39
26J

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MATERIAL DE APOYO PARA EL CURSO DE MATEMATICAS III DEL PLANTEL AZCAPOTZALCO C.C.H. U.N.A.M.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

PEDRO MANUEL ZERENDIETA MENDEZ

MEXICO 1994

CIUDAD UNIVERSITARIA

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios
Profesionales.
Exp. Núm. 55

Jefe de la División de Estudios Profesionales.
Universidad Nacional Autónoma de México.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente, nos permitimos informar a Usted, que habiendo revisado el trabajo de tesis que realizó el pasante PEDRO MANUEL ZERENDIETA MENDEZ, con el título "MATERIAL DE APOYO PARA EL CURSO DE MATEMATICAS III, DEL PLANTEL AZCAPOTZALCO, C.C.H., U.N.A.M.", consideramos que reune los meritos necesarios para obtener el título de MATEMATICO.

Comunicamos lo anterior para los fines a que haya lugar.

Atentamente.
México, D.F., a 15 de Agosto de 1986.

1.- DR. SANTIAGO LOPEZ DE MEDRANO. Santiago López de Medrano
(grado) Nombre(s) Apellidos completos (firma)

2.- M.en C. GUILLERMO GOMEZ ALCARAZ.
(grado) Nombre(s) Apellidos completos (firma)

3.- MAT. MA. GUADALUPE LUCIO GOMEZ MAQUEO.
(grado) Nombre(s) Apellidos completos (firma)

4.- Sup. MAT. FRANCISCO STRUCK CHAVEZ.
(grado) Nombre(s) Apellidos completos (firma)

5.- Sup. MAT. FERNANDO FABIAN HERNANDEZ VELASCO.
(grado) Nombre(s) Apellidos completos (firma)

En recuerdo a mis padres :

Manuel Zerendieta Coronel.

Eutiquia Méndez Quiñonez.

A mi esposa Martha y nuestro

hijo Luis Manuel.

A mis hermanos :

Paula.

Manuela.

Arturo.

Amado

Cruz Estela.

AGRADECIMIENTOS.

Al Jurado :

Dr. Santiago López De Medrano.
M. en C. Guillermo Gómez Alcaráz.
Mat. Ma. Guadalupe Lucio Gómez Maqueo.
Mat. Francisco Struk Chávez.
Mat. Fernando Fabian Hernández Velasco.

A los profesores del Seminario de Enseñanza y Titulación de la Facultad de Ciencias U.N.A.M. por sus valiosas aportaciones para la realización de la Tesis.

A mis amigos miembros del Grupo de Trabajo Institucional Félix Klein del Colegio de Ciencias y Humanidades Azcapotzalco por las sugerencias en el desarrollo de la Tesis.

A Beatríz P. Lorenzo Juárez, Victoria Cañetas Mendicuti y Cristina Santana Pérez por su apoyo en el trabajo de mecanografía.

I N D I C E.

UNIDAD 3.- CONGRUENCIA.

UNIDAD 4.- CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS.

I N T R O D U C I O N.

El motivo fundamental para la realización de este trabajo, ha sido que el alumno del Colegio de Ciencias y Humanidades cuente con un material didáctico, para - que se auxilie en el conocimiento y preparción de manera sencilla e integral de los temas que contiene el -- programa actual de Matemáticas III.

El desarrollo de este trabajo tiene como base, los objetivos que se pretenden alcanzar en el programa actual de Matemáticas III del Plantel Azcapotzalco del - Colegio de Ciencias y Humanidades, que son :

- El alumno conocerá, comprenderá y aplicará los elementos básicos de una Teoría Axiomática, tomando como modelo la Geometría Euclidiana.

- El alumno aplicará los principios fundamentales - de la Geometría y Trigonometría en la resolución de determinados problemas.

Es importante para el alumno el devenir histórico - de la Geometría, porque conocerá, cómo esta disciplina ha evolucionado a través del tiempo: Desde la remota antiguedad de Babilonia, pasando por la Grecia Clásica, así como el surgimiento de otras Geometrías y posteriormente el origen de las Geometrías no euclidianas.

En la Primera Unidad se citan las principales contribuciones de geómetras y matemáticos sobresalientes, utilizando para efecto del orden cronológico.

También se introduce el estudio de la Axiomatización de la Geometría, considerando las relaciones --

existentes entre los elementos básicos no definidos (punto, recta y plano). Se explica en qué consiste una demostración directa, en qué consiste una demostración indirecta y se presentan algunas demostraciones sencillas utilizando como herramientas únicamente los axiomas y definiciones elaboradas de acuerdo a los elementos básicos no definidos.

En la Unidad Dos, el estudiante se encontrará con los elementos básicos definidos (segmento, ángulo y triángulo), clasificación de los ángulos y de los triángulos, las demostraciones de los teoremas de ángulos y triángulos, así como las definiciones para rectas y puntos notables en un triángulo.

El contenido de la Unidad Tres, introduce al estudiante la idea intuitiva de figuras congruentes, tratando esencialmente la congruencia de triángulos, los criterios de congruencia (postulados de congruencia de triángulos), y demostraciones en las que se aplican dichos criterios. Mostrando también, algunas aplicaciones sencillas de la congruencia de triángulos.

En la Unidad Cuatro, se presentan construcciones geométricas, las cuales se van desarrollando paso a paso, y al final de cada una se justifican con una demostración, estableciéndose algunas conclusiones.

En la Unidad Cinco, se da la idea intuitiva de figuras semejantes, se define formalmente y se trata particularmente la Semejanza de Triángulos.

Se encontrará con las demostraciones del teorema fundamental de la proporcionalidad y su recíproco, mostrando algunas de sus aplicaciones.

A continuación, dado el grado de dificultad en sus demostraciones sólo se enuncian los teoremas de Semejanza de Triángulos, presentando algunos ejemplos ilustrativos en la aplicación de cada uno de dichos teoremas.

Finalizando la Unidad con las demostraciones del Teorema de Pitágoras y su recíproco, considerando también algunas aplicaciones.

La última Unidad contiene una síntesis del desarrollo histórico de la Trigonometría, sus conceptos elementales, se citan ejemplos de resolución de Triángulos rectángulos, de resolución de algunos problemas prácticos y se concluye con las Identidades Trigonométricas en la cual se ejemplifican algunas demostraciones.

Al término de este trabajo se menciona la bibliografía que se utilizó en el desarrollo del mismo.

Pedro Manuel Zerendieta Méndez.

UNIDAD 1.- EVOLUCION DE LA GEOMETRIA. AXIOMATIZACION.

1.1. DESARROLLO HISTORICO DE LA GEOMETRIA.

En tiempos remotos la Geometría fué una disciplina que se estudiaba de manera práctica y empírica, es decir su conocimiento partía limitadamente de las experiencias y observaciones del hombre. Los postulados y las demostraciones son muy posteriores en el desarrollo histórico, sin embargo, es importante mencionar, las siguientes etapas históricas y sus principales aportaciones con que han contribuido en forma decisiva para la evolución de la Geometría:

- Los procedimientos empíricos de los antiguos babilonios y egipcios.

- El amor de los griegos al saber por el saber y su empleo en las construcciones clásicas.

- La sistematización de la Geometría hecha por Euclides.

- La continuación de la obra de Euclides durante la edad de oro de Grecia.

- La contribución de los matemáticos hindúes, árabes y persas durante la edad media europea.

- La introducción de sistemas de coordenadas en el siglo XVII.

- La aplicación del Algebra y también del Cálculo a la Geometría en el siglo XVIII.

- Reconocimiento de los puntos, rectas y planos como elementos no definidos, lo cual da lugar, en el siglo XIX, a muchas geometrías diferentes.

- Actualmente, el estudio de la Geometría es enfocado al estudio de sus fundamentos axiomáticos, así como la generalización de la misma.

En cada etapa del desarrollo de la geometría encontramos usos y aplicaciones de la Geometría a las Matemáticas de su tiempo.

Las primeras indicaciones de un sistema de medidas parece encontrarse en los antiguos babilonios que perfeccionaron la Agrimensura y estudios sobre lo que escribieron en sus tabletas de arcilla, demuestra que contaban con métodos para determinar el área de varias figuras sencillas, pues ya utilizaban el producto de la longitud y la anchura para obtener la medida de un campo rectangular.

La mayor parte de los documentos antiguos demuestran que los métodos y conocimientos acerca de las medidas, surgieron a propósito de la medida de la tierra, la construcción de edificios y la astrología, seudociencia considerada como antecesora a la Astronomía.

Los babilonios suponían que la esfera celeste giraba alrededor de la Tierra y que el año constaba de 360 días. Esto los condujo a dividir la circunferencia en 360 partes y de esa manera se originó, probablemente el actual sistema de medida de ángulos basado en los grados.

Los antiguos egipcios nos legaron una considerable cantidad de conocimientos de Aritmética, Algebra Elemental y sobre medidas, adquiridas de la construcción.

Las pirámides de Egipto, son una evidencia de la ingeniería remota, que sin duda alguna, requería del uso de muchos conceptos geométricos.

La Agrimensura del Valle del Nilo, y el estudio de la Astrología.

La fama de la sabiduría de los egipcios se extendió por todo el mundo civilizado de aquel tiempo, impresionaban los métodos que empleaban en la agrimensura y el cálculo. Estudiaron estos métodos muy cuidadosamente y al conjunto de ellos le dieron el sencillo nombre de Geometría, que se deriva de "medida de la Tierra".

Las reglas y fórmulas de los babilonios y egipcios eran resultados empíricos. Cada una de ellas se consideraba por sí sola, dado que no existía un conocimiento teórico geométrico que pudiese abarcarlas. Estos conceptos permanecen hasta cerca del año 600 (A.C.), época en la cual empieza a aparecer la influencia griega.

Los griegos consideran el estudio de la Geometría como una ciencia independiente de sus aplicaciones prácticas. Es decir, para ellos son primordialmente fundamentales razonamiento y conocimiento. Amplían el campo de la Geometría incluyendo, no sólo fórmulas empíricas para áreas y volúmenes, sino además:

- Representaban números mediante segmentos rectilíneos.

- Estudiaban propiedades de los polígonos y de las rectas paralelas.

- Estudiaban propiedades de la circunferencia y otras secciones cónicas.

- Efectuaban construcciones clásicas con regla y compás.

- Razones y proporciones deducidas a partir de polígonos semejantes.

- Demostraciones de las consecuencias de un conjunto de postulados.

Los eruditos griegos enseñaron la Geometría en sus escuelas privadas, destacándose entre ellos Tales, Pitágoras, Platón, etc.

Los hombres de ciencia griegos, sabían que la Tierra tiene una forma muy parecida a una esfera, y determinaron su tamaño y forma. Uno de los que dirigieron estos trabajos fué Eratóstenes. Determinó la circunferencia y el diámetro de la Tierra con error de muy pocos centenares de kilómetros.

De los antiguos griegos que aprendieron de Egipto los conociemientos de Geometría, el primero del que se tiene noticias fue Tales de Mileto. Durante su estancia en Egipto, se interesó por la Geometría como arte práctica. Al regreso a su ciudad natal (Mileto), se dedicó a la enseñanza de la Geometría y de la Astronomía. Se debe mencionar dentro de sus aportaciones que a partir de un problema práctico, establece la Semejanza de Triángulos, al calcular la altura de una pirámide.

Pitágoras, fué el primero que investigó sistemáticamente, los principios sobre los que se basa la Geometría y aplicó los métodos de la Lógica a su desarrollo sistemático.

Pitágoras, en su enseñanza de la geometría, descubrió varias proposiciones importantes. Al desarrollar sistemáticamente la materia, él y sus discípulos dieron las primeras, o por lo menos las más generales de algunas proposiciones que ya se conocían. Por lo que respecta al Teorema de Pitágoras: El cuadrado construído con un lado igual al mayor de los lados de un triángulo rectángulo, tiene área igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los otros dos lados (los más cortos) del triángulo. Los pitagóricos atribuyeron su descubrimiento a su maestro, aunque se sabe que el teorema ya era conocido en la Babilonia de Hammurabi, pero la primera demostración general puede muy bien haber sido obtenida en la escuela pitagórica. Además, de la de Pitágoras se conocen otras demostraciones de este teorema.

Otro de los más famosos geómetras griegos y continuador de los pitagóricos, fué Arquitas. Fué el primero que "resolvió" el famoso problema de determinar geométricamente las dimensiones de un cubo que tenga volumen doble de otro cubo dado, conocido como la "Duplicación del Cubo". Además se dice que también fué el primero que aplicó los principios de la Geometría a la Mecánica.

Hipias de Elías, contemporáneo de Arquitas, fué el primero en resolver problemas teóricos de dividir un ángulo en tres partes iguales ("Trisección del Angulo") y el de la "Cuadratura del Círculo", es decir, encontrar, un cuadrado que tenga la misma superficie que un círculo dado.

Dos de los mayores matemáticos de la edad de oro alejan--

drina y de toda la antiguedad, fueron Euclides, alejandrino de ascendencia griega y Arquímides griego siciliano que estudió y trabajó durante algunos años en Alejandría.

Euclides era profesor de Matemáticas, en la Universidad - de Alejandría. Escribió un mínimo de diez tratados que cubrían la Matemática de su tiempo. Su obra más famosa, Elementos; -- consta de trece libros, en los que expone con elegancia: La Geometría Plana (libros I - IV); La Teoría de las Proposiciones - (libros V y VI); La Teoría de los Números (libros VII - IX); - La Teoría de los Incomensurables (libro X); y La Geometría de - los Cuerpos (libros XI - XIII).

Las proporciones se fundaron sobre los polígonos semejantes, la teoría de los números sobre longitudes de segmentos de rectas y los incomensurables sobre las proporciones y la construcción de segmentos rectilíneos. Los libros sobre Geometría- incluyen casi todos los conceptos que hoy se abordan en un curso de Geometría en el bachillerato. Presentan también, demostraciones geométrícas de identidades algebráicas y soluciones - geométricas de ecuaciones tanto lineales como cuadráticas. Los Elementos de Euclides constituyen una aportación decisiva a la sistematización de la Geometría.

El prestigio de Alejandría perduró por muchos años des- - pués de Euclides, y fue allí donde Arquímides estudió e hizo -- grandes aportaciones a la Geometría, sus estudios más notables- son los relacionados con el área del círculo y el volumen de: - la esfera, el cilindro y el cono. También descubrió muchas de las propiedades de estas figuras y las relaciones que hay entre ellas. Sistematizó estos conocimientos a la manera de Euclides y escribió varios libros sobre estos temas. Arquímides hasta - donde sabemos, fué el primero en ligar la Geometría con problemas de tipo físico.

Debemos también mencionar a los matemáticos griegos que - sobresalieron por sus contribuciones a la Geometría como son: - Apolonio de Perga, quien estudió y desarrolló una rama de geometría superior, que se ocupa de las curvas y de las figuras llamadas secciones cónicas, su obra y sus métodos fueron después - la base moderna de la Geometría Analítica.

Hiparco de Nicea, a quien se le atribuye la invención de la rama de las matemáticas llamada Trigonometría.

Herón, perfecciona la Agrimensura, ciencia que representaba un avance sobre las sencillas medidas de los antiguos egipcios y que estaba basada en la Geometría pura y la Trigonometría. Fué también un ingeniero notable, inventó la primera máquina de vapor.

Ptolomeo, escribió libros sobre proyección ortográfica y estereográfica, que son los fundamentos de la Geometría descriptiva. Aplicó la Geometría y la Trigonometría a la Astronomía.- Escribió una gran obra en trece libros (secciones) de Astronomía. Esta obra fue libro de texto en Astronomía y de Geometría aplicada hasta los tiempos de Copérnico en el siglo XVI. En este libro, entre otras muchas cosas notables, figura el primer - indicio escrito del uso de los grados, minutos y segundos para la medida de los ángulos y la determinación del valor aproximado de la razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro.

Pappus, perfeccionó la Geometría superior, la teoría sobre las secciones cónicas y enunció proposiciones que pueden - considerarse precursoras a los fundamentos del Cálculo infinitesimal y la Geometría proyectiva.

Proclo, escribió una especie de historia de la Geometría, que contiene un comentario a los Elementos de Euclides aunado a otros comentarios personales interesantes sobre los grandes geómetras alejandrinos.

Después de Proclo, la historia de la Universidad y de los matemáticos alejandrinos ya no tiene interés desde el punto de vista de la Geometría.

Durante la edad media en Europa las aportaciones Matemáticas de los griegos son modificadas por los matemáticos de la India, Arabia y Persia. La mayor parte de esta influencia es de carácter práctico. Es notable el avance que se hace en notación de números en áreas, volúmenes, construcciones clásicas, Astronomía y Trigonometría (es decir, la medida de los triángulos). También, se discute el postulado de las paralelas de Euclides. Omar Khayan, el autor de los Rubaiyat, escribe un tratado sobre Algebra desde un enfoque geométrico.

Tanto en Matemáticas, como en el arte, los primeros signos del despertar en Europa provienen de Italia. Se evidencia cierta inquietud matemática en Inglaterra y en Francia, aunque el progreso es muy lento. A finales del siglo XII, Leonardo de Pisa (Fibonacci) publica diversos tratados, dando a conocer cuestiones sobre notación numérica, Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría. Tras esto, Alberti y algunos artistas italianos desarrollan ciertos principios de la Geometría descriptiva y proporcionan las bases de la Geometría proyectiva. En Francia se introducen las letras para representar números. La actividad se va incrementando gradualmente y en el siglo XVII está en pleno desarrollo.

Entre los primeros europeos que prestaron atención a los fundamentos lógicos de la Geometría, merece mención el francés Desargues, que generalizó las ideas y los métodos de Euclides descubriendo nuevos principios geométricos y analizó los principios fundamentales de la antigua Geometría Euclidiana. Es de esta manera, uno de los fundadores de la Geometría moderna.

Con la publicación de la Geometría del filósofo y matemático francés, René Descartes, tuvo la Geometría una evolución completamente diferente. Descartes, fué quién demostró como es posible el estudio de las figuras geométricas y de sus propiedades por medio de ecuaciones algebráicas. Este método es aplicable no solo a la línea recta y a la circunferencia, sino también a cualquier figura geométrica. Esta Geometría, recibe el nombre de Geometría Analítica.

Al haber logrado Descartes la gran síntesis del Algebra con la Geometría, otros matemáticos empezaron a aplicar el Cálculo infinitesimal (inventado por Newton y Leibnitz) al estudio de las curvas geométricas y después al de las superficies de cualquier forma. Esta aplicación motivó el origen de la rama de la Geometría, actualmente llamada Geometría Diferencial, la cual es considerada la de más importancia en la ciencia moderna.

En el siglo pasado surgió un idea completamente nueva de Geometría, que parte de un punto de vista totalmente distinto y se conoce como Geometría no Euclidiana. Esta nueva Geometría está basada en la sustitución del quinto postulado de Euclides: "si una recta que incide sobre otras dos forman ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán del lado en que los dos ángulos son menores que dos rectos".

En 1830, el matemático ruso N. Lobachevski desarrolló una nueva Geometría, basada en el postulado de que por un punto dado puede hacerse pasar un número cualquiera de rectas paralelas a la recta dada. Esta Geometría es conocida con el nombre de Geometría Hiperbólica. En 1832, J. Bolyai matemático húngaro realizó el mismo trabajo, obteniendo el mismo resultado.

Un hecho muy notable acerca de estos dos trabajos, es el que sus autores no se conocían y ninguno conocía el trabajo del otro.

En 1854, B. Riemann, matemático alemán desarrolló todavía una Geometría no euclidiana diferente, basando su desarrollo en que todas las rectas deben intersectarse, es decir, niega la existencia de paralelas. Yendo más lejos, negó que una recta pudiera ser prolongada indefinidamente sin volver a sí misma y además, extendió la noción de las dimensiones geométrica de manera que pudieran ser incluídas más de tres. Esta geometría de Riemann es llamada Geometría Elíptica.

La Geometría de Riemann, ha sido desarrollada como una geometría diferencial y ha venido a ser de gran importancia en la Teoría de la Relatividad de Einstein, en la que el tiempo juega el papel de la cuarta dimensión agregada a las tres del espacio euclidiano.

Hasta aquí se ha presentado un bosquejo del desarrollo de la Geometría, a través de la historia, para que el alumno tenga una mejor visión de la importancia que tiene esta rama de las Matemáticas.

1.2. AXIOMATIZACION.

Como se ha mencionado en la sección anterior, a partir de la época de los griegos, el carácter de la Geometría sufrió un cambio importante: de ser un conjunto de resultados empíricos y aislados se transforman en una ciencia independiente de sus aplicaciones; es decir, se desarrolla sistemáticamente usando el método deductivo para establecer la validez de las proposiciones geométricas, así como para obtener resultados generales. Esta sistematización:

- Introduce la idea de deducir por medio de razonamiento lógico las proposiciones o propiedades geométricas, ligando así unas con otras.

- Esta deducción debe ser a partir de las propiedades geométricas que se consideran básicas, a las cuales les llamaremos axiomas y que nos servirán como punto de partida en la demostración de otras proposiciones geométricas llámadas Teoremas.

1.2.1. Axioma.

Al mencionar la palabra axioma, quizá se tome como sinónimo de postulado. En la antiguedad se distinguía axioma de postulado. Euclides hacía la distinción entre "postulados" y otros enunciados a los que él les llamaba "nociones comunes". Los postulados de Euclides eran afirmaciones de naturaleza geométrica, tales como: "Todos los ángulos rectos son iguales entre sí". Euclides consideraba las nociones comunes como verdades evidentes por sí mismas. Por ejemplo, afirma que: "Las cosas que son iguales a una misma cosa, son también iguales entre sí", o también: "El todo es mayor que la parte". Debe observarse que en estas afirmaciones no aparecen términos geométricos.

En la actualidad, la mayor parte de los geómetras no acostumbran distinguir entre los postulados y las nociones comunes. Ambos son enunciados que se suponen verdaderos, sin necesidad de prueba, a los que llamamos axiomas.

1.2.2. Teorema.

Llamaremos Teorema a la proposición que se debe demostrar.

En la demostración de los teoremas se pueden emplear las propiedades básicas o sea los axiomas, así como las propiedades demostradas anteriormente, es decir, los teoremas. No es válido emplear ninguna otra propiedad de las figuras, aún cuando parezca evidente.

También, en la demostración de los teoremas se recomienda emplear el dibujo para la representación geométrica de todo cuanto expresamos con palabras; las propiedades de las figuras que evidencia el dibujo, no pueden ser utilizadas si no podemos argumentarlas basándose en los axiomas o en teoremas ya demostrados.

El dibujo desempeña un papel en la demostración de un teorema geométrico, ya que es un medio auxiliar para la demostración del teorema, porque ayuda a visualizar las deducciones obtenidas en el proceso de dicha demostración.

El enunciado de un teorema consta comúnmente de dos partes (proposiciones). La primera trata de la información dada,-

ésta proposición se llama "hipótesis del teorema", y la otra es lo que debe ser demostrado, esta parte se llama "tesis del teorema".

1.2.3. Elementos Básicos No Definidos.

En geometría trataremos con conceptos tales como punto, recta y plano. En principio nos enfrentaremos a situaciones como la siguiente: si se nos pide definir un punto, podemos decir que es "la intersección de dos rectas distintas". Ahora, si se nos pide definir una recta, podemos contestar que es "la intersección de dos planos", pero probablemente hayamos observado que estas dos definiciones no son mutuamente independientes, es decir, para definir un elemento, empleamos el otro elemento o viceversa.

Por ejemplo, también podemos definir una recta como una línea que "no tiene partes curvas". Esta definición será evidente, si podemos definir la palabra curva. Sin embargo, si la palabra curva se define como la línea que "no tiene partes rectas", entonces no comprendemos la definición de recta. Ahora, si definimos una recta como la línea que se extiende "sin cambiar dirección, es preciso comprender la palabra "dirección".

En geometría nos encontramos con problemas semejantes, para definir un elemento, lo cual implicaría un trabajo exhausto e interminable. Es por ello que se adopta la posición de considerar algunos términos como no-definidos. Los elementos que se considerarán como no definidos son: "conjunto", "punto", "recta", "plano" y "estar entre", sus relaciones existentes quedan determinados por medio de los axiomas.

1.2.4. Enunciación de Axiomas.

Enunciaremos el listado de axiomas y definiciones que emplearemos para demostrar las proposiciones llamadas teoremas, - pero antes introduciremos algunas notaciones que se utilizarán.

Un punto se denotará con una letra mayúscula del alfabeto español. A, B, C, P, Q, etc.

Una recta se simbolizará con una letra l, o si son varias rectas: l_1, l_2, etc., ó r, s, t.

También se puede indicar una recta considerando dos puntos de ella. Por ejemplo, si A y B son dos puntos de una - recta, ésta se puede denotar $\overleftrightarrow{AB}$.

La notación que se utilizará para indicar un plano es π ó si son varios planos π_1, π_2, etc., o también se pueden expresar considerando tres puntos que pertenezcan a él. Por ejemplo, plano ABC; plano PQR, etc.

Es pertinente asentar que también en algunos casos se recurrirá al lenguaje de los conjuntos. Por ejemplo, cuando un - punto "pertenece a" una recta. Cuando una recta "esté contenida" en un plano. La "intersección de "rectas"; "intersección - de" planos, etc.

Ahora sí procederemos a enunciar los axiomas:

Axioma 1.- Para cada dos puntos distintos, existe una y solo una recta que contiene a ambos puntos.

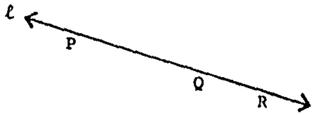
si analizamos lo siguiente:

a) Existe una recta que contiene a ambos puntos.

b) Esta recta es única; es decir, es la única que contiene a ambos puntos.

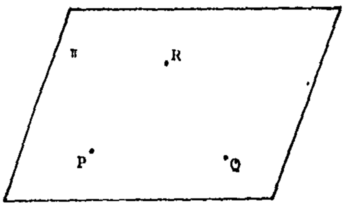
Podemos afirmar que este axioma establece dos cosas, en ocasiones llamadas existencia y unicidad.

Definición 1.- Tres ó más puntos son colineales, si pertenecen a una misma recta.

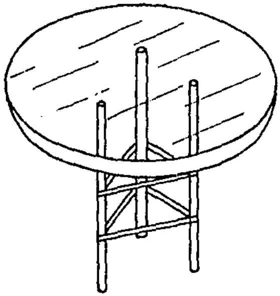


P, Q y R son puntos colineales.

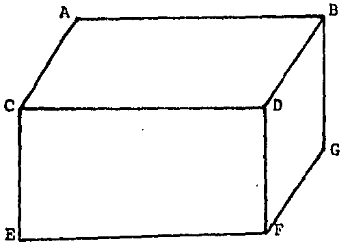
Axioma 2.- Para cada tres puntos distintos no-colineales, existe un plano y solamente uno que contiene a los tres puntos.



P, Q y R son puntos no-colineales. P, Q y R están contenidos en el plano π .

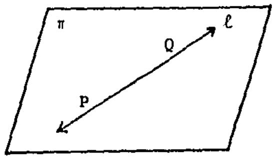


Definición 2.- Cuatro o más puntos son coplanares, si pertenecen a un mismo plano.



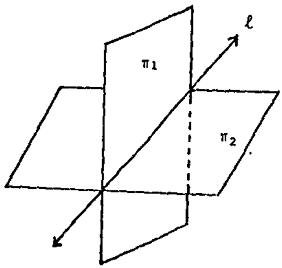
A, B, C y D son puntos coplanares.
B, D, F y G son puntos coplanares.
C, D, E y F son puntos coplanares.
B, F, G y E no son puntos coplanares.
A, B, C y F no son puntos coplanares.

Axioma 3.- Si un plano contiene dos puntos de una recta, entonces todos los puntos de la recta son puntos del plano.



$P \in \ell$, $P \in \pi$
$Q \in \ell$, $Q \in \pi$
$\ell \subset \pi$

Axioma 4.- Si dos planos distintos se intersecan, entonces su intersección es una y sólo una recta.



Los planos son π_1 y π_2 ; la recta .

$\pi_1 \cap \pi_2 = \ell$.

Axioma 5.- Una recta contiene por lo menos dos puntos; un plano contiene por lo menos tres puntos, no todos colineales; y el espacio contiene por lo menos cuatro puntos no todos coplanares.

Ahora vemos como podemos usar estos axiomas para deducir algunos teoremas. Estos primeros teoremas establecerán lo que a algunos de nosotros parecerá intuitivamente obvio, pero recuerden que lo que tratamos de ver es que estos se pueden deducir de los que llamamos Axiomas.

La demostración de un teorema puede ser directa o indirecta.

1.2.5. Demostración Directa.

En una demostración directa procedemos paso a paso, empleando la hipótesis, algunos axiomas y teoremas previamente demostrados y que necesitaremos para llegar a la conclusión (tesis), como una consecuencia de nuestra cadena de razonamiento.

1.2.6. Demostración Indirecta.

La demostración indirecta también llamada demostración por contradicción o también ppr reducción al absurdo. En ella, para probar que una proposición es verdadera, considerando la hipótesis como se indica en el siguiente diagrama:

Hipótesis → Tesis se cumpla.

Hipótesis → Tesis no se cumpla.

Suponiendo la hipótesis y que la tesis no se cumple, examinamos las consecuencias de estas suposiciones, si algunas de estas consecuencias contradicen a la hipótesis, entonces como no se puede tener a la hipótesis verdadera y no verdadera al mismo tiempo, entonces lo que no se debe cumplir es la no tesis. Por lo tanto, la tesis se cumple, ya que es la única alternativa.

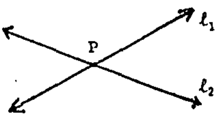
1.2.7. Demostraciones de Teoremas.

Ahora procederemos a demostrar los teoremas siguientes; se observará que en el primero y el segundo la demostración es indirecta y la del tercer teorema será en forma directa.

Teorema 1.- Si dos rectas distintas en un plano se intersectan, entonces su intersección es cuando más un punto.

Procedemos primero a identificar la hipótesis y la tesis del teorema.

Hipótesis: Dos rectas distintas se intersectan.



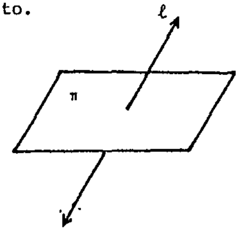
Tesis: La intersección de las rectas es cuando más un punto.

Demostración:

Supongamos que la intersección de ℓ_1 con ℓ_2 no es cuando más un punto. Entonces su intersección contiene dos puntos (o más), digamos P, Q . Esto significa que tenemos dos rectas diferentes ℓ_1 y ℓ_2, ambas conteniendo a P y a Q, -

pero por el axioma 1 (dos puntos distintos determinan una recta única), esto es imposible pues ℓ_1 y ℓ_2 serían la misma recta, lo cual contradice a la hipótesis. Por lo tanto, la intersección de ℓ_1 con ℓ_2 es cuando más un punto. Con esto queda demostrado el teorema.

Teorema 2.- Si una recta ℓ intersecta al plano π y ℓ no está contenida en π, entonces la intersección es un punto.



Hipótesis: ℓ y π se intersecan; ℓ no está contenida en π.

Tesis: $\ell \cap \pi = \{P\}$

Demostración:

Supongamos que ℓ y π se intersecan en dos puntos distintos P y Q. Entonces P y Q están ambos en ℓ, y por el axioma 1, determinan ℓ, ya que P y Q están ambos en π, por el axioma 3, ℓ está contenida en π, pero esto contradice a la hipótesis (ℓ no está contenida en π). Por lo tanto, $\ell \cap \pi$ contiene a lo más un punto. Como ℓ y π se intersecan, entonces la intersección consta de un sólo punto. Con lo que queda probado el teorema.

Débese señalar que las demostraciones de los teoremas 1 y 2, se efectuaron en forma indirecta o por contradicción. Ahora, la demostración del siguiente teorema será en forma directa.

Teorema 3.- Si dos rectas distintas se intersectan, - existe uno y sólo un plano que contiene a ambas rectas.

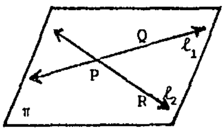
Demostración:

Sean ℓ_1 y ℓ_2 las dos rectas distintas y P el punto de intersección. Por el axioma 5, podemos considerar en ℓ_1 , un punto Q distinto de P y en ℓ_2 un punto R distinto de P. Entonces P, Q y R son tres puntos no colineales (pues, no pertenecen a - la misma recta) y, según el axioma 2, hay un plano único que -- los contiene. Ahora bien, P y Q pertenecen a dicho plano, y - por el axioma 3, ℓ_1 está contenida en el plano. De la misma - manera, como P y R están en el plano, ℓ_2 está contenida en el - plano. Con lo cual queda demostrado que el plano contiene a ambas rectas.

La demostración del teorema anterior, también se puede -- efectuar, analizándola paso a paso y escribiendo dos columnas.- En la primera escribiremos las afirmaciones que vayamos haciendo y en la segunda, la justificación de cada afirmación.

Teorema 3.- Si dos rectas distintas, se intersectan,- existe un plano único que contiene a ambas rectas.

Hipótesis: ℓ_1 y ℓ_2 son rectas distintas que se intersectan.

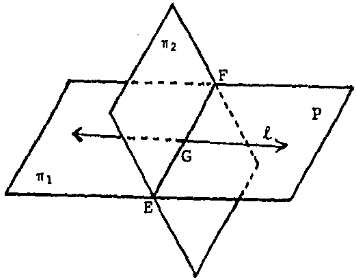


Tesis: Hay un plano único que contiene a ambas rectas.

Demostración:

a)	ℓ_1 y ℓ_2 se intersecan.	Por hipótesis.
b)	$\ell_1 \cap \ell_2 = \{P\}$	Teorema 1.
c)	Existe en ℓ_1, Q distinto de P.	Axioma 5.
d)	Existe en ℓ_2, R distinto de P .	Axioma 5.
e)	P, Q y R son no colineales.	Si lo fueran $\ell_1 = \ell_2$.
f)	P, Q y R determinan un plano (plano PQR).	Axioma 2.
g)	ℓ_1 está contenida en el plano PQR.	Axioma 3. (P y Q) están en el plano PQR).
h)	ℓ_2 está contenida en el plano PQR.	Axioma 3. (P y R) están en el plano PQR).
i)	El plano PQR contiene a ℓ_1 y a ℓ_2 .	Lo cual prueba el Teorema.

Ejercicio 1.2.1 - Observe la figura e indique cuáles de las siguientes proposiciones son falsas (F) y cuáles son verdaderas (V).



a) El plano π_1 intersecta al plano π_2 en la recta ℓ. ( )

b) El plano π_1 pasa por la recta ℓ . ( )

c) El plano π_1 pasa por $\overleftrightarrow{EF}$. ( )

d) El plano π_2 pasa por $\overleftrightarrow{EF}$. ( )

e) $P \in \pi_2$ ( )

f) $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{EF}$ ( )

g) $\ell \cap \overleftrightarrow{EF} = \{G\}$ ( )

h) $\pi_2 \cap \ell = \{G\}$ ( )

i) $\pi_1 \cap \overleftrightarrow{EF} = \overleftrightarrow{EF}$ ( )

Ejercicio 1.2.2 - Trace las figuras (si es posible), que ilustres las situaciones descritas.

1.- ℓ y m son dos rectas y $\ell \cap m = \{P\}$

2.- ℓ y m son dos rectas, $P \in \ell$, $R \in \ell$, $S \in m$ y $\overleftrightarrow{RS} \neq \overleftrightarrow{PR}$.

3.- r y s son dos rectas y $r \cap s = \emptyset$

4.- r y s son dos rectas y $r \cap s \neq \emptyset$

5.- R, S y T son tres puntos y $T \in (\overleftrightarrow{RT} \cap \overleftrightarrow{ST})$

6.- r, s son dos rectas, $A \neq B$ y $\{A,B\} \subset (r \cap s)$

7.- P,Q,R y S son puntos colineales $Q \in \overleftrightarrow{PR}$ y $R \in \overleftrightarrow{QS}$

8.- P,Q,R,S son puntos colineales $Q \in \overleftrightarrow{PR}$ y $Q \in \overleftrightarrow{PS}$

9.- A,B y C son tres puntos no colineales; A,B y D son tres puntos colineales y A, C y D son tres puntos colineales.

10.- ℓ , m y n son tres rectas y $P \in (m \cap n) \cap \ell$.

11.- π_1 y π_2 son dos planos, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{AB}$

12.- π_1 y π_2 son dos planos, $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$

13.- π_1 y π_2 son dos planos y m y n son dos rectas $m \subset \pi_1$, $n \cap m = \{P\}$

Ejercicio 1.2.3 - Escriba los axiomas completos que justifiquen cada una de las proposiciones siguientes:

1.- Los puntos A y B determinán una recta y sólo una.

2.- Si los puntos A, B y C, no son colineales, determinan un plano.

3.- Si los puntos A y B son puntos diferentes en el plano π , $\overleftrightarrow{AB}$ se encuentra en π .

4.- Si los puntos A y B son puntos diferentes en el plano π , existe un tercer punto que no está en- $\overleftrightarrow{AB}$.

En los ejercicios 5 - 10, trace una figura que re presente:

5.- Tres puntos en una recta.

6.- Tres puntos que no esten en una recta.

7.- Cuatro puntos, todos en un plano.

8.- Cuatro puntos, no todos en un plano.

9.- Dos planos que no se intersecan.

10.- Una recta y un plano, cuya intersección es una - recta.

Clasifique las siguientes proposiciones como falsas o verdaderas.

11.- En un postulado se puede usar un término no definido.

12.- Dos planos diferentes se pueden intersecar en un punto exactamente.

13.- Un postulado es una proposición demostrada.

14.- Un conjunto de puntos es colineal si hay una recta que contiene a todos.

15.- Dos rectas cualesquiera determinan un plano exactamente.

16.- Dos rectas distintas que se intersecan determinan un punto.

Ejercicio 1.2.4

1.- Dados: El punto A en el plano M y el punto B en el plano M .

a) ¿Qué se puede concluir de $\overleftrightarrow{AB}$?

b) ¿Cuál axioma apoya la deducción?

2.- Dados: Los planos π_1 y π_2 contienen el punto C.

a) ¿Qué se puede concluir acerca de la intersección de π_1 y π_2 ?

b) ¿Cuál axioma apoya la deducción?

3.- Dados: Las rectas ℓ y m se intersecan. El punto P está en ambas. El punto Q está en ambas.

a) ¿Qué se puede concluir acerca de P y Q ?

b) Enunciar el teorema que apoya la conclusión.

4.- Datos: P y Q son puntos distintos. La recta ℓ_1 contiene a P y a Q. La recta ℓ_2 contiene a P y a Q.

a) ¿Qué podemos concluir acerca de ℓ_1 y ℓ_2?

b) ¿Qué axioma justifica la conclusión?

5.- Datos: ℓ_1 y ℓ_2 son dos rectas distintas. ℓ_1 está en el plano E. ℓ_2 está en el plano F. ℓ_1 y ℓ_2 se intersecan en el punto P. El punto Q, distinto de P, está en ℓ_1 y en F. El punto R, distinto de P, está en ℓ_2 y en E.

a) ¿Qué puede concluirse acerca del plano E y del plano F ?

b) ¿Qué axioma o teorema justifica la respuesta?

6.- La recta ℓ_1 interseca al plano E en P, pero no está en E. La recta ℓ_2 está en el plano E, pero no contiene al punto P. ¿Será posible que ℓ_1 interseque a ℓ_2?. Explíquese.

Ejercicio 1.2.5 - Exprese cada proposición en la forma si..., entonces... (Ver los siguientes ejemplos).

Ejemplo 1.- Dos círculos con radios iguales, tienen áreas iguales.

Solución: Si los círculos tienen radios iguales, entonces tienen áreas iguales.

Ejemplo 2.- Todos los ángulos rectos tienen la misma medida.

Solución: Si los ángulos son rectos, entonces tienen la misma medida.

1.- Toda ecuación cuadrática tiene dos raíces.

2.- Cuando $a - b$ es un número positivo, b es menor que a.

3.- Cada ángulo externo de un polígono regular de n lados es $\frac{360°}{n}$.

4.- Cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°.

5.- $x = 20$, si $x - 8 = 12$.

6.- Las diagonales de un rectángulo son iguales.

7.- La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

8.- Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes.

Ejercicio 1.2.6 - Indique cuál es la hipótesis y cuál la tesis en cada proposición. (Ver los ejemplos siguientes).

Ejemplo 1.- Si Luis va caminando, llegará tarde.

Hipótesis: Luis se va caminando.

Tesis: Luis llegará tarde.

Ejemplo 2.- Dos planos se intersecan cuando no son paralelos.

Hipótesis: Los dos planos no son paralelos.

Tesis: Los planos se intersecan.

1.- Si Samuel es aprobado en álgebra, será eligible para jugar.

2.- Dos números enteros cuya suma es 7 no pueden ser ambos pares.

3.- Dos ángulos tienen la misma medida si son opuestos por el vértice.

4.- El producto de dos números enteros consecutivos es un número entero par.

5.- El juego será suspendido en caso de que llueva.

6.- Dos rayos opuestos forman una recta.

UNIDAD 2.- ELEMENTOS BASICOS DEFINIDOS DE LA GEOMETRIA.

Aunque "punto", "recta" y "plano" son considerados como términos no definidos, sin embargo, se puede, en función de ellos, definir otros términos básicos como son, segmento, ángulo, triángulo, etc.

2.1. SEGMENTO.

En el lenguaje común, con frecuencia decimos que un objeto se encuentra entre otros dos. Este concepto de "estar entre" es de interés en la geometría euclidiana. Aprovecharemos la definición de puntos colineales para enunciar el siguiente axioma:

Axioma 6.- Dados tres puntos colineales, uno de ellos y solamente uno está entre los otros dos.

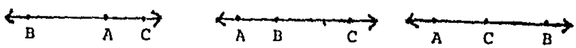
Esto indica que: si A, B y C son tres puntos de una recta ℓ, entonces ocurre uno y solamente uno de los tres casos siguientes:

a) A está entre B y C.

b) B está entre A y C.

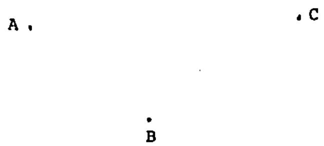
c) C está entre A y B.

Estos tres casos los podemos ilustrar así:



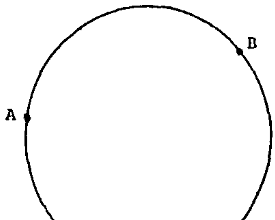
Observemos, que para poder hablar de "estar entre" es fundamental que los puntos sean colineales.

Consideremos por ejemplo, si tres puntos están como se muestra en la siguiente figura:



¿cuál de ellos está entre los otros dos?. Sencillamente la pregunta no tiene sentido.

Ahora veamos otro ejemplo, si consideramos tres puntos en una circunferencia, como se observa en la figura siguiente:

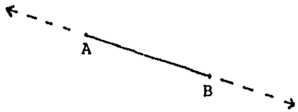


No sería correcto asegurar que uno de ellos exactamente está entre los otros, pues se puede afirmar que A está entre B y C, que B está entre A y C y que C está entre A y B, es decir, cada uno de ellos está entre los otros dos. En este caso podemos imaginar a tres personas sentadas alrededor de una mesa redonda.

Lo anterior no ocurre para puntos colineales, así pues, se hablará de "estar entre" solamente cuando los tres puntos sean colineales.

El concepto de "estar entre" nos permitirá definir lo que se entiende por segmento (o segmento de recta).

Definición 1.- Sean A y B dos puntos. El segmento AB es el conjunto formado por los puntos A y B y todos los puntos que están entre A y B .



Observando la figura anterior se puede establecer lo siguiente:

- Los puntos distintos de A y B, es decir, los que están entre A y B se llaman puntos interiores de $\overline{AB}$.

- Los puntos A y B son los extremos de $\overline{AB}$.

- Los puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que no están en el segmento son puntos exteriores.

- En el símbolo $\overline{AB}$ la raya horizontal sobre las letras nos auxiliará para denotar un segmento.

2.2. MEDIDA DE UN SEGMENTO.

Debemos considerar que hay una diferencia entre el segmento $\overline{AB}$ y la distancia AB. Es decir, son conceptos diferentes, porque $\overline{AB}$ es una figura geométrica o sea un conjunto de puntos, mientras que AB es un número que da la distancia entre los extremos.

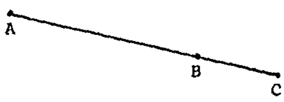
Considerando lo anterior, podemos establecer lo siguiente:

Definición.- El número AB se llama longitud (o medida) del segmento $\overline{AB}$.

También es necesario considerar el siguiente axioma:

Axioma 7.- A cada segmento le corresponde un número real no negativo que se llama su longitud o medida e inversamente, dado un número real no negativo hay segmentos de esa longitud.

Ahora bien, si B es un punto de un segmento $\overline{AC}$, entonces $AB + BC = AC$.



A esta propiedad se le conoce como la Propiedad Aditiva en los segmentos. También, si B es un punto del segmento $\overline{AC}$ y $AB = AC$, entonces B es punto medio de $\overline{AC}$.

2.3. CONGRUENCIA DE SEGMENTOS.

Comúnmente, cuando nos referimos a objetos que tienen algunas características comunes, decimos que son iguales. Por ejemplo, al hablar de las ventanas de un edificio, decimos que son iguales. Al hablar de las sillas de un salón, afirmamos que son iguales.

En el lenguaje matemático esto no se considera correcto. Pues, en matemáticas el significado de la expresión "igual a" es "lo mismo que". Por ejemplo, cuando escribimos $2 \times 3 = 6$, esto quiere decir que "2×3" y 6 son "el mismo" número. Si escribimos $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{RS}$, queremos decir que $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{RS}$ son "la misma" recta.

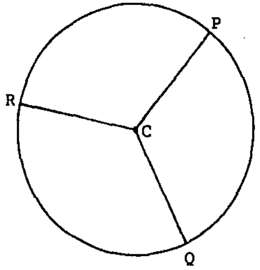
Aún cuando las sillas del salón tengan la misma forma, mismo color, etc., esto no permite decir hablando en lenguaje matemático, que son iguales. Tampoco podemos decir, en lenguaje matemático, que las ventanas de cierto edificio son iguales aún cuando tengan la misma forma, el mismo tamaño y otras características comunes.

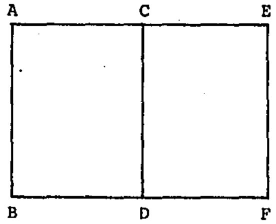
Para evitar algunas confusiones con el uso de la palabra igual, estableceremos que: En el lenguaje matemático "igual a" significa "el mismo que".

En Geometría, cuando dos figuras tienen la misma forma y el mismo tamaño, decimos que las figuras son congruentes.

Ahora hablaremos de la congruencia de segmentos. Posteriormente, trataremos la congruencia de ángulos, de triángulos y de otras figuras geométricas.

Las siguientes figuras ilustran la congruencia de segmentos:





En la primera, los segmentos $\overline{CP}$, $\overline{CQ}$ y $\overline{CR}$ son segmentos congruentes entre sí. En la segunda figura, los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ son segmentos congruentes entre sí.

El símbolo que utilizaremos para indicar que dos segmentos son congruentes es $\cong$. De esta manera, en el ejemplo anterior podemos denotar:

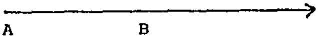
$$\overline{CP} \cong \overline{CQ} \cong \overline{CR} \qquad \text{y también que} \qquad AB \cong \overline{CD} \cong \overline{EF}$$

Observamos que en la primera figura, los segmentos tienen la misma medida o longitud, y también se cumple que en la otra figura los segmentos tienen la misma longitud o medida. Tomando en cuenta esto, podemos establecer la siguiente definición.

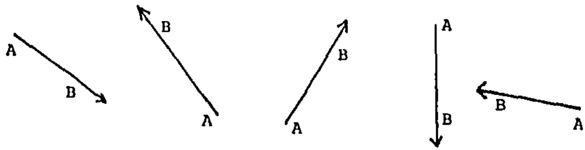
Definición 2.- Dos segmentos son congruentes si, y sólo sí, tienen la misma longitud o medida.

2.4. RAYOS. (O SEMIRECTAS).

Un rayo es una figura que se representa en la siguiente forma:

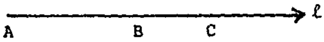


La figura indica que el rayo empieza en A, pasa por B en la línea recta y sigue indefinidamente en el mismo sentido.- Para representar un rayo, empleamos una flecha, la cual siempre apunta hacia la derecha, no importando cuál sea el sentido del rayo. Observemos las representaciones del rayo $\overrightarrow{AB}$ en el siguiente ejemplo:



Considerando lo anterior como explicación intuitiva de lo que es un rayo. Podemos establecer la siguiente definición:

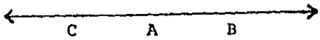
Definición 3.- Sean A y B dos puntos de una recta ℓ. El rayo $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de puntos del segmento $\overline{AB}$, unido al conjunto de los puntos C para los cuales es cierto que B está entre A y C. El punto A se llama extremo del rayo $\overrightarrow{AB}$.



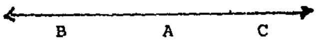
En esta figura se observa también que C es un punto del rayo $\overline{AB}$, de esto podemos afirmar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

Otras propiedades:

Si A está entre B y C, entonces los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tendrán sentidos opuestos:



Si A está entre B y C, entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se llaman opuestos.



Ejercicio 2.1. Clasifique las siguientes proposiciones como falsas (F) o verdaderas (V).

1.- Una recta que está en un plano, lo interseca. ( )

2.- Un rayo tiene longitud definida. ( )

3.- Tres puntos que están en un plano son siempre colineales. ( )

4.- En el espacio hay un número infinito de planos. ( )

5.- La recta que contiene dos puntos que están en un plano, está también en el mismo plano. ( )

6.- $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ son dos maneras diferentes de referirse al mismo segmento. ( )

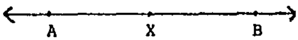
7.- $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ son dos maneras diferentes de referirse al mismo rayo. ( )

8.- Si tres puntos son coplanares, forzosamente uno de ellos está situado entre los dos. ( )

9.- Si tres puntos son colineales, forzosamente uno de ellos está entre los otros dos. ( )

10.- La longitud de un segmento es siempre un número positivo. ( )

Ejercicio 2.2. - Dado: X es el punto medio de $\overline{AB}$.



1.- ¿Son A, B y X colineales?

2.- ¿Pasa $\overleftrightarrow{AX}$ por B ?

3.- ¿Es $AX = BX$?

4.- ¿Está A en el $\overrightarrow{XB}$?

5.- ¿Representan el mismo rayo $\overrightarrow{XB}$ y $\overrightarrow{BX}$?

6.- Si $AX = 7$, encontrar AB .

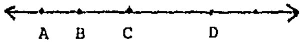
7.- Escriba la expresión que denote un rayo con su punto extremo en X y que pase por A .

8.- ¿Se podría decir que $AX + XB = AB$?

9.- ¿Son los rayos XB y XA rayos opuestos?

10.- Si $AX > XB$. ¿Podría X ser el punto medio de $\overline{AB}$?

Ejercicio 2.3. - Dado: que A, B, C, D son puntos colineales y C es punto medio de $\overline{AD}$.



1.- ¿C biseca a $\overline{AD}$?

2.- ¿Se cumple que $AB + BC = AC$?

3.- ¿Se encuentra C entre A y B ?

4.- ¿Son rayos opuestos $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CD}$? ¿Por qué?

5.- Se cumple que ¿$C \in \overrightarrow{BD}$?

6.- ¿Qué es $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{BD}$?

7.- ¿Qué es $\overline{AB} \cup \overline{BC}$?

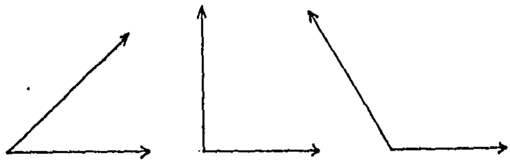
8.- ¿Pasa $\overleftrightarrow{BC}$ por A ?

9.- ¿Qué es $\overline{BA} \cap \overline{BD}$?

10.- ¿Qué es $\overline{AB} \cup \overrightarrow{BC}$?

2.5. ANGULOS.

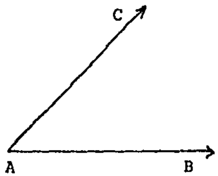
Figuras como estas son representaciones de ángulos.



Definición 4.- Un ángulo es la unión de dos rayos que tienen el mismo punto extremo. Los rayos se llaman lados del ángulo y su punto extremo común recibe el nombre de vértice.

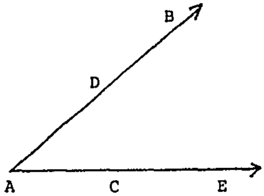
El símbolo para denotar un ángulo es $<$.

Si los rayos son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, entonces el ángulo se indica con $<BAC$ ó con $<CAB$, como se muestra en la siguiente figura.



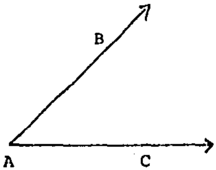
La letra de enmedio señala el vértice del ángulo. Los rayos $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ los lados del ángulo.

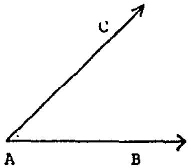
Si consideramos la siguiente figura:



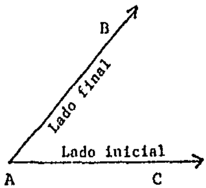
El ángulo se puede designar por <CAD, < EAB, < BAE, < DAC y así sucesivamente, pues es el mismo ángulo. Para abreviar lo podemos denotar por < A.

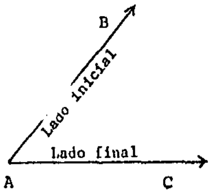
Se observará que los ángulos son conjuntos de puntos, por lo tanto, es indiferente el <u>orden</u> en que se nombran sus lados.





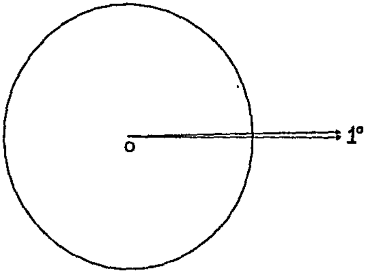
Esta es la forma más sencilla de la definición de un ángulo, en nuestro curso de Geometría. Posteriormente, en Trigonometría la definición será en una forma diferente, es decir, importará qué lado se nombre primero.





2.6. MEDIDA DE ANGULOS.

Considerando el círculo como base natural para la medida de ángulos, dividiéndolo en 360 partes iguales y a cada una de estas 360 partes del círculo se le llama grado. Por consiguiente, la unidad de medida de ángulos es la 360-ava parte de un círculo o ángulo completo, y se llama grado.



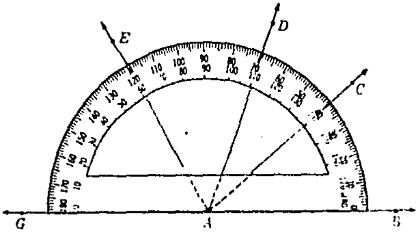
En la medida de un ángulo, la palabra "grado" se suele denotar con el símbolo (°). Por ejemplo, "diez grados" se escribe 10°.

Para medir fracciones de grados se divide el grado en 60 partes iguales, cada una de las cuales recibe el nombre de minuto. El minuto se denota con una comilla ('). Así, por ejemplo, ¼ de grado es 15 minutos y se denota 15'. El minuto también se divide en 60 partes iguales, cada una de las cuales se llama segundo. El segundo se simboliza ("). Por ejemplo, medio minuto es 30 segundos y se escribe 30".

De esto, para denotar la medida de un ángulo, usaremos el símbolo así: $\measuredangle$.

Por ejemplo, "la medida de un ángulo $\angle$ BAC", la podemos denotar con $\measuredangle$ BAC .

Del mismo modo que se usa para estimar las medidas de los segmentos, la medida aproximada de un ángulo se puede obtener con un transportador.



Enunciaremos ahora, el axioma correspondiente a la medida de ángulos:

Axioma 8.- A cada ángulo le corresponde un número real desde 0 hasta 360 que se llama su medida.

2.7. CLASIFICACION DE ANGULOS.

a) Angulo agudo.- Es aquel que mide entre 0° y 90°.

b) Angulo recto.- Es el ángulo que mide 90°.

c) Angulo obtuso.- Es el que mide más de 90° y menos de 180°.

d) Angulo llano o de lados colineales.- Es el que mide 180°.

e) Angulo de una vuelta o perígono.- Es aquel que mide 360°.

2.8. ANGULOS CONGRUENTES.

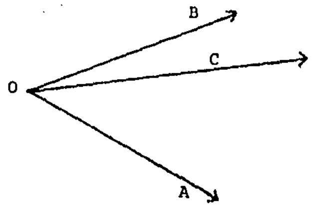
Así como anteriormente analizamos la congruencia de segmentos, ahora introduciremos la congruencia de ángulos.

Desde el punto de vista intuitivo, si se dice que dos ángulos son congruentes, significa que uno es la copia del otro.- Formalizaremos esta idea en la siguiente definición:

Definición 5.- Dos ángulos son congruentes sí, y sólo sí, tienen la misma medida.

Ahora, enunciaremos el siguiente axioma que nos auxiliará en algunas demostraciones o resolución de ejercicios.

Axioma 9.- En un $< AOB$, existe al menos un rayo $\overrightarrow{OC}$, tales que:



a) $\measuredangle AOC + \measuredangle COB = \measuredangle AOB$. Propiedad aditiva para án-
gulos.

b) Si $\measuredangle AOC = \measuredangle COB$, $\overrightarrow{OC}$ es una bisectriz.

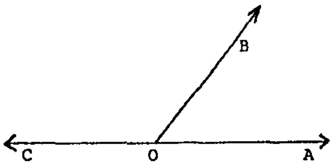
2.9. BISECTRIZ DE UN ANGULO.

En b) se debe entender que el rayo $\overrightarrow{OC}$ está dividiendo al $< AOB$ en dos ángulos con la misma medida, es decir, en dos ángulos congruentes. De esto, podemos enunciar la siguiente definición:

Definición 6.- Bisectriz, es el rayo que divide a un ángulo en dos ángulos congruentes.

2.10. ANGULOS ADYACENTES.

Consideremos el $\measuredangle AOC$, tales que $\overrightarrow{OB}$ esté entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$, como se indica en la figura siguiente:



$\overrightarrow{OB}$ es lado común de los ángulos $< AOB$ y $< COB$. También $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OC} = \overleftrightarrow{AC}$ o sea $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ forman una recta.

Por lo anterior, podemos decir que $\angle AOB$ y $\angle COB$ son ángulos adyacentes.

Definición 7.- Dos ángulos son adyacentes, si tienen un lado común y la unión de los otros dos lados es una recta.

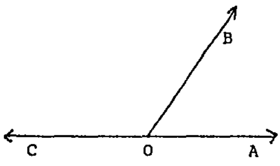
2.11. ANGULOS SUPLEMENTARIOS Y COMPLEMENTARIOS.

También se pueden enunciar las siguientes definiciones:

Definición 8.- Dos ángulos son suplementarios, si la suma de sus medidas es 180°.

Definición 9.- Dos ángulos son complementarios, si la suma de sus medidas es 90°.

Ahora volvamos a considerar la figura anterior.



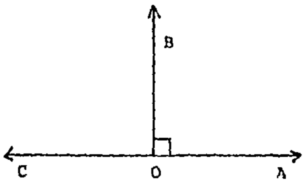
$\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = \measuredangle AOC$	Propiedad aditiva de ángulos.
Pero $\measuredangle AOC = 180°$	es un ángulo llano.
$\therefore \measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 180°$	Propiedad transitiva de la igualdad.

Esto último nos permite enunciar el teorema:

Teorema 1.- Si dos ángulos son adyacentes, entonces son suplementarios.

También se puede establecer:

Teorema 2.- Si dos ángulos adyacentes son congruentes, entonces ambos son ángulos rectos.



Los ángulos $< AOB$ y $< COB$ son adyacentes y $< AOB \cong < COB$.

$\measuredangle AOB + \measuredangle COB = 180°$ pero $< AOB \cong < COB$

$$\measuredangle COB + \measuredangle COB = 180°$$

$$2 \measuredangle COB = 180°$$

$$\therefore \measuredangle COB = 90°$$

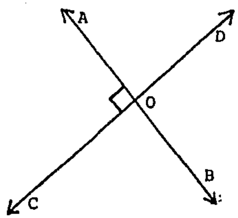
$$\therefore \measuredangle AOB = 90°$$

NOTA: Obsérvese en la figura, cómo se indica cuando se forma un ángulo recto.

2.12. RECTAS PERPENDICULARES.

En la figura anterior, podemos observar también que al intersectarse $\overrightarrow{OB}$ Y $\overleftrightarrow{AC}$ forman ángulos rectos. En este caso se puede decir que $\overrightarrow{OB}$ "es perpendicular a" $\overrightarrow{AC}$, lo cual se denota $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$. Esto último se puede generalizar para rectas que al intersectarse formen ángulos rectos en la siguiente definición:

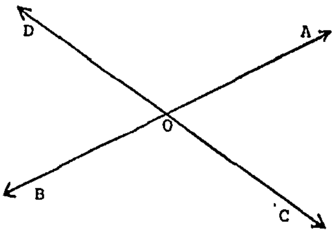
Definición 10.- Dos rectas son perpendiculares si y sólo sí al intersectarse forman ángulos rectos.



$\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\overrightarrow{CD}$, se denota: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

2.13. ANGULOS OPUESTOS POR EL VERTICE.

En la siguiente figura:



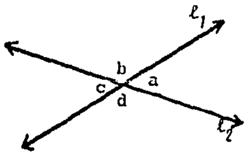
$\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son dos rectas que se intersectan en O. - Se puede observar que se han formado cuatro ángulos : $\angle$ AOC, $\angle$ AOD, $\angle$ DOB y $\angle$ BOC.

En la misma, se puede decir que $\angle$ AOD y $\angle$ COB son - ángulos opuestos por el vértice. También lo son $\angle$ DOB y $\angle$ AOC.

Definición 11.- Dos ángulos son opuestos por el vértice, si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.

Por último, enunciaremos el siguiente teorema, que nos - servirá en la resolución de algunos ejercicios o bien en algunas demostraciones posteriores:

Teorema 3.- Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes.



Hipótesis: ℓ_1 y ℓ_2 son rectas - que se intersectan.

Tesis: $\angle a \cong \angle c$.

Demostración:

1) $\measuredangle a + \measuredangle b = 180°$	Son $\angle$s adyacentes.
2) $\measuredangle b + \measuredangle c = 180°$	Son $\angle$s adyacentes.
3) $\measuredangle a + \measuredangle b = \measuredangle b + \measuredangle c$	Propiedad transitiva de la igualdad.

4) $\therefore\ \} a = \} c$ Elemento inverso aditivo.

5) $\therefore\ < a \cong < c$ Definición de congruencia de ángulos.

De manera análoga se puede demostrar que $< b \cong < d$.

Ejemplos ilustrativos.- Resolveremos algunos ejemplos y se efectuarán algunas demostraciones sencillas:

1.- Hállese el complemento de $65° \ 30'$.

Restaremos $65° \ 30'$ de $90°$, tomando en cuenta que $1° = 60'$, entonces $90° = 89° \ 60'$. Por lo tanto:

$$\begin{array}{rrr} & 89° & 60' \\ - & 65° & 30' \\ \hline & 24° & 30' \end{array}$$

R.- $24° \ 30'$ es el complemento de $65° \ 30'$.

2.- ¿Cuál es el suplemento de $22° \ 20' \ 15''$?

Restaremos $22° \ 20' \ 15''$ de $180°$ y como $1° = 60'$; $1' = 60''$, entonces:
$180° = 179° \ 59' \ 60''$.
Por lo tanto:

$$\begin{array}{rrrr} & 179° & 59' & 60'' \\ - & 22° & 20' & 15'' \\ \hline & 157° & 39' & 45'' \end{array}$$

R.- $157° \ 39' \ 45''$ es el suplemento de $22° \ 20' \ 15''$.

3.- Dos ángulos son complementarios, y el uno es cuatro quintos del otro. Hállense sus medidas.

Datos:

$\sphericalangle A = x$

$\sphericalangle B = \frac{4}{5} x$

$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°$

Ecuación:

$$x + \frac{4}{5} x = 90°$$

Multiplicando ambos miembros por 5 :

$$5x + 4x = 450°$$
$$9x = 450°$$
$$x = \frac{450°}{9}$$
$$\therefore \quad x = 50°$$

R.- $\sphericalangle A = 50°$ y $\sphericalangle B = \frac{4}{5}(50°)$ $\therefore$ $\sphericalangle B = 40°$

4.- Un ángulo mide 20° más que el cuádruplo de su suplemento. Encuentre la medida de cada uno de ellos.

Datos:

$\sphericalangle A = x$

$\sphericalangle B = 4x + 20°$

$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$

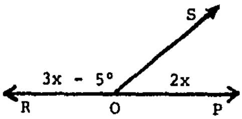
Ecuación:

$$x + (4x + 20°) = 180°$$
$$x + 4x + 20° = 180°$$
$$5x + 20° = 180°$$
$$5x = 180° - 20°$$
$$5x = 160°$$
$$x = \frac{160°}{5}$$
$$x = 32°$$

R.- $\sphericalangle A = 32°$; $\sphericalangle B = 4(32°) + 20°$

$\therefore$ $\sphericalangle B = 148°$

5.- Con los datos que se indican en la figura, calcular $\measuredangle POS$ y $\measuredangle ROS$.



$\measuredangle POS = 2x$

$\measuredangle ROS = 3x - 5°$

Solución: Como $\angle POS$ y $\angle ROS$ son ángulos adyacentes, entonces:

$$\measuredangle POS + \measuredangle ROS = 180°$$

o sea
$$2x + (3x - 5°) = 180°$$
$$2x + 3x - 5° = 180°$$
$$5x - 5° = 180°$$
$$5x = 180° + 5°$$
$$5x = 185°$$
$$x = \frac{185°}{5}$$
$$\therefore \quad x = 37°$$

R.- $\measuredangle POS = 2(37°) \quad \therefore \quad \measuredangle POS = 74°$

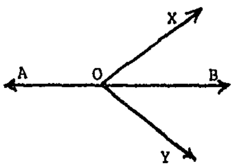
$\measuredangle ROS = 3(37°) - 5° \quad \therefore \quad \measuredangle ROS = 106°$

6.- Dados: $\overleftrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ se intersecan en O;

$\measuredangle XOB = \measuredangle YOB$

Demostrar:

$\measuredangle AOX + \measuredangle YOB = 180°$



Demostración:

a) ∢ AOX + ∢ XOB = 180°   Son <s adyacentes.

b) Pero ∢ XOB = ∢ YOB   Dato.

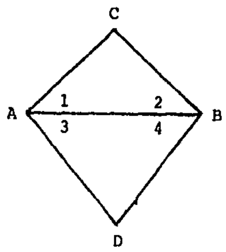
c) ∴ ∢ AOX + ∢ YOB = 180°

7.- Dados: $\overline{AC} \perp \overline{AD}$

$\overline{BC} \perp \overline{BD}$

∢ 1 = ∢ 2

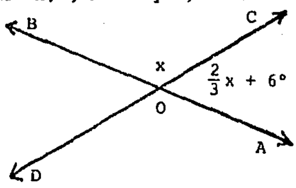
Demostrar: ∢ 3 = ∢ 4



Demostración:

a) ∢ 1 + ∢ 3 = 90°	$\overline{AC} \perp \overline{AD}$
b) ∢ 2 + ∢ 4 = 90°	$\overline{BC} \perp \overline{BD}$
c) ∢ 1 + ∢ 3 = ∢ 2 + ∢ 4	Propiedad transitiva de la igualdad .
d) Pero ∢ 1 = ∢ 2	Dato.
e) ∴ ∢ 3 = ∢ 4	

8.- Con los datos que se indican en la figura, calcular x, ∢ BOD y ∢ AOD.



Datos:

∢ AOC = $\frac{2}{3}$ x + 6°

∢ BOC = x

Solución:

$\measuredangle AOC + \measuredangle BOC = 180°$ Son $<s$ adyacentes.

Sustituyendo:

$(\frac{2}{3}x + 6°) + x = 180°$

$\frac{2}{3}x + 6° + x = 180°$

Multiplicando ambos miembros por 3 .

$$
\begin{aligned}
2x + 18° + 3x &= 540° \\
5x &= 540° - 18° \\
5x &= 522° \\
x &= \frac{522°}{5} \\
\therefore \quad x &= 104°\ 24'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 104° \quad 24' \\
\hline
5 & 522° \\
 & 022 \\
 & \quad 2° = 120' \\
 & \qquad\quad 20 \\
 & \qquad\quad\ 0
\end{array}
$$

Como $\measuredangle AOC = \measuredangle BOD$ por ser $<s$ opuestos por el vértice, entonces:

$\measuredangle BOD = \frac{2}{3}x + 6°$

Sustituyendo x:

$\measuredangle BOD = \frac{2}{3}(104°\ 24') + 6°$

O sea:

$$
\begin{array}{r}
104°\ 24' \\
\times\ 2 \\
\hline
208°\ 48'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 69° \quad 36' \\
\hline
3 & 208° \quad 48' \\
 & \ 28 \qquad\ + \\
 & 1° = \underline{60'} \\
 & 108' \\
 & 18 \\
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
69°\ 36' \\
+\ 6° \\
\hline
75°\ 36'
\end{array}
$$

$\therefore \quad \measuredangle BOD = 75°\ 36'$

Análogamente: $\measuredangle AOD = \measuredangle BOC$.
$\measuredangle AOD = x$

Como $x = 104°\ 24'$ $\therefore$ $\measuredangle AOD = 104°\ 24'$

Ejercicio 2.4.

1.- ¿Cuál es la suma de 27° 18' 17" y 56° 10' 50" ?

2.- ¿Cuál es el complemento de 73° 42' 52" ?

3.- ¿Cuál es el suplemento de 95° 20' 35" ?

4.- La tierra da una vuelta alrededor de su eje en 24 hrs. ¿Cuántos grados describe en una hora?

5.- Una rueda tiene 18 radios. ¿Cuál es el ángulo que forman cada dos radios?

6.- ¿Cuál es el ángulo que gira el minutero de un reloj en 35 minutos de tiempo?

7.- ¿Qué ángulo describe la manecilla de las horas en 48 minutos de tiempo?

8.- ¿Qué ángulo gira la manecilla de las horas en un día?

9.- ¿Qué ángulo gira la manecilla de las horas en un día?

10.- ¿Qué ángulo, medido en grados, describe el segundero de un reloj en un segundo de tiempo?

Ejercicio 2.5.

1.- Dos ángulos son suplementarios y uno es la mitad del otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?

2.- Dos ángulos son complementarios y uno es cinco veces el otro. ¿Cuántos grados hay en cada ángulo?

3.- Dos ángulos son suplementarios y uno es 40° menor que el otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?

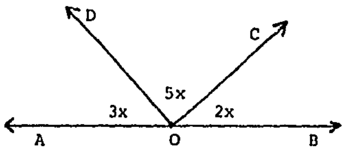
4.- Dos ángulos son complementarios y uno es 10° mayor que el otro. ¿Cuántos grados hay en cada ángulo?

5.- La suma del complemento y el suplemento de un cierto ángulo es 170°. Encuentre la medida de dicho ángulo.

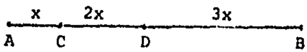
6.- Dos ángulos son complementarios y uno de ellos es 19° más que el triple del otro ángulo. ¿Cuánto mide cada ángulo?

7.- El complemento de un cierto ángulo es 22° menor que dos veces su suplemento. Encuentre el número de grados que hay en el ángulo.

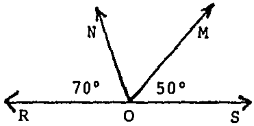
8.- En la figura, si AB es una recta. ¿Cuántos grados hay en el DOA ? ¿Qué clase de ángulo es COD ?



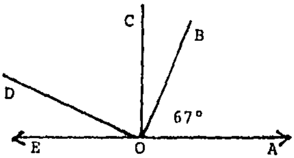
9.- En la figura, si AB = 9 cm. Encontrar AC, CD y DB .



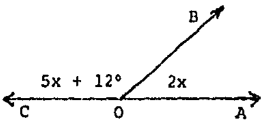
10.- En la figura, si RS es una recta. ¿Cuánto mide el < MON ?



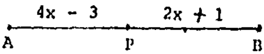
11.- En la figura, EA es una recta; también $\overline{CO} \perp \overline{AO}$ y $\overline{DO} \perp \overline{BO}$. Encuentre la medida en cada ángulo- de la figura.



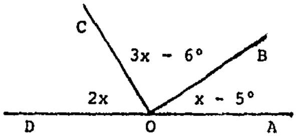
12.- En la figura, ¿qué valor de X haría CA una línea recta?



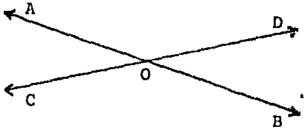
13.- En la figura, AB = 10 cm. ¿Es P el punto medio de $\overline{AB}$?



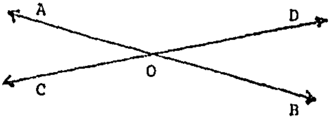
14.- En la figura, si $\overline{CO} \perp \overline{BO}$. ¿Es DOA una línea recta?



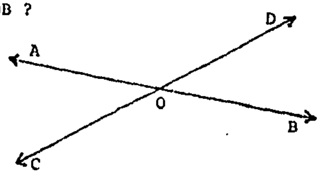
15.- En la figura, $\overline{AB}$ es una recta. $\measuredangle BOD = 3x - 5°$, $\measuredangle DOA = 8x + 20°$, $\measuredangle AOC = 2x + 9°$. ¿Es CD -- una recta?



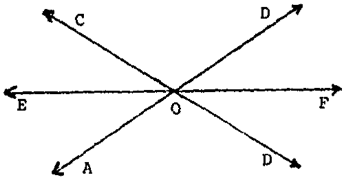
16.- En la figura $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ se intersectan en O, si $\measuredangle BOD = \frac{X}{2}$, $\measuredangle AOD = X$. ¿Cuánto miden los ángu-- los $< AOC$ y $< BOC$?



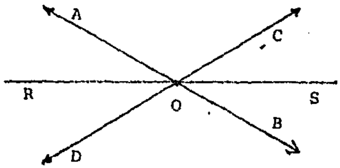
17.- Si $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ se intersectan en O y $\measuredangle AOD = 2X + 15°$ y $\measuredangle BOD = X$. ¿Cuál es la medida de $< AOC$ y de $< COB$?



18.- Si $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ son rectas; $\overleftrightarrow{EF}$ biseca a $< AOC$. - ¿Biseca $\overleftrightarrow{EF}$ a $< BOD$?



19.- En la siguiente figura, las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ se- intersectan en O, $\overline{RO}$ biseca al $<AOD$; $\overline{SO}$ bi seca al $<COB$. Sea X el número de grados del - $< AOR$. Dé las razones para cada uno de los si-- guientes enunciados.



a) La medida del $< ROD$ es X.

b) El número de grados en $< DOB$ es $180 - 2X$.

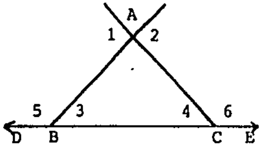
c) La medida del $< COB$ es $2X$.

d) La medida del $< SOB$ es X .

e) Hay $180°$ en el $< ROS$.

f) El $< ROS$ es un ángulo recto.

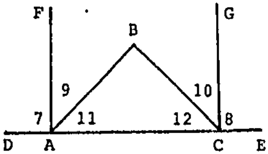
20.- En los siguientes ejercicios, dé las razones en ca cada una de las siguientes cuestiones.



a) ¿Por qué ∡1 = ∡2 ?

b) ¿Por qué ∡DBC = ∡ECB?

c) Si ∡3 = ∡4, ¿por qué ∡5 = ∡6 ?



d) Si $\overline{AF} \perp \overline{DE}$ y $\overline{GC} \perp \overline{DE}$

¿Por qué ∡7 = ∡8 ?

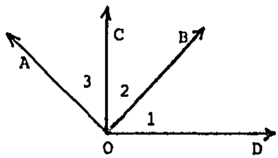
e) Si $\overline{AF} \perp \overline{DE}$, $\overline{GC} \perp \overline{DE}$ y ∡11 = ∡12, ¿Por qué ∡9 = ∡10 ?

Ejercicio 2.6.

1.- Dé una razón apropiada para cada proposición acerca de la pregunta dada.

Dados: $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$



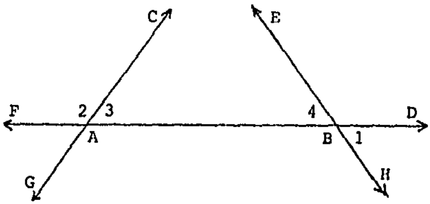
a) ∡COD es un ángulo recto.

b) ∡1 y ∡2 son complementarios.

c) ∡2 + ∡3 = ∡AOB .

d) ∡1 = ∡3 .

2.- En la figura, $\overleftrightarrow{FD}$ interseca a $\overleftrightarrow{CG}$ y $\overleftrightarrow{EH}$ en A y B respectivamente, de tal manera que se cumpla que ∢ 4 = ∢3 . Demostrar que ∢2 y ∢1 son suplementarios.

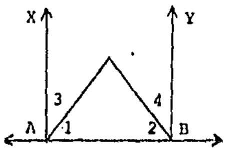


3.- Dados: $\overrightarrow{AX} \perp \overleftrightarrow{AB}$

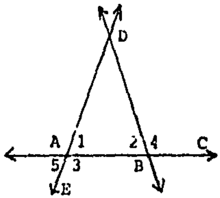
$\overrightarrow{BY} \perp \overleftrightarrow{AB}$

∢ 1 = ∢ 2

Demostrar que: ∢3 = ∢4



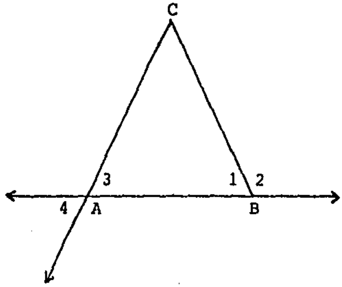
4.- Dados: Los rayos $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ son rayos opuestos; los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son rayos opuestos; ∢ 1 = ∢ 2 .



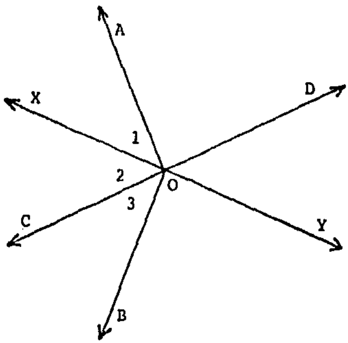
Demostrar: ∢ 5 + ∢ 4 = 180° .

5.- Dado: $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$.

Demostrar: $\measuredangle 4 + \measuredangle 2 = 180°$.

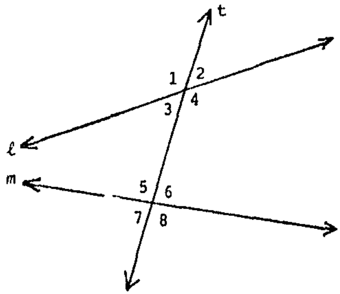


6.- En la figura $\overrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{XY}$. Probar que $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$.



2.14. ANGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS INTERSECADAS POR UNA TRANSVERSAL.

Una transversal es una recta que interseca a dos ó más rectas en puntos diferentes. Usaremos la palabra transversal sólo cuando todas las rectas estén en el mismo plano. Consideremos la siguiente figura, en la que t es una transversal de ℓ y m.



1ª) Los ángulos: < 3, < 4, < 5 y < 6 son ángulos internos.

2ª) Los ángulos: < 1, < 2, < 7 y < 8 son ángulos externos.

3ª) Dos ángulos como < 1 y < 5, uno externo y el otro interno, pero situados del mismo lado de la transversal y con vértices diferentes, se llaman ángulos correspondientes. Los otros ángulos correspondientes son: < 3 y < 7 ; < 2 y < 6 ; < 4 y < 8 .

4ª) Dos pares de ángulos internos, situados en lados opuestos de la transversal y con vértices diferentes, se llaman ángulos alternos internos. Son ángulos alternos internos < 3 y < 6 ; < 4 y < 5 .

5ª) Dos pares de ángulos externos, situados en lados opuestos de la transversal y con vértices diferentes, se llaman ángulos alternos externos. Por ejemplo: <1 y <8 ; <2 y <7.

2.15. RECTAS PARALELAS.

Antes de continuar, es conveniente definir el concepto de rectas paralelas.

Definición 12.- Dos rectas son paralelas si son coplanares y no tienen punto en común.

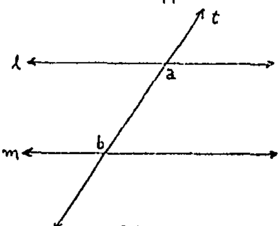
Si una recta ℓ es paralela a una recta m. Esto se simboliza $\ell \parallel m$

2.15.1. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL PARALELISMO.

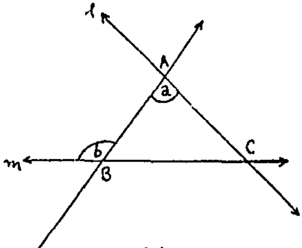
Teorema 4.- Si dos rectas son cortadas por una transversal y los ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Hipótesis: $\angle a \cong \angle b$.

Tesis: $\ell \parallel m$.



(1)



(2)

Demostración.

Dadas las rectas ℓ y m y una transversal t en el mismo plano, sabemos que ℓ y m o se intersecan o son paralelas. Supongamos que ℓ y m no son paralelas; es decir, se intersecan en exactamente un punto C. Ello determina un $\triangle ABC$ (Fig. 2)

El $\angle b$ es entonces un ángulo externo del $\triangle ABC$ y que es mayor que la medida de cualesquiera de los dos ángulos inter-- nos, o sea el $\angle b$ es mayor que el $\angle BAC$. Esto contradice la - hipótesis inicial ($\angle a \cong \angle b$). Por lo tanto ℓ y m no se intersecan, entonces se demuestra que $\ell \parallel m$.

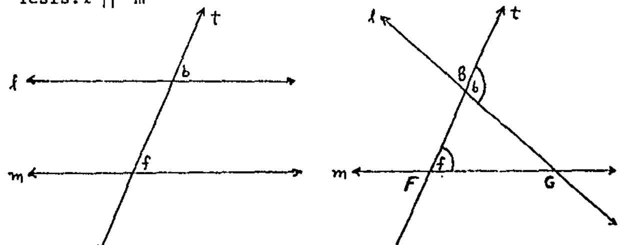
Puede observarse que la demostración realizada es una demostración por contradicción.

También debemos señalar que esta demostración justificará la construcción Geométrica Nº 8 de la Unidad 4.

Teorema 5.- Si dos rectas son cortadas por una transversal de tal manera que formen una pareja de ángulos correspondientes - congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Hipótesis: Las rectas ℓ y m cortadas por la transversal t;
$\angle b \cong \angle f$.

Tesis: $\ell \parallel m$



(1) (2)

Demostración.

Supongamos que las rectas no son paralelas; es decir, que ℓ y m se cortan en exactamente un punto G (Fig. 2). Entonces -

el $< b$ es un ángulo externo del ΔBFG.

Ahora, si el $<b$ es externo, es mayor que el $<BFG$, o sea, el $<b$ es mayor que el $<f$. Esto contradice a la hipótesis - ($<b \cong <f$). Por lo tanto ℓ y m no se intersecan, lo cual demuestra que $\ell \parallel m$.

La geometría euclidiana cuenta con el Axioma, que es una - réplica del famosos Quinto postulado de Euclides y también se le conoce como Axioma de las paralelas:

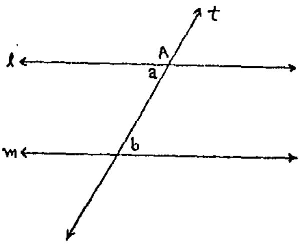
Axioma 8.- Por un punto dado fuera de una recta hay una y solamente una recta paralela a la recta dada.

Este Axioma nos sirve para probar algunos Teoremas. Entre los más importantes está el recíproco del Teorema Fundamental - del Paralelismo:

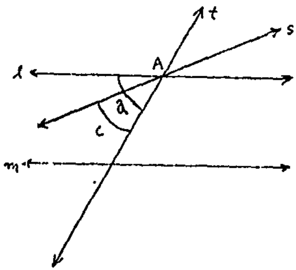
Teorema 6.- Si dos rectas paralelas de un mismo plano son intersecadas por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

Hipótesis: $\ell \parallel m$

Tesis: $<a \cong < b$



(1)



(2)

Demostración.

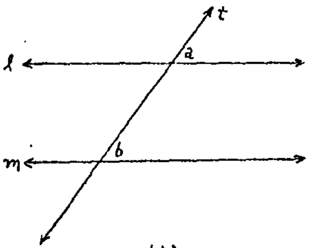
Cuando una transversal corta dos rectas, los ángulos alternos internos o son congruentes o no lo son. En este caso supongamos que los ángulos alternos internos $<c$ y $<f$ no son congruentes. Trácese una recta diferente de ℓ tal que los ángulos $<c$ y $<b$ si sean congruentes (fig. 2).

El teorema 4, nos afirma que si $<c \cong <b$ la recta S es paralela a la recta m. Entonces, como $S \parallel m$ y por hipótesis $\ell \parallel m$ existen dos rectas S y ℓ, paralelas a m y que pasan por el punto A, lo cual contradice al Axioma de las paralelas. Por lo tanto nuestra suposición es falsa y por consecuencia $<a \cong <b$.

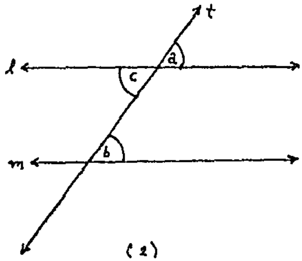
Teorema 7.- Si una recta interseca a dos rectas paralelas de un mismo plano, los ángulos correspondientes son congruentes.

Dato: $\ell \parallel m$

Conclusión: $<a \cong <b$



(1)



(2)

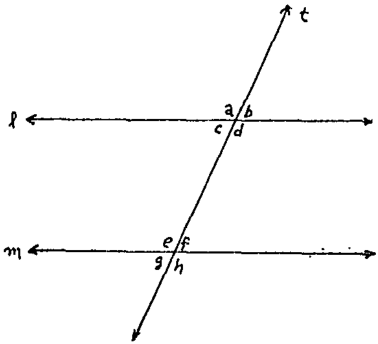
Demostración:

$<a \cong <c$	Por ser ángulos opuestos por el vértice.
$<c \cong <b$	Por ser ángulos alternos internos
$\therefore <a \cong <b$	Propiedad transitiva

Teorema 8.- Si una recta interseca a dos rectas paralelas de un mismo plano, los ángulos alternos externos son congruentes.

La demostración se deja como ejercicio para el estudiante

Ahora consideremos las rectas paralelas ℓ y m, intersecadas por la transversal t. Asignémosle una letra a cada uno de los 8 ángulos de la figura formada.



1ª $\angle a \cong \angle e$, $\angle c \cong \angle g$, $\angle b \cong \angle f$ y $\angle d \cong \angle h$.
Por ser ángulos correspondientes.

2ª $\angle c \cong \angle f$ y $\angle d \cong \angle e$

Por ser ángulos alternos internos

3ª $\angle a \cong \angle h$ y $\angle b \cong \angle g$

Por ser ángulos alternos externos

4ª También se puede afirmar que: $\angle a \cong \angle d$, $\angle b \cong \angle c$, $\angle e \cong \angle h$, $\angle f \cong \angle g$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

5ª) Y además que:

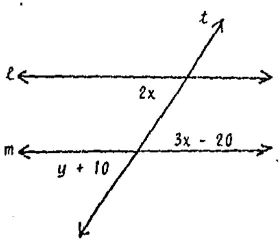
$\measuredangle a + \measuredangle b = 180°$, $\measuredangle b + \measuredangle d = 180°$, $\measuredangle d + \measuredangle c = 180°$,

$\measuredangle c + \measuredangle a = 180°$, $\measuredangle e + \measuredangle f = 180°$, etc.

ya que son ángulos adyacentes (los ángulos adyacentes son suplementarios).

Ejemplos ilustrativos.- En los casos siguientes, hallar x, y. Dar el fundamento de cada una de las ecuaciones que se obtienen con base al diagrama.

a) $\ell \parallel m$



Solución:

1ª) $3x - 20 = 2x$ Por ser <s alternos internos.

$3x - 2x = 20$

$\therefore\ x = 20$

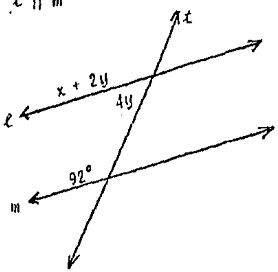
2ª) $y + 10 = 2x$ Son <s correspondientes.

$y + 10 = 2(20)$ Sustituyendo

$y + 10 = 40$

$y = 40 - 10 \quad \therefore\ y = 30$

b) $\ell \parallel m$



Solución:

1ª) $4y + 92° = 180$ Son <s colaterales internos.

$4y = 180° - 92°$

$4y = 88° \quad \therefore\ y = 22°$

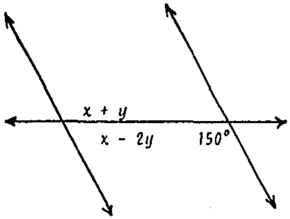
2ª) $x + 2y = 92°$ Son <s correspondientes.

$x + 2(22°) = 92°$ Sustituyendo.

$x + 44° = 92°$

$x = 92° - 44° \quad \therefore\ x = 48°$

c)



Solución:

1ª) $x + y = 150°$ Son <s alternos internos.

$x - 2y + 150° = 180°$ Son <s colaterales internos.

$$x + y = 150°$$

$$x - 2y = 180° - 150°$$

$$x + y = 150° \quad (1)$$

$$x - 2y = 30° \quad (2)$$

Resolver el sistema de ecuaciones, multipliquemos la (1) por 2 y la (2) por 1 .

$$\begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & 300° \\ x - 2y & = & 30° \\ \hline 3x & = & 330° \end{array}$$

$$x = \frac{330°}{3} \quad \therefore \quad x = 110°$$

Sustituyendo a x en la ecuación (1)

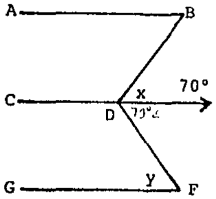
$$110° + y = 150°$$

$$y = 150° - 110°$$

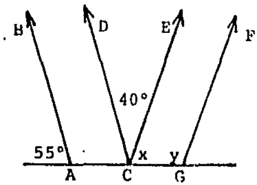
$$\therefore \quad y = 40°$$

Ejercicio 2.7. Calcule x,y en cada caso.

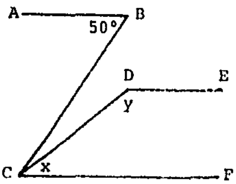
a) $\overline{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} \parallel GF$



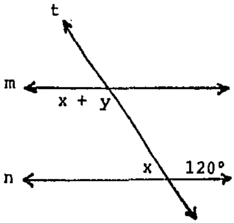
b) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{GF}$



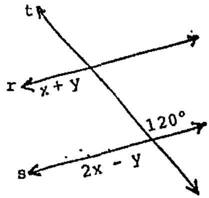
c) $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, $\overline{DE} \parallel \overline{CF}$



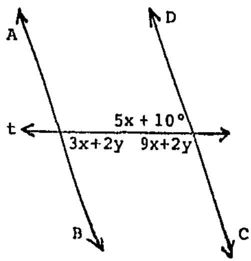
d) $m \parallel n$



e) $r \parallel s$

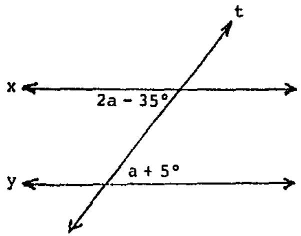


f) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

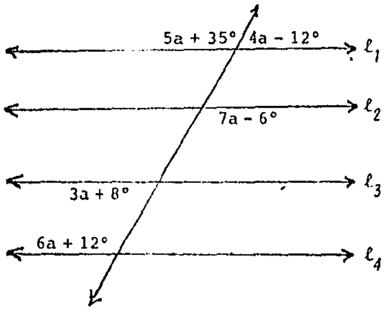


Ejercicio 2.8.

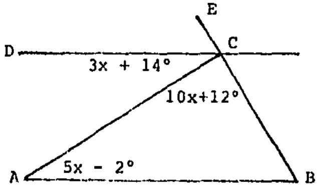
a) x , y y t son líneas rectas. ¿Es $x \parallel y$?



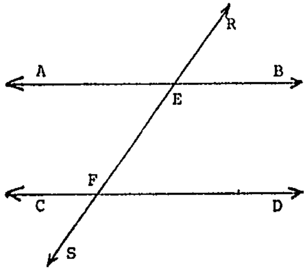
b) En la siguiente figura, ¿cuáles líneas son paralelas?



c) En la figura, BCE es una línea recta y $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$. Encuentre el valor de x de la siguiente figura y $\angle$ BCA y $\angle$ ECD .

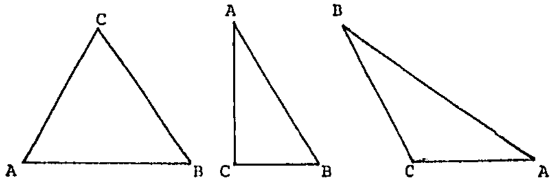


d) $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son cortadas por la transversal RS, - como se muestra en la figura. Si $\angle AER = 2x + 16°$ y $\angle DFS = 3x - 31°$. Calcular x, $\angle CEF$ y $\angle AEF$.



2.16. TRIANGULOS.

Figuras como estas, les llamaremos Triángulos.



Si A, B y C son tres puntos no colineales, entonces - $(\overline{AB} \cup \overline{BC}) \cup \overline{CA}$ es el "triángulo ABC". En lugar de la palabra "triángulo" se utiliza el símbolo Δ . Lo anterior se denota " ΔABC". Los puntos A,B y C son los vértices del ΔABC .

Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ se llaman lados del triángulo. En el ΔABC, tenemos los ángulos $\angle CAB$, $\angle ABC$ y $\angle BCA$, o simplemente $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.

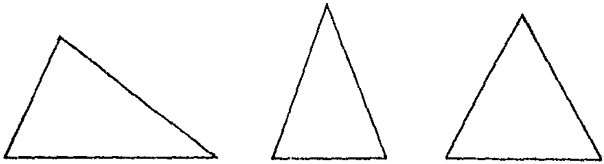
2.17. CLASIFICACION DE TRIANGULOS.

Los triángulos los podemos clasificar por las longitudes de sus lados en equilátero, isósceles y escaleno.

Un triángulo es escaleno si y sólo sí no tiene lados que sean congruentes.

Un triángulo es isósceles si y sólo sí tiene dos lados congruentes.

Un triángulo es equilátero si y sólo sí tiene tres lados congruentes.



Δ Escaleno Δ Isósceles Δ Equilátero

Cuando un triángulo es isósceles, en él se puede considerar lo siguiente:

a) Al lado de diferente longitud se le llama base del triángulo.

b) A los lados congruentes se le oponen ángulos congruentes.

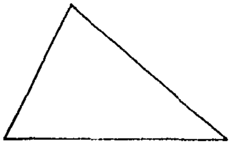
c) Los ángulos congruentes se les llama ángulos de la base.

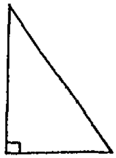
Los triángulos por la medida de sus ángulos se clasifican en: acutángulos, rectángulos y obtusángulos.

Un triángulo es acutángulo si y sólo sí tiene sus tres ángulos agudos.

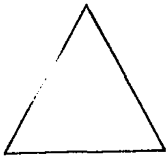
Un triángulo, es un triángulo rectángulo si y sólo sí - tiene un ángulo recto.

Un triángulo es obtusángulo si y sólo sí tiene un ángulo obtuso.


Δ Acutángulo


Δ Rectángulo


Δ Obtusángulo


Δ Equiángulo

Un triángulo es equiángulo si y sólo sí tiene sus tres-ángulos congruentes.

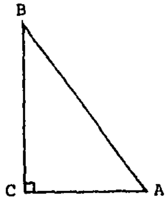
En un triángulo rectángulo se considera lo siguiente:

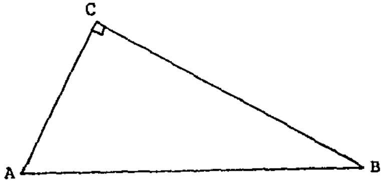
a) Los lados que forman el ángulo recto reciben el - nombre de catetos.

b) El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa.

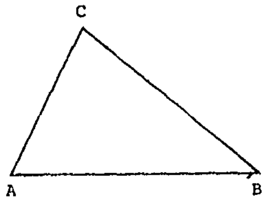
c) En todo triángulo rectángulo, la hipotenusa es el lado mayor.

En cada uno de los triángulos siguientes: $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son los catetos y $\overline{AB}$ es la hipotenusa.



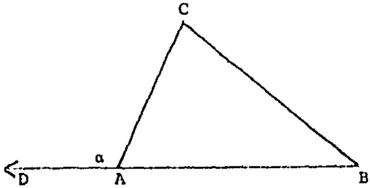


Consideremos el $\triangle ABC$:

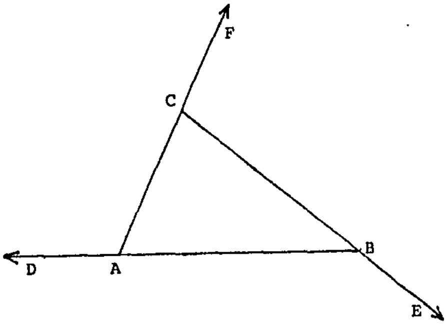


Los ángulos $\angle CAB$, $\angle ABC$ y $\angle BAC$ ó simplemente $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ son ángulos internos del $\triangle ABC$.

Ahora, si prolongamos el lado $\overline{AB}$ como se muestra en la figura siguiente, formamos un ángulo externo $\angle CAD$.



Si hacemos lo mismo, en los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, tendremos los ángulos externos $\angle ABE$ y $\angle BCF$.



Podemos observar que un ángulo externo de un triángulo se forma con un lado del triángulo y la prolongación del otro lado.

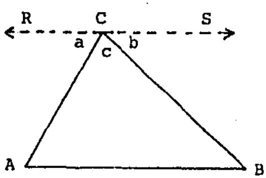
Con estos preliminares, procederemos a demostrar los siguientes teoremas.

2.18. TEOREMAS. DEMOSTRACIONES.

En esta sección presentamos algunas demostraciones relativas a los ángulos internos y externos de un triángulo.

La aceptación del postulado de las paralelas, hace posible la demostración del teorema siguiente:

Teorema 7.- La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180° .



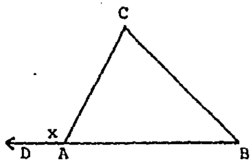
Hipótesis: El $\triangle$ ABC es un triángulo cualesquiera.

Tesis: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Demostración:

a) $\triangle$ ABC es un triángulo cualesquiera.	a) Hipótesis.
b) Por C trazar $\overleftrightarrow{RS} \parallel \overline{AB}$	b) Trazo auxiliar.
c) $\angle A = \angle a$	c) Son <s alternos internos.
d) $\angle B = \angle b$	d) Son <s alternos internos.
e) $\angle C = \angle c$	e) Es el mismo ángulo.
f) $\angle A + \angle B + \angle C = \angle a + \angle b + \angle c$	f) Sumando miembro a miembro las igualdades.
g) $\angle a + \angle b + \angle c = 180°$	g) Forman un ángulo llano.
h) $\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180°$	h) Propiedad transitiva de la igualdad.

Teorema 8.- La medida de cualquiera de los ángulos externos de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes a él.



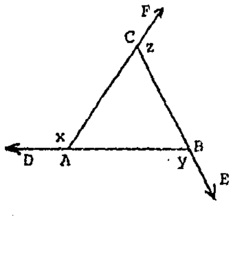
Hipótesis: $\angle x$ es un ángulo externo del $\triangle ABC$.

Tesis: $\measuredangle x = \measuredangle B + \measuredangle C$.

Demostración:

a) $\measuredangle x + \measuredangle BAC = 180°$	a) Son $\angle$s adyacentes.
b) $\measuredangle BAC + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$	b) Teorema anterior.
c) $\measuredangle x + \measuredangle BAC = \measuredangle BAC + \measuredangle B + \measuredangle C$	c) Propiedad transitiva de la igualdad.
d) $\therefore \measuredangle x = \measuredangle B + \measuredangle C$	d) Propiedad del elemento inverso aditivo.

Teorema 9.- La suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo es 360° .



Hipótesis: $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$ son ángulos externos del $\triangle ABC$.

Tesis: $\measuredangle x + \measuredangle y + \measuredangle z = 360°$

Demostración:

a) $\measuredangle x + \measuredangle BAC = 180°$	a) Son ángulos adyacentes.
b) $\measuredangle y + \measuredangle ABC = 180°$	b) La misma razón.
c) $\measuredangle z + \measuredangle ACB = 180°$	c) Misma razón anterior.
d) $\measuredangle x + \measuredangle y + \measuredangle z + \measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 540°$	d) Sumando miembro a miembro las igualdades.
e) $\measuredangle x + \measuredangle y + \measuredangle z + 180° = 540°$	e) Teorema de los ángulos internos de un .
f) $\therefore \measuredangle x + \measuredangle y + \measuredangle z = 360°$	f) Propiedad del elemento inverso aditivo.

Enunciaremos los siguientes corolarios:

Corolario 1.- En un triángulo, sólo un ángulo puede ser recto o bien obtuso.

Corolario 2.- Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

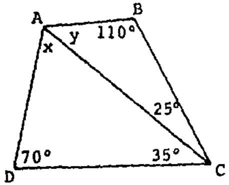
Las demostraciones de estos corolarios se dejan al estudiante como ejercicio.

Es conveniente aclarar que un corolario es una proposición que surge como consecuencia de otro proposición, en este caso , de un teorema.

Ahora, procederemos a presentar algunos ejemplos en los que se aplicarán los teoremas o corolarios anteriores.

Ejemplos ilustrativos.- En los casos siguientes, hallar x, y .

a)



Solución:

1ª) $x + 35° + 70° = 180°$ Teorema de los ángulos internos de un triángulo.

$x + 105° = 180°$

$x = 180° - 105°$

$\therefore \quad x = 75°$

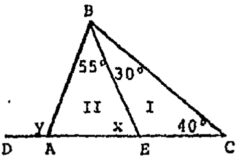
2ª) $y + 110° + 25° = 180°$ La misma razón anterior.

$y + 135° = 180°$

$y = 180° - 135°$

$\therefore \quad y = 45°$

b)



Solución:

1ª) x es ∢ externo al Δ I. Teorema del ángulo externo.

$x = 30° + 40°$

$x = 70°$

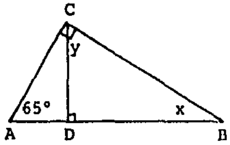
2ª) y es ∢ externo de Δ ABC .

$y = (55° + 30°) + 40°$

$y = 85° + 40°$

$\therefore \quad y = 125°$

c)



Solución:

1ª) En el Δ ABC

$x + 65° = 90°$ — Los ángulos agudos de un Δ rectángulo son complementarios.

$x = 90° - 65°$

$\therefore \quad x = 25°$

2ª) En el Δ BCD

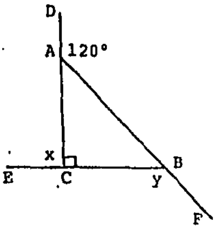
$x + y = 90°$ — La misma razón anterior.

Sustituyendo a x .

$25° + y = 90°$

$\therefore \quad y = 65°$

d)



Solución:

1ª) Como $\overline{DC} \perp \overline{EB}$

$x = 90°$

2ª) $x + y + 120° = 360°$ — Teorema de los ángulos externos de un triángulo.

Sustituyendo a x .

$90° + y + 120° = 360°$

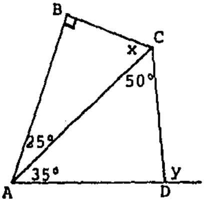
$210° + y = 360°$

$y = 360° - 210°$

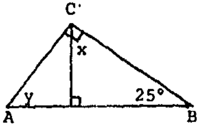
$y = 150°$

Ejercicio 2.9.- En los casos siguientes, hallar x, y .

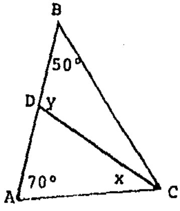
a)



b)

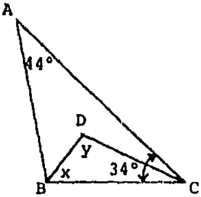


c)



$\overline{CD}$ biseca < C

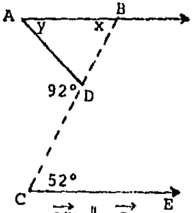
d)



$\overline{BD}$ biseca < B

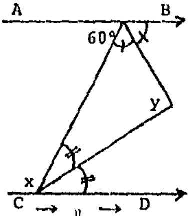
$\overline{CD}$ biseca < C

e)



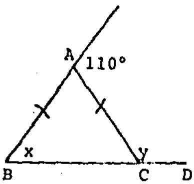
$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CE}$

f)

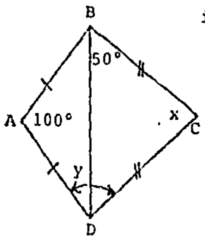


$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

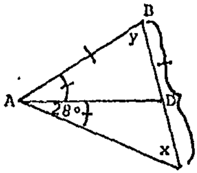
g)



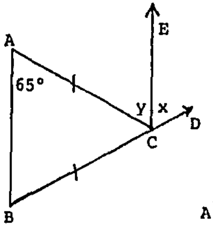
h)



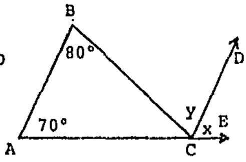
i)



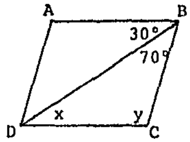
j) $\overline{AB} \parallel \overrightarrow{CE}$, AC=BC



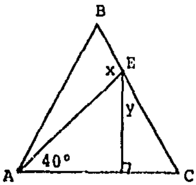
k) $\overline{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$



l) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

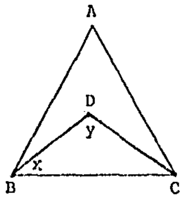


m)



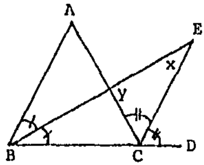
EL Δ ABC es equilátero.

n)



El Δ ABC es equilátero. $\overline{BD}$ biseca < B y $\overline{CD}$ biseca a <C .

o)



El Δ ABC es equilátero.

UNIDAD 3. CONGRUENCIA

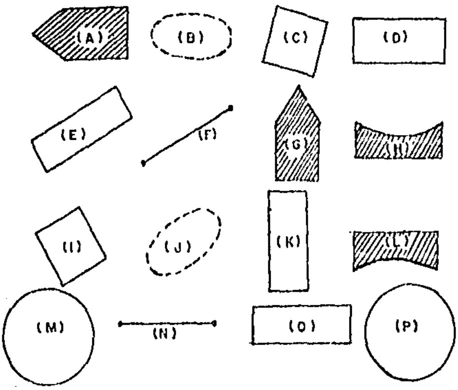
Un concepto común en la vida diaria es el de tamaño y tamaños comparativos. Frecuentemente hablamos de dos cosas que tienen el mismo tamaño. En geometría - se usa la palabra congruente para definir lo que decimos que tienen la "misma - forma y el mismo tamaño". Es decir, podemos pensar que en dos figuras congruentes, una fuese un duplicado de la otra.

La industría produce miles de partes ya sea para reemplazar o construir - máquina, cada parte se hace mediante una manufactura de precisión para que tenga exactamente el mismo tamaño y forma. Por ejemplo, en el caso de reparar una máquina, es importante que las partes de reemplazo necesarias ajusten exactamente con las partes originales.

En esta unidad estudiaremos la geometría de las figuras que tienen el mismo tamaño y la misma forma.

3.1. FIGURAS CONGRUENTES

En la siguiente, figura si se pide al alumno que encuentre pares de figuras congruentes:



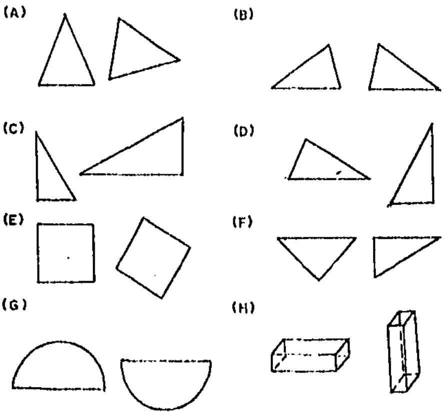
La respuesta es: las parejas congruentes son: (a) y (g); (b) y (j); (c) e (i); (d) y (k); (e) y (o); (f) y (n); (h) y (l); (m) y (p).

Considerando lo anterior, Podemos enunciar la siguiente:

Definición.- Dos figuras son congruentes cuando tienen el mismo tamaño y la misma forma

Las figuras congruentes pueden hacerse coincidir, partes por parte. Las partes que coinciden se llaman partes correspondientes. Debemos recordar que el símbolo para denotar congruencia es $\cong$, que es la combinación de dos símbolos =, que significa "Tener el mismo tamaño", y $\sim$ que significa "Tener la misma forma". (Este símbolo ya se utilizó anteriormente en la congruencia de segmentos y congruencia de ángulos) Por ejemplo, si denotamos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, esto indica que $\triangle ABC$ es congruente a $\triangle DEF$.

Ejercicios 3.1. ¿Cuáles de los siguientes pares de figuras son congruentes?



A continuación, enunciaremos algunos teoremas los cuáles son consecuencias directas del sistema de los números reales, que nos auxiliarán en las demostraciones que se realicen posteriormente en esta unidad.

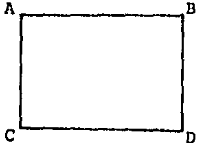
3.2. TEOREMAS DE CONGRUENCIA PARA SEGMENTOS.

Teorema reflexivo.- Todo segmento es congruente a si mismo.

P Q $\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$

Teorema Simétrico.- Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.

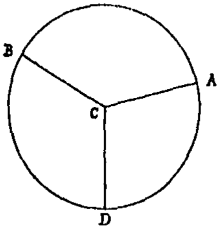
Ejemplo:



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

Teorema transitivo.- Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

Ejemplo:



$\overline{CA} \cong \overline{CB}$ $\overline{CB} \cong \overline{CD}$,

entonces $\overline{CA} \cong \overline{CD}$.

3.3. TEOREMAS DE CONGRUENCIA PARA ANGULOS.

Teorema reflexivo.- Todo ángulo es congruente a si mismo.

Por ejemplo: $\angle A \cong \angle A$

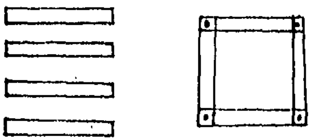
Teorema simétrico.- Si $\angle A \cong \angle B$, entonces $\angle B \cong \angle A$.

Teorema transitivo.- Si $\angle A \cong \angle B$ y $\angle B \cong \angle C$, entonces $\angle A \cong \angle C$.

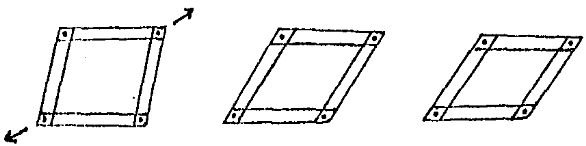
3.4. CONGRUENCIA DE TRIANGULOS.

En esta unidad, solo se tratará la congruencia de triángulos, antes de explicar el por qué, observemos lo siguiente:

Si con cuatro tiras de madera formamos un cuadrado, usando en cada unión un tornillo, éste tendrá "juego", es decir:

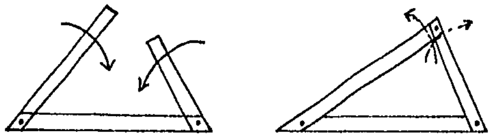


Si jalamos hacia afuera de dos de sus vértices opuestos,- el cuadrado se deforma y obtenemos otros cuadriláteros, como se muestra a continuación:



Lo mismo sucede para una figura de cinco lados, y lo mismo para una de seis lados, etc.

En cambio, si con tres tiras de madera construimos un -- triángulo, con las mismas condiciones similares del ejemplo anterior:



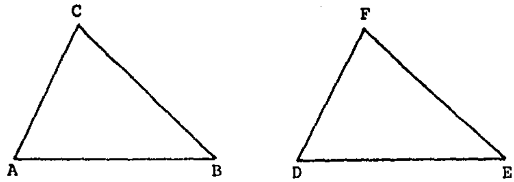
Por más que jalemos hacia afuera el triángulo no puede deformarse (a no ser que se rompa).

Esto nos muestra que el triángulo es una figura geométrica sencilla y además rígida (no se puede deformar), a diferencia de los polígonos de más de tres lados.

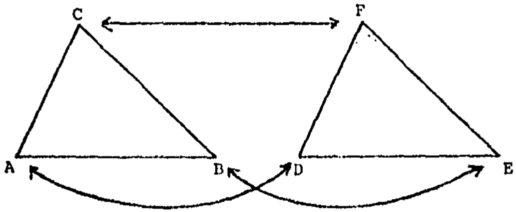
Por lo anterior expuesto y considerando que cualquier polígono se puede triangular, solamente se tratará la congruencia de triángulos.

La congruencia de segmentos y la congruencia de ángulos - son definidos en términos de sus medidas. Podemos decir que -- dos segmentos son congruentes si sus longitudes son iguales y también que dos ángulos son congruentes si sus medidas son - iguales. Ahora ampliaremos estos conceptos de congruencia a figuras geométricas como son los triángulos. Es decir, cuando - los triángulos son congruentes.

Las figuras congruentes, pueden hacerse coincidir parte - por parte. Por ejemplo, consideremos los triángulos $\triangle ABC$ y - $\triangle DEF$.



Si es posible mover los triángulos de manera que los tres vértices y los tres lados del Δ ABC se ajusten exactamente a los tres vértices y a los tres lados del Δ DEF, los triángulos son mútuamente congruentes. Entonces se puede afirmar que Δ ABC $\cong$ Δ DEF. Debe entenderse que no es necesario que los triángulos se muevan materialmente, sino que el movimiento se hace de modo abstracto, es decir mentalmente.



En la figura anterior, se establece una correspondencia entre los vértices y los lados de los triángulos. Esta es una correspondencia biunívoca. Las partes apareadas se llaman partes correspondientes. De esta manera, podemos hablar de lados correspondientes y de ángulos correspondientes. También se puede decir lados homólogos y ángulos homólogos.

La correspondencia entre los vértices se puede expresar así:

A $\leftrightarrow$ D B $\leftrightarrow$ E C $\leftrightarrow$ F

Esta se puede simplificar $ABC \longleftrightarrow DEF$.

La correspondencia entre sus lados es:

$$\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{DE} \quad , \quad \overline{BC} \longleftrightarrow \overline{EF} \quad \text{y} \quad \overline{AC} \longleftrightarrow \overline{DE}$$

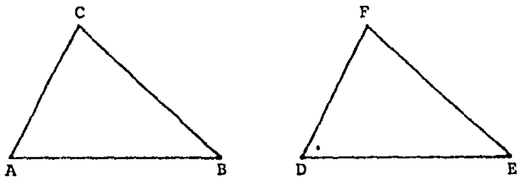
La correspondencia entre los ángulos es:

$$\angle A \longleftrightarrow \angle D \quad , \quad \angle B \longleftrightarrow \angle E \quad \text{y} \quad \angle C \longleftrightarrow \angle F$$

Dada una correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ entre los vértices- de dos triángulos, si cada par de lados correspondientes son -- congruentes, y si cada par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ es una con-- gruencia entre los dos triángulos.

Definición.- Dos triángulos son congruentes, si al establecer una correspondencia biunívoca - entre los vértices, los lados correspondientes son congruentes y los ángulos correspondientes son congruentes.

Si se tiene que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, se está afirmando que la correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$, es una congruencia.



Con esto, se cumple lo siguiente:

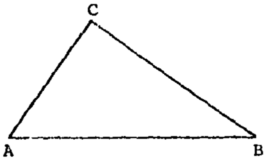
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$	o sea	$AB = DE$
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$	o sea	$BC = EF$
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$	o sea	$AC = DF$

Y también que:

$\angle A \cong \angle D$	o	$\measuredangle A = \measuredangle D$
$\angle B \cong \angle E$	o	$\measuredangle B = \measuredangle E$
$\angle C \cong \angle F$	o	$\measuredangle C = \measuredangle F$

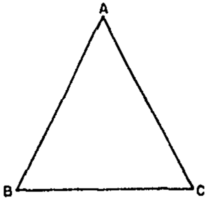
Debe ser evidente que un triángulo puede hacerse coincidir consigo mismo, es decir, cada vértice se aparea por sí mismo. La correspondencia biunívoca en la cual cada vértice se -- aparea por sí mismo, se le llama congruencia identidad.

Por lo tanto $ABC \longleftrightarrow ABC$, es un congruencia identidad.

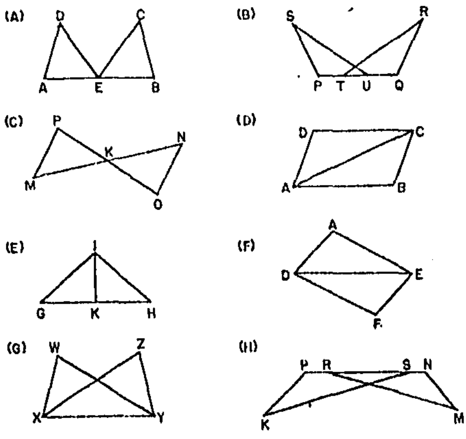


Sin embargo, podemos emplear la correspondencia $ABC \longleftrightarrow ACB$.

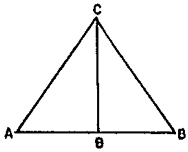
Con esta correspondencia, la figura se hace coincidir con ella misma, pero se intercambian los vértices B y C. Esto no se cumple para todos los triángulos, es válido solamente cuando el triángulo tiene al menos dos lados con la misma longitud, es decir cuando el triángulo es isósceles o equilátero.

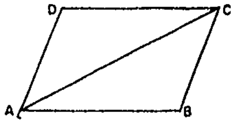


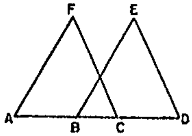
Ejercicio 3.2. Los triángulos en cada uno de los siguientes pares de figuras son congruentes. Escríbanse las congruencias para cada par. Por ejemplo, la primera es AED $\longleftrightarrow$ BEC.

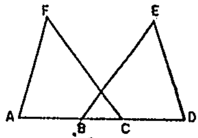


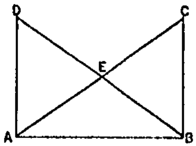
Ejercicio 3.3.- En cada una de las siguientes figuras usa una regla y un transportador para hallar los triángulos que parecen ser congruentes. A continuación indique las parejas de lados y ángulos en los triángulos que parecen corresponder en una congruencia.

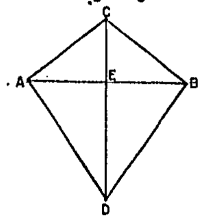




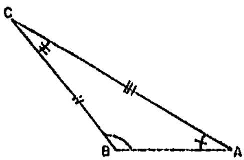


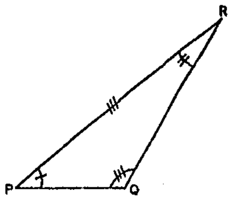






En las figuras, a veces es conveniente indicar congruencia entre segmentos y ángulos de la siguiente manera:





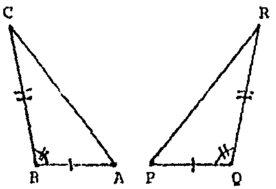
En este caso las marcas indican que: $AB = PQ$, $BC = QR$, $AC = PR$ y $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$.

Por lo tanto, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.

3.5. POSTULADOS DE CONGRUENCIAS DE TRIANGULOS.

En algunos casos, se puede probar la congruencia entre los triángulos, sólo con una información parcial, para ello analizaremos los siguientes criterios de congruencia de triángulos, a los cuales le llamaremos postulados de congruencia de triángulos.

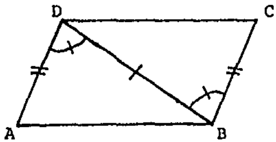
POSTULADO L.A.L. (lado, ángulo, lado). Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo que forman en uno son, respectivamente, congruentes a los dos lados y el ángulo que forman en el otro.



Si $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{BC} \cong \overline{QR}$ y $\angle B \cong \angle Q$, entonces, Δ $ABC \cong PQR$.

Mostraremos algunos ejemplos en los que se aplicará este Postulado.

Ejemplo ilustrativo 1.- En la siguiente figura, ý, con la información dada. Demuestre que $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.



En la figura se indica que:

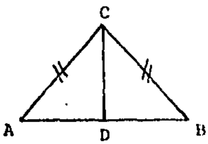
$$\overline{AD} \cong \overline{BC}$$

$$\angle ADB \cong CBD$$

$$\overline{BD} \cong \overline{BD}$$

$\therefore \quad \triangle ADB \cong \triangle CBD$ Postulado L.A.L.

Ejemplo ilustrativo 2.- La bisectriz de un triángulo isósceles lo divide en dos triángulos congruentes.



Hipótesis: El $\triangle ABC$ es isósceles; $\overline{CD}$ biseca a $\angle ACB$.

Tesis: $\triangle ADC \cong \triangle BDC$

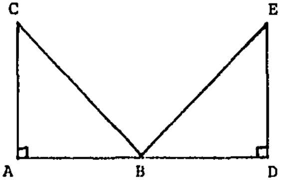
Demostración:

a) $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	a) Hipótesis.
b) $\overline{CD} \cong \overline{CD}$	b) Teorema reflexivo de la congruencia de segmentos.
c) $\angle ACD \cong \angle BCD$	c) $\overline{CD}$ biseca a $\angle ACD$.
d) $\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDC$	d) Postulado L.A.L.

Ejemplo ilustrativo 3.

Hipótesis: $\overline{AC} \perp \overline{AB}$; $\overline{DE} \perp \overline{BD}$; $\overline{AC} \cong \overline{DE}$; B es punto medio de $\overline{AD}$.

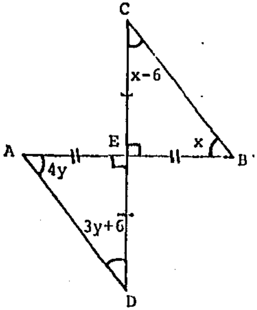
Conclusión: $\angle C \cong \angle E$.



Demostración:

a) $\overline{AC} \cong \overline{DE}$	a) Hipótesis.
b) $\angle CAB \cong \angle EDC$	b) Son <s rectos, pues $\overline{AC} \perp \overline{AB}$ y $\overline{DE} \perp \overline{BD}$.
c) $\overline{AB} \cong \overline{DB}$	c) B es punto medio de $\overline{AD}$.
d) $\therefore$ $\triangle CAB \cong \triangle EDB$	d) Postulado L.A.L.
e) $\therefore$ $\angle C \cong \angle E$	e) Angulos homólogos de triángulos congruentes.

Ejemplo ilustrativo 4.- Con los datos que se indican en la figura siguiente, calcule x, y .



$\triangle AED \cong \triangle BEC$ (Postulado L.A.L.)

Como $\angle A \cong \angle B$, entonces:

$$4y = x \qquad (1)$$

También, $\angle D \cong \angle C$:

$$3y + 6 = x - 6 \qquad (2)$$

Se tiene un sistema de ecuaciones lineales:

$$x = 4y \qquad (1)$$
$$x - 6 = 3y + 6 \qquad (2)$$

Aplicando el método por sustitución:

Sustituyendo "x" de (1) en (2):

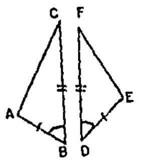
$$4y - 6 = 3y + 6$$
$$4y - 3y = 6 + 6$$
$$\therefore \quad y = 12$$

Sustituyendo "y" en (1):

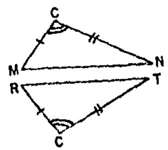
$$x = 4(12)$$
$$\therefore \quad x = 48$$

Por lo tanto $x = 48$, $y = 12$.

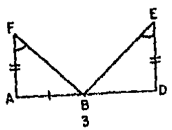
Ejercicio 3.4. - Los triángulos de cada uno de los siguientes problemas están marcados para mostrar los lados y los ángulos congruentes. Indique los pares de triángulos que puede probarse que son congruentes, mediante el postulado L.A.L.



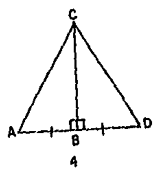
1



2

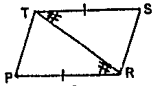


3



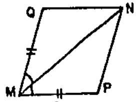
4

5



6

7

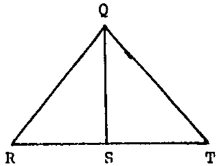


8

Ejercicio 3.5. - Efectúe las siguientes demostraciones:

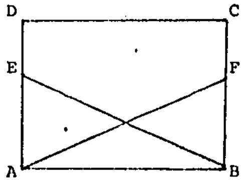
1.- Hipótesis: $\overline{QS} \perp \overline{RT}$; S biseca a $\overline{RT}$.

Conclusión: $\triangle RSQ \cong \triangle TSQ$



2.- Hipótesis: $\angle DAB \cong \angle CBA$; $\overline{EA} \cong \overline{BF}$

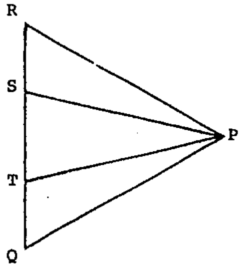
Tesis: $\triangle ABE \cong \triangle BAF$



3.- Hipótesis: $\overline{RS} \cong \overline{QT}$, $\overline{PS} \cong \overline{PT}$

$\angle RTP \cong \angle QSP$

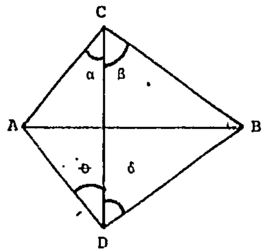
Tesis: $\triangle RTP \cong \triangle QSP$



4.- Hipótesis: $\overline{AC} \cong \overline{AD}$; $\overline{BC} \cong \overline{BD}$

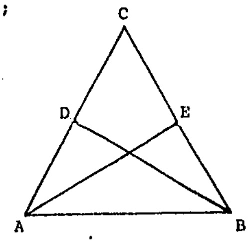
$\angle\alpha \cong \angle\theta$; $\angle\beta \cong \angle\delta$

Conclusión: $\triangle ABC \cong \triangle ABD$



5.- Hipótesis: El $\triangle ABC$ es isósceles; $\overline{AC} \cong \overline{BC}$; D el punto medio de $\overline{AC}$; E el punto medio de $\overline{BC}$.

Tesis: $\triangle ACE \cong \triangle BCD$



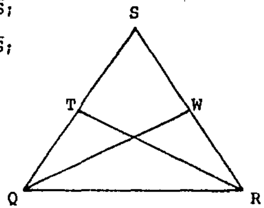
6.- Hipótesis: ΔQRS, con $\angle SQR \cong \angle SRQ$;

T el punto medio de $\overline{QS}$;

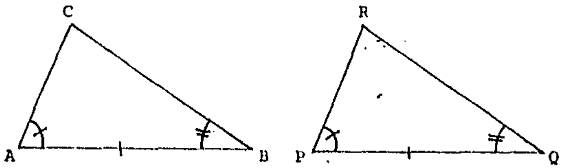
W el punto medio de $\overline{RS}$;

$\overline{QS} \cong \overline{RS}$.

Tesis: $\Delta TQR \cong \Delta WRQ$



POSTULADO A.L.A. (ángulo, lado, ángulo). Si dos triángulos tienen dos ángulos y el lado incluido de uno congruentes a los dos ángulos y el lado incluido correspondientes del otro, los triángulos son congruentes.

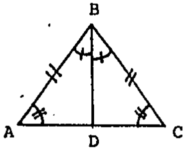


$\angle A \cong \angle P$, $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\angle B \cong \angle Q$, $\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$.

Se aplicará este postulado en cada uno de los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.- Con la información dada en la figura. Demuestre que $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

En la figura se tiene que:



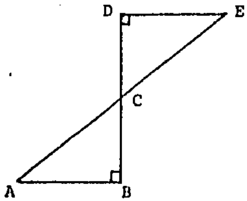
$\angle A \cong \angle C$

$\overline{AB} \cong \overline{CB}$

$\angle ABD \cong \angle CBD$

$\therefore\ \triangle ABD \cong \triangle CBD$ Postulado A.L.A.

Ejemplo 2.- Si $\overline{DE} \perp \overline{BD}$; $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ y C es punto medio de $\overline{BD}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle EDC$.



Hipótesis: $\overline{DE} \perp \overline{BD}$; $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ y C es punto medio de $\overline{BD}$.

Tesis: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$

Demostración:

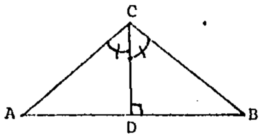
a) $\angle EDC \cong \angle ABC$ — a) Son $\angle$s rectos, ya que $\overline{DE} \perp \overline{BD}$ y $\overline{AB} \perp \overline{BD}$.

b) $\overline{DC} \cong \overline{BC}$ — b) C es punto medio de BD .

c) $\angle ECD \cong \angle ACB$ — c) Son $\angle$s opuestos por el vértice.

d) $\therefore\ \triangle ABC \cong \triangle EDC$ — d) Postulado A.L.A.

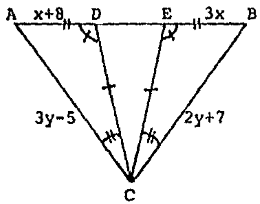
Ejemplo 3.- Si $\overline{CD}$ biseca $\angle ACB$ y $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Demuestre que $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.



Demostración:

a) $<ACD \cong <BCD$	a) $\overline{CD}$ biseca a $<ACB$.
b) $\overline{CD} \cong \overline{CD}$	b) Teorema reflexivo de la congruencia de segmentos.
c) $<ADC \cong <BDC$	c) Son $<$s rectos. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.
d) $\therefore$ $\triangle ACD \cong \triangle BCD$	d) Postulado A.L.A.
e) $\therefore$ $\overline{AD} \cong \overline{BD}$	e) Partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

Ejemplo 4.- En la figura $\triangle ADC \cong \triangle BEC$ (Postulado A.L.A.). Con los datos que se indican, calcule x, y .



1ª) $\overline{AD} \cong \overline{BE}$, entonces:

$$x + 8 = 3x$$

Resolviendo

$$x - 3x = -8$$

$$-2x = -8$$

$$x = \frac{-8}{-2}$$

$$\therefore \quad x = 4$$

2ª) Como $AC \cong BC$, entonces:

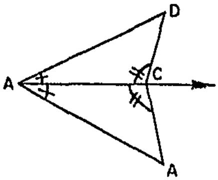
$$3y - 5 = 2y + 7$$

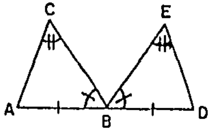
$$3y - 2y = 7 + 5$$

$$\therefore \quad y = 12$$

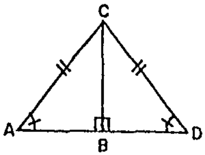
Así tenemos que: $x = 4$, $y = 12$

Ejercicio 3.6. - Los triángulos de cada uno de los diez problemas siguientes están marcados para mostrar los lados y los ángulos congruentes. Indica los pares de triángulos que mediante el postulado A.L.A., puede probarse que son congruentes.

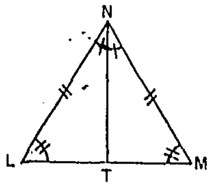




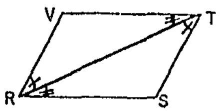
2



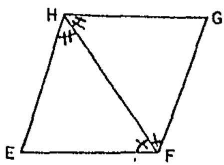
3



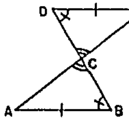
4



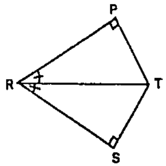
5



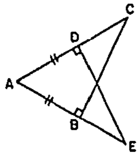
6



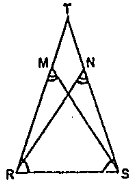
7



8



9



10

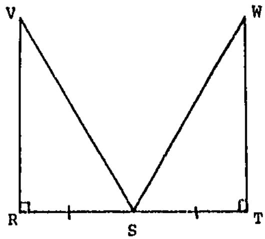
Ejercicio 3.7. - Efectúe las demostraciones de los ejercicios siguientes:

1.- Hipótesis: $\overline{VR} \perp \overline{RT}$; $\overline{WT} \perp \overline{RT}$

S es punto medio de $\overline{RT}$.

$\angle RSV \cong \angle TSW$

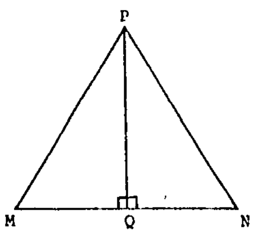
Conclusión: $\triangle RSV \cong \triangle TSW$



2.- Datos: $\overline{PQ}$ biseca al $\angle MPN$

$\overline{PQ} \perp \overline{MN}$

Demuestre que: $\triangle MQP \cong \triangle NQP$

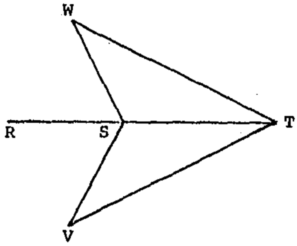


3.- Datos: R, S, T son colineales

$\measuredangle$ RSW $=$ $\measuredangle$ RSV

$\measuredangle$ RTW $=$ $\measuredangle$ RTV

Demostrar: Δ STW $\cong$ ΔSTV



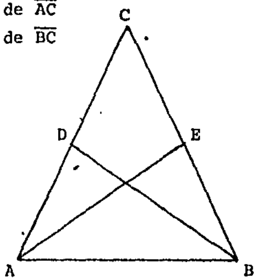
4.- Hipótesis: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

D es el punto medio de $\overline{AC}$

E es el punto medio de $\overline{BC}$

$<$ AEC $\cong$ $<$BDC

Conclusión: Δ AEC $\cong$ Δ BDC



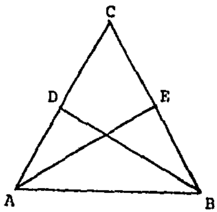
5.- Datos: ΔABC es equiángulo.

D es el punto medio de $\overline{AC}$

E es el punto medio de $\overline{BC}$

$<$ABD $\cong$ $<$BAE

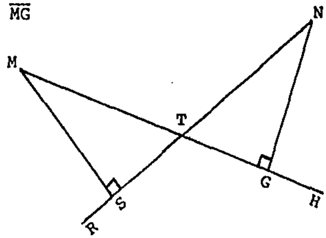
Demostrar que: Δ ABD $\cong$ ΔBAE



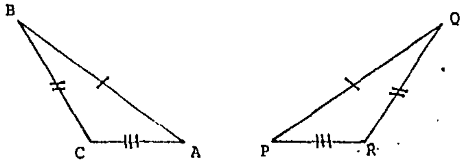
6.- Hipótesis: $\overline{MS} \perp \overline{SN}$; $\overline{NG} \perp \overline{MG}$

$\overline{ST} \cong \overline{TG}$

Tesis: $\Delta\, STM \cong \Delta\, GTN$



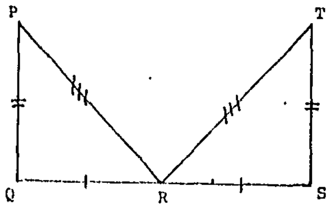
POSTULADO L.L.L. (lado, lado, lado). Si los lados de un triángulo son congruentes a los lados correspondientes del otro, los triángulos son congruentes entre sí.



$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{BC} \cong \overline{QR}$, $\overline{AC} \cong \overline{PR}$ $\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.

Efectuaremos las siguientes demostraciones, aplicando el postulado L.L.L.

Ejemplo ilustrativo 1.- Demuestre que $\Delta\, PQR \cong \Delta\, TSR$.

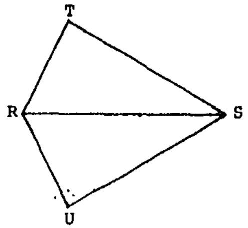


En la figura se muestra que:

$$\overline{PQ} \cong \overline{TS}$$
$$\overline{QR} \cong \overline{RS}$$
$$\overline{PR} \cong \overline{TR}$$

$\therefore$ $\Delta\, PQR \cong \Delta\, TSR$ Postulado L.L.L.

Ejemplo ilustrativo 2.



Datos: $\overline{RT} \cong \overline{RU}$; $\overline{TS} \cong \overline{US}$

Demostrar que:

i) $\Delta\, RTS \cong \Delta\, RUS$

ii) $\overline{RS}$ biseca a $\angle\, TRU$

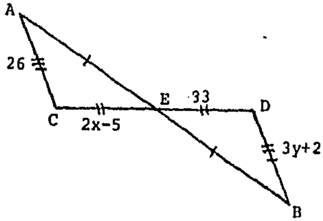
Demostración i):

a)	$\overline{RT} \cong \overline{RU}$	dato.
b)	$\overline{TS} \cong \overline{US}$	dato.
c)	$\overline{RS} \cong \overline{RS}$	teorema reflexivo para segmentos.
d)	$\therefore$ $\Delta RTS \cong \Delta RUS$	postulado L.L.L.

Demostración ii):

e)	$\Delta\, RTS \cong \Delta\, RUS$	por demostración i) .
f)	$\angle\, TRS \cong \angle\, URS$	ángulos correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.
g)	$\overline{RS}$ biseca a $\angle\, TRU$	la bisectriz divide un ángulo en -- dos ángulos congruentes.

Ejemplo ilustrativo 3.- En la figura, $\Delta AEC \cong \Delta BED$ (Postulado L.L.L.). Calcule x , y .



Como $\overline{BD} \cong \overline{AC}$, entonces

$$3y + 2 = 26.$$
$$3y = 24$$
$$y = \frac{24}{3}$$
$$\therefore \quad y = 8$$

También, $\overline{EC} \cong \overline{ED}$, por lo tanto:

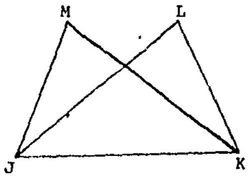
$$2x - 5 = 33$$
$$2x = 38$$
$$\therefore \quad x = 19$$

Así, se ha calculado $\boxed{x = 19}$ $\boxed{y = 8}$

Ejercicio 3.8. - Efectúe las demostraciones siguientes:

1.- Hipótesis: $\overline{JM} \cong \overline{KL}$
$\overline{JL} \cong \overline{KM}$

Tesis: (i) $\angle M \cong \angle L$
(ii) $\angle LJK \cong ?$
(iii) $\angle LKM \cong ?$

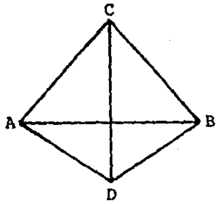


2.- Datos: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

$\overline{AD} \cong \overline{BD}$

Demostrar que:

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$



3.- Hipótesis: $\overline{RT} \cong \overline{R'T'}$

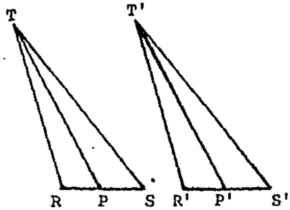
$\overline{RS} \cong \overline{R'S'}$

$\overline{TP}$ biseca a $\overline{RS}$

T'P' biseca a $\overline{R'S'}$

Tesis: i) $\triangle RPT \cong \triangle R'p'T'$

ii) $\triangle RST \cong \triangle R'S"T'$



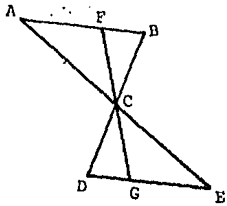
4.- Hipótesis: AE, BD y FG son líneas rectas.

$\overline{AC} \cong \overline{EC}$

$\overline{DC} \cong \overline{BC}$

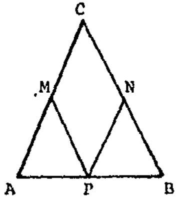
Tesis: i) $\triangle ABC \cong \triangle EDC$

ii) $\triangle AFC \cong \triangle EGC$



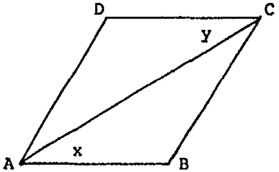
5.- Hipótesis: El $\triangle ABC$ es isósceles con M, N, P son puntos medios de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.

Tesis: $\angle APM \cong \angle BPN$

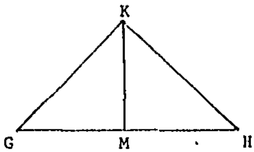


Ejercicio 3.9.

1.- En la figura siguiente, $AB = CD$ y $\measuredangle x = \measuredangle y$. Demuestre que $\measuredangle ACB = \measuredangle DAC$.



2.- Demuestre que si en el $\triangle GHK$, $GK = Hk$ y G, M, H son puntos colineales tal que $< GKM \cong < HKM$, entonces M es el punto medio de $\overline{GH}$.



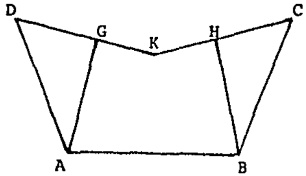
3.- Demuestre que si los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{DF}$ se bisecan en P, entonces $\triangle PDA \cong \triangle PFE$. (Deberá construirse una figura).

4.- Datos: Un segmento $\overline{RS}$ y los puntos T y U en lados opuestos de $\overleftrightarrow{RS}$ tales que $TR = UR$; $TS = US$ y $UR < US$. Demuestre que $\measuredangle T = \measuredangle U$. (Constrúyase la figura).

5.- Datos: $DG = CH$, $\angle D \cong \angle C$

$\overline{AG} \perp \overline{DK}$, $\overline{BH} \perp \overline{CK}$

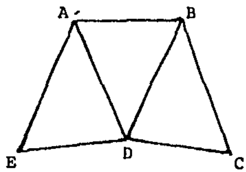
Demuestre: $AD = BC$



6.- Datos: Los puntos A, C, D y E están alineados con A-E - D y A - D - C. B es un punto que no está en $\overleftrightarrow{AC}$, - tal que $AB = CB$, $EB = DB$ y $AE = CD$.

Demostrar que: $\angle ABE \cong \angle DBC$. (Deberá construirse la figura).

7.- En la figura de la derecha, si $AE = BC$, $AD = BD$ y $DE = DC$, demostrar que- $\angle E \cong \angle C$.

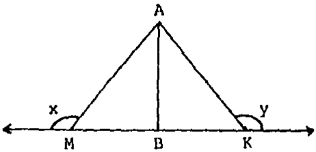


8.- En la misma figura, si $AE = BC$, $AD = BD$ y $\angle EAD \cong \angle CBD$, demuestre que: $\angle BDE \cong \angle ADC$.

9.- En la figura del problema 7, si $AE = BC$, $AD = BD$ y - $\angle E \cong \angle C$. ¿Se podrá demostrar que $ED = CD$? Si se -- puede, hágase la demostración. Si no se puede, explíquese por qué.

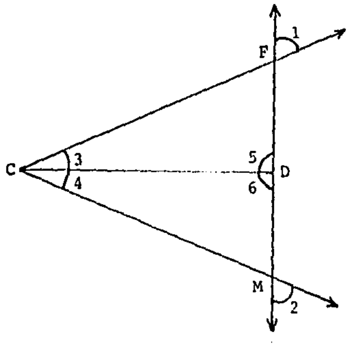
10.- En la figura del problema 7, si $\angle E \cong \angle C$, $ED = CD$ y $\angle BDE \cong \angle ADC$. ¿Se podrá demostrar que $AE = BC$? Si se puede hágase la demostración. Si no se puede, explíquese por qué.

11.- Datos: En la figura, $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{MK}$, y B el punto medio de $\overline{MK}$. Demostrar que: $\angle x \cong \angle y$.



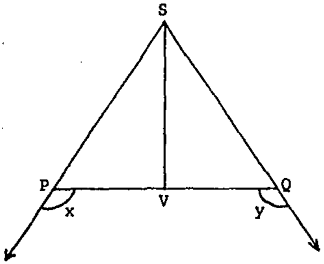
12.- Se sabe que $\overrightarrow{AE}$ biseca a $\overline{BK}$ en R tal que $AB = AK$. Demuestre que: $\overrightarrow{AE} \perp \overline{BK}$. (Constrúyase la figura).

13.- En la figura siguiente, $CF = CM$, $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 4$. Demuestre que: $\angle 5 \cong \angle 6$.

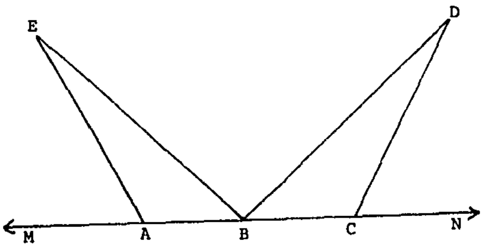


14.- Se sabe que $\overline{PQ}$ y RS se intersecan, siendo P, T, Q - puntos colineales y R, T, S también colineales tal que - RT = QT ; $\overline{PR} \perp \overline{RS}$ y $\overline{SQ} \perp \overline{PQ}$. Demuestre que $\angle P \cong \angle S$. (Constrúyase la figura).

15.- Demuestre que si en la figura PS = QS , PV = QV y - - $\angle x \cong \angle y$, entonces $\overline{SV} \perp \overline{PQ}$.

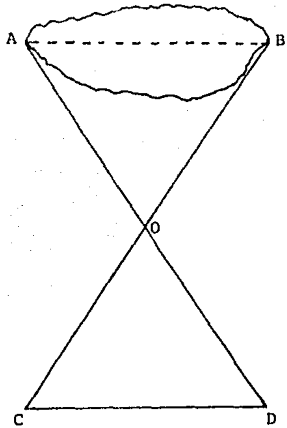


16.- En la figura siguiente, si AB = CB , $\angle MAE \cong \angle NCD$ y -- AE = CD . Demuestre que $\triangle ABE \cong \triangle CBD$.



Algunas aplicaciones sencillas de la Congruencia.

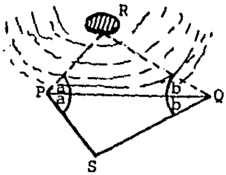
1.- En la figura, $\overline{AB}$ representa un estanque, el cual no se - puede medir directamente la longitud de $\overline{AB}$. ¿Cómo determinar la distancia AB ?.



Solución:

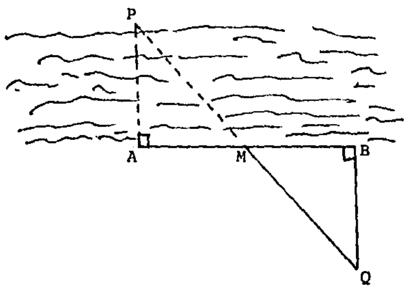
Se clava una estaca en un punto conveniente O, se miden las distancias AO y BO, se dirige la visual a lo largo de AO y BO y se clavan las estacas C y D, de tal manera - que $\overline{OA} \cong \overline{OD}$ y $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ y como el $\angle AOB \cong \angle DOC$ (ángulos- opuestos por el vértice) el $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ (Postulados L.A.L.).- Por lo tanto $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ por ser partes correspondientes de - - triángulos congruentes. Entonces AB = CD, de lo cual se puede medir $\overline{CD}$.

2.- Supongamos que se desea hallar la distancia desde un punto P de la orilla de un lago a un objeto R .



Desde P se traza $\overline{PQ}$ de longitud conveniente, y tal que desde Q se vea R . Se mira desde P y desde Q a un mismo punto R, y se señalan las visuales $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$ que forman los ángulos a y b con $\overline{PQ}$. Después se trazan los mismos ángulos al otro lado de $\overline{PQ}$, como se ve en la figura, y se prolongan hasta que se corten en S . Podemos afirmar que $\angle RPQ = \angle SPQ = a$, $PQ = PQ$ y $\angle RQP = \angle SQP = b$, por lo tanto el $\Delta RPQ = \Delta SPQ$ (POSTULADO A.L.A.). También, $PS = PR$ por ser lados correspondientes de triángulos congruentes. Entonces -- $PS = PR$, bastaría con medir $\overline{PS}$.

3.- Se desea calcular la distancia de un punto A de la orilla de un río al punto P que está al otro lado del río.

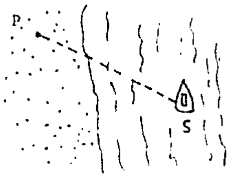


Desde el punto A directamente opuesto al punto P se camina en dirección a B y se mide $\overline{AB}$; se toma de manera que $\overline{AB}$ forme un ángulo recto con $\overline{AP}$. Se coloca una estaca en el punto medio M de $\overline{AB}$. Se camina en dirección perpendicular a $\overline{AB}$, alejándose de B hasta que se llegue a un punto Q , que esté alineado con M y con P , luego se mide $\overline{BQ}$. Podemos demostrar que $BQ = AP$.

El $\sphericalangle PAM = \sphericalangle QBM$ (son ángulos rectos), $\sphericalangle PMA = \sphericalangle QMB$ por ser ángulos opuestos por el vértice, y $\overline{AM} = \overline{BM}$, ya que M es punto medio de $\overline{AB}$. Por lo tanto $\triangle PMA = \triangle QMB$ (Postulado A.L.A.). De esto, $BQ = AP$, ya que son partes correspondientes de triángulos congruentes.

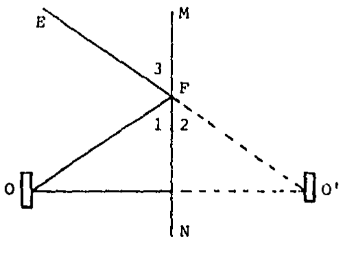
Ejercicio 3.10.

1.- Encuentre un método para determinar la distancia de un punto P, situado en tierra firme, a un barco S .



2.- Se cuenta que una ocasión, encontrándose Napoleón en la ribera de un río, deseaba saber cuál era la anchura del mismo. Uno de sus soldados se colocó de frente al río y ajustó la visera de su gorra hasta lograr que la punta de ésta quedara en línea recta con uno de sus ojos y la ribera opuesta al río. En seguida dió media vuelta y localizó el punto en que quedaba en línea recta con la punta de la visera y su ojo. Midió con pasos la distancia a ese punto, escribió su informe y ganó un ascenso. Trace un diagrama para explicar por qué el método utilizado por el soldado es correcto.

3.- $\overline{MN}$ representa un espejo visto lateralmente. Para un observador en E, es aparente que un objeto O está situado en O' detrás del espejo. En física se aprende que $\measuredangle 3 = \measuredangle 1$ y $\overline{O\,O'} \perp \overline{MN}$ en N . ¿Por qué razón O'N = ON ?



UNIDAD 4.- CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS

Una manera muy importante de "hacer" Geometría, consiste en utilizar la regla y el compás. Práctica que parece haber sido olvidada y que tal vez sea causa de el rechazo o de la incomprensión de sus conceptos.

Desde la época de Platón, el famoso filósofo y matemático griego (380 a.n.e.), los geómetras han distinguido la diferencia entre un dibujo y una construcción geométrica. Un dibujo geométrico es una representación en papel, trazada con los instrumentos adecuados tales como el transportador, la regla T, la regla graduada, y el compás. Teóricamente, una construcción geométrica es un dibujo imaginario en el cual los puntos y las rectas requeridas se determinan solo por medio de dos instrumentos idealizados, un compás y una regla no graduada.

Utilizaremos una regla lisa, de tal manera que aún cuando se pueden trazar rectas no se puedan medir distancias. También, usaremos un compás, con el cual trazaremos circunferencias con centro en un punto cualquiera y que pase por un punto arbitrario, pero no podremos medir ángulos, de igual modo que tampoco podemos medir distancias.

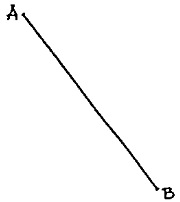
Este fué un esquema desarrollado por los antiguos griegos.

En esta unidad indicaremos como se efectúan las construcciones geométricas más simples las cuales se efectuarán en el plano. Estas construcciones pueden servir de base para llevar a cabo construcciones más complicadas.

Después de realizar cada construcción geométrica se justificará ésta con una demostración.

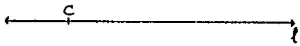
4.1. Dado el segmento $\overline{AB}$, construir sobre la recta ℓ otro segmento que tenga la misma longitud.

Consideremos el segmento $\overline{AB}$.



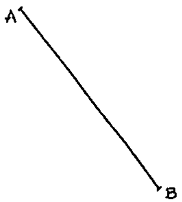
1

Sea ℓ la recta dada y C un punto de ℓ.



2

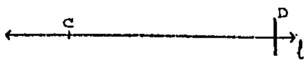
Apoyando el compás en el punto A trazamos un arco que corte en B.



3

Apoyando el compás en el punto C de ℓ, trazamos un arco con la abertura anterior, que interseque a ℓ.

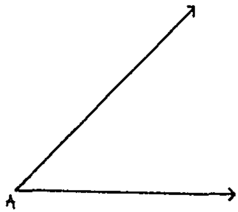
Determinamos el punto D.
Obtenemos el segmento $\overline{CD} = \overline{AB}$



4

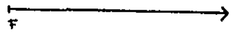
4.2. Dado un ángulo y un rayo, construir otro ángulo que tenga la misma medida.

Consideremos el ángulo con vértice en A.



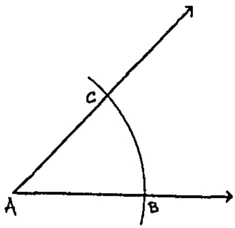
1

Consideremos el rayo con origen en F.



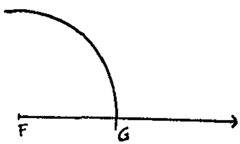
2

Apoyando el compás en A trazamos un arco que intersecte a cada lado del ángulo. Obtenemos los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$



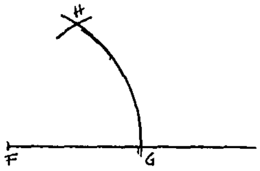
3

Apoyando el compás en F y con la abertura anterior trazamos un arco que intersecte el rayo. Obtenemos el rayo $\overrightarrow{FG}$.



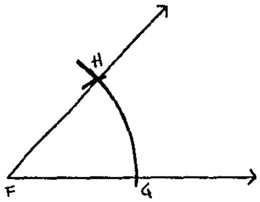
4

Apoyando el compás en G y considerando la abertura de longitud BC, trazamos otro arco que interseque al anterior. Determinamos el punto H.



5

Trazamos el $\overrightarrow{FH}$. Obtenemos el $\angle$ GFH.



6

A continuación justificaremos esta construcción geométrica con una demostración.

4.2.- Dados: $\angle ABC$ y el $\overrightarrow{FG}$. Demuestre que $\angle BAC \cong \angle GFH$.

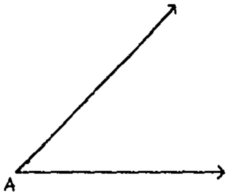
Demostración:

En el $\angle BAC$ y el $\angle GFH$, trazamos, respectivamente $\overline{RS}$ y $\overline{EH}$ entonces se tiene que por construcción, $\overline{AR} \cong \overline{FE}$, $\overline{AS} \cong \overline{FH}$ y $\overline{RS} \cong \overline{EH}$, de lo cual $\triangle RAS \cong \triangle EFH$ (Postulado L.L.L.). Por lo tanto $\angle RAS \cong \angle EFH$ ya que son ángulos homólogos.

Ahora, como $\measuredangle RAS = \measuredangle BAC$ y $\measuredangle EFH = \measuredangle GFH$, por transitividad $\measuredangle BAC = \measuredangle GFH$, o también $\angle BAC \cong \angle GFH$, que es la demostación.

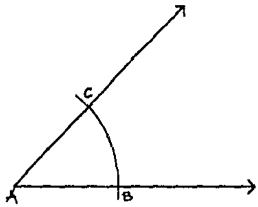
4.3 Construir en un mismo ángulo dos ángulos que sean congruentes.

Consideremos el ángulo con vértice en A.



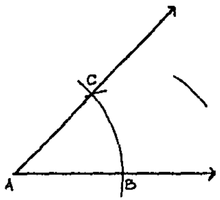
1

Apoyando el compás en A trazamos un arco que interseque a ambos lados del ángulo. Determinamos los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$



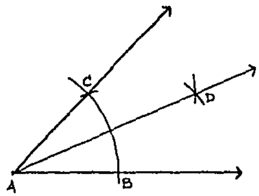
2

Apoyando el compás en B trazamos un arco con la misma abertura anterior.



3

Apoyando el compás y con la misma abertura anterior, trazamos otro arco que interseque al arco anterior. Determinamos D. Trazamos $\overrightarrow{AD}$.



4

A continuación justificaremos la construcción anterior.

4.3.- Sea ABC un ángulo dado y AD un rayo entre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Demuestre que $< BAD \cong < CAD$.

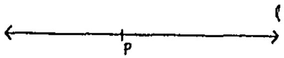
Demostración:

En la figura obtenida, trazando $\overline{DC}$ y $\overline{DB}$ formamos los triángulos $\Delta\, BAD$ y $\Delta\, CAD$. Ahora, por contrucción se sabe que - $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{BD} \cong \overline{CD}$ y como $\overline{AD}$ es un lado común. Por lo tanto $\Delta\, BAD \cong \Delta\, CAD$ (Postulado L.L.L.).

En consecuencia. $< BAD \cong < CAD$ por ser ángulos homólogos.

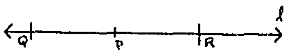
4.4 Por un punto de una recta dada, trazar una perpendicular a esa recta.

Sea P un punto en la recta ℓ .



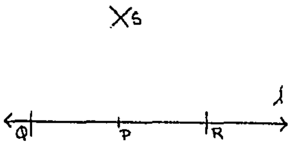
1

Con centro en P, trace una circunferencia que intersecta a ℓ en Q y R.



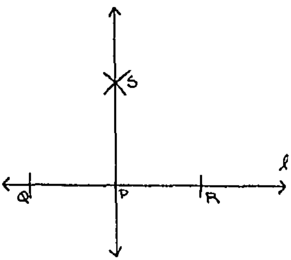
2

Con centro en Q y luego en R y con un radio mayor que $\frac{1}{2}$ QR, se trazan arcos que se intersecten. Determinamos S.



3

Se traza $\overleftrightarrow{SP}$.



4

Considerando que P es un punto de una recta ℓ , el enuncia do para la construcción anterior se puede escribir así:

4.4.- Por un punto de una recta se puede trazar otra recta que es perpendicular a la recta dada.

Demostración:

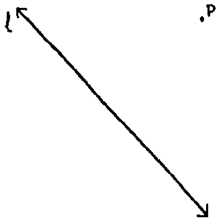
Demostraremos que $\overleftrightarrow{SP} \perp \ell$. Por construcción se tienen que, $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$, $\overline{QS} \cong \overline{RS}$ y $\overline{PS} \cong \overline{PS}$ por ser un lado común. Por lo tanto, $\triangle QPS \cong \triangle RPS$ (Postulado L.L.L.).

De lo anterior, $\angle QPS \cong \angle RPS$ por ser ángulos homólogos y por lo tanto $\measuredangle QPS = \measuredangle RPS = 90°$ (2.10. Teorema 2).

Esto demuestra que $\overleftrightarrow{SP} \perp \ell$.

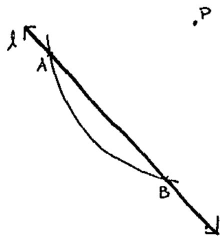
4.5.Por un punto P que no está en la recta ℓ , trazar una perpendicular a ℓ .

Consideremos el punto P y la recta ℓ .



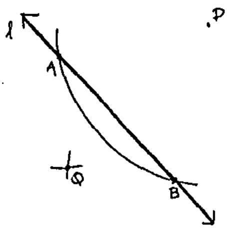
1

Apoyando el compás en P, trazamos un arco que intersecte a ℓ . Determinamos los Puntos A y B.



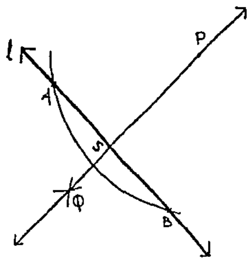
2

Apoyando el compás primero en A y luego en B, y con radio mayor que $\frac{1}{2}$ AB, trazar dos arcos que se intersecten



3

Trazamos $\overleftrightarrow{PQ}$



4

A continuación y considerando que P es un punto que está en la recta dada, enunciaremos de la manera siguiente:

4.5.- Por un Punto exterior a una recta se puede trazar una recta y solamente una que es perpendicular a la recta dada.

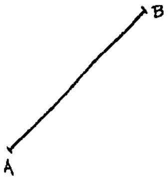
Sabiendo que P es un punto que no está en ℓ, demostraremos que $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$.

Demostración:

Por construcción se tiene que $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, $\overline{AQ} \cong \overline{BQ}$, y como $\overline{PQ}$ es un lado común de los triángulos $\triangle APQ$ y $\triangle BPQ$, entonces $\triangle APQ \cong \triangle BPQ$ (Postulado L.L.L.). Por consecuencia $\angle APQ \cong \angle BPQ$ ya que son ángulos homólogos, y como también $\angle APQ = \angle APS$ y $\angle BPQ = \angle BPS$, entonces $\angle APS \cong \angle BPS$, además de que $\overline{PS}$ es un lado común. Por lo tanto, $\triangle PSA \cong \triangle PSB$ (Postulado L.A.L.) De esto, - $\angle PSA \cong \angle PSB$ ya que son ángulos homólogos y ambos ángulos son rectos (2.10. Teorema 2). Y, por definición de perpendiculari-- dad, se puede concluir que: $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$.

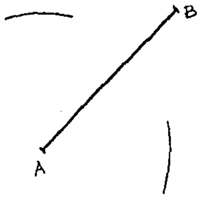
4.6. Dado el $\overline{AB}$. Localice su punto Medio.

Dado el $\overline{AB}$.



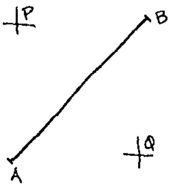
1

Con centro en A y radio mayor que $\frac{1}{2}$ AB se traza un arco.



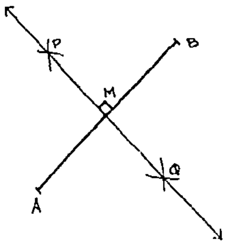
2

Con centro en B y con el mismo radio trace otro arco que intersecte al anterior. Determinamos los puntos P y Q.



3

Trace $\overleftrightarrow{PQ}$ y M es el punto medio del $\overline{AB}$.



4

Ahora se demostrará geométricamente que M es el punto medio del $\overline{AB}$:

4.6.- Sea AB un segmento dado. Demuestra que $\overline{AM} \cong \overline{BM}$.

Para justificar geométricamente la construcción geométrica - anterior, bastará demostrar que $\overline{AM} \cong \overline{BM}$.

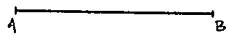
Demostración:

Por construcción se tiene que $\overline{AP} \cong \overline{AQ}$, $\overline{BP} \cong \overline{BQ}$, y tam-- bién que $\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$ por se un lado común de los triángulos $\triangle APQ$ y $\triangle BPQ$, por lo tanto $\triangle APQ \cong \triangle BPQ$ (Postulado L.L.L.). Ahora, como $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ por ser lados homólogos y $\measuredangle APM \cong \measuredangle BPM$ por ser ángulos homólogos, y además que $\overline{PM} \cong \overline{PM}$, entonces $\triangle APM \cong \triangle BPM$ (Postulado L.A.L.).

En consecuencia, $\overline{AM} \cong \overline{BM}$, por ser lados homólogos.

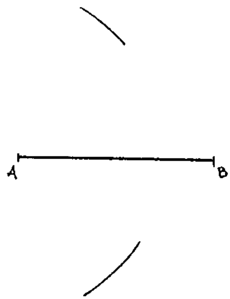
4.7 Dado un segmento. Trace su mediatriz.

Sea AB el segmento dado



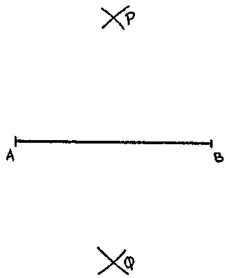
1

Con centro en A y radio mayor que $\frac{1}{2}$ AB se traza un arco



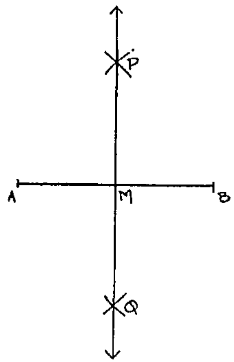
2

Con centro B y el mismo radio anterior trace otro arco que interseque al anterior. Obtenemos los puntos P y Q.



3

Trace la mediatriz $\overleftrightarrow{PQ}$



4

Por lo anterior ahora demostraremos :

4.7. Dado un segmento AB. Demuestre que $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overline{AB}$ en su punto medio M.

Demostración :

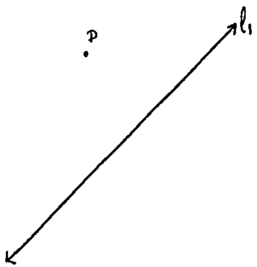
De la demostración 4.6. anterior se tiene que $\triangle APM \cong \triangle BPM$, entonces $\angle AMP \cong \angle BMP$ por ser homólogos, y además por 2.10. teorema 2. $\measuredangle AMP = 90° = \measuredangle BMP$. y, por definición de perpendicularidad se puede concluir que:

$$\overleftrightarrow{PQ} \perp \overline{AB} \text{ en } M.$$

En este caso la recta PQ en una mediatriz.
También se puede afirmar que cualquier punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento.

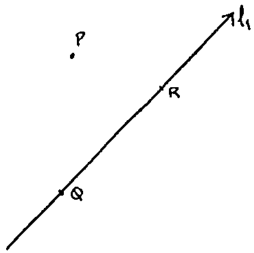
4.8 Sea ℓ_1 una recta y P un punto que no está en ℓ_1 . Trazar otra recta ℓ_2 que pase por P y que sea paralela a ℓ_1.

Sean ℓ_2 una recta y P un punto exterior a ℓ_1



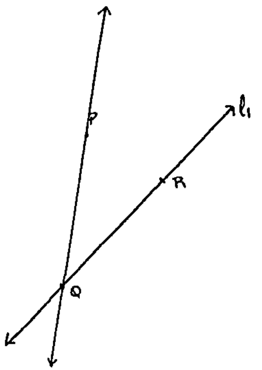
1

Sea Q y R dos puntos cualesquiera de ℓ_1.



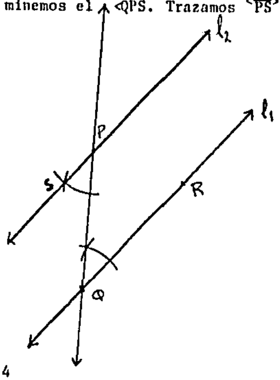
2

Trazamos $\overleftrightarrow{PQ}$



3

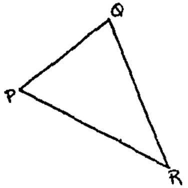
Mediante la construcción No. 6 trazamos un ángulo con vértice en P que sea congruente al $\angle PQR$. Determinemos el $\angle QPS$. Trazamos $\overleftrightarrow{PS}$



4

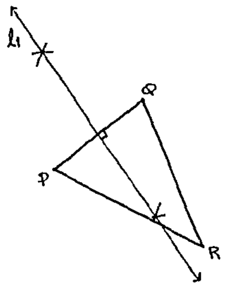
4.9 Circunscribir una circunferencia a un triángulo dado.

Consideremos el $\triangle PQR$.



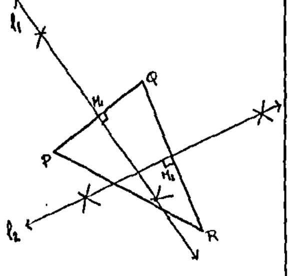
1

Aplicando las instrucciones de la construcción No. 6 en el lado $\overline{PQ}$. Determinamos ℓ_1.



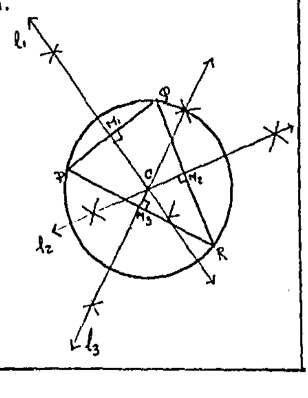
2

Repitiendo las instrucciones en el lado $\overline{QR}$. Determinamos ℓ_2.



3

Haciendo lo mismo en el lado $\overline{PR}$. Determinamos ℓ_3. Obtenemos las mediatrices ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3.
C es el centro de la circunferencia.



4

Antes de continuar, enunciaremos la siguiente definición:

Definición 4.1.- Dos o mas rectas son concurrentes si tienen el mismo punto de intersección.

Utilizaremos esta definición para el enunciado del teorema que justifica la construcción geométrica anterior.

4.9.- Las mediatrices de los lados de un triángulo con concurrentes. Su punto de concurrencia equidista de los vértices del triángulo.

Demostración :

Sean ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 las mediatrices de $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{PR}$, respectivamente. Si ℓ_1 y ℓ_3 fueran paralelas, entonces $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ serían paralelos, es decir, si $\ell_1 \parallel \ell_3$, $\ell_1 \perp \overline{PQ}$, $\ell_3 \perp \overline{PR}$, entonces $\overline{PQ} \parallel \overline{PR}$, lo cual no es posible ya que $\overline{PQ}$ intersecta a $\overline{PR}$. Por lo tanto ℓ_1 intersecta ℓ_3 en un punto C.

Por construcción de la mediatriz, cualquier punto de ella equidista de los extremos del segmento, entonces se tiene que $CP = CQ$ porque C está en ℓ_1. De la misma manera $CP = CR$ porque C está en ℓ_3. Por consecuencia, $CQ = CR$..

Por lo tanto, se demuestra que las mediatrices son concurrentes y su punto de intersección equidista de los vértices del triángulo.

Como una consecuencia, del teorema anterior, se tiene lo siguientes :

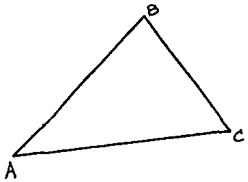
Corolario 4.1.- Tres puntos no colineales están en una -- circunferencia y sólo en una

Definición 4.2.- Mediatriz es la recta perpendicular en - el punto media de un segmento.

Definición 4.3.- El punto de intersección de las mediatrices se llama circuncentro.

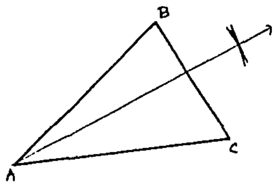
4.10.Inscribir una circunferencia en un triángulo dado.

Dado el $\triangle ABC$.



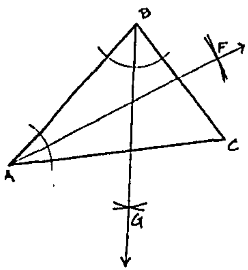
1

Mediante la construcción No. 3 trazamos la bisectriz del < A. Determinamos la bisectriz $\overrightarrow{AF}$.



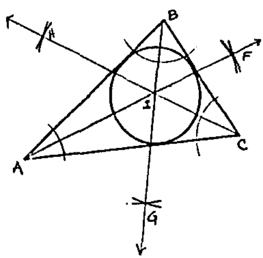
2

Haciendo lo mismo en el < B.
Determinamos la bisectriz $\overrightarrow{BG}$



3

Haciendo lo mismo para el < C.
Determinamos la bisectriz $\overrightarrow{CH}$.



4

Para la demostración geométrica de la construcción anterior, enunciaremos el teorema de la siguiente manera :

4.10.- Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto que equidista de los tres lados del triángulo.

Demostración :

En el $\triangle ABC$, sea I el punto de intersección de las bisectrices $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{CH}$ de los ángulos A, B y C, respectivamente. Entonces, I está en el interior del $\angle A$ y en el interior del $\angle B$ y, por lo tanto en el interior del $\angle C$.

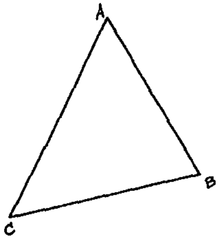
Ya que cualquier punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo, entonces $IP=IQ$. De la misma manera $IP=IR$, y por transitividad $IQ=IR$.

Esto demuestra que el punto I equidista de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

Definición 4.4.- El punto de intersección de las bisectrices se llama Incentro.

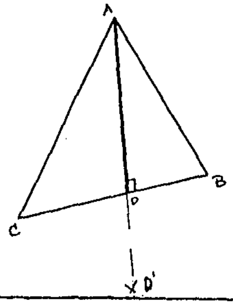
4.11.- Construir las alturas del ΔABC.

Consideremos el ΔABC.



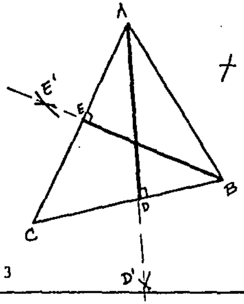
1

Aplicando las instrucciones de la construcción No. 5, trazamos una perpendicular de A a $\overline{BC}$. Determinamos $\overline{AD}$.



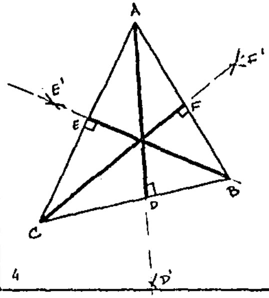
2

Repitiendo las instrucciones, trazamos la perpendiculár de B a $\overline{AC}$. Determinamos BE.



3

Haciendo lo mismo, trazamos la perpendicular de, C à AB. Determinamos $\overline{CF}$. Obtenemos las alturas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$.



4

La construcción geométrica anterior se puede justificar con el teorema :

4.11.- Las tres alturas de un triángulo son siempre concurrentes.

Demostración :

Para efectuar esta demostración primero trazamos :
Por cada uno de los vértices una recta paralela al lado opuesto. Dos cualesquiera de estas rectas no son paralelas ya que se intersectan y determinan un triángulo, digamos - ΔDEF. De esto, los cuadriláteros ABCF, ADBC, BCFA, BCAD, ACBD y ACEB son paralelogramos, entonces los lados opuestos son congruentes.

Utilizando lo anterior se tiene que:

$$BC=AD=AF, \quad AC=BD=BE, \quad AB=CF=CE.$$

Por lo tanto:

La altura $\overline{AD}$ es mediatriz de $\overline{DF}$
La altura $\overline{BE}$ es mediatriz de $\overline{DE}$
La altura $\overline{CF}$ es mediatriz de $\overline{EF}$

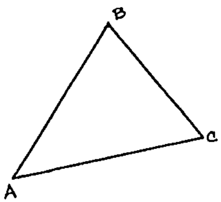
En base al teorema de las mediatrices (4.9.), $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son concurrentes.

Definición 4.5.- Altura de un triángulo es un segmento perpendicular desde un vértice del triángulo a la recta -- que contiene al lado opuesto.

Definición 4.6.- El punto de intersección de las alturas de un triángulo se llama ortocentro.

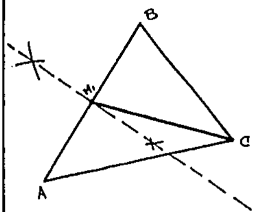
4.12.- Construir las medianas del $\triangle ABC$.

Dado el $\triangle ABC$.



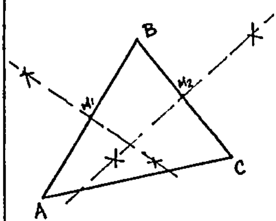
1

Mediante la construcción No. 6, localizaremos el punto medio de $\overline{AB}$. Determinamos M_1, trazamos $\overline{CM}$.



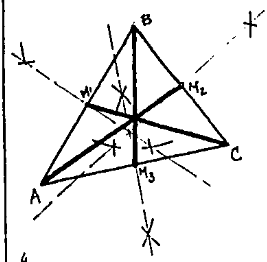
2

Aplicando lo mismo para el lado $\overline{BC}$. Determinamos M_2, trazamos $\overline{AM}_2$.



3

Repitiendo el procedimiento para el lado $\overline{AC}$. Determinamos M_3, trazamos BM_3. Obtenemos las medianas $\overline{AM}_2$, $\overline{BM}_3$ $\overline{CM}_1$.



4

Antes de continuar con la demostración de esta construcción geométrica, enunciaremos una definición y un teorema los cuales nos auxiliarán en la demostración geométrica que justifica dicha construcción.

Definición.- Línea media de un triángulo es el segmento que une los puntos medios de dos lados.

Teorema.- La línea media del ΔABC que une los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ es paralela al lado $\overline{AC}$ y es igual a la mitad de este lado.

4.12.- Las medianas de todo triángulo son concurrentes y su punto de concurrencia está en cada mediana a dos tercios de cada vértice.

Demostración:

Sea ABC el triángulo dado y $\overline{AM_2}$, $\overline{BM_3}$ y $\overline{CM_1}$ las medianas.

Demostraremos primero que $\overline{AM_2}$ y $\overline{BM_3}$ se cortan.

Los puntos C y M_3 son coplanares recpecto a la recta AM_2. Los puntos C y B están en distintos planos. Por consecuencia, los puntos B y M_3 están en distintos planos. O sea, la mediana $\overline{BM_3}$ corta la recta AM_2. De la misma manera deducimos que la mediana $\overline{AM_2}$ corta la recta BM_3. Puesto que las rectas AM_2 y BM_3 se cortan en un único punto, este pertenece a la mediana $\overline{AM_2}$ y $\overline{BM_3}$, es decir, las medianas se cortan en el mismo punto.

Ahora, tracemos la línea media M_2M_3 en el Δ ABC y la línea media A_2B_2 de los lados $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ del Δ OAB, ambas son paralelas al lado $\overline{AB}$ e iguales a la mitad de este lado. De aquí resulta que el cuadrilátero $M_2M_3A_2B_2$ es una paralelogramo, de esto, $M_3O = OB_2$; además $OB_2 = B_2B$ por construcción. Es decir, la mediana $\overline{M_2A}$ divide a la mediana $\overline{M_3B}$ en dos tercios a partir del vértice B. La mediana trazada por el punto C divide la mediana $\overline{BM_3}$ en la misma distancia. Por lo tanto, también pasa por el punto O. Queda demostrado el teorema.

Definición 4.7.- Mediana es el segmento trazado de cada vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto.

Definición 4.8.- El punto de intersección de las medianas de un triángulo se llama baricentro.

UNIDAD 5.- SEMEJANZA

Intuitivamente, consideramos semejantes dos objetos, "si tienen la misma forma aunque no el mismo tamaño". Por ejemplo:

a) Una fotografía y una reducción o una amplificación de ella. La forma se mantiene.

b) Una película vista en una pantalla de cine y la misma, vista en pantalla de televisión. Los objetos tienen diferente tamaño, pero la misma forma.

c) En la industria automotriz se construyen modelos pequeños de los automóviles, estos modelos corresponderán, en forma y detalle con el automóvil real.

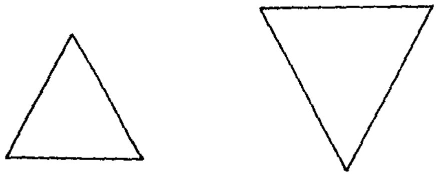
El concepto de semejanza, tiene diversas aplicaciones, una de ellas también es cuando hacemos dibujos a escala. El mapa de una ciudad tiene muchas propiedades que son compartidas por ésta.

a)

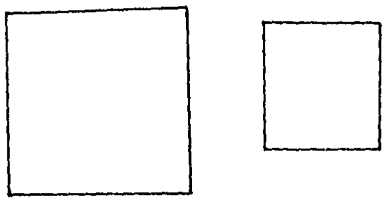
b)

En las figuras geométricas, se puede afirmar que, todos los triángulos equiláteros son semejantes; todos los cuadrados son semejantes; todas las circunferencias también lo son; esto mismo no lo podemos afirmar para algunas otras figuras geomé-tricas, es decir, no todos los rectángulos son semejantes, etc.

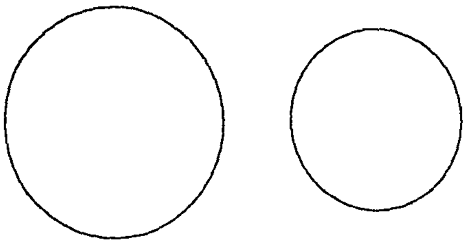
a)



b)



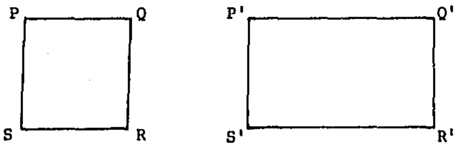
c)



En cada uno de los incisos anteriores se ilustraron figuras geométricas semejantes.

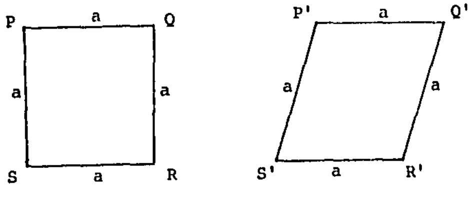
Ahora se ilustran figuras geométricas que no son semejantes:

a)



En la correspondencia PQRS $\longleftrightarrow$ P'Q'R'S', los ángulos correspondientes son congruentes, porque todos los ángulos son rectos, pero los lados correspondientes no son proporcionales.

b) En otros cuadriláteros, puede cumplirse la segunda condición, pero no la primera.



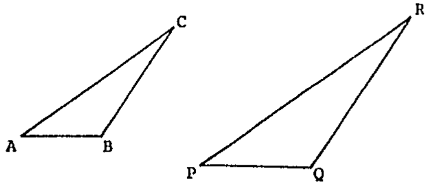
En la correspondencia PQRS $\longleftrightarrow$ P'Q'R'S', los lados correspondientes son proporcionales, sin embargo las figuras tienen formas diferentes.

5.1. Semejanza de Triángulos.

En esta unidad trataremos únicamente la Semejanza de Triángulos, porque los triángulos son figuras geométricas sencillas y rígidas, como se ha expuesto anteriormente en Congruencia de Triángulos. Además, que este concepto, aplicando la misma idea se puede generalizar para polígonos semejantes.

La idea intuitiva de que dos triángulos son semejantes cuando tienen la misma forma, debe precisarse.

Recordemos que $ABC \longleftrightarrow PQR$ es la correspondencia biunívoca entre los dos triángulos.



Asociando a cada ángulo del primer triángulo un ángulo del segundo triángulo.

$\angle A \longleftrightarrow \angle P$, $\angle B \longleftrightarrow \angle Q$ y $\angle C \longleftrightarrow \angle R$ y también a cada lado del primer triángulo el lado correspondiente del segundo:

$$\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{PQ} \quad , \quad \overline{BC} \longleftrightarrow \overline{QR} \quad y \quad \overline{AC} \longleftrightarrow \overline{PR}$$

Ahora enunciaremos la siguiente definición:

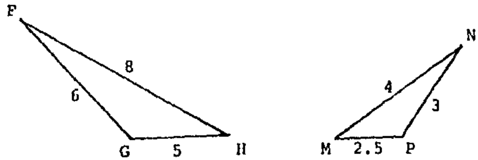
Definición.- Dos triángulos son semejantes si existe una correspondencia entre ellos, tales que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

Si se cumple lo anterior, podemos decir que la correspondencia es una semejanza entre los triángulos.

Por ejemplo, la correspondencia anterior $ABC \longleftrightarrow PQR$ es una semejanza si:

$$\angle A \cong \angle P \ , \ \angle B \cong \angle Q \quad y \quad \angle C \cong \angle R \quad y \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

Ejemplo 1.- Consideremos los dos triángulos siguientes.



De acuerdo con la definición, para determinar si los dos triángulos son semejantes se establece una correspondencia tal que los ángulos correspondientes sean congruentes y los lados correspondientes sean proporcionales.

En este caso, la correspondencia es $FGH \longleftrightarrow NPM$. Podemos comprobar (midiendo los ángulos de los triángulos) que - $\angle F \cong \angle N$, $\angle G \cong \angle P$ y $\angle H \cong \angle M$.

Ahora es conveniente verificar que los lados correspondientes son proporcionales, para ello podemos establecer las - proporciones:

$$\frac{FG}{NP} = \frac{GH}{PM} = \frac{FH}{NM}$$

Como $FG = 6$, $GH = 5$, $FH = 8$, $NP = 3$, $PM = 2.5$, -- $NM = 4$, entonces tenemos que:

$$\frac{6}{3} = \frac{5}{2.5} = \frac{8}{4}$$

De lo cual tenemos 3 proporciones:

$$\frac{6}{3} = \frac{5}{2.5} \quad ; \quad \frac{6}{3} = \frac{8}{4} \quad y \quad \frac{5}{2.5} = \frac{8}{4}$$

En las que se verifica, respectivamente:

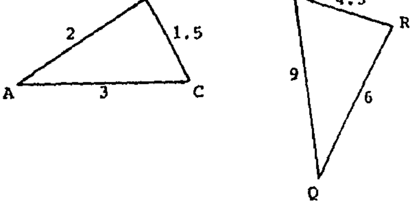
$$6 \times 2.5 = 3 \times 5 \quad ; \quad 6 \times 4 = 3 \times 8 \quad y \quad 5 \times 4 = 2.5 \times 8$$
$$15 = 15 \quad ; \quad 24 = 24 \quad y \quad 20 = 20$$

Por lo tanto, el $\triangle FGH$ es semejante al $\triangle NPM$. Esto se puede indicar: $\triangle FGH \sim \triangle NPM$.

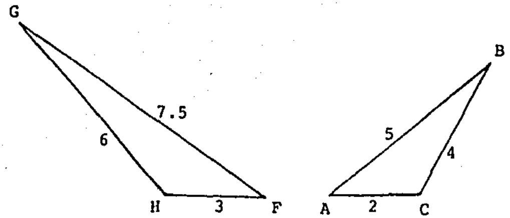
Es posible demostrar que en el caso de los triángulos semejantes, si los ángulos de uno de los triángulos son congruentes a los ángulos correspondientes del otro triángulo (midiendo los ángulos de los triángulos), los lados correspondientes- estarán en proporción. Inversamente, si se prueba que los lados correpondientes son proporcionales, por consecuencia los ángulos correspondientes son congruentes.

Ejercicio 5.1.- Como en el triángulo anterior. Encuentre una correspondencia que sea una semejanza entre -- los triángulos. Indique los ángulos que sean congruentes y establezca las proporciones convenientes.

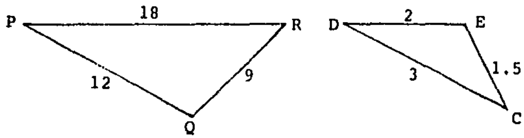
a)



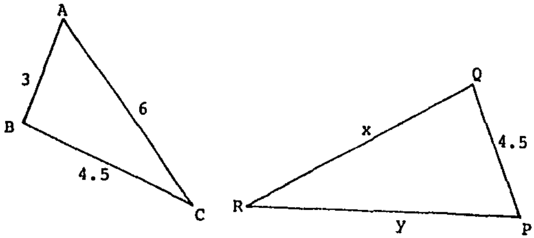
b)



c)



Ejemplo 2.- El $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, calcular las lqngitudes de - los lados que faltan.



1ª) La correspondencia es: $ABC \longleftrightarrow PQR$

2ª) Como los triángulos son semejantes entonces:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

3ª) AB = 3 , BC = 4.5 , AC = 6 , PQ = 4.5 , QR = x y PR = y .

4ª) Al sustituir en las proporciones tenemos que:

$$\frac{3}{4.5} = \frac{4.5}{x} = \frac{6}{y}$$

5ª) Resolviendo:

$$\frac{3}{4.5} = \frac{4.5}{x} \qquad\qquad \frac{3}{4.5} = \frac{6}{y}$$

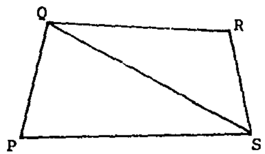
$$x = \frac{(4.5)(4.5)}{3} \qquad\qquad y = \frac{(4.5)(6)}{3}$$

$$x = \frac{20.25}{3} \qquad\qquad y = \frac{27.0}{3}$$

$$\therefore \quad x = 6.75 \qquad\qquad \therefore \quad y = 9$$

$\therefore$ Las longitudes son: QR = 6.75 y PR = 9

Ejemplo 3.- Los triángulos ΔQPS y ΔRSQ son semejantes. De acuerdo con los datos calcule las longitudes RS y RQ .



PQ = 4 RS =

PS = 8 RQ =

QS = 6

Como la correspondencia es: QPS $\leftrightarrow$ RSQ , entonces

$$\frac{\overline{QP}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{SQ}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{RQ}}$$

Entonces, $\frac{4}{RS} = \frac{8}{6} = \frac{6}{RQ}$

Resolviendo:

$$\frac{4}{RS} = \frac{8}{6}$$

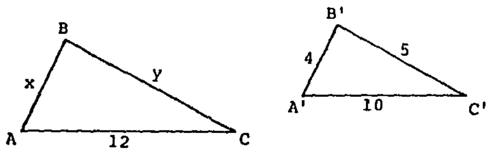
$RS = \frac{(4)\ (6)}{8}$ $\qquad$ $RQ = \frac{(6)\ (6)}{8}$

$RS = \frac{24}{8}$ $\qquad$ $PQ = \frac{36}{8}$

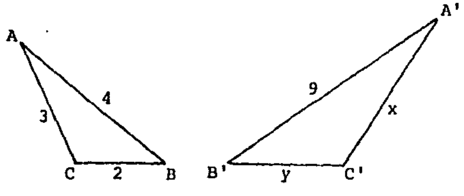
$\therefore\ RS = 3$ $\qquad$ $\therefore\ RQ = 4.5$

Ejercicio 5.2.- El $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, calcule las longitudes x, y en cada uno de los siguientes casos:

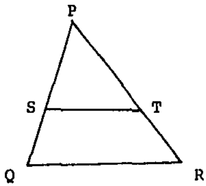
a)



b)

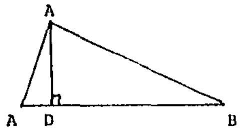


Ejercicio 5.3.- Si la correspondencia $PQR \longleftrightarrow PST$ es una semejanza en los triángulos ΔPQR y ΔPST calcule las longitudes de los lados que faltan.



Datos	Calcule
QR = 5	ST =
PQ = 6	PS =
PR = 7	SQ =
PT = 3	TR =

Ejercicio 5.4.- En la figura se ilustran tres triángulos que son semejantes.

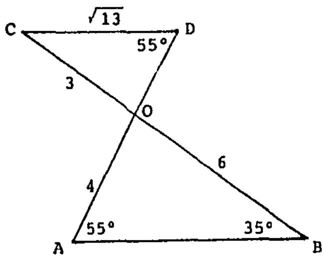


AB = 25	$\Delta ACD \sim \Delta ABC$
BC = 20	$\Delta CBD \sim \Delta ABC$
AC = 15	$\Delta ACD \sim \Delta CBD$

a) Calcule las longitudes CD , AD y BD .

b) Verifique sus cáculos empleando la igualdad
AD + BD = AB .

Ejericicio 5.5.- En la figura: $\Delta AOB \sim \Delta DOC$. Encuentre las medidas siguientes:



$< C =$

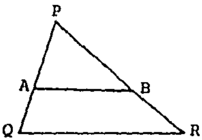
OD =

AB =

$< AOB =$

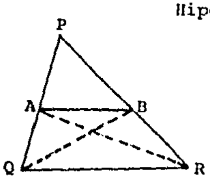
5.2. Proporcionalidad.

Consideremos el ΔPQR en el que $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{QR}$. Podemos probar que en la correspondencia $PQR \longleftrightarrow PAB$, los ángulos correspondientes son congruentes.



$<P \cong <P$	Teorema reflexivo de ángulos.
$<1 \cong <3$	Son ángulos correspondientes entre paralelas.
$<2 \cong <4$	Misma razón anterior.

Teorema 1.- Teorema fundamental de la proporcionalidad.- Si en el ΔPQR, se tiene que $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{QR}$, entonces $\frac{PQ}{PA} = \frac{PR}{PB}$.



Hipótesis: Sean A y B puntos de $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$, respectivamente, tal que $\overline{AB} \parallel \overline{QR}$.

Tesis: $\frac{PQ}{PA} = \frac{PR}{PB}$

Demostración:

Primero tracemos $\overline{AR}$ y $\overline{QB}$. En los triángulos ΔQAB y ΔPAB, tomemos $\overline{QA}$ y $\overline{PA}$ como bases, respectivamente. Entonces estos triángulos tienen la misma altura (la altura trazada de B a $\overline{PQ}$, es la misma para los dos triángulos). Ahora, si dos triángulos tienen la misma altura, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases, es decir:

$$\frac{\text{Area } \Delta QAB}{\text{Area } \Delta PAB} = \frac{QA}{PA} \qquad (1)$$

De la misma manera, en los triángulos ΔRBA y ΔPBA, consideremos a $\overline{RB}$ y $\overline{PB}$ como bases, respectivamente. Puesto que estos triángulos tienen la misma altura, sucede lo anterior:

$$\frac{\text{Area } \Delta RAB}{\text{Area } \Delta PAB} = \frac{RB}{PB} \qquad (2)$$

Ahora bien, los triángulos ΔQAB y ΔRAB tienen la misma base $\overline{AB}$. También tienen la misma altura, pues $\overline{AB}$ y $\overline{QR}$ son paralelos. Por el teorema: "Si dos triángulos tienen la misma base y la misma altura, entonces tienen áreas iguales".

$$\text{Area } \Delta QAB = \text{Area } \Delta RAB \qquad (3)$$

De las ecuaciones (1), (2) y (3), obtenemos:

$$\frac{QA}{PA} = \frac{RB}{PB} \qquad (4)$$

Si sumamos 1 a cada miembro en la ecuación anterior:

$$\frac{QA}{PA} + 1 = \frac{RB}{PB} + 1$$

Es decir:

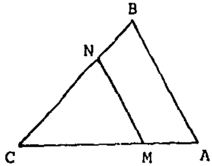
$$\frac{QA + PA}{PA} = \frac{RB + PB}{PB}$$

$$\therefore \quad \frac{PQ}{PA} = \frac{PR}{PB}$$

Lo que queríamos demostrar.

Aplicaremos este teorema en la resolución de algunos -- ejercicios, pero antes observemos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1.- En el ΔABC , $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{AB}$.



En el ΔABC se cumple que:

a) $\frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MC}$

b) $\frac{BC}{BN} = \frac{AC}{AM}$

c) $\frac{CN}{CM} = \frac{NB}{MA}$

Ahora justificaremos cada una de estas igualdades:

a) $\frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MC}$

Por el teorema anterior:

$$\frac{BC}{NC} = \frac{AC}{MC}$$

Restando 1 en cada miembro

$$\frac{BC}{NC} - 1 = \frac{AC}{MC} - 1$$

$$\frac{BC - NC}{NC} = \frac{AC - MC}{MC}$$

Como $BC - NC = BN$ y $AC - MC = AM$

$$\therefore \frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MC}$$

b) $\frac{BC}{BN} = \frac{AC}{AM}$

Aplicando el teorema fundamental:

$$\frac{BC}{NC} = \frac{AC}{MC}$$

Intercambiando lugares antecedente y consecuente.

$$\frac{NC}{BC} = \frac{MC}{AC}$$

Restando 1 a cada miembro

$$\frac{NC}{BC} - 1 = \frac{MC}{AC} - 1 \quad , \quad \text{o sea}$$

$$\frac{NC - BC}{BC} = \frac{MC - AC}{AC}$$

Sustituyendo

$$- \frac{BN}{BC} = - \frac{AM}{AC}$$

Multiplicando por -1

$$\frac{BN}{BC} = \frac{AM}{AC}$$

Intercambiando lugares antecedente y consecuente.

$$\therefore \quad \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{AM}$$

c) $\frac{CN}{CM} = \frac{NB}{MA}$

Aplicando el teorema:

$$\frac{BC}{NC} = \frac{AC}{MC}$$

Restando 1 :

$$\frac{BC - NC}{NC} = \frac{AC - MC}{MC}$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MC}$$

Permutando los medios sus lugares

$$\frac{BN}{AM} = \frac{NC}{MC}$$

Permutando los miembros de la igualdad:

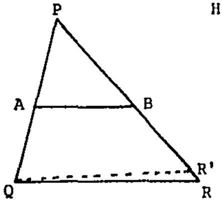
$$\frac{NC}{MC} = \frac{BN}{AM}$$

que es lo mismo que:

$$\frac{CN}{MC} = \frac{NB}{MA}$$

Ahora, procederemos a demostrar el recíproco del teorema fundamental de la proporcionalidad:

Teorema 2.- Si en el $\triangle PQR$, $\overline{AB}$ es tal que $\frac{PQ}{PA} = \frac{PR}{PB}$, entonces $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{QR}$.



Hipótesis: En el $\triangle PQR$, A es un punto entre P y Q, y B un punto entre P y R, tal que $\frac{PQ}{PA} = \frac{PR}{PB}$.

Tesis: $\overline{AB} \parallel \overline{QR}$

Demostración:

Sea $\overline{QR'}$ el segmento que pasa por Q y paralelo a $\overline{AB}$, y que interseca a $\overline{PR}$ en R' . Ahora, por el teorema anterior:

$$\frac{PQ}{PA} = \frac{PR'}{PB}$$

Puesto que por hipótesis:

$$\frac{PQ}{PA} = \frac{PR}{PB}$$

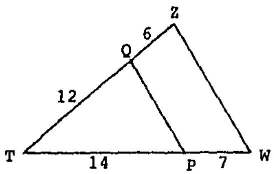
tenemos que:

$$\frac{PR'}{PB} = \frac{PR}{PB}$$

Entonces $PR' = PR$.

Por lo tanto $R = R'$ y $\overline{AB} \parallel \overline{QR}$

Ejemplo 2.- Determine si $\overline{PQ} \parallel \overline{WZ}$ en el ΔTWZ, de acuerdo con los datos indicados.



Por el Teorema recíproco (de la proporcionalidad):

Si $\frac{TZ}{TQ} = \frac{TW}{TP}$, entonces $\overline{PQ} \parallel \overline{WZ}$

Sustituyendo:

$$\frac{12 + 6}{12} = \frac{14 + 7}{14}$$

$$\frac{18}{12} = \frac{21}{14}$$

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones:

$$18 \times 14 = 12 \times 21$$

$$252 = 252$$

Esto nos indica que los segmentos correspondientes son proporcionales.

$$\therefore \quad \overline{PQ} \parallel \overline{WZ}$$

También: Si $\frac{TQ}{QZ} = \frac{TP}{PW}$, entonces $\overline{PQ} \parallel \overline{WZ}$

Sustituyendo:

$$\frac{12}{6} = \frac{14}{7}$$

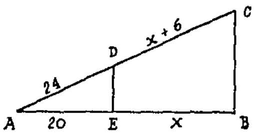
$$12 \times 7 = 6 \times 14$$

$$84 = 84$$

Esto indica que los segmentos correspondientes son proporcionales.

$$\therefore \quad \overline{PQ} \parallel WZ$$

Ejemplo 3.- En la siguiente figura $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$; calcule la longitud DC y EB .



Aplicando el teorema fundamental de la proporcionalidad: Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{EB}$.

Sustituyendo: $\frac{24}{x + 6} = \frac{20}{x}$

$$24x = 20(x + 6)$$
$$24x = 20x + 120$$
$$24x - 29x = 120$$
$$4x = 120$$
$$x = \frac{120}{4} \quad \therefore \quad x = 30$$

Como DC = x + 6, DC = 30 + 6 $\therefore$ DC = 36 y EB = x, entonces EB = 30 .

También se puede resolver, considerando la proporción:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$$

Sustituyendo:

$$\frac{24 + x + 6}{20} = \frac{20 + x}{20}$$
$$\frac{30 + x}{24} = \frac{20 + x}{20}$$
$$24(20 + x) = 20(30 + x)$$
$$480 + 24x = 600 + 20x$$
$$24x - 20x = 600 - 480$$
$$4x = 120$$

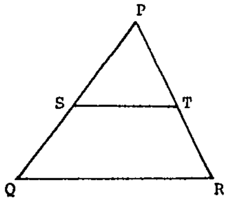
$$4x = \frac{120}{4}$$

$$x = 30$$

$$\therefore \quad DC = 36$$

$$\therefore \quad EB = 30$$

Ejercicio 5.6.- Determine si $\overline{ST}$ es paralelo a $\overline{QR}$, de acuerdo con los datos:



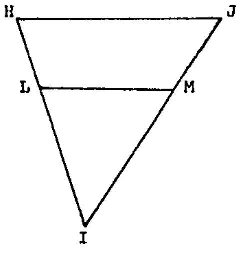
PS = 6

PQ = 15

PT = 4

PR = 10

Ejercicio 5.7.- Determine si $\overline{ML}$ es paralelo a $\overline{HJ}$ de acuerdo con los datos:



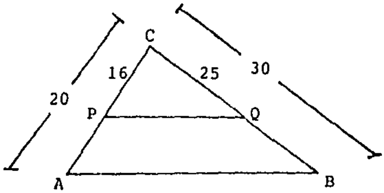
IJ = 4.2

IM = 2.6

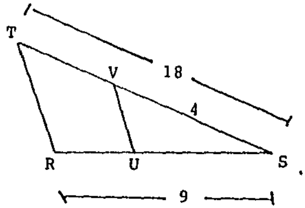
IH = 4.6

IL = 2.7

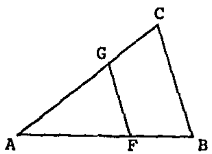
Ejercicio 5.8.- Si los segmentos de la figura, tienen las longitudes indicadas. ¿Será $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$?. Justifíquese la respuesta.



Ejercicio 5.9.- Si los segmentos de la figura, tienen las longitudes indicadas. ¿Será $\overline{UV} \parallel \overline{RT}$?



Ejercicio 5.10.- ¿Para cuáles de los siguientes conjuntos de longitudes sera $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$?.



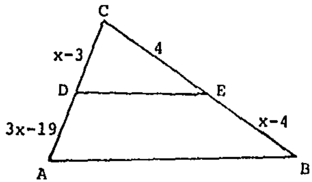
a) AB = 14 , AF = 6 , AC = 7 , AG = 3

b) AB = 12 , FB = 3 , AC = 8 , AG = 6

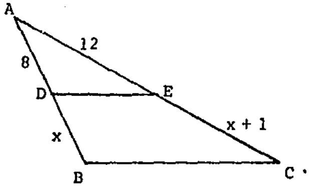
c) AF = 6 , FB = 5 , AG = 9 , GC = 8

d) AC = 21 , GC = 9 , AB = 14 , AF = 5

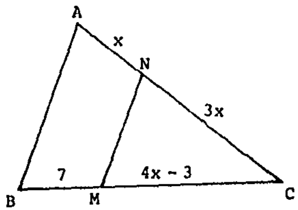
Ejercicio 5.11.- ¿Dada la siguiente figura, con las propiedades indicadas, determina todos los valores de x para los cuales será $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$?



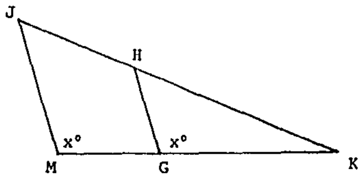
Ejercicio 5.12.- En el $\triangle ABC$, $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$. Con los datos especificados, calcular BD y EC .



Ejercicio 5.13.- Si $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, encuentre las longitudes AN , NC y MC , con los datos en la figura.



Ejercicio 5.14.- En el $\triangle JMK$, $\sphericalangle M = \sphericalangle HGK = x°$.



a) Si $HK = MG$, $MK = 6$ y $JH = 8$, determínese GK.

b) Si $JH = 7$, $JK = 21$ y $GK = 10$, determínese MG.

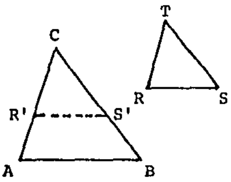
c) Si $GH = 7$, $HK = 2MG$ y $JH = 14$, determínese JK.

d) Si $KJ = 24$, $HK = MK$ y $KG = 4$, determínese MK.

5.3. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE SEMEJANZA.

Se enunciarán únicamente los teoremas siguientes, sin efectuar la demostración.

Teorema 3.- (Teorema de Semejanza A.A.A.). Si dos triángulos tienen los tres ángulos de uno respectivamente congruentes a los tres ángulos del otro, los triángulos son semejantes.



Hipótesis: $\triangle ABC$ y $\triangle RST$, con $\angle A \cong \angle R$, $\angle B \cong \angle S$ y $\angle C \cong \angle T$.

Tesis: $\triangle ABC \sim \triangle RST$.

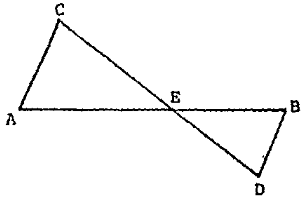
Corolario 1 (A.A.). Si dos triángulos tienen dos ángulos de uno congruentes a dos ángulos del otro, los triángulos son semejantes.

Corolario 2. Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo de uno congruente a un ángulo agudo del otro, son semejantes.

Ejemplo. En la figura siguiente, $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$. Demuestre que:

1) $\triangle ACE \sim \triangle BDE$

2) $AE \cdot ED = CE \cdot EB$

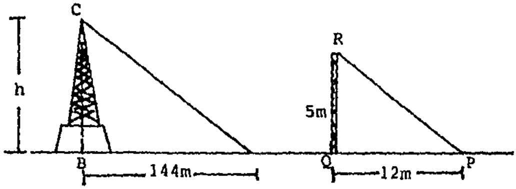


Demostración:

1) Como $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, entonces $\angle A \cong \angle B$ y $\angle C \cong \angle D$ pues son ángulos alternos internos, además $\angle AEC \cong \angle BED$ por ser ángulos opuestos por el vértice. Por lo tanto $\triangle ACE \sim \triangle BDE$ (Teorema A.A.)

2) Ya demostrado que $\triangle ACE \sim \triangle BDE$, por definición de triángulos semejantes $\frac{CE}{ED} = \frac{AE}{EB}$, por lo tanto $AE \cdot ED = CE \cdot ED$.

Problema ilustrativo.- ¿Cuál es la altura de una torre cuya sombra mide 144 m cuando un poste de 5 m proyecta una sombra de 12 m ?.



Considerando que los rayos del sol son paralelos, entonces $\angle CAB \cong \angle RPQ$ y como $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ son triángulos rectángulos, entonces $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (Corolario 2, anterior). Por lo tanto:

$$\frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PQ}$$

Sustituyendo: $$\frac{h}{5} = \frac{144}{12}$$

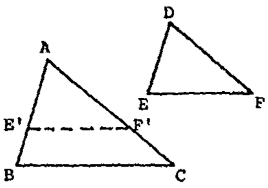
$$12h = 720$$

$$h = \frac{720}{12}$$

$$\therefore\ h = 60 \text{ m}$$

Solución: La altura de la torre es 60 m.

Teorema 4.- (Teorema de Semejanza L.A.L.). Si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.



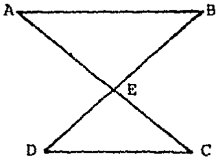
Hipótesis: $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ con $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ y $\angle A \cong \angle D$.

Tesis: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Ejemplo.- En la figura de la derecha, con $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$.
Demuestre:

1) $\Delta AEB \sim \Delta CED$

2) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

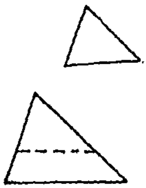


Demostración:

1) Como $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$ (hipótesis) y $\angle AEB \cong \angle CED$ (ángulos opuestos por el vértice). Por lo tanto $\Delta AEB \sim \Delta CED$.

2) Ya que $\Delta AEB \sim \Delta CED$, entonces $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$. Ahora, si los ángulos alternos internos son congruentes, las rectas son paralelas. Por lo tanto, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

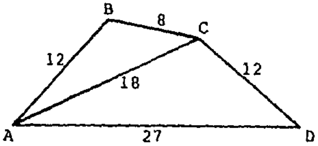
Teorema 5.- (Teorema de Semejanza L.L.L.). Si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.



Hipótesis: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Ejemplo.- Dada la siguiente figura, con las longitudes como se indica. Demuéstrese que $\overrightarrow{AC}$ biseca al $\angle DAB$.



Demostración:

Estableciendo la correspondencia ABC $\longleftrightarrow$ ACD , se tiene que $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AD}$.

Sustituyendo:

$$\frac{12}{18} = \frac{8}{12} = \frac{18}{27}$$

De lo cual,

$\frac{12}{18} = \frac{8}{12}$ $\quad 12 \times 12 = 18 \times 8 \quad \therefore \quad 144 = 144$

$\frac{12}{18} = \frac{18}{27}$ $\quad 12 \times 27 = 18 \times 18 \quad \therefore \quad 324 = 324$

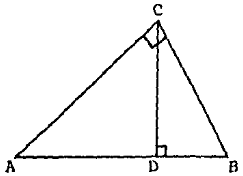
$\frac{8}{12} = \frac{18}{27}$ $\quad 8 \times 27 = 12 \times 18 \quad \therefore \quad 216 = 216$

Por lo tanto, $\triangle ABC \sim \triangle ACD$. Teorema L.L.L.

$\therefore$ $\angle BAC \cong \angle CAD$ por ser ángulos correspondientes de triángulos semejantes.

$\therefore$ $\overrightarrow{AC}$ biseca al $\angle DAB$.

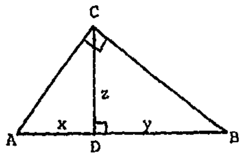
Teorema 6.- En un triángulo rectángulo cualquiera, la altura correspondiente a la hipotenusa - forma dos triángulos rectángulos que son semejantes al triángulo dado y semejantes entre sí.



Hipótesis: $\triangle ABC$, con $\angle ACB$ como ángulo recto; $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.

Tesis: $\triangle ACD \sim \triangle ABC$
$\triangle ABC \sim \triangle CBD$
$\triangle ACD \sim \triangle CBD$

Ejemplo ilustrativo.- En el triángulo siguiente, $\angle ACB = 90°$ y $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Si $AC = \sqrt{52}$, $BC = \sqrt{117}$ y $AB = 13$. Calcule x, y y z .



Como $\overline{CD}$ es altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$. Entonces:

$\triangle ACD \sim \triangle ABC$ (1)

$\triangle CBD \sim \triangle ABC$ (2)

Por el Teorema anterior.

De (1) :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AC}$$

Sustituyendo:

$$\frac{\sqrt{52}}{13} = \frac{z}{\sqrt{117}} = \frac{x}{\sqrt{52}}$$

Resolviendo:

$$\frac{\sqrt{52}}{13} = \frac{z}{\sqrt{117}} \quad y \quad \frac{\sqrt{52}}{13} = \frac{x}{\sqrt{52}}$$

$$13z = \sqrt{52} \cdot \sqrt{117}$$
$$13z = \sqrt{52 \cdot 117}$$
$$13z = \sqrt{6084}$$
$$13z = 78$$
$$z = \frac{78}{13}$$
$$\therefore \quad \boxed{z = 6}$$

$$13x = \sqrt{52} \cdot \sqrt{52}$$
$$13x = \sqrt{52 \cdot 52}$$
$$13x = 52$$
$$x = \frac{52}{13}$$
$$\therefore \quad \boxed{x = 4}$$

Ahora, de (2):

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

Considerando:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

Se tiene que:

$$\frac{\sqrt{117}}{13} = \frac{y}{\sqrt{117}}$$
$$13y = \sqrt{117} \cdot \sqrt{117}$$
$$13y = 117$$
$$y = \frac{117}{13}$$
$$\therefore \quad y = 9$$

Por lo tanto:

$$x = 4 \;, \quad y = 9 \quad y \quad z = 6$$

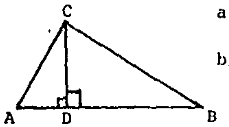
Teorema 7.- Se dan un triángulo rectángulo y la altura correspondiente a la hipotenusa (observe la figura de abajo):

a) La altura es media geométrica(*) de los segmentos en los cuales dicha altura divide a la hipotenusa.

b) Cada cateto es la media geométrica de la hipotenusa y el segmento de ésta adyacente al cateto.

Hipótesis: El $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $\sphericalangle C = 90°$ y $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$.

Tesis:



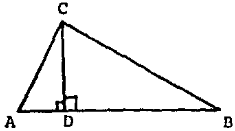
a) $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ o sea $(CD)^2 = AD \cdot BD$

b) $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ o sea $(AC)^2 = AD \cdot AB$

y $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA}$, es decir,

$(BC)^2 = BD \cdot BA$.

Ejemplo.- En el $\triangle ABC$, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ y $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.



1) Si $AD = 2$ y $DB = 8$, encuentre CD .

2) Si $AD = 3$ y $DB = 6$, encuentre AC .

3) Calcule DB si $BC = 6$ y $AD = 5$.

(*) Media geométrica, es el término común de una proporción.

Soluciones:

1) Por el teorema anterior, inciso a) :

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$$

Sustituyendo:

$$\frac{2}{CD} = \frac{CD}{8}$$

$(CD)^2 = 16$, $CD = \sqrt{16}$ $\therefore$ $CD = 4$

2) Aplicando el teorema anterior, Inciso b) :

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

Como $AD = 3$, $DB = 6$, entonces $AB = 3+6$, $AB = 9$

Ahora, sustituyendo:

$$\frac{3}{AC} = \frac{AC}{9}$$

$(AC)^2 = 27$, $AC = \sqrt{27}$ $\therefore$ $AC = 5.19$

3) Consideremos que $DB = x$.

Como $AB = AD + DB$, entonces $AB = 5 + x$, tenemos: $DB = x$, $AB = 5+x$, $BC = 6$ y $AD = 5$.

Aplicando el teorema anterior, inciso b) :

$$\frac{DB}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

Sustituyendo:

$$\frac{x}{6} = \frac{6}{5 + x}$$

$$x(5 + x) = 36$$

$$5x + x^2 = 36$$

$x^2 + 5x - 36 = 0$ (Ecuación de 2ª grado).

Resolviendo por factorización:

$$(x + 9)\ (x - 4) = 0$$

Entonces:

$x + 9 = 0 \quad \therefore \quad x = -9$

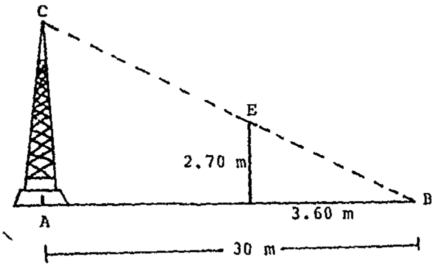
$x - 4 = 0 \quad \therefore \quad x = 4$

De estas dos soluciones, consideraremos $x = 4$, ya que la medida de un segmento es no negativa.

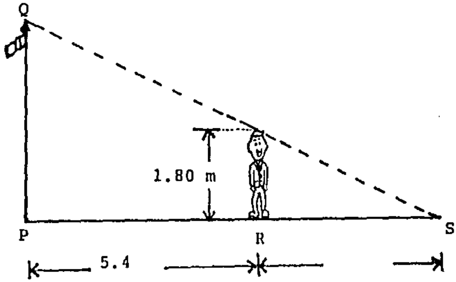
Como $DB = x \quad \therefore \quad DB = 4$

Ejercicio 5.15.- Resuelva los siguientes problemas:

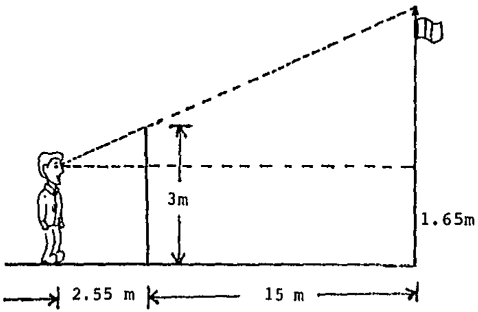
1.- Una torre $\overline{AC}$ produce una sombra de 30 m de longitud. Un poste de 2.70 m es colocado verticalmente en D, de tal -- forma que la punta de su sombra coincide con la punta de la sombra de la torre. Midiendo la distancia DB, encontramos 3.60 m. ¿De qué altura es la torre?.



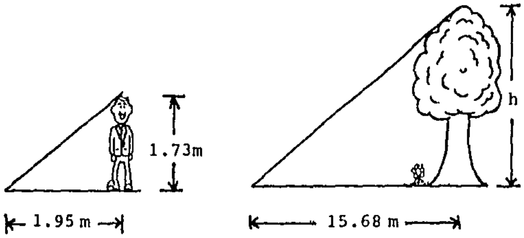
2.- Un asta bandera $\overline{PQ}$ produce una sombra $\overline{PS}$. Un hombre de 1.80 m de estatura está colocado a 5.40 m del asta bandera, y su sombra $\overline{RS}$ es de 2.10 m . ¿Cuál es la altura del asta bandera?.



3.- Para hallar la altura de un asta bandera, un muchacho cuyos ojos se encuentran a 1.65 m del suelo, coloca una vara de 3 m de largo elevada en el piso a 15 m de distancia del asta. Entonces retrocediendo 2.55 m, encuentra que puede ver la punta del asta alineada con la punta de la vara. -- ¿Cuál es la altura del asta?.

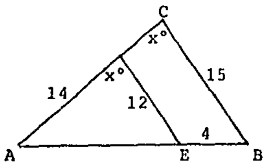


4.- Un muchacho observa que la sombra de un árbol tiene 15.68m de largo, cuando el de su sombra es de 1.95 m. Si la altura del muchacho es de 1.73 m . ¿Cuál es la altura del árbol?. (Nota: Supóngase que los rayos del sol son paralelos).

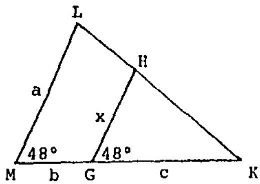


Ejercicio 5.16.

1.- Sea la figura con AD = 14, ED = 12, BC = 15 y EB = 4. Determinar AC, AE y AB .



2.- Dada la figura, expresar x en términos de a, b y c .



3.- Indique si es posible que dos triángulos sean semejantes cuando se cumplen las siguientes condiciones:

a) Dos ángulos de uno de los triángulos tienen medidas de 60° y 70°; mientras que dos ángulos del otro tienen medidas de 50° y 80°.

b) Dos ángulos de uno de los triángulos tienen medidas de 45° y 75°, mientras que dos ángulos del otro tienen medidas de 45° y 60° .

c) Un triángulo tiene un ángulo de medida 40° y dos lados cada uno de longitud 5, mientras que el otro tiene un ángulo de medida 70° y dos lados cada uno de longitud 8 .

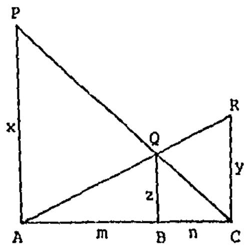
d) Uno de los triángulos tiene lados con longitudes 5, 6 y 9, mientras que el otro tiene un perímetro de 8 420 000 .

4.- En la figura $\overline{PA}$, $\overline{QB}$ y $\overline{RC}$ son perpendiculares a $\overline{AC}$.

a) Complétese el siguiente enunciado.

ΔPAC $\underline{\ \sim \Delta\ \ \ }$

ΔABQ $\underline{\ \sim \Delta\ \ \ }$



b) Indique cuál de los siguientes enunciados es correcto: $\frac{z}{x} = \frac{n}{m}$ o $\frac{z}{x} = \frac{n}{m + n}$.

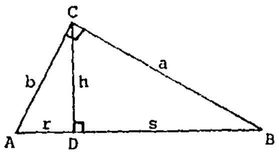
c) Indique cuál de los siguientes enunciados es correcto:
$\frac{z}{y} = \frac{m}{n}$ o $\frac{z}{y} = \frac{m}{m + n}$

6.- Una persona puede completar un trabajo en 6 horas y otra lo puede completar en 3 horas. Si trabajaran juntos, ¿cuánto tardarían en completar el trabajo?.

7.- En la figura $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa del $\triangle ABC$.

a) Si $r = 4$ y $s = 9$, determinar h.

b) Si $r = 7$ y $s = 28$, determinar h.



c) Dado que $r = 9$, $s = 3$, determinar a .

d) Dado que $r = 7$, $s = 21$, determinar b .

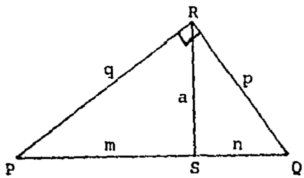
8.- En la figura $\overline{RS}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{PQ}$ del $\triangle PQR$.

a) Si $m = 27$ y $n = 3$, determinar a, p y q .

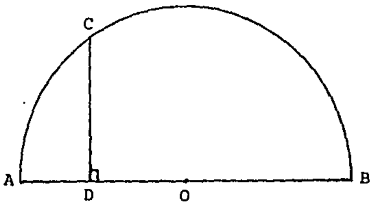
b) Si $m = 24$ y $n = 6$, determinar a, p y q .

c) Si $p = 15$ y $n = 9$, determinar m y q .

d) Si $a = 8$ y $m = 6$, determinar n, p y q .



9.- Sea $\overline{AB}$ el diámetro de una circunferencia con centro en O, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Si AD = 3 y BD = 27, encontrar CD. (Sugerencia, trazar cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$).



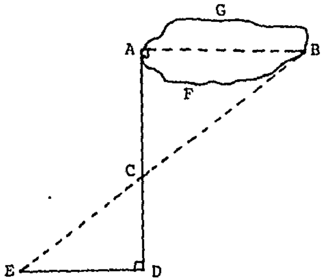
5.4. ALGUNAS APLICACIONES DE LA SEMEJANZA.

Citaremos algunas de las muchas aplicaciones que tienen las proporciones y las figuras semejantes.

1.- Si consideramos un haz de rayos luminosos perpendiculares a una superficie plana, por ejemplo una pared o una pantalla, y se coloca un objeto entre la superficie tendrá, exactamente, la misma forma que el contorno del objeto, pero será mayor que ese objeto.

Si se acerca el objeto a la superficie, la sombra se hace más pequeña, y si se acerca a la luz, la sombra se agranda, aumentando cada parte del contorno en la misma proporción, permaneciendo la forma (ángulos) igual. Por lo tanto, la sombra es una figura semejante al contorno del objeto.

2.- Medidas de distancias inaccesibles.- Este es un problema muy antiguo e importante para los topógrafos. (Ver la figura siguiente).



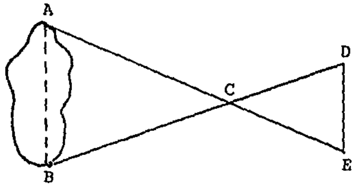
Supongamos que AFBG representa un cerro de forma irregular, tal que no se puede medir directamente la distancia AB. Consideremos la línea $\overline{AB}$ y coloquemos dos estacas en los puntos D y E. Tales que $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ y $\overline{AD} \perp \overline{DE}$. Después se dirige una visual a lo largo de EB, y se marca el punto C en el que la visual $\overline{AD}$. De esto se puede afirmar que $\triangle BAC$ y $\triangle DEC$ son rectángulos $\angle ACB \cong \angle DEC$ (son ángulos opuestos por el vértice). Por lo tanto, los triángulos son semejantes (Corolario 2, Teorema A.A.A.). Entonces

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DC}$$

$$AB = \frac{AC \times DE}{DC}$$

Como es posible medir AC, DE y DC, entonces podemos obtener la longitud de $\overline{AB}$.

3.- El problema anterior también se puede resolver aplicando en lugar de ángulos, las distancias.



Desde C se dirigen visuales a A y a B y se miden $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Después se prolongan estas rectas y se marcan D y E de manera que

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}}$$

y, se mide $\overline{DE}$. Entonces,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$$

$$\therefore \quad AB = \frac{BC \times DE}{CD}$$

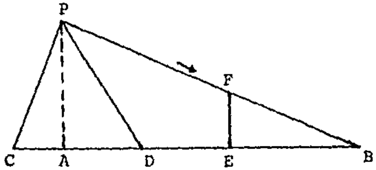
Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEC$ son semejantes, pues como se han trazado tienen dos lados correspondientes -- proporcionales:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}}$$

y, además $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle DCE$ (son ángulos opuestos por el vértice). Entonces, también se verifica que:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$$

4.- Medidas de alturas inaccesibles.- La medida de alturas inaccesibles es un problema sencillo cuando se aplican las propiedades de triángulos rectángulos semejantes.- Se dice que el antiguo matemático Tales, asombró a los egipcios, determinando la altura de una de sus mayores pirámide sin más que hacer una medida sobre el suelo.- Explicaremos, este método, auxiliándonos de la siguiente figura:

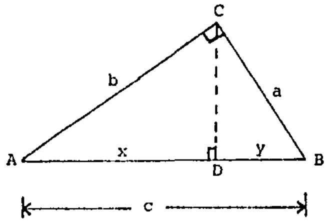


PCD representa a la pirámide y AP su altura. Sea $\overline{AB}$ la sombra de la pirámide, en el momento que la sombra del hombre $\overline{EF}$ es $\overline{EB}$. En los triángulos rectángulos ΔPAB y ΔFEB, en el instante que $EF = EB$, entonces también será $PA = AB$. (El segmento AD, que está dentro de la base de la pirámide, se puede medir por ser paralelo al borde exterior de la base).

5.5. TEOREMA DE PITAGORAS.

El Teorema de Pitágoras debe ser seguramente el más famoso de la geometría. Aún cuando casos especiales del teorema eran conocidos mucho tiempo antes de Pitágoras, probablemente él fue el primero en dar una demostración general. Se han dado cientos de pruebas del teorema de Pitágoras. En la siguiente demostración, usaremos las propiedades de los triángulos semejantes.

Teorema 8.- (Teorema de Pitágoras). En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



Hipótesis: El ΔABC es triángulo rectángulo. $\sphericalangle C = 90°$. Los catetos $AC = b$, $BC = a$. Hipotenusa $AB = c$.
Demostrar: $c^2 = b^2 + a^2$.

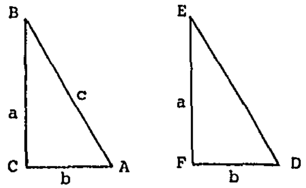
Demostración:

1) $\overline{CD}$ es una altura.	1) Trazo auxiliar.
2) $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ $\Delta CBD \sim \Delta ABC$	2) Teorema 5.
3) $\frac{b}{c} = \frac{x}{b}$ $\frac{a}{c} = \frac{y}{a}$	3) Definición de triángulos semejantes.
4) $b^2 = cx$ $a^2 = cy$	4) Propiedad fundamental de las proporciones.
5) $b^2 + a^2 = cx + cy$	5) Sumando miembro a miembro las dos igualdades.

6) $b^2 + a^2 = c(x + y)$	6) C es factor común.
7) $b^2 + a^2 = c \cdot c$	7) $x + y = c$
8) $\therefore b^2 + a^2 = c^2$	8) Que es la demostración.

Ahora procederemos a demostrar el recíproco del Teorema de Pitágoras.

Teorema 9.- (Recíproco del Teorema de Pitágoras).
En un triángulo cuyos lados tienen las longitudes a, b y c, si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo, con el ángulo recto opuesto al lado de longitud c.



Hipótesis: Sea el ΔABC, cuyos lados tienen las longitudes a, b y c, tal que $a^2 + b^2 = c^2$. Construyamos un ángulo recto, $\overline{FD}$ y $\overline{FE}$ de longitudes b y a, respectivamente.

Tesis: El $\angle c$ es ángulo recto.

Demostración:

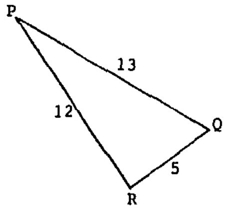
1) El Δ DEF es triángulo rectángulo.	Por construcción.

2)	$a^2 + b^2 = (ED)^2$ ó $ED = \sqrt{a^2 + b^2}$	Teorema de Pitágoras.
3)	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	ED = c
4)	$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	Postulado L.L.L.
5)	$\measuredangle C = \measuredangle F = 90°$	Angulos homólogos de triángulo congruentes.

Ilustraremos algunos ejemplos en los que se utilizará el Teorema de Pitágoras, o bien su recíproco.

Ejemplo 1.- En cada uno de los siguientes casos, determine si el triángulo dado es un triángulo rectángulo o no lo es.

a)



Consideremos al lado de mayor longitud como la hipotenusa y a los otros dos como los catetos

Sí $(PQ)^2 = (QR)^2 + (RP)^2$, entonces el ΔPQR es un triángulo rectángulo (REcíproco del Teorema de Pitágoras).

Sustituyendo:

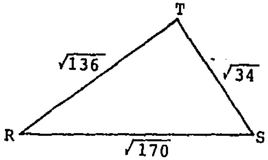
$$(13)^2 = (5)^2 + (12)^2$$

$$169 = 25 + 144$$

Esto es verdadero.

$\therefore$ El ΔPQR es un triángulo rectángulo.

b)



De la misma manera que el caso anterior, podemos aplicar:

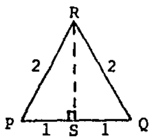
Si $(RT)^2 + (TS)^2 = (RS)^2$, entonces: El Δ RST es un triángulo rectángulo:

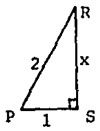
$$(\sqrt{136})^2 + (\sqrt{34})^2 = (\sqrt{170})^2$$

$\therefore$ $136 + 34 = 170$ (verdadero).

$\therefore$ El Δ RST es un Δ rectángulo.

Ejemplo 2.- ¿Cuánto mide la altura de un triángulo equilátero, cuya longitud de su lado es 2 ?





Solución: Consideremos que Δ PQR, en el que PQ = QR = RP = 2. - Tracemos la altura RS. El Δ PRS es un rectángulo.- Como se muestra en la otra figura.

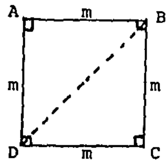
Calcularemos x que representa a la la altura del triángulo equilátero.

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

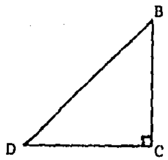
$$x^2 + 1^2 = 2^2$$
$$x^2 + 1 = 4$$
$$x^2 = 4 - 1$$
$$x^2 = 3$$
$$\therefore \quad x = \sqrt{3}$$

$\therefore$ La altura del triángulo equilátero es $\sqrt{3}$.

Ejemplo 3.- Calcule la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide m unidades.



Solución: ABCD es un cuadrado. $\overline{BD}$ es la diagonal. Los $\triangle ABD$ y BDC son triángulos rectángulos. Consideremos el - - $\triangle BDC$ como se muestra en la figura de abajo y calcularemos BD .



Aplicando el Teorema de Pitágoras:

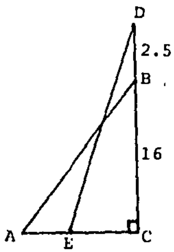
$(BD)^2 = m^2 + m^2$

$(BD)^2 = 2m^2$

$BD = \sqrt{2m^2}$

$\therefore \quad \underline{\overline{BD = m\sqrt{2}}}$

Problema.- Se coloca una escalera de 20m de largo contra la pared de un edificio llegando hasta el marco inferior de una ventana situada a 16m del piso. Si la altura de la ventana mide 2.5 m. ¿Qué distancia se necesitaría desplazar el pie de la escalera para que ésta alcance el marco superior de la ventana?



Solución: Supongamos que $\overline{AB}$ representa la escalera y $\overline{BD}$ la ventana. Luego $\overline{ED}$ la escalera desplazada. Debemos encontrar la distancia AE.

1ª) Consideremos el ΔABC, $\measuredangle c = 90°$, $AB = 20$ m $BC = 16$. Encontraremos AC.

Por el Teorema de Pitágoras:

$$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$$

Sustituyendo:

$$(AC)^2 + 16^2 = 20^2$$

$$(AC)^2 + 256 = 400$$

$$(AC)^2 = 400 - 256$$

$$(AC)^2 = 144$$

$$AC = \sqrt{144}$$

$$\therefore \boxed{AC = 12 \text{ m}}$$

2ª) Ahora consideraremos el Δ EDC con $CD = 18.5$ m, $ED = 20$ m, calcularemos EC.

Por el Teorema de Pitágoras:

$$(EC)^2 + (CD)^2 = (ED)^2$$

$$(EC)^2 + 18.5^2 = 20^2$$

$$(EC)^2 + 342.25 = 400$$

$$(EC)^2 = 400 - 342.25$$

$$(EC)^2 = 57.75$$

$$EC = \sqrt{57.75}$$

$$\therefore \boxed{EC \simeq 7.599}$$

3ª) Como AE es la distancia desplazada y $AE = AC - EC$, entonces:

$$AE = 12 - 7.599 \quad \therefore \quad \underline{\overline{AE = 4.401 \text{ m}}}$$

Ejercicio 5.17

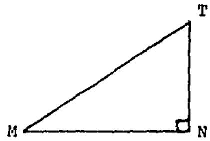
1.- En el $\triangle$ MNT, $\measuredangle$MNT = 90°. Calcule:

a) MT, si MN=16 y NT=12

b) NT, si MN=24 y MT=30

c) MN, si MT=13 y NT=5

d) NT, si MN=15 y MT=17



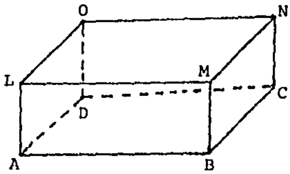
2.- En el sólido rectangular de AB = 6 cm, BC = 3 cm y BM = 4 cm. Encontrar las longitudes siguientes:

a) OD   e) NN

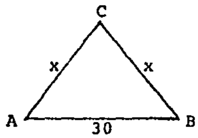
b) CD   f) AM

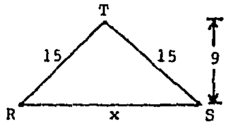
c) LO   g) OB

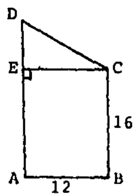
d) DB   h) LC

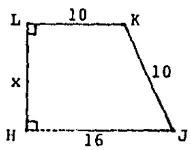


3.- Hallar la longitud del segmento x en cada figura. Trace una perpendicular si es necesario.









Ejercicio 5.18.- Resuelva los siguientes problemas:

1.- Encuentre la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyas dimensiones son 16 y 20.

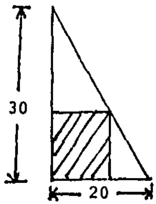
2.- Las diagonales de un rombo son 14 y 48. Encuentre el perímetro y el área del rombo.

3.- Una cuerda está a 12 cm del centro de un círculo cuyo radio es 20 cm. Calcule la longitud de la cuerda.

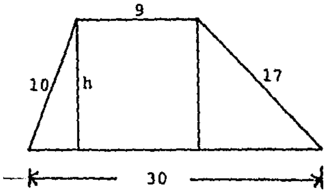
4.- La base de un sólido rectangular es un cuadrado cuyas diagonales miden 6 $\sqrt{2}$ cm. La altura del sólido es 4 cm. Calcule la medida de la diagonal del sólido.

5.- La arista de un cubo mide t cm. Encuentre la longitud de la diagonal.

6.- Se tiene un triángulo rectángulo de cartón. Los catetos miden 20 cm y 30 cm. Se recorta un cuadrado como se indica en la figura. Encuentre cuánto mide el lado del cuadrado resultante.



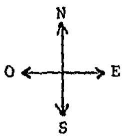
7.- Las bases de un trapezoide son 30 cm y 9 cm y los lados no paralelos miden 10 y 17 cm. Encuentre el área. (Sugerencia: encuentre primero x, después h).



8.- En el momento que un aeroplano pasa sobre un pueblo, un observador situado a 3.5 km, y al mismo nivel, lanza una visual al aeroplano con un telémetro, y determina que el aeroplano está a 4.5 km de él en línea recta. ¿A qué altura se encuentra el aeroplano sobre el pueblo?

9.- En el momento en que un aeroplano pasa a nivel de una cima de una montaña de la que se sabe tiene 4 200 m de altura. El piloto divisa un objetivo distante, y con el telémetro determina que se encuentra a unos 9 km de distancia en línea recta. Si el objetivo está al mismo nivel que el pie de la montaña. ¿Qué distancia tendrá que volar el aeroplano hasta encontrarse justamente sobre el objetivo, y a la misma altura?

10.- Dos carros salen de un mismo punto, uno viajando a razón de 70 km por hora, el otro a razón de 60 km por hora. Si uno viaja directamente al Este y el otro directamente al Sur. ¿Qué tan separados están los carros al término de $1\frac{1}{2}$ horas?



UNIDAD 6.- TRIGONOMETRIA

6.1. Antecedentes Históricos.

La Trigonometría en su significado literal de "medida del triángulo", es tan antigua como Egipto, aunque desde luego en una forma "extraordinariamente" rudimentaria. La Astronomía griega necesitaba de la Geometría Esférica, y esto combinado con la reducción de las observaciones, requería, a su vez, lo que podríamos llamar "cálculo de las funciones trigonometrícas".

La Matemática a través de la historia, hasta los tiempos modernos, no pudo ser separada de la Astronomía. Las necesidades de la irrigación, de la agricultura en general, y hasta cierto punto de la navegación, otorgaron a la Astronomía el primer lugar en la ciencia oriental y helenística, su curso determinó en cierto grado el de la Matemática.

Para la matemática, tanto de la antiguedad como en el siglo XVIII, y los astrónomos babilonios que dedicaron mucho esfuerzo a su estudio, el movimiento de la luna fue de entre todos los problemas astronómicos el más desafiante.

La contribución griega más antigua a la Astronomía teórica fue la "Teoría Planetaria" de Eudoxio, en la cual intentó explicar el movimiento de los planetas (en torno a la Tierra).

Esto fue algo nuevo y típicamente griego, una explicación en vez de una crónica de los fenómenos celestes.

Eudoxio fue seguido por Aristarcos de Samos (alrededor de 280 A.C.), el "Copérnico de la antiguedad", a quien Arquímedes le atribuyó la hipótesis de que el Sol y no la Tierra, es el centro del movimiento planetario. Esta hipótesis encontró pocos adeptos en la antiguedad, aunque la creencia de que la Tierra gira alrededor de su propio eje tuvo una amplia aceptación. El pequeño exito de la hipótesis heliocéntrica (que tiene el -- centro del Sol como punto de partida) se debió principalmente a Hiparco de Nicea, considerado a menudo como el más grande Astrónomo de la antiguedad.

Hiparco de Nicea hizo observaciones (161 - 126 A.C.). Una pequeña parte de su obra ha llegado a nosotros directamente, la principal fuente existe gracias a Claudio Ptolomeo quien vivió tres siglos después. Mucho del contenido de la gran obra de -- Ptolomeo, Almagesto, puede ser atribuido a Hiparco, especialmente el uso de círculos excéntricos y de epiciclos (círculo cuyo centro, según la opinión de los antiguos astrónomos, estaban en un punto de la circunferencia de otro mayor) para explicar el - movimiento del Sol, la Luna y los Planetas, así como el descubrimiento de la precesión de los Equinoccios.

Hiparco fue también quien empleó sistemáticamente una especie de Trigonometría, y se dice que produjo la equivalencia - de una tabla rudimentaria de senos. Se da también el crédito - a Hiparco de un método para determinar la latitud y longitud -- por medios astronómicos.

Ptolomeo en el Siglo II (D.C.), resumió en su obra Almagesto, las características principales de la Geometría Esférica, e indicó un método para el cálculo aproximado de lo que viene a ser tabla de senos o semicuerdas. La Trigonometría de Ptolomeo basada en la relación fundamental entre las cuerdas de un círculo y el ángulo central que ellas subtienden. Ptolomeo usaba -- las cuerdas, la falta de exactitud era inevitable por el método geométrico que necesitaba de interpolaciones en un intervalo demasiado extenso. De esta manera, la Trigonometría Plana fue -- tradicionalmente nada más, que un suplemento de cálculo para la Trigonometría Esférica.

Los hindúes y los árabes perfeccionaron la Trigonometría. Una obra hindú de aproximadamente el Siglo IV, avanzó considerablemente más allá de la Trigonometría griega, tanto en método - como en precisión, dando una tabla de senos. Se les considera como los precursores de la función Trigonométrica moderna conocida como "seno de un ángulo".

Los árabes adoptaron y desarrollaron la Trigonometría hindú. El primer progreso notable se debió al Astrónomo Al Battani (Siglo IX). Si bien en realidad no fue el primero que aplicó el álgebra en lugar de la sola Geometría a la Trigonometría, fue el primero que dio un gran paso en esta dirección. Usó además del seno hindú, la tangente y la contangente. En el siglo X se calcularon tablas de estas dos últimas, y también hicieron su aparición la secante y la cosecante como razones trigonométricas, pues no existía todavía el concepto de función. Nada de su obra se parece mucho a la Trigonometría actual.

Se puede citar también: que Abul Welfa a fines del Siglo X, empezó a sistematizar la Trigonometría que se conocía en su época y la redujo a un sistema deductivo muy poco sólido.

El Astrónomo persa Nasir Eddin (1201 - 1274), escribió el primer texto árabe de Trigonometría.

Leonardo de Pisa (Fibonacci), publicó su obra maestra El Liber abaci en la que incluye los teoremas de adición de senos y cosenos.

La transición de lo particular a lo general se reconoce - por primera vez inequívocamente en la obra de Vieta (Francisco Viete, Frances 1540-1603), que al igual que Fibonacci no tenía formación de matemático ni lo era de profesión.

El principal progreso de Vieta en Trigonometría fue su -

aplicación sistemática del Algebra. Tanto en Trigonometría plana como en la esférica, manejó libremente las seis funciones -- (seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante), y en aquella obtuvo muchas de las identidades fundamentales, algebraicamente hablando.

Con Vieta quedó prácticamente terminada la Trigonometría elemental, excepto en el aspecto de cálculo. El cálculo quedó muy simplificado con la invención de los logaritmos (1614). -- Vieta amplió las tablas de Rhaeticus (Alemán, 1514-1576), dando los valores con siete decimales de las seis funciones para cada segundo de arco, en vez de diez segundos como había hecho Rhaeticus.

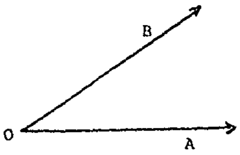
Se suele atribuir a Regiomontano (Alemán, Juan Müller, -- 1436-1476), la separación de la Trigonometría de la Astronomía.

En el siglo XVIII surge el matemático Leonhard Euler (Suizo, 1707-1783), quizá el matemático más productivo de todos los tiempos. Euler hizo contribuciones en todo campo de la matemática que existía en su época. Publicó sus resultados no solamente en artículos, sino también en un número impresionante de grandes libros de texto. En varios campos, la presentación de Euler ha sido casi definitiva. Un ejemplo es nuestra Trigonometría actual con su concepción de valores trigonométricos como razones y su útil notación.

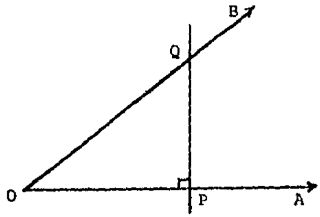
De esta manera se ha presentado un bosquejo histórico de tan importante rama de la Matemática llamada Trigonometría, la cual será estudiada en una forma elemental es esta Unidad.

6.2. Funciones Trigonométricas.

Considérese el $\angle AOB$ menor que 90°



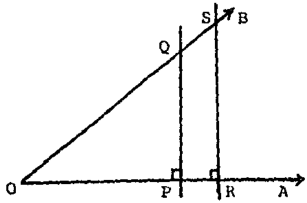
Por un punto P cualquiera, del lado $\overrightarrow{OA}$, trazamos una perpendicular que interseca al lado $\overrightarrow{OB}$ en Q



El cociente $\frac{PQ}{OQ}$ es el número que asociemos al $\angle AOB$.

Por ejemplo.- Si $PQ = 6$ y $OQ = 10$, entonces el número que asociemos al $\angle AOB$ es $\frac{6}{10}$.

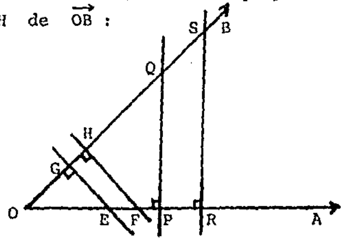
Siguiendo el procedimiento anterior, consideremos nuevamente el ángulo inicial $\angle AOB$. Trazamos una perpendicular por el punto R del lado $\overrightarrow{OA}$, que interseque a $\overrightarrow{OB}$ en S .



Si utilizamos una regla graduada y medimos podemos comprobar que:

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{OS}$$

Si en el mismo $< AOB$, trazamos perpendiculares por los puntos G y H de $\overrightarrow{OB}$:



Se puede comprobar de la misma forma anterior que:

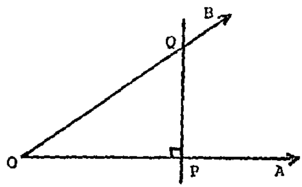
$$\frac{GE}{OE} = \frac{HF}{OF}$$

y además también que:

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{OS} = \frac{GE}{OE} = \frac{HF}{OF}$$

En todo lo anterior se puede comprobar que considerando el mismo ángulo $< AOB$ en los distintos procedimientos el número asociado no varía, es decir, la razón se conserva constante.

Ahora cambiemos la regla y asociemos al $< AOB$ el cociente $\frac{OP}{OQ}$.

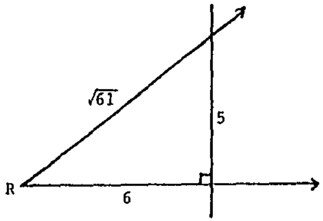


Como $OP = 8$ y $OQ = 10$, mediante esta nueva regla al $< AOB$ le asociamos el número $\frac{8}{10}$ ó 0.8 .

Por último, si al $< AOB$ le asociamos el cociente $\frac{PQ}{OP}$, como $PQ = 6$, $OP = 8$, entonces con esta nueva regla al $< AOB$ le asociamos el número $\frac{6}{8}$ ó también 0.75 .

De acuerdo a lo visto anteriormente, se puede decir que a cualquier ángulo menor de 90° le asociamos, aplicando las tres reglas vistas, tres números.

Ejemplo:



Según la primera regla al R, le asociamos $\frac{5}{\sqrt{61}}$; de acuerdo a la segunda regla el número es $\frac{6}{\sqrt{61}}$ y por la tercera el número será $\frac{5}{6}$.

Este ejemplo, nos permite introducir algunos nombres y notaciones. Es decir:

1o.) Al número $\frac{5}{\sqrt{61}}$, que asociamos al $< R$, según la primera regla, lo llamamos seno del ángulo R, y lo denotamos así:

$$\text{sen} < R = \frac{5}{\sqrt{61}} \quad \text{o mejor} \quad \text{sen } R = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

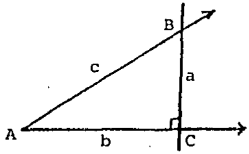
2o.) Al número $\frac{6}{\sqrt{61}}$, el cual asociamos al $< R$, por la segunda regla, lo llamamos Coseno del $< R$, y lo denotamos:

$$\cos R = \frac{6}{\sqrt{61}}$$

3o.) Finalmente, al número $\frac{5}{6}$ que asociamos al $\sphericalangle R$, mediante la tercera regla, lo llamamos tangente del $\sphericalangle R$, y lo expresamos así:

$$\tan R = \frac{5}{6}$$

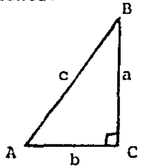
En general, si consideramos un ángulo A, y trazamos una perpendicular a uno de los lados del ángulo.



AB = c
BC = a
AC = b

Tenemos que: $\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$; $\cos A = \frac{b}{c}$; $\tan A = \frac{a}{b}$ a los cocientes indicados les llamaremos razones trigonométricas y las correspondientes que asocian a cada ángulo (menor de 90°) un número real, se les denomina funciones trigonométricas.

Tomando en cuenta lo anterior, si consideramos el $\sphericalangle A$ del triángulo-rectángulo siguiente:



Con respecto al $\sphericalangle A$, $\overline{BC}$ es el cateto opuesto y su medida es a; $\overline{AC}$ es el cateto adyacente y su medida es b, y $\overline{AB}$ es la hipetenusa cuya medida es c. Podemos afirmar que:

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} \quad ; \quad \cos A = \frac{b}{c} \quad ; \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

Esto lo podemos expresar en la siguiente manera:

Seno de un ángulo agudo es la razón constante del cateto-opuesto a la hipotenusa.

Coseno de un ángulo agudo es la razón constante del cateto adyacente a la hipotenusa.

Tangente de un ángulo agudo es la razón constante del cateto opuesto al cateto adyacente.

Hemos definido estas funciones trigonométricas, pero podemos construir otras, que son las siguientes:

La cotangente de un ángulo es el recíproco de la tangente del mismo ángulo.

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

Es decir $\cot A = \dfrac{1}{\frac{a}{b}}$, o sea $\cot A = \dfrac{b}{a}$

La secante de un ángulo es el recíproco del coseno del - mismo ángulo.

$\sec A = \dfrac{1}{\text{Cos } A}$, $\sec A = \dfrac{1}{\frac{b}{c}}$, o sea $\sec A = \dfrac{c}{b}$

la cosecante de un ángulo es el recírpoco del seno del mismo ángulo.

$\csc A = \dfrac{1}{\text{Sen } A}$; $\csc A = \dfrac{1}{\frac{a}{c}}$, o sea $\csc A = \dfrac{c}{a}$

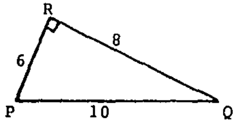
Estas funciones trigonométricas recíprocas las podemos definir en la forma siguiente:

Cotangente de un ángulo agudo es la razón constante del - cateto adyacente al cateto opuesto.

Secante de un ángulo agudo es la razón constante de la hipotenusa al cateto adyacente.

Cosecante de un ángulo agudo es la razón constante de la hipotenusa al cateto opuesto.

Ejemplo 1.- En el $\triangle$ PQR, con las medidas que se indican, obtenga sen P, cos P y tan Q .



1ª) $\text{seno} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

$\therefore \quad \text{sen } P = \dfrac{8}{10}$

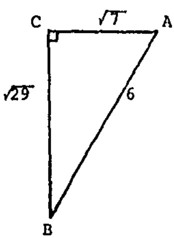
2ª) $\text{coseno} = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

$\therefore \quad \cos P = \dfrac{6}{10}$

3ª) $\text{tangente} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

$\therefore \quad \tan Q = \dfrac{6}{8}$

Ejemplo 2.- Obtenga las razones trigonométricas que se piden:



$\cos B =$

$\cot A =$

$\sec A =$

1ª) $\text{coseno} = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

$\therefore \quad \cos B = \dfrac{\sqrt{29}}{6}$

2ª) cotangente $= \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

$$\therefore \cot A = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{29}}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{29}}{\sqrt{29^2}} = \frac{\sqrt{203}}{29}$$

$$\therefore \cot A = \frac{\sqrt{203}}{29}$$

Nota: En este caso se racionalizó el denominador.

3ª) secante $= \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

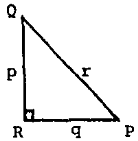
$$\sec A = \frac{6}{\sqrt{7}}$$

Racionalizando el denominador:

$$\sec A = \frac{6 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore \sec A = \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

Ejemplo 3.- Determínense las razones trigonométricas de los ángulos agudos $<P$ y $<Q$, en el ΔPQR.



Solución:

$$\text{sen } P = \frac{p}{r} \qquad \text{sen } Q = \frac{q}{r}$$

$$\cos P = \frac{q}{r} \qquad \cos Q = \frac{p}{r}$$

$$\tan P = \frac{p}{q} \qquad \tan Q = \frac{q}{p}$$

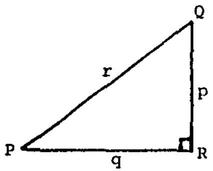
$\cot P = \frac{q}{p}$ $\qquad$ $\cot Q = \frac{p}{q}$

$\sec P = \frac{r}{q}$ $\qquad$ $\sec Q = \frac{r}{p}$

$\csc P = \frac{r}{p}$ $\qquad$ $\csc Q = \frac{r}{q}$

Ejercicio 6.1.- En cada inciso mida los lados de los triángulos y obtenga las razones trigonométricas que se indica.

a)

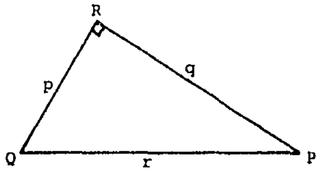


sen Q =

cos Q =

tan Q =

b)

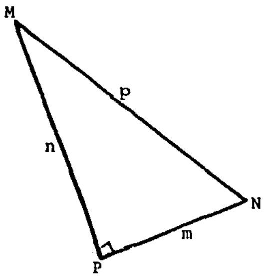


tan P =

sen P =

cos P =

c)

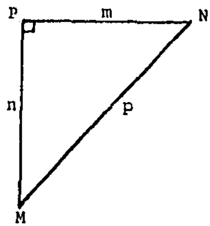


cot M =

sec M =

csc M =

d)

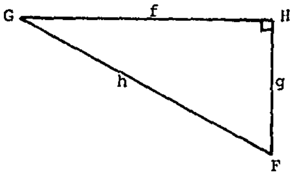


csc N =

sec N =

cot N =

e)

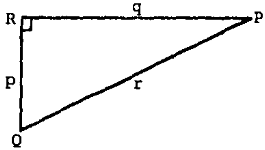


tan G =

cos H =

sen G =

f)



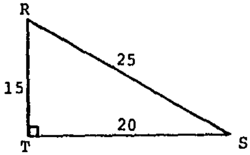
sec Q =

csc Q =

cot P =

Ejercicio 6.2.- Con las medidas de los lados indicadas en cada inciso, obtenga las razones trigonométricas que se piden:

a)

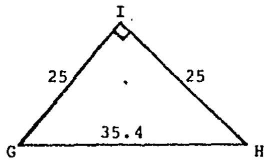


sen S =

cos S =

cot S =

b)

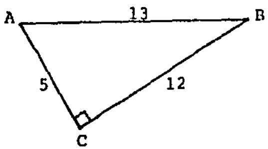


tan H =

sen G =

cos G =

c)

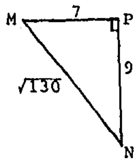


tan A =

cos A =

sen B =

d)

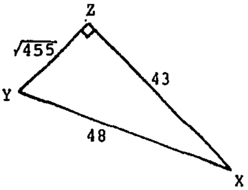


cot M =

tan M =

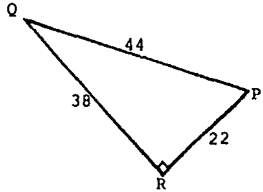
cos N =

e)



cos X =
cot Y =
tan Y =

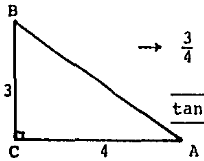
f)



sen P =
cos P =
tan Q =

Ejercicio 6.3.- En cada triángulo rectángulo, indique la función trigonométrica correspondiente que se asocia al número con respecto al ángulo enmarcado. (Ver inciso a).

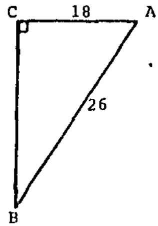
a)



$\longrightarrow \frac{3}{4}$

tan A

b)

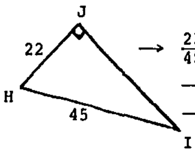


$\longrightarrow \frac{18}{26}$

______

______

c)

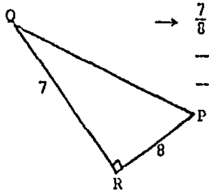


$\longrightarrow \frac{22}{45}$

______

______

d)



$\longrightarrow \frac{7}{8}$

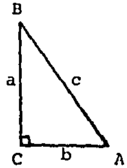
______

______

6.3. Cofunciones.

Se dice que el seno y el coseno son confuciones (no confundir con funciones recíprocas), lo que es lo mismo, el coseno es cofunción del seno y el seno es cofunción del coseno. En forma análoga la tangente y la cotangente son cofunciones, y la secante y cosecante también son cofunciones.

Si $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos agudos del triángulo rectángulo ABC, entonces $\angle A + \angle B = 90°$, es decir, $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios. Ahora:



$$\text{sen } A = \frac{a}{c} \qquad \cos B = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \qquad \text{sen } B = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \qquad \cot B = \frac{a}{b}$$

De esto se puede observar que:

Sen $A = \cos B$; $\cos A = \text{sen } B$; $\tan A = \cot B$ y también se puede afirmar que: $\cot A = \tan B$; $\sec A = \csc B$ y $\csc A = \sec B$.

Ejemplos.- Se puede comprobar mediante las tablas matemáticas (o calculadoras) que:

a) $\text{sen } 50° = \cos 40°$ pues $50° + 40° = 90°$

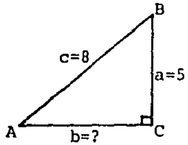
b) $\cos 42°20' = \tan 47°40'$ ya que $42°20' + 47°40' = 90°$

c) $\cot 10°25' = \tan 79°35'$, pues $10°25' + 79°35' = 90°$

En general: cualquier función trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la cofunción de su ángulo complementario.

Ahora bien, podemos calcular todas las funciones trigonométricas de un ángulo agudo cuando conocemos una de ellas.

Ejemplo 1.- Si sen A = $\frac{5}{8}$, calcule las funciones que faltan.



Como el seno de un ángulo agudo es la razón del cateto opuesto a la hipotenusa o sea:

$$\text{seno} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Entonces, el cateto opuesto mide 5 y la hipotenusa mide 8.

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$5^2 + b^2 = 8^2$$
$$b^2 = 8^2 - 5^2$$
$$b^2 = 64 - 25$$
$$b^2 = 39 \qquad \therefore \qquad b = \sqrt{39}$$

Ahora ya se tiene que $a = 5$, $b = \sqrt{39}$ y $c = 8$, entonces:

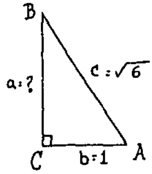
$$\text{sen } A = \frac{5}{8} \qquad\qquad \cot A = \frac{\sqrt{39}}{5}$$

$$\cos A = \frac{\sqrt{39}}{8} \qquad\qquad \sec A = \frac{8}{\sqrt{39}} = \frac{8\sqrt{39}}{39}$$

$$\tan A = \frac{5}{\sqrt{39}} = \frac{5\sqrt{39}}{\sqrt{39}\cdot\sqrt{39}} \qquad\qquad \csc A = \frac{8}{5}$$

$$= \frac{5\sqrt{39}}{39}$$

Ejemplo 2.- Dada sec A = $\sqrt{6}$, determine las funciones -- restantes:



Como la secante se define:

$$\text{secante} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$, y --

$\sec A = \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{1}$, entonces la hipotenusa mide $\sqrt{6}$ y el cateto adyacente mide 1.

Por el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 + 1^2 = (\sqrt{6})^2$$
$$a^2 + 1 = 6$$
$$a^2 = 6 - 1$$
$$a^2 = 5 \quad \therefore \quad a = \sqrt{5}$$

Se tiene: $a = \sqrt{5}$, $b = 1$ y $c = \sqrt{6}$. Por lo tanto:

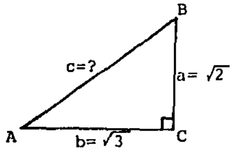
$$\text{sen } A = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} \qquad \cot A = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad \sec A = \frac{\sqrt{6}}{1} = \sqrt{6}$$

$$\tan A = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} \qquad \csc A = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

Ejemplo 3.- Se tiene que $\cot A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, calcule las funciones que faltan.

Por definición de cotangente se tiene que, cateto adyacente = $\sqrt{3}$ y cateto opuesto = $\sqrt{2}$.



Como $c^2 = a^2 + b^2$ (Teorema de Pitágoras)

$$c^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2$$
$$c^2 = 2 + 3$$
$$c^2 = 5 \quad \therefore \quad c = \sqrt{5}$$

Por lo tanto, las funciones trigonométricas son:

$$\operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \qquad \cot A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \qquad \sec A = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$
$$\tan A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad \csc A = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Ejercicio 6.4.- En cada uno de los siguiente incisos se da una función trigonométrica, determine las funciones restantes:

a) $\cos A = \frac{7}{10}$ b) $\sec A = 3$

c) $\tan A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ d) $\csc A = \frac{\sqrt{7}}{2}$

e) $\csc A = \sqrt{3}$ f) $\cot A = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$

g) $\operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ h) $\operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

i) Si $\cot A = \frac{9}{8}$, entonces $\sec A =$

j) Si $\csc A = 5$, entonces $\tan A =$

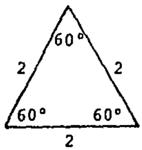
6.4. Funciones Trigonométricas de los Angulos de 30°,45° y 60°.

En la trigonometría, algunos ángulos merecen particular - atención, pues están cosiderados como ángulos especiales. En - este caso los ángulos de 30°, 45° y 60° son considerados así.

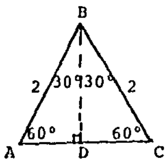
Procederemos a determinar los valores de las funciones -- trigonométricas de cada uno de éstos ángulos (sin uso de tablas matemáticas).

1.- Angulos de 30° y 60°.

Considérese un triángulo equilátero cuyo lado mide 2.

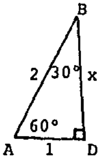


Trácese la bisectriz por el vértice B.



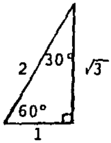
Como en el triángulo equilátero la bisectriz es también - mediana y altura, entonces se tienen los triángulos rectángulos Δ ABD y ΔCBD de los cuales se considera el ΔABD.

En este triángulo se desconoce la longitud del cateto $\overline{BD}$, pero si aplicamos el teorema de Pitágoras:



$$x^2 + 1^2 = 2^2$$
$$x^2 + 1 = 4$$
$$x^2 = 3 \quad \therefore \quad x = \sqrt{3}$$

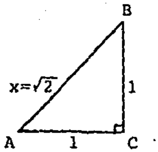
Ahora ya tenemos las longitudes de los catetos y la hipotenusa, entonces el triángulo queda así y las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60° son:



$\text{sen } 30° = \frac{1}{2} = 0.5000$	$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$	$\cos 60° = \frac{1}{2} = 0.5000$
$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$	$\tan 60° = \sqrt{3} = 1.732$
$\cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = 1.732$	$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$
$\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$	$\sec 60° = 2$
$\csc 30° = \frac{2}{1} = 2$	$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$

2.- Angulo de 45°.

Para calcular los valores de las funciones trigonométricas, consideremos un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 1, y la hipotenusa x .



Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 2$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{2}$$

Entonces las funciones trigonométricas del ángulo de 45° son:

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071 \qquad \cot 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071 \qquad \sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = 1.4142$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = 1.4142$$

Como estos resultados tienen aplicaciones con frecuencia en el curso de trigonometría, se recomienda al estudiante tenerlos presente:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
sec	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
csc	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

La expresión $sen^2 A$ es una forma simplificada de escribir- $(sen\ A)^2$, ya que sen A es simplemente un número, pues el cociente de dos longitudes (cateto opuesto/hipotenusa), entonces puede hablarse del cuadrado de este número y denotarlo $sen^2 A$.- Por ejemplo:

a) $sen^2\ 45° = (sen\ 45°)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

b) $cos^3\ 30° = (cos\ 30°)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{27}}{8}$

c) $tan^4\ 60° = (tan\ 60°)^4 = (\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = 9$

Ejemplos ilustrativos.- Calcúlese el valor de cada una de las expresiones sin el uso de las tablas matemáticas ni calculadora:

a) $sen^2\ 60° + cos^2\ 60°$

$sen^2\ 60° + cos^2\ 60° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

$\therefore\ sen^2\ 60° + cos^2\ 60° = 1$

b) $20\ sen^4\ 45° - 6\ cos^2\ 30° + 3\ sen^3\ 30°$

$20sen^4 45° - 6cos^2 30° + 3sen^3 30° = 20\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$= 20\left(\frac{1}{4}\right) - 6\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{20}{4} - \frac{18}{4} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

$\therefore\ 20sen^4 45° - 6cos^2 30° + 3sen^3 30° = \frac{7}{8}$

c) $3\ tan^3 45° + 2tan^4 60° - 12sen30°$

$3tan^3 45° + 2tan^4 60° - 12sen30° = 3(1)^3 + 2(\sqrt{3})^4 - 12\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 3 + 18 - 6 = 15$

$\therefore\ 3tan^3 45° + 2tan^4 60° - 12sen30° = 15$

Ejercicio 6.5.- Calcúlese el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones. No se utilice calculadora ni tablas matemáticas.

1.- $\cos^2 45° + \operatorname{sen}^2 45°$

2.- $7\cos^4 45° - \operatorname{sen} 60° \cos 30° + \tan 45°$

3.- $6\cos^2 30° + 20\operatorname{sen}^4 45° - 3\operatorname{sen}^3 30°$

4.- $5\sqrt{3}\ \operatorname{sen} 60° - 7\sqrt{2}\cos 45° + \operatorname{sen}^4 30°$

5.- $12\sec^2 60° - 16\csc^4 30° + \sec 30°$

6.- $3\sqrt{2}\cos 45° + 16\operatorname{sen}^6 30° - 18\cos 60°$

7.- $6\operatorname{sen} 45° \cos 45° + \cos^5 60° - 3\tan 45°$

8.- $10\cos^3 60° - 4\operatorname{sen}^5 30° - \operatorname{sen}^2 45°$

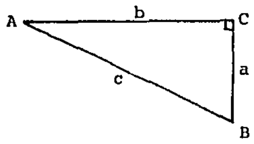
9.- $3\operatorname{sen} 45° \cos 30° + \sqrt{6}\cos^2 60° - \cos^3 60°$

10.- $\dfrac{\cot 30° \cos 30°}{\csc 30° - \operatorname{sen} 30°}$

6.5. Resolucion de Triángulos Rectángulos.

En los siguientes casos, aplicamos las funciones trigonométricas para calcular la medida de los elementos que falten. - Debemos recordar que en un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios.

Ejemplo 1.



Datos:

$\measuredangle A = 38°$

$a = 160$ m.

En este caso, conocemos la medida del $\angle A$ y la medida del cateto a. Esto quiere decir que se desconoce la medida del $\angle B$, la medida del cateto b y la hipotenusa c. Podemos respresentar -- así:

Datos:	Incógnitas:
$\measuredangle A = 38°$	$\measuredangle A =$
$a = 160$ m	$b =$
	$c =$

1ª) Calcular $\measuredangle A$.

$\measuredangle A + \measuredangle B = 90°$ (los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios).

$$\measuredangle A + 38° = 90°$$
$$\measuredangle A = 90° - 38°$$
$$\measuredangle A = 52°$$

2ª) Calcular b:

Relacionando la incógnita b, y el cateto conocido a - con el $\angle A$, nos conviene aplicar

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

Sustituyendo:

$$\tan 38° = \frac{160}{b}$$

Despejar b:

$$b(\tan 38°) = 160$$
$$b = \frac{160}{\tan 38°}$$

Como $\tan 38° = .7813$ $\quad b = \frac{160}{.7813}$

$$\therefore \quad b = 204.7 \text{ m}$$

3ª) Calcular c:

Relacionemos la incógnita c (hipotenusa) y el cateto conocido a, con el $\angle A$. Esto nos indica que debe-- mos aplicar:

$$\text{sen } A = \frac{a}{c}$$

$$\text{sen } 38° = \frac{160}{c}$$

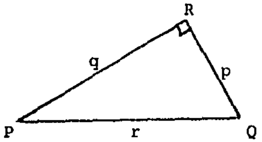
$$c(\text{sen } 38°) = 160$$

$$c = \frac{160}{\text{sen } 38°}$$

Como sen 38° = .6157 $\qquad c = \dfrac{160}{.6157}$

$$\therefore \quad c = 259.8 \text{ m}$$

Ejemplo 2. En la figura



Datos:	Incógnitas
$\measuredangle Q = 59°$	$\measuredangle P =$
$r = 65$ cm	$p =$
	$q =$

1ª) Calcular $\measuredangle P$:

Como $\measuredangle P + \measuredangle Q = 90°$

Entonces $\measuredangle P + 59° = 90°$

$$\measuredangle P = 90° - 59°$$

$$\therefore \quad \measuredangle P = 31°$$

2ª) Calcular p :

En el $\triangle PQR$, observamos que la incógnita p es el cateto adyacente y r (dato) es la hipotenusa, relacio-- nándolos con el $\angle Q$, podemos afirmar que:

$$\cos Q = \frac{p}{r}$$

Sustituyendo: $\cos 59° = \frac{p}{65}$

$65(\cos 59°) = p$

o sea $p = 65(\cos 59°)$

Como $\cos 59° = .5150$ $p = 65(.5150)$

$\therefore$ $p = 33.47$ cm

3ª) Calcular q :

En el triángulo rectángulo, podemos ver que la incógnita q es el cateto opuesto y el dato r es la hipotenusa al relacionarlos con el $\angle Q$, tenemos que:

$$\text{sen } Q = \frac{q}{r}$$

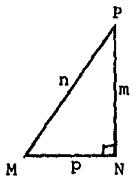
$$\text{sen } 59° = \frac{q}{65}$$

$$65(\text{sen } 59°) = q$$

Como sen $59° = .8572$ $q = 65(.8572)$

$\therefore$ $q = 55.71$ cm

Ejemplo 3. En la figura



Datos:

$m = 13$ m

$p = 8$ m

Incógnitas:

$\angle M =$

$\angle P =$

$n =$

1ª) Calcular $< M$:

Como en el triángulo rectángulo con respecto al $< M$,- m es el cateto opuesto, y p es el cateto adyacente. Entonces, aplicamos:

$$\tan M = \frac{m}{n}$$

$$\tan M = \frac{13}{8}$$

$$\tan M = 1.625$$

Localicemos 1.625 en la tabla de tangente natural, es decir ver a qué ángulo le corresponde este valor.

$$\therefore \quad \measuredangle M = 58° \ 24'$$

2ª) Calcular $\measuredangle P$:

Como $\measuredangle P = 90° - \measuredangle M$

$\measuredangle P = 90° - 58° \ 24'$

$\therefore \ \measuredangle P = 31° \ 36'$

3ª) Calcular n :

Como la incógnita n es la hipotenusa y los datos m y p son los catetos del triángulo rectángulo. Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$n^2 = m^2 + p^2$$

$$n^2 = (13)^2 + (8)^2$$

$$n^2 = 169 + 64$$

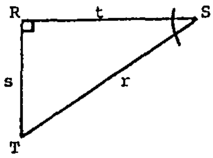
$$n^2 = 169 + 64$$

$$n^2 = 233$$

$$n = \sqrt{233} \qquad\qquad n = 15.264 \text{ m}$$

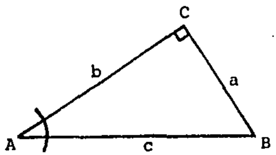
Ejercicio 6.6.- Resuelva cada uno de los siguientes triángulos-rectángulos.

a)



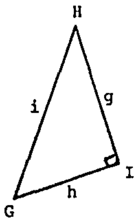
Datos	Incógnitas
$\measuredangle S = 31°$	$\measuredangle T =$
$r = 63$ mm	$s =$
	$t =$

b)



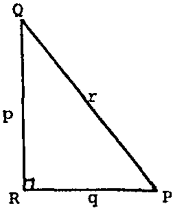
Datos	Incógnitas
$\measuredangle A = 54°$	$\measuredangle B =$
$a = 69$ mm	$b =$
	$c =$

c)



Datos	Incógnitas
$g = 61$ mm	$\measuredangle G =$
$h = 30$ mm	$\measuredangle H =$
	$i =$

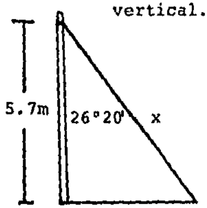
d)



Datos	Incógnitas
$q = 39$ m	$\measuredangle P =$
$r = 74$ m	$\measuredangle Q =$
	$p =$

Ejemplificaremos algunos problemas, en los que se aplican las funciones trigonométricas:

Ejemplo 1.- Un poste de telégrafos está sujeto al suelo mediante alambres amarrados al poste a una altura de 5.7m de la base de este. Determínese la longitud de un alambre si éste forma un ángulo de 26°20' con la vertical.



Solución.- Observemos que con respecto al ángulo de 26°20', se tiene que 5.7 m es la medida del cateto adyacente, y la incógnita x, es la hipotenusa. Por lo tanto la función trigonométrica es coseno.

$$\cos 26°20' = \frac{5.7}{x}$$

$$x(\cos 26°20') = 5.7$$

$$x = \frac{5.7}{\cos 26°20'}.$$

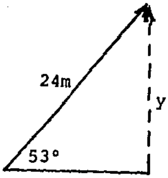
Como $\cos 26°20' = .8962$

$$x = \frac{5.7}{.8962}$$

$$\therefore \quad x = 6.3 \text{ m}$$

La longitud del alambre es 6.3 m.

Ejemplo 2.- La velocidad inicial de un proyectil es de 24 m/seg, formando un ángulo con la horizontal de 53°. (Calcule la componente vertical.



Solución.- Considerando que el ángulo de referencia mide 53° y la distancia alcanzada en un segundo es 24m representada por la hipotenusa. Se desea calcular la componente vertical, en este caso la medida del cateto opuesto. Por lo cual debemos aplicar la función seno:

$$\text{sen } 53° = \frac{y}{24}$$

$$24(\text{sen } 53°) = y$$

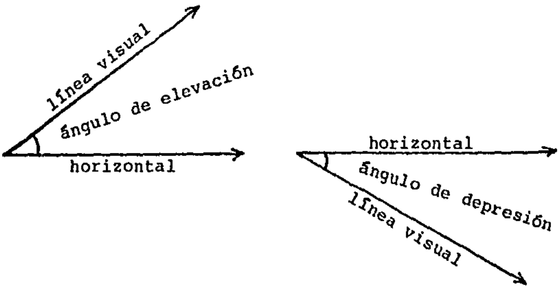
$$y = 24\ (\text{sen } 53°)$$

$$y = 24\ (.7986)$$

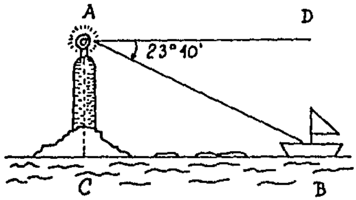
$$\therefore \quad y = 19.16 \text{ m}$$

La componente vertical es 19.16 m.

Indicación. Antes de pasar a los siguientes ejemplos debemos recordar que: Cuando el objeto observado está sobre el plano horizontal, el ángulo entre la visual dirigida hacia el objeto y la horizontal se llama ángulo de elevación; si el objeto está bajo el plano horizontal, el ángulo se llama ángulo de depresión.



Ejemplo 3.- Desde un faro situado a 23.50 m sobre el nivel del agua, el ángulo de depresión de un bote es 23°40'.- ¿A qué distancia está el bote del punto situado a nivel del agua y directamente bajo el punto de observación?



Datos:

Angulo de depresión

$\angle DAB = 23°40'$

$AC = 23.50$

Calcular: BC

1ª) $\angle BAC = 90° - \angle DAB$

$\angle BAC = 90° - 23°40'$

$\angle BAC = 66°20'$

2ª) Como $AC = 23.50$ (cateto adyacente)

$BC = x$ (cateto opuesto)

Aplicar la función tangente:

$$\tan 66°20' = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan 66°20' = \frac{x}{23.50}$$

$$23.50 (\tan 66°20') = x$$

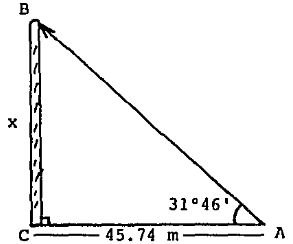
$$x = 23.50 (\tan 66°20')$$

$$x = 23.50 (2.282)$$

$$x = 53.62$$

$\therefore$ BC = 53.62 m

Ejemplo 4.- Desde un punto a nivel del suelo y a una distancia de 45.74 m del pie de un mástil, el ángulo de elevación del extremo superior del mástil es 31°46'. -- ¿Qué altura tiene el mástil?



Solución: En la figura se tiene que el ángulo de referencia, o - sea el ángulo de elevación mide 31°46'. Es conocida también la medida del cateto adyacente o -- sea AC = 45.74m. Se trata de - calcular BC, que es la medida -- del cateto opuesto.

La función que se debe aplicar es la tangente:

$$\tan A = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan 31°46' = \frac{x}{45.74}$$

$$45.74\ (\tan 31°46') = x$$

$$x = 45.74\ (\tan 31°46')$$

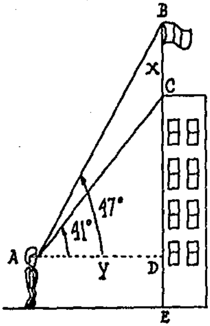
$$x = 45.74\ (.6192)$$

$$x = 28.32$$

$$\therefore \quad BC = 28.32$$

La altura del mástil es 28.32 m.

Ejemplo 5.- Se localiza un asta bandera en la parte superior de un edificio de 22 m de alto. Desde la posición de un observador cuyos ojos se localizan a 1.65 m sobre el piso, se observa que el ángulo de elevación- de la parte superior e inferior del asta sea 47° y 41°, respectivamente. Encuéntrese la longitud del asta bandera.



Datos:

EC = 22 m

ED = 1.65 m

$\measuredangle$ BAD = 47°

$\measuredangle$ CAD = 41°

Incógnitas:

AD = y

BC = x

1ª) Como EC = 22 m y ED = 1.65 m, entonces:

$$CD = EC - ED$$
$$CD = 22 - 1.65$$
$$\therefore \quad CD = 20.35 \text{ m}$$

2ª) En el Δ ACD:

$\measuredangle$ CAD = 41° ; CD = 20.35 m ; AD = y

$$\tan 41° = \frac{CD}{AD}$$
$$\tan 41° = \frac{20.35}{y}$$
$$\tan 41° = 20.35$$
$$y = \frac{20.35}{\tan 41°}$$
$$y = \frac{20.35}{.8693}$$
$$y = 23.40 \text{ m}$$
$$\therefore \quad AD = 23.40 \text{ m}$$

3ª) Ahora, consideremos el Δ ABD :

$\measuredangle$ BAD = 47° ; AD = 23.40 m y BD = 20.35 + x

$$\tan 47° = \frac{BD}{AD}$$

$$\tan 47° = \frac{20.35 + x}{23.40}$$

$$23.40(\tan 47°) = 20.35 + x$$

$$20.35 + x = 23.40\ (\tan 47°)$$

$$x = 23.40(\tan 47°)-20.35$$

$$x = 23.40(1.072)- 20.35$$

$$x = 25.08 - 20.35$$

$$\therefore \quad x = 4.73 \text{ m}$$

La longitud del asta bandera es 4.73 m.

Ejercicio 6.7.- Problemas de aplicación de las funciones trigonométricas.

1.- ¿Cuántos metros debe recorrer un automóvil para ascender 5m, si la carretera tiene una inclinación de 10° con respecto a la horizontal?

2.- En un triángulo equilátero, la altura mide 24 cm. ¿Cuánto mide cada lado?.

3.- Un octágono está inscrito en un círculo cuyo radio mide 12 cm. Encuentre el perímetro del octágono.

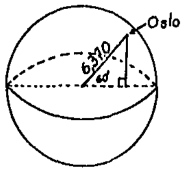
4.- Un arquero dispara hacia un blanco situado a 20m, la flecha se clava a 12 cm del blanco. ¿Cuál es la medida del ángulo de desviación?.

5.- Un constructor desea construir una rampa de 8 m de largo,- que se levanta a una altura 1.5 m del suelo. Calcule el ángulo que forma la rampa con la horizontal.

6.- Se dispara un cohete desde el nivel del mar y sube en un - ángulo constante de 75° durante 3,300 m. Calcule su altitud aproximada al pie más cercano.

7.- Una escalera de 7 m de largo descansa sobre una pared de - un edificio. Si el ángulo entre la escalera y el edificio es de 22°. ¿Aproximadamente, a qué distancia del edificio está la parte inferior de la escalera?. Si esta distancia se incrementa en 1 m. ¿Aproximadamente, qué tanto se mueve la parte superior de la escalera hacia abajo de la pared?

8.- La ciudad de Oslo, Noruega, tiene latitud norte de 60°, -- considerando 6,370 km, como la longitud del radio terrestre, encuentre la distancia de Oslo al plano ecuatorial.



Nota: Latitud es la distancia de un lugar al ecuador de la Tierra.

9.- La ciudad de Trinidad, Bolivia, se encuentra en el Hemisferio Sur a 1,650 km del plano ecuatorial, tomando como radio terrestre 6,370 km. Encuentre la latitud de Trinidad.

10.- El ángulo que forma una cuerda tensa de una cometa con la horizontal es de 35°. ¿Qué tan alta está la cometa cuando la cuerda se ha soltado 50 m?

11.- El ángulo de elevación de una escalera apoyada contra una pared es de 82°. Encuéntrese la longitud de la escalera - si su pie está a 0.85 m de la pared.

12.- Un observador, desde la azotea de un edificio de 25 m de - alto desea saber a qué distancia se encuentra una persona, si su observación la hace con un ángulo de depresión de -- 35°20'. ¿A qué distancia se encuentra la persona del edificio?.

13.- Determínese la altura a que se encuentra un globo directamente sobre una siudad A si el ángulo de depresión de la - ciudad B, situada a 10.25 km de A, es 15°20'.

14.- Un helicóptero vuela a 150 m sobre uno de los extremos de un puente que se tiende sobre un río. El ángulo de depresión del otro extremo del puente visto desde el helicóptero es de 32°. ¿Qué longitud tiene el puente?.

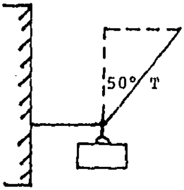
15.- Desde un cerro de 540 m de altura, el ángulo de depresión- de un punto de la ribera más cercana de un río es 48°40' y el del punto en la ribera opuesta directamente frente al - anterior es 22°20'. ¿Qué anchura tiene el río?.

16.- Desde un helicóptero situado sobre la meta a la altura de- 35 m se observa a dos automóviles de carrera con descompos turas, en una recta formando con el observador ángulos de depresión de 22°30' y 42°30', respectivamente. ¿Qué distancia de separación tienen entre ellos?.

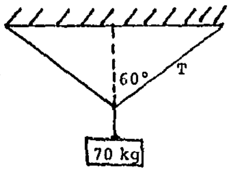
17.- Desde un punto A a 8.20 m del suelo, el ángulo de levación a la punta de un edificio es 31°20' y el ángulo de depresión a la base del edificio es de 12°50'. Calcule la altura del edificio.

18.- A medida que un globo se levanta verticalmente, su ángulo de elevación desde un punto P, en el suelo, situado a 110 km del punto Q, que está directamente bajo el globo, cambia de 19°20' a 31°50'. Determine qué tan lejos se eleva el globo durante ese período.

19.- La componente vertical de una fuerza de tensión T, indicada en la figura es de la misma magnitud del peso suspendido. ¿Cuánto pesa éste, si la tensión T es de 150 kg ?.



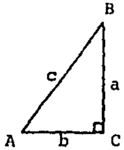
20.- Encuentre la tensión T, de los cables que sostienen el cuerpo que pesa 70 kg. Tómese en cuenta que la componente vertical en cada una de las fuerzas de tensión T es de 35 kg.



6.6. Identidades Trigonométricas.

Relaciones entre funciones trigonométricas:

El $\triangle ABC$, es un triángulo rectángulo.



Por el Teorema de Pitágoras se tiene que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

dividiendo entre c^2

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$\left(\frac{a}{c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c} \right)^2 = 1$$

Recordando que:

$$\text{sen } A = \frac{a}{c} \quad y \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

Podemos sustituir

$$(\text{sen } A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

$$\therefore \quad \text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

Teorema 1.- Para todo $\angle A$, $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$.

Ahora, como $\tan A = \frac{a}{b}$

Dividiendo entre c ambos términos de la razón

$$\tan A = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$$

y como $\frac{a}{c} = \text{sen } A$ y $\frac{b}{c} = \cos A$

$$\therefore \quad \tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$$

Teorema 2.- Para todo $\angle A$, $\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$

También se puede probar que:

$$\frac{\cos A}{\text{sen } A} = \cot a$$

Como la cotangente es recíproca de la tangente

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

Por el teorema 2. se tiene que

$$\tan A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$$

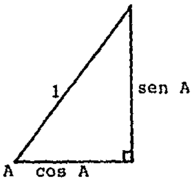
Sustituyendo en (1)

$$\frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\frac{\text{sen } A}{\cos Q}} = \frac{\cos A}{\text{sen } A} = \cot A$$

$$\therefore \quad \frac{\cos A}{\text{sen } A} = \cot A$$

Teorema 3.- Para todo $\angle A$, $\cot A = \frac{\cos A}{\text{sen } A}$

En base a las demostraciones de estos teoremas, se puede establecer el siguiente triángulo:



En él se podrá observar que se cumplen las relaciones fundamentales anteriores:

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$$

también se cumple que:

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} \quad \text{y} \quad \csc A = \frac{1}{\operatorname{sen} A} .$$

Es decir, estas relaciones pueden quedar expresadas en términos de sen A y cos A .

Ahora, considerando $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$, se tiene los siguiente:

$$\cos^2 A = 1 - \operatorname{sen}^2 A$$

$$\therefore \quad \cos A = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}$$

Análogamente y considerando la misma relación:

$$\operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen} A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

Aplicaremos las relaciones fundamentales anteriores en la demostración de las siguientes identidades:

Ejemplo 1.- Demuéstrese que $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$.

Consideremos el teorema 1

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

Dividiendo entre $\cos^2 A$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A}$$

Como

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A \ , \quad \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 \quad y \quad \frac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A$$

$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$$

$$\therefore \quad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

Ejemplo 2.- Demuestre que $\tan A + \cot A = \csc A \cdot \sec A$.

Como: $\tan a = \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A} \quad y \quad \cot A = \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$

$$\tan A + \cot A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$$

$$\tan A + \cot A = \frac{\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A}{\cos A \cdot \operatorname{sen} A}$$

$$\tan A + \cot A = \frac{1}{\cos A \cdot \operatorname{sen} A}$$

$$\tan A + \cot A = \frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} A}$$

y como $\dfrac{1}{\cos A} = \sec A \ , \quad \dfrac{1}{\operatorname{sen} A} = \csc A$

$$\therefore \quad \tan A + \cot A = \csc A \cdot \sec A$$

Ejemplo 3.- Pruebe que $\dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 A$

Se tiene que $\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$, sustituyendo en el primer miembro de la igualdad:

$$\frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{\frac{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{\cos^2 A(\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A)}{\cos^2 A(\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A)}$$

$$= \frac{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A} = \frac{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A}{1} = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$$

$$= (1 - \operatorname{sen}^2 A) - \operatorname{sen}^2 A = 1 - \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 A$$

Por lo tanto se prueba que, $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} + 1 - 2\operatorname{sen}^2 A.$

Ejemplo 4.- Demuestre que $\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

Aplicando el principio fundamental de las proporciones, - se tiene que:

$$(1 - \operatorname{sen} x)\ (1 + \operatorname{sen} x) = \cos x \cdot \cos x$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$$

$$\therefore \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Ejemplo 5.- Pruebe que $\frac{\sec x}{\operatorname{sen} x} - \frac{2 \csc x}{\operatorname{sen} x} = \tan x - \cot x$

$$\frac{\sec x}{\operatorname{sen} x} - \frac{2\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\operatorname{sen} x} - 2\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} - 2 \cot x$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} - 2\cot x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} - 2 \cot x$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} + \frac{\cos x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} - 2\cot x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - 2\cot x$$

$$= \tan x + \cot x - 2 \cot x = \tan x - \cot x$$

$$\therefore \quad \frac{\sec x}{\operatorname{sen} x} - \frac{2\cos x}{\operatorname{sen} x} = \tan x - \cot x$$

Ejercicio 6.8.- Aplique las relaciones fundamentales anteriores para demostrar las identidades trigonométricas siguientes:

1) $\operatorname{sen} A \cdot \cot A = \cos A$

2) $\frac{\csc A}{\sec A} = \cot A$

3) $\sec A - \cos A = \tan A \cdot \operatorname{sen} A$

4) $1 + \cot^2 A = \csc^2 A$

5) $\sec^2 A + \csc^2 A = \csc^2 A \cdot \sec^2 A$

6) $1 - (\cos A - \operatorname{sen} A)^2 = 2 \operatorname{sen} A \ \cos A$

7) $\frac{\operatorname{sen} A}{1 - \cos A} = \csc A + \cot A$

8) $\frac{\sec A}{\tan A + \cot A} = \operatorname{sen} A$

9) $\frac{\text{sen } x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$

10) $\frac{1 - \text{sen } t}{\cos t} = \frac{\cos t}{1 + \text{sen } t}$

11) $\frac{\cot x - 1}{1 - \tan x} = \cot x$

12) $\tan A = \frac{\text{sen } A}{1 - \text{sen}^2 A}$

13) $\frac{1 + \sec x}{\text{sen } x + \tan x} = \csc x$

14) $\frac{1}{1 - \cos r} + \frac{1}{1 + \cos r} = 2 \csc^2 r$

15) $\frac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x} - \frac{1 - \text{sen } x}{1 + \text{sen } x} = 4 \tan x \sec x$

16) $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = 1 - 2 \text{ sen}^2 A$

17) $\text{sen}^4 r - \cos^4 r = \text{sen}^2 r - \cos^2 r$

18) $\sec^4 u - \sec^2 u = \tan^4 u + \tan^2 u$

19) $\sec^2 y + \tan^2 y = (1 - \text{sen}^4 y)(\sec^4 y)$

20) $(\sec t + \tan t)^2 = \frac{1 + \text{sen } t}{1 - \text{sen } t}$

B I B L I O G R A F I A.

-BELL, E.T. "Historia de las Matemáticas" Fondo de Cultura Económica.

-HEMMERLING, EDWIN M. "Geometría Elemental" Editorial LIMUSA.

- HUTCHINSON, MARGARET W. "Geometría un enfoque intuitivo" Edit. TRILLAS.

-JURGENSEN, RAY C./DONNELLY, ALFRED J/DOLCIANI, MARY P. "Geometría Moderna" Publicaciones Cultural, S.A.

-MESERVE, BRUCE E./SOBEL, MAX A. "Introducción a las Matemáticas" Edit. REVERTE.

-MOISE, EDWIN E./DOWNS JR, FLOYD L. "Geometría" Fondo Educativo Interamericano.

-National Council of Teachers Simetría Congruencia y Semejanza. Editorial TRILLAS.

-NICHOLS, EUGENE D./PALMER, WILLIAM F./SCHACHT, JOHN F. "Geometría Moderna" C.E.C.S.A.

-POGORELOV, A.V. "Geometría Elemental" Editorial Mir.

-RICH, BARNETT. "Geometría Plana con Coordenadas" Mc Graw-Hill.

-SEYMOUR, G. "Geometry for High School" Mc Millan

-STRUIK, DIRK JAN. "Historia Concisa de las Matemáticas" I.P.N.

-THOMPSON, J.E. "Geometría" U.T.E.H.A.

-HEINEMAN, E. RICHARD. "Trigonometría Plana" Mc Graw-Hill.

-SWOKOWSKI, EARL W. "Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica" Grupo Editorial Iberoamérica.

-ANFOSSI, AGUSTIN. "Trigonometría Rectilínea"
Editorial Progreso, S.A.

-VANCE, ELBRIDGE P. "Algebra y Trigonometría"
Fondo Educativo Interamericano.