18
2 ejs.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ACATLAN

APROXIMACION A LA LEY DE DISTRIBUCION NORMAL DE PROBABILIDADES POR MEDIO DE UNA SERIE DE POTENCIAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LIC. EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

P R E S E N T A:

JOAQUIN MARQUEZ PAZ

ASESOR: FIS. MANUEL VALADEZ RODRIGUEZ

ENEP ACATLAN

NAUCALPAN, EDO. DE MEXICO 1994

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVENMA

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLÁN"

DIVISIÓN DE MATEMÁTICAS E INGENIERÍA
PROGRAMA DE ACTUARÍA Y M.A.C.

Sr. Joaquín Márquez Paz
Alumno de la carrera de Matemáticas
Aplicadas y Computación
P R E S E N T E

De acuerdo a su solicitud prestada con fecha 27 de enero de 1994, me complace notificarle que esta jefatura tuvo a bien asignarle el siguiente tema de tesis: "APROXIMACIÓN A LA DISTRIBUCIÓN NORMAL DE PROBABILIDADES POR MEDIO DE UNA SERIE DE POTENCIAS", el cual se desarrollará como sigue:

Introducción.
Cap. I Conceptos preliminares
Cap. II La función integral de probabilidades
Cap. III La distribución normal de probabilidades
Cap. IV Serie que aproxima a la distribución normal de probabilidades
Cap. V Cálculo de valores numéricos de la distribución normal
Conclusiones
Bibliografía
Apéndices

Asimismo fue asignado como asesor de tesis el Fís. Manuel Valadez Rodríguez, Profesor de esta Escuela.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá presentar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar examen profesional, así como de la disposición de la Coordinación de Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la tesis.

A T E N T A M E N T E
"Por mi raza hablará el espíritu"
Acatlán, Edo. de México a 29 de Noviembre de 1994

Act. Laura María Rivera Becerra
Jefe del Programa de Actuaría y M.A.C.

AGRADECIMIENTOS

A México,
la UNAM,
mi familia,
profesores
y amigos.

OBJETIVO:

Representar la función de distribución normal de probabilidades por medio de una serie de potencias.

HIPÓTESIS:

Si existe una representación en serie de potencias de la integral de probabilidades y existe una relación explícita entre ésta y la ley de distribución normal, entonces existe una representación en serie de potencias de dicha ley de probabilidades.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Se dice, entre otras cosas, que la moderna teoría de probabilidades es muy abstracta y general para ser útil. Este fue el grito de batalla que la gente con sentido práctico lanzó contra la teoría del campo de Maxwell. Se responde a este argumento si indicamos las nuevas e inesperadas aplicaciones abiertas por la teoría abstracta de los procesos estocásticos, o al conocimiento nuevo y profundo ofrecido por la moderna teoría de la fluctuación que, una vez más, desmiente la intuición y se dirige a una revisión de las actividades prácticas. De todas maneras, la discusión es inútil; es fácil condenar. Apenas ayer, las cosas prácticas de hoy fueron llamadas imprácticas, y las teorías que serán prácticas mañana serán etiquetadas como juegos inútiles por los hombres prácticos de hoy.
William Feller

En una situación práctica, un problema matemático se deriva de un fenómeno físico o social sobre el cual se han hecho algunas suposiciones para simplificarlo y, poder así, representarlo matemáticamente. Muchas veces cuando se relajan las suposiciones se llega a un modelo matemático más apropiado, pero al mismo tiempo, más difícil o imposible de resolver explícitamente. Y como, generalmente, el problema matemático no resuelve el problema exactamente, resulta con frecuencia más apropiado encontrar una solución aproximada del modelo.

Las técnicas del análisis numérico nos permiten aproximar soluciones de modelos matemáticos complicados. Es éste el caso de la evaluación de la distribución normal, en la que se utilizan técnicas de integración numérica o, para los más prácticos, tablas publicadas en las que se muestran algunos de sus valores más significativos.

Éste trabajo propone otro método numérico de evaluación de la ley de distribución normal, a la vez que muestra una representación teórica de ésta, en series de potencias.

La función integral de probabilidades es un importante modelo de la física matemática. El trabajo mostrará una representación en serie de potencias de ésta función, después establecerá la relación que existe entre ésta y la ley de distribución normal para obtener su representación en serie de potencias. También, propone un algoritmo para evaluar dicha distribución por medio de un computador.

En el capítulo I se presentarán al lector los conceptos teóricos necesarios para entender la teoría posterior. Concretamente, se recordarán algunos conceptos del cálculo real, la topología de los números complejos y el formalismo de las funciones analíticas; en particular se construirá la función exponencial compleja de manera que se pueda constatar que tiene esta característica.

Después, en el capítulo II se tratará la función integral de probabilidades. Se presentará, brevemente, la teoría que sustenta la integral de línea sobre los números complejos, para facilitar el entendimiento de ésta función. Además, se introducirá una importante implicación de dicha función en la física matemática, al exponer la relación que existe entre ésta y las integrales de Fresnel.

En el capítulo III se mostrarán las características más significativas de la ley normal. También se mencionará al lector el teorema central de límite que hace de ésta ley una de las más importantes de la teoría de probabilidades. Además, se incluirá en este capítulo, la relación que existe entre ésta y la función integral de probabilidades.

En el capítulo IV se obtendrá una serie de potencias que represente la integral de probabilidades, para derivar de ésta y de su relación con la ley normal una representación en serie de potencias de dicha ley.

Por último, en el capítulo V se mostrarán los algoritmos que nos permitan evaluar aproximadamente la función de distribución normal por medio de un computador.

Es importante mencionarle al lector que para leer fluidamente el trabajo son necesarios conocimientos básicos de cálculo y probabilidad, así como del álgebra de los números complejos.

En el apéndice A se incluye la traducción, a lenguaje C, de los algoritmos que se presentarán en el capítulo V, lo cual facilitará al lector el uso de los resultados alcanzados en este trabajo en aplicaciones de cómputo, que requieran de la evaluación directa de la ley de distribución normal, en la estadística y la probabilidad.

CAPITULO I

CONCEPTOS PRELIMINARES

Este capítulo tiene por objeto dar al lector una visión general de los conceptos necesarios para entender la exposición teórica posterior. Recordaremos primero, algunos de ellos relativos al cálculo real que utilizaremos para entender la integración de línea compleja.

Después, expondremos la topología básica de la variable compleja, se asumirá que el lector conoce el álgebra elemental de los números complejos, para llegar a la diferenciación y la integración de línea.

Culminaremos el capítulo con la construcción de la función exponencial compleja que será base de toda la teoría posterior.

I.1 Formas diferenciales lineales

Recordaremos ciertas ideas del cálculo real porque utilizaremos algunos de sus resultados para definir, posteriormente, la integral de línea en el plano complejo. Si el lector desea profundizar en el tema recomendamos referirse al tomo 2 de *Introducción al cálculo y al análisis matemático* de R. Courant y F. John [1].

Formas diferenciales lineales

Una forma diferencial lineal, en el plano real, se define por una expresión como la siguiente

$$L = A(x,y)dx + B(x,y)dy.$$

Esta función L de cuatro variables reales x, y, dx y dy es una forma lineal en las variables diferenciales dx y dy, con coeficientes que dependen de x y y Una forma diferencial especial, es la diferencial total de una función f en la cual los coeficientes A y B están dados por

$$A = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Si una forma diferencial L es la diferencial total de una función, se dice que es una forma diferencial exacta o que es integrable. No toda forma diferencial tiene esta característica; para ello, es necesario que cumpla con ciertas condiciones de integrabilidad:

Si los coeficientes A y B de la forma diferencial L tienen primeras derivadas continuas y si L es exacta, entonces se cumple la condición

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

Esta es una consecuencia directa de las reglas para la intercambiabilidad de las segundas derivadas[1]. Sin embargo, no profundizaremos en esto, pues sólo nos interesa el estudio de las formas diferenciales totales.

---

[1]Véase el teorema *intercambiabilidad de las segundas derivadas*, Courant[1], páginas 63 y 114. El teorema, en resumen, da la siguiente igualdad $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$.

Teoría básica de las curvas planas

Nos interesa la integración a lo largo de curvas planas, por lo que resulta lógico pensar en que debemos tener primero, cierto conocimiento de éstas. Así pues, mostraremos de forma general, las características de una curva plana.

La descripción más directa y flexible de una curva es su representación paramétrica. En vez de considerar una de las coordenadas rectangulares en particular, y o x, como una función de la otra, se considerarán ambas coordenadas x y y, como funciones de una tercera variable t, el llamado parámetro; y el punto con coordenadas x y y describe entonces la curva conforme t recorre un cierto intervalo.

La representación paramétrica define una transformación de un intervalo del eje t, en el plano. Ésto queda dado mediante una expresión de la forma

$$\Gamma: \quad x = \lambda_x(t), \quad y = \lambda_y(t)$$

Si λ_x y λ_y son continuas, entonces, puntos arbitrariamente cercanos sobre el eje t corresponden a puntos arbitrariamente cercanos de la curva Γ. Cuando una curva puede ser expresada de está forma, siempre pueden obtenerse otras representaciones paramétricas de ella.

Como los puntos del eje t están ordenados, debido a que el campo de los números reales tiene orden, de manera obvia se puede asignar un orden y sentido a los puntos de Γ diciendo simplemente que el punto en el cual se transforma t_1 precede al punto de la curva en que se transforma t_2, si $t_1 < t_2$ Con base en ese orden se puede definir la dirección de una curva. Un arco simple dirigido u orientado, es aquél en el cual se ha escogido un sentido definido, y este sentido se llama entonces el sentido positivo del arco. A la dirección contraria se le llama sentido negativo. El sentido positivo queda completamente especificado si se sabe cuál de los puntos extremos del arco sigue al otro. Se denomina punto final del arco al punto extremo que sigue al otro, de acuerdo al orden establecido, y punto inicial a este último.

Otra característica importante de las curvas es el número de partes separadas o ramas y el número de espiras que ellas tengan. Nos interesan de forma particular las curvas consistentes de una sola parte; las curvas conexas. Es conveniente aclarar que una curva conexa puede intersectarse a sí misma.

Una curva conexa sin intersecciones se denomina simple. Entre las curvas simples se distinguen todavía las curvas cerradas, como el círculo y la elipse, de las no cerradas como los segmentos de recta y parábolas.

Integración de las formas diferenciales exactas

La integral de una forma diferencial lineal L*, que es la diferencial total de una función* f*, es igual a la diferencia de los valores de* f *en los puntos extremos y no depende de la curva* Γ *que una esos puntos y sobre la cual se integre* f*, siempre que ésta esté definida sobre* Γ*; es decir*

$$\int_{\Gamma} L$$

tiene el mismo valor para todas las curvas simples dirigidas Γ *que se encuentren en el dominio de* f *y tengan el mismo punto inicial* P_0 *y el mismo punto final* P_1

Para demostrar esta proposición, supóngase que la curva Γ se refiere a un parámetro t, donde t_0 corresponde al punto inicial P_0 y t_1 al punto final P_1 [2]; ésto es,

$$\int_\Gamma L = \int_{t_0}^{t_1}\left(A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}\right)dt$$

entonces, por la regla de la cadena de la derivación, se tiene que

$$\int_\Gamma L = \int_{t_0}^{t_1}\frac{df}{dt}dt = f(P_1)-f(P_0) \text{ donde se escribe}$$

$$f(P_i) = f(x(t_i), y(t_i))$$

para $i = 0,1.$

Lo cual demuestra que bajo las condiciones citadas, la integral depende de los puntos extremos, dados por t_0 y t_1 y no de la trayectoria de la curva sobre la que se integra.

Si $P_0, P_1, \ldots, P_n$ son puntos sobre el arco Γ en el orden determinado por la orientación de Γ, se tiene que

$$\int_\Gamma L = f(P_n)-f(P_0) = \sum_{v=0}^{n-1}\left(f(P_{v+1})-f(P_v)\right)$$

$$= \sum_{v=0}^{n-1}\int_{P_v}^{P_{v+1}} L.$$

---

[2]Esto es posible gracias a que la representación parámetrica de una curva simple, define una transformación 1-1 entre cierto intervalo del eje t y la curva..

Si se denota al subarco con punto inicial P_ν y punto final $P_{\nu+1}$ como $\Gamma_{\nu+1}$, se tiene

$$\int_{P_\nu}^{P_{\nu+1}} L = \int_{\Gamma_{\nu+1}} L.$$

Aquí la orientación de cada curva Γ_ν concuerda con la de Γ. Ello nos permite pensar, en este caso, en la suma simbólica de curvas, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_{2+} + \cdots + \Gamma_n$, y expresar la integral L como una suma de integrales de línea

$$\int_{\Gamma_1 + \cdots + \Gamma_n} L = \int_{\Gamma_1} L + \cdots + \int_{\Gamma_n} L.$$

De modo semejante, si se intercambian los puntos extremos de Γ, y denotamos por $-\Gamma$ al arco que tiene orientación contraria, pero describe la misma curva que Γ, entonces[3]

$$\int_{-\Gamma} L = -\int_{\Gamma} L.$$

Esto tiene una particular relevancia al considerar arcos cerrados. Todos los resultados obtenidos en está sección serán de extrema importancia en el capítulo II en que definiremos la integral de funciones complejas sobre arcos.

---

[3] $\int_{\Gamma} L = f(P_n) - f(P_0) = -[f(P_0) - f(P_n)] = -\int_{\Gamma} L.$ Ésta propiedad de las integrales definidas, llamada de reflexión, se establece en el cálculo de una variable como: $\int_a^b s(x)dx = -\int_b^a s(x)dx$.

I.2 Topología básica del plano complejo

Después de haberse recordado algunos conceptos del cálculo real pasemos a la materia que nos ocupa, el plano complejo. En esta sección definiremos los conceptos básicos de la topología de dicho plano con miras a utilizarlos posteriormente. Se asume que el lector conoce el álgebra elemental de los números complejos.

Se le llama entorno de radio ε, o simplemente ε–entorno, a todos los puntos z que se encuentran en el interior del círculo centrado en z_0 y con radio ε. Esto es, los puntos que satisfacen la condición $|z - z_0| < \varepsilon$

Se dice que z es un punto de acumulación de un conjunto S, si cualquier ε–entorno del punto z contiene un número infinito de puntos pertenecientes a S.

Un conjunto S se llama abierto, si para cada uno de sus puntos existe un ε–entorno cuyos puntos todos pertenecen a S.

Un conjunto abierto será conexo si, y sólo si, dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse mediante una curva continua perteneciente al conjunto. Un conjunto abierto y conexo se llama recinto.

Respecto a cualquier conjunto abierto y, en particular a un recinto S, todos los puntos del plano se dividen en las siguientes tres categorías:

a) puntos pertenecientes a S; éstos se llaman puntos interiores a S,

b) puntos no pertenecientes a S, que son para S puntos de acumulación; éstos se llaman puntos frontera de S,

c) puntos exteriores a S. Son los puntos que no pertenecen a S y no son para S puntos de acumulación.

Si S es un recinto, la unión de éste y todos sus puntos frontera se llama recinto cerrado o cerradura de S.

Un conjunto G cuyos puntos están contenidos todos en un cierto disco $|z| < R$ con centro en el origen de coordenadas se llama acotado. Llamaremos a un recinto G acotado, simplemente conexo o múltiplemente conexo, según que su frontera sea un conjunto conexo o desconexo. Un ejemplo sencillo de un recinto simplemente conexo es el interior de un circulo, y un ejemplo de un recinto biconexo es el conjunto de puntos situados entre dos circunferencias concéntricas.

Por último, consideremos el conjunto total de los números complejos. En este se hacen dos distinciones según contengan el punto del infinito o no, y son llamados respectivamente el plano complejo extendido y el plano complejo finito. Para conceptualizar el punto del infinito, denotado por ∞, podemos considerar el plano complejo atravesando el ecuador de una esfera unitaria centrada en el origen. A cada punto de plano le corresponde exactamente un punto ***P*** sobre la superficie de la esfera. El punto ***P*** está determinado por la intersección de la recta que pasa por el punto z del plano y el polo norte ***N*** de la esfera. De igual forma, a cada punto ***P*** sobre la superficie de la esfera, diferente del polo norte, le corresponde un punto z en el plano. Haciendo corresponder el punto ***N*** de la esfera con el punto del infinito del plano complejo extendido, obtenemos una correspondencia biyectiva entre el plano extendido y la esfera. Esta correspondencia recibe el nombre de *proyección estereográfica* y la esfera se denomina *esfera de Riemann.*

I.3 Funciones enteras

Las funciones analíticas desempeñan un papel fundamental en la teoría de la variable compleja. Para definirlas debemos hacer una introducción a lo que representa una función compleja de variable compleja, y a los conceptos de continuidad y derivada en el plano complejo, relacionados con ésta.

Funciones complejas de variable compleja

Las funciones del plano complejo se definen de forma similar que en el cálculo real. Sea S un conjunto de números complejos. Una función f definida en S es una regla que asigna a cada z en S un número complejo w. El número w se llama el valor de f en z y se denota por $f(z)$; ésto es, $w = f(z)$. El conjunto S se llama *dominio de definición de* f.

De este momento en adelante cuando hablemos de una función, entenderemos que se trata de una función compleja de variable compleja, a menos que se especifique otra cosa.

La derivada en el plano complejo

Al igual que en los números reales podemos definir el límite de una función, y posteriormente se puede establecer el concepto de continuidad.

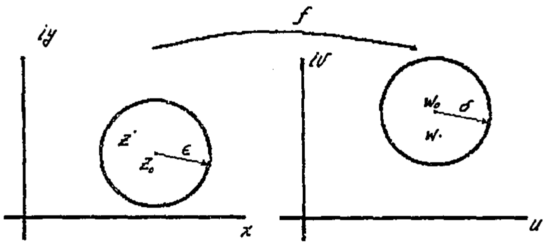
Sea f una función definida en algún ε–entorno del punto z_0, salvo posiblemente en el mismo z_0. Se dice que el límite de f cuando z tiende a z_0, es el número w_0; en símbolos

$$\underset{z \to z_0}{Lim} f(z) = w_0,$$

si para cada número positivo ε existe un número positivo δ tal que

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon, \text{ siempre que, } 0<|z-z_0|<\delta.$$

La afirmación anterior significa que el punto $f(z_0)$ puede quedar arbitrariamente próximo a w_0, siempre que z se encuentre suficientemente próximo al punto z_0. Gráficamente ésto se puede representar como en la figura siguiente



Ahora examinemos el concepto de continuidad de una función compleja de variable compleja. Si el punto de acumulación z_0 de un conjunto infinito S pertenece al conjunto mismo y para una función f, definida en S, se tiene que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, entonces la función f se llama continua en el punto z_0. Una función que es continua en cada punto de un conjunto S, se llama continua en ese conjunto.

Con las bases anteriores podemos definir el concepto de derivada.

Si f es una función compleja de variable compleja, se define la derivada de f en el punto z_0 como

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

supuesto que el limite exista. Expresando la variable z en términos de una nueva variable compleja $\Delta z = z - z_0$ y debido a que

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f(z_0 + z - z_0) - f(z_0) = f(z) - f(z_0)$$

podemos reescribir la definición de derivada como

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Si existe la derivada en el punto z_0 se dice que f es diferenciable en ese punto.

El siguiente teorema[4] nos ayudará a obtener la derivada de una función compleja de variable compleja f de forma sencilla, al darnos además de la derivada las condiciones necesarias y suficientes para su existencia.

TEOREMA. Para que una función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, definida en un recinto G, sea derivable en un punto z de este recinto como función de variable compleja, es necesario y suficiente que las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ sean diferenciables en este mismo punto como funciones reales de dos variables reales) y que, además, se cumplan en ese punto las condiciones:

$$\{A\} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

[4]La demostración puede verse en Markushevish[2], páginas 89 y posteriores.

Si se cumplen todas las condiciones del teorema, la derivada $f'(z)$ puede expresarse en cualquiera de las siguientes formas:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

El teorema anterior nos brinda un método para obtener $f'(z)$ en términos de funciones reales de dos variables reales, que son, en cierto modo, más fáciles de manejar. Las condiciones {A} dadas en el teorema son de fundamental importancia en la teoría de las funciones analíticas y aplicaciones de ésta a problemas de la física; y se llaman igualdades de Cauchy-Riemann.

Funciones enteras

Por último plantearemos el concepto de función entera. Una función compleja de variable compleja f es *analítica* en un punto z_0, si su derivada existe, no sólo en z_0, sino también en cada punto z de un ε-entorno de z_0. Nótese que si f es analítica en z_0, es también analítica en cada punto del ε-entorno de z_0, ya que éste es un conjunto abierto. Se dice que una función f es *entera* si es analítica en cada punto del plano complejo finito.

Ahora, podemos hacer otra clasificación de las funciones complejas de variable compleja con base en el concepto de función entera. Un polinomio complejo de grado n es una función P de la forma

$$P(z)=\sum_{i=0}^{n}a_i z^i$$

donde los coeficientes a_i, $i=0,1,2,,,n$ son números complejos y $a_n \neq 0$

Después, se definen las funciones meromorfas como aquellas funciones que pueden expresarse en forma de una razón de funciones enteras. Esta claro que toda función entera f es a la vez una función meromorfa, puesto que puede expresarse de la forma $f(z)/1$ Naturalmente, lo recíproco no es cierto, como lo muestra el ejemplo de la función $1/z$. Esta función es meromorfa pero no es entera, ya que no está definida en el punto $z = 0$. El caso más simple de funciones meromorfas son las funciones racionales. Así se le llama a toda función que puede expresarse en la forma

$$f = \frac{P}{Q},$$

donde P y Q son polinomios.

A las funciones que no son racionales se les llama trascendentes; es decir, son trascendentes todas aquellas funciones que NO se pueden expresar como un cociente de polinomios.

I.4 La función exponencial compleja.

Quizás la función entera más utilizada a lo largo de este trabajo sea la función exponencial compleja. Esta sección estará dedicada a su estudio y entendimiento.

La función exponencial, que es una función compleja de variable compleja, es la función más simple de las funciones trascendentes enteras. Se puede exponer simplemente definiéndola, pero para conocerla rápidamente en casi toda su extensión, construyámosla a partir de generalizar las características que la definen en los números reales. Las características base son:

1) *está definida unívocamente para todos los valores complejos (finitos) de z, para valores reales de z la función toma también valores reales y, $f(1)=e$.*

2) *satisface la igualdad $f(z+z_0)=f(z)f(z_0)$ para cualesquiera z y z_0;*

3) *es diferenciable en el punto $z=0$.*

De la condiciones 1) y 2) y de $f(z+0)=f(z)=f(z)f(0)$ se deduce que $f(0)=1$

Ahora, como $f(z-z)=f(0)=f(z)f(-z)=1$, *se tiene que* $f(z)\neq 0$ *para todo z en C*, pues el conjunto de los números complejos es un campo[5] y por tanto, se cumple que si $a,b\in C$ *y* $a\cdot b\neq 0$ entonces $a\neq 0$ y $b\neq 0$.

De las condiciones 2) y 3) obtenemos que para cualquier z, la expresión

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{f(z)f(\Delta z)-f(z)f(0)}{\Delta z}=\frac{[f(\Delta z)-f(0)]f(z)}{\Delta z}$$

tiende a $f'(z)=f'(0)f(z)$ cuando $\Delta z\to 0$ Lo cual significa que f es diferenciable en todo el plano complejo, pues z no tiene restricciones, y por tanto es entera y satisface la ecuación diferencial $f'(z)=f'(0)f(z)$ En particular con $z=x$, un número real,

$$f'(x)=f'(0)f(x)$$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{d\ln(f(x))}{dx}=f'(0)$$

---

[5]Un campo o cuerpo es una estructura algebraica. Véase *Álgebra Lineal* de Kenett Hoffman[3], páginas 1 y siguientes.

integrando la última expresión y considerando que $f'(0)$ es constante, se tiene que $\ln(f(x)) = f'(0)x + c$. Lo cual implica que, $f(x) = e^{f'(0)x+c}$

En particular, $f(0) = e^c$ De la condición inicial $f(0) = 1$ se deduce que $c = 0$. Así, $f(1) = e^{f'(0)}$ y debido a que $f(1) = e$, se tiene que $f'(0) = 1$. Y con ello $f(z = x + i0) = e^x$

Al sustituir el valor de $f'(0)$ en la expresión general de la derivada de f, se obtiene la expresión de f', dada por

$$f'(z) = f'(0)f(z) = f(z).$$

CAPITULO II

LA FUNCIÓN INTEGRAL DE PROBABILIDADES

La función integral de probabilidades es una función de amplio uso en la física matemática y en la estadística. Es utilizada para obtener valores numéricos de funciones difíciles de manejar analíticamente, y que bajo ciertos parámetros se aproximan a ella. En el presente capítulo la definiremos y mostraremos algunas de sus propiedades y aplicaciones. Trataremos, primero, algunos conceptos de integración en el plano complejo.

II.1 Integración sobre curvas en el plano complejo.

En esta sección definiremos la integración sobre una curva en algún recinto definido en el plano complejo. Haremos uso indiscriminado de los conceptos del cálculo real repasados en el capítulo I, sobre todo de curvas en el plano y formas diferenciales lineales. Es importante mencionar que nos referiremos sólo al tipo de integrales que utilizaremos en el trabajo. Si el lector desea profundizar en el estudio de la integración compleja recomendamos lea *Variable Compleja y Aplicaciones* de Ruel V. Churchill[4] y *Teoría de las funciones analíticas* de Markushevish[2].

Integración sobre curvas en el plano complejo

Sea $\Gamma : z = \lambda(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ una curva continua. A cada partición del segmento $[\alpha, \beta]$ en segmentos parciales $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ $k = 0, 1, ..., n-1$; $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = \beta$ corresponde una partición de la curva Γ en arcos parciales σ_k, $k = 0, 1, ..., n-1$; con los puntos iniciales $z_k = \lambda(\alpha_k)$ y los puntos finales $z_{k+1} = \lambda(\alpha_{k+1})$ El punto final de cada arco, a excepción del último, coincide con el punto inicial del arco que le sigue. Uniendo los puntos $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ en su orden mediante segmentos rectilíneos, obtenemos una poligonal Λ Los lados de esta poligonal son las cuerdas de los segmentos σ_k.

Entonces, la longitud de la poligonal Λ es igual a $\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$
Si esta magnitud, independientemente de la partición considerada, queda acotada,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| < \Delta < \infty,$$

la curva Γ se llama rectificable.

Ahora, sea $\Gamma : z = \lambda(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ una curva rectificable y $f(z) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$, una función continua sobre Γ.

Consideremos, como antes, alguna partición de la curva Γ en arcos σ_k y formemos para la función $f(z)$ la suma de Riemann,

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)$$

Cada término de esta suma es el producto del valor $f(z)$ en cierto ζ_k del arco σ_k por los afijos del punto inicial y final de ese arco. Ésto se puede reescribir como,

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)][\Delta x_k+i\Delta y_k]$$

donde $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ y $\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$. Realizando el producto correspondiente, obtenemos

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k-v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

$$+i\sum_{k=0}^{n-1}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

Como las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas, pues $f(z)$ es continua, y la curva Γ es rectificable, las sumas indicadas tenderán, hacia unos limites determinados al aumentar el número de particiones de la curva más allá de toda cota. Tenderán precisamente a

$$\int_\Gamma u(x,y)dx-v(x,y)dy \qquad \text{y}$$

$$\int_\Gamma v(x,y)dx+u(x,y)dy.$$

El limite de S cuando el número de particiones crece indefinidamente se representa por $\int_\Gamma f(z)dz$ y se denomina *integral de la función $f(z)$, tomada a lo largo o sobre de la curva* Γ. Así, pues, {2.1} $$\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)$$

$$= \int_{\Gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy$$

$$+i \int_{\Gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

Primitivas de una función

Si la representación paramétrica de f es $f(z) = u(\lambda_x(t), \lambda_y(t)) + iv(\lambda_x(t), \lambda_y(t))$; $\alpha \le t \le \beta$ entonces la integral definida queda como

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy$$

$$+i \int_{\Gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ u\left[\lambda_x(t), \lambda_y(t)\right] \lambda_x'(t) - v\left[\lambda_x(t), \lambda_y(t)\right] \lambda_y'(t) \right\} dt$$

$$+i \int_{\beta}^{\alpha} \left\{ v\left[\lambda_x(t), \lambda_y(t)\right] \lambda_x'(t) + u\left[\lambda_x(t), \lambda_y(t)\right] \lambda_y'(t) \right\} dt$$

Por consiguiente, $\int_{\Gamma} f(z)dz$ tiene una descripción paramétrica dada por

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda(t))\lambda'(t)dt.$$

Ahora bien, las integrales $\int_{\Gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy$ y $\int_{\Gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy$ son integrales de funciones reales de dos variables reales. Si las vemos más a fondo, son las integrales de dos formas diferenciales lineales. Más aún, como vimos en el capítulo I, si cada una de ellas es la integral de una diferencial exacta al integrarlas en el intervalo $[\alpha,\beta]$ el resultado no depende de la ruta elegida, sino únicamente de los limites de integración α y β. En este momento se tienen los elementos para pasar a la definición de primitivas.

Sea f una función analítica en un recinto D, y supóngase que existe una función analítica F tal que $F'(z) = f(z)$ en cada punto de D. Se dice entonces que la función F es una *primitiva* de f en el recinto D.

A la luz de esta definición, la integral {2.1} sobre la curva rectificable Γ de la sección anterior, bajo la condición de que exista la primitiva f, se reescribe como la integral

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = F[z(t)]\Big|_{\alpha}^{\beta} = F[z(\beta)] - F[z(\alpha)].$$

Lo cual nos lleva a que, si z_1 es el punto inicial de Γ y z_2 su punto final, el valor de la integral de f sobre la curva es,

$$\int_{L} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$

bajo la condición de que exista la primitiva de f. En virtud de estos resultados se puede enunciar el siguiente teorema.

TEOREMA 1. Si f es una función continua que tiene una primitiva F en todos los puntos de un recinto D, entonces el valor de la integral de línea de f desde un punto z_1 en D hasta otro punto z_2 de D es independiente de la curva sobre la que se integre, supuesto que está quede totalmente contenida en D.

Independencia de la ruta de integración

Cuando el valor de la integral de línea de una función f entre dos puntos dados de un recinto D, depende únicamente de los limites de integración y no de la curva D sobre la que se integra, decimos que las integrales de línea de f son independientes de la ruta de integración en D.

Sea f una función continua tal que la integral de línea con limites de integración en un recinto D es independiente de la ruta de integración en D. Si Δz es lo suficientemente pequeño, es inmediato que

$$f(z) = \frac{\Delta z}{\Delta z} f(z) = \frac{1}{\Delta z} f(z) \int_{z}^{z+\Delta z} ds = \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(z) ds$$

Además, si F es la primitiva de f, entonces

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(s) ds - \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(z) ds$$

$$= \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)] ds.$$

Pero f es continua en el punto z, por tanto, para cada número positivo ε, existe un número positivo δ tal que $|f(s)-f(z)|<\varepsilon$ siempre que $|s-z|<\delta$, y de ahí que, si el punto $z+\Delta z$ está suficientemente cercano a z de modo que $|\Delta z|<\delta$ entonces

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(s)-f(z)]ds\right|$$

$$<\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\varepsilon ds\right|=\left|\frac{\Delta z\varepsilon}{\Delta z}\right|=\varepsilon$$

Cuando ε tiende a cero, δ también tiende a cero y con ello $\Delta z\rightarrow 0$. Así,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=0. \qquad \{2.2\}$$

Dado que en la igualdad {2.2} $f(z)$ no depende de Δz, podemos reescribirla como

$$f(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}$$

Así que $F'(z)=f(z)$. Este resultado se resume en el siguiente teorema.

TEOREMA 2. Si las integrales de línea de una función f son independientes de la ruta en un recinto D, entonces f tiene una primitiva en cada punto de D.

La integral de línea de funciones analíticas

Los resultados anteriores son muy importantes gracias a que se pueden extender a todas las funciones analíticas. Esto es posible gracias al teorema de Cauchy-Goursat. Este teorema es extremadamente importante en la teoría de las funciones analíticas y es bastante complicada su demostración. Nosotros sólo lo enunciaremos e interpretaremos[1].

TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT. Si una función f es analítica en todo un recinto simplemente conexo D, entonces

$$\int_{\Gamma_c} f(z) = 0$$

para toda curva rectificable cerrada simple Γ_c contenida en D.

El teorema simplemente nos dice que si f es analítica en un recinto simplemente conexo D, al integrarse sobre una curva cerrada simple definida en D (es decir, una curva que partiendo de un punto cualquiera del recinto D sigue una ruta dentro de él, y regresa al mismo punto), entonces el valor de la integral de línea sobre esa curva es nulo.

Esto se puede extender a curvas cerradas arbitrarias que no necesariamente sean cerradas simples, ya que si una curva se corta con ella un número finito de veces, entonces está formada por un número finito de curvas simples cerradas. Aplicando el mismo número de veces el teorema de Cauchy-Goursat se obtiene el resultado deseado.

[1]Si el lector desea conocer su demostración refiérase a *Variable compleja y aplicaciones* de Ruel V. Churchill[4], secciones 32 a 36.

La razón primordial por la que nos interesa este teorema es que si dos curvas Γ_0 y Γ_1 están cada una de ellas en un recinto simplemente conexo D, y tienen los mismos puntos inicial y final, z_0 y z_1, respectivamente, entonces Γ_0 y $-\Gamma_1$ forman juntos una curva cerrada simple. Puesto que el teorema de Cauchy-Goursat se ha de cumplir para cualquier curva cerrada simple definida en un recinto simplemente conexo, se puede escribir

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz + \int_{-\Gamma_1} f(z)dz = 0, \text{ o bien como, } \int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz,$$

cuando f es analítica en D. Es decir, los valores de las integrales de línea desde z_0 a z_1 son independientes de la ruta que tomen, siempre y cuando esos contornos queden completamente contenidos en el recinto simplemente conexo D y que el integrando sea analítico.

Combinando el último resultado con el teorema 2, y dado que una función entera es analítica en todo el plano complejo, podemos decir que toda función entera tiene una primitiva.

II.2 La integral de probabilidades

Llegamos pues al momento de definir la función integral de probabilidades. Debe quedarle claro al lector que la función que definiremos no tiene una relación directa con la probabilidad. Es una función que nos ayuda a resolver problemas de muy distintos tipos. Por ejemplo, problemas de conducción del calor, problemas de óptica, etc.

Por integral de probabilidades entenderemos a la función compleja de variable compleja z definida por la integral

$$\Psi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \qquad \{2.3\}$$

Es claro que $\Psi(z)$ puede ser evaluada a lo largo de una ruta arbitraria que una al origen con el punto $t = z$, pues la función a integrar es entera.

Del cálculo elemental sabemos que la integral {2.3} no se puede resolver analíticamente. Para resolverla, normalmente se utilizan métodos del análisis numérico. El objetivo de este trabajo es presentar una forma numérica alternativa de obtener valores de $\Psi(z)$

Una forma de hacerlo es obteniendo su representación en serie de potencias derivada de la serie de Taylor que aproxima la función exponencial compleja. Éste será nuestro primer método de evaluación.

En el capítulo I se construyó la función exponencial compleja exigiendo que fuese entera. Cuando una función es analítica en cierto recinto D y no todas sus derivadas se anulan en un punto z_0 de D, está función puede ser representada por una serie de potencias en torno al punto z_0 por medio de una serie de potencias de $z - z_0$ [2]. En virtud de ello y de que la función exponencial compleja es entera, existe una serie de potencias de $z - z_0$ convergente en el círculo $K: |z - z_0| < \Delta < \infty$, que representa la función $f(z) = e^z$ y además, es de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ donde } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Para ahorrarnos cálculos hagamos $z_0 = 0$, es decir, buscaremos una aproximación de $f(z) = e^z$ en torno al origen. Así pues, dado que $d^n e^z / dz^n = e^z$ y que $e^0 = 1$, la función exponencial compleja tiene la siguiente representación en serie de potencias

[2]Teorema de Cauchy sobre el desarrollo de una función analítica en serie de potencias. Véase Markushevish[2], página 310 y posteriores.

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \{2.4\}$$

Lo cual concuerda perfectamente con su representación en los números reales. Ahora, para continuar la búsqueda de una serie de potencias que represente a $\Psi(z)$, evaluemos la serie dada por {2.4} en $-z^2$. Así, obtenemos

$$f(-z^2) = e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!}$$

Sustituyendo la serie para $f(-z^2)$ en la ecuación {2.3}, se tiene que

$$\Psi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!} dt.$$

Por otro lado, dado que cada término de la serie de potencias *uniformemente convergente* que representa $f(-z^2)$ es una función continua, el teorema enunciado por Markushevish[3] para la integración término a término de la serie nos garantiza que la serie resultante también es convergente. Así, integrando término a término, obtenemos una serie de potencias que aproxima $\Psi(z)$ en torno al origen.

$$\{2.5\} \qquad \Psi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

[3]Véase la proposición de Markushevish en *teoría de las funciones analíticas [2]*, capítulo III, páginas 271-275.

II.3 Aplicaciones

La función integral de probabilidades puede ser utilizada básicamente en dos grandes ramas de la matemática aplicada. Una de ellas se deriva del hecho de que cuando z es un número real la función $\Psi(z)$, bajo ciertas condiciones, se comporta igual que la función de distribución normal de probabilidades. Ésta aplicación la discutiremos ampliamente en el capítulo III. La otra rama de aplicación se da en la física matemática; por ejemplo, las integrales de Fresnel pueden ser representadas por la función integral de probabilidades y, a su vez, éstas integrales son utilizadas para resolver problemas de óptica, conducción de calor, etc[4].

Si z es un número complejo cualquiera se definen las integrales de Fresnel por las expresiones

$$C(z) = \int_0^z \cos\frac{\pi t^2}{2}dt \quad \text{y} \quad S(z) = \int_0^z \operatorname{sen}\frac{\pi t^2}{2}dt.$$

Como el $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$ son funciones complejas de variable compleja enteras, de acuerdo con el teorema 2, las integrales de Fresnel, que son integrales de línea, son independientes de la ruta de integración al igual que la integral de probabilidades. Así, la relación entre éstas es inmediata.

$$C(z) \pm iS(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt \pm i\int_0^z \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt$$

$$\Rightarrow \quad C(z) \pm iS(z) = \int_0^z \exp\left(\frac{\pm i\pi t^2}{2}\right)dt. \qquad \{2.6\}$$

[4]Véase Levedev[5], pags 21 y posteriores.

Si $u = t\sqrt{\frac{\pi i}{2}}$ entonces $t = \sqrt{\frac{2}{\pi i}}u$ y $dt = \sqrt{\frac{2}{\pi i}}du$

Así cuando $t = 0$ y $t = z$ se tiene que $u = 0$ y $u = \sqrt{\frac{\pi i}{2}}z$ respectivamente, con lo que {2.6} se reescribe como

$$C(z) \pm iS(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi i}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi i}{2}}z} e^{\pm u^2} du$$

$$C(z) \pm iS(z) = \mp\sqrt{\frac{2}{\pi i}} \int_0^{\mp\sqrt{\frac{\pi i}{2}}z} e^{-u^2} du \qquad \{2.7\}$$

Ahora, como

$$\mp\sqrt{i} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\mp\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \mp i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4} = e^{\mp\frac{\pi i}{4}}.$$

finalmente {2.5}, queda como

$$C(z) \pm iS(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}ze^{\mp i\frac{\pi}{4}}} e^{-u^2} du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Psi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}ze^{\mp i\frac{\pi}{4}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \Psi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{\mp i\frac{\pi}{4}} \right)$$

Ahora, dado que

$$C(z) = \frac{[C(z) + iS(z)] + [C(z) - iS(z)]}{2} \quad \text{y}$$

$$S(z) = \frac{[C(z) + iS(z)] - [C(z) - iS(z)]}{2i},$$

tenemos que, las ecuaciones de Fresnel se representan en términos de la integral de probabilidades, por medio de las siguientes expresiones

$$\{2.8\} \quad C(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[e^{\frac{\pi i}{4}} \Psi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{\frac{-\pi i}{4}} \right) + e^{\frac{-\pi i}{4}} \Psi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{\frac{\pi i}{4}} \right) \right]$$

y

$$\{2.9\} \quad S(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}i} \left[e^{\frac{\pi i}{4}} \Psi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{\frac{-\pi i}{4}} \right) - e^{\frac{-\pi i}{4}} \Psi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{\frac{\pi i}{4}} \right) \right].$$

Las expresiones {2.8} y {2.9} nos dan una forma de evaluar $C(z)$ y $S(z)$ en términos de la integral de probabilidades por lo que si encontramos un método eficiente de calcular ésta, podremos resolver las integrales de Fresnel, y con ellas todo problema que se pueda llevar a alguna expresión en términos de éstas.

CAPÍTULO III

LA DISTRIBUCIÓN NORMAL DE PROBABILIDADES

En este capítulo conoceremos la aplicación de la integral de probabilidades que ocupa al presente trabajo. Estudiaremos la ley normal de probabilidades, veremos el porqué es tan importante en la teoría y, al final, estableceremos su relación con la integral mencionada.

III.1. La distribución normal

La distribución normal o gausiana es quizás la más importante y la de mayor uso de todas las distribuciones continuas de probabilidad.

La función de distribución normal de probabilidades

Se dice que una variable aleatoria X se encuentra normalmente distribuida si su función de densidad de probabilidades está dada por

$$\{3.1\} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\tfrac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right],$$

donde $-\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$

Los parámetros de la distribución normal son μ y σ. Se puede demostrar que μ y σ^2 son respectivamente la media y la varianza de la ley normal de probabilidades especificada por {3.1}. Esto es, μ es igual a la esperanza de la función $g(x) = x$ y σ^2 es el segundo memento central de la ley de probabilidades dada por {3.1}.

Ahora, especificada la función de densidad de probabilidades {3.1} queda completamente definida la función de distribución normal de probabilidades con parámetros μ y σ por

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{y-\mu}{\sigma}\right]^2\right) dy$$

para $-\infty < x < \infty$ A la cantidad $P[X \leq x] = F(x)$ se le llama probabilidad de que el valor observado de la variable aleatoria X sea menor o igual que x.

Las funciones de densidad y distribución normal estándar

Las funciones $\phi(x)$ y $\Phi(x)$ que se definen a continuación desempeñan un papel fundamental en la teoría de probabilidades. Para cualquier número real x, definimos estas funciones como

$$\{3.3\} \qquad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

$$\{3.4\} \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

Debido a su relación tan estrecha con la ley normal de probabilidades, a $\phi(x)$ se le llama función de densidad normal estándar y a $\Phi(x)$ función de distribución normal estándar. Ahora, conoceremos algunas de sus características más importantes.

La función $\phi(x)$ es par y su gráfica es una curva en forma de campana simétrica con respecto al eje y. La gráfica de $\Phi(x)$ es una curva creciente en forma de S.

Ambas funciones son positivas, y además se verifica que $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx = 1$, ya que, si se define

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy,$$

resulta,

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(y^2 + x^2\right)\right] dydx = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2}\, rdrd\theta$$

$$= \frac{-1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \left[-\exp\left(-\tfrac{1}{2}r^2\right)\Big|_0^{\infty} \right] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\theta = 1,$$

como se quería hacer ver. Ahora, las características anteriores son comunes a toda función de densidad, por lo que $\phi(x)$ es una función de densidad de probabilidades. Más aún, $\phi(x)$ es la función de densidad normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

Una propiedad importante de $\Phi(x)$ es la siguiente. Si se conoce $\Phi(x)$ para toda x positiva se conoce para toda x, ya que $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ Demostremos la proposición anterior.

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{-\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy.$$

El último resultado es posible en virtud de la propiedad de reflexión de las integrales definidas.

Ahora bien, como para cualquier función continua $f(x)$ se ha de verificar que $\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx = \int_a^b f(x)dx$ [1], y en particular para $k=-1$, se tiene que

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy - \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy\right],$$

por lo que, efectivamente,

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x). \qquad \{3.5\}$$

La importancia de la función $\Phi(x)$ se debe a que las probabilidades relativas a fenómenos aleatorios que obedecen a una ley de probabilidades normal con parámetros μ y σ se calculan fácilmente, puesto que pueden expresarse en términos de la función $\Phi(x)$. De manera más precisa, consideremos una variable aleatoria X cuya ley de probabilidades está especificada por la función de densidad $f(x)$ dada por {3.1}. Entonces, su función de distribución de probabilidades está dada por

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{y-\mu}{\sigma}\right]^2\right)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \qquad \{3.6\}$$

[1] Véase la propiedad de dilatación o contracción del intevalo de integración de las integrales definidas. Apostol[8], páginas 84 y posteriores.

Por consiguiente, si X es una variable aleatoria que se rige por una ley de probabilidades normal con parámetros μ y σ, entonces, para cualesquiera números reales a y b, tales que $a < b$, se tiene que

$$P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

III.2. La importancia de la distribución normal

En esta sección conoceremos algunas de las razones por las cuales la ley normal juega un papel muy significativo en la teoría de probabilidades.

Señalaremos, para empezar, que aún cuando son pocos, existen fenómenos aleatorios que obedecen de forma precisa la ley normal. Sin embargo, la importancia de dicha ley radica en el hecho de que, bajo diferentes condiciones, aproxima bastante bien a muchas otras leyes de probabilidad, inclusive leyes discretas. Esto en gran medida se sustenta en un resultado muy destacado de la teoría de probabilidades conocido como el teorema central del límite.

El teorema Central del límite

La teoría que sustenta al teorema central del límite es muy extensa y no es objetivo de este trabajo estudiarla a fondo. Aquí únicamente conoceremos una versión de amplio uso desde el punto de vista de las aplicaciones de la teoría de probabilidades. Si el lector desea profundizar en el estudio del teorema central del límite para variables aleatorias independientes refiérase al tratado de B. V. Gnedenko y A. N. kolmogorov, *limit distributions for sums of independent random variables*, Adison-Wisley, Cambridge, Mass., 1954.

Teorema central del límite para variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con medias y varianzas finitas. Sea $X_1, X_2, ..$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como una variable aleatoria X, con media $E[X]$ y desviación estándar $\sigma[X]$ finitas. Entonces, la sucesión de variables aleatorias

$$\left\{ Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sigma[S_n]} \right\}, \quad \text{donde} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

converge en distribución cuando n crece más allá de toda cota a una variable aleatoria normalmente distribuida con media 0 y varianza 1.

Tal vez aún no se puede vislumbrar la capacidad operativa que nos brinda el teorema central del límite para resolver problemas reales utilizando la ley normal. Veremos aquí un problema clásico de inferencia estadística en el que se utiliza esta poderosa herramienta para resolverlo.

La estimación de la media poblacional

Veamos como la ley normal de probabilidades es utilizada para resolver problemas de toma de decisiones para medias poblacionales desconocidas. Decimos que un conjunto de n observaciones $X_1, X_2, ..., X_n$ constituye una *muestra aleatoria* de una variable aleatoria X, si $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas[2].

---

[2] La forma de muestreo es esencial para constituir una muestra aleatoria. Un buen procedimiento de muestreo es el siguiente:

Se diseña un experimento y se lleva a cabo para obtener la observación X_1. El experimento se repite bajo las mismas condiciones proporcionando la observación X_2. El proceso se repite hasta obtener n observaciones $X_1, X_2, ..., X_n$.

Obsérvese que al realizar el muestreo de esta forma, cada observación X_i, $i = 1,2,...,n$, es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad está idénticamente distribuida a la variable aleatoria X que se estudia, puesto que en cada observación la población tiene su forma original. Además, el resultado de la i-ésima observación, no depende de lo que se obtenga en ninguna otra, por lo que las variables aleatorias son independientes.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria X y sea $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ la media aritmética de la suma de las observaciones, o simplemente, media muestral. Entonces,

$$\{3.8\} \qquad E[M_n] = \tfrac{1}{n} E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k]$$

$$= \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X] = E[X]$$

$$\{3.9\} \qquad Var[M_n] = \tfrac{1}{n^2} Var\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \tfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var[X_k]$$

$$= \tfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var[X] = \tfrac{1}{n} Var[X]$$

Utilicemos ahora otro resultado de la teoría de probabilidades conocido como la desigualdad de Chebyschev. Éste dice que para cualquier variable aletoria Y con función de distribución $F(y)$, con media m y desviación estándar σ, y cualquier número real $h \geq 0$ se cumple que

$$\{3.10\} \qquad Q(h) = F(m + h\sigma) - F(m - h\sigma) \geq 1 - \frac{1}{h^2}$$

Observe que {3.10} tiene la importante implicación de que

$$P[m - h\sigma \leq Y \leq m + h\sigma] \geq 1 - \frac{1}{h^2}.$$

Ahora, como $P[m - h\sigma \leq Y \leq m + h\sigma] = P[|Y - m| \leq h\sigma]$, la desigualdad de Chebyschev se puede reescribir como

$$\{3.11\} \qquad P[|Y - m| \leq h\sigma] \geq 1 - \frac{1}{h^2}.$$

Así, $Q(h)$ resulta ser la probabilidad de que un valor observado de Y esté en un intervalo centrado en la media y con longitud de $2h$ desviaciones estándar, por lo que, entre más pequeña sea la varianza mayor será la probabilidad de que una observación sea igual a la media de Y.

En el caso específico de la media muestral, según {3.9}, conforme mayor sea el número n de observaciones de la muestra, la media muestral M_n, más se parecerá a la media $E[X]$ de la variable aleatoria X. Este hecho es conocido como la ley de los grandes números.

Ahora bien, M_n es también la suma parcial hasta el n-ésimo término de la sucesión $\left\{\frac{X_k}{n}\right\}$. Así podemos evaluar aproximadamente la probabilidad, para cualquier intervalo $[a,b]$ alrededor de la media, la probabilidad de que la media muestral tenga un valor observado en ese intervalo; esto es

$$P[a \leq M_n \leq b] = P\left[\frac{a-E[M_n]}{\sigma[M_n]} \leq \frac{M_n-E[M_n]}{\sigma[M_n]} \leq \frac{b-E[M_n]}{\sigma[M_n]}\right]$$

$$= \Phi\left[\frac{b-E[M_n]}{\sigma[M_n]}\right] - \Phi\left[\frac{a-E[M_n]}{\sigma[M_n]}\right].$$

puesto que según el teorema central del límite la media muestral estará tan próxima a distribuirse como normal estándar en la medida en que n sea mayor.

Si unimos el resultado anterior con la ley de los grandes números encontraremos que la media muestral será un excelente estimador de la media desconocida de la variable aleatoria Xen la medida en que el número de las observaciones incluidas en la muestra crezca.

III.3. La relación entre la distribución normal de probabilidades y la función integral de probabilidades

En esta sección daremos un paso importantisimo para la obtención de una aproximación por medio de una serie de potencias de la distribución normal de probabilidades al obtener una representación de la función de distribución estándar $\Phi(x)$ en términos de la función integral de probabilidades $\Psi(z)$.

Recordemos, primero, que $\Psi(z)$ está definida para todos los números complejos z, y en particular para todo número real x, como

$$\{3.10\} \qquad \Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2}\, dt$$

Por otro lado, $\Phi(x)$ se define para todo número real x como

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt.$$

Como $\Phi(x)$ es una función de distribución se ha de cumplir que $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$, además, su función de densidad de probabilidades $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$ es simétrica con respecto al eje y, donde alcanza su máximo. De ésto se deduce que $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Supongamos por el momento que x es un número real positivo. Entonces,

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-t^2}{2}}dt+\int_{0}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}dt\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt=\tfrac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-u^2}du$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-u^2}du\right]=\frac{1}{2}\left[1+\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

Mediante {3.5}, es inmediato que

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)=1-\tfrac{1}{2}\left[1+\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[1-\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \qquad \{3.12\}$$

Resumiendo {3.10}, {3.11} y {3.12} obtenemos que

$$\Phi(x)=\begin{cases}\tfrac{1}{2}\left[1+\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] & \text{si } x\geq 0\\ \tfrac{1}{2}\left[1-\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] & \text{si } x<0\end{cases} \qquad \{3.13\}$$

CAPÍTULO IV

SERIE DE POTENCIAS QUE APROXIMA A LA DISTRIBUCIÓN NORMAL DE PROBABILIDADES

En este capítulo obtendremos la representación en una serie de potencias de la ley de distribución normal. Nos valdremos de una representación similar de la integral de probabilidades que será el resultado de dar solución a una ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden.

IV.1 Ecuación diferencial no homogénea que tiene como solución una función en términos de la integral de probabilidades

Sea z un número complejo y establézcase la ecuación diferencial

$$y'-2zy=1 \qquad \{4.1\}$$

con la condición inicial $y(0)=0$.

Para resolver {4.1} busquemos primero una función $\tau(z)$ tal que multiplicada por el miembro de la izquierda de la igualdad {4.1} sea igual a la función $(\tau y)'(z)$ [1].

Ésto es, buscamos una función $\tau(z)$ tal que

$$\tau(y'-2zy) = (\tau y)' \qquad \{4.2\}$$

Resolvamos {4.2} para $\tau(z)$,

$$\tau y'-2z\tau y = (\tau y)' = \tau' y + \tau y$$

$$\Rightarrow \quad -2z\tau y = \tau' y$$

$$\{4.3\} \qquad \Rightarrow \quad -2z = \frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dz}, \quad \tau \neq 0.$$

Multiplicando por dz a ambos lados de la igualdad {4.3} e integrando obtenemos

$$\ln \tau(z) = \int^{z} -2t\,dt = -z^2 + c_1$$

y de ahí, es inmediato que

$$\{4.4\} \qquad \tau(z) = \exp(-z^2 + c_1) = c_2 e^{-z^2}.$$

Consideremos las igualdades {4.1}, {4.2} y {4.4} para escribir

$$c_2 e^{-z^2}\left[y'-2zy\right] = (c_2 e^{-z^2} y)' = c_2 e^{-z^2}$$

[1] Esto es lo que sugiere el método del factor integrante para resolver ecuaciones diferenciales de éste tipo.

$$\Rightarrow \quad d(c_2 e^{-z^2} y) = c_2 e^{-z^2} dz$$

$$\Rightarrow \quad e^{-z^2} y = \int^z e^{-t^2} dt + c_3$$

con lo cual,

$$\{4.5\} \qquad y(z) = e^{z^2} \left[\int^z e^{-t^2} dt + c_3 \right]$$

A fin de plantear $y(z)$ en términos de la integral de probabilidades consideremos el límite de integración inferior de la integral {4.5} igual a cero[2]. Ésto es

$$\{4.6\} \qquad y(z) = e^{z^2} \int_0^z e^{-t^2} dt + c_3 e^{z^2}.$$

Ahora, como se ha de cumplir que $y(0) = 0$, se tiene que $c_3 = 0$, por lo que {4.6} se reescribe como

$$\{4.7\} \qquad y(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{z^2} \Psi(z)$$

donde Ψ es la función integral de probabilidades definida por {2.3}. De ahí que,

$$\{4.8\} \qquad \Psi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} y(z)$$

que es finalmente una representación de la integral de probabilidades en términos de la solución de la ecuación diferencial lineal no homogénea dada por {4.1}.

---

[2]La elección del límite inferior en la integral {4.5} es irrelevante, ya que la diferencia entre $\int_a^z e^{-t^2} dt$ y $\int_b^z e^{-t^2} dt$ es una constante que puede sumarse a c.

IV.2 Representación en serie de potencias de la distribución normal de probabilidad

En esta sección obtendremos una serie de potencias que representa la distribución normal de probabilidades. Para ello nos valdremos de una representación similar de la integral de probabilidades y de la igualdad {3.13}.

Determinación de la serie de potencias que representa la integral de probabilidades

Definamos una función $y(z)$ como una serie de potencias con coeficientes desconocidos y forcémosla a que sea solución de {4.1} con la condición inicial $y(0) = 0$.

Así, sea $y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ una función compleja de variable compleja, solución de la ecuación diferencial $y' - 2zy = 1$, con la condición $y(0) = 0$. Para obtener los coeficientes de la serie, calculemos $y'(z)$:

$$y'(z) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} a_k z^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k,$$

con lo que {4.1} se puede reescribir como

$$y' - 2zy = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k - 2z \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2 a_k z^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}z^{k} - \sum_{k=1}^{\infty}2a_{k-1}z^{k}$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)a_{k+1} - 2a_{k-1}\right]z^{k} = 1.$$

Evidentemente, es cierta la afirmación si, y sólo si, $a_1 = 1$ y $(k+1)a_{k+1} - 2a_{k-1} = 0$ para todo entero $k \geq 1$, con lo que $a_{k+1} = \frac{2a_{k-1}}{k+1}$, $k \geq$; o bien,

$$a_k = \frac{2a_{k-2}}{k}, \; k \geq 2.$$

Calculemos algunos de estos coeficientes,

$$a_1 = 1,\; a_3 = \frac{2a_1}{3} = \frac{2}{1\cdot 3},\; a_5 = \frac{2a_3}{5} = \frac{2^2}{1\cdot 3\cdot 5},\; a_7 = \frac{2a_5}{7} = \frac{2^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7},..$$

$$a_0,\; a_2 = \frac{2a_0}{2} = a_0,\; a_4 = \frac{2a_2}{4} = \frac{a_0}{2},\; a_6 = \frac{2a_2}{6} = \frac{a_0}{3!},..$$

con lo que, de manera general, podemos describir a los coeficientes por las expresiones

$$a_{2p} = \frac{a_0}{p!} \quad \text{y} \quad a_{2p+1} = \frac{2^p}{\prod_{k=0}^{p}(2k+1)}$$

para todo número entero $p = 0,1,2,..$

Una vez determinada la forma de los coeficientes de la serie de potencias que representa a $y(z)$ de modo que satisfaga {4.1}, podemos reescribir ésta como

$$y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k = a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k z^{2k+1}}{1\cdot 3\cdots(2k+1)}$$

Ahora, determinemos el valor de a_0. Para ello, recordemos la condición inicial de {4.1}, $y(0)=0$, la cual se cumple sólo si $a_0=0$; por lo que, finalmente, $y(z)$ queda como

$$\{4.9\} \qquad y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k z^{2k+1}}{1\cdot 3\cdots(2k+1)}.$$

Por otro lado, mediante {4.8} y {4.9} podemos reescribir la función integral de probabilidades como

$$\Psi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}y(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k z^{2k+1}}{1\cdot 3\cdots(2k+1)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}ze^{-z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2z^2)^k}{1\cdot 3\cdots(2k+1)} \qquad \{4.10\}$$

que es la primera serie de potencias que buscábamos.

Convergencia de la serie

Al plantearse una serie de potencias siempre se debe hacer alusión a las condiciones en las que ésta converge.

Un resultado importantisimo del cálculo para el análisis de la convergencia de series es el llamado criterio de la razón. El cual dice, entre otras cosas, que si $\sum s_k$ es una serie de potencias tal que

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| < 1,$ entonces la serie converge. Así la serie dada por {4.10} converge, ya que, para todo número complejo z

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2z^2)^{n+1}}{1\cdot 3\cdots(2n+3)}\Big/\frac{(2z^2)^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}z^{2(n+1)}1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2^n z^{2n}1\cdot 3\cdots(2n+3)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2z^2}{2n+3}\right| = 0. \quad \{4.11\}$$

para todo número complejo z.

Serie de potencias que aproxima la distribución normal

Comparemos las dos series de potencias obtenidas en este trabajo para representar la integral de probabilidades; las dadas en {2.5} y {4.10}, antes de obtener la representación consecuente de la ley de distribución normal.

Evaluemos el aspecto más importante para la determinación de valores de la serie en computadora: la rapidez de convergencia de las series involucradas en ambas representaciones.

Una condición necesaria para la convergencia de una serie es que el n-ésimo término de ésta tienda a cero conforme $n \to \infty$. Evidentemente si el n-ésimo término de una de las series es mayor que el de la otra serie, ésta debe converger más rápidamente. Así consideremos el n-ésimo término de ambas series. El n-ésimo término de la serie dada por {2.5} es

$$\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!} \qquad \{4.13\}$$

y, el mismo término de la serie dada en {4.10} es

$$\frac{(2z^2)^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}. \qquad \{4.14\}$$

Como $(2n+1)n! < 1\cdot 3\cdots(2n+1)$ a partir de $n \geq 2$, resulta claro que se cumple la desigualdad

$$\left|\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right| > \left|\frac{(2z^2)^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\right|.$$

para algún $n > N(z)$. De donde se concluye que la serie dada por {4.10} converge con mayor rapidez que la dada en {2.5}.

Así pues, en virtud de {4.10} y {3.11}, podemos decir que para todo número real x la función de distribución de probabilidades normal estándar tiene la siguiente representación en serie de potencias.

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\exp\left[-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x^2)^k}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\exp\left[-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x^2)^k}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

lo que implica,

$$\{4.15\} \qquad \Phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[\dfrac{-x^2}{2}\right]\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{2k}}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} & \text{si } x<0\\ \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[\dfrac{-x^2}{2}\right]\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{2k}}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} & \text{si } x\geq 0.\end{cases}$$

Ésta es la representación de $\Phi(x)$ que se planteó como objetivo encontrar en el trabajo. Ahora, sólo nos resta obtener un algoritmo para computadora que realice las sumas.

CAPITULO V

Cálculo de valores numéricos de la distribución normal

En el capítulo IV se obtuvo una serie de potencias que representa de forma exacta a la función de distribución normal estándar de probabilidades, $\Phi(x)$. Además, en el capítulo III, establecimos la igualdad {3.6} en la que se expresa la relación entre $\Phi(x)$ y la ley normal de probabilidades con media μ y desviación estándar σ. Por lo cual estamos en posibilidad de evaluar, teóricamente, la probabilidad de que en una observación de una variable aleatoria, X, que se rige por la ley normal con parámetros μ y σ, tome valores en el intervalo $-\infty < X < x$. Evidentemente, para efectos prácticos la suma involucrada en {4.15} puede ser efectuada sólo para un número N de términos, por lo que $P[X \leq x]$ sólo es una aproximación. Sin embargo, dicha aproximación será mejor si hacemos N lo suficientemente grande. De ahí que se haga necesaria la utilización de una computadora para evaluarla.

En este capítulo mostraremos como utilizar de forma práctica los resultados teóricos obtenidos en este trabajo, a través de algoritmos, los cuales nos permitirán implantar dichos resultados en computadora, independientemente del equipo y lenguaje de cómputo elegidos para ello.

V.I Algoritmos

Un algoritmo es un procedimiento que describe, sin ninguna ambigüedad, una sucesión finita de pasos a realizar en un orden específico para lograr un objetivo.

Como vehículo para describir algoritmos utilizaremos un pseudocódigo que específica primeramente los datos de entrada y la forma de los datos de salida. Cada pseudocódigo tendrá un nombre en el que se tratará de aludir el objetivo del algoritmo.

Los pasos en los algoritmos se han arreglado de tal forma que la dificultad para traducir un pseudocódigo a cualquier lenguaje de cómputo, apropiado para el desarrollo de aplicaciones científicas, sea mínima.

La semántica del pseudocódigo que utilizaremos para expresar un algoritmo será la siguiente:

1) La técnica de ciclaje estará controlada por una condición; por ejemplo, Mientras $i<N$ seguir pasos 3 a 6
2) El símbolo punto (.) denotará la terminación de un paso.
3) El símbolo punto y coma (;) separará instrucciones dentro de un sólo paso.
4) La estructuración de un grupo de pasos indicará que las instrucciones contenidas en él deberán tratarse como una identidad.
5) Para la ejecución condicional se usarán las construcciones úsales

Si ... entonces ..., o, Si ... entonces ...
Si no ....

Una vez que hemos convenido la forma en que se expresarán los algoritmos, procedemos a desarrollar los que sean necesarios para mostrar los resultados obtenidos en este trabajo, de modo tal que, puedan ser traducidos fácilmente a un lenguaje de computo.

V.2 Algoritmo para calcular una aproximación de la ley normal

En esta sección desarrollaremos los algoritmos que nos permitan implantar en computadora los resultados obtenidos en el trabajo.

El primer algoritmo será aquel que nos permita evaluar, para cierto número real x, la probabilidad de que una observación de una variable aleatoria X, que se rige por la ley normal con parámetros media 0 y desviación estándar 1, ocurra en el intervalo $-\infty < X < x$.

Así pues, desarrollaremos un algoritmo que evalúe la expresión {4.15}. En dicha igualdad hay una serie de potencias, por lo que se debe de establecer un mecanismo de alto para la suma. La primera consideración para detener el algoritmo de suma será un número máximo de términos a sumar, que llamaremos $MaxSum$.

El segundo, lo basaremos en la propia expresión {4.15}, pues dado que la serie converge, la sucesión $\{ a_k \}$ que involucra ésta, converge a cero. Entonces, necesariamente existe un entero positivo N, desde el cual la sucesión es uniformemente decreciente; esto es, $a_N > a_{N+1} > a_{N+2} > \cdots$. Así, si consideramos insignificante la contribución de los términos a_k, cuando $k \geq N$ y $a_N \leq Tolerancia$, donde $Tolerancia$ es una constante previamente fijada, el algoritmo de suma debe detenerse.

Una vez establecido lo anterior, procedamos a escribir el algoritmo **ProbDistNormalStd** que evaluará la probabilidad $P[X \leq x]$, donde X es una variable aleatoria que se rige por la ley normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ Evidentemente, sus entradas deberán ser x, $MaxSum$ y $Tolerancia$; y la salida debe ser la probabilidad $P[X \leq x]$, que llamaremos simplemente *Probabilidad*.

ProbDistNormalStd

Entradas: x, *MaxSum* y *Tolerancia*
Salida: *Probabilidad*

Paso 1. Hágase
sumando = Suma = numerador = denominador = 1;
$$Constante = \frac{x}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Paso 2. Mientras *Sumando* < *MaxSum y*
(numerador/denominador)<*Tolerancia*
Háganse los pasos 3 a 5

Paso 3. Hágase
$numerador = (numerador)(x^2);$
$denominador=(denominador)(2sumando+1).$

Paso 4. Hágase

$$suma = suma + \frac{numerador}{denominador}$$

Paso 5. Hágase $sumando=sumando+1$.

Paso 6. Si $x \geq 0$ hágase $Probabilidad=\frac{1}{2}+(contante)(suma)$
si no hágase $Probabilidad=\frac{1}{2}-(contante)(suma)$.

Otro resultado importante que ahora podemos llevar a la computadora es el cálculo de la probabilidad de que una observación de la variable aleatoria, X, que se rige por la ley normal con parámetros media *mu* y desviación estándar *sigma,* ocurra en el intervalo $-\infty < X < x$, que se determinó por la expresión {3.6}. Este algoritmo se basa en el anterior, **ProbDistNormalStd**, con lo que el nuevo algoritmo **ProbDistNormal** hereda sus entradas y; aunque con otro significado, su salida.

ProbDistNormal

Entradas: *mu, sigma, x, MaxSum* y *Tolerancia*
Salida: *Probabilidad*

Paso 1. Hágase
Nuevalor=(x-mu)/sigma.

Paso 2. Utilice el algoritmo **ProbDistNormalStd** con las entradas: *Nuevalor, MaxSum y Tolerancia;* y
hágase *Probabilidad* igual al valor salida de éste.

Otro algoritmo que se desprende del anterior es **ProbDistNorInt** en el que, bajo las mismas condiciones de **ProbDistNormal** y en virtud de {3.7} se calcula la probabilidad $P[a < X < b]$.

ProbDistNorInt

Entradas: *mu, sigma, a, b, MaxSum* y *Tolerancia*
Salida: *Probabilidad*

Paso 1. Utilice el algoritmo **ProbDistNormal** con entradas: *a, MaxSum y Tolerancia;* y hágase *Prob1* igual al valor salida de éste.

Paso 2. Utilice el algoritmo **ProbDistNormal** con entradas: *b, MaxSum y Tolerancia;* y hágase *Prob2* igual al valor salida de éste.

Paso 3. Hágase *Probabilidad=Prob2-Prob1.*

Es claro que el algoritmo anterior también nos permite establecer la probabilidad de que la media muestral de una variable aleatoria X, que se rige por la ley normal encuentre una ocurrencia en un intervalo dado y poder estimar así, la media de una población de estudio. Ésto fue tratado en la sección III.2.

Todos los algoritmos presentados en esta sección fueron traducidos a Lenguaje C a manera de funciones en el apéndice A.

CONCLUSIONES

Casi todo mundo parece estar de acuerdo en que existen dos tipos de matemáticas (y por consiguiente de matemáticos): las matemáticas puras y las aplicadas. Esta división da lugar a polémicas más o menos serias, en las cuales cada uno de los bandos trata de demostrar su superioridad moral, intelectual, social, histórica, etc. Si ésto se limitará a un juego no sería importante, pero este problema puede tener repercusiones en la dirección que tome un investigador, en la relación entre matemáticos de distintas especialidades y en el aspecto de formación: orientación, planes de estudio, etc. No trataremos hacer aquí una defensa de unas o de las otras, sino mostrar que la separación tiene mucho de ficticia y que llevada a sus extremos resulta sumamente negativa.

Santiago López de Medrano

A lo largo de este trabajo se logró obtener una representación en serie de potencias que aproxima la ley de distribución normal de probabilidades, por lo que se cumplió el objetivo del mismo.

Evidentemente, el resultado obtenido más aplicable es el algoritmo que nos permite aproximar valores de la ley normal, el cual constituye un método del análisis numérico para evaluar dicha ley. Este algoritmo, de fácil traducción a cualquier lenguaje de cómputo, apropiado para aplicaciones científicas, nos permitió obtener tablas de la ley en cuestión, con una exactitud por lo menos igual a otras publicadas sobre el tema.

El método numérico planteado incrementa el número de alternativas para el desarrollo de aplicaciones de software estadístico-probabilístico que involucren la evaluación de la ley normal. Es decir, el algoritmo da otra alternativa para la solución de cualquier problema que se modele matemáticamente por medio de una variable aleatoria que se rija por la ley normal de probabilidades, ya sea que ésta se presente en problemas de administración, economía, ingeniería, o por su exactitud, en investigación científica.

Por otro lado, se mostró la relación que existe entre la serie obtenida y la función integral de probabilidades y, a su vez, la relación que existe entre ésta y las integrales de Fresnel, por lo que, mediante pequeños cambios al método numérico desarrollado para la ley de distribución normal se pueden establecer mecanismos de evaluación numérica para estas importantes funciones de la física matemática. De ésto se puede obtener software de apoyo a la solución de problemas de conducción de calor, y óptica entre otras.

El trabajo también muestra otro camino para la evaluación de otras leyes de probabilidad ampliando el algoritmo desarrollado, ya que como se mencionó en el capítulo III, bajo diversas condiciones la ley normal se aproxima bastante bien a otras leyes de probabilidad; inclusive leyes discretas como la Binomial.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Courant, Richard y John, Fritz. *Introducción al cálculo y al análisis matemático.* Tomos I y II. Ed. LIMUSA, México, 1987.

[2] Markushévish, A. *Teoría de las funciones analíticas.* Tomo I. Ed. MIR, URSS, 1978.

[3] Hoffman, Kenneth. *Álgebra lineal.* Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1973.

[4] Churchill, Ruel V. *Variable compleja y aplicaciones.* 4a. edición. Ed. McGraw-Hill, México, 1978.

[5] Levedev, Nikolai Nikolaevich. *Special functions and their applications.* Ed. Dover, USA, 1975.

[6] Parzen, Emanuel. *Teoría moderna de probabilidades y sus aplicaciones.* Ed. LIMUSA, México, 1982.

[7] Boyce, William E. y DiPrima, Richard C. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* 3a. edición. Ed. LIMUSA, México, 1983.

[8] Apostol, Tom M. *Calculus.* Vol 1. 2a. edición. Ed. reverté, España, 1982.

[9] Burden, Richard L. y Douglas, J. *Análisis numérico.* 3a. edición. Ed. Iberoamérica, México, 1985.

[10] Cuadernos de investigación No. 13, *"La caracterización de las funciones de probabilidad".* Godoy Escoto, Eduardo. Ed. ENEP Acatlán, UNAM, México, 1990.

[11] Schildt, Herbert. *C Manual de referencia.* Ed. McGraw-Hill, España, 1990.

[12] William Feller. *Introducción a la teoría de probabilidadesy sus aplicaciones.* Vol 1. Ed. LIMUSA, México, 1991.

APÉNDICE A

Traducción a lenguaje C de los algoritmos presentados en el capítulo V

```
#include <math.h>


#define c1_SQRTPI    0.564189583547756286948          /*  1/sqrt(PI)  */
#define c1_SQRT_2    0.707106781186547524401          /*  1/sqrt(2)   */


double DistNrmStd( double x, long MaxSum, double Tolerancia )
{
  long sumando;
  double constante, suma, denominador, numerador;

  constante = ( x * c1_SQRTPI * c1_SQRT_2 ) * exp( -( x*x ) / 2 );
  suma = numerador = denominador = 1;
  for( sumando=1; ( sumando <= MaxSum ) && ( numerador/denominador > Tolerancia );
        sumando++ )
    {  numerador *= ( x*x );
         denominador *= ( 2 * sumando + 1 );
         suma += ( numerador / denominador );   }
  if ( x>0 ) return ( .5 + constante*suma );
  else       return ( .5 - constante*suma );
}


double ProbDistNormal( double mu, double sigma, double x,
                       long MaxSum, double Tolerancia )
{   return DistNrmStd( ( x-mu ) / sigma, MaxSum, Tolerancia );   }


double ProbDistNormalInt( double mu, double sigma, double a, double b,
                          long MaxSum, double Tolerancia )
{   return ( ProbDistNormal( mu, sigma, b, MaxSum, Tolerancia )
           - ProbDistNormal( mu, sigma, a, MaxSum, Tolerancia ) );  }
```

APÉNDICE B

Tablas de la distribución normal estándar

Mediante el uso de las funciones presentadas en el apéndice A y la función **TABLA()**, que se muestra al final de este apéndice, se construyerón las tablas siguientes:

B1 Distribución normal estándar a 4 digitos, evaluada de 0 a 3.6 con incrementos de 0.01;

B2 Distribución normal estándar a 14 digitos, evaluada de 3.5 a 3.6 con incrementos de 0.01;

B3 Distribución normal estándar a 14 digitos, evaluada de 3.59 a 3.6 con incrementos de 0.001;

B4 Distribución normal estándar a 14 digitos, evaluada de 3.599 a 3.6 con incrementos de 0.0001;

B5 Distribución normal estándar a 14 digitos, evaluada de 3.5999 a 3.6 con incrementos de 0.00001;

B6 Distribución normal estándar a 14 digitos, evaluada de 3.59999 a 3.6 con incrementos de 0.000001;

B7 Distribución normal estándar a 14 digitos, evaluada de 3.599999 a 3.6 con incrementos de 0.0000001;

TABLA B1

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

TABLA B2

x	P[x]
3.50	0.99976737092096
3.51	0.99977594665300
3.52	0.99978422660070
3.53	0.99979222016651
3.54	0.99979993648399
3.55	0.99980738442436
3.56	0.99981457260306
3.57	0.99982150938609
3.58	0.99982820289625
3.59	0.99983466101928
3.60	0.99984089140984

TABLA B3

x	P[x]
3.590	0.99983466101927
3.591	0.99983529418196
3.592	0.99983592507504
3.593	0.99983655370601
3.594	0.99983718008236
3.595	0.99983780421156
3.596	0.99983842610104
3.597	0.99983904575823
3.598	0.99983966319051
3.599	0.99984027840526
3.600	0.99984089140984

TABLA B4

x	P[x]
3.5990	0.99984027840526
3.5991	0.99984033980506
3.5992	0.99984040118276
3.5993	0.99984046253837
3.5994	0.99984052387190
3.5995	0.99984058518336
3.5996	0.99984064647276
3.5997	0.99984070774010
3.5998	0.99984076898538
3.5999	0.99984083020863
3.6000	0.99984089140984

TABLA B5

x	P[x]
3.59990	0.99984083020863
3.59991	0.99984083632974
3.59992	0.99984084245063
3.59993	0.99984084857130
3.59994	0.99984085469176
3.59995	0.99984086081199
3.59996	0.99984086693200
359997	0.99984087305179
3.59998	0.99984087917136
3.59999	0.99984088529071
3.60000	0.99984089140984

TABLA B6

x	P[x]
3.599990	0.99984088529071
3.599991	0.99984088590263
3.599992	0.99984088651455
3.599993	0.99984088712647
3.599994	0.99984088773839
3.599995	0.99984088835030
3.599996	0.99984088896221
3.599997	0.99984088957412
3.599998	0.99984089018603
3.599999	0.99984089079793
3.600000	0.99984089140984

TABLA B7

x	P[x]
3.5999990	0.99984089079793
3.5999991	0.99984089085912
3.5999992	0.99984089092032
3.5999993	0.99984089098151
3.5999994	0.99984089104270
3.5999995	0.99984089110389
3.5999996	0.99984089116508
3.5999997	0.99984089122627
3.5999998	0.99984089128746
3.5999999	0.99984089134865
3.6000000	0.99984089140984

TABLA B8

x	$P[x]$
3.59999990	0.99984089134865
3.59999991	0.99984089135477
3.59999992	0.99984089136088
3.59999993	0.99984089136700
3.59999994	0.99984089137312
3.59999995	0.99984089137924
3.59999996	0.99984089138536
3.59999997	0.99984089139148
3.59999998	0.99984089139760
3.59999999	0.99984089140372
3.60000000	0.99984089140984

FUNCIÓN TABLA()

```
void tabla( double mu, double sigma, double inicio, double fin,  double incremento, long MaxSum,
          double Tolerancia,  short int precision )
{
 FILE *fp;
 double numero, prob;
 long i = 1;
 char numstr[80];

 if ( ( fp = fopen( "tabla.txt","wr+" ) ) == NULL )
   { puts( "\n No se logro abrir archivo para tabla");
     exit(0); }

 fseek( fp,0,0 );
 for ( numero = inicio, i=0 ; numero <= fin ; numero+=incremento, i++ )
   {
     prob = ProbDistNormal( mu,sigma,numero,MaxSum,Tolerancia );
     numstr[0]='\0';
     gcvt( prob,precision,numstr );
     fprintf(fp,"\n %s",numstr);
     printf("\n %s",numstr );
   }
  fclose( fp );
  printf("\n");
 }
```

APÉNDICE C

Consideraciones de precisión del método propuesto

En todo proceso numérico que se represente en una computadora se incurre en un error. El método propuesto para calcular la probabilidad $P[X \leq x]$, donde la variable aleatoria X se distribuye como una normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, es exacto cuando el número de iteraciones (sumas de la serie involucrada) crece más allá de toda cota[1]. Sin embargo, para efectos prácticos, el algoritmo deberá parar la suma que involucra, cuando, según el algoritmo el número de sumas sea mayor a cierto número *SumMax* o el último sumando sea menor a un valor predeterminado, que llamamos *Tolerancia*[2]. En estas condiciones se realizaron las tablas del apéndice B. Las probabilidades obtenidas se presentaron en un máximo de 14 dígitos decimales. Resulta natural la pregunta: ¿La exactitud de las probabilidades es correcta a 14 dígitos? Puntualicemos los siguientes hechos antes de contestar a dicha pregunta:

1) Los cálculos se realizaron en una microcomputadora con procesador 80486, lo que permite trabajar con un máximo de 14 dígitos de precisión. Este dato se obtuvo realizando pruebas, la precisión con que un compilador trabaja números coma flotante está determinada por su implementación y la capacidad de precisión del equipo en que se trabaje.

2) Los números $1/\sqrt{\pi}$ y $1/\sqrt{2}$ que son números irracionales fueron representados con 21 dígitos de precisión (cortesía de Borland Inc.).

3) Los valores de *Tolerancia* y *MaxSum* fueron de 0.0000000000001 y 1000000, respectivamente. Obsérvese que *Tolerancia* obligará al algoritmo a parar la suma cuando el último sumando sea menor a $1 \cdot 10^{-14}$.

Las siguientes tablas, muestran el número de términos de la suma parcial de la serie que fueron necesarias para el cálculo de $P[X \leq x]$ y el último término sumado por la computadora.

X	P[x]	Número de términos sumados	Último Sumando
0	0.5	2	0
1	0.8413447460685429	14	4.684761317589322e-15
2	0.9772498680518199	21	8.38485258905456e-14
3	0.9986501019683699	31	2.378649999829328e-14
4	0.9999683287581669	42	4.359868091848713e-14
5	0.9999997133484282	55	8.875100835885222e-14
6	0.9999999990134124	71	6.506548696843623e-14
7	0.9999999999987202	89	8.948949317678059e-14
8	0.9999999999999994	110	6.747840212289345e-14
9	1	134	3.188054444975071e-14
10	1	160	3.256256988875299e-14
11	1	188	6.958141492627588e-14

1 Vease expresión 4.15 en el capítulo 4.
2 Vease algoritmo ***ProbDistNormalStd*** en el capítulo 5.

X	P[x]	Número de términos sumados	Último Sumando
3.599999	0.9998408907979393	37	6.472433863410277e-14
3.5999991	0.9998408908591299	37	6.472446808294365e-14
3.5999992	0.9998408909203201	37	6.472459753203983e-14
3.5999993	0.9998408909815105	37	6.472472698139132e-14
3.5999994	0.999840891042701	37	6.47248564309981e-14
3.5999995	0.9998408911038911	37	6.472498588086019e-14
3.5999996	0.9998408911650813	37	6.472511533097758e-14
3.5999997	0.9998408912262716	37	6.472524478135028e-14
3.5999998	0.999840891287462	37	6.472537423197829e-14
3.5999999	0.9998408913486525	37	6.472550368286159e-14
3.6	0.9998408914098426	37	6.472563313400021e-14

Obsérvese en las tablas que el último sumando es siempre menor a $1 \cdot 10^{-14}$. La sucesión involucrada en la expresión (4.15) es uniformemente decreciente por lo que el siguiente término de la serie, no sumado, deberá ser todavía más pequeño. Si se pidiese sumar éste término de la serie a la computadora, lo más probable es que no se considere, pues la precisión de la computadora es de sólo 14 dígitos.

Otra consideración importante es que la computadora siempre obtendrá valores de 1 para la evaluación de $P[X \leq x]$, para $x >= 9$, teniendo que realizar muchas iteraciones para obtener este resultado. Por lo que, al calcularse en un equipo similar el algoritmo debe considerar esta condición para reducir el número de iteraciones a las necesarias para evaluar $P[X \leq x]$ en 9. De esa forma, se determina el número máximo de iteraciones, y por tanto el tiempo de procesamiento para la evaluación de $P[X \leq x]$.

Al parar el algoritmo sin una cota al error por truncamiento de la serie introducimos incertidumbre en la exactitud del cálculo obtenido, sin embargo, bajo las consideraciones anteriores, las representaciones realizadas en este trabajo deben ser la mayor aproximación posible de $P[X \leq x]$ a 14 dígitos de precisión en un equipo de cómputo con procesador 80486 utilizando el algoritmo presentado aquí.