros.

En las reformas a la Ley General de Instituciones de Seguros, realizadas en el año de 1946, se establece la posibilidad de que las instituciones de seguros disminuyan de la reserva media el valor presente de la anualidad de amortización de los gastos de adquisición prevista en el cálculo de la prima de tárifa, condicionando esta práctica a lo siguiente:

- El período de amortización será como máximo, el de la duración del contrato.

- Los gastos de adquisición deberán ser como máximo los previstos en la prima de tarifa, previo registro ante la Secretaría de Hacienda y Crédito Público.

- En ningún caso, la reserva media de primas podrá ser menor a la que resulte de aplicar el método denominado "Año Temporal Preliminar"

La propia Secretaría de Hacienda y Crédito Público, mediante circular establece las condiciones de operación de dicho sistema.

La filosofía y el espíritu de la Ley, ha permanecido invariable hasta la fecha, motivo por el cual es conveniente repasar los principios que dieron origen a constituir las reservas modificadas.

4.4.2 Sistema Año Temporal Preliminar Completo

En otros países este sistema no tiene uso práctico importante, sin embargo en México es utilizado con mucha frecuencia por lo que es importante su explicación en primer lugar y, posteriormente, continuar con el sistema temporal preliminar modificado y el método de los comisionados.

Debido a que las reclamaciones por muerte suceden incluso durante el primer año de la póliza, la parte de la prima neta nivelada del primer año, que puede utilizarse para gastos, está necesariamente limitada a una cantidad que deje los fondos suficientes para pagar las reclamaciones que con base en la tabla de mortalidad usada, ocurrirán al fin de dicho año, quedando así delimitado el margen máximo que puede usarse, aunque dicho máximo podría ser innecesario.

Si tomamos el máximo, la reserva terminal del primer año quedará totalmente extinguida puesto que el total de la prima neta del primer año, habrá sido usado para pagar las reclamaciones y los gastos. Razón por la que, el importe de los recargos de renovación que se utilizarán en los años posteriores para constituir la reserva, serán correspondientemente altos. De hecho, la situación en tal caso es que después del primer año, la compañía requerirá una prima neta del mismo importe que si la póliza hubiese sido emitida al fin del primer año a una edad un año mayor. Habiéndose gastado toda la prima de tarifa del primer año entre los gastos y las reclamaciones por muerte, la compañía debe tratar la póliza, en lo que respecta a sus reservas, como si se tratara de una póliza correspondiente a un seguro temporal a un año, seguida por una póliza de seguro de vida emitida al fin del primer año y, por lo tanto, a una edad un año mayor; de aquí que el método se denomine ***Temporal Preliminar***. Tal expresión es responsable de que se piense que, cuando las reservas se establecen sobre esta base, el seguro temporal es el seguro de primer año, por el cual, la compañía cobra una prima más alta que la usual tarifa de la de un temporal a un año. Sin embargo, es el importe de la reserva el que se ve afectado. En el caso de que el asegurado posea una póliza de vida entera o de otro tipo, no existe ninguna razón por la cual los valores en efectivo no sean tan altos como cuando las reservas se establecen sobre la base de la prima neta nivelada total, ya que, en vista de que los gastos reales son los mismos, la cantidad realmente disponible para valores en efectivo deberá ser la misma sin importar la base de la reserva.

El método descrito anteriormente es aplicable a todo tipo de pólizas. Así por ejemplo, una póliza de un seguro ordinario de vida emitida a edad de veinticinco años es tratada, al calcular su reserva, como si fuera la póliza de un seguro temporal a un año emitida a edad veinticinco, seguida posteriormente por una póliza ordinaria de vida emitida a edad veintiséis. Asimismo, una póliza de vida limitada a 20 pagos es tratada de modo análogo a una póliza temporal de un año seguida por una póliza de vida a 19 pagos, y una póliza dotal a 25 años como una póliza temporal de un año seguida por una póliza dotal de 24 años.

Sin embargo, la aplicación del método temporal preliminar a todos los tipos de póliza es objetante, y algunas veces innecesaria por las razones siguientes:

1).- Existen planes denominados de *"alto precio"* tales como los dotales a corto plazo o los planes de vida a pagos limitados a corto plazo, para los cuales, tales planes destinan más dinero para los gastos del primer año, que el realmente necesario, pudiendo así caer en la exageración.

2).- Cuando se destina dinero en forma excesiva para los gastos del primer año, el importe de los recargos de renovación, que se requieren para cubrir la parte de la prima neta del primer año que se ha utilizado para afrontar dichos gastos, podría ser insuficiente para completar el pago de los gastos de renovación.

Con objeto de ejemplificar la importancia de estas consideraciones, se presenta un cuadro en la página siguiente, en el que se ilustra la aplicación del *Sistema Año Temporal Preliminar Completo* a un plan ordinario de vida y a un dotal a 20 años.

Cabe señalar que la experiencia de mortalidad utilizada en la generación de los resultados que se indican en el cuadro es la *"Experiencia Américana de los Comisionados de 1958"* considerando un interés de 3.0%, para una persona de edad 36 años.

APLICACION DEL SISTEMA TEMPORAL PRELIMINAR COMPLETO A DOS DIFERENTES PLANES DE SEGUROS (ESTADOS UNIDOS DE NORTEAMERICA)

TIPO DE PLAN			
ORDINARIO DE VIDA	DOTAL A 20 AÑOS	C O N C E P T O	Año
$ 26.35	$ 49.75	1) Prima de tarifa por cada $1000	1o.
$ 21.08	$ 41.97	2) Prima neta nivelada	
$ 5.27	$ 7.78	3) Recargo (con base en la prima nivelada)	
$ 8.68	$ 8.68	4) Prima neta del seguro temporal a un año	
$ 12.40	$ 33.29	5) Es igual a (2) menos (4) que es el préstamo o recargo extra del primer año o total a utilizar de la prima neta para gastos del primer año.	
$ 17.67	$ 41.07	6) Igual a (3) más (5) que es el total disponible para gastos del primer año	
67.0%	83.0%	7) (6) como porcentaje de (1)	2o.
$ 21.74	$ 44.51	8) Prima neta de renovación requerida	En adelante
$ 4.61	$ 5.24	9) (1) menos (8) es igual al recargo efectivo de renovación.	
$ 0.66	$ 2.54	10) (8) menos (2) es igual a la prima neta adicional de la renovación.	

Como puede observase, el importe total disponible para los primeros gastos de la Póliza Ordinaria de Vida, representa el 67% de la prima de tarifa (*Prima neta nivelada más recargos*) que no es excesivo. Sin embargo, para el seguro Dotal a 20 años, dicho porcentaje representa el 83% de la prima bruta, porcentaje demasiado elevado.

El segundo criterio acerca del uso apropiado del *Sistema Temporal Preliminar Completo*, es la suficiencia de los recargos de renovación.

Los resultados anteriores muestran que la póliza ordinaria de vida requerirá una prima de renovación de $21.74, la cual es la prima neta regular para una persona de edad 36, y que la dotal requiere una prima neta de renovación de $44.51, la cual es la prima neta regular de una póliza dotal a 19 años emitida a edad 36. Estas primas netas son necesarias porque en cada caso, el total de la primera prima bruta fue gastado.

Asimismo podemos observar que para la póliza ordinaria de vida, la reducción en la carga de renovación es aproximadamente igual a $(0.66 \div 5.27) * 100 = 12.6\%$, mientras que para la póliza dotal se tiene aproximadamente $(2.54 \div 7.78) * 100 = 33.0\%$.

Es importante hacer notar que en los dos planes se está cobrando una prima de primer año que es igual a la de un seguro temporal a un año, lo que parece injusto en el caso del dotal, ya que se está exagerando en el importe que se destina a cubrir los gastos del primer año. En México, se ha limitado dicho gasto en este tipo de planes, aunque esto se analizará posteriormente.

Un análisis similar podría aplicarse en forma general a pólizas de primas bajas, tales como las pólizas de vida pagos limitados con largo período de pago de primas o dotales a largo plazo, y observaríamos que los criterios mencionados anteriormente quedarían satisfechos, sin embargo, para el caso de las pólizas de alto precio, como lo son las pólizas de vida pagos limitados a corto plazo y las dotales de duración corta, los criterios podrían no satisfacerse. Habrá por supuesto, un grupo de planes en la línea divisoria en los que la cuestión de la exageración en el gasto inicial o la insuficiencia del recargo de renovación, bajo el sistema temporal preliminar, sean dudosos.

Cabe agregar por último, que en muy pocos países y estados de Norteamérica se permitió la aplicación sin objeciones de dicho método para todos los tipos de seguros.

4.4.3 Sistema año Temporal Preliminar Modificado

Las objeciones planteadas en el inciso anterior, dan lugar a limitaciones legales en el uso del *Sistema Temporal Preliminar Completo*, y en concordancia con lo analizado, cuando esas restricciones legales son adoptadas, la aplicación de dicho sistema se limita sólo a los tipos de pólizas de precio más bajo, mientras que para las otras pólizas, se establece una regla por medio de la cual, la compañía debe retener y poner en el fondo de la reserva una parte de la prima neta del primer año.

La idea general es que, aunque en muchos tipos de pólizas el recargo del primer año es insuficiente para afrontar los gastos de ese año, la parte de la prima neta del primer año que esta destinada para tales gastos, debe limitarse a lo necesario y razonable.

La aplicación limitada del sistema temporal preliminar completo se denomina ***Sistema Temporal Preliminar Modificado***, la expresión anterior da lugar a las siguientes implicaciones:

a).- "***Temporal Preliminar Completo***" significa que no se constituye reserva terminal de primer año en ciertas pólizas de prima baja.

b).- Para cierto tipo de pólizas sobre todo de alto precio, se constituye una reserva parcial terminal de primer año.

c).- Constituir reservas de prima neta nivelada total bajo cualquier tipo de plan, cuando se han pagado todas las primas estipuladas en el contrato, o bajo ciertas modificaciones a una fecha más cercana.

Cabe señalar que la expresión "***Sistema Temporal Preliminar Modificado***", no se refiere a una forma específica de acumulación de reservas, sino que se aplica a un grupo de sistemas de reserva cuyo principio es el mismo, pero con diferencias en los detalles.

El *Sistema Temporal Preliminar Modificado* más utilizado para las pólizas emitidas antes de la promulgación de la Ley de Valuación Estándar, fue el especificado en las leyes de seguros de Illinois y conocido con el nombre de Illinois Estándar. Para las pólizas emitidas después de la fecha efectiva de la ley Estándar, se especificó un método nuevo y uniforme de valuación temporal preliminar modificado en la manifestación del estándar mínimo legal para las reservas.

El nuevo método se le denominó "*Método de Valuación de los Comisionados*" y difiere muy poco del Método Illinois Estándar.

Los detalles del Método Illinois Estándar para sistemas de reservas temporales preliminares modificados son en exceso técnicos, debido a que dicho método no se aplica a pólizas emitidas en años recientes, ya que éstas están sujetas a las disposiciones de la Ley de Valuación Estándar, y de acuerdo con la cual, la reserva mínima a constituir debe calcularse por el Método de Valuación de Reserva de los Comisionados.

El Método Illinois Estándar sugiere que para el caso de pólizas con primas mayores o iguales que la prima para una póliza de vida a 20 pagos, se establezcan reservas de prima neta nivelada dotales para el fin del año 20 o para fin del período de pago de primas si el mismo, es menor a 20 años. Además se limita la parte de la prima neta del primer año ya que ésta no debe ser mayor a lo que habría disponible bajo una póliza de vida a 20 años, bajo el plan temporal preliminar completo. El efecto es en general que para las pólizas bajo las cuales no es mayor la prima que la de una póliza de vida a 20 años, la base temporal preliminar es permitida, mientras que para otras pólizas (*por ejemplo un plan total a 20 años*) alguna porción de la prima neta de primer año debe ser retenida con el fin de constituir una reserva de primer año. Esto está de acuerdo, en general, con los principios que hemos expuesto al estudiar la aplicabilidad del sistema temporal preliminar completo.

En lo que respecta a la reserva completa de una compañía, la diferencia entre la reserva de prima neta nivelada total y la reserva de acuerdo con el Illinois Estándar, dependerá de la proporción relativa de pólizas de reciente emisión y en las proporciones de las diferentes clases de póliza. En el caso de una compañía bien establecida que realiza negocios normales, es decir, que tiene una cartera bien distribuida en cuanto a sus planes y edades, el total de la reserva Illinois Estándar podrá ser de aproximadamente el 95% de la reserva regular de prima neta nivelada. Para el caso de una compañía joven que no tenga suficientes negocios nuevos, la diferencia entre las reservas sobre las dos bases sería mayor. En la próxima sección se analizarán las condiciones que en nuestro país, se imponen a los diferentes planes de seguros.

4.4.4 Sistemas Modificados de Reserva en México.

De los incisos anteriores se puede concluír para los Sistemas Modificados de Reserva lo siguiente:

1.- El ***Sistema Temporal Preliminar Completo*** es aplicable en general, a pólizas de vida a pagos limitados con largos períodos de pagos de primas, así como para planes dotales a largo plazo.

2.- El ***Sistema Temporal Preliminar Modificado*** es aplicable a las pólizas de alto precio, como son las pólizas de vida pagos limitados a corto plazo y a los dotales de duraciones cortas. Ya que en este caso, la parte de la prima neta de primer año que puede usarse para gastos debe estar limitada a lo que es razonable y necesario.

En México, la mayor parte de las empresas de seguros han tomado como regla general, aplicar el Sistema Temporal Preliminar Completo a todos los seguros de vida entera y a todos los planes temporales, independientemente del plazo del pago de primas. Sin embargo, a los planes dotales se les han impuesto ciertas condiciones en cuanto a la parte de la prima neta nivelada que se puede usar para cubrir los gastos del primer año, en este caso es únicamente donde se aplica el Sistema Temporal Preliminar Modificado.

Cabe señalar que son pocas las empresas que en México adoptan los criterios (1) y (2) de este inciso, para la aplicación de dichos sistemas. Ya que por ejemplo en el caso de los seguros dotales ciertas empresas utilizan alguno de estos dos métodos, dependiendo de si el plazo de pago de primas es menor a 20 años o mayor o igual a 20 años, a la vez que otras lo hacen por comparación entre la prima neta del plan dotal y la prima neta de un plan dotal a 20 años.

La política a seguir por cada empresa en la aplicación de estos métodos reviste gran importancia ya que esto determinará cual será la prima del primer año y cual la prima de renovación.

Técnicamente la prima del primer año, la prima de renovación y la prima neta nivelada, están relacionadas de la siguiente manera.

En el caso de la aplicación del ***Sistema Temporal Preliminar Completo*** la prima del primer año queda definida de la siguiente manera:

$$PP = \frac{C_x}{D_x} \qquad (4.4.4.1)$$

Es decir la prima neta de un seguro temporal a un año, y que es justamente la prima que cumple la condición de que la reserva terminal del primer año sea cero, ya que si calculamos tal reserva por el método de Fackler obtenemos dicho valor, es decir:

$$_1V_x = \frac{({}_0V_x + PP) \cdot D_x - C_x}{D_{x+1}}$$

$$_1V_x = \frac{\left[0 + \dfrac{C_x}{D_x}\right] \cdot D_x - C_x}{D_{x+1}}$$

$$_1V_x = \frac{C_x - C_x}{D_{x+1}} = 0$$

Por el método Prospectivo podemos obtener la prima de renovación, si la fórmula respectiva para calcular la reserva terminal se iguala a cero, es decir:

$$_1V_x = A_{x+1} - PR \cdot \ddot{a}_{x+1} = 0$$

$$A_{x+1} - PR \cdot \ddot{a}_{x+1} = 0 \qquad (4.4.4.2.a)$$

donde *PR* es la prima de renovación. Desplejando *PR* de (4.4.4.2.a) se tiene que:

$$PR = \frac{A_{x+1}}{\ddot{a}_{x+1}} = P_{x+1} \qquad (4.4.4.2.b)$$

Lo que quiere decir que para cualquier seguro en el que se defina la prima del primer año de esta manera, la prima de renovación será igual a la prima neta del mismo seguro calculada con un año más de edad.

Cabe agregar que en este caso es correcto encontrar la prima de renovacion de esta forma (es decir con sólo cumplirse la condición de que la primer reserva terminal sea igual a cero), ya que se cumple también la siguiente ecuación:

$$PU = PP + PR \cdot \ddot{a}_{x+1} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x} \qquad (4.4.4.3)$$

Que quiere decir que la prima única debe ser igual (*en cualquier seguro*) al valor presente de la prima del primer año más las de renovación.

La fórmula (4.4.4.3) es de gran importancia ya que nos permite comprobar si las primas de primer año y de renovación, son las que corresponden, en virtud de que satisfacen dicha ecuación. Este resultado se utilizará frecuentemente en el Capítulo siguiente.

Otro razonamiento para encontrar la prima de renovación, esta representado por la siguiente ecuación:

$$PR = PN + \frac{(PN - PP) \cdot \dfrac{D_x}{D_{x+1}}}{\ddot{a}_{x+1}} \qquad (4.4.4.4)$$

donde PN es igual a la prima neta anual del plan que se trate. Haciendo $PN - PP = \alpha$, se tiene que α es la parte de la prima neta nivelada que utilizaremos para cubrir los gastos del primer año.

Si susbtituimos α en la ecuación (4.4.4.4) se obtiene la fórmula siguiente:

$$PR = PN + \frac{\alpha \cdot \dfrac{D_x}{D_{x+1}}}{\ddot{a}_{x+1}} \qquad (4.4.4.5)$$

La cual quiere decir, que la prima de renovación es igual a la prima neta más la porción que nos gastamos de ella y que se empieza a amortizar a partir del término del primer año.

Si aplicamos la fórmula (4.4.4.4) para obtener la prima de renovación de el mismo ejemplo, llegaremos al mismo resultado de la ecuación (4.4.4.2.b).

Desarrollando la fórmula anterior, se tiene que:

$$PR = PN + \frac{(PN - PP) \cdot \dfrac{D_x}{D_{x+1}}}{\dfrac{N_{x+1}}{D_{x+1}}}$$

$$PR = PN + \frac{(PN - PP) \cdot D_x}{N_{x+1}}$$

$$PR = PN + \frac{PN \cdot D_x}{N_{x+1}} - \frac{PP \cdot D_x}{N_{x+1}}$$

$$PR = PN \cdot \left[1 + \frac{D_x}{N_{x+1}} \right] - \frac{PP \cdot D_x}{N_{x+1}}$$

$$PR = PN \cdot \left[\frac{N_{x+1} + D_x}{N_{x+1}} \right] - \frac{PP \cdot D_x}{N_{x+1}}$$

$$PR = PN \cdot \left[\frac{N_x}{N_{x+1}} \right] - \frac{PP \cdot D_x}{N_{x+1}}$$

substituyendo: $PN = \dfrac{M_x}{N_x}$ y $PP = \dfrac{C_x}{D_x}$

se tiene:

$$PR = \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_x}{N_{x+1}} - \frac{\frac{C_x}{D_x} \cdot D_x}{N_{x+1}}$$

$$PR = \frac{M_x}{N_{x+1}} - \frac{C_x}{N_{x+1}}$$

$$PR = \frac{M_x - C_x}{N_{x+1}}$$

$$PR = \frac{M_{x+1}}{N_{x+1}} = P_{x+1}$$

Lo que de muestra que mediante este razonamiento, también se puede obtener la prima de renovación.

La fórmula (4.4.4.5) es de gran importancia, ya que muchas empresas definen primero la parte de la prima neta que se utilizará para gastos, y sobre esa base se define la prima del primer año, para después obtener la prima de renovación.

Capítulo 5 Aplicación de los sistemas modificados de reserva a los seguros de vida en México

5.1 Aplicación al seguro ordinario de vida.

En este plan se define la prima del primer año como la prima neta de un plan temporal a un año, es decir:

$$PP = \frac{C_x}{D_x} .$$

Si ahora tomamos la prima neta anual del plan ordinario de vida y le restamos la prima del primer año, se tiene:

$$\alpha = PN - PP = P_x - PP = \frac{M_x}{N_x} - \frac{C_x}{D_x}$$

donde "α" es igual a la parte de la prima neta que se destinará a cubrir los gastos del primer año.

Por otra parte, la prima del primer año debe destinarse a constituir la reserva del primer año, la cual, como se vio anteriormente, es igual a cero.

La prima de renovación será igual a:

$$PR = \frac{M_{x+1}}{N_{x+1}} = P_{x+1}$$

que es la misma que se obtuvo al desarrollar la fórmula (4.4.4.5), en el Capítulo anterior.

Con objeto de comprobar que la prima del primer año y la prima de renovación corresponden a estos seguros, a continuación se procede a verificar que las fórmulas anteriores satisfacen la ecuación (4.4.4.3), es decir:

$$A_x = \frac{C_x}{D_x} + \left[\frac{M_{x+1}}{N_{x+1}} \right] \cdot \ddot{a}_{x+1} \cdot \left[\frac{D_{x+1}}{D_x} \right]$$

$$A_x = \frac{C_x}{D_x} + \left[\frac{M_{x+1}}{N_{x+1}} \right] \left[\frac{N_{x+1}}{D_{x+1}} \right] \left[\frac{D_{x+1}}{D_x} \right]$$

$$A_x = \frac{C_x}{D_x} + \frac{M_{x+1}}{D_x}$$

$$A_x = \frac{C_x + M_{x+1}}{D_x}$$

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

Como se cumplió la ecuación, las primas de primer año y de renovación son las correspondientes.

5.2 Aplicación al seguro temporal.

En los planes de tipo temporal, al igual que en el seguro ordinario de vida, se define la prima del primer año como la prima neta de un plan temporal a un año, esto es:

$$PP = \frac{C_x}{D_x} .$$

Si ahora tomamos la prima neta anual del plan temporal y le restamos la prima del primer año, se tiene que:

$$\alpha = PN - PP = P'_{x:\overline{n}|} - PP = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} - \frac{C_x}{D_x}$$

donde

$P'_{x:\overline{n}|}$ es la prima neta anual pagadera "n" años correspondiente a un seguro temporal a "n" años.

Utilizando la fórmula (4.4.4.5) para encontrar la prima de renovación, se obtiene que:

$$PR = P'_{x:\overline{n}|} + \left[\frac{(P'_{x:\overline{n}|} - PP) \cdot \dfrac{D_x}{D_{x+1}}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} \right]$$

$$PR = P'_{x:\overline{n}|} + \left[\frac{(P'_{x:\overline{n}|} - PP) \cdot \dfrac{D_x}{D_{x+1}}}{\dfrac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_{x+1}}} \right] .$$

$$PR = P'_{x:\overline{n|}} + \frac{P'_{x:\overline{n|}} \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}} - \frac{PP \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$PR = P'_{x:\overline{n|}} \cdot \left[1 + \frac{D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}} \right] - \frac{PP \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$PR = P'_{x:\overline{n|}} \cdot \left[\frac{D_x + N_{x+1} - N_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}} \right] - \frac{PP \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$PR = P'_{x:\overline{n|}} \cdot \left[\frac{N_x - N_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}} \right] - \frac{PP \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

sustituyendo ahora,

$$P'_{x:\overline{n|}} = \left[\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \right]$$

en esta última ecuación, se tiene que:

$$PR = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}} - \frac{PP \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$PR = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}} - \frac{\frac{C_x}{D_x} \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$PR = \frac{M_x - C_x - M_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$PR = \frac{M_{x+1} - M_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

por lo tanto:

$$PR = P^{\prime}_{x+1:\overline{n-1}|}$$

Aplicando la fórmula (4.4.4.3) para comprobar las primas así obtenidas, resulta que:

$$A^{\prime}_{x:\overline{n}|} = PP + P^{\prime}_{x+1:\overline{n-1}|} \cdot a_{x+1:\overline{n-1}|} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

donde $A^{\prime}_{x:\overline{n}|}$ es la prima pura única de un seguro temporal a "n" años. Desarrollando,

$$A^{\prime}_{x:\overline{n}|} = \frac{C_x}{D_x} + \frac{M_{x+1} - M_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_{x+1}} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

$$A^{\prime}_{x:\overline{n}|} = \frac{C_x}{D_x} + \frac{M_{x+1} - M_{x+n}}{D_x}$$

$$A^{\prime}_{x:\overline{n}|} = \frac{C_x + M_{x+1} - M_{x+n}}{D_x}$$

$$A^{\prime}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} .$$

Al cumplirse dicha ecuación, se demuestra que las primas obtenidas son las correspondientes.

Cabe aclarar que hasta aquí, sólo se ha utilizado el Sistema Temporal Preliminar Completo.

5.3 Aplicación al seguro dotal.

Para este tipo de planes se imponen las siguientes condiciones:

1.- Si la primer reserva terminal del plan dotal a "n" años, es menor o igual a la primer reserva terminal de un plan dotal a 20 años, entonces aplicamos el sistema temporal preliminar completo, es decir, definimos la prima del primer año como la prima neta de un plan temporal a un año.

Este caso queda representado simbólicamente de la siguiente manera:

Si $\quad {}_1V_{x:\overline{n}|} \leq {}_1V_{x:\overline{20}|}$

entonces:

$$PP = \frac{C_x}{D_x}$$

2.- Si la primer reserva terminal del plan dotal a "n" años, es mayor que la primer reserva terminal de un plan dotal a 20 años, entonces la parte de la prima neta que se puede utilizar para cubrir los gastos del primer año es precisamente el valor presente de la reserva terminal del primer año del plan dotal a 20 años.

Lo cual queda representado de la siguiente manera:

Si $\quad {}_1V_{x:\overline{n}|} > {}_1V_{x:\overline{20}|}$

$$({}_1V_{x:\overline{20}|}) \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x} = \alpha$$

donde α es la porción de la prima neta que se utilizará para cubrir los gastos del primer año.

De acuerdo con lo anterior, la prima del primer año quedará entonces definida de la siguiente manera:

$$PP = PN - \alpha \tag{5.3.1}$$

Cabe aclarar que, es en este caso donde se aplica el Sistema Temporal Preliminar Modificado.

■ Para la primera condición, procederemos a encontrar la prima de renovación mediante la fórmula (4.4.4.5), es decir:

$$PR = P_{x:\overline{n|}} + \frac{\left[P_{x:\overline{n|}} - PP \right] \cdot \dfrac{D_x}{D_{x+1}}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}}}$$

$$PR = P_{x:\overline{n|}} + \frac{\left[P_{x:\overline{n|}} - PP \right] \cdot \dfrac{D_x}{D_{x+1}}}{\dfrac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_{x+1}}}$$

$$PR = P_{x:\overline{n|}} + \frac{\left[P_{x:\overline{n|}} - PP \right] \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$PR = P_{x:\overline{n|}} + \frac{P_{x:\overline{n|}} \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}} - \frac{PP \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$PR = P_{x:\overline{n|}} \cdot \left[1 + \frac{D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}} \right] - \frac{PP \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$PR = P_{x:\overline{n}|} \cdot \left[\frac{N_{x+1} - N_{x+n} + D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}} \right] - \frac{PP \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$PR = P_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}} - \frac{PP \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}} \; .$$

y sustituyendo en esta última ecuación:

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

se tiene que:

$$PR = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}} - \frac{\frac{C_x}{D_x} \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$PR = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}} - \frac{C_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$PR = \frac{M_x - C_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

por lo tanto:

$$PR = \frac{M_{x+1} - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}} = P_{x+1:\overline{n-1}|}$$

Lo que quiere decir, que la prima de renovación será igual a la prima neta anual de un seguro dotal a "n-1" años, pagadera "n-1" años y calculada a edad "x+1".

Aplicando ahora la fórmula (4.4.4.3) para comprobar las primas así obtenidas, se tiene que:

$$A_{x:\overline{n}|} = PP + P_{x+1:\overline{n-1}|} \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

donde $A_{x:\overline{n}|}$ es la prima pura única de un seguro dotal a "n" años.

Lo que implica que:

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{C_x}{D_x} + \frac{M_{x+1} - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_{x+1}} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{C_x}{D_x} + \frac{M_{x+1} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{C_x + M_{x+1} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

por lo tanto

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Por lo que al cumplirse la ecuación (4.4.4.3), se demuestra que la prima del primer año y la prima de renovación así obtenidas, son las que corresponden.

■ Para la segunda condición, procederemos a encontrar la prima del primer año y la prima de renovación.

De la ecuación (5.3.1) se tiene que:

$$PP = PN - \alpha$$

donde sustituyendo

$$PN = P_{x:\overline{n}|} \qquad y \qquad \alpha = {}_1V_{x:\overline{20}|} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

se tiene que:

$$PP = P_{x:\overline{n}|} - {}_1V_{x:\overline{20}|} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

$$PP = P_{x:\overline{n}|} - \left[\frac{P_{x:\overline{20}|} \cdot D_x - C_x}{D_{x+1}} \right] \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

$$PP = P_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{20}|} + \frac{C_x}{D_x} \tag{5.3.2}$$

Por lo tanto, la prima del primer año será igual a:

$$PP = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} - \frac{M_x - M_{x+20} + D_{x+20}}{N_x - N_{x+20}} + \frac{C_x}{D_x}$$

Procederemos ahora a encontrar la prima de renovación, aplicando la fórmula (4.4.4.5).

$$PR = P_{x:\overline{n}|} + \frac{\left[P_{x:\overline{n}|} - PP \right] \cdot \frac{D_x}{D_{x+1}}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}$$

Substituyendo el valor de la prima del primer año:

$$PP = PN - \alpha = P_{x:\overline{n}|} - \alpha$$

se tiene que

$$PR = P_{x:\overline{n}|} + \frac{\left[P_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} + \alpha \right] \cdot \frac{D_x}{D_{x+1}}}{\frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_{x+1}}}$$

$$PR = P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$PR = P_{x:\overline{n}|} + \frac{{}_1V_{x:\overline{20}|} \cdot \dfrac{D_{x+1}}{D_x} \cdot D_x}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

Por lo tanto:

$$PR = P_{x:\overline{n}|} + \frac{{}_1V_{x:\overline{20}|} \cdot D_{x+1}}{N_{x+1} - N_{x+n}} \qquad (5.3.3)$$

Substituyendo ahora las fórmulas (5.3.2) y (5.3.3) en la fórmula (4.4.4.3) para comprobar que las primas así obtenidas son las correctas, se tiene:

$$A_{x:\overline{n}|} = \left[P_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{20}|} + \frac{C_x}{D_x} \right] + \left[P_{x:\overline{n}|} + \frac{{}_1V_{x:\overline{20}|} \cdot D_{x+1}}{N_{x+1} - N_{x+n}} \right] \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \left[P_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{20}|} + \frac{C_x}{D_x} \right] + \left[P_{x:\overline{n}|} + \frac{{}_1V_{x:\overline{20}|} \cdot D_{x+1}}{N_{x+1} - N_{x+n}} \right] \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_{x+1}} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{20}|} + \frac{C_x}{D_x} + P_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} + {}_1V_{x:\overline{20}|} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|} \cdot \left[1 + \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} \right] - P_{x:\overline{20}|} + \frac{C_x}{D_x} + {}_1V_{x:\overline{20}|} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

Substituyendo ahora

$${}_1V_{x:\overline{20}|} = \frac{P_{x:\overline{20}|} \cdot D_x - C_x}{D_{x+1}}$$

se tiene:

$$A_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|} \cdot \left[\frac{D_x + N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} \right] - P_{x:\overline{20}|} + \frac{C_x}{D_x} + \left[\frac{P_{x:\overline{20}|} \cdot D_x - C_x}{D_{x+1}} \right] \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|} \cdot \left[\frac{D_x + N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} \right] - P_{x:\overline{20}|} + \frac{C_x}{D_x} + P_{x:\overline{20}|} - \frac{C_x}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Por lo tanto:

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

La cual es la prima pura única del seguro dotal a "n" años, por lo que queda demostrado que las primas encontradas son las correctas.

Cabe señalar, por último, que para cualquier plan de seguros en el cual se apliquen los sistemas modificados de reserva, la prima del primer año y la de renovación se obtendrán de la misma manera como encontramos las descritas en este Capítulo para los planes tradicionales.

5.4 Ejemplo numérico.

Con el propósito de ilustrar comparativamente, la aplicación de método tradicional para el cálculo de la reserva terminal de una póliza de seguro de vida con, al menos, uno de los métodos de cálculo de reserva modificada, se construyó un ejemplo numérico que consistió en calcular la reserva terminal de una póliza correspondiente a un seguro temporal a diez años, bajo ambos métodos.

El método que se utilizó para calcular ambas reservas, fue el de Fackler. En primer lugar, se aplicó en función de las primas netas niveladas lo que representa un método de cálculo tradicional, y posteriormente se aplicó el mismo método en función de una prima de primer año y una de renovación lo que significa utilizar el método modificado de cálculo de reserva denominado "Año Temporal Preliminal Completo".

- **CARACTERISTICAS Y SUPUESTOS:**

Tipo de Plan	Temporal a 10 años
Edad del asegurado	20 años
Suma asegurada	\$1.00
Plazo del pago de primas	10 años
Base demográfica	Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana 62-67
Base financiera	3.5% de interés anual

CALCULO DE LA RESERVA TERMINAL EN FUNCION DE LA PRIMA NETA NIVELADA

La prima neta única del seguro temporal es igual a:

$$A^{'}_{20:\overline{10}|} = \frac{M_{20} - M_{30}}{D_{20}} = 0.017012.$$

Por lo tanto, la prima neta nivelada es igual a:

$$P^{'}_{20:\overline{10}|} = \frac{M_{20} - M_{30}}{N_{20} - N_{30}} = 0.001992.$$

El cálculo de la reserva de esta póliza utilizando el método de Fackler, es igual a:

$${}_{t}V_{x} = \frac{D_{x+t-1} \cdot ({}_{t-1}V_{x} + P_{x}) - C_{x+t-1}}{D_{x+t}}$$

De conformidad con el método, la reserva inicial es igual a:

$${}_{0}V_{20} = 0$$

Y la reserva terminal del primer año igual a:

$${}_{1}V_{20} = \frac{D_{20} \cdot ({}_{0}V_{20} + P^{'}_{20:\overline{10}|}) - C_{20}}{D_{21}} = 0.000169$$

Siguiendo la misma fórmula para calcular las reservas terminales del segundo al décimo año, se tiene entonces que:

$$
\begin{aligned}
{}_2V_{20} &= 0.000316\\
{}_3V_{20} &= 0.000433\\
{}_4V_{20} &= 0.000518\\
{}_5V_{20} &= 0.000565\\
{}_6V_{20} &= 0.000568\\
{}_7V_{20} &= 0.000521\\
{}_8V_{20} &= 0.000416\\
{}_9V_{20} &= 0.000245\\
{}_{10}V_{20} &= 0.000000
\end{aligned}
$$

Cabe aclarar que, estos valores representan la fracción que de un peso de suma asegurada, se tiene que constituir como reserva de la póliza, en el año correspondiente.

CALCULO DE LA RESERVA TERMINAL UTILIZANDO EL METODO SISTEMA AÑO TEMPORAL PRELIMINAR COMPLETO

De acuerdo con este método, se procede en primer lugar a calcular la prima del primer año la que resulta ser:

$$PP = \frac{C_x}{D_x} = \frac{C_{20}}{D_{20}}$$

Y la fórmula para el cálculo de la prima de renovación es:

$$PR = P^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} = \frac{M_{x+1} - M_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}} = \frac{M_{21} - M_{30}}{N_{21} - N_{30}} = 0.002014$$

Como se puede apreciar en la fórmula anterior, correspondiente al cálculo de la prima de renovación, el plazo de pago de primas "n-1", es igual al período de cobertura del seguro "n -1"

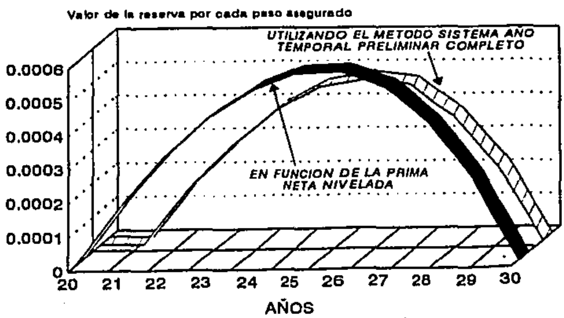
Aplicando nuevamente la fórmula del método de Fackler para las reservas terminales, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
{}_0V_{20} &= 0\\
{}_1V_{20} &= 0\\
{}_2V_{20} &= 0.000162\\
{}_3V_{20} &= 0.000296\\
{}_4V_{20} &= 0.000399\\
{}_5V_{20} &= 0.000464\\
{}_6V_{20} &= 0.000486\\
{}_7V_{20} &= 0.000469\\
{}_8V_{20} &= 0.000374\\
{}_9V_{20} &= 0.000223\\
{}_{10}V_{20} &= 0.000000
\end{aligned}
$$

Se puede apreciar que en este último método, la prima del primer año "PP", es menor que la prima neta anual del seguro temporal "$P^{\prime}_{20:\overline{10|}}$", por lo que la diferencia se carga a la prima de renovación PR de los años restantes, lo que hace que ésta sea superior a las dos primeras.

El valor de las reservas terminales en función de la prima neta niveleda, y en función de la prima neta de primer año y de renovación, del ejemplo anterior, se aprecian graficamente a continuación.

VALOR DE LAS RESERVAS TERMINALES EN FUNCION DE LA PRIMA NETA NIVELADA Y UTILIZANDO EL METODO SISTEMA AÑO TEMPORAL PRELIMINAR COMPLETO



CONCLUSIONES

Durante el desarrollo de este trabajo se constató que los Capítulos 1 al 3 cumplieron con su finalidad, es decir, servir como base para la debida comprensión de los capítulos restantes. Adicionalmente, se comprobó que todos los elementos técnicos actuariales expuestos en los capítulos iniciales fueron necesarios, suficientes y completos, dándole a esta tesis el carácter de autosuficiente, planteado al inicio de la misma.

Respecto al nuevo método para calculo de reservas denominado "Método de la Diferencia en Primas", se concluye que, por el momento, sólo adiciona una fórmula más a las ya existentes, sin embargo, en el futuro próximo podría tener una aplicación específica en algún nuevo plan de seguros, o bien podría ser parte de la solución de algún planteamiento técnico-actuarial.

Lo anterior se puede ilustrar se la manera siguiente. Aunque el Método Prospectivo y el de Fackler se utilizaron de manera indistinta en el calculo de las reservas de anteriores planes de seguros, actualmente el más utilizado es el de Fackler, ya que debido a la flexibilidad de los nuevos planes de seguros en lo que respecto al cambio de suma asegurada, a la periodicidad del pago de primas y a su importe, que la mayoría de las veces es incierto. No se podría utilizar el Método Prospectivo debido a que este contempla el pago futuro de primas fijadas previamente, situación que no se presenta para el método de Fackler, pues éste se basa en el cálculo de compromisos ya cumplidos.

El material expuesto en esta tesis se abocó principalmente al análisis técnico de los Sistemas de Reserva Modificada, su explicación, construcción matemática y aplicación a diferentes planes de seguros de vida. Sin embargo, es importante resaltar que dichos sistemas utilizan las mismas fórmulas de los métodos tradicionales para el cálculo de reservas, a saber, Prospectivo, Retrospectivo y Fackler. Y lo único que se esta haciendo es sustituir en éstas, las primas netas niveladas por una prima de primer año y una de renovación. Donde estas dos últimas no son otra cosa que una redistribución de las primeras, y que se efectúa por así convenir a las necesidades económicas de las empresas de seguros.

Como complemento a lo anterior, cabe agregar que la prima de tarifa se compone de tres partes; prima neta nivelada, gastos de adquisición y gastos de administración. Y a su vez la prima neta nivelada se puede dividir en una prima de primer año que sirve para cubrir la mortalidad de un sólo año del seguro, y de una parte sobrante que es precisamente la que se aporta para pagar los gastos de adquisición y de administración del primer año y que será devuelta, posteriormente, al asegurado mediante las primas de renovación.

Sin embargo en la práctica el uso eficiente de los métodos presentados, no sólo depende de la correcta aplicación de las fórmulas sino de otros factores como son: la evaluación de los gastos de adquisición y de administración contemplados por el plan de seguros, de las sumas aseguradas que se pagan al vencimiento de las pólizas dotales, y los beneficios de valores garantizados como son los valores en efectivo, ya que en el caso de que el asegurado posea una póliza de vida entera o de otro tipo, no existe razón por la que tales valores no sean tan altos como cuando las reservas se establecen sobre la base de la prima neta nivelada total, ya que en vista de que los gastos reales son los mismos, la cantidad realmente disponible para valores en efectivo deberá ser la misma sin importar la base de la reserva.

Por otra parte, se debe tomar en cuenta el porcentaje de pólizas canceladas o rescatadas que se espera tener dentro de los siguientes años, pues esto nos permite calcular el monto aproximado de los gastos que la empresa no recuperará y que realizó al momento de adquirir nuevos negocios.

Asimismo, se tendría que realizar un estudio sobre el impacto que la inflación esperada podría tener en el cálculo de los gastos de administración en los años posteriores a la adquisición del seguro. Ya que esto nos permitiría determinar una tasa de financiamiento confiable que tendría como consecuencia la correcta amortización de los gastos. Ya que en años recientes, se ha observado que la mala evaluación de dichos parámetros condujo a que algunas empresas sufrieran serios desequilibrios económicos.

Los factores analizados anteriormente, tienen como objetivo principal la correcta y justa determinación del porcentaje de la prima neta que será utilizado como aportación al pago de los gastos del primer año del seguro. Evitando así un uso irracional de las reservas, es decir, un desembolso mayor que podría ser en ciertos casos innecesario, pues no es razón suficiente que por tener un mayor margen de gastos, éste sea utilizado totalmente.

Por otra parte, es conveniente resaltar que esta tesis podría ser de mucha utilidad para los técnicos en seguros, ya que les proporcionaría una metodología que les permitiría analizar con mayor precisión y rapidez el comportamiento y constitución de las reservas en un determinado período de pago de primas por motivo de una redistribución de su monto.

La flexibilidad de las leyes en materia de seguros, la competencia entre los diferentes tipos de mercado, y los mejores instrumentos financieros ofrecidos por empresas e instituciones financieras que se establezcan en México, con motivo de la Apertura Financiera y los Tratados de Libre Comercio, generan cambios estructurales en el diseño de los planes de seguros así como en las políticas que en materia de gastos determinen las compañías aseguradoras. Lo que podría implicar la desaparición o el afianzamiento total de los sistemas modificados de reserva. Sin embargo, la metodología expuesta en esta tesis seguirá persistiendo en el diseño de los futuros planes de seguros.

BIBLIOGRAFIA

Apuntes tomados de las auditorias realizadas por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas; México, 1985-1989.

Bowers, Gerber, Hichman, Jones, Nesbitt.- **Actuarial Mathematics**, published by The Society of Actuaries, Textbook, 1986.

Covarrubias, González Pedro Alejandro.- **Tesis "Proyecto de Texto para un Curso de Cálculo Actuarial I"**, México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 1978.

De la Cueva G., Benjamín.- **Tablas Financieras Actuariales y de Logaritmos con Tasas de Interés de 0.8% al 100.0%**, México; Porrúa Hermanos y CIA. S.A., 1984

González Gale, José.- **Elementos del Cálculo Actuarial.** Buenos Aires; Ediciones Macchi, 4a. Edición, 1968.

Jordan, Jr. Chester Wallace, **Life Contingencies**, Chicago Ilinois; Published by Society of Actuaries, Second Edition, 1967.

Joseph B. Maclean.- **El Seguro de Vida**, México; Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V., Traducción de la novena edición en inglés, quinta impresión, 1985.

Kellison, S.G..- **The Theory of Interest**; Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, INC, 1970.

Nava, Acosta Rafael.- **Tesis "Elementos Técnicos del Seguro Flexible"**; México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 1992.

Robert V. Hogg, Allen T. Craig.- **Introduction to Mathematical Statistics**, New York; Macmillan Publishing Co., Inc., 1978.