



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
CUAUTITLAN**



**"CALCULO DE FLUJO VOLUMETRICO EN UN
EXTRUSOR DE TORNILLO SENCILLO"**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO QUIMICO
P R E S E N T A
JAVIER AGUSTIN GARCIA GANDARA

ASESOR: I.O. GILBERTO ATILANO AMAYA VENTURA

CUAUTITLAN IZCALLI, EDO. DE MEXICO

1994

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN
 UNIDAD DE LA ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
 DEPARTAMENTO DE EXÁMENES PROFESIONALES

UNIVERSIDAD NACIONAL
 AUTÓNOMA DE
 MÉXICO

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS



DR. JAIME KELLER TORRES
 DIRECTOR DE LA FES-CUAUTITLÁN
 P R E S E N T E .

AT'N: Ing. Rafael Rodríguez Ceballos
 Jefe del Departamento de Exámenes
 Profesionales de la F.E.S. - C.

Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS TITULADA:

Cálculo de Flujo Volumétrico en un Extrusor de
Tornillo Sencillo

que presenta el pasante: Javier Agustín García Gándara
 con número de cuenta: 7952844-3 para obtener el TITULO de:
Ingeniero Químico

Considerando que dicha tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO.

A T E N T A M E N T E .

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx., a 7 de Noviembre de 1974

PRESIDENTE	<u>I.Q. Jorge Martínez Peniche</u>	<i>JMP</i> 7-Nov-74
VOCAL	<u>Dr. Rafael Fernández Flores</u>	<i>RF</i> 16/XI/74
SECRETARIO	<u>I.Q. Gilberto Atilano Amaya Ventura</u>	<i>GA</i> 7-NOV-74
PRIMER SUPLENTE	<u>M. en C. Ricardo P. Hernández García</u>	<i>RPH</i>
SEGUNDO SUPLENTE	<u>I.Q. María Elena Quiroz Macías</u>	<i>MEQ</i>

A mis padres, por brindarme su amor,
su ejemplo y comprensión para lograr
ser alguien en la vida.

A ti CLaudia, con todo mi amor y cariño.

A Javier y Brenda, por darme la
oportunidad de disfrutar de ellos
y de la vida.

A mi abuelita y mis hermanos por
ayudarme en todos momentos.

A Gilberto, mi amigo, compañero y
profesor...gracias...muchas gracias.

A todos mis familiares, compañeros y
profesores por ayudarme en mi vida.

INDICE

	página
I. Introducción.	(1)
II. Objetivo.	(2)
III. La industria del plástico.	(3)
a) Origen y Cronología.	
b) Clasificación de los plásticos. Termoplásticos y Termofijos.	
c) Situación actual y futuro de la industria del plástico.	
IV. Comportamiento reológico de los polímeros.	(12)
a) Definición de reología.	
b) Ley de Newton de la viscosidad.	
c) Clasificación de los fluidos. Modelos reológicos.	
d) Desarrollo de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento.	
V. Extrusión.	(24)
a) Generalidades del proceso de Extrusión.	
b) Elementos de un Extrusor y su función.	
c) Operación de un Extrusor sencillo.	
d) Instrumentación.	
e) Desarrollo de las ecuaciones de movimiento de un fluido en el interior de un Extrusor de tornillo sencillo.	

VI. Solución analítica a la ecuación de Poisson que representa el comportamiento de un fluido en un Extrusor de tornillo sencillo.

(54)

- a) Solución analítica a ecuación de Laplace para determinar flujo de arrastre.
 - b) Solución analítica a la ecuación de Laplace para determinar flujo de presión.
 - c) Teoría unidimensional
 - d) Corrección por curvatura.
 - e) Consideración del flujo de fuga
 - f) Sumario de las ecuaciones analíticas de un Extrusor de tornillo sencillo.
 - g) operación isotérmica.
- Anexo 1, Solución analítica a la ecuación de Laplace.

VII. Solución por método numérico a las ecuaciones que representan el comportamiento de un fluido en un Extrusor de tornillo sencillo.

(84)

- a) El método de diferencias finitas.
- b) Solución numérica a la ecuación de arrastre para fluido Newtoniano.
- c) Descripción del método iterativo Gauss-Seidel.
- d) Descripción del método iterativo por bifurcaciones.
- e) Solución numérica de la ecuación de Poisson que rige el comportamiento de un fluido Newtoniano en un Extrusor de tornillo sencillo.

- f) Solución numérica a la ecuación que rige el comportamiento de un Extrusor para un fluido no-Newtoniano.
- g) Simulación computacional.

VIII. Problemas reales que originan una disminución en el flujo volumétrico de un Extrusor.	(128)
IX. Conclusiones.	(132)
X. Bibliografía.	(134)

I. INTRODUCCION

En el siglo pasado el hombre no conocía los materiales plásticos que hoy en día son utilizados en forma cotidiana. La mayoría de los plásticos son sintéticos y solo algunos son naturales. Los componentes de estos materiales son macromoléculas conformadas principalmente por Oxígeno, Hidrógeno, Carbono y Nitrógeno. Las propiedades de los plásticos dependen de la extensión y forma de las moléculas de que están compuestos, variables que pueden ser controladas durante los procesos de polimerización.

Las ventajas que ofrecen los plásticos sobre otros materiales es que son ligeros pero pueden ser formulados de manera tal que se obtengan productos muy resistentes y estos se pueden tener en diferentes colores, proporcionando buenas propiedades mecánicas y una excelente resistencia química.

Actualmente la industria de los plásticos vive un período de desarrollo y crecimiento muy acelerado lo que ha dado lugar a elevadas tecnologías en la obtención y transformación de estos materiales, por lo que es importante analizar profundamente uno de los procesos más empleados a nivel industrial, el denominado EXTRUSION.

El análisis realizado en este estudio comprende una revisión general del origen y naturaleza de los plásticos cubriendo el proceso de Extrusión en forma teórica y práctica, con el propósito de caracterizar el comportamiento de estos materiales y poder optimizar dicho proceso. Para lo cual se presentan y se resuelven las

ecuaciones que rigen el comportamiento fluidodinámico de los plásticos dentro del equipo, de tal manera que sea posible predecir las condiciones de operación adecuadas para materiales de diferente reología.

La realización de este trabajo se justifica en base a la importancia que tiene hoy en día la elevada productividad que deben poseer las industrias para poder sobrevivir en un mundo muy agresivo en donde la calidad total y el precio juegan los papeles más relevantes e importantes de la comercialización de productos y servicios.

II. OBJETIVO

Predecir el comportamiento dinámico y calcular el flujo volumétrico de fluidos Newtonianos y no-Newtonianos en un Extrusor de tornillo sencillo, mediante una serie de programas de cómputo construidos a partir de métodos numéricos de diferencias finitas, para optimizar el proceso de transformación de plásticos denominado EXTRUSION.

III. LA INDUSTRIA DEL PLASTICO

a) ORIGEN Y CRONOLOGIA (ref.9)

QUE SON LOS PLASTICOS? Partiendo de su raíz la palabra PLASTICOS se deriva del griego πλαστικως que significa, capaz de ser moldeado. Por ello este término se utiliza para designar a un grupo de materiales del tipo orgánico usualmente sintéticos que se les puede dar la forma que se desee. La "American Society for Testing Materials" tiene la siguiente descripción que es más elaborada: Un Plástico es un material que contiene como ingrediente esencial una substancia de elevado peso molecular, que es sólido en su estado final y que en su manufactura es formado por flujo. Cabe mencionar en este punto que las personas relacionadas con la industria del plástico utilizan ampliamente el término "resina" como un sinónimo del término "plástico" pero esto usualmente se refiere al ingrediente esencial antes del procesamiento y fabricación.

La mayoría de los plásticos son sintéticos y sólo algunos son naturales como el hule, la gutapercha y algunos de tipo vegetal. Como se había mencionado al principio, los plásticos están conformados principalmente de carbón, hidrógeno, oxígeno y nitrógeno, que son derivados del petróleo, sal, aire y agua. Las propiedades de los plásticos dependen del tamaño y forma de las moléculas de gran tamaño de las cuales están constituidos. En las primeras etapas de manufactura de la mayoría de los plásticos estos son llamados monómeros, los cuales son moléculas simples y de pequeño tamaño, pero que bajo la influencia de calor y presión, o de la catálisis química, estas pequeñas moléculas se combinan para formar moléculas complejas

las cuales llegan a tener estructuras sólidas o semisólidas, llamadas Polímeros.

Desde un punto de vista cronológico, los plásticos comenzaron a emplearse cuando se encontró que las resinas naturales podían servir para elaborar diversos objetos de uso práctico. Estas resinas son extraídas de ciertos árboles entre los cuales está el betún, la goma laca y el ámbar. Numerosas citas bíblicas mencionan el uso de las resinas naturales. En aquellos tiempos, quizás el primer plástico reforzado de que se tiene referencia fue la cesta que la madre de Moisés fabricó para ponerlo en el río Nilo y salvarlo de los soldados del Faraón. Esta cesta estaba hecha con juncos y calafateda con betún y "pez" que es una resina extraída de los pinos. De la India, procede la goma laca usada para la preservación de algunos objetos y también la "gutapercha" que los ingleses introdujeron a nuestra civilización en el siglo XVII, la cual fue utilizada principalmente en la confección de impermeables. En América se conocía otra resina, usada por los habitantes de este continente antes de la llegada de Colón y que era extraída del árbol del caucho. Se puede decir que la primera pelota de plástico conocida fue la que usaron los mayas en su famoso juego de pelota. Los Europeos emplearon en un principio el caucho o hule como goma de borrar. En Inglaterra por ese motivo, se le conoce como rubber, que significa borrador. Después de que el caucho hizo su aparición, surgieron los materiales semisintéticos como el hule vulcanizado para neumáticos, la caseína para botones, la parkesina, la ebonita y el celuloide cuando nace la cinematografía.

Sin embargo, los plásticos totalmente sintéticos se introdujeron a principios del siglo XX, en 1907 para ser exactos, cuando el Dr. Leo

Baekland describe un material fenólico, el fenol-formaldehído y que se comercializa en 1909 con el nombre de "Baquelita". Este se convierte en un plástico usual para receptores telefónicos, aislantes eléctricos y asas para utensilios de cocina.

De 1909 a 1926, se descubrieron dos materiales plásticos, la caseína y el moldeado frío, incrementándose la lista de plásticos disponibles.

El Acetato de Celulosa fue el siguiente producto plástico en descubrirse, teniendo un desarrollo comercial importante, en 1927 fue comercializado por Launched en forma de láminas, varillas y tubos; pero dos años más tarde, en 1929 este material apareció moldeado siendo el primer plástico moldeado por inyección. Por otro lado en ese mismo tiempo, las resinas de Vinil y el Cloruro de Vinil llegaron al mercado Norteamericano. Actualmente la familia de Vinilos es de las más importantes, ya que además del Cloruro de Polivinil, fueron desarrollados el Acetato de Cloruro de Polivinil y el Cloruro de polivilideno.

El Poliestireno llegó a comercializarse en 1938, siendo actualmente una de las resinas sintéticas más utilizadas en la fabricación de juguetes, vasos térmicos y utensilios del hogar, a pesar de ser una de las resinas más antiguas.

Fue hasta 1942 cuando se introdujo a Estados Unidos de América el Polietileno, el cual se produjo originalmente en Inglaterra; sin embargo, la Marina de Estados Unidos lo utilizó como un importante material aislante de la electricidad. Así fue como el Polietileno llegó a ser el primer producto plástico en alcanzar un rango de producción anual considerable.

Así pues, por un periodo de 60 años nacen más de 50 materiales que se comercializan cada vez en forma más acelerada. Es por ello que así

como existió una edad de piedra y de los metales, a este siglo le podemos conocer como la EDAD DEL PLASTICO.

Como se puede apreciar los plásticos han tenido una buena aceptación en la vida del hombre y esto se debe a las ventajas que poseen sobre otros materiales. Las ventajas más importantes son el bajo peso con una elevada resistencia mecánica y que pueden ser transformados en productos finales por mecanismos o procesos relativamente de bajo costo. También podemos mencionar entre otras propiedades su amplio rango de colores, buenas propiedades físicas y una excelente resistencia química.

b) CLASIFICACION (ref.2)

Los materiales plásticos se clasifican por su comportamiento al calor en TERMOPLASTICOS Y TERMOFIJOS. Los primeros son Polímeros que bajo la acción del calor pueden fundirse o reblandecerse. Esto es debido a que por la estructura lineal del polímero, los átomos o grupos colgantes le proporcionan cierta atracción mutua a las cadenas lineales causada principalmente por fuerzas de Van der Waals. Estas fuerzas son relativamente débiles y pueden vencerse por la acción del calor, lo cual hace que el polímero se reblandezca o se funda. Los Termofijos, son polímeros que una vez que han sido producidos o "curados" por la acción del calor o un catalizador no se ven afectados por la temperatura, ya que no se funden ni se reblandecen por el efecto de estas. Esto es debido a la estructura entrecruzada del polímero, ya que los átomos o grupos colgantes se unen mediante enlaces químicos, principalmente covalentes, que son más resistentes a la acción del calor que las fuerzas de Van der Waals. Sin embargo a elevadas temperaturas el polímero puede descomponerse e incluso destruirse.

Los Termoplásticos a su vez se subdividen en LINEALES AMORFOS Y CRISTALINOS. En los polímeros Lineales Amorfo, las cadenas se encuentran distribuidas en forma desordenada por lo que pueden moverse independientemente una de otra cuando aumenta la temperatura. Al fundirse el polímero lo hace en un rango de temperatura llamado zona de transición difusa. Los polímeros lineales también pueden exhibir arreglos ordenados tridimensionales llamados "cristalitos" o regiones cristalinas. Estos arreglos mantienen mayor unión en las cadenas cuando aumenta la temperatura de tal forma que no existe la zona de transición difusa sino un verdadero punto de fusión. Ningún polímero es completamente cristalino, pero los polímeros que tienen cierto grado de cristalinidad se denominan cristalinos. Los polímeros lineales exhiben también una zona llamada de Transición Vitrea, que es la temperatura donde el polímero pasa de un estado sólido rígido a un estado flexible. El conocimiento de esta zona de Transición Vitrea (ZTV) es importante sobre todo para el proceso de orientación del polímero lineal. Por ejemplo, si un polímero amorfo es calentado arriba de la ZTV y en seguida se somete a un esfuerzo tensional las moléculas tenderán a alinearse en dirección a la tensión aplicada. Al mantenerse esta tensión y disminuir la temperatura, bajo la ZTV, las moléculas quedarán orientadas.

La orientación provoca algunos efectos en las propiedades del polímero; en particular se tendrá una película más delgada y con una mayor resistencia a la tensión, que el polímero no orientado. El polímero orientado también se ve afectado en sus propiedades ópticas e igualmente pueden obtenerse polímeros biorientados, es decir, sometidos al mismo proceso descrito, pero además por aplicárseles una tensión en dos direcciones simultáneamente. La orientación mejora las

otras propiedades como la resistencia al impacto y a los solventes. Los polímeros cristalinos también pueden ser sometidos al proceso de orientación, con lo que mejoran sus propiedades de resistencia al impacto y transparencia.

c) SITUACION ACTUAL Y FUTURO DE LA INDUSTRIA DEL PLASTICO (ref. 10)

Hoy en día en México existen alrededor de 3,000 fabricantes de productos plásticos y aproximadamente el 20% de ellos realizan el 80% de la producción. Estos fabricantes se dividen en tres grandes categorías que llegan a traslaparse, estas son: los Productores o Manufactureros de la resina básica o polímero y de ingredientes, los Transformadores quienes convierten la resina a una forma sólida dándole un tratamiento; y los Fabricantes-Moldeadores quienes elaboran el producto final.

Los Productores de resinas y de ingredientes, que son en su mayoría compañías químicas las cuales compran ingredientes químicos para formular las resinas y compuestos.

Los Transformadores que para este estudio se consideran como los que realizan la incorporación de compuestos al polímero para darle las propiedades finales a este material por medio del proceso llamado EXTRUSION.

Los Fabricantes-Moldeadores quienes se clasifican de acuerdo a su proceso de elaboración en:

-Moldeadores.- Que forman los productos finales utilizando moldes de la forma deseada. La tecnología más utilizada para este proceso es el Moldeo por Inyección de Soplado y el Termoformado.

-Extrusores.- Quienes producen, películas, perfiles, recubrimientos de cables, filamentos etc.

-Productores de Películas.- Que realizan el proceso de Extrusión, además de utilizar los procesos de calandreo y de llenado de molde.

-Laminadores de alta presión. Quienes forman tubos, películas, perfiles, impregnando con resina, el papel, madera y telas.

Como puede apreciarse la industria del plástico es muy extensa y es difícil establecer una clasificación ya que algunas compañías pueden llegar a formar el producto final moldeando la resina con sus compuestos o aditivos como es el caso de la producción de las tuberías, perfiles y recubrimiento de cables, donde en el proceso de extrusión realizan las dos operaciones, el tratamiento de la resina y la formación de la pieza o producto deseado.

Desde el punto de vista internacional, la industria del plástico sigue creciendo y durante 1992 la producción se incrementó en un 12% a nivel mundial.

El porcentaje por continente es:

- Asia.....20%
- Europa..... 8%
- América..... 4%

Como se observa, Asia crece y produce más plástico para exportar al mundo y en menor grado Europa y América. Específicamente México ha tenido un incremento del 2% en algunos sectores y decrementos del 15% en otros. Es decir que nuestra industria de transformación se encuentra en un proceso de desaceleración y según datos de Canacintra

nuestra planta de transformación se encuentra a un 40% de su capacidad ya que se observa que en seis meses la importación de productos plásticos como juguetes, electrodomésticos, partes automotrices, teléfonos y otros productos acabados, han multiplicado seis veces la importación.

Como consecuencia de este fenómeno, las cadenas comerciales y distribuidores que importan estos materiales plásticos han aumentado sus utilidades 10 veces más en 1992 con respecto al año pasado, conduciendo esto al cierre de algunas plantas manufactureras.

La industria del plástico en México es aún incipiente, sin embargo ante el Tratado de Libre Comercio, se abre un amplio horizonte para su crecimiento aún cuando debemos de considerar la entrada de productos plásticos americanos y canadienses. Con respecto al Bloque Europeo este buscará penetrar con moda, diseño y calidad, sin embargo se cree que por su estilo no se mostrarán muy agresivos hasta dentro de 10 años. En cambio el Bloque Asiático será más agresivo en los próximos tres años, ya que están desarrollando misiones y exhibiciones permanentes en México.

El incremento del consumo (per cápita) de productos plásticos, el crecimiento de la población de nuestro país y las amplias expectativas de exportación de nuestros productos, son la base para que el sector del plástico cuente en México con una brillante expectativa de desarrollo.

Con el fin de mostrar un análisis más completo se incluye la siguiente tabla donde puede apreciarse que el número de empresas transformadoras en el mundo es de 100,000 y el consumo global de plásticos fue de 110 millones de toneladas, con una capacidad

instalada de 135 millones en 1992.

INDUSTRIA DE TRANSFORMACION DE PLASTICOS POR PAIS

PAIS	No. DE EMPRESAS	CONSUMO 1992 Toneladas
USA	15,000	25,000,000
JAPON	8,000	12,000,000
ALEMANIA	10,000	8,000,000
ITALIA	5,000	4,000,000
BRASIL	4,000	1,000,000
VENEZUELA	600	400,000
MEXICO	3,000	1,000,000
RESTO DEL MUNDO	54,400	57,700,000
TOTAL	100,000	110,000,000

Debido a que la capacidad instalada es mayor que el consumo se pronostica una guerra de precios en materias primas a corto plazo.

Para crecer y mantener sana la planta transformadora de México, tendremos que tener conocimientos y objetividad para lograr ser competitivos en el mercado internacional, de otra manera nos transformaremos en comercializadores tendiendo a empobrecer nuestro País; razón por la cual esta tesis se enfoca a estudiar la parte teórica del proceso de EXTRUSION que es parte de la planta transformadora (Transformadores y Moldeadores) para encontrar la forma de mejorar la productividad de este proceso.

IV. COMPORTAMIENTO REOLOGICO DE LOS POLIMEROS

a) DEFINICION DE REOLOGIA (ref. 8)

Es muy importante caracterizar los fenómenos reológicos, ya que ellos describen el comportamiento de los polímeros a determinadas condiciones en los equipos de proceso, de tal manera que empezaremos por establecer el significado de Reología.

Reología se deriva de la raíz Griega " $\rho\eta\acute{\iota}\omega\varsigma$ " que significa "Flujo" o "Diarrea" y " $\lambda\acute{\omicron}\gamma\omega\varsigma$ " tratado. de ahí que esta ciencia estudia el flujo y la deformación de la materia. En términos generales un cuerpo o material se deforma cuando se le aplica una determinada fuerza que altera su forma o dimensión; un material fluye cuando el grado de deformación cambia continuamente con el tiempo y se transmite a los puntos cercanos del material.

Los materiales que consideramos para ser estudiados por la utilización que se tiene de ellos en la extrusión, están comprendidos desde los materiales sólidos hasta los fluidos Newtonianos. Toda esta clase de materiales exhiben un comportamiento no lineal en la relación esfuerzo-deformación, ya que no pueden ser caracterizados ni por la ley de Newton ni por la ley de Hooke de sólido ideal; sin embargo, por expresión común se le llama a estos fluidos "No-Newtonianos".

b) LEY DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD. (ref. 1)

Si se considera un fluido (líquido o gas) contenido entre dos placas (planas y paralelas) de una área "A" separadas a una distancia "y" y que el sistema se encuentra inicialmente en reposo, pero al tiempo $t=0$ la lámina inferior se pone en movimiento en la dirección del eje de

las "x" a una velocidad constante "v". Conforme transcurre el tiempo gana movimiento, y finalmente se establece un perfil de velocidad en estado estacionario. como se indica en al figura 4.1. Para mantener el estado estacionario es necesario aplicar una fuerza constante "F" a la placa inferior. De ahí que la relación de estas variables para un fluido laminar sigue la siguiente expresión:

$$F/A = \mu V/Y..... (4.1)$$

Esto significa que la fuerza por unidad de área es proporcional a la disminución de la velocidad con la distancia Y. La constante de proporcionalidad μ se denomina *viscosidad* del fluido.

Esta ecuación se puede reescribir en forma más explícita en términos de reología. Es decir que el esfuerzo cortante que se ejerce en la dirección "x", sobre la superficie de un fluido a una distancia "y" es linealmente proporcional al gradiente negativo de la velocidad del fluido.

$$\tau_{xy} = - \mu (dv_x/dy)(4.2)$$

Esta es la *ley de Newton de la viscosidad*, y los fluidos que la cumplen se denominan *fluidos Newtonianos*. Todos los gases y una gran cantidad de líquidos, se comportan de acuerdo a esta ley. Sin embargo, existen muchos fluidos como los termoplásticos que no obedecen esta ley, teniendo comportamientos muy diferentes.

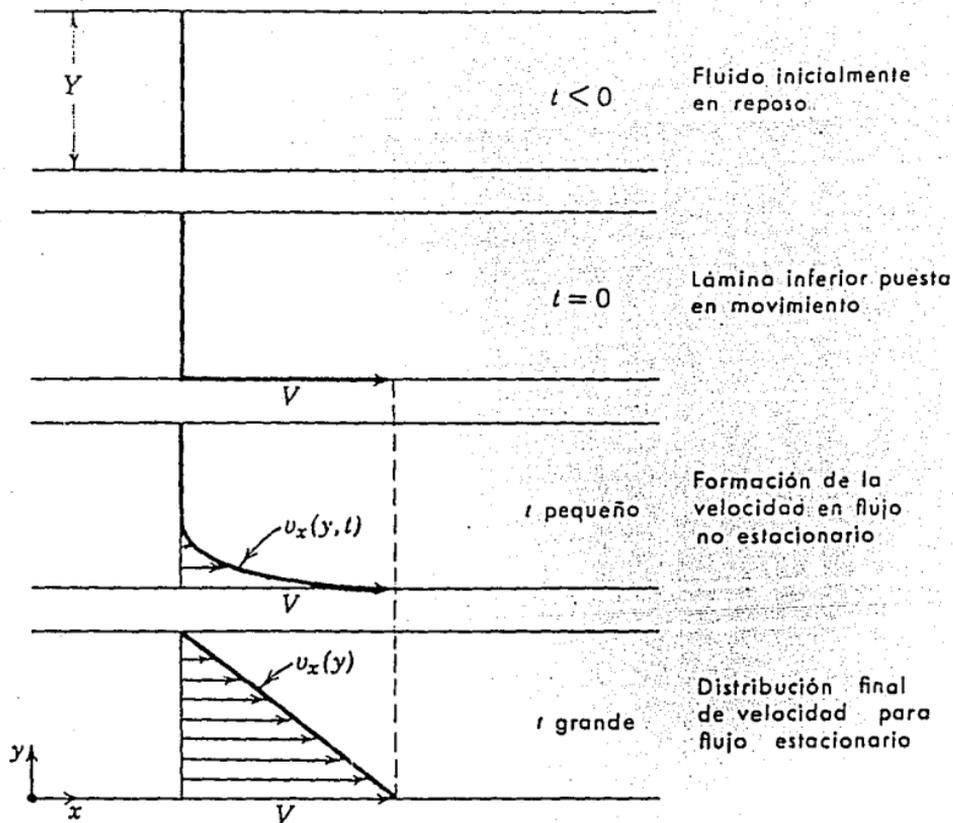


FIGURA 4.1 FORMACION DE PERFIL DE VELOCIDAD EN ESTADO ESTACIONARIO PARA UN FLUIDO CONTENIDO ENTRE DOS LAMINAS

c) CLASIFICACION DE LOS FLUIDOS. MODELOS REOLOGICOS (ref. 1)

En general los fluidos se clasifican en dos categorias:

1) Fluidos Ideales

2) Fluidos Reales

a) Newtonianos

b) No-Newtonianos

1.- Un fluido es Ideal cuando es incompresible y tiene una viscosidad de cero. Es decir, que tal fluido no ofrece resistencia a los esfuerzos, de ahí que la deformación de un fluido ideal corresponde a un esfuerzo igual a cero.

2.- Los fluidos reales comprenden fluidos Newtonianos (que siguen la ley de Newton) y los No-Newtonianos (que no obedecen dicha ley).

Para caracterizar los fluidos No-Newtonianos los podemos clasificar en dos tipos.

a) fluidos independientes del tiempo

b) fluidos dependientes del tiempo

a) Los fluidos independientes del tiempo son definidos como aquellos que tienen viscosidad dependiente de la velocidad de corte pero no de la duración del esfuerzo: entre ellos tenemos.

* Plásticos de Bingham (p.e. suspensión de lodos, granos etc.)

- * Pseudoplásticos (p.e. geles, soluciones de polímeros de alto peso molecular)
- * Dilatantes (p.e. suspensiones de alta concentración de sólidos en líquidos)

El comportamiento de los termoplásticos en los Extrusores puede comprenderse entre los fluidos independientes del tiempo por lo que describiremos los modelos matemáticos que expresan cada comportamiento.

MODELO DE BINGHAM

$$\tau_{yx} = -\mu_0 (dv_x/dy) \pm \tau_0 \quad \text{si } |\tau_{yx}| > \tau_0 \quad \dots(4.3)$$

$$dv_x/dy = 0 \quad \text{si } |\tau_{yx}| < \tau_0$$

Toda substancia que sigue este modelo, permanece rígida mientras el esfuerzo es menor a un determinado valor de τ_0 , por encima del cual se comporta de forma semejante a un fluido Newtoniano; ver figura 4.2.

MODELOS PSEUDOPLASTICOS

Por la complejidad de los fluidos pseudoplásticos No-Newtonianos, se han desarrollado algunas ecuaciones empíricas por varias personas para describir el comportamiento del fluido.

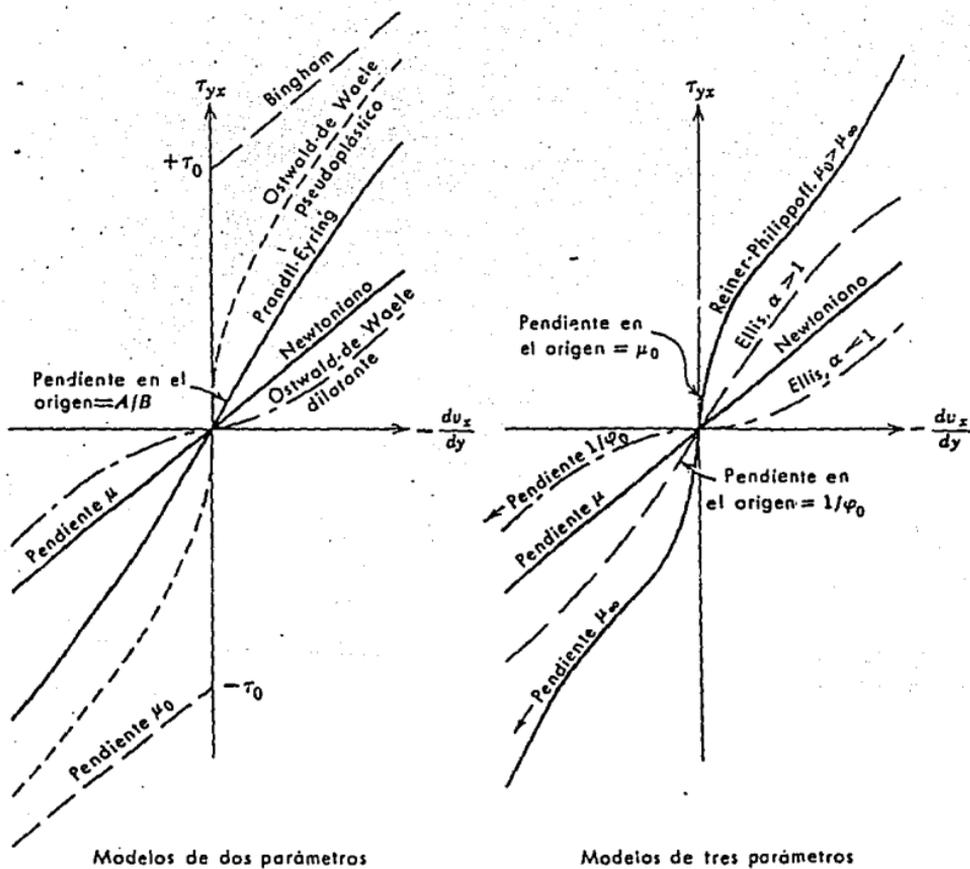


FIGURA 4.2 MODELOS NO-NEWTONIANOS EN ESTADO ESTACIONARIO.

-Modelo de Ostwald-de Waele (Ley de la potencia)

$$\tau_{yx} = -K |dv_x/dy|^{n-1} dv_x/dy \dots (4.4)$$

Esta ecuación de dos parámetros se conoce también con el nombre de la *ley de la potencia*. Para $n = 1$ se transforma en la ley de Newton, siendo $K = \mu$; por consiguiente, la desviación del valor de n con respecto a la unidad es la medida del grado de desviación del comportamiento Newtoniano. Cabe mencionar que este modelo es pseudoplástico cuando n es menor que 1 y cuando n es mayor que 1 es dilatante. A K se le conoce como índice de viscosidad o como índice de deformación y a n como índice de comportamiento (ver figura 4.2).

-Modelo de Eyring

$$\tau_{yx} = A \operatorname{arcsenh} (-dv_x/Bdy) \dots (4.5)$$

Este modelo de Eyring predice el comportamiento pseudoplástico para valores finitos de τ_{yx} , y tiende asintóticamente a la ley de Newton cuando τ_{yx} tiende a cero, siendo en este caso $\mu = A/B$. (ver figura 4.2)

-Modelo de Ellis

$$-(dv_x/dy) = (\varphi_0 + \varphi_1 |\tau_{xy}|^{\alpha-1}) \tau_{yx} \dots (4.6)$$

Este modelo consta de tres parámetros positivos ajustables: φ_0 , φ_1 , y α . Si se toma para α un valor mayor que la unidad, el modelo tiende hacia la ley de Newton, esto para valores bajos de τ_{yx} , mientras que

si se elige para α un valor menor que la unidad, la ley de Newton se establece para valores elevados de τ_{yx} . Este modelo tiene gran flexibilidad, ya que están comprendidos como casos particulares, tanto la ley de Newton (para $\phi_1 = 0$), como la ley de la potencia (para $\phi_0 = 0$).

En lo que respecta a los fluidos dependientes del tiempo se encuentran los fluidos Tixotrópicos y los Reopéticos. En ellos la viscosidad depende tanto de la velocidad de corte como del tiempo de aplicación del esfuerzo. Sin embargo, estos únicamente los mencionamos ya que los termoplásticos para extruir no están dentro de esta categoría.

d) DESCRIPCION DE LAS ECUACIONES DE CONTINUIDAD Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO. (ref. 1)

Con el objeto de poder caracterizar el proceso de extrusión de materiales termoplásticos, partiremos de la descripción de la *ecuación de continuidad* (desarrollada mediante la ley de conservación de materia) y de la *ecuación de movimiento* de tal manera que mediante un análisis específico del transporte de material que se desarrolla en un Extrusor se pueda lograr obtener la expresión matemática que describa su funcionamiento.

Ecuación de Continuidad.

Esta ecuación se deduce aplicando un balance de materia a un elemento estacionario de volumen (en coordenadas X, Y, Z) a través del cual está circulando un fluido; ver figura 4.3:

$$\left| \begin{array}{l} \text{velocidad de acumu} \\ \text{lación de materia} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{velocidad de en-} \\ \text{trada de materia} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{salida de materia} \end{array} \right|$$

$$(\partial\rho/\partial t) = - [(\partial \rho v_x/\partial x) + (\partial \rho v_y/\partial y) + (\partial \rho v_z/\partial z)] \dots(4.7)$$

$$\partial\rho/\partial t = - \nabla \cdot \rho \vec{v} \dots(4.7a)$$

Esta ecuación describe la variación de la densidad para un punto fijo, como consecuencia de las variaciones del vector de velocidad másica $\rho \vec{v}$

Ecuación de Movimiento.

Realizando un balance de cantidad de movimiento para un elemento de volumen (en coordenadas X, Y, Z) se tiene:

(ver figura 4.4).

$$\left| \begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{acumulación} \\ \text{de cantidad} \\ \text{de movimiento} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{entrada de} \\ \text{cantidad de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{salida de} \\ \text{cantidad de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \text{suma de las} \\ \text{fuerzas que} \\ \text{actúan sobre} \\ \text{el sistema} \end{array} \right|$$

Esta expresión es una ecuación vectorial, con componentes en cada una de las tres direcciones y que tiene un comportamiento no-estacionario ya que el fluido puede moverse en cualquier dirección. Sin embargo, para mayor sencillez y por conveniencia en el análisis del movimiento de material en el tornillo de un Extrusor consideraremos solamente una componente (z). La cantidad de movimiento que entra y sale de un elemento de volumen se lleva a cabo mediante dos mecanismos: 1) Convección, debido al flujo total del fluido. 2) Transporte molecular, a causa de los gradientes de velocidad.

Por otro lado tenemos en la mayoría de los casos, que las únicas

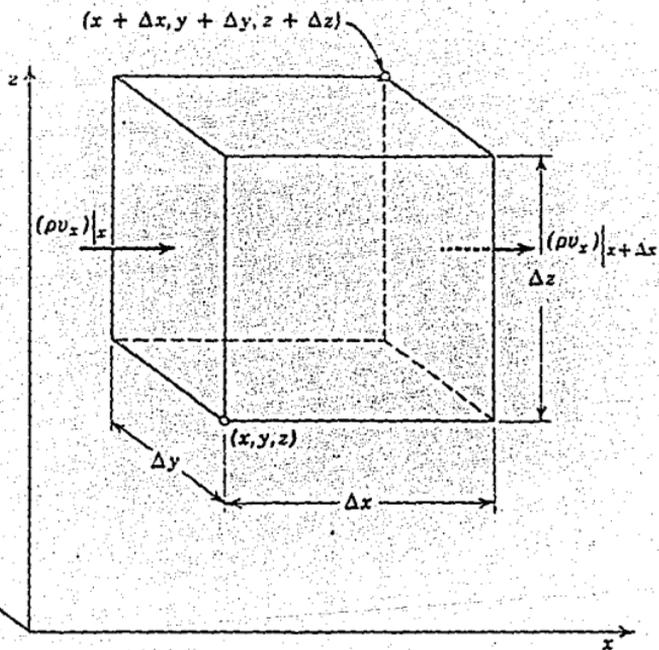


FIGURA 4.3 REGION DE VOLUMEN $\Delta x \Delta y \Delta z$ FIJA EN EL ESPACIO, A TRAVES DE LA CUAL ESTA CIRCULANDO UN FLUIDO.

fuerzas importantes son las procedentes de la presión del fluido (p) y la fuerza gravitacional por unidad de masa (g). De lo anterior se deduce la ecuación de movimiento para la componente z.

$$\begin{aligned}
 (\partial \rho V_z / \partial t) &= - [(\partial \rho V_x V_z / \partial x) + (\partial \rho V_y V_z / \partial y) + (\partial \rho V_z V_z / \partial z)] + \\
 &\text{velocidad de aumento de cantidad de mov.} \quad \text{velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por convección.} \\
 + \rho g z &- [(\partial \tau_{xz} / \partial x) + (\partial \tau_{yz} / \partial y) + (\partial \tau_{zz} / \partial z)] - (\partial p / \partial z) \\
 &\text{fuerza de gravitación} \quad \text{velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por transporte viscoso.} \quad \text{fuerza de presión} \\
 &\dots (4.8)
 \end{aligned}$$

Si esta ecuación se deriva, se factoriza y se le sustituye la ecuación de continuidad se obtiene la siguiente ecuación para la componente (z) :

$$\rho (DV_z / Dt) = - (\partial p / \partial z) - [(\partial \tau_{xz} / \partial x) + (\partial \tau_{yz} / \partial y) + (\partial \tau_{zz} / \partial z)] + \rho g z \quad \dots (4.9)$$

Para los otros componentes x e y se tienen expresiones análogas llegando finalmente a la expresión vectorial:

$$\rho \frac{D \mathbf{V}}{D t} = - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \nabla p + \rho \mathbf{g} \quad \dots (4.9a)$$

La ecuación de movimiento descrita en esta forma es una expresión de la segunda ley de Newton, en donde *masa X aceleración = suma de fuerzas*. Es decir que un elemento de volumen que se mueve con el fluido es acelerado por las fuerzas que actúan sobre el.

Esta ecuación se utilizará (en el siguiente capítulo) para determinar la distribución de velocidad en el tornillo del Extrusor.

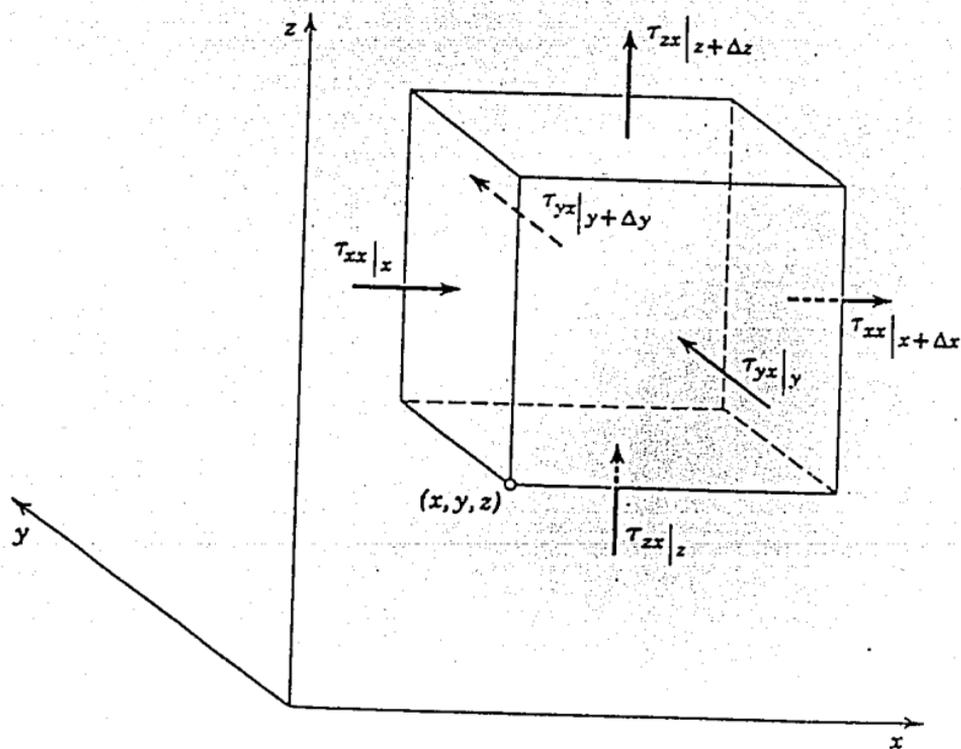


FIGURA 4.4 ELEMENTO DE VOLUMEN $\Delta x \Delta y \Delta z$, EN EL QUE SE SEÑALA CON FLECHAS LA DIRECCION EN QUE SE TRANSPORTA EL COMPONENTE X DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO A TRAVES DE LAS SUPERFICIES.

V. EXTRUSION

a) GENERALIDADES DEL PROCESO DE EXTRUSION. (ref. 2)

El término Extrusión se puede definir como la acción de dar forma a un material forzándolo a través de un orificio. Esta definición puede aplicarse a dos procesos generales, Extrusión con tornillo y Extrusión con pistón.

La Extrusión del primer material termoplástico data de 1870 cuando el nitrato de celulosa se extruyó con un pistón hidráulico para formar una varilla. Los Extrusores de tornillo fueron los primeros utilizados en los comienzos de 1930 para la extrusión de termoplásticos.

Los materiales termoplásticos son extruidos predominantemente en extrusores de tornillo sencillo o de un solo tornillo. La Extrusión se emplea en la producción de tuberías, películas, perfiles, recubrimiento de cables etc. que son considerados como productos finales. Los Extrusores también son ampliamente utilizados en el mezclado e incorporación de aditivos al polímero a lo que se le conoce en la industria de los plásticos como "Compounding". Es decir que se le da un tratamiento al polímero para que pueda posteriormente ser moldeado y se fabriquen infinidad de objetos.

El proceso de Extrusión es ampliamente utilizado en diferentes industrias en donde se transportan fluidos de elevada viscosidad que las bombas centrífugas y reciprocantes no pueden realizar.

Los Extrusores de mayor venta son los de tornillo sencillo, sin embargo, en el mercado se encuentran extrusores de doble tornillo, triple tornillo y multitornillo; de estos últimos los más utilizados son los de doble tornillo ya que tienen ventajas sobre los Extrusores de tornillo sencillo principalmente por su elevada productividad.

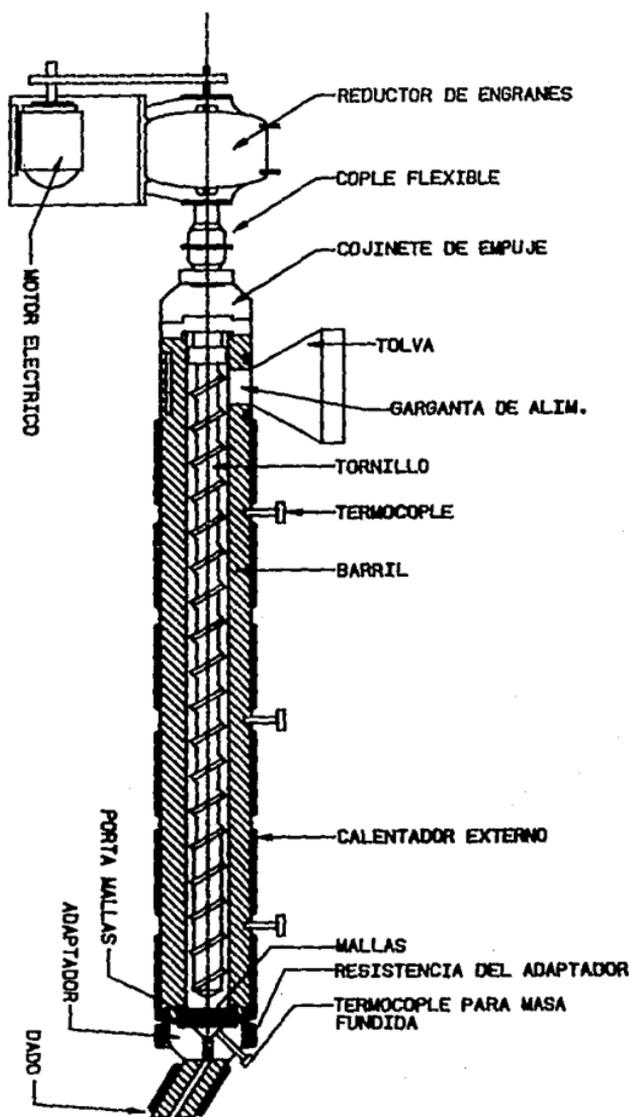
En este trabajo se describirá y se mencionará el uso de cada uno de los elementos de un Extrusor de tornillo sencillo y después se desarrollarán las ecuaciones que rigen la operación del mismo con el propósito de entender el diseño y poder optimizar este proceso de transformación.

b) ELEMENTOS DE UN EXTRUSOR Y SU FUNCION (ref. 2)

Los elementos de un tornillo sencillo son mostrados en la fig. 5.1. El polímero o resina se alimenta al canal del *tornillo* desde una *tolva* pasando a través de una *garganta* de alimentación. El *tornillo* gira dentro de un *barril* o *cañón* por medio de un mecanismo motriz que consta de un *motor*, *reductor de engranes* y un *cojinele de empuje*. se aplica Energía Calorífica al polímero mediante *calentadores eléctricos externos*, sujetos al barril; la temperatura se mide por medio de *termocoples* insertados en el mismo Barril. La resina en gránulos o en polvo se transporta a lo largo del canal del tornillo y se funde por tratamiento térmico y por efectos friccionantes, para que después el material fundido sea forzado y fluya consecutivamente a través de una *malla*, un *adaptador* y un *dado*, que conforman el *cabezal*.

Las medidas de los extrusores de tornillo sencillo son especificadas por el diámetro interno del barril. Las medidas de Extrusores más comunes son: 1, 1 1/4, 1 1/2, 2, 2 1/2, 3 1/4, 3 1/2, 4 1/2, 6 y 8 pulgadas.

FIG. 5.1 ELEMENTOS DE UN EXTRUSOR



Las capacidades de estos extrusores tiene un rango de producción de aproximadamente 5 lb/hr para el de 1 pulgada de diámetro a 1,000 lb/hr para una máquina de 8 pulgadas de diámetro (ver figura 5.2). Para lograr comprender el funcionamiento de un Extrusor de tornillo sencillo se detallará el funcionamiento de cada uno de los elementos que lo conforman.

Tolva de Alimentación. Este elemento es el que contiene al material y por medio de la garganta de alimentación que se encuentra en la parte inferior de la tolva se gradúa la cantidad de material con que se abastece al tornillo. El diseño de la tolva y la garganta dependen de la forma física del material o polímero con sus ingredientes o aditivos. La garganta de alimentación puede ser circular o rectangular en su sección transversal y sus lados pueden ser verticales o con pendiente, (ver fig. 5.3). La garganta de alimentación puede empatar con el tornillo en forma tangencial con un bajo-corte cuando el extrusor se alimenta con materiales hulosos principalmente. La apertura de la garganta debe ser al menos igual al diámetro del extrusor.

El tornillo. El corazón del extrusor es el tornillo. Este funciona para transportar la resina sin plastificar desde la tolva y liberarla a través del dado a velocidad uniforme y constante como un fundido homogéneo. Las secciones funcionales de un tornillo son mostradas en la figura 5.4. Estas son, sección de alimentación, donde la profundidad del canal es la más grande, en seguida la sección de transición, donde la profundidad del canal decrece en forma espiral y evolutiva hasta la profundidad de la sección de compresión. Es decir,

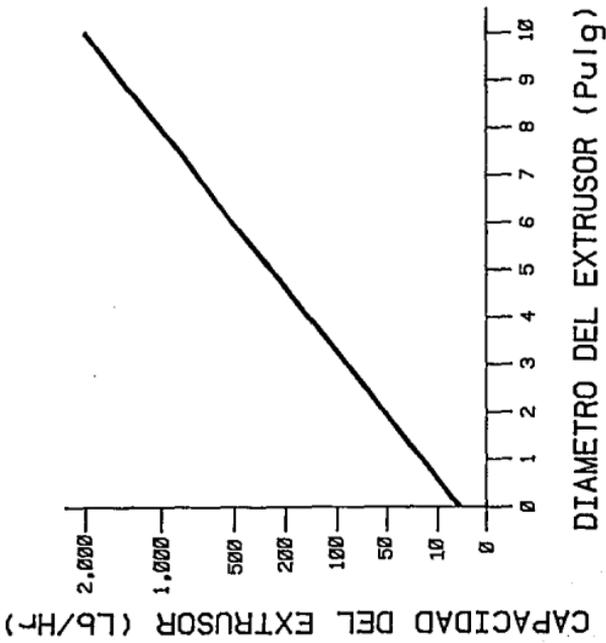
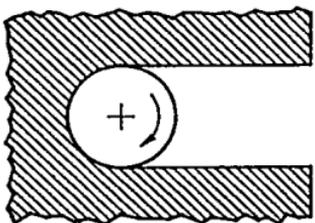
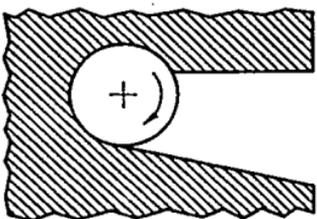


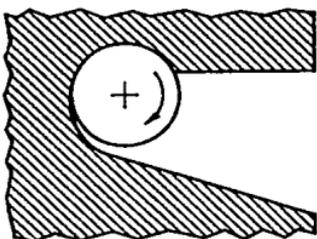
FIG. 5.2 PROMEDIO DE LAS CAPACIDADES DE EXTRUSORES



GARGANTA
VERTICAL



GARGANTA
CON PENDIENTE



GARGANTA
DE BAJO CORTE

FIG. 5.3 GARGANTAS DE ALIMENTACION

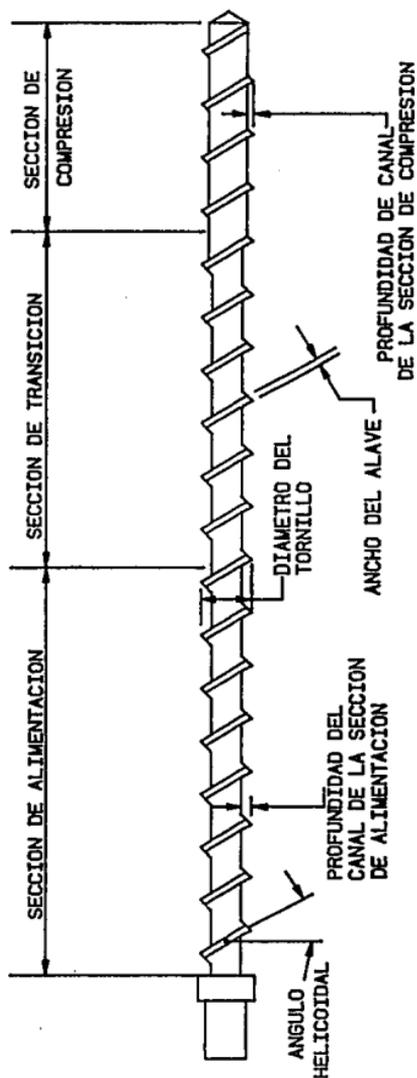


FIG. 5.4 TORNILLO DE COMPRESION

que el área de la sección transversal del canal del tornillo decrece hacia el dado para compensar el cambio en la densidad del material y las diferencias en la eficiencia del transporte para el sólido y el plástico fundido. Este cambio en el área de la sección transversal se lleva a cabo por la reducción de la profundidad del canal, la longitud del "pitch", o por ambos. Los diseños de tornillos más comunes son mostrados en la figura 5.5.

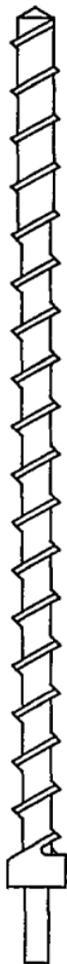
El Barril. El barril provee una de las superficies para impartir esfuerzo al plástico y una superficie a través de la cual se aplica calor externo al polímero. Los barriles de longitud grande para la extrusión de plásticos son deseables, ya que proveen una área mayor para la transferencia de calor y una oportunidad adicional para el mezclado, obteniendo como resultado un material uniformemente fundido. La razón longitud/diámetro de los Extrusores es una importante especificación de diseño. Esta relación es la longitud efectiva de la máquina (de la parte trasera de la tolva de alimentación al portador de mallas) dividida entre el diámetro nominal (diámetro interno del barril). Los Extrusores de termoplásticos son fabricados normalmente en un rango de longitud/diámetro (L/D) de 16:1 a 25:1.

Los barriles de los extrusores se pueden calentar eléctricamente, por medio de resistencias o con un enchaquetamiento por medio de aceite circulando a través del barril.

El calentamiento eléctrico del barril ofrece las ventajas de rápida respuesta, control por zonas, y un cerrado rango de temperaturas de operación.

Las resistencias eléctricas se pueden fabricar de varias formas y

TIPO DE COMPRESION DE CORTA TRANSICION



PITCH CONSTANTE CON PROFUNDIDAD DE CANAL VARIABLE



PITCH VARIABLE CON PROFUNDIDAD DE CANAL CONSTANTE



TORNILLOS CON ALAVES
COMPLETOS

PITCH CONSTANTE CON PUNTA DE TORPEDO LISA



PITCH VARIABLE CON PUNTA DE TORPEDO CON ALAVES



TORNILLOS TIPO
TORPEDO

FIG. 5.5 TORNILLOS DE EXTRUSION MAS COMUNES

dimensiones y de diferentes capacidades (watts). Los barriles calentados eléctricamente se pueden enfriar con el uso de sopladores, agua de enfriamiento, o por un sistema de condensación de vapores. La remoción de calor en un barril encaquetado por medio de agua de enfriamiento ha llegado a ser muy importante cuando la resina tiende a sobrecalentarse por un excesivo trabajo mecánico en el canal del tornillo.

El control de las temperaturas del barril se describe más adelante en este capítulo.

c) OPERACION DE UN EXTRUSOR DE TORNILLO SENCILLO (ref. 2)

En un extrusor convencional de tornillo sencillo, el plástico se transporta en tres estados: El primero, como una partícula sólida, después como una mezcla de partículas sólidas y fundidas y finalmente como un material fundido.

En un tornillo del tipo de compresión, la sección final, que es la de compresión, es la que bombea el material ya fundido y es la más simple de analizar, ya que en esta zona aplican las leyes para un fluido viscoso.

Esta sección de compresión es muy importante en un extrusor debido a que usualmente *determina la capacidad de producción de la máquina.*

En la sección de compresión existen tres componentes de flujo: *FLUJO DE ARRASTRE* que es la acción de transportar hacia adelante generada por el movimiento relativo entre el tornillo y el barril. *FLUJO DE PRESION* se puede pensar como un contraflujo en el canal del tornillo causado por la presión en el cabezal del Extrusor. El tercer

componente de flujo es el llamado *FLUJO DE FUGA*. La contrapresión en el dado y la diferencia de presión entre las vueltas sucesivas del tornillo causan una fuga hacia atrás entre la superficie del tornillo y el barril. Usualmente este flujo de fuga es solo una pequeña fracción de los otros dos componentes de flujo y puede ser despreciable. El flujo volumétrico o másico de la sección de compresión es el flujo de arrastre menos el flujo de presión y menos el flujo de fuga.

FLUJO DE ARRASTRE. Este flujo de arrastre es la acción de transporte hacia adelante producida por el movimiento relativo entre el tornillo y el barril. Esto puede ilustrarse fácilmente considerando un Extrusor el cual no tiene restricción después de la sección de compresión. Es decir, que no tiene el portamallas o dado, y el material fundido cae fuera del tornillo en la parte del cabezal, por lo que la presión del dado es cero y no existe flujo de presión. El material será transportado por la acción del álabes hacia el material siendo restregado entre la superficie estacionaria del barril y la superficie del tornillo en movimiento. El flujo de arrastre es meramente un desplazamiento volumétrico del material en el canal del tornillo. Los factores que tienen mayor influencia en la capacidad del flujo de arrastre son: La profundidad del canal, El ancho del canal, la velocidad del tornillo y el diámetro del tornillo.

FLUJO DE PRESION. El flujo de presión se crea por la restricción que se tiene al final del extrusor por el cabezal y el dado. Es decir, que la presión al final del tornillo se incrementa y el flujo volumétrico decrece; sin embargo, el flujo de presión ha sido pensado como un

flujo hacia atrás del canal del tornillo. Para ilustrar este tipo de flujo, podemos asumir que el tornillo es fijo o estacionario, y que se tiene un material fundido con presión en el dado. Bajo esta condición hipotética el canal del tornillo actuará como un orificio largo de forma rectangular y el material fundido viajará hacia atrás del canal helicoidal, forzado por la presión en el dado; Sin embargo, en la operación real, el flujo de presión es solo una reacción al flujo de arrastre, causada por la restricción y presión en el dado del cabezal. Cabe mencionar que no existe el flujo hacia atrás a lo largo del eje del tornillo. El flujo de presión es influenciado por los siguientes factores: la profundidad del canal, el ancho del canal, el diámetro del extrusor, la longitud de la sección de compresión, la viscosidad del fundido, y la contrapresión. Es importante resaltar que esta esquematización sobre el movimiento del fluido en un tornillo sencillo se realiza así ya que la solución analítica de la ecuación que rige el comportamiento de un fluido, pudo ser resuelta bajo estas consideraciones.

CARACTERISTICAS DE LA OPERACION DE UN EXTRUSOR. Los principales patrones de flujo que contribuyen a la capacidad de producción del tornillo de un extrusor ya han sido revisados, sin embargo, un entendimiento más detallado de estos puede hacer posible la predicción del desarrollo de un Extrusor utilizando diferentes diseños de tornillo bajo diferentes condiciones de proceso. Por ejemplo, en la figura 5.6 en donde se grafica la capacidad de producción (flujo volumétrico) contra la presión en el cabezal para tres tornillos con diferentes diseños de sección de compresión, operando sobre las mismas condiciones (velocidad del tornillo, viscosidad de resina y asumiendo

comportamiento Newtoniano bajo condiciones isotérmicas). Las características de descarga con dados, con un orificio largo y un orificio pequeño son mostrados en la misma gráfica.

Un tornillo con una sección de compresión profunda tendrá una relación de capacidad de producción contra presión del cabezal como la que muestra la Línea 1. La capacidad de un tornillo con ese diseño a una "descarga abierta" (presión en el cabezal igual a cero) será alta, ya que un canal profundo causa una capacidad de flujo de arrastre muy grande. Al mismo tiempo, la capacidad de producción de este tornillo es muy sensitiva a la presión del cabezal, ya que el canal profundo del tornillo constituye un orificio largo a través del cual el flujo de presión toma lugar. Es decir, que se tiene un rápido decremento en la capacidad de producción a medida que la presión del cabezal se incrementa.

La línea 2 muestra la descarga de un tornillo con la misma profundidad en la sección de compresión, pero con esta sección más larga. El flujo de arrastre a una presión cero o "descarga abierta" no tiene cambio, pero el efecto de la contrapresión se reduce por la longitud adicional del canal en la sección de compresión.

Para un tornillo con una sección de compresión poco profunda (línea 3), la capacidad de producción será menor teniendo una "descarga abierta" o una presión en el cabezal igual a cero, debido a que la capacidad del flujo de arrastre de un tornillo está en proporción a la profundidad del canal. Al mismo tiempo, la capacidad de producción será menos sensitiva a los cambios de la contrapresión, debido a que el canal poco profundo proporciona una restricción grande al flujo de

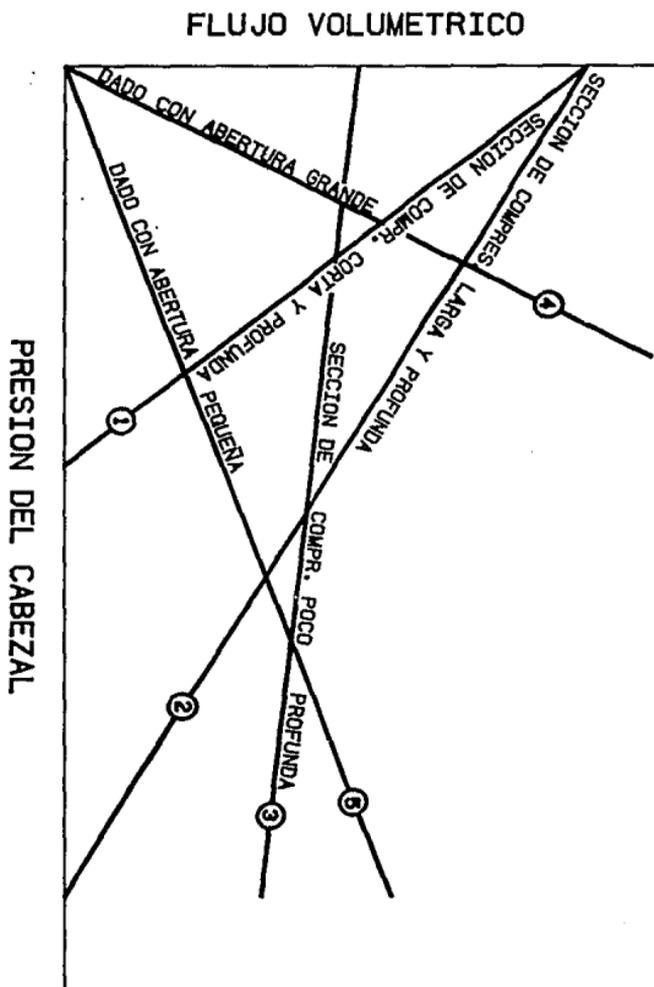
presión. Cuando se extruye un fluido Newtoniano, los cambios de la velocidad del tornillo resultarán en un desplazamiento de estas líneas y los cambios en la viscosidad de la resina producirán cambios en las pendientes.

Las líneas 4 y 5 indican las características de descarga de un dado con abertura grande y un dado con abertura corta, graficadas sobre las mismas coordenadas. A una presión en el cabezal igual a cero, no hay flujo a través del orificio. A medida que la presión del cabezal generada por el tornillo es incrementada, el flujo en el orificio de los 2 dados se incrementa. El flujo en el orificio grande aumenta más rápidamente que el flujo del orificio pequeño. La intersección para un apropiado desarrollo de tornillo y dado constituyen el punto de operación de un determinado Extrusor para una combinación de tornillo-dado.

CONSUMO DE ENERGIA Y CALOR GENERADO MECANICAMENTE EN UN MATERIAL QUE SE EXTRUYE. Hasta el momento, se ha considerado un análisis del desplazamiento volumétrico de un material que se extruye. Los requerimientos de energía y los cambios de temperatura durante el proceso de extrusión no han sido considerados.

En cualquier operación de extruir un fundido, el movimiento relativo entre el tornillo y la pared del barril causan esfuerzos al material en el canal del tornillo. La energía consumida en los esfuerzos al polímero son convertidos en calor y contribuyen al incremento de temperatura de la resina. Entonces la cantidad de calor generada en la resina se incrementa a medida que el canal del tornillo es menos profundo o largo y la velocidad del tornillo se incrementa.

FIG. 5.6 CARACTERISTICAS DEL TORNILLO Y DEL DADO



Las propiedades de flujo del polímero, es otro factor importante que afecta grandemente al calor generado por el trabajo mecánico realizado en la resina. La elevada viscosidad de materiales fundidos y la baja dependencia de viscosidad con respecto a la temperatura contribuyen a incrementar el consumo de energía y aumentar la cantidad de calor generado en el plástico durante el proceso de Extrusión.

La cantidad de calor generada en la resina a través del trabajo mecánico puede incrementarse por la reducción de la abertura del dado. Una restricción más severa, incrementa la presión del cabezal, reduce el flujo másico por vuelta del tornillo y consecuentemente expone la resina a una mayor esfuerzo.

Esto explica como las restricciones en el flujo de descarga, tales como portamallas y válvulas, pueden ser utilizados para incrementar la temperatura del material y la cantidad de mezclado al polímero en el canal del tornillo.

En los anteriores párrafos se han mencionado de una manera cualitativa, la relación entre las variables del proceso de Extrusión. Sin embargo, se requiere una evaluación cuantitativa de la relación de esas variables para este proceso.

Para citar solo un ejemplo, pudiera ocurrir que a una velocidad relativamente elevada del tornillo, la sección de compresión se mantenga sin material, porque la capacidad de la zonas de alimentación y transición para deliverar polímero fundido, pueda ser menor que la capacidad de bombeo de la sección de compresión. La capacidad para fundir el polímero, en algunos casos puede depender grandemente de la capacidad de transferencia de calor de la pared del barril. Elevadas velocidades en estos casos no incrementará la capacidad grandemente

para fundir el material de las secciones de alimentación y transición, mientras que la capacidad de bombeo de la sección de compresión aumenta directamente con la velocidad del tornillo. Como consecuencia, tendremos que las zonas de alimentación y transición limitarán la capacidad de producción del extrusor y bajo estas condiciones se podría esperar una agitación del material a la salida del dado o un desuniforme extruido.

Un cálculo exacto nos podría indicar si la sección de compresión se mantiene sin material y cual hipótesis de las dos anteriores es la correcta.

Este ejemplo, ilustra los problemas encontrados en el diseño y en la operación de los extrusores haciendo notar que se requiere de un cálculo preciso y un entendimiento cuantitativo del desarrollo de cada una de las secciones del extrusor; Sin embargo, en esta tesis se presenta el desarrollo de la ecuaciones en la sección de compresión, que como se indicó anteriormente, es la sección en donde se pueden aplicar las ecuaciones de un fluido viscoso.

d) INSTRUMENTACION (ref. 2)

Todos los extrusores están provistos con instrumentos y equipos de control. Una de las funciones de este equipo auxiliar es ayudar a la operación del Extrusor en forma segura. Otra función es proveer al operador de los controles necesarios para poder realizar ajustes en el proceso para mantener el producto dentro de especificaciones. Las variables que se miden y/o se controlan son: la temperatura y presión del polímero, la velocidad del tornillo y la potencia generada por el motor.

Temperatura. La temperatura del barril y dado son medidas por termocoples insertados en capuchones metálicos y localizados en diferentes zonas. Estos termocoples actúan como controladores de temperatura para regular la potencia eléctrica suministrada a los calentadores eléctricos. Si el barril del Extrusor está provisto con agua o aire de enfriamiento, este mismo controlador se usa para proporcionar la cantidad adecuada de enfriamiento. Cabe mencionar que la temperatura de la pared del barril no es la misma que la temperatura del polímero; Sin embargo, como la mayor cantidad de calor proviene del trabajo mecánico generado por el tornillo, considerando un polímero muy viscoso, la temperatura del polímero fundido es mayor que la temperatura del barril. Cuando se trabaja a baja velocidad del tornillo, la mayor parte del calor proviene de los calentadores eléctricos por conducción a través de la pared del cañón.

La temperatura del polímero fundido se mide utilizando un termocople el cual está en contacto con el flujo del fundido. Estos termocoples son atornillados al cabezal o dado.

Presion. La presión se puede medir en cualquier zona del cañón y/o en el cabezal; sin embargo, lo más usual en un proceso de manufactura es medir la presión en el cabezal, y en un laboratorio experimental en donde se estudie el comportamiento de los polímeros y se diseñan tornillos es muy útil contar con medidores de presión en diferentes zonas del cañón y en el cabezal.

Se pueden utilizar los manómetros de Bourdon o un instrumento transductor de presión, el cual puede medir pequeños cambios de presión en el flujo del fundido.

La presión en el cabezal se puede controlar, teniendo una válvula en

el cabezal o por el uso de mallas con diferente medidas.

Velocidad del tornillo. Como se había mencionado anteriormente, el flujo volumétrico varía en proporción directa con la velocidad del tornillo; El ajuste de la velocidad del tornillo con un potenciómetro, le proporciona al operador el control sobre la capacidad de producción del Extrusor; la velocidad, del tornillo se indica con un tacómetro convencional.

Potencia del tornillo. EL operador normalmente tiene bajo control sobre la potencia que el tornillo proporciona a la resina a una determinada velocidad. ya que si se cambia el perfil de temperatura afectará el consumo de potencia por la resina. Es decir que con una temperatura menor en el cañón, la resina consumirá mayor potencia debido a una mayor viscosidad de la resina.

Es posible estimar la potencia que libera el tornillo, considerando la potencia que consume el motor. Para un motor de corriente directa la potencia consumida se obtiene midiendo el amperaje y el voltaje. Para proteger al Extrusor se tienen cortadores de corriente cuando el amperaje del motor excede un determinado límite.

Seguridad. Los extrusores son capaces de generar elevadas y peligrosas presiones, cuando la descarga se obstruye y cuando se tiene un tornillo poco profundo y una resina muy viscosa. También las elevadas temperaturas pueden ser peligrosas, ya que todos los polímeros se descomponen cuando son expuestos a elevadas temperaturas por períodos prolongados. Los productos de la descomposición son en su mayoría gases los cuales si son acumulados en el Extrusor, pueden generar

suficiente presión para remover el dado o cabezal, pudiendo ocasionar fatalidades.

Para evitar este riesgo los Extrusores están provistos con un disco de ruptura diseñado de acuerdo al tamaño del Extrusor.

Para evitar el taponamiento del dado y consecuentemente un riesgo mayor, el operador debe utilizar una resina de menor punto de fusión que la resina del proceso, antes y después del proceso, con el propósito de limpiar el Extrusor y asegurar que cuando se caliente el Extrusor a la temperatura de procesamiento, el dado no se obstruya.

e) DESARROLLO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO DE UN EXTRUSOR DE TORNILLO SENCILLO. (ref. 1 y 2)

Introducción:

Los tornillos son normalmente usados para la Extrusión de materiales que tienen una elevada viscosidad, ya que el tornillo solo puede generar presión por la existencia de una viscosidad finita en el fluido que se bombea. También debido a una elevada viscosidad, el flujo en un tornillo es del tipo laminar en vez de turbulento, de ahí que las ecuaciones revisadas anteriormente de conservación de masa y cantidad de movimiento se pueden utilizar en conjunción con las ecuaciones que describen el comportamiento reológico del material para caracterizar la operación del tornillo.

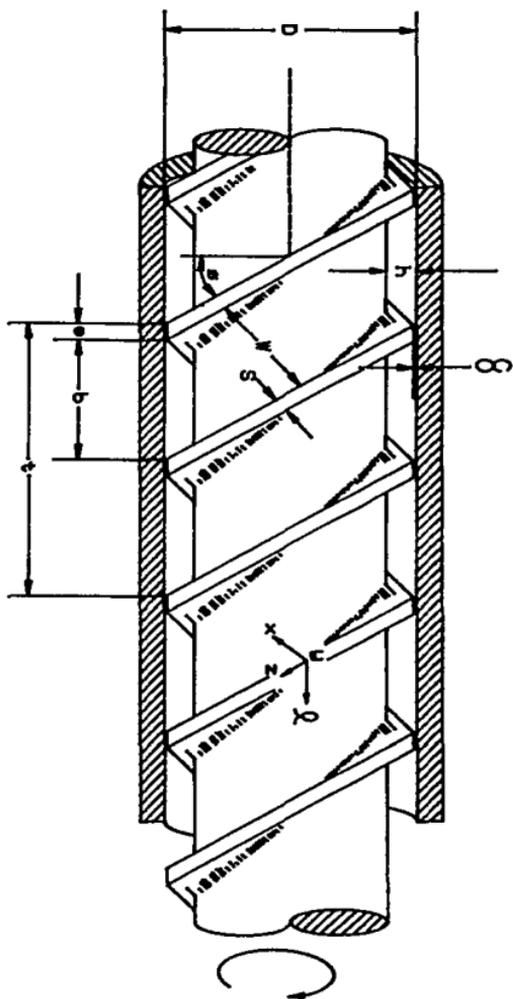
En este capítulo realizaremos un análisis matemático de las ecuaciones que rigen el comportamiento de un polímero en el proceso de Extrusión. Sin embargo, debido a que las ecuaciones son muy complejas para su solución analítica primeramente realizaremos simplificaciones con bases prácticas y obtendremos una solución aproximada, para posteriormente comparar con otra solución a la ecuación, obtenida

utilizando un método numérico por medio de un programa de computación; Después mediante el uso del mismo programa de cómputo se obtendrá por método numérico, la solución a la ecuación más general para fluidos No-Newtonianos.

Representación esquemática de un tornillo sencillo:

Para realizar un análisis matemático del movimiento del fluido en el interior del extrusor es imperativo tener un dibujo del tornillo para que las ecuaciones de trabajo puedan ser desarrolladas en forma aplicada a un tornillo con un número "n" de canales (ver figura 5.7). Cabe mencionar, que para realizar el análisis matemático no existe diferencia en asumir que el tornillo rota en un barril estacionario o que el barril rota alrededor de un tornillo estacionario. Por consideraciones mecánicas los Extrusores son fabricados con un tornillo que gira. Sin embargo, para la solución analítica de las ecuaciones matemáticas resulta más fácil considerar que el barril rota sobre un tornillo estacionario, y por lo tanto el material rota con el barril. Por esta razón, en algunas ocasiones y cuando así convenga, se adoptará la convención de que el barril rota sobre un tornillo estacionario. En la figura 5.7 vemos que los ejes x , y , z y el auxiliar l son estacionarios y están sobrepuestos al tornillo con una dirección positiva. El eje- z está dirigido a lo largo del eje del tornillo, y el eje- l a lo largo de la longitud del tornillo. El ángulo helicoidal ϕ es el ángulo entre la cara del álabe y la normal al eje del tornillo. Este ángulo se incrementa desde un mínimo en la cresta del álabe hasta un máximo en la superficie del tornillo. El ángulo helicoidal está determinado por $\phi = \arctan(t/\pi D)$, donde el diámetro D se puede medir en cualquier sección del tornillo. Este ángulo tiene

FIG. 5.7 TORNILLO SENCILLO (DOBLE ALABE)



poca variación en la sección de compresión en donde se tiene una profundidad corta. Una considerable simplificación resulta si se ignora la curvatura del canal alrededor del eje del tornillo, por lo que el canal del tornillo puede figurarse sin enrollarse y como una parte plana, como se ilustra en la figura 5.8. También el barril se puede visualizar como una placa plana la cual se desliza a través de los canales y en dirección perpendicular al eje del tornillo. Esta simplificación del modelo resultará en un error que dependerá del diámetro del extrusor y que puede ser pequeño para canales poco profundos o considerable para canales profundos.

La velocidad "radial" del barril U_c puede resolverse en dos componentes perpendiculares U_z y U_x , los cuales están dirigidos a lo largo y en forma transversal al canal del tornillo, respectivamente. En una forma similar la velocidad del fluido en cualquier punto dentro del canal se describe por los componentes V_z y V_x . Es obvio que para mantener una continuidad en la masa y sostener la componente de la velocidad en la dirección x , exista velocidad del fluido en la componente y , (V_y). Sin embargo, como V_y sólo afecta al flujo transversal V_x , el cual no afecta directamente a la capacidad de bombeo, podemos despreocupar su valor y asumir que V_y es igual a cero en los cálculos para determinar el flujo.

Distribución de velocidad en el canal:

Distribución a lo largo del eje del tornillo "z". Para establecer el patrón de flujo y el flujo volumétrico en un canal del tornillo de un Extrusor, partiremos de la ecuación de movimiento (4.9), en la dirección z .

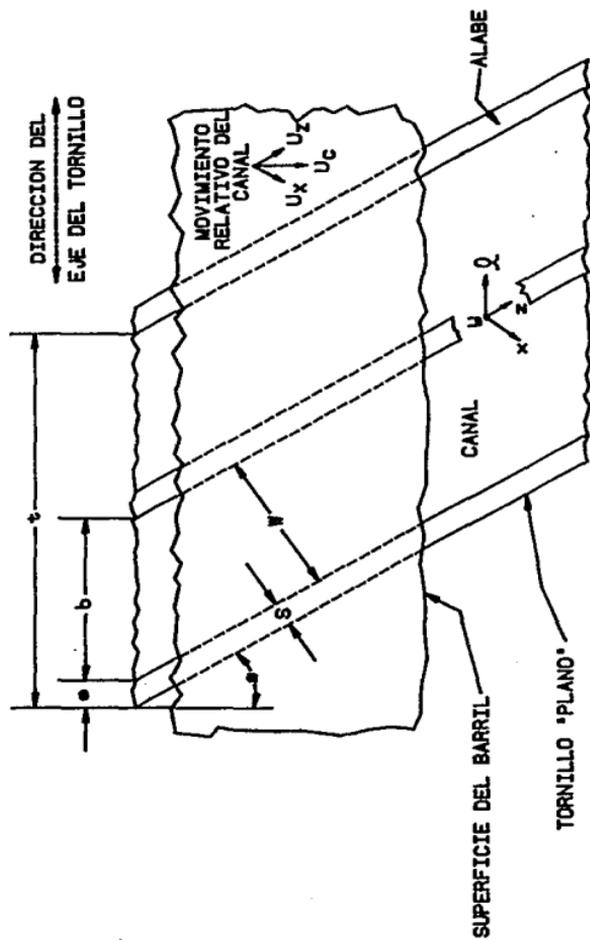


FIG. 5.8 MODELO DE CANAL PLANO DE UN TORNILLO
 SENCILLO DE DOBLE ALABE

$$\rho(DV_z/Dt) = - (\partial p/\partial z) - [(\partial \tau_{xz}/\partial x) + (\partial \tau_{yz}/\partial y) + (\partial \tau_{zz}/\partial z)] + \rho g_z \dots (5.1)$$

Para poder determinar la distribución de la velocidad en dirección z , expresaremos los esfuerzos en función de los gradientes de velocidad que para el caso más simple tenemos la expresión de la ley de Newton descrita en el pasado capítulo pero para los diferentes componentes.

$$\tau_{xz} = - \mu [(\partial V_x/\partial z) + (\partial V_z/\partial x)] \dots (5.2)$$

$$\tau_{yz} = - \mu [(\partial V_y/\partial z) + (\partial V_z/\partial y)] \dots (5.3)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu (\partial V_z/\partial z) + [2/3 \mu (\nabla \cdot \vec{V})] \dots (5.4)$$

Estas ecuaciones constituyen un planteamiento más general de la ley de Newton.

Sustituyendo estas relaciones de esfuerzo en la ecuación (5.1) tenemos:

$$\begin{aligned} \rho(DV_z/Dt) = & - (\partial p/\partial z) + \partial/\partial x [\mu (\partial V_x/\partial z + \partial V_z/\partial x)] \\ & + \partial/\partial y [\mu (\partial V_y/\partial z + \partial V_z/\partial y) + \partial/\partial z [-2\mu (\partial V_x/\partial z) + 2/3\mu (\nabla \cdot \vec{V})] \\ & + \rho g_z \dots (5.5) \end{aligned}$$

La solución analítica de esta ecuación es muy compleja por lo que

primeramente realizaremos un análisis con el propósito de simplificarla en forma segura.

Si consideramos un flujo laminar en estado estacionario de un fluido isotrópico e incompresible tenemos que:

-De la ecuación de continuidad (4.8),

$$\rho(DV_z/Dt) = 0, \quad \text{para estado estacionario.}$$

-Debido a que tenemos muy bajas variaciones en cuanto a la velocidad en los componentes x y y , para un fluido con densidad constante (incompresible) y mediante la ecuación de continuidad se tiene:

$$\partial \rho / \partial t = -\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

$$-\nabla \cdot \rho \vec{V} = -[\partial(\rho V_x) / \partial x + \partial(\rho V_y) / \partial y + \partial(\rho V_z) / \partial z]$$

$$\text{Por lo tanto } \partial(\rho V_z) / \partial z = 0 \text{ y } \partial V_z / \partial z = 0$$

-Debido a que el Extrusor que se analiza en este trabajo, que es el más común, se encuentra en posición horizontal, la fuerza gravitacional es despreciable, y el último término de la ecuación es:

$$\rho g_z = 0$$

-Con las consideraciones anteriores la ecuación de movimiento es:

$$\partial p / \partial z = \partial / \partial x (\mu \partial V_z / \partial x) + \partial / \partial y (\mu \partial V_z / \partial y) \dots (5.6)$$

-Realizando la derivación se tiene:

$$\partial p / \partial z = (\partial \mu / \partial x)(\partial v_z / \partial x) + \mu \partial^2 v_z / \partial x^2 + (\partial \mu / \partial y)(\partial v_z / \partial y) + \mu (\partial^2 v_z / \partial y^2) \dots (5.7)$$

- Factorizando se obtiene:

$$\partial p / \partial z = \mu (\partial^2 v_z / \partial x^2 + \partial^2 v_z / \partial y^2) + (\partial \mu / \partial x)(\partial v_z / \partial x) + (\partial \mu / \partial y)(\partial v_z / \partial y) \dots (5.8)$$

En esta última expresión la viscosidad puede ser función de la posición en el canal por efecto de la temperatura o de la variación del corte en esa posición. Es decir, que esta ecuación (5.8) puede ser utilizada cuando se tengan fluidos No-Newtonianos para un proceso isotérmico. Sin embargo, esta suposición se comprobará con la solución numérica a la ecuación en donde aparecen los términos de fluido No-Newtoniano.

Normalmente existe una muy pequeña variación de la viscosidad en dirección transversal o en dirección x, ya que la temperatura del fluido y la velocidad de corte no varían apreciablemente de un lado a otro del canal. Por lo tanto, la derivada parcial $(\partial \mu / \partial x)$, puede igualarse a cero, en forma segura. Reescribiendo la ecuación (5.8) se tiene:

$$\partial p / \partial z = \mu (\partial^2 v_z / \partial x^2 + \partial^2 v_z / \partial y^2) + (\partial \mu / \partial y)(\partial v_z / \partial y) \dots (5.9)$$

La ecuación (5.9) es válida para describir fluidos Newtonianos y muy posiblemente fluidos No-Newtonianos en un canal del tornillo de un

extrusor bajo condiciones no isotérmicas ($\mu = \mu [z, t]$). Sin embargo, hasta el momento no se ha encontrado una solución analítica a esta ecuación, por lo que si consideramos que la viscosidad del fluido se mantiene uniforme a lo largo de la profundidad del canal tenemos que el último término de la ecuación (5.9), $\partial\mu/\partial y = 0$. Esta situación implica que la viscosidad del fluido cerca de la pared del barril es igual a la viscosidad del fluido cerca de la superficie del tornillo, considerando que la velocidad de transferencia de calor desde la pared del barril es baja. Por lo anterior tenemos que la ecuación (5.9) se convierte en:

$$\partial p/\partial z = \mu(\partial^2 v_x/\partial x^2 + \partial^2 v_x/\partial y^2) \dots (5.10)$$

Esta ecuación es la representación más simple del patrón que sigue un fluido Newtoniano y No-Newtoniano en un Extrusor de tornillo sencillo y es la llamada ecuación de Poisson, que ha sido resuelta por varios investigadores; En los siguientes capítulos se verá su solución analítica y numérica.

Es apropiado desarrollar una ecuación matemática en la cual no se asuma un fluido Newtoniano y se introduzca a la ecuación general de movimiento algún modelo reológico que caracterice su comportamiento de tal manera que se pueda comparar los resultados con la anterior ecuación que partió de un fluido Newtoniano. Así que:

-Sustituyendo en la ecuación general de movimiento el modelo de la potencia tenemos:

$$\rho(DV_z/Dt) = - (\partial p/\partial z) + \partial/\partial x [k ((\partial V_x/\partial z)^n + (\partial V_z/\partial x)^n)] \\ + \partial/\partial y [k((\partial V_y/\partial z)^n + (\partial V_z/\partial y)^n)] + \partial/\partial z [2k (\partial V_z/\partial z)^n + 2/3k (V \cdot V)^n] \\ + \rho g_z \dots (5.11)$$

-Realizando las mismas suposiciones que en el caso anterior, se obtiene

$$\partial p/\partial z = \partial/\partial x * k(\partial V_z/\partial x)^n + \partial/\partial y * k(\mu \partial V_z/\partial y)^n \dots (5.12)$$

-Realizando la derivación se tiene:

$$\partial p/\partial z = \partial k/\partial x (\partial V_z/\partial x)^n + k \partial/\partial x (\partial V_z/\partial x)^n + \partial k/\partial y (\partial V_z/\partial y)^n + k \partial/\partial y (\partial V_z/\partial y)^n \\ \dots (5.13)$$

$$\partial p/\partial z = k(n(\partial V_z/\partial x)^{n-1} (\partial^2 V_z/\partial x^2)) + \partial k/\partial x (\partial V_z/\partial x)^n + \\ k(n(\partial V_z/\partial y)^{n-1} (\partial^2 V_z/\partial y^2)) + \partial k/\partial y (\partial V_z/\partial y)^n \dots (5.14)$$

-Considerando que la variación del índice de viscosidad es despreciable a través de la sección transversal de canal (dirección x) y en dirección perpendicular al eje del tornillo (dirección y) se obtiene:

$$\partial p/\partial z = k(n(\partial V_z/\partial x)^{n-1} (\partial^2 V_z/\partial x^2) + n(\partial V_z/\partial y)^{n-1} (\partial^2 V_z/\partial y^2)) \dots (5.15)$$

Esta ecuación representa el desarrollo o comportamiento de un fluido No-Newtoniano en un Extrusor de tornillo sencillo; Su solución solo puede ser del tipo numérico por la complejidad de la misma. El tratamiento numérico es presentado en el capítulo VII en donde se comprueba su validez. Nótese que si el índice de comportamiento es igual a 1 y el índice de deformación es igual a la viscosidad, esta ecuación se convierte en la ecuación (5.10), que también se resuelve numéricamente.

VI. SOLUCION ANALITICA A LA ECUACION DE LAPLACE QUE REPRESENTA EL COMPORTAMIENTO DE UN FLUIDO EN UN EXTRUSOR DE TORNILLO SENCILLO.

(ref. 2, 4 y 5)

a) SOLUCION ANALITICA A LA ECUACION DE LAPLACE PARA DETERMINAR FLUJO DE ARRASTRE

La solución a la ecuación de Laplace se presentará de acuerdo a la siguiente discusión que se encuentra en (ref.2). En dicha referencia se obtiene la solución a esta ecuación en dos partes, primeramente considerando $\partial p / \partial z = 0$, con lo cual la ecuación de Poisson se convierte en la ecuación de Laplace y que representa el flujo de arrastre al no haber restricción en la descarga del Extrusor. La segunda parte de la solución de Poisson se realiza considerando otras condiciones frontera, que representan una máxima presión o una obstrucción total en el dado.

$$\partial p / \partial z = \mu (\partial^2 V_z / \partial x^2 + \partial^2 V_z / \partial y^2) \dots (5.10)$$

Flujo de arrastre. Aquí se toma en cuenta que el flujo de arrastre se genera por el movimiento del barril y se considera que satisface las siguientes condiciones frontera (ver figura 6.1):

$$V_z = 0 \text{ cuando } x = 0, x = w, y = 0 \quad y$$

$$V_z = U_z \text{ cuando } y = h$$

Cuando el flujo ocurre sólo por arrastre viscoso, $\partial p / \partial z$ es cero y la solución homogénea a la ecuación (5.10) que satisface las anteriores condiciones frontera es:

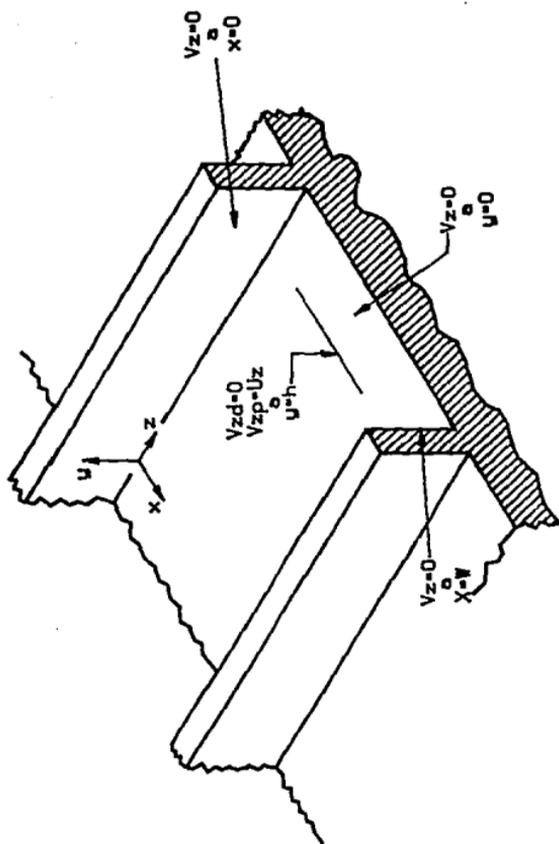


FIG. 6.1 SECCION TRANSVERSAL DEL CANAL,
CONDICIONES FRONTERA PARA LOS FLUJOS DE
ARRASTRE Y PRESION

$$V_{zd} = \frac{4 U_z}{\pi} \sum_{g=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{g} \frac{\sinh g\pi(y/w)}{\sinh g\pi(h/w)} \sin g\pi(x/w) \quad \dots(6.1)$$

Nota. el desarrollo matemático para obtener esta ecuación se presenta en el anexo 1 de este capítulo

El flujo volumétrico de arrastre en la dirección z se obtiene integrando la ecuación (6.1), sobre la sección transversal del canal:

$$Q_d = n \int_0^w \int_0^h V_z dx dy \quad \dots(6.2)$$

donde n es el número de canales paralelos y el resultado es el siguiente:

$$Q_d = \frac{n U_z w h}{2} F_d \quad \dots(6.3)$$

$$\text{donde } F_d = \frac{16}{\pi^3 (h/w)} \sum_{g=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{g^3} \tanh \left[\frac{g\pi (h/w)}{2} \right] \quad \dots(6.4)$$

F_d es denominado factor de forma del flujo de arrastre y éste depende únicamente de la geometría del canal del tornillo, dado por la relación profundidad - ancho. (h/w). Se han realizado algunas verificaciones experimentales sobre este factor de forma del flujo de arrastre (F_d), reportando (ref. 2) una buena aproximación.

b) SOLUCION ANALITICA A LA ECUACION DE LAPLACE PARA DETERMINAR FLUJO DE PRESION.

Flujo de presión. En general, un gradiente de $\partial p/\partial z$ existirá en el canal del tornillo, porque la mayoría de los extrusores generan una presión y por la restricción al flujo que genera el cabezal con sus componentes, de esta manera existirá una disminución en el flujo volumétrico; sin embargo, se supone (para obtener la solución analítica) que el flujo creado por este gradiente de presión es un flujo en contra del flujo de arrastre y que se puede expresar con la siguiente solución particular a la ecuación (5.10) donde se satisfacen las condiciones frontera:

$V_z = 0$ cuando $x = 0$, $x = w$, $y = 0$ y $y = h$. Es decir que no existe movimiento ni del tornillo ni del barril o la obstrucción en el dado es total.

La solución para expresar la distribución de velocidad para el flujo de presión puede escribirse como:

$$V_{z p} = \frac{1}{\mu} (\partial p/\partial z) \left[\frac{y^2}{2} - \frac{hy}{2} + \frac{4h^2}{\pi^3} \sum_{q=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{q^3} \frac{\cosh \left[\frac{q\pi(2x-w)}{2h} \right]}{\cosh \left[\frac{q\pi}{2} (h/w) \right]} \operatorname{sen} q\pi (y/h) \right] \dots (6.5)$$

Integrando esta ecuación sobre la sección transversal del canal, resulta una expresión para el flujo de presión de la siguiente forma:

$$Q_p = - \frac{nwh^3}{12\mu} (\partial p / \partial z) F_p \quad \dots (6.6)$$

donde F_p es un factor de forma del flujo de presión definido por:

$$F_p = 1 - \frac{192 (h/w)}{\pi^5} \sum_{g=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{g^5} \tanh \left[\frac{g\pi}{2(h/w)} \right] \quad \dots (6.7)$$

Al igual que el factor de forma del flujo de arrastre, el factor de forma del flujo de presión sólo depende de las dimensiones del canal, es decir, del radio h/w (profundidad-ancho).

c) TEORIA UNIDIMENSIONAL

Combinación del flujo de arrastre y del flujo de presión; Teoría unidimensional. El flujo volumétrico neto y la velocidad local del fluido en el canal del tornillo se pueden obtener sumando ambos flujos de arrastre y presión. Por lo que el flujo volumétrico neto Q se obtiene combinando las ecuaciones (6.3) y (6.6):

$$Q = Q_d + Q_p \quad \dots (6.8)$$

$$Q = \frac{n U_z w h}{2} F_d - \frac{n w h^3}{12\mu} (\partial p / \partial z) F_p \quad \dots (6.9)$$

La velocidad Axial U_z del fluido a través del canal del tornillo se expresa en términos de la componente de velocidad tangencial U_θ en dirección del movimiento del fluido, mediante la ecuación (6.10) (ver fig.5.7)

$$U_z = U_0 \cos\phi \quad \dots (6.10)$$

$$U_z = \pi D N \cos\phi \quad \dots (6.11)$$

El área de flujo esta relacionada con la distancia b mediante la siguiente relación:

$$w = b \cos\phi \quad \dots (6.12)$$

$$w = (t/n - e) \cos\phi \quad \dots (6.13)$$

$$w = \pi D (1-ne/t) \operatorname{sen}\phi/n \quad \dots (6.14)$$

$$t = \pi D \tan\phi \quad \dots (6.15)$$

$$z = 1/\operatorname{sen}\phi \quad \dots (6.17)$$

Sustituyendo en la ecuación (6.9) se obtiene:

$$Q = \frac{F_d \pi^2 D^2 N h (1-ne/t) \operatorname{sen}\phi \cos\phi}{2} - \frac{F_p \pi D h^3 (1-ne/t) \operatorname{sen}^2\phi}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial l}\right) \quad \dots (6.18)$$

Observaciones. Como se puede notar en la ecuación (6.18), el flujo de arrastre en el tornillo es independiente de la viscosidad del fluido, ya que la suposición desde el principio del desarrollo de la ecuación contemplaba una variación despreciable de la viscosidad a través de la profundidad del canal. Por otro lado, sin tomar en cuenta las variaciones de F_d y $(1-ne/t)$, el flujo de arrastre se incrementa en proporción directa al cuadrado del diámetro del tornillo, a la primera potencia de la profundidad y directamente a la velocidad de rotación del tornillo. En contraste con lo anterior, tenemos que el flujo de presión depende, de la viscosidad del fluido.

d) CORRECCION POR CURVATURA DE CANAL.

En el desarrollo de todas las ecuaciones anteriores se asumió el modelo del canal del tornillo plano; esta simplificación se puede considerar razonable o no riesgosa para tornillos con canal poco-profundos; sin embargo, este modelo no se considera adecuado para tornillos con canal profundo. Por lo que se analizará la distribución de velocidad en el canal curvo para determinar el error si consideramos un modelo de canal plano.

Si se asume que el ángulo helicoidal es pequeño, se puede aproximar el flujo de arrastre a lo largo del canal del tornillo al movimiento de un fluido contenido entre dos cilindros rotando uno con respecto al otro. Aquí también se considera que el barril está en movimiento y el tornillo permanece estático.

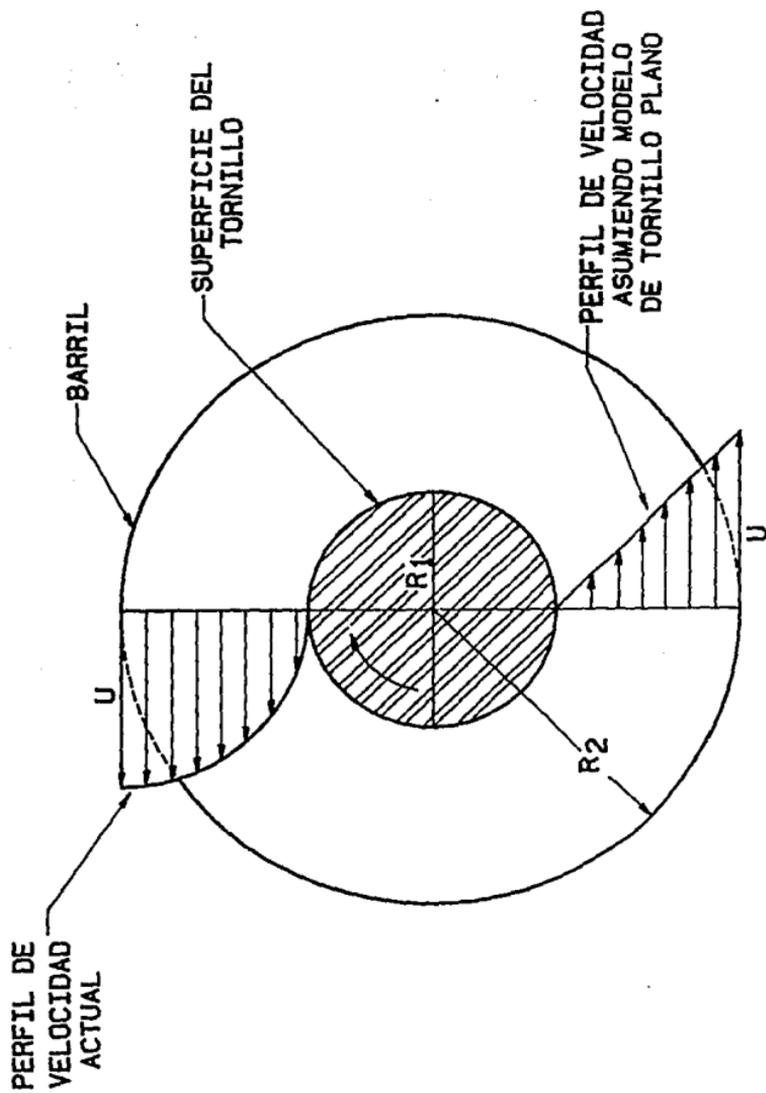
La distribución de velocidad aparece en la figura 6.2 y para un fluido Newtoniano se tiene:

$$V_z = 2\pi N r \left[\frac{1 - (R_1/r)^2}{1 - (R_1/R_2)^2} \right] \cos \phi \quad \dots (6.24)$$

Integrando esta ecuación a través del área del canal y despreciando los efectos del diseño del álabe se obtiene una expresión para determinar el flujo volumétrico para un modelo de canal con curvatura, de la siguiente manera:

$$Q_d = \frac{F_{cd} N \pi^2 D^2 N h (1 - ne/t) \operatorname{sen} \phi \cos \phi}{2} \quad \dots (6.25)$$

Como se puede observar esta expresión está escrita en forma análoga al flujo de arrastre para el modelo del canal plano, con la diferencia que se considera un "factor de curvatura del canal" el cual está



(VELOCIDADES RELATIVAS PARA UN TORNILLO ESTACIONARIO)

FIG. 6.2 MODELO DE EXTRUSOR CILINDRICO CONCENTRICO

definido por:

$$F_{cd} = \frac{1}{2(h/D)} - \frac{\ln \left[\frac{1}{1 - 2(h/D)} \right]}{(h/D) \left[\left(\frac{1}{1 - 2(h/D)} \right)^2 - 1 \right]} \quad \dots (6.26)$$

Donde D es el diámetro del barril.

Como se puede observar el "factor de curvatura" solo depende de la relación profundidad-diámetro.

e) CONSIDERACION DEL FLUJO DE FUGA.

En adición al flujo en el canal del tornillo, usualmente existe un pequeño flujo de fluido a través del claro entre la superficie del álabe y la pared del barril. Este flujo se llama *flujo de fuga*. En la literatura (ref.2) se desarrollan las ecuaciones de flujo en un Extrusor considerando el flujo a través de un plano perpendicular al eje del tornillo, plano A-A' en la figura 6.3, diferente a lo desarrollado anteriormente considerando el flujo perpendicular al eje helicoidal del canal.

El flujo a través del plano A-A' es dividido por el flujo que ocurre en el canal A-G y por el flujo que pasa sobre el álabe A'-G. El flujo a través de G-A, se encuentra integrando los componentes de la velocidad hacia abajo del canal y el transversal sobre el área circunferencial del canal. obteniendo:

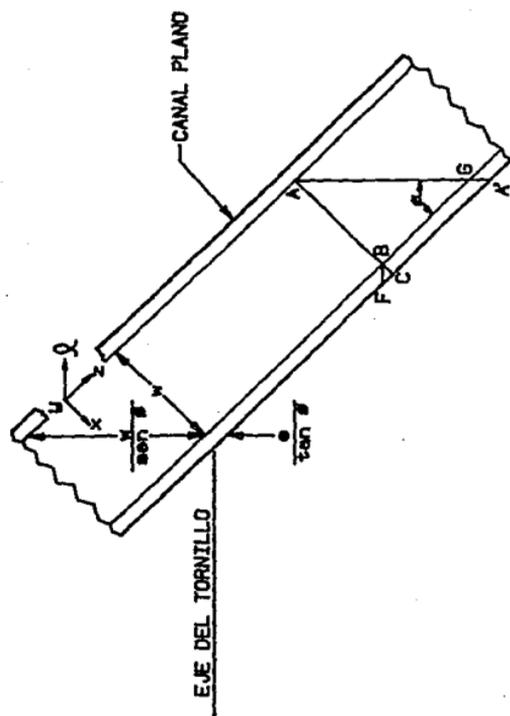


FIG. 6.3 GEOMETRIA DEL CANAL

$$Q_{AG} = \int (V_z \text{ sen } \phi - V_x \text{ cos } \phi) dA \quad \dots(6.27)$$

Donde

$$dA = \frac{w}{\text{sen}\phi} dy \quad \dots(6.28)$$

Si los efectos del diseño del álabe son despreciados, la componente de la velocidad hacia abajo V_z es definida por la siguiente ecuación:

$$V_z = U_z[(1 - 3a)(y/h) + 3a(y/h)^2] \quad \dots(6.29)$$

y la componente transversal de la velocidad V_x por la ecuación (6.30)

$$V_x = U_x[(1 - 3c)(y/h) + 3c(y/h)^2] \quad \dots(6.30)$$

En donde

$$a = \frac{h^2}{6U_z\mu} (\partial p/\partial z) \quad \dots(6.31)$$

El término c representa el cociente flujo de arrastre/flujo de presión en el plano transversal. Si existe una diferencia entre la superficie del álabe y la pared del barril, no todo el fluido se mueve a través de él en la dirección (+ x), debido al flujo de arrastre transversal, el cual es girado y retornado por el flujo de presión; alguna cantidad de flujo escapa sobre el álabe en la dirección (+ x). Por lo que c es menor que la unidad cuando existe un claro entre la superficie del álabe y la superficie del barril. Así que c se define por:

$$c = \frac{(1 - J) - \frac{[J^3 (\mu/\mu_L) \pi D a]}{n e \tan \phi}}{1 + \frac{[J^3 (\mu/\mu_L) w]}{e \cos \phi}} \dots (6.32)$$

Donde J se define por:

$$J = \delta/h \dots (6.33)$$

Donde h se define como la diferencia del radio del barril menos el radio a la superficie del tornillo.

Debido a que J es usualmente menor que la unidad, la ecuación (6.32) se puede aproximar a:

$$c = 1 - J \dots (6.34)$$

Si las ecuaciones (6.28), (6.29) y (6.30) se sustituyen en la ecuación (6.27) y se desarrolla la integración, se obtiene el siguiente resultado:

$$Q_{AC} = \frac{nU_z w h}{2} (1 - a) - \frac{nU_x w h}{2 \tan \phi} (1 - c) \dots (6.35)$$

El primer término de esta ecuación (6.35), representa el flujo hacia abajo de los flujos combinados de arrastre y de presión en el canal. El segundo término de esta misma ecuación considera la influencia del flujo de fuga sobre el flujo neto en el canal. Este término es igual a cero si c es igual a uno y si el claro es igual a δ , con lo que el

flujo de fuga es igual a cero.

Si se realizan algunas sustituciones se tiene:

$$U_x = \pi D N \cdot \text{sen } \phi \dots (6.36)$$

$$U_z = \pi D N \cos \phi \dots (6.37)$$

$$w = \frac{\pi \cdot D (1 - ne/t) \text{ sen } \phi}{n} \dots (6.38)$$

Por lo que la ecuación 6.38 se puede transformar a:

$$Q_{ac} = \frac{\pi^2 D^2 N h (1 - ne/t) \text{ sen } \phi \cos \phi}{2} (c - a) \dots (6.39)$$

o

$$Q_{ac} = \frac{\pi^2 D^2 N h (1 - ne/t) \text{ sen } \phi \cos \phi}{2} (1 - a - j) \dots (6.40)$$

El flujo de fuga axial puede ser considerado como el flujo a través del claro de altura δ y de ancho $ne/\tan \phi$, que es inducido por un gradiente de presión axial. Bajo estas condiciones el flujo puede expresarse de la siguiente manera:

$$Q_{ac}' = \frac{(ne/\tan \phi) \delta^3}{12 \mu L} (\partial p / \partial l)_{BF} \dots (6.41)$$

La ecuación (6.41) para un flujo axial en el claro del álabe se convierte en:

$$Q_{ca}' = \frac{-n \delta^3 \pi D N \cos^2 \phi}{2h^2} (\mu/\mu L) [bc + a(\frac{\pi D}{n \tan \phi} + e)] \dots (6.42)$$

Cabe hacer notar que debido a un gradiente de presión a través del canal en el plano transversal, la ecuación (6.42) predice la existencia de un flujo de fuga finito aún considerando la ausencia de un gradiente de presión axial en el canal.

La descarga neta en el Extrusor se obtiene mediante la suma de las ecuaciones (6.40) y (6.42):

$$Q_{\text{net}} = \frac{\pi^2 D^2 N h (1 - na/t) \text{sen } \phi \text{ cos } \phi}{2} (1 - a - j) - \frac{n \delta^3 \pi D N \text{cos}^2 \phi}{2h^2} (\mu/\mu_L) [bc + a(\frac{\pi D}{n \tan \phi} + e)] \dots (6.43)$$

Para la mayoría de los casos, el segundo término de la ecuación (6.43) es considerablemente más pequeño que el primer término y puede ignorarse. Bajo estas circunstancias el flujo volumétrico del Extrusor puede obtenerse considerando únicamente el primer término o calcularlo a partir de la ecuación (6.40). El mayor efecto sobre el álabe es el decremento del flujo axial en el canal y se observa cuando $J > 0$ en la ecuación (6.43).

Por otro lado si examinamos la ecuación (6.42), se observa que si a es cero, y no existe flujo de presión, el flujo volumétrico puede calcularse a partir de la ecuación (6.18), en la cual h se sustituye por $h - \delta$, la distancia superficie del tornillo - cresta del álabe.

Es importante mencionar que a no es igual a uno, cuando el dado está completamente bloqueado en un Extrusor teniendo un flujo de fuga finito. En este caso, el flujo de presión no es igual al flujo de

arrastre, pero si es igual al flujo de arrastre menos al flujo de fuga. El cociente flujo de presión - flujo de arrastre, a es menor que uno.

f) SUMARIO DE LAS ECUACIONES ANALITICAS DE UN EXTRUSOR DE TORNILLO SENCILLO.

En esta sección se ha revisado la solución a la ecuación diferencial de movimiento para un flujo en una canal de un tornillo de un Extrusor y se presentó para diversas condiciones de frontera, y un modelo geométrico. Las soluciones se presentaron, utilizando un elemento o factor el cual se aplica tanto al flujo de arrastre como al flujo de presión sobre el modelo de canal plano. Es importante hacer notar que los factores no pueden rigurosamente combinarse en forma lineal y aplicarlos al mismo tiempo en el modelo unidimensional, ya que la ecuación no puede ser resuelta simultáneamente para satisfacer todas las condiciones frontera impuestas durante el desarrollo de estos factores. Sin embargo, es conveniente presentar la ecuación que determina el flujo volumétrico neto de la siguiente forma:

$$Q = Q_d + Q_p$$

$$Q = \frac{F_d' \pi^2 D^2 h N (1-n_e/t) \operatorname{sen} \phi \cos \phi}{2} - \frac{F_p' \pi D \dot{N} (1-n_e/t) \operatorname{sen}^2 \phi}{12\mu} \quad (\partial p / \partial l)$$

.... (6.44)

Donde los factores F son combinados linealmente en F_d' y F_p' por:

$$F_d' = F_d F_{\mu d} F_{ed} \quad \dots (6.45)$$

$$F_p' = F_p F_{\mu p} \quad \dots (6.46)$$

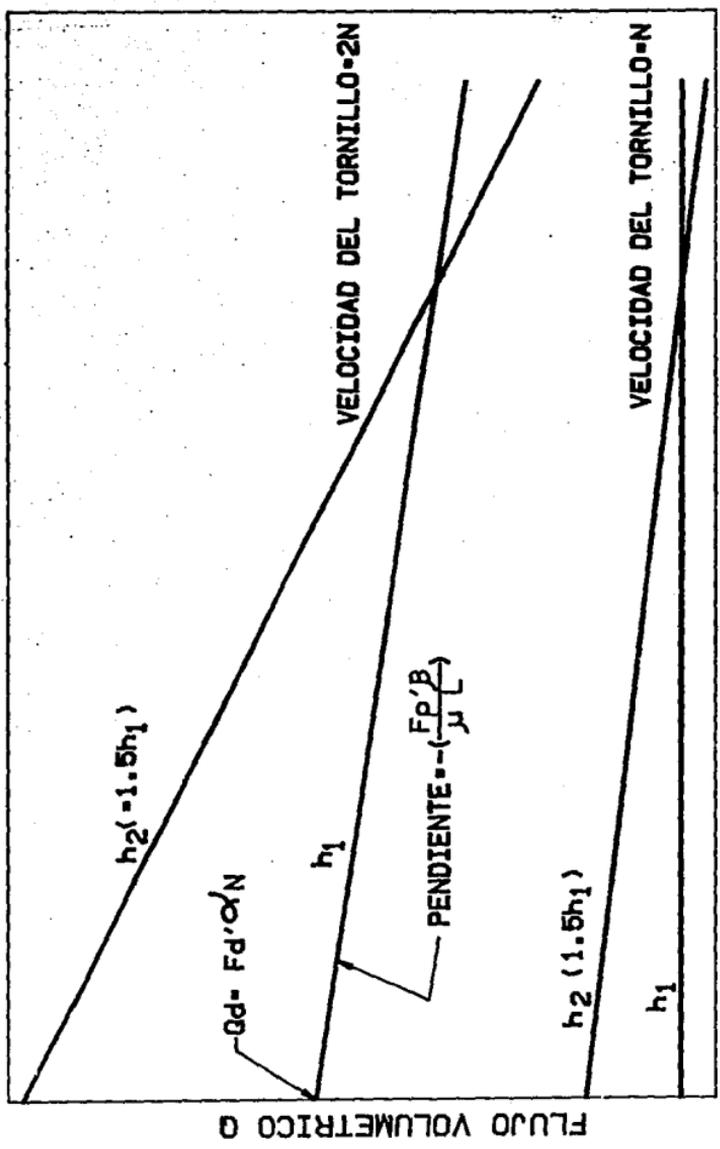
Como se observa no se considera el factor de curvatura para el flujo de presión, ya que en la actualidad no ha sido desarrollado, sin embargo, los factores de viscosidad $F_{\mu s}$, $F_{\mu p}$, ya fueron desarrollados y su expresión se encuentra en la referencia No. 2, pero debido a que los Extrusores de manufactura no cuentan con los instrumentos necesarios para determinar la temperatura en la superficie y a lo largo del tornillo por lo que no se puede determinar la viscosidad a través de la profundidad del canal. Para casi todos los casos prácticos el asumir esta combinación lineal trae pequeños errores. Así que la ecuación (6.44) se considera la más completa para calcular el flujo volumétrico de un Extrusor de tornillo sencillo.

g) OPERACION ISOTERMICA.

Si la temperatura del fluido puede asumirse constante sobre la longitud axial del tornillo, tanto la viscosidad como la densidad del fluido permanecen constantes, por lo que un par de ecuaciones pueden desarrollarse para determinar la operación del Extrusor. Con el propósito de mantener tales condiciones isotérmicas, es necesario remover continuamente el calor generado en el fluido por el esfuerzo cortante. En la práctica los Extrusores con tornillos de compresión (canal poco profundo) y de tamaño pequeño, tienen una operación casi isotérmica ya que la relación superficie-volumen es favorable a la transferencia de calor.

Combinación del desarrollo del tornillo y dada. Para el caso de un fluido isotérmico en un canal de dimensiones constantes se tiene:

$$(\partial p / \partial l) = \Delta p / L \quad (6.47)$$



GRADIENTE DE PRESION, A P
**FIG. 6.4 CARACTERISTICAS DEL TORNILLO BAJO
 CONDICIONES ISOTERMICAS**

Donde Δp es el gradiente de presión (descarga menos entrada) sobre la longitud axial L del tornillo. Sustituyendo esta relación en la ecuación (6.44) se tiene lo siguiente:

$$Q = \frac{F_d' \pi^2 D^2 N h (1 - ne/t) \operatorname{sen} \phi \cos \phi}{2} - \frac{F_p' \pi D h^3 (1 - ne/t) \operatorname{sen}^2 \phi}{12 \mu L} \Delta p$$

....(6.48)

Esta ecuación caracteriza la operación de un extrusor en condiciones isotérmicas y con un canal que no cambia sus dimensiones. Si se grafica el flujo volumétrico a cualquier velocidad del tornillo contra el gradiente de presión, se tiene que la ordenada al origen es el flujo de arrastre (a $\Delta p = 0$) y con una pendiente de $\frac{F_p' \pi D h (1 - ne/t) \operatorname{sen} \phi}{12 \mu l}$.

La ecuación (6.48) se representa gráficamente en la figura 6.4, para dos tornillos con diferente profundidad de canal a dos diferentes velocidades. Como se observa en la gráfica el tornillo menos profundo es menos sensible al gradiente de presión. Es importante notar que para ambos tornillos se tiene una pendiente más pronunciada a una velocidad mayor debido a una disminución de la viscosidad del fluido (comportamiento No-Newtoniano) provocado por una mayor velocidad de corte en el canal del tornillo

El desarrollo completo de la operación del Extrusor se establece por la interacción del tornillo y del dado. Por lo que es conveniente describir el comportamiento del fluido a través del dado.

En general el flujo de un fluido en cualquier dado puede ser expresado como:

$$Q = k \Delta p_D / \mu_D \quad \dots (6.49)$$

Donde k es una constante que representa la geometría del dado, Δp_D es la caída de presión a través del dado y μ_D es la viscosidad del fluido en el dado y esta depende de la velocidad de corte. Aún en condiciones isotérmicas la viscosidad del fluido en el dado no es la misma que la viscosidad en el canal del tornillo y esto debido a las diferentes velocidades de corte en cada lugar. La velocidad de corte en el dado es frecuentemente mayor que en el canal del tornillo, lo que ocasiona que la viscosidad del fluido en el dado sea más baja que en el canal del tornillo para todos los fluidos No-Newtonianos pseudoplásticos excepto los de comportamiento Newtoniano.

Se tiene para un dado cilíndrico que la constante k es:

$$k = \frac{\pi R_D^4}{8 L_D} \quad \dots (6.50)$$

R_D = radio del dado cilíndrico

L_D = longitud del dado

Por lo tanto:

$$Q = \frac{\pi R_D^4}{8 L_D} \frac{\Delta p_D}{\mu_D} \quad \dots (6.51)$$

Si la presión al final del tornillo y la presión de descarga del dado son iguales, entonces el gradiente de presión del tornillo Δp es igual a la presión a través del dado Δp_D y mediante la combinación de las ecuaciones (6.48) y (6.51) se obtiene:

$$Q = \frac{F_d' \pi^2 D^2 N h (1-n_e/t) \operatorname{sen} \phi \operatorname{cos} \phi}{2} \dots (6.52)$$

$$\left[1 + \frac{F_p' \pi D h^3 (1-n_e/t) \operatorname{sen}^2 \phi (\mu_D/\mu)}{12 * L * \left(\frac{\pi R_D^4}{8 L_D} \right)} \right]$$

Y

$$\Delta p = \frac{F_d' \pi^2 D^2 N h (1-n_e/t) \operatorname{sen} \phi \operatorname{cos} \phi}{2} \dots (6.53)$$

$$\left(\frac{\pi R_D^4}{8 L_D} \right) 1/\mu_D + \frac{F_p' \pi D h^2 (1-n_e/t) \operatorname{sen}^2 \phi}{12 \mu L}$$

Estas dos últimas expresiones describen el comportamiento de un Extrusor determinado por la interacción de las características del tornillo y del dado.

Si se analiza la ecuación (6.52), se puede observar que el flujo volumétrico puede ser influenciado por el cambio en la temperatura del dado; Si por ejemplo se aumenta la temperatura del dado, la viscosidad del fluido en el dado μ_D disminuirá con la consecuencia de un aumento en el flujo de descarga Q ; y el gradiente de presión disminuirá de acuerdo a la ecuación (6.53). Sin embargo, estos cambios dependerán de los diseños del tornillo y del dado. Ya que por ejemplo un tornillo con canal poco profundo es menos sensible que un tornillo con canal profundo para un dado con un diseño de k grande.

Las características del tornillo y del dado pueden ser presentadas en una misma gráfica de Q Vs. Δp , de tal manera de obtener un mapa de la operación del Extrusor con el propósito de encontrar las condiciones de operación óptimas del proceso de Extrusión.

En la fig.6.5 se presentan las características de un tornillo con canal poco-profundo y otro con canal profundo, así como las características de un dado con abertura pequeña y otro con abertura grande. Cuando se utiliza un dado con abertura grande, el tornillo poco-profundo opera en el punto A y el tornillo profundo en el punto B. En este caso el tornillo con canal profundo ofrece mayor flujo volumétrico. Cuando se utiliza un dado con abertura pequeña, el tornillo poco-profundo opera en el punto C y el tornillo profundo en el punto D. En este caso el tornillo con canal poco-profundo ofrece un mayor flujo volumétrico a una mayor presión.

Por otro lado, en la fig. 6.6 se ilustra el efecto de la temperatura del fluido en el tornillo y en el dado sobre el flujo volumétrico y la presión en el dado. Las características del tornillo y dado son mostradas a las temperaturas T_2 y T_1 , donde T_2 es mayor que T_1 . Cuando el fluido en el tornillo y en el dado están a la temperatura T_2 , la operación se representa por el punto A. Si la temperatura del fluido en todo el Extrusor disminuye a T_1 , la presión se incrementa al punto B, pero el flujo volumétrico no sufre cambio. Sin embargo, si el tornillo se mantiene a la temperatura T_2 y la temperatura del fluido en el dado se disminuye a T_1 , el flujo volumétrico se verá disminuido hasta el punto D. Asimismo si la temperatura del fluido en el tornillo se mantiene a T_1 y el fluido en el dado se mantiene a una temperatura más elevada T_2 , el flujo volumétrico es mayor y es representado por el punto C.

En general se puede decir de estos dos diagramas ya revisados que el flujo volumétrico se ve menos afectado en tornillos largos y poco-profundos que en los tornillos cortos y profundos.

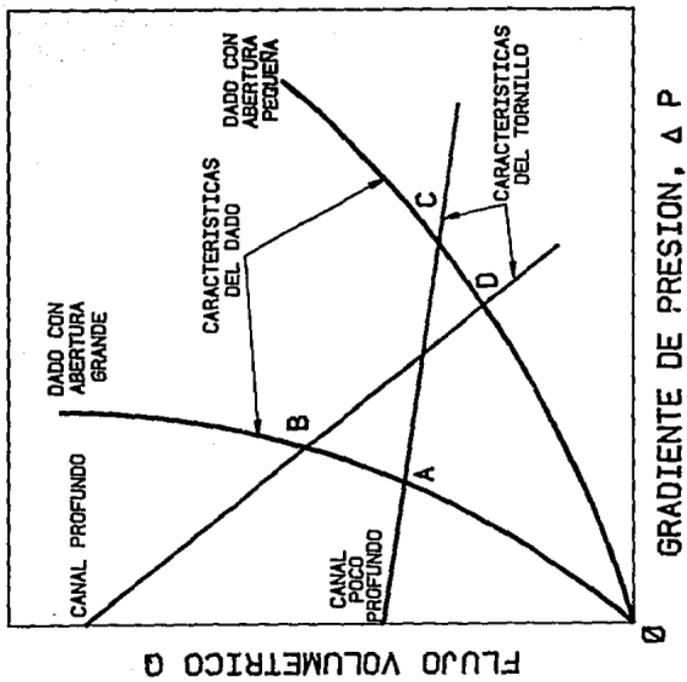


FIG. 6.5 CARACTERISTICAS DEL TORNILLO Y DEL DADO

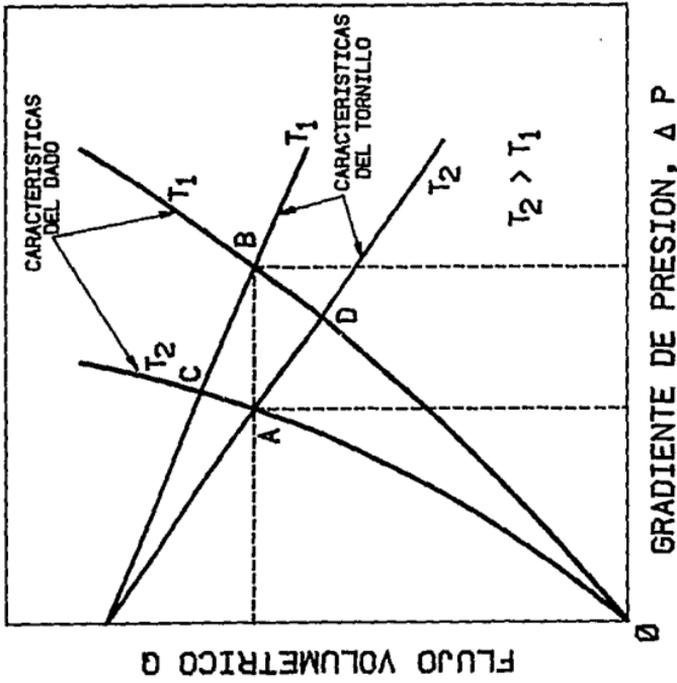


FIG. 6.6 EFECTO DE LA TEMPERATURA EN EL TORNILLO Y EL DADO EN LA OPERACION DEL EXTRUSOR

cálculo del flujo volumétrico es necesario conocer la viscosidad del fluido en los canales del tornillo y en el dado, de tal manera que para el caso de fluidos No-Newtonianos las viscosidades deben de ser evaluadas a la velocidad de corte que tiene el fluido en el canal del tornillo y del dado.

La viscosidad se puede determinar en forma experimental si a diferentes velocidades se obtiene el flujo volumétrico (en forma manual) a la temperatura de interés y por medio de un instrumento de obtiene la presión en el cabezal. Con esta información la ecuación (6.19) se resuelve para determinar la viscosidad si se conoce la geometría del canal del tornillo. Sin embargo, la predicción de la viscosidad se puede realizar mediante la utilización de un reómetro capilar, en donde se puede obtener una relación de velocidad de corte contra la viscosidad para una temperatura dada. Por lo que un esfuerzo de corte en el canal se puede aproximar a $\pi DN/h$. para que con este valor se obtenga la viscosidad en la relación obtenida con el reómetro.

Las características del flujo, para un fluido No-Newtoniano en un dado de geometría con sección transversal circular puede ser calculada utilizando la ecuación (6.51) .

ANEXO 1 (Capítulo 6)

SOLUCION ANALITICA A LA ECUACION DE LAPLACE PARA DETERMINAR EL FLUJO DE ARRASTRE EN EL CANAL DEL TORNILLO SENCILLO.

Como se mencionó en este capítulo, la ecuación de Poisson se convirtió en la ecuación de Laplace al considerar una descarga directa o un gradiente de presión igual a cero.

$$\partial^2 v / \partial x^2 + \partial^2 v / \partial y^2 = 0 \quad \dots (5.10.1)$$

Esta ecuación diferencial en derivadas parciales se resuelve, utilizando el método de separación de variables, el cual permite reducir la ecuación diferencial en derivadas parciales a una ecuación diferencial ordinaria.

Para determinar el flujo de arrastre, se debe considerar las siguientes condiciones frontera dimensionales en el canal del tornillo.

$$V = 0 \quad \text{en } x = 0, x = w, y = 0$$

$$V = U_z \quad \text{en } y = h$$

Realizando formulación adimensional se obtiene:

- Variables adimensionales

$$x^* = x/w ; \quad y^* = y/h ; \quad V^* = V_{zd}/U_z ;$$

- Diferenciales adimensionales

$$\partial x^* = \partial x/w ; \quad \partial x^{*2} = \partial x^2/w^2$$

$$\partial y^* = \partial y/h ; \quad \partial y^{*2} = \partial y^2/h^2$$

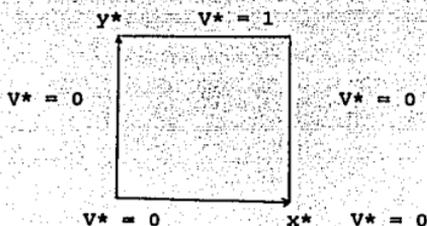
$$\partial V^* = \partial V_{zd}/U_z ; \quad \partial^2 V^* = \partial^2 V_{zd}/U_z$$

-Sustituyendo las diferenciales adimensionales en la ecuación (5.10.1), se obtiene la siguiente ecuación adimensional:

$$\frac{U_z \partial^2 V^*}{w^2 \partial x^{*2}} + \frac{U_z \partial^2 V^*}{h^2 \partial y^{*2}} = 0$$

$$\partial^2 V^* / \partial x^{*2} + (w/h)^2 \partial^2 V^* / \partial y^{*2} = 0 \quad \dots (6.0.1)$$

- Por lo que las condiciones frontera adimensionales son:



Utilizando el método de separación de variables se tiene:

$$V^* = X(x^*) Y(y^*) \quad \dots (6.0.2)$$

-Derivando con respecto a x^* se tiene:

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} X Y = Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^{*2}}$$

-Derivando con respecto a y^* se tiene:

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial y^{*2}} = X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^{*2}} = X \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} Y$$

-Sustituyendo las derivadas con respecto a x^* e y^* en la ecuación (6.0.1) se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \chi + (w/h)^2 \chi \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \right| = 0$$

-Multiplicando la ecuación anterior por $(1/\chi)$ y reordenando se obtiene:

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \chi = - (w/h)^2 \frac{1}{\chi} \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \chi \quad \dots (6.0.3)$$

Se observa que el lado izquierdo de esta ecuación es independiente de y^* y también es igual al lado derecho, el cual es independiente de x^* , por lo que se concluye que ambos miembros son iguales a una constante:

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \chi = - \lambda^2 \quad (w/h)^2 \frac{1}{\chi} \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \chi = \lambda^2$$

Ambas ecuaciones son ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales tienen sus soluciones particulares siguientes:

-para χ :

$$\chi = C_1 \cos (\lambda x^*) + C_2 \operatorname{sen} (\lambda x^*) \quad \dots (6.0.4)$$

-para $|$:

$$| = C_3 \operatorname{cosh} (h/w \lambda y^*) + C_4 \operatorname{senh} (h/w \lambda y^*) \quad \dots (6.0.5)$$

-Se evalúan las constantes C_1 y C_2 , bajo las siguientes condiciones frontera para la ecuación (6.0.4).

C.L.1.....en $x^* = 0$ $V^* = 0$, $\therefore \chi = 0$

-Sustituyendo en la ecuación (6.0.4) se tiene que:

$$0 = C_1 \cos (0) + C_2 \operatorname{sen} (0) \quad \text{--->} \quad 0 = C_1 + 0$$

$$\therefore C_1 = 0 \quad \text{y} \quad \chi = C_2 \operatorname{sen} (\lambda x^*)$$

C.L.2.....en $x^* = 1$ $V^* = 0$, $\therefore \chi = 0$

$$0 = C_2 \operatorname{sen} \lambda \quad \text{--->} \quad \operatorname{sen} \lambda = 0 \quad \text{de ahí que,}$$

$\lambda = g \pi$ cuando ($g = 0, +/- 1, 2, 3, \dots +/- \infty$)

$$\chi = C_2 \operatorname{sen} \lambda x^* \quad \dots (6.0.6)$$

-Se evalúan las constantes C_3 y C_4 , bajo las siguientes condiciones frontera para la ecuación (6.0.5).

C.L.3.....en $y^* = 0$ $V^* = 0$ ----> $| = 0$, sustituyendo en la ecuación (6.0.5):

$$0 = C_3 \cosh(0) + C_4 \operatorname{senh}(0)$$

$$0 = C_3 \frac{e^0 + e^{-0}}{2} + C_4 \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = C_3 (2/2) + C_4 (0)$$

$$C_3 = 0 \quad \therefore | = C_4 \operatorname{senh}(h/w \lambda y^*) \quad \dots (6.0.7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.0.6) y (6.0.7), en la ecuación (6.0.2) se tiene:

$$V^* = C_n \operatorname{sen}(\lambda x^*) \operatorname{senh}(h/w \lambda y^*) \quad \dots (6.0.8)$$

-para encontrar el valor de C_n se utiliza la siguiente y última condición frontera:

-C.L.4..... en $y^* = 1$ $V^* = 1$, sustituyendo en la ecuación (6.0.8) se tiene:

$$1 = C_n \operatorname{sen}(\lambda x^*) \operatorname{senh}(h/w \lambda) \quad \dots (6.0.9)$$

Esta ecuación se multiplica via producto punto por una función $f(x^*)$ en donde $f(x^*) = \operatorname{sen}(m \pi x^*)$ para obtener:

$$\int_0^1 \text{sen}(m \pi x^*) dx^* = \int_0^1 C_n \text{senh}(h/w \lambda) \text{sen}(g \pi x^*) \text{sen}(m \pi x^*) dx^*$$

-Se observa que la integral del lado derecho es cero si g es diferente de m y diferente de cero si $g = m$, por lo que sustituyendo g por m y reordenando la ecuación anterior se tiene:

$$\int_0^1 \text{sen}(g \pi x^*) dx^* = C_n \text{senh}(h/w \lambda) \int_0^1 \text{sen}^2(g \pi x^*) dx^* \quad \dots (6.0.10)$$

El siguiente paso es la evaluación de las integrales.

-integral lado izquierdo:

$$\int_0^1 \text{sen}(g \pi x^*) dx^* = -1/(g \pi) [\cos(g \pi x^*)]_0^1$$

-determinando la función coseno se obtiene que:

$$[\cos(g \pi x^*)]_0^1 = -2 \text{ cuando } g \text{ es impar} \rightarrow [\cos(g \pi x^*)]_0^1 = (-1)^n \cdot 2$$

- integral lado derecho:

$$\int_0^1 \text{sen}^2(g \pi x^*) dx^* = \int_0^1 [1 - \cos^2(g \pi x^*)] dx^*$$

$$= \int_0^1 [1 - 1/2 - 1/2 \cos(g \pi x^*)] dx^* = 1/2 \int_0^1 dx^* - 1/2 \int_0^1 \cos(g \pi x^*) dx^*$$

$$= 1/2 [x^*]_0^1 - 1/2 (1/2g\pi) [\text{sen}(2g\pi x^*)]_0^1$$

Evaluando la función seno se determina que es igual a cero. Por lo que la integral del lado derecho es igual a $1/2$.

Sustituyendo el valor de las integrales en la ecuación (6.0.10) se

determina la constante C_n :

$$\left[\frac{(-1)^{g+1}}{g \pi} \right]_{g=1,3,5,\dots,\alpha} 2 = C_n [\operatorname{senh}(h/w g \pi)] (1/2)$$

$$C_n = \left[\frac{(-1)^{g+1}}{g \pi} \right]_{g=1,3,5,\dots,\alpha} \frac{4}{\operatorname{senh}(h/w g \pi)} \dots (6.0.11)$$

Sustituyendo el valor de C_n (ec. 6.0.11) en la ecuación (6.0.8) se obtiene:

$$V^* = \sum_{g=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{g+1} 4}{g \pi \operatorname{senh}(h/w g \pi)} \operatorname{sen}(g \pi x^*) \operatorname{senh}(g \pi y^* h/w)$$

reagrupando términos:

$$V^* = 4/\pi \sum_{g=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{g} \frac{\operatorname{senh}(g \pi y^* h/w)}{\operatorname{senh}(h/w g \pi)} \operatorname{sen}(g \pi x^*)$$

Sustituyendo las variables dimensionales se obtiene la solución a la ecuación de Laplace:

$$V_{zd} = \frac{4U_z}{\pi} \sum_{g=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{g} \frac{\operatorname{senh}(g \pi y/w)}{\operatorname{senh}(h/w g \pi)} \operatorname{sen}(g \pi x/w) \dots (6.1)$$

VII. SOLUCION POR METODO NUMERICO A LAS ECUACIONES QUE REPRESENTAN EL COMPORTAMIENTO DE UN FLUIDO EN UN EXTRUSOR DE TORNILLO SENCILLO.

a) TEORIA SOBRE DIFERENCIAS FINITAS

La solución analítica de una ecuación diferencial acotada por condiciones de frontera específicas permite obtener los valores exactos de la variable dependiente en la región de dominio de las variables independientes. Siempre que es posible, resulta conveniente integrar analíticamente la ecuación diferencial para hallar dicha solución exacta. Sin embargo, muchas ecuaciones diferenciales resultan demasiado complicadas como para aplicar métodos analíticos en su resolución, en estas situaciones conviene aplicar métodos numéricos para obtener una solución aproximada. Los métodos numéricos son aquellos en los que se reformula la ecuación diferencial para que se pueda resolver mediante operaciones aritméticas. Esto puede ilustrarse ejemplificando con la ecuación que representa la segunda ley de Newton (7.1) notando que se puede aproximar la razón de cambio de la variable dependiente (velocidad v) con respecto al tiempo (7.2):

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v \quad \dots(7.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \quad \dots(7.2)$$

donde Δv y Δt son diferencias en la velocidad y el tiempo calculadas sobre intervalos finitos; $v(t_i)$ es la velocidad en el tiempo inicial

t_1 , y $v(t_{1+1})$ es la velocidad en algún tiempo más tarde t_{1+1} . La ecuación (7.2) es una diferencia finita dividida en el tiempo t_1 . Esta diferencia se puede sustituir en la ecuación (7.1) para obtener:

$$\frac{v(t_{1+1}) - v(t_1)}{t_{1+1} - t_1} = g - \frac{c}{m} v(t_1) \dots (7.3)$$

ordenando esta ecuación se obtiene:

$$v(t_{1+1}) = v(t_1) + [g - \frac{c}{m} v(t_1)] (t_{1+1} - t_1) \dots (7.4)$$

y de esta manera la ecuación diferencial (7.1) se transforma en una ecuación que puede resolverse algebraicamente para $v(t_{1+1})$. Si se da un valor inicial para la velocidad en un tiempo t_1 , se puede calcular fácilmente v en t_{1+1} . Este nuevo valor de v en t_{1+1} puede emplearse para extender el cálculo de v en t_{1+2} y así sucesivamente. Por lo tanto, en cualquier tiempo de la trayectoria:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Nuevo valor} & & \text{valor anterior} & & \text{valor estimado} & & \text{incremento...} \\ \text{de } v & = & \text{de } v & + & \text{de la pendiente} & * & \text{del tiempo} \end{array} \dots (7.5)$$

Empleando segmentos de rectas para aproximar la función que puede ser continuamente una curva se obtiene, una aproximación aceptable a la solución exacta. Una forma de reducir la diferencia entre ambas soluciones es utilizar un menor intervalo de cálculo, y por otro lado

la aceptación de los cálculos dependerá del error de truncamiento que se designe. Para obtener conocimiento de las características de este error de truncamiento se regresa a la formulación matemática usada ampliamente en los métodos numéricos para expresar funciones en forma polinomial conocida como la serie de Taylor. Utilizando la serie de Taylor en el ejemplo anterior, la velocidad $v(t)$ se puede expandir como:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{v''(t_i)}{2!} (t_{i+1} - t_i)^2 + \dots + R_n \quad \dots(7.6)$$

En donde $v(t_i)$ es el valor en el punto anterior, y si únicamente consideramos este término, se obtendría una solución para una función constante, pero si consideramos hasta el segundo término, la expresión representaría una línea recta, siendo capaz de predecir un cambio en dirección lineal: por lo tanto, si la función es curva se requiere utilizar el tercer término de esta ecuación. Esta ecuación, expresada en términos generales es:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2} (x_{i+1} - x_i)^2 + \dots + R_n \quad \dots(7.7)$$

Suponiendo que se trunca la serie después del término con primera derivada se obtiene:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + R_n \quad \dots(7.8)$$

La ecuación (7.8) puede resolverse para:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{R_n}{x_{i+1} - x_i} \quad \dots (7.9)$$

Aproximación de
Error de
primer orden
truncamiento

Se tiene para la serie de Taylor que:

$$\frac{R_n}{x_{i+1} - x_i} = O(x_{i+1} - x_i) \quad \dots (7.10)$$

Sustituyendo tenemos:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - O(x_{i+1} - x_i) \quad \dots (7.11)$$

Se observa que en la ecuación (7.11) se tiene un error de truncamiento del orden de $(x_{i+1} - x_i)$, es decir, que el error en la aproximación usando derivadas debe ser proporcional al tamaño del paso. También a esta ecuación (7.11) se le llama en el análisis numérico "*diferencias divididas finitas*". y también se puede representar de la siguiente forma:

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h) \quad \dots (7.12)$$

donde Δf_i se le conoce como la primera diferencia hacia adelante y a h se le llama *tamaño del paso*, esto es, la longitud del intervalo sobre el cual se hace la aproximación. Se le llama diferencia "hacia

adelante" ya que para estimar la derivada utiliza los datos x_i e x_{i+1} (fig. 7.1). Al término $\Delta f_i/h$ se le conoce como *primera diferencia dividida finita*. Esta diferencia dividida finita es solo una de las que se puede desarrollar mediante la serie de Taylor. Las aproximaciones a primeras derivadas, utilizando las *diferencias hacia atrás* a las *diferencias centrales* se pueden desarrollar de una manera similar a la de la ecuación (7.11). Las diferencias hacia atrás usan a x_{i+1} (fig. 7.2), mientras que las diferencias centrales usan información igualmente espaciada alrededor del punto donde está estimada la derivada (fig 7.3).

Aproximaciones a la primera derivada con diferencia hacia atrás. La serie de Taylor se puede expandir hacia atrás para calcular un valor anterior sobre el valor actual, dada por:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2} h^2 - \dots \dots (7.13)$$

Truncando la ecuación después de la primer derivada y ordenando los términos se obtiene:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} + O(h) \dots (7.14)$$

En donde el primer término indica la *primer diferencia dividida hacia atrás* y el término $O(h)$ es el error. Véase la figura 7.2 que es la

GRAFICAS DE APROXIMACIONES CON DIFERENCIAS DIVIDIDAS FINITAS DE LA PRIMERA DERIVADA

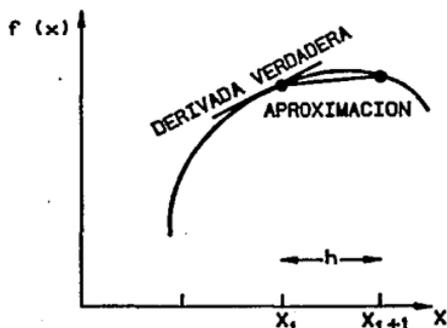


FIGURA 7.1 HACIA ADELANTE

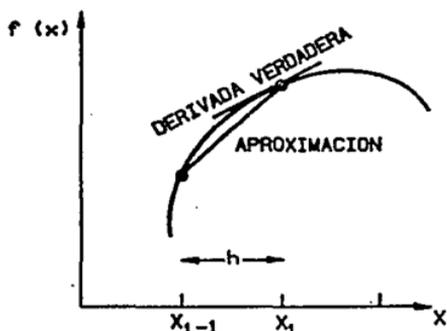


FIGURA 7.2 HACIA ATRAS

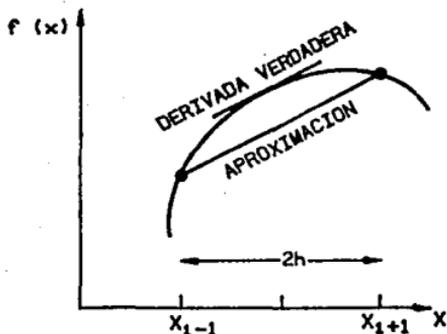


FIGURA 7.3 CENTRALES

representación gráfica de esta ecuación.

Las aproximaciones a la primera derivada con diferencias centrales se obtienen restando la ecuación 7.7 (expansión de la serie de Taylor hacia adelante) menos la ecuación 7.13 (expansión de la serie de Taylor hacia atrás), para obtener:

$$f'(x_1) - f(x_{1-1}) = 2f'(x_1)h + \frac{f'''(x_1)}{3} h^3 + \dots$$

que se puede resolver para

$$f'(x_1) = \frac{f(x_{1+1}) - f(x_{1-1})}{2h} + \frac{f'''(x_1)}{6} h^2 + \dots$$

o también:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_{1+1}) - f(x_{1-1})}{2h} + O(h^2) \quad \dots (7.15)$$

Esta ecuación (7.15) es una representación de las *diferencias centrales* de la primera derivada. Nótese que el error de truncamiento es del orden de h^2 en contraste con las diferencias divididas hacia adelante y hacia atrás, las cuales fueron de orden de h . Por lo tanto, el análisis de la serie de Taylor ha llevado a la información práctica de que la diferencia central es la representación más exacta de la derivada (fig. 7.3). La aproximación a la segunda derivada utilizando las diferencias centrales se obtiene, sustituyendo la ecuación de la primera derivada (7.15) en la expansión de Taylor hacia adelante (7.7)

para tener:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} \quad \dots (7.16)$$

b) SOLUCION NUMERICA A LA ECUACION DE ARRASTRE PARA FLUIDO NEWTONIANO
Con las ecuaciones (7.15) y (7.16) podemos obtener la solución numérica para las ecuaciones que determinan el comportamiento de un fluido en el canal de un tornillo sencillo para determinar el flujo volumétrico de un Extrusor. En el capítulo anterior se había llegado a la ecuación (5.10), que determina el flujo de arrastre cuando $(\partial p / \partial z) = 0$, para un fluido Newtoniano:

$$(\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y) = 0 \quad \dots (5.10)$$

Como en esta ecuación se tiene la segunda derivada tanto en dirección x como en y , se utilizarán las coordenadas para especificar cada uno de los nodos y resolver esta ecuación utilizando las diferencias centrales.

Sustituyendo las segundas derivadas en la ecuación (5.10) tenemos:

$$\frac{V_z(i+1, j) - 2V_z(i, j) + V_z(i-1, j)}{(\Delta X)^2} + \frac{V_z(i, j+1) - 2V_z(i, j) + V_z(i, j-1)}{(\Delta Y)^2} = 0 \quad \dots (7.17)$$

despejando $V_z(i, j)$, tenemos:

$$Vz(i, j) = \frac{(Vz(i+1, j) + Vz(i-1, j))/\Delta X^2 + (Vz(i, j+1) + Vz(i, j-1))/\Delta Y^2}{(2/\Delta X^2 + 2/\Delta Y^2)} \dots (7.18)$$

La ecuación (7.18) es la solución a la ecuación de arrastre para fluido newtoniano, con la cual será obtenido el comportamiento del fluido o la distribución de la velocidad dentro del canal del tornillo para posteriormente encontrar el flujo volumétrico de arrastre, mediante un programa de cómputo creado a partir de un método de aproximaciones iterativas llamado Gauss-Seidel.

c) DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO ITERATIVO GAUSS-SEIDEL

Es un método de aproximaciones iterativas, el cual emplea un valor inicial y mediante iteraciones se continúa hasta que converja dentro de alguna tolerancia de error previamente especificada para obtener una aproximación más cercana a la solución. Este método es utilizado cuando se tienen ecuaciones lineales simultáneas. Supóngase que se ha dado un conjunto de n ecuaciones:

$$x_1 = \frac{C_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - \dots - a_{1n} x_n}{a_{11}} \dots (7.19a)$$

$$x_2 = \frac{C_2 - a_{21} x_1 - a_{23} x_3 - \dots - a_{2n} x_n}{a_{22}} \dots (7.19b)$$

$$x_3 = \frac{C_3 - a_{31} x_1 - a_{32} x_2 - \dots - a_{3n} x_n}{a_{33}} \dots (7.19c)$$

$$x_n = \frac{C_n - a_{n1} x_1 - a_{n2} x_2 - \dots - a_{n, n-1} x_{n-1}}{a_{nn}} \dots (7.19d)$$

Ahora se puede empezar el proceso de solución usando un valor inicial para las x . La solución trivial puede servir de valor inicial, esto

es, todas las x valen cero. Estos ceros se pueden sustituir en la ecuación (7.19a), que se puede usar para calcular un nuevo valor de $x_1 = c_1/a_{11}$. Luego, se sustituye el nuevo valor de x_1 , con x_2, \dots, x_n aún en cero en la ecuación (7.19b) con la cual se calcula un nuevo valor de x_2 . Este procedimiento se repite en cada una de las ecuaciones hasta llegar a la ecuación (7.19d) la cual calcula un nuevo valor de x_n . En seguida se regresa a la primera ecuación y se repite todo el proceso hasta que la solución converja bastante cerca de los valores reales. La convergencia se puede verificar usando el criterio de error:

$$e_s = \frac{\text{aproximación actual} - \text{aproximación previa}}{\text{aproximación actual}} 100\% < e_s \dots (7.20)$$

o también:

$$e_{s,i} = \left| \frac{x_i^{j-1} - x_i^j}{x_i^j} \right| 100\% < e_s \dots (7.21)$$

En donde e_s es el error considerado; para toda i en donde j y $j-1$ denotan la iteración actual y la anterior .

Nótese que a medida que se calcula un nuevo valor de x , este mismo se usa inmediatamente en la siguiente ecuación que a su vez determina una nueva x . De esta forma, si la solución es convergente, se emplea la mayor aproximación posible.

Este método puede tener fallas como: a) algunas veces no converge, b) a menudo es lento y c) se requiere tener una computadora con gran capacidad de memoria; sin embargo, se tiene una condición de convergencia en la que los coeficientes sobre la diagonal de cada una de las ecuaciones sea mayor que la suma de los otros coeficientes en la ecuación; a este tipo de sistemas se le conoce como *diagonalmente dominantes*.

El primer caso que se aborda es el de la determinación de la distribución de la velocidad de un fluido Newtoniano para posteriormente encontrar el flujo volumétrico de arrastre en el canal del tornillo. Por lo que se realizará el desarrollo de las matrices para dicha ecuación que representa el flujo de arrastre (fluido Newtoniano). Si se factoriza la ecuación (7.17) y se hace la suposición que Δx y Δy son igual a 1, se tiene:

$$V_z(i+1, j) + V_z(i-1, j) + V_z(i, j+1) + V_z(i, j-1) - 4V_z(i, j) = 0 \quad \dots (7.17a)$$

Esta ecuación es aplicable a cada nodo i, j de la figura (7.4). Cuando se aplica esta ecuación a cada nodo resulta un sistema de ecuaciones acopladas, ya que la velocidad en varias posiciones aparece en más de una ecuación. Esto produce un sistema de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, que se pueden resolver por el método de Gauss Seidel.

Considérese el canal del tornillo de la figura (7.5), los lados del canal son los álabes del tornillo los cuales tienen una velocidad

igual a la que tiene el tornillo. Sin embargo para poder comparar esta solución con la obtenida por el método analítico se considera que el tornillo es estático y que el barril tiene una velocidad determinada. La distribución de la velocidad dentro del canal se puede aproximar en varios puntos internos aplicando la ecuación de arrastre; para ejemplificar se utilizarán 9 puntos internos. Esto genera el siguiente conjunto de ecuaciones dado en notación matricial:

COEFICIENTES DE VELOCIDAD EN LOS NODOS

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)		
-4	1	0	1	0	0	0	0	0	$V_z(1,1)$	0
1	-4	1	0	1	0	0	0	0	$V_z(1,2)$	0
0	1	-4	0	0	1	0	0	0	$V_z(1,3)$	VB
1	0	0	-4	1	0	1	0	0	$V_z(2,1)$	0
0	1	0	1	-4	1	0	1	0	$V_z(2,2)$	0
0	0	1	0	1	-4	0	0	1	$V_z(2,3)$	VB
0	0	0	1	0	0	-4	1	0	$V_z(3,1)$	0
0	0	0	0	1	0	1	-4	1	$V_z(3,2)$	0
0	0	0	0	0	1	0	1	-4	$V_z(3,3)$	VB

Se observa que el sistema resultante de ecuaciones es diagonalmente dominante, ya que el coeficiente de la diagonal es mayor a los otros coeficientes fuera de la diagonal, con lo cual es compatible al método de Gauss-Seidel y se puede llegar a la convergencia.

Para resolver este sistema de ecuaciones y encontrar el valor de la velocidad en cada nodo se utilizará el algoritmo del método de Gauss-Seidel que se muestra en la figura (7.6), (el listado del programa está en el anexo 1 del capítulo 7). Inicialmente se construye una matriz, como la desarrollada anteriormente y luego se

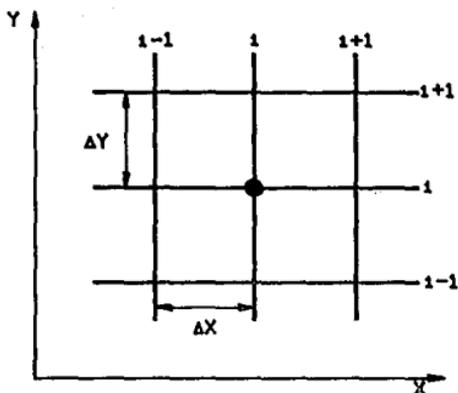


FIGURA 7.4 MALLA BIDIMENSIONAL QUE SE USA EN EL DESARROLLO DE APROXIMACIONES POR DIFERENCIAS FINITAS DE LA VELOCIDAD DE UN FLUIDO EN EL CANAL DEL TORNILLO.

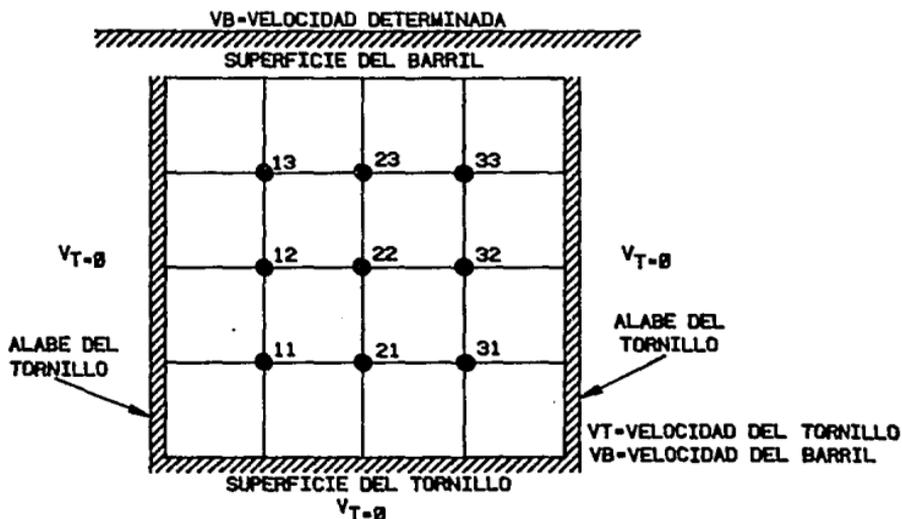


FIGURA 7.5 MODELO DEL CANAL DEL TORNILLO PLANO EN DONDE EL TORNILLO PERMANECE ESTATICO Y EL BARRIL EN MOVIMIENTO.

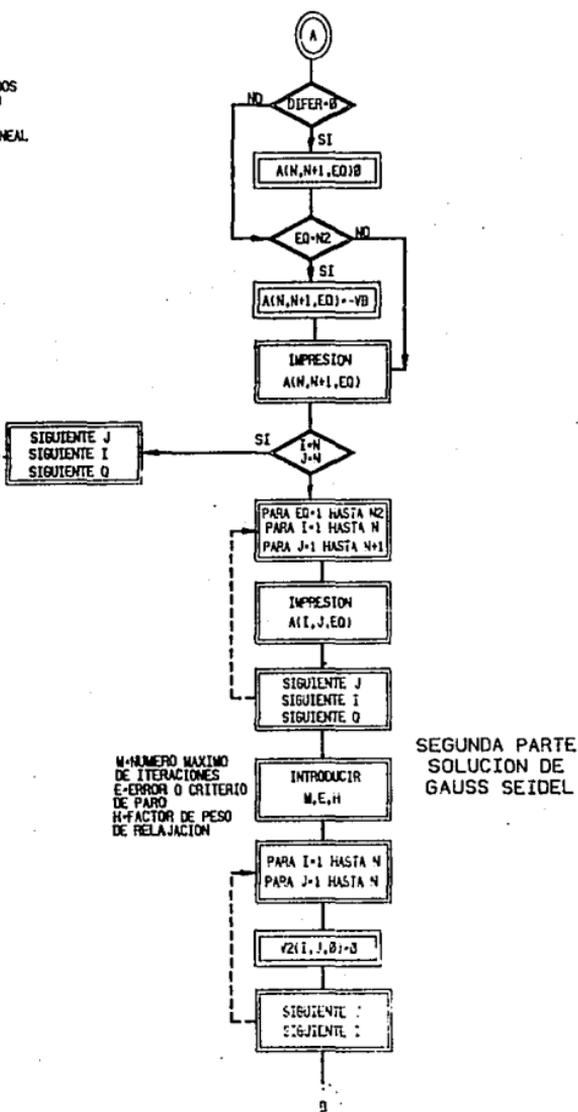
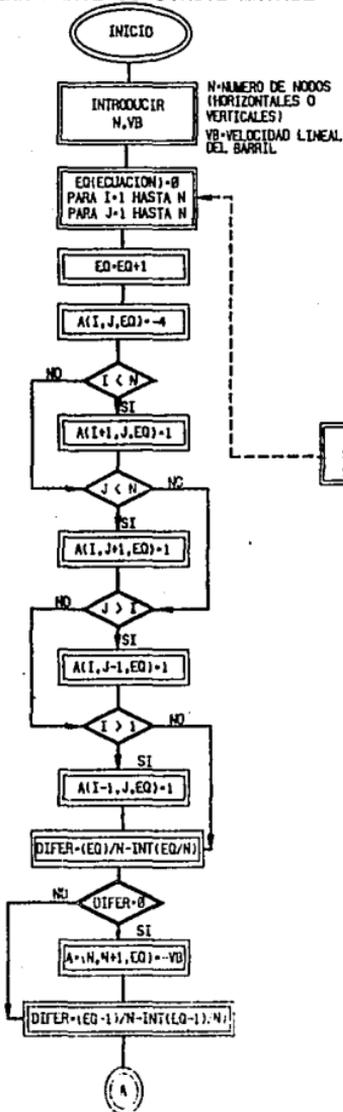
resuelve el sistema de ecuaciones lineales de manera iterativa hasta alcanzar la convergencia, es decir, hasta que el resultado queda dentro de una tolerancia aceptable.

La solución que se obtiene a la ecuación de Laplace, utilizando este método numérico de Gauss-Seidel tiene casi el mismo resultado que el obtenido en el método analítico, para el caso en que se determina la velocidad de arrastre para un fluido Newtoniano a partir del cálculo de las velocidades en cada nodo dentro del canal y por consecuencia el flujo volumétrico; la diferencia en el resultado es del orden de milésimas, con lo cual, es suficiente para predecir el comportamiento de un fluido en un Extrusor de tornillo sencillo.

Para constatar lo anterior, se propone el siguiente ejemplo para el cálculo del flujo volumétrico de arrastre de un fluido Newtoniano en un Extrusor de tornillo sencillo mediante la solución analítica y el método numérico anteriormente descrito.

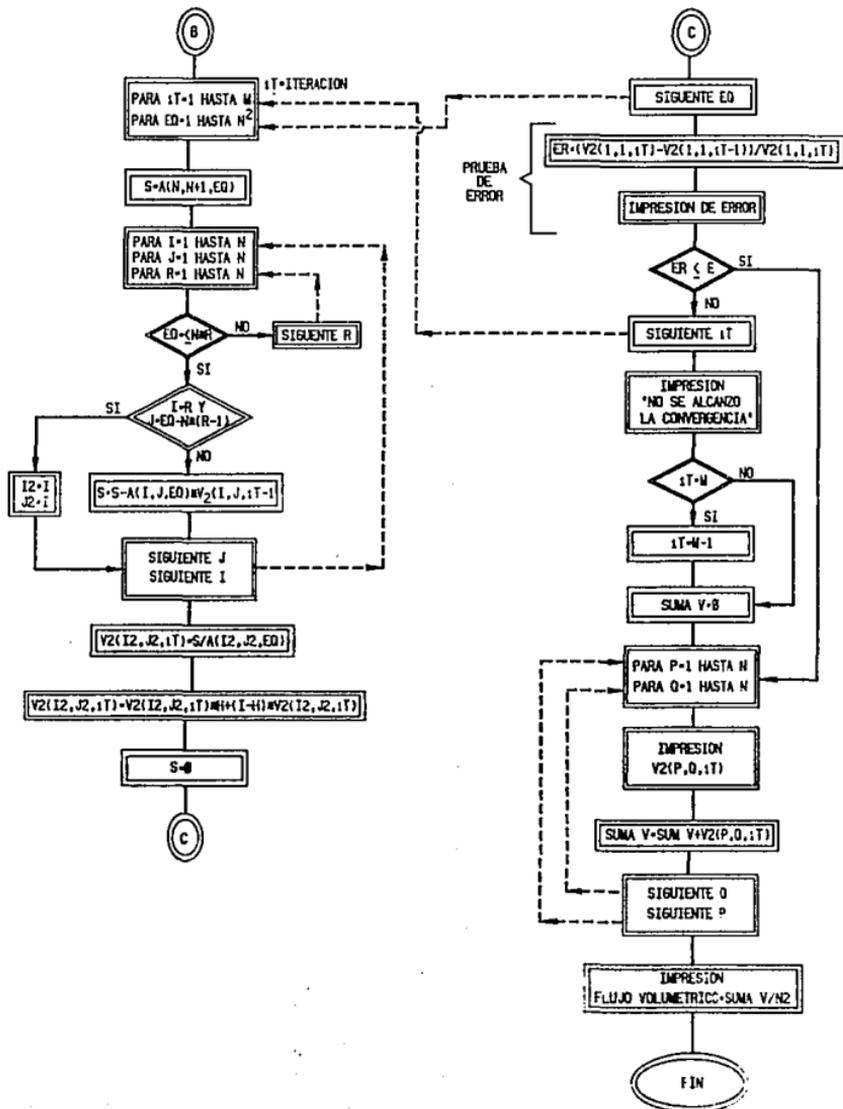
FIGURA 7.6 ALGORITMO DEL METODO DE GAUSS SEIDEL PARA CALCULO DEL FLUJO DE ARRASTRE (FLUIDO NEWTONIANO).

PRIMERA PARTE CONSTRUYE MATRIZ



SEGUNDA PARTE SOLUCION DE GAUSS SEIDEL

FIGURA 7.6 ALGORITMO DEL METODO DE GAUSS SEIDEL PARA CALCULO DEL FLUJO DE ARRASTRE (FLUIDO NEWTONIANO).
-continuacion-



Ejemplo (7.1)

Calcular el flujo volumétrico de arrastre para un fluido Newtoniano utilizando el método analítico y el método numérico para un Extrusor de tornillo sencillo, suponiendo el modelo de canal plano y a una velocidad rotacional (N) de 50 rpm (0.833 rps) y el cual tiene las siguientes dimensiones:

- D = 2.50 in. (diámetro del tornillo)
- h = 1.0 in. (profundidad del canal del tornillo)
- w = 1.0 in (ancho del canal)
- $\phi = 7.29^\circ$ (ángulo helicoidal)

Solución:

Primeramente se determina la velocidad lineal del tornillo:

$$U_z(\text{vel. lineal}) = \pi * D * N * \cos \phi = 3.1416 * 2.50 * 0.833 * 0.991$$

$$U_z = 6.48 \text{ in/seg}$$

a) Método analítico

Sustituyendo las dimensiones del tornillo y la velocidad lineal en las ecuaciones (6.3) y (6.4) se obtiene :

$$\text{factor de forma de flujo de arrastre } F_d = 0.49995$$

$$\text{flujo volumétrico de arrastre } Q_d = n U_z w h / 2 * F_d$$

$$Q_d = 1 * 6.48 * 1 * 1 * 0.49995 / 2 = 1.6198 \text{ in}^3/\text{seg}$$

b) Método numérico (Gauss-Seidel)

Utilizando el programa de cómputo que se muestra en el anexo 1, se introduce:

- Dimensiones del canal del tornillo (ancho = 1 y profundidad = 1).
- Velocidad lineal = 6.48 in/seg
- No. de nodos (horizontales o verticales) = 3 (9 nodos internos).
- No. máximo de iteraciones = 50 (para este programa es suficiente con este número).
- Error o criterio de convergencia = 1×10^{-7}
- Factor de relajación = 1.25 (recomendado).

El programa calcula la velocidad promedio y posteriormente el flujo volumétrico, obteniendo el resultado siguiente:.

Velocidad promedio dentro del canal $V_x = 1.62$ in/seg

Flujo volumétrico de arrastre $Q_d = 1.62$ in³/seg

La distribución de la velocidad dentro el canal para 9 nodos se puede observar en la figura (7.7).

OBSERVACIONES:

La solución a la ecuación de arrastre para un fluido Newtoniano por el método numérico es una excelente aproximación al método analítico, ya que la diferencia es mínima y para casos en donde se lleva a la práctica o al proceso es más que suficiente. Cabe mencionar que la solución por ambos métodos se basa en la suposición de que el barril

es el que tiene movimiento mientras que el tornillo permanece estático. En este caso se observa que la solución analítica es inflexible ya que su solución fue obtenida bajo esa suposición o condición frontera; Sin embargo, utilizando el método numérico se puede obtener la velocidad en cada nodo dentro del canal, ya sea cambiando en el programa la velocidad del barril por la velocidad del tornillo (cambio en las condiciones frontera) o sustrayendo cada velocidad o la velocidad promedio de la velocidad de barril (suposición barril en movimiento). Es decir, que para una velocidad lineal del tornillo de 6.48 in/seg tenemos una velocidad promedio $V_z = 4.85999$ in/seg y un Flujo volumétrico $Q_d = 4.8599$ in³/seg. Por otro lado, fueron detectadas dos desventajas al programa de cómputo del método de Gauss Seidel, ya que al tratar de introducir mayor cantidad de nodos para resolver un sistema más grande de ecuaciones tiene la desventaja de falta de capacidad de memoria ya que primeramente construye una matriz consumiendo memoria y tiempo y después para determinar la velocidad en cada nodo del canal del tornillo utiliza todos los valores de las iteraciones anteriores para calcular los nuevos valores, hasta llegar a un límite de ecuaciones en donde entra en competencia el número de ecuaciones a resolver contra el número de iteraciones posibles. De ahí que cuando se trató de introducir 11 nodos para resolver un sistema de 121 ecuaciones, la computadora no pudo realizar el cálculo por falta de memoria. Debido a lo anterior fue creado otro programa de cómputo a partir del método de Gauss Seidel el cual no guarda todos los valores de las iteraciones anteriores; este nuevo programa de cómputo se describe a continuación.

d) DESCRIPCION DEL METODO ITERATIVO POR BIFURCACIONES

Este método básicamente está construido con bifurcaciones del tipo condicional, fijando al inicio las condiciones frontera y así la operación de este programa para el cálculo de la velocidad en cada nodo se realiza con la utilización únicamente del valor de la iteración anterior con lo cual desecha de la memoria todos los valores de las iteraciones pasadas. Con este método de cómputo podemos introducir hasta 68 nodos horizontales x 68 verticales, es decir, que resuelve 4,624 ecuaciones con cualquier número n de iteraciones, de tal manera que la velocidad promedio de arrastre dentro del canal puede ser más aproximado a la realidad. El diagrama de flujo de este programa creado aparece en la figura 7.8 identificado como "METODO ITERATIVO POR BIFURCACIONES" y el listado del programa se describe en el anexo 2.

Para verificar la confiabilidad de este programa fue calculada la velocidad promedio y el flujo volumétrico de arrastre del tornillo del ejemplo (7.1), obteniendo el siguiente resultado, bajo la suposición que el barril es el que tiene movimiento:

Velocidad promedio en el canal $V_z = 1.619$ in/seg flujo volumétrico de arrastre $Q_d = 1.619$ in³/seg

Para el caso en que el tornillo está en movimiento que es lo que sucede en la realidad se tiene:

Velocidad promedio en el canal $V_z = 4.8599$ in/seg

Flujo volumétrico de arrastre $Q_d = 4.8599$ in³/seg

La distribución de la velocidad dentro el canal para 9 nodos internos en el canal se puede observar en la figura (7.7a).

Como se puede notar, con este método se obtiene el mismo resultado que con el método de Gauss Seidel, por lo que para la solución de las posteriores ecuaciones que rigen el comportamiento de un fluido en un Extrusor de tornillo sencillo se utilizará este método numérico iterativo por bifurcaciones.

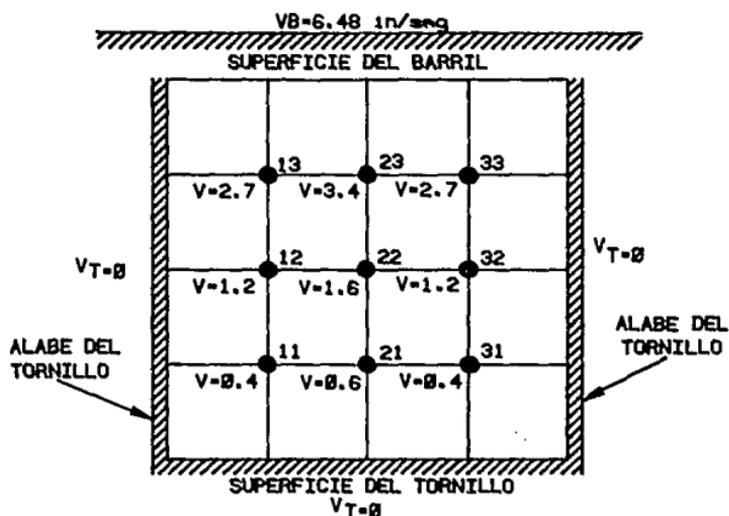


FIGURA 7.7 DISTRIBUCION DE LA VELOCIDAD DEL FLUIDO EN EL CANAL DEL TORNILLO, BAJO LA SUPOSICION DE TORNILLO ESTATICO Y BARRIL EN MOVIMIENTO (DE EJ.7.1)

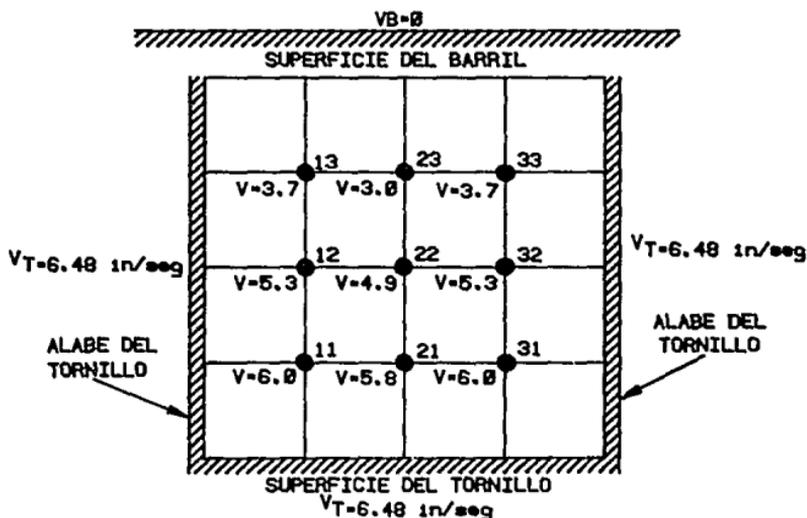
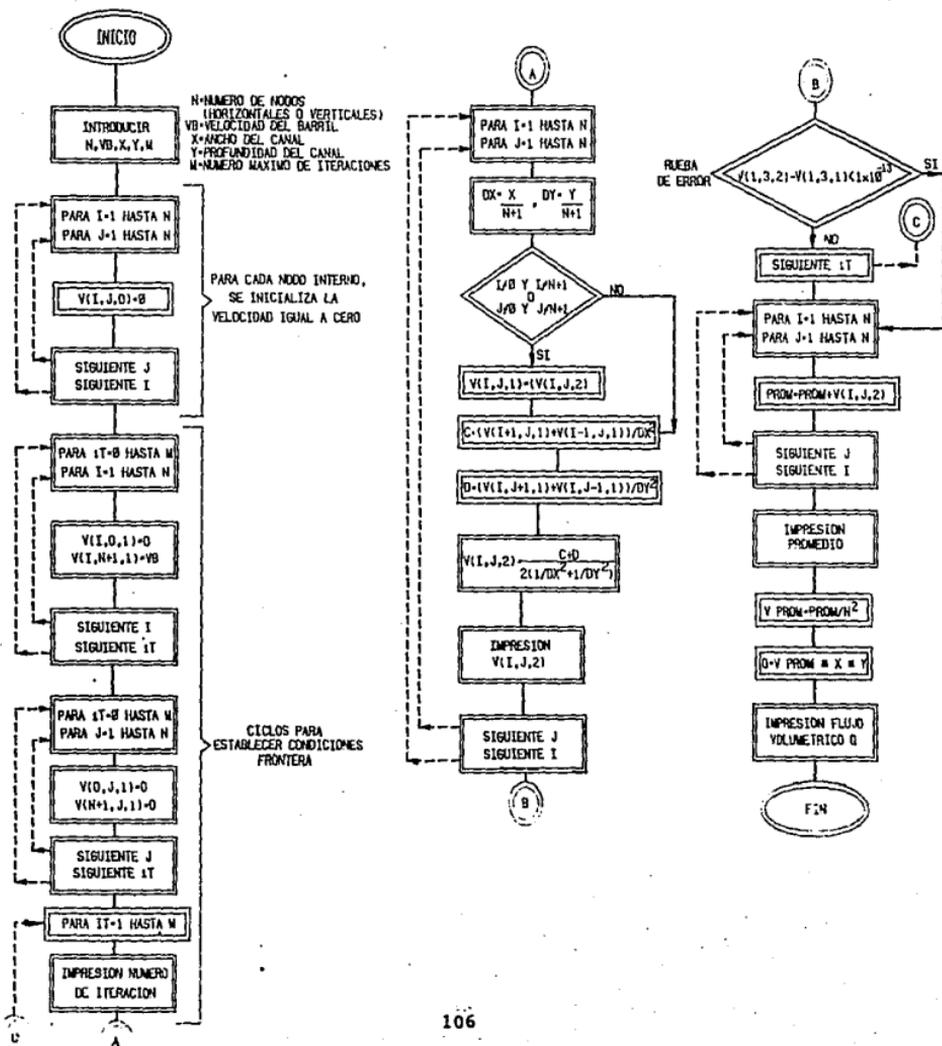


FIGURA 7.7a DISTRIBUCION DE LA VELOCIDAD DEL FLUIDO EN EL CANAL DEL TORNILLO CONSIDERANDO, TORNILLO EN MOVIMIENTO Y BARRIL ESTATICO (DEL EJEMPLO 7.1).

FIGURA 7.8 ALGORITMO DEL METODO "ITERATIVO POR BIFURCACIONES" PARA CALCULO DEL FLUJO DE ARRASTRE (FLUIDO NEWTONIANO).



e) SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION DE POISSON QUE RIGE EL COMPORTAMIENTO DE UN FLUIDO NEWTONIANO EN UN EXTRUSOR DE TORNILLO SENCILLO.

Utilizando el mismo método de diferencias centrales para la solución de la ecuación de Poisson (5.10), que rige el comportamiento total de un fluido Newtoniano en un Extrusor de tornillo sencillo, se tiene lo siguiente:

$$\partial p / \partial z = \mu \left(\partial^2 v_z / \partial x^2 + \partial^2 v_z / \partial y^2 \right) \dots (5.10)$$

sustituyendo las segundas derivadas en la ecuación (5.10)

$$\partial p / \partial z = \mu \left[\frac{v_z(i+1, j) - 2v_z(i, j) + v_z(i-1, j)}{(\Delta x)^2} + \frac{v_z(i, j+1) - 2v_z(i, j) + v_z(i, j-1)}{(\Delta y)^2} \right] \dots (7.22)$$

resolviendo para $v_z(i, j)$ se tiene:

$$v_z(i, j) = \frac{(\partial p / \partial z) (1/\mu) - \frac{v_z(i+1, j) + v_z(i-1, j)}{(\Delta x)^2} - \frac{v_z(i, j+1) + v_z(i, j-1)}{(\Delta y)^2}}{(-2/(\Delta x)^2 - 2/(\Delta y)^2)} \dots (7.23)$$

Para determinar la velocidad en cada nodo del canal, mediante la ecuación anterior se utiliza el programa de cómputo de iteraciones

por bifurcaciones, el cual se representa por el diagrama de flujo de la fig.(7.9) y el listado del programa en el anexo 3.

f) SOLUCION NUMERICA A LA ECUACION QUE RIGE EL COMPARTAMIENTO DEL EXTRUSOR PARA UN FLUIDO NO-NEWTONIANO.

De igual manera que en los casos anteriores, la solución a la ecuación (5.15) se realiza mediante las diferencias centrales de la siguiente manera:

$$\partial p / \partial z = K [n (\partial v_z / \partial x)^{n-1} (\partial^2 v_z / \partial x^2) + n (\partial v_z / \partial y)^{n-1} (\partial^2 v_z / \partial y^2)] \quad \dots (5.15)$$

$$\begin{aligned} \partial p / \partial z = & Kn \left[\left(\frac{v_z(i+1, j) - v_z(i-1, j)}{2(\Delta x)} \right)^{n-1} \frac{(v_z(i+1, j) - 2v_z(i, j) + v_z(i-1, j)))}{(\Delta x)^2} + \right. \\ & \left. \left(\frac{v_z(i, j+1) - v_z(i, j-1)}{2(\Delta y)} \right)^{n-1} \frac{(v_z(i, j+1) - 2v_z(i, j) + v_z(i, j-1)))}{(\Delta y)^2} \right] \quad \dots (7.24) \end{aligned}$$

despejando la velocidad $v_z(i, j)$ se tiene la siguiente solución:

$$\begin{aligned} v_z(i, j) = & \frac{1/nK (\partial p / \partial z) - \left(\frac{v_z(i+1, j) - v_z(i-1, j)}{2(\Delta x)} \right)^{n-1} \frac{(v_z(i+1, j) + v_z(i-1, j))}{(\Delta x)^2}}{[-2/(\Delta x)^2 \left(\frac{v_z(i+1, j) - v_z(i-1, j)}{2(\Delta x)} \right)^{n-1} - 2/(\Delta y)^2 \left(\frac{v_z(i, j+1) - v_z(i, j-1)}{2(\Delta y)} \right)^{n-1}]} \\ & - \frac{\left(\frac{v_z(i, j+1) - v_z(i, j-1)}{2(\Delta y)} \right)^{n-1} \frac{(v_z(i, j+1) + v_z(i, j-1))}{(\Delta y)^2}}{[-2/(\Delta x)^2 \left(\frac{v_z(i+1, j) - v_z(i-1, j)}{2(\Delta x)} \right)^{n-1} - 2/(\Delta y)^2 \left(\frac{v_z(i, j+1) - v_z(i, j-1)}{2(\Delta y)} \right)^{n-1}]} \quad \dots (7.25) \end{aligned}$$

Para determinar la velocidad de cada nodo del canal, mediante la ecuación anterior, se utiliza el programa de cómputo de iteraciones por bifurcaciones, el cual se representa en el diagrama de flujo de la figura 7.10 y el listado del programa en el anexo 4.

g) SIMULACION COMPUTACIONAL

En este inciso primeramente se llevará a cabo la corrida de uno de los programas de cómputo creados anteriormente sobre un ejemplo típico del cálculo del flujo volumétrico y flujo másico para un Extrusor de tornillo sencillo; el resultado se comparará con el cálculo, utilizando la solución analítica.

En segundo lugar se describirá como realizar la optimización del proceso.

I.- Ejemplo 7.2

-Calcular el flujo volumétrico y másico para un Extrusor de tornillo sencillo en el cual se procesa polietileno de baja densidad (gra comercial), bajo las siguientes condiciones de operación y con el siguiente diseño de tornillo y dado:

Condiciones de operación

Velocidad del tornillo = 50 (rpm)
Presión en el cabezal = 1000 (psi)
Temperatura-Material fundido = 374 (°F)

Diseño del tornillo

Diametro = 2.5 (in)
Longitud Sección de Compresión = 10.0 (in)
Profundidad del canal = 0.1 (in)
Ancho del canal = 2.14 (in)
Angulo helicoidal = 17.7 (grados)
Claro álabe - barril δ = 0.007 (in)

Diseño del dado

Diametro del orificio cilindrico = 3/16 (in)
Relación L/D = 3.6

* SOLUCION:

Para poder utilizar el programa de cómputo primeramente se tiene que identificar el tipo del fluido que se transporta en la sección de compresión cuando el Polietileno de baja densidad tiene una temperatura de 374 °F. Es decir que se tiene que calcular el índice de comportamiento (n) y el índice de deformación (K).

Para lo cual se debe contar con una gráfica de Viscosidad aparente vs. Esfuerzo cortante (figura 7.11), la cual puede ser encontrada en bibliografía especializada o puede ser controlada con los datos experimentales utilizando un Reómetro de capilar.

- Determinación del índice de comportamiento (n) y del índice de deformación (K):

De la gráfica que se presenta en la figura 7.11 se calcula el esfuerzo cortante para cada viscosidad aparente y velocidad de corte obteniendo la siguiente relación de datos:

TABLA 1

Esfuerzo cortante (lb/in ²)	Velocidad de corte (seg ⁻¹)
1.2	2
2.5	5
4.0	10
14.0	70
18.0	100
28.0	200
40.0	500
55.0	1000
76.0	2000
100.0	5000

Utilizando la Ley de la potencia ($\tau_{yx} = K (-dV_x/dV_y)^n$ (Ec. 4.4) y transformándola en base logarítmica se tiene lo siguiente:

$$\log \tau_{yx} = \log K + n \log (-dV_x/dV_y) \quad \dots(7.26)$$

realizando la regresión logarítmica que se presenta en la figura

(7.13) se obtiene :

- ordenada al origen = 0.1166 ----> $\log K = 0.1166$ ---->

por lo tanto el índice de deformación $K = 1.57$

- pendiente = 0.57 por lo tanto el índice de comportamiento $n = 0.57$

Teniendo las características del fluido se procede a utilizar el programa de cómputo que resuelve la ecuación para un fluido No-Newtoniano (fig.7.10). Con el propósito de obtener un resultado más exacto se introduce en el programa de cómputo 9 nodos horizontales y 9 nodos verticales con lo cual se genera un sistema de 81 ecuaciones lineales, de tal manera que el promedio de la distribución de la velocidad sea más exacto.

VELOCIDAD PROMEDIO = 2.97 in/seg

FLUJO VOLUMETRICO = 0.616 in³/seg

(para este cálculo, el programa realizó 395 iteraciones. Ver figura 7.12 en donde aparece la distribución de la velocidad en el canal para el caso de 9 nodos internos).

Extrapolando en una gráfica de la densidad de la resina contra la temperatura, se obtiene una densidad del polietileno de 47.4 lb/ft³ a 374 °F, con lo cual se calcula:

FLUJO MASICO = 0.017 lb/seg = 1.02 lb/min = 61.2 lb/hr

Utilizando el método analítico ecuación (6.48) y considerando que los efectos de la forma del perímetro del álabe son de menor

importancia, se tiene que los factores de forma son casi 1. Así también se considera para este tornillo los factores de curvatura igual a 1 y se asume que no hay gradiente de viscosidad a través de la profundidad del canal por lo que se tiene:

$$F_d' = F_d = 0.97 \quad \text{y} \quad F_p' = F_p = 0.97$$

$$Q = 37.1 \text{ in}^3/\text{min} \quad \text{--->} \quad \text{FLUJO MASICO} = 61.0 \text{ lb/hr}$$

Este flujo másico se ve afectado por el flujo de fuga que sucede entre la superficie del álabe y la pared del barril. Para conocer la disminución en el flujo másico, se utiliza la ecuación 6.43, en la cual el segundo término se desprecia por la pequeña magnitud que representa, por lo que:

$$\text{Flujo Másico } Q_{oc} = \frac{F_D \pi D^2 N h (1 - ne/t) \text{ sen } \phi \text{ cos } \phi}{2} (1 - a - j)$$

$$a = \frac{-(-3.13 \times 10^{-4} \Delta p / \mu)}{0.775 N} = 0.0403$$

de igual manera:

$$j = \delta/h = 0.007/0.1 = 0.070$$

Sustituyendo todos los valores en la ecuación de flujo másico se tiene:

$$Q_{oc} = 38.7(1 - 0.0403 - 0.070) = 34.4 \text{ in}^3/\text{min}$$

$$Q_{oc} = 56.5 \text{ lb/hr}$$

Como se observa el flujo másico se ve disminuido cuando se considera el flujo de fuga. En el caso de la solución numérica este flujo de fuga no se considera, sin embargo como es un fenómeno físico muy particular del proceso de extrusión, podríamos suponer un cierto porcentaje de disminución del flujo.

VISCOSIDAD Vs. VELOCIDAD DE DEFORMACION
(A TEMPERATURA CONSTANTE)

POLIETILENO BAJA DENSIDAD

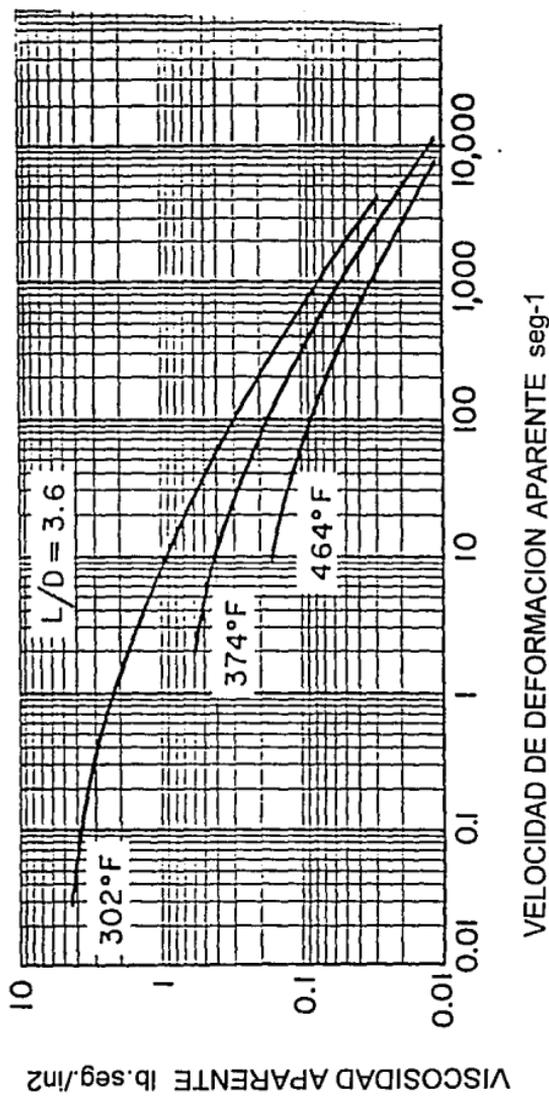


FIGURA 7.11 GRAFICA DE VISCOSIDAD APARENTE CONTRA VELOCIDAD DE DEFORMACION

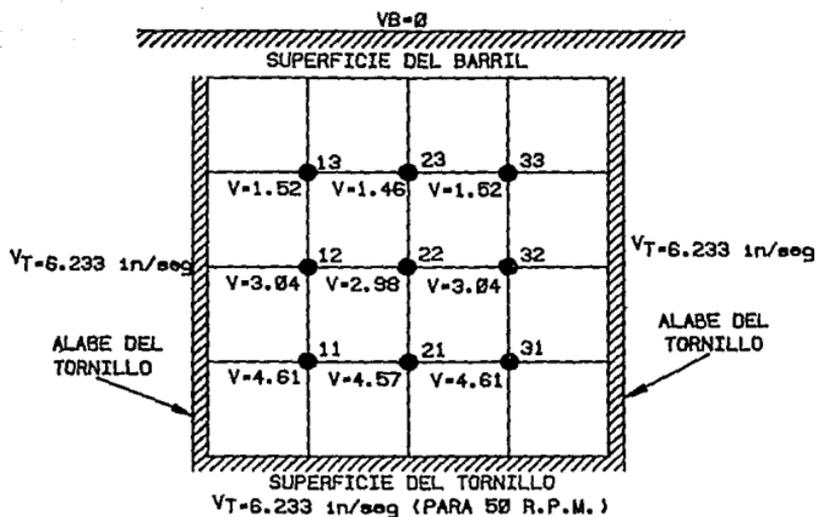
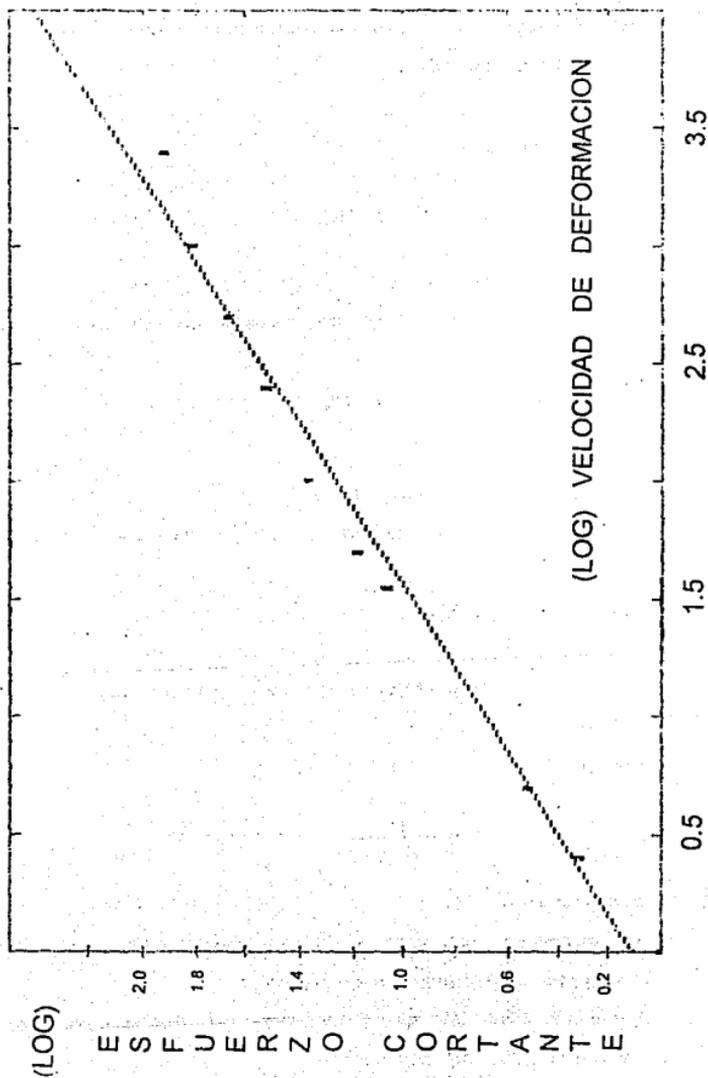


FIGURA 7.12 DISTRIBUCION DE LA VELOCIDAD DEL FLUIDO EN EL CANAL DEL TORNILLO PARA EL CASO DEL EJEMPLO 7.2

FIGURA 7.13 REGRESION LOGARITMICA DE
ESFUERZO CORTANTE Vs. VELOCIDAD DE DEFORMACION

$R^2 = 0.99999$
 $R^2 = 0.99999$
 $R^2 = 0.99999$



11.-OPTIMIZACION DEL PROCESO

En este caso se debe analizar el desarrollo de la operación del tornillo y del dado en combinación.

El esfuerzo cortante τ en la pared del dado se relaciona con la presión por:

$$\tau = \frac{\Delta p R_d}{2L} \quad \dots (7.27)$$

de ahí que:

$$\tau = \Delta p / 14.4 \text{ lbr/in}^3 \quad \dots (7.28)$$

nota. Δp en (lb/in^2)

La velocidad de corte aparente γ_A se relaciona con el flujo volumétrico en el dado por:

$$\gamma_A = 4Q/\pi R_d^3 \quad \dots (7.29)$$

Sustituyendo el valor del radio R , de π y despejando el flujo volumétrico se tiene:

$$Q = 6.39 \times 10^{-2} \gamma_A \quad \dots (7.30)$$

Nota. Q en (lb/hr) , γ_A en (seg^{-1}) .

Utilizando las ecuaciones (7.28) y (7.30) en conjunción con los datos de la tabla 1 de esfuerzo cortante contra velocidad de corte para el

polietileno en estudio, se puede definir el desarrollo del fluido en el dado obteniendo una gráfica de presión contra el flujo másico. De igual manera y utilizando el programa de cómputo podemos graficar el desarrollo del fluido dentro del canal del tornillo y graficar la presión contra el flujo másico. Las características del fluido en el canal del tornillo y en el orificio del dado se calcularon a dos diferentes temperaturas 374 °F y 464 °F y se muestran gráficamente en la figura 7.14, al igual que también se calcularon para dos diseños de tornillo diferentes a las mismas temperaturas. Por lo que si observamos la gráfica, podemos encontrar que el punto de operación de un EXTRUSOR se encuentra en la intersección de las curvas de desarrollo del tornillo y del dado.

Para el caso en que la temperatura de masa fundida del polietileno es 374 °F, el punto A describirá las operación del EXTRUSOR cuando se tiene un tornillo el cual tiene una sección de compresión con una profundidad $y = 0.200$ in., y el punto B cuando $y = 0.100$ in., a 474 °F los puntos de operación respectivamente son C y D.

Analizando la gráfica de la figura 7.13 podemos ver que el flujo másico es poco sensitivo a los cambios simultáneos en la temperatura de masa fundida tanto en el tornillo como en el dado, particularmente en el caso del tornillo con canal poco profundo. Sin embargo, cuando la temperatura se incrementa de 374 °F a 464 °F, la presión decrece cerca del 35% para ambos tornillos.

Los puntos de operación cuando solo se cambia la temperatura de masa

fundida en el dado, también se pueden obtener de la misma gráfica. Si por ejemplo, la temperatura de la masa fundida en el dado se incrementará a 464°F mientras que en el tornillo con canal profundo permanece constante a 374°F , el punto de operación cambiaría de A a E. Con esto el flujo másico aumentaría un 4% mientras que la presión en el dado decrecería un 33% aproximadamente. Si consideramos el mismo cambio de temperatura en el tornillo con canal poco profundo se tendría solo un aumento de 1.5% en el flujo másico.

Con lo anterior podemos concluir que un tornillo con canal profundo genera un mayor flujo másico pero es más sensitivo a los cambios de temperatura tanto del tornillo como del dado.

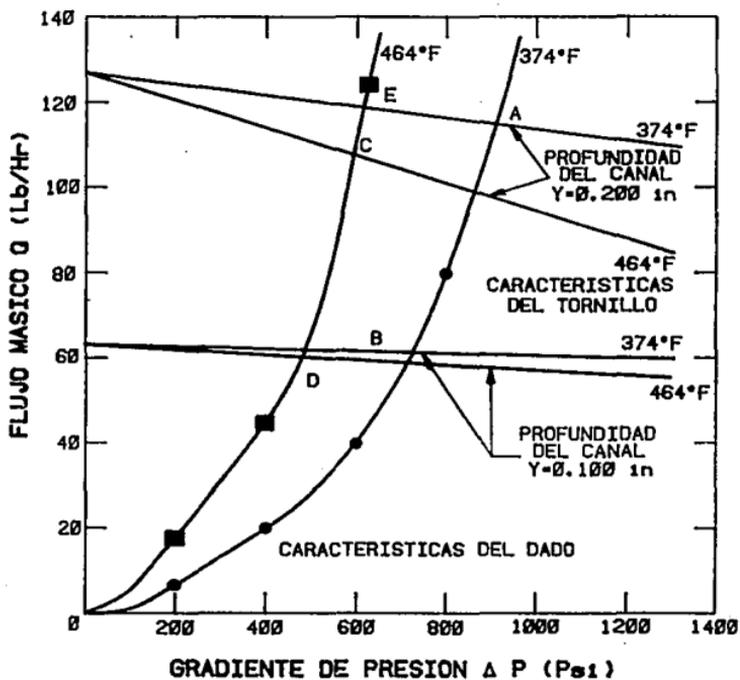


FIGURA 7.14 DESARROLLO DEL TORNILLO Y DADO

ANEXO (1) LISTADO DEL PROGRAMA DE COMPUTO - METODO DE GAUSS SEIDEL

```

10 REM METODO DE GAUSS SEIDEL/CALCULO FLUJO DE ARRASTRE (FLUIDO NEWTONIANO)
20 INPUT "NUMERO DE NODOS HORIZONTALES O VERTICALES=";N
30 INPUT "VB(VELOCIDAD DEL BARRIL)=";VB
40 N2=N^2
50 DIM A(N,N+1,N2)
60 EQ=0
70 FOR I=1 TO N
80 FOR J=1 TO N
90 EQ=EQ+1
100 PRINT "ecuacion=";EQ
110 A(I,J,EQ)=-4
120 PRINT "a(";I;J;EQ;")=";A(I,J,EQ)
130 IF I<N THEN 140:ELSE 160
140 A(I+1,J,EQ)=1
150 PRINT "a(";I+1;J;EQ;")=";A(I+1,J,EQ)
160 IF J<N THEN 170 ELSE 190
170 A(I,J+1,EQ)=1
180 PRINT "a(";I;J+1;EQ;")=";A(I,J+1,EQ)
190 IF J>1 THEN 200 ELSE 220
200 A(I,J-1,EQ)=1
210 PRINT "a(";I;J-1;EQ;")=";A(I,J-1,EQ)
220 IF I>1 THEN 230 ELSE 250
230 A(I-1,J,EQ)=1
240 PRINT "a(";I-1;J;EQ;")=";A(I-1,J,EQ)
250 DIFER=(EQ)/N-INT((EQ)/N)
260 IF DIFER=0 THEN 270 ELSE 280
270 A(N,N+1,EQ)=-VB
280 DIFER=(EQ-1)/N-INT((EQ-1)/N)
290 IF DIFER=0 THEN 300 ELSE 310
300 A(N,N+1,EQ)=0
310 IF EQ= N2 THEN A(N,N+1,EQ)=-VB
320 PRINT "a(";N,N+1,EQ;")=";A(N,N+1,EQ)
330 NEXT J
340 NEXT I
350 FOR EQ=1 TO N2
360 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N+1
370 PRINT "a(";I;J;EQ;")=";A(I,J,EQ)
380 NEXT J:NEXT I
390 NEXT EQ
400 INPUT "M (NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES)=";M:
405 INPUT "E (ERROR O CRITERIO DE PARO)=";E
406 INPUT "H (FACTOR DE RELAJACION)=";H
410 DIM VZ(N,N,M)
420 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N:VZ(I,J,0)=0:NEXT J:NEXT I
430 FOR IT=1 TO M
440 FOR EQ=1 TO N^2
450 S=A(N,N+1,EQ)
460 FOR I=1 TO N
470 FOR J=1 TO N
480 FOR R = 1 TO N
490 IF EQ<=N*R THEN 500 ELSE NEXT R
500 IF I=R AND J=EQ-N*(R-1) THEN 510 ELSE 520
510 I2=I:J2=J:GOTO 530
520 S=S-A(I,J,EQ)*VZ(I,J,IT-1)
530 NEXT J
540 NEXT I
550 VZ(I2,J2,IT)=S/A(I2,J2,EQ)
560 VZ(I2,J2,IT)=VZ(I2,J2,IT)*H+(1-H)*VZ(I2,J2,IT)
570 S=0
580 NEXT EQ

```

CONTINUACION ANEXO (1)

```
590 ER=(VZ(1,1,IT)-VZ(1,1,IT-1))/VZ(1,1,IT):ER=ABS(ER)
600 PRINT "error=";ER
610 IF ER<=E THEN 660 ELSE
620 NEXT IT
630 PRINT "no se alcanzo la convergencia"
640 IF IT=M THEN IT =M-1
650 SUMAV=0
660 FOR P=1 TO N:FOR Q=1 TO N
670 PRINT "      vz (";P;Q;IT;")=";VZ(P,Q,IT)
680 SUMAV=SUMAV+VZ(P,Q,IT)
690 NEXT Q:NEXT P
700 PRINT "FLUJO VOLUMETRICO=";SUMAV/N^2
710 END
```

```

10 REM METODO DE BIFURCACIONES/CALCULO FLUJO DE ARRASTRE (FLUIDO NEWTONIANO)
20 INPUT "NUMERO DE NODOS=";N
30 INPUT "VELOCIDAD DEL BARRIL=";VB:INPUT "ANCHO DEL CANAL=";X
40 INPUT "PROFUNDIDAD DEL CANAL=";Y
50 INPUT "NUMERO MAX. DE ITERACIONES=";M
60 DIM V(N+1,N+1,2)
70 REM CICLO PARA INICIALIZAR LOS VALORES DE LA VELOCIDAD=0 EN CADA NODO INTERNO
80 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N: V(I,J,0)=0:NEXT J:NEXT I
90 REM CICLOS PARA ESTABLECIMIENTO DE CONDICIONES DE FRONTERA(4)
100 FOR IT=0 TO M:FOR I=1 TO N:V(I,0,1)=0:V(I,N+1,1)=VB:NEXT I:NEXT IT
110 FOR IT=0 TO M:FOR J=1 TO N:V(0,J,1)=0:V(N+1,J,1)=0:NEXT J:NEXT IT
120 FOR IT=1 TO M: PRINT "NUMERO DE ITERACION=";IT
130     FOR I=1 TO N
140         FOR J=1 TO N
150             DX=X/(N+1):DY=Y/(N+1)
160             IF (I<>0 AND I<>N+1) OR (J<>0 AND J<>N+1) THEN V(I,J,1)=V(I,J,2)
170                 C=(V(I+1,J,1)+V(I-1,J,1))/DX^2
180                 D=(V(I,J+1,1)+V(I,J-1,1))/DY^2
190                 V(I,J,2)=(C+D)/2/(1/DX^2+1/DY^2)
200                 PRINT "V(";I;J;")=";V(I,J,2)
210             NEXT J
220         NEXT I
230     IF ABS(V(N,N,2)-V(N,N,1))<1E-13 THEN 250
240 NEXT IT
250 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N: PROM=PROM+V(I,J,2):NEXT J:NEXT I
260 PRINT "promedio de velocidad=";PROM/N^2:VPRM=PROM/(N^2)
270 Q=VPRM*X*Y:PRINT "Q=";Q

```

ANEXO (2) LISTADO DEL PROGRAMA DE COMPUTO - METODO DE BIFURCACIONES -
CALCULO FLUJO DE ARRASTRE (FLUIDO NEWTONIANO)

```

10 REM METODO BIFURCACIONES/CALCULO FLUJO VOLUMETRICO TOTAL (FLUIDO NEWTONIANO)
20 REM SOLUCION A LA ECUACION DE POISSON
30 INPUT "NUMERO DE NODOS=";N
40 INPUT "NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES=";M
50 REM INTRODUCCION DE DIMENSIONES DEL TORNILLO
60 INPUT "LONGITUD SEC. COMPRESION (in)=";L
70 INPUT "DIAMETRO DEL TORNILLO (in)=";DIA
80 INPUT "ANCHO DEL CANAL(in)=";X
90 INPUT "PROFUNDIDAD DEL CANAL(in)=";Y
100 REM INTRODUCCION DE CONDICIONES DE OPERACION
110 INPUT "VELOCIDAD DEL TORNILLO(rps)=";VT
120 INPUT "PRESION(Psi)=";P
130 INPUT "VISCOSIDAD(lb-sec/in2)=";VISC
140 DE =(P/L)*.306
150 VL = 3.1416*DIA* VT*.952
160 DIM V(N+1,N+1,2)
170 REM CICLO P/INICIALIZAR LOS VALORES DE LA VELOCIDAD=0 EN CADA NODO INTERNO
180 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N: V(I,J,0)=0:NEXT J:NEXT I
190 REM CICLOS PARA ESTABLECIMIENTO DE CONDICIONES DE FRONTERA(4)
200 FOR IT=0 TO M:FOR I=1 TO N:V(I,0,1)=VL:V(I,N+1,1)=0:NEXT I:NEXT IT
210 FOR IT=0 TO M:FOR J=1 TO N:V(0,J,1)=VL:V(N+1,J,1)=VL:NEXT J:NEXT IT
220 FOR IT=1 TO M: PRINT "NUMERO DE ITERACION=";IT
230     FOR I=1 TO N
240         FOR J=1 TO N
250             DX=X/(N+1):DY=Y/(N+1)
260             IF (I<>0 AND I<>N+1) OR (J<>0 AND J<>N+1) THEN V(I,J,1)=V(I,J,2)
270                 C=(V(I+1,J,1)+V(I-1,J,1))/DX^2
280                 D=(V(I,J+1,1)+V(I,J-1,1))/DY^2
290                 V(I,J,2)=(1/VISC*DE-(C+D))/(-2/DX^2-2/DY^2)
300                 PRINT "V(";I;J;")=";V(I,J,2)
310             NEXT J
320         NEXT I
330     IF ABS(V(N,N,2)-V(N,N,1))<1E-13 THEN 350
340 NEXT IT
350 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N: PROM=PROM+V(I,J,2):NEXT J:NEXT I
360 PRINT "promedio de velocidad=";PROM/N^2:VPROM=PROM/(N^2)
370 Q=VPROM*X*Y:PRINT "Q(in3-sec)=";Q

```

ANEXO (3) LISTADO DEL PROGRAMA DE COMPUTO - METODO DE BIFURCACIONES -
CALCULO FLUJO VOLUMETRICO TOTAL (FLUIDO NEWTONIANO)

```

10 REM METODO BIFURCACIONES/CALCULO FLUJO VOLUMETRICO TOTAL FLUIDO NO-NEWTONIANO
20 REM SOLUCION A LA ECUACION DE POISSON
30 INPUT "NUMERO DE NODOS=";N
40 INPUT "NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES=";M
50 REM INTRODUCCION DE DIMENSIONES DEL TORNILLO
60 INPUT "LONGITUD SEC. COMPRESION (in)=";L
70 INPUT "DIAMETRO DEL TORNILLO (in)=";DIA
80 INPUT "ANCHO DEL CANAL(in)=";X
90 INPUT "PROFUNDIDAD DEL CANAL(in)=";Y
100 INPUT "ANGULO HELICOIDAL (grados)=";ANG
110 REM INTRODUCCION DE CONDICIONES DE OPERACION
120 INPUT "VELOCIDAD DEL TORNILLO(rps)=";VT
130 INPUT "PRESION(PSI)=";P
140 INPUT "INDICE DE DEFORMACION(1b-sec/in2)=";K
150 INPUT "INDICE DE COMPORTAMIENTO=";IND
160 DE =(P/L)*SIN(ANG*2*3.1416/360)
170 VL = 3.1416*DIA* VT*COS(ANG*2*3.1416/360)
180 DIM V(N+1,N+1,2)
190 REM CICLO P/INICIALIZAR LOS VALORES DE LA VELOCIDAD=0 EN CADA NODO INTERNO
200 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N: V(I,J,0)=0:NEXT J:NEXT I
210 REM CICLOS PARA ESTABLECIMIENTO DE CONDICIONES DE FRONTERA(4)
220 FOR IT=0 TO M:FOR I=1 TO N:V(I,0,1)=VL:V(I,N+1,1)=0:NEXT I:NEXT IT
230 FOR IT=0 TO M:FOR J=1 TO N:V(0,J,1)=VL:V(N+1,J,1)=VL:NEXT J:NEXT IT
240 FOR IT=1 TO M: PRINT "NUMERO DE ITERACION=";IT
250     FOR I=1 TO N
260         FOR J=1 TO N
270             DX=X/(N+1):DY=Y/(N+1)
280             IF (I<>0 AND I<>N+1) OR (J<>0 AND J<>N+1) THEN V(I,J,1)=V(I,J,2)
290             IF IT =1 THEN A=1:B=1:GOTO 320 ELSE 300
300             A=ABS(V(I+1,J,1)-V(I-1,J,1))/2/DX^(IND-1)
310             B=ABS(V(I,J+1,1)-V(I,J-1,1))/2/DY^(IND-1)
320                 C=(V(I+1,J,1)+V(I-1,J,1))/DX^2
330                 D=(V(I,J+1,1)+V(I,J-1,1))/DY^2
340             V(I,J,2)=(1/IND/K*DE-(C*A+D*B))/((-2/(DX^2)*A)-(2/(DY^2)*B))
350             PRINT "V(";I;J;")=";V(I,J,2)
360         NEXT J
370     NEXT I
380     IF ABS(V(N,N,2)-V(N,N,1))<1E-13 THEN 400
390 NEXT IT
400 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N: PROM=PROM+V(I,J,2):NEXT J:NEXT I
410 PRINT "promedio de velocidad=";PROM/N^2:VPROM=PROM/(N^2)
420 Q=VPROM*X*Y:PRINT "Q(in3-sec)=";Q

```

ANEXO (4) LISTADO DEL PROGRAMA DE COMPUTO - METODO DE BIFURCACIONES -
CALCULO FLUJO VOLUMETRICO TOTAL (FLUIDO NO-NEWTONIANO)

VIII. PROBLEMAS REALES QUE ORIGINAN UNA DISMINUCION EN EL FLUJO VOLUMETRICO DE UN EXTRUSOR.

Después de haber analizado teóricamente el proceso de Extrusión para para la determinación tanto del comportamiento fluidodinámico de un polímero como la determinación del flujo másico y volumétrico, en este capítulo, se mencionarán los problemas típicos que ocurren en cualquier proceso de Extrusión a nivel manufactura, los cuales ocasionan disminución considerable en la producción.

Cuando los problemas de bajo flujo llegan a suceder, el operador se enfrenta a una situación, que llega a ser desesperante, debido a que ningún modelo matemático o teórico puede llegar a solucionarlo. En tales casos se recomienda en primer lugar determinar si no se tienen problemas mecánicos o que el tornillo presente un desgaste significativo.

En caso de no deberse a estas causas, la disminución de la producción se deberá a un problema de alimentación, el cual puede presentarse en la tolva, garganta de alimentación o en el tornillo del Extrusor.

Para determinar la causa del problema de alimentación se recomienda observar si el bajo rendimiento se presenta a cualquier velocidad del tornillo del Extrusor o a una determinada velocidad, ya que se ha observado que:

<u>ACCION</u>	<u>PROBLEMA</u>
Cualquier velocidad del Tornillo ----->	1. Pobre flujo por gravedad
Determinada velocidad del tornillo ----->	2. Problema de movimiento de material en tornillo
	3. Problema de fusión

1. Pobre flujo por gravedad . El material no fluye hacia los canales del tornillo a una suficiente velocidad. Cuando sucede este problema se recomienda detectar si el bajo flujo sucede de la tolva a la garganta de alimentación o de la garganta de alimentación al tornillo del Extrusor. Para lo cual se recomienda separar la tolva y observar como fluye el material a la salida de la tolva. La mayoría de las veces se observa un pobre flujo o ausencia de flujo cuando se manejan materiales de baja densidad, mezclas de materiales cargados con carbonato de calcio, fibra de vidrio, etc. los cuales llegan a formar puentes en la parte más estrecha de la tolva, los llamados hoyos de rata, baja fluidez por las paredes de la tolva etc. Las formas de solucionar estos problemas pueden ser muy diferentes, sin embargo se debe tener en mente tratar de resolver el problema de la forma más económica, por lo que se recomienda, primeramente optimizar el mezclado de la materia prima, es decir mezclar primero el polímero con los ingredientes y después mezclar por menor tiempo con la carga, en seguida se recomienda poner en la tolva un vibrador, que puede ser del tipo neumático o magnético; si no se obtiene el resultado esperado puede cambiar el diseño de la tolva, teniendo un ángulo de inclinación mayor, fabricando una tolva excéntrica, o disminuyendo la fricción del material con las paredes de la tolva. El éxito para encontrar la solución dependerá de que tan bien se conozcan las propiedades de la mezcla y de las materias primas.

Si desde el inicio de la prueba se detecta que existe un buen flujo en la tolva, se puede sospechar que el problema tiene lugar en la garganta de alimentación, para lo cual se pueden considerar los diferentes diseños que se mencionaron al inicio del capítulo de

Extrusión.

Sin embargo, si con las anteriores sugerencias el problema de pobre alimentación no llega a solucionarse, se recomienda instalar un alimentador de tornillo en la tolva, el cual forzará la mezcla a fluir hacia el tornillo del Extrusor y así llenar los canales del mismo. Esta solución puede ser la más cara, sin embargo con este equipo se puede optimizar el proceso.

Si este problema de pobre alimentación sucede a una determinada velocidad, las posibles causas se consideran en los siguientes incisos:

2. Problemas de movimiento. El material no se mueve hacia adelante a lo largo del Extrusor, debido a que la resina o el material no se adhiere a la pared del barril (usualmente porque está muy frío) o no se desliza sobre el tornillo. Debido a una falta de presión para mover el material hacia adelante. Este problema se presenta muy a menudo con materiales de partículas pequeñas (en polvo), de rápida fusión o materiales muy húmedos, al igual que con materiales de alto contenido de lubricantes. Muchos métodos pueden seguirse para corregir el problema. El aumentar la temperatura usualmente ayuda porque el plástico tiende a adherirse a la pared del barril y a deslizarse sobre los álabes fríos del tornillo del Extrusor. Una desventaja que puede llegar a presentarse es la formación de un bloque de material fundido entre el tornillo y cañón el cual no puede ser removido debido a una falta de presión para mover hacia adelante el bloque. Cuando sucede esto se recomienda el instalar en la tolva un alimentador de tornillo, el cual genere la suficiente presión para mover el material hacia

adelante.

3. Problemas de fusión. Este problema es el más costoso para poderlo corregir, porque a menudo se requiere otro diseño de tornillo. Materiales duros tales como el policarbonato son fracturados en lugar de ablandarlos por el esfuerzo de corte y el barril, provocando una falta de presión en la sección de compresión y en esta sección la presión es fundamental para fundir el material. Antes de considerar otro diseño de tornillo se recomienda realizar algunos cambios en las condiciones de operación. Primeramente se sugiere reducir la temperatura en las primeras zonas de alimentación del Extrusor, esto ocasionará una mayor viscosidad del fundido lo cual generará mayor presión y tenderá a mover el material hacia adelante. Si el problema continúa se deberá diseñar otro tornillo el cual tenga un radio de compresión mayor para fundir el material.

IX. CONCLUSIONES

El objetivo de esta tesis se cumplió en su totalidad al crear un programa de cómputo que describe el comportamiento dinámico de plásticos no-Newtonianos, permitiendo calcular el perfil de velocidades del fluido así como el flujo volumétrico y el flujo másico en un Extrusor de tornillo sencillo.

De los resultados obtenidos en este estudio se puede concluir que los métodos numéricos son una herramienta funcional en la solución de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento físico de los fluidos.

Se realizó un planteamiento y desarrollo adecuado de las ecuaciones dinámicas las cuales se resolvieron en forma analítica y numérica para describir el comportamiento hidrodinámico de un fluido en el proceso de transformación de los plásticos.

El método de cómputo que resuelve de forma iterativa las ecuaciones que rigen el comportamiento de un fluido en un Extrusor es confiable al tener una diferencia insignificante contra el método analítico, el cual se ha demostrado (ref.2) que es confiable en la caracterización del comportamiento de diferentes materiales en procesos de manufactura reales.

Utilizando el programa de cómputo se puede realizar la optimización del proceso de Extrusión para diferentes diseños de Extrusores.

Este trabajo puede ser utilizado por operadores que tienen a su cargo procesos de Extrusión con el propósito de mejorar el entendimiento de la operación de un Extrusor y principalmente para incrementar la productividad.

X. BIBLIOGRAFIA

- 1.- BIRD, R.B.; LIGTHFOOT S.; STEWART, W.E.
FENOMENOS DE TRANSPORTE
ED. REVERTE BARCELONA, ESPANA, 1978
- 2.- ERNEST C. BERNHARDT,
PROCESSING OF THERMOPLASTIC MATERIALS
ROBERT E. KRIEGER PUBLISHING COMPANY, HUNTINGTON, NEW YORK
- 3.- CHAPRA, STEVEN C.; CANALE, RAYMOND P.
METODOS NUMERICOS PARA INGENIEROS
MC GRAW HILL, MEXICO, 1985
- 4.- BOYCE, WILLIAM E. & DIPRIMA, RICHARD C.
ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES A LA FRONTERA
LIMUSA, MEXICO, 1978
- 5.- KREIDER, DONALD L; KULLER, ROBERT G; OSTBERG, DONALD R & PERKINS,
FRED W.
INTRODUCCION AL ANALISIS LINEAL
TOMO I
FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO
MEXICO, 1971
- 6.- GOTTFRIED, BYRON S.
PROGRAMACION BASIC
MC GRAW HILL CO. MEXICO, 1990
- 7.- MC CORMICK, WILLIAMS.
"IF YOUR EXTRUDER THROUGHPUT IS FALLING YOU MAY HAVE FEED
PROBLEMS"
PLASTICS WORLD, VOL. 7, NUM 33, OCTOBER 22, 1975. PP:101
- 8.- KOWALSKI, RONALD C.
"PUT MELT RHEOLOGY TO WORK IN YOUR EXTRUDER"
PLASTICS ENGINEERING. JUNIO 1974. P.P:47-51
- 9.- PUBLIC RELATIONS COMMITTEE OF THE SOCIETY OF PLASTICS INDUSTRY
THE STORY OF THE PLASTICS INDUSTRY
NEW YORK, FEBRERO 1970.
- 10.- CANACINTRA, SECCION PLASTICOS
INFORMACION ECONOMICA DE LA INDUSTRIA DE LA TRANSFORMACION DE LOS
PLASTICOS.
MEXICO, 1992.