

13
Zej



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ACATLAN**

**ITERACION DE SISTEMAS DINAMICOS
COMPLEJOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
**LIC. EN MATEMATICAS APLICADAS Y
C O M P U T A C I O N
P R E S E N T A :
GERMAN MONDRAGON ROJO**



ASESOR: DR. GUILLERMO SIENRA



MARZO 1999

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

216794



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Iteración de Sistemas

Dinámicos

Complejos

Dedicatoria:

Dedico este éxito a mis padres a quienes nunca dejaré de querer y honrar. Por que ellos son lo más grande que pude recibir de Dios.

A mi esposa, por apoyar mis proyectos y creer en mí.

A mis hermanos que siempre motivaron mis aspiraciones.

A Dios por darme la Fe y ayudarme a seguir adelante.



Agradecimientos:

A esta altura de la vida comprendo el sentido de mi existencia. Vuelven los recuerdos de mis primeros días de infancia, y entiendo que gracias a Dios mis pasos han llegado con esfuerzo a la distancia que he recorrido.

Con toda la fuerza de lo que soy, pongo de manifiesto que mi padre y mi madre han sido siempre modelos de lucha para seguir adelante sin renegar de lo que llegara a faltarnos.

Con humildad les agradezco todo el amor que sienten por mí, por que gracias a esto nunca me han faltado ganas de creer en lo que se puede lograr.

A mi padre, le agradezco la gran fuerza de voluntad que puso al levantar la mirada hacia Dios. Y a partir de eso, volver su cariño y dedicación a mi madre y a nosotros.

A mi madre, le bendigo pues nos ha enseñado a jamás caer, a aceptar que se puede cosechar donde nadie ha sembrado jamás. Ha puesto en nuestro corazón una Fe fuerte y firme, y con sus propias manos nos enseñó a enfrentar la vida, aun cuando no se tiene nada.

También agradezco el grande apoyo que recibí de la generosa voluntad de las personas del patronato Pro-Comunidades de Cruz Azul Hidalgo, pues representan una parte importante de los cimientos de este logro.

Les doy gracias a mis hermanos por apoyarme en todos los aspectos que ellos conocen.

Merece un agradecimiento muy especial mi asesor el Dr. Guillermo Sierra Loera que dedicó muchos instantes de sí para apoyar de buena fe el inicio y la terminación de este trabajo de tesis. Sinceramente, ¡muchas gracias!

Contenido

Introducción.....	1
Capítulo 1. Preliminares.....	4
1.1 Límites y funciones.....	4
1.2 Continuidad.....	5
1.3 Propiedades geométricas y topológicas de \mathbb{R}^n	5
1.3.1 Homeomorfismo.....	6
1.3.2 Esfera.....	6
1.3.3 Bola Cerrada.....	6
1.3.4 Bola Abierta.....	7
1.3.5 Convergencia.....	7
1.3.6 Puntos Límite.....	8
1.3.7 Conjunto Cerrado.....	8
1.3.8 Conjunto Abierto.....	8
1.3.9 Vecindad.....	8
1.3.10 Cerradura.....	8
1.3.11 Interior.....	9
1.3.12 Frontera.....	9
1.3.13 Conjunto Compacto.....	9
1.3.14 Conjunto Conexo.....	9
1.3.15 Conjunto Denso.....	9
1.4 Números Complejos.....	10
1.4.1 Suma Compleja.....	10
1.4.2 Multiplicación Compleja.....	11
1.4.3 Notación de Euler.....	12
1.4.4 Círculos y Angulos.....	13
1.4.5 Raíces n-ésimas.....	13
1.4.6 División Compleja.....	13
1.4.7 La desigualdad del Triángulo.....	14
1.4.8 La "Función" Raíz Cuadrada.....	14
1.5 Cálculo de Funciones Complejas.....	17
1.6 Funciones Analíticas.....	18
1.7 Función Meromorfa.....	18
1.8 Singularidades.....	18
1.9 Propiedades básicas de mapeos analíticos.....	18
1.9.1 Función de Clase C^f	19
1.9.2 Función de Clase C^∞	19
1.9.3 Difeomorfismo.....	19
1.10 Proyección Estereográfica.....	19
1.10.1 Teorema 1.10.1. Círculos y Rectas en la Esfera.....	21
Capítulo 2. Iteración de Sistemas Dinámicos Complejos.....	24
2.1 Definición de Sistemas Dinámicos.....	24
2.2 Iteración de Funciones Complejas.....	24
2.2.1 Iteración.....	24
2.3 Órbitas.....	25
2.3.1 Órbitas Estables.....	26
2.4 Puntos Fijos y Puntos Periódicos.....	26
2.4.1 Clasificación de Puntos Fijos.....	27
Proposición 2.4.1 Punto Fijo Atractor, Expansivo y Neutral.....	27
2.4.2 Teorema del Punto Fijo.....	29
2.4.3 Teorema del Punto Fijo Atractor.....	30
2.4.4 Teorema del Punto Fijo Expansivo.....	30
2.4.5 Principio del Mapeo en la Frontera.....	31

2.5 Punto Periódico de Período n	32
2.5.1 Teorema 2.5.1 Caos en el Mapeo Cuadrático $f_c(z) = z^2$	36
Definición de Órbita Acotada.....	37
2.5.2 Definición de Órbita Supersensitiva.....	38
2.5.3 Definición de Mapeo Analítico.....	38
Capítulo 3. Caos en Sistemas Dinámicos.....	39
3.1 Introducción al Caos en Sistemas Dinámicos.....	39
3.2 Tipos de Complejidad en Sistemas Dinámicos.....	40
3.2.1 Definición de Dependencia Sensitiva.....	42
3.2.2 Definición de Transitividad Topológica.....	42
3.2.3 Definición de Mapeo Caótico.....	42
3.2.4 Definición de Mapeo Expansivo.....	42
3.3 Caos en la Función $f_0(z) = z^2$	43
Capítulo 4. Conjuntos de Julia.....	50
4.1 Familia Normal.....	50
4.1.1 Definición de Familia Normal.....	50
Proposición 4.1.1 Familia no normal de Iteradas.....	51
4.1.2 Definición de Familia no normal.....	51
4.2 Teorema de Montel.....	52
4.2.1 Familia normal en un dominio.....	52
4.2.2 Teorema de Montel.....	52
4.3 El Conjunto de Julia.....	52
4.3.1 Definición de Conjunto de Julia.....	52
Proposición 4.3.1. El Conjunto de Julia no es el Conjunto Vacío.....	54
Teorema 4.3.1. Familia de Iteradas No Normal en un Punto z	55
Corolario 4.3.1. Conjunto de Julia Completamente Invariante.....	56
4.3.2 Proposición 4.3.2. La Cerradura de los puntos expansivos de f y de f^n	54
Teorema 4.3.2. Caos de $f_c(z)$ en el Conjunto de Julia.....	58
4.3.3 Proposición 4.3.3. Criterio de Escape.....	57
Corolario 4.3.3. El Conjunto de Julia Tiene Interior Vacío.....	58
4.3.4 Proposición 4.3.4. Preimágenes de un Conjunto de Julia.....	58
Corolario 4.3.4. La familia de Iteradas deja de ser normal en z	59
4.3.5 Corolario 4.3.5. Un Mapeo Analítico omite a lo menos un punto en \mathbb{C}	59
4.3.6 Corolario 4.3.6. Expansión de una Vecindad.....	60
4.4 La Geometría de los Conjuntos de Julia de la Familia Cuadrática $z^2 + c$	61
4.4.1 Proposición 4.4.1. Curva Conexa.....	61
4.4.2 Teorema 4.4.2. Órbita Expansiva del punto 0.....	70
Corolario 4.4.2. Órbita Expansiva de z	71
4.4.3 Corolario 4.4.3. Órbita que escapa al infinito.....	71
Propiedad 4.4.3. Propiedad de Intersección de Anidamiento.....	75
4.4.1 Ejemplos y Contraejemplos. Diferentes tipos de Comportamientos de Julia.....	78
4.4.4.1 Proposición 4.4.4.1. Infinitos Componentes Conexos.....	79
Definición 4.4.4.1. Órbita Supersensitiva.....	83
4.4.4.2 Definición 4.4.4.2. El Conjunto de Julia Lleno.....	83
4.5 Obteniendo el Conjunto de Julia Lleno.....	83
4.5.1 Algoritmo para graficar el Conjunto de Julia Lleno.....	84
4.6 Los Conjuntos de Julia como un repulsor.....	87
4.7 Estimaciones de Cauchy.....	87
4.8 Algoritmo para calcular el conjunto de Julia de $f_c(z)$	88
4.9 Algoritmo de Iteración Inversa.....	88
Conclusiones.....	89
Bibliografía.....	90

Introducción

Los sistemas dinámicos son procesos que se desarrollan en el tiempo. Como rama de las matemáticas tienen su inicio en el trabajo de Isaac Newton, de manera que las ecuaciones diferenciales llegaron a ser la mejor forma de describir fenómenos que se desarrollan en el tiempo.

Durante los siglos XVIII y XIX se elaboraron diversos métodos para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales explícitas. Entre ellos se encuentran las Transformadas de Laplace, El Método de Euler, soluciones en series de potencias, variación de parámetros, métodos algebraicos lineales, entre otros.

Las técnicas que se utilizaban para resolver las ecuaciones diferenciales sólo eran útiles en ecuaciones diferenciales lineales, ya que las no lineales implicaban mayor dificultad de resolver y, más aun, la mayoría de los procesos (fenómenos) de la naturaleza son por completo no lineales, lo que implicaba desarrollar mejores métodos que hicieran posible su estudio. Así, las Leyes de Newton nos permiten definir las ecuaciones que describen el movimiento de los planetas del sistema solar, entre otros fenómenos físicos. Por ejemplo, el problema de los n -cuerpos que genera una ecuación diferencial, cuya solución describe el movimiento de los planetas, las n "masas de puntos", el movimiento en el espacio sujeto sólo a propia y mutua atracción gravitacional. Conociendo la velocidad y posición inicial de las masas y resolviendo la ecuación diferencial de Newton, debe ser posible predecir cómo y dónde se moverán estas masas, las ecuaciones diferenciales en este caso ya se vuelven muy complicadas cuando hay tres cuerpos y sólo algunas soluciones se conocen.

Aunque las soluciones explícitas de las ecuaciones diferenciales son difíciles de describir, han sido un acontecimiento histórico que revolucionó la manera de estudiar sistemas dinámicos.

En 1890 a raíz del concurso para resolver el problema de los n -cuerpos y así probar la estabilidad del Sistema Solar, Henri Poincaré realizó una buena aproximación y con ello modernizó la manera de abordar las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Utilizó técnicas geométricas y topológicas para revelar la estructura global de todas las soluciones. Poincaré descubrió lo que ahora se llama *caos*. Así la *teoría del caos*, en realidad data de sus trabajos.

Las investigaciones de Poincaré fueron más allá del campo de los sistemas dinámicos. Su apoyo en las técnicas geométricas y topológicas abrieron por completo un campo amplio de objetos matemáticos. Sin embargo nadie pudo continuar con el análisis del comportamiento caótico que Poincaré había observado, y así el desarrollo de los sistemas dinámicos se estancó. Aunque anteriormente el mismo Newton había descrito un algoritmo para encontrar los ceros de un polinomio, algoritmo que resulta ser hoy en día un sistema dinámico. Fue hasta los años 1910 a 1925 que los matemáticos franceses Pierre Fatou y Gaston Julia, trabajaron en el comportamiento dinámico del método de Newton, y de ahí emergió lo que ahora es el

Conjunto de Julia. Pero desgraciadamente no contaban con el equipo tecnológico adecuado y así sus investigaciones se detuvieron en los 30's.

Stephen Smale, un matemático norteamericano, reconsideró el trabajo de Poincaré en los 60's y demostró mediante un ejemplo, que el comportamiento caótico se puede analizar y comprender en muchos casos. Al mismo tiempo, el meteorólogo Ernest N. Lorenz, utilizando una computadora, descubrió que la ecuación diferencial más simple puede exhibir el tipo de caos que Poincaré observó.

En los 70's el ecologista Robert May encontró que el proceso iterativo más simple produce un comportamiento caótico y complejo. Los físicos Harry Swinney y Jerry Gollub mostraron que el caos puede observarse en la actualidad en las aplicaciones físicas, y de manera notable en la corriente turbulenta de fluido. También se observa en otros sistemas como el movimiento de un planeta, o el latir del corazón humano los cuales contienen patrones caóticos similares.

Se han desarrollado también otras técnicas para comprender mejor el caos. John Guckenheimer y Robert F. Williams emplearon la teoría de los atractores extraños para explicar el fenómeno que Lorenz observó en la década anterior.

Los matemáticos Waclaw Sierpinski, David Hilbert, George Cantor y Helge von Koch construyeron los primeros fractales. Muchos consideraron estas formas como "patológicas", inmanejables o aun repulsivas, por lo que el *Triángulo de Sierpinski*, el *Conjunto de Hilbert*, el *Conjunto de Cantor* y el *Copo de Nieve de von Koch* fueron bautizados como los primeros "*monstruos*" de las matemáticas.

Para el año de 1975 Benoit B. Mandelbrot con la ayuda de una computadora investigó los conjuntos de Julia y con ello dio origen a lo que ahora llamamos «*Geometría Fractal*». El acuñó la palabra «*fractab*» que quiere decir que "se parte" o "se quiebra" refiriendo con esto que en una imagen se observan partes con características similares al todo. Por ejemplo, en una roca, en una planta, etc, se puede apreciar que una porción conserva características que se ven en la roca completa, en la planta, o en el fenómeno u objeto que se esté estudiando.

En nuestro tiempo el desarrollo de la Geometría Fractal, se ha favorecido por los constantes avances tecnológicos. Gracias a la velocidad de proceso de la computadora podemos apreciar la belleza de las gráficas fractales y, más aun, su aplicación que es muy importante. Así, es posible comprender el comportamiento caótico de muchos fenómenos, por ejemplo, los fenómenos de la naturaleza, como son, la evolución de una población, la estructura y conducta de un relámpago, un sismo, la lluvia, etcétera.

Objetivo

Esta investigación se llevó a cabo con la finalidad de recoger o compendiar los fundamentos matemáticos básicos de la Iteración de Sistemas Dinámicos Complejos. Estas consideraciones son principalmente la parte medular que ayuda a comprender mejor la *Geometría Fractal*. No

se hace un análisis riguroso de las características de los *fractales*, es decir, de su dimensión fraccional, autosimilaridad, etc. Sin embargo los conocimientos que aquí se exponen, incluyen un tema de gran interés: el *Conjunto de Julia*, que es la parte central de la "nueva geometría" y a la vez el patrón que genera gran cantidad de estructuras fractales.

Resumen

En esta tesis expondremos los elementos básicos para entender algunos aspectos de dinámica discreta. En particular centramos nuestro objetivo para entender la dinámica de las familias del tipo $f_c(z) = z^2 + c$ donde $z \in \mathbb{C}$ es la variable y $c \in \mathbb{C}$, una constante. Definiremos lo que se entiende por *Conjunto de Julia* de f_c . También estableceremos algunas propiedades básicas de estos conjuntos conforme c varía dentro del conjunto $|c| < 2$.

La matemática que se maneja se ha explicado de forma que se entienda claramente por quien esté interesado en los fractales. De hecho, se requieren conocimientos matemáticos básicos que cualquier alumno universitario tiene, (de matemáticas de sexto semestre en adelante).

Comenzamos en el capítulo I con una introducción a los conceptos básicos de cálculo, análisis y variable compleja que nos serán de utilidad.

En el capítulo II tratamos los principales aspectos relacionados con la iteración de sistemas dinámicos, tales como órbitas y puntos fijos, que son características importantes para comprender mejor los conjuntos de Julia.

En el capítulo III hablamos sobre el caos en sistemas dinámicos. Y finalmente, en el capítulo IV presentamos la teoría básica de los Conjuntos de Julia. Con esto, podremos entender y generar la gráfica de un fractal.

Capítulo I.

Preliminares

1.1 Límites y funciones

Antes de introducir los conceptos matemáticos básicos de este capítulo diremos que una función f es una correspondencia entre números y que un mapeo es una correspondencia entre puntos.

Sean X , Y dos conjuntos cualesquiera. Una función o transformación f de X a Y es una regla o fórmula que asocia a cada punto x de X un punto $f(x)$ de Y . Escribimos $f: X \rightarrow Y$ para denotar dicha regla, donde: X se llama el **dominio** de f y Y el **codominio** de f . Si A es un subconjunto de X , escribimos $f(A)$ para la imagen de A , dada por $\{f(x): x \in A\}$. Si B es un subconjunto de Y , denotamos $f^{-1}(B)$ para la **imagen inversa** o **preimagen** de B , es decir el conjunto $\{x \in X: f(x) \in B\}$.

Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice que es una **inyección**, o una **función uno-a-uno** si $f(x) \neq f(y)$ siempre que $x \neq y$, es decir, diferentes elementos de X son mapeados a diferentes elementos de Y . La función es una **suryección** o una **función sobre** si, para todo y en Y hay un elemento x en X con $f(x) = y$, es decir, todo elemento de Y es la imagen de todo punto de X .

Una función que es a la vez una inyección y una suryección se llama una **biyección** o una correspondencia uno-a-uno entre X y Y . Si $f: X \rightarrow Y$ es una biyección, entonces podemos definir la **función inversa** $f^{-1}: Y \rightarrow X$ tomando $f^{-1}(y)$ como el único elemento de X tal que $f(x) = y$ en esta situación, tenemos $f^{-1}(f(x)) = x$ para x en X y $f(f^{-1}(y)) = y$ para y en Y .

La **composición** de funciones $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ es la función $g \circ f: X \rightarrow Z$ dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Esta definición se extiende naturalmente para definir la composición de un número finito o infinito de funciones.

Espacio n-dimensional

Sea V_n el conjunto de todas las n -adas de números reales, a las que denotaremos por

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \dots, n)$$

y los llamaremos vectores, y tienen las propiedades muy estudiadas en [20] y [21].

1.2 Continuidad.

Una función f se dice que es continua en un punto x_0 si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

(a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe

(b) $f(x_0)$ existe, y,

(c) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Como se estudia en los cursos de cálculo, la igualdad (c) significa que para cada número $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon)$ tal que si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Si $\delta(\varepsilon)$ no depende de ε , es decir $f(x)$ es *uniformemente continua*.

A partir de la definición anterior, se sigue que la *composición de dos funciones continuas* es continua. Ver [20].

1.3. Propiedades Geométricas y Topológicas de \mathbb{R}^n .

Una propiedad geométrica de \mathbb{R}^n es la noción de distancia, que es la siguiente:

Sea x un punto de \mathbb{R}^n , entonces $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Si x, y son dos puntos de \mathbb{R}^n , diremos que la función $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una distancia en \mathbb{R}^n que cumple:

(a) $d(x, y) \geq 0$

(b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(c) $d(x, y) = d(y, x)$

(d) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Por ejemplo:

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto, entonces, definimos el diámetro de S como

$$\text{diám } S = \text{Sup } \{d(x, y) : x, y \in S\}$$

Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se dice **acotado** si $\text{diám } S < +\infty$, es decir, S tiene un diámetro finito.

1.3.1. Homeomorfismo

Sean X_1 y X_2 subconjuntos de \mathbb{R}^n , y sea $f: X_1 \rightarrow X_2$ una función. Decimos que la función es un **homeomorfismo** si f es uno-a-uno, sobre y continua.

Ejemplo 1.3.1: La función $\tan x = \sin x / \cos x$ es un homeomorfismo entre $(-\pi/2, \pi/2)$ y \mathbb{R} .

1.3.2. Esfera

La esfera $(n-1)$ dimensional de radio r y centro en $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, es el subconjunto de \mathbb{R}^n , definido como

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2,$$

y la denotamos por $S_{n(a)}$. Como ejemplo, $S_{(0)}$ en \mathbb{R}^2 , es el círculo con centro en $(0,0)$. La ecuación de la 2-esfera con centro en $(1,1,1)$ y radio r en \mathbb{R}^3 es

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = r^2.$$

1.3.3. Bola Cerrada

Sea X un subconjunto de \mathbb{R}^n . Si $a \in X$ y $r > 0$, entonces el conjunto $B_r(a) = \{x \in X; d(x, a) \leq r\}$ se llama **bola cerrada**, con centro a y radio r . De este modo, la bola cerrada contiene a su frontera que es la $(n-1)$ esfera, $S_{n(a)}$.

1.3.4. Bola abierta

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Si $a \in X$ y $r > 0$, entonces el conjunto $\{x \in X; d(x, a) < r\}$ denotado por $\overset{\circ}{B}_r(a)$ se llama **bola abierta** con centro a y radio r . La bola abierta en \mathbb{R}^2 es un disco, y en \mathbb{R}^1 es un intervalo, además, no contiene a su frontera. Esto se aprecia en la figura 1.1.

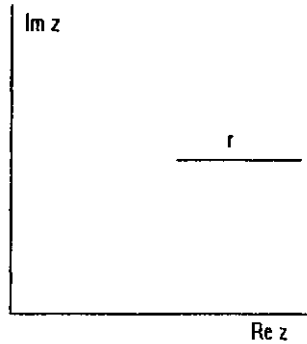


Figura .1.3.4.1. Bola abierta en el plano complejo \mathbb{C} . La bola abierta en \mathbb{C} también se le conoce como disco abierto.

De esta forma, la bola abierta $\overset{\circ}{B}_r(a)$ en \mathbb{R} es el intervalo abierto $(a - r, a + r)$ con punto central en a y longitud total $2r$. La bola abierta $\overset{\circ}{B}_r(a)$ en \mathbb{C} es el conjunto $\{z \in \mathbb{C}; |z - a| < r\}$.

1.3.5. Convergencia

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X . La sucesión $\{x_n\}$ se dice que es **convergente** a un punto x en X , con $n \rightarrow \infty$, si dado $\varepsilon > 0$ existe un entero $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$d(x_n, x) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0$$

De esto, escribimos $x_n \rightarrow x$ ó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = x$$

Si n_0 no depende de ε , esto lo llamamos **convergencia uniforme**.

1.3.6. Puntos límite

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un subconjunto X de \mathbb{R}^n . Decimos que y es un *punto límite* de $\{x_n\}$ si existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a y .

1.3.7. Conjunto Cerrado

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. El conjunto $G \subset X$ es *cerrado* si contiene a todos sus puntos límites.

1.3.8. Conjunto Abierto

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. El conjunto $G \subset X$ es *abierto* si para todo $x \in G$ hay algún $r > 0$, tal que, $\overset{\circ}{B}_r(x) \subset G$.

Ejemplo: 1.3.8.1. El conjunto de puntos z , tal que $|z| < 1$, es un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.3.8.2. Sea el conjunto $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b\}$ es abierto en \mathbb{R}^2 .

El conjunto vacío \emptyset y \mathbb{R}^n son considerados (ambos) como abiertos y cerrados. Se puede mostrar que un conjunto es abierto si y solo si su complemento es cerrado. La unión de una colección de conjuntos abiertos es abierta, así como lo es la intersección de un número finito de conjuntos abiertos. La intersección de una colección de conjuntos cerrados es cerrada, así como lo es la unión de un número finito de conjuntos cerrados.

1.3.9. Vecindad

Un conjunto A se llama una *vecindad* de un punto a si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a)$ está contenida en A .

1.3.10. Cerradura

La *cerradura* \bar{A} de un conjunto A se considera como el conjunto cerrado más pequeño conteniendo a A , es decir, $\bar{A} = A \cup \{\text{todos los puntos límites}\}$. A partir de esto se ve claro que todo conjunto está contenido en su cerradura.

1.3.11. Interior

La unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A es el *interior*, $\text{int}(A)$, de A .

1.3.12. Frontera

La *frontera*, δA , de A está dada por $\delta A = \bar{A} - \text{int}(A)$.

1.3.13. Conjunto Compacto

Un conjunto A es *compacto* si cualquier colección de conjuntos abiertos, que cubre a A tiene una subcolección finita la cual también cubre a A . El teorema de Bolzano-Weierstrass¹ demuestra que $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y $\text{diám } A < \infty$.

1.3.14. Conjunto Conexa

Un subconjunto abierto A de \mathbb{R}^n es *conexo* si no puede representarse como la unión de dos conjuntos abiertos, disjuntos y vacíos. Es decir, no existen U y V conjuntos abiertos, tales que $U \cup V$ contengan a A , con $A \cap U$ y $A \cap V$ disjuntos y no vacíos. Es decir, el conjunto A no puede descomponerse en dos conjuntos disjuntos, subconjuntos no vacíos y cerrados en la topología del conjunto.

1.3.15. Conjunto Denso

Supóngase que X es un conjunto y Y es un subconjunto de X . Decimos que Y es un conjunto denso en X si para un punto $x \in X$, hay un punto y en Y arbitrariamente cercano a x .

Otra forma de expresar lo anterior consiste en decir que Y es denso en X si para $x \in X$, podemos encontrar una sucesión de puntos $\{y_n\} \in Y$ que converge a x . Por ejemplo, el subconjunto de los números racionales son densos en el conjunto de los números reales. Pero,

¹ **Teorema de Bolzano-Weierstrass.** Un subconjunto compacto infinito $S \in \mathbb{C}$, tiene un punto límite en S .

los enteros no son densos en los reales. Otro ejemplo es el intervalo abierto (a,b) que es denso en el intervalo cerrado $[a,b]$.

1.4. Números Complejos

Un número complejo z corresponde a un vector en el plano real con coordenadas x y y , donde x se dice que es la parte real de z ($\text{Re}z$) y y la parte imaginaria ($\text{Im}z$). Escribimos a z como, $z = x + iy$, donde $i^2 = -1$. La longitud de dicho vector es

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

y es el valor absoluto o módulo de z . En la figura 1.4.1 se muestra lo anterior.

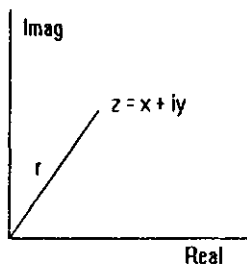


Figura 1.4.1.. El vector z en el plano complejo.

1.4.1 Suma Compleja

Los números reales podemos interpretarlos como puntos en una línea, y a los números complejos los identificamos como puntos en el plano. Entonces $z = x + iy$ es un vector

$$z = (x, y) = (\text{parte real}, \text{parte imaginaria})$$

El ángulo ϕ entre el eje x y el vector z , medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, es el argumento de z . Esto es

$$\phi = \arg z.$$

A partir de esto, tenemos dos formas de especificar un número complejo z : por coordenadas Cartesianas o utilizando las *coordenadas polares*, i.e., por su módulo $r = |z|$ y el argumento ϕ .

Entonces,

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi.$$

Por consiguiente,

$$z = r (\cos \phi + i \sin \phi).$$

Para $z = r (\cos \phi + i \sin \phi)$, si el punto z es cero, se pueden utilizar todos los ángulos, si z no es cero, entonces el argumento está definido sólo por enteros múltiplos de 2π . Así, ϕ y $\phi + 2\pi$ describen lo mismo. Inversamente, tenemos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \cos^{-1}(x/r) = \cos^{-1}(y/r).$$

1.4.2. Multiplicación Compleja

Utilizando coordenadas polares podemos presentar la interpretación geométrica de la multiplicación de números complejos. Consideremos dos números complejos

$$z = x + iy \text{ y } w = u + iv$$

Su producto está dado como

$$zw = (xu - yv) + i(xv + uy)$$

Ahora, considerando

$$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$$

$$u = s \cos \psi, v = s \sin \psi$$

tenemos

$$z = r (\cos \phi + i \sin \phi), w = s (\cos \psi + i \sin \psi).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 zw &= r \cos\phi \cdot s \cos\psi - r \operatorname{sen}\phi \cdot s \operatorname{sen}\psi \\
 &\quad + i(r \cos\phi \cdot s \operatorname{sen}\psi + s \cos\psi \cdot r \operatorname{sen}\phi) \\
 &= rs(\cos\phi \cos\psi - \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\psi) \\
 &\quad + rs(\operatorname{sen}\phi \cos\psi + \operatorname{sen}\psi \cos\phi)i \\
 &= rs(\cos(\phi + \psi) + i \operatorname{sen}(\phi + \psi))
 \end{aligned}$$

Entonces las coordenadas polares del producto son fáciles de obtener. El módulo del producto es igual al producto del módulo r y s , y su argumento es simplemente la suma de los argumentos de los factores, $\phi + \psi$. Así,

$$zw = rs[\cos(\phi + \psi) + i \operatorname{sen}(\phi + \psi)]$$

En otras palabras, multiplicar dos números complejos significa sumar sus ángulos correspondientes y multiplicar las longitudes de los vectores asociados.

1.4.3. Notación de Euler

Cercanamente relacionada a la representación polar está la notación de Euler de los números complejos. En esta notación un número complejo con módulo 1 y argumento ϕ puede escribirse como:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi$$

La representación polar de un número con módulo r y argumento ϕ se expresa como $re^{i\phi}$. Con esta definición las leyes para la función exponencial con exponentes reales son las mismas para exponentes complejos. Por ejemplo:

$$e^{a+bi} = e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b),$$

$$re^{i\phi} \cdot se^{i\psi} = rse^{i(\phi + \psi)}.$$

Como se aprecia, el cálculo fue el mismo como en el caso de exponentes reales.

Dado lo anterior, podemos escribir a z como $z = re^{i\phi}$, en donde

$$\begin{aligned} |z| &= |re^{i\phi}| \\ &= \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1 \end{aligned}$$

para $r = 1$.

1.4.4. Círculos y ángulos

La definición del círculo con centro en un punto a con radio r es la siguiente:

$$\{a + re^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

El círculo de centro 0 y radio 1 se llama el círculo unitario. La longitud total del círculo es $2\pi r$.

1.4.5. Raíces enésimas

La forma polar $z = re^{i\theta}$ nos permite demostrar que todo z tiene raíces n -ésimas esto es, soluciones a la ecuación $z^n = \xi$, con ξ un número complejo y para cada entero positivo n . Consideremos primero las raíces de la unidad. Supongamos que $z^n = 1$, entonces $|z|^n = 1$, de modo que $z = e^{i\theta}$ para θ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Si $w = e^{i(2\pi/n)}$ entonces $\{1, w, \dots, w^{n-1}\}$ son las raíces.

1.4.6. División Compleja

Dividir por un número complejo con módulo $r > 0$ y argumento ϕ corresponde a redefinir la escala dada por el factor inverso $1/r$ y la rotación de ϕ está dada en sentido de las manecillas del reloj. Así, en coordenadas polares,

$$\begin{aligned} z/w &= r(\cos\phi + i\sin\phi) / s(\cos\psi + i\sin\psi), \\ &= r/s (\cos(\phi - \psi) + i\sin(\phi - \psi)). \end{aligned}$$

1.4.7. La desigualdad del triángulo.

Si z y w son números complejos, entonces,

1. $|z + w| \leq |z| + |w|$, y
2. $|z - w| \geq |z| - |w|$.

La primera de estas desigualdades se ve en la figura 1.4.7. La segunda es una consecuencia de la primera, ya que

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|$$

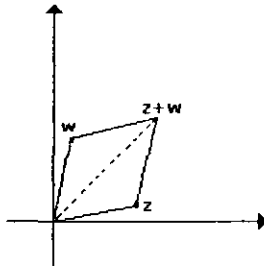


Figura 1.4.7.1. Suma compleja.

1.4.8. La "función" Raíz Cuadrada

Dado un número $z = x + iy$, y calculando su cuadrado tenemos,

$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

y en su forma polar,

$$z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

Ahora, dado $z = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, vemos de la sección 1.4.5 que las dos raíces cuadradas de z son:

$$\pm \sqrt{r} (\cos \theta/2 + i \operatorname{sen} \theta/2)$$

Geoméricamente, \sqrt{z} se obtiene sacando la raíz cuadrada de $|z|$ y dividiendo entre 2 el ángulo θ . Por ejemplo, sea $z = i + 2$, entonces $\sqrt{|z|} = \sqrt{5}$. Las raíces dos cuadradas de z son:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\sqrt{5}}(\cos\frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}) = 5^{1/4}(\cos\theta/2 + i \operatorname{sen}\theta/2).$$

La otra raíz es el negativo de \sqrt{z} .

La figura 1.4.8.1. muestra la operación de la raíz cuadrada del ejemplo dado, para $\theta = \pi / 4$.

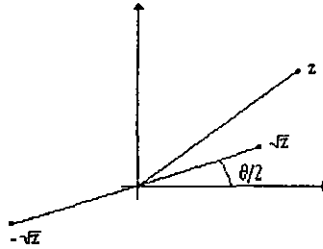


Figura 1.4.8.1. Operación de raíz cuadrada de $z = i + 2$.

Geoméricamente, las raíces cuadradas de todos los puntos en una región dada en el plano complejo se calculan de la siguiente forma: dividimos entre 2 el ángulo polar de todos los puntos en la región y tomamos la raíz cuadrada de su módulo. Esto produce una de las raíces cuadradas de la región. La otra raíz es simplemente el negativo de todos estos puntos.

Específicamente, necesitamos saber cómo calcular la raíz cuadrada de todos los puntos que están sobre un círculo en el plano complejo. Hay tres posibilidades diferentes, dependiendo si el origen está dentro, sobre o fuera de este círculo. Para ilustrar esto, comenzamos con el círculo de radio r , $C(r)$, centrado en el origen. Se ve claro que la raíz cuadrada de esta región es el círculo de radio $\sqrt{C(r)}$, también con centro en el origen.

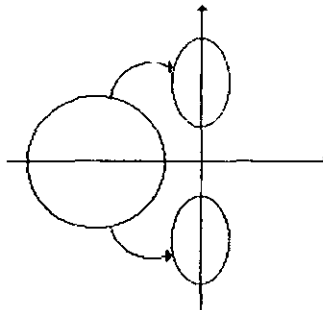


Figura 1.4.8.2. Raíz cuadrada de un círculo que no contiene al 0.

Para visualizar esto, es útil imaginar una partícula que viaja en todo el círculo original, con otro par de partículas trazando simultáneamente las rutas de las raíces cuadradas. Como la

partícula original hace un círculo completo sobre el círculo, cada una de las raíces cuadradas recorren un semicírculo, ya que dividimos a la mitad el ángulo polar correspondiente.

Si el origen queda fuera del círculo, entonces la situación es diferente por completo. El círculo entero está entonces dentro de una cuña centrada en el origen de la forma $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, donde $0 < |\theta_2 - \theta_1| < 2\pi$. Como una partícula recorre este círculo, las raíces cuadradas correspondientes tienen ángulos polares que están dentro de la cuña

$$\frac{\theta_1}{2} \leq \theta \leq \frac{\theta_2}{2}$$

y su reflexión pasa por el origen. Como una consecuencia, la raíz cuadrada de este círculo consiste de dos piezas disjuntas como se muestra en la figura 1.4.8.2.

El último caso ocurre cuando el origen queda sobre el círculo. En este caso, la raíz cuadrada es una curva que se parece a un "8" (figura 1.4.8.3). La razón de esto, es que todos los puntos en el círculo tienen exactamente dos raíces cuadradas, a excepción del cero, el cual tiene sólo una. Como una partícula recorre el círculo original, sus raíces cuadradas trazan cada uno de los lóbulos de la figura del "8", encontrándose en el origen, precisamente cuando la partícula original alcanza el 0.

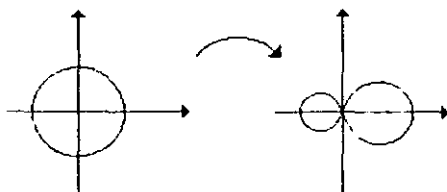


Figura 1.4.8.3. La figura de la Raíz cuadrada de un círculo que contiene al 0 tiene la forma de un "8".

La figura 1.4.8.3 se entiende mejor consultando el Corolario 4.4.3, y la figura 4.4.4.10 del capítulo 4.

La figura 1.4.8.4. muestra las raíces cuadradas de algunas otras regiones en el plano.

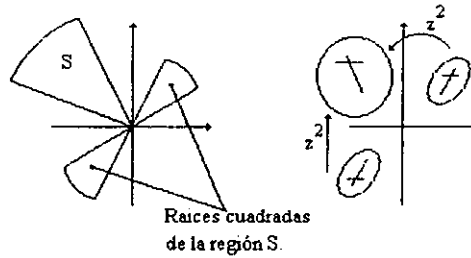


Figura 1.4.8.4. Algunas regiones en \mathbb{C} y sus raíces cuadradas.

1.5. Cálculo de Funciones Complejas.

La derivada de una función compleja la definimos exactamente como en el caso real

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)}.$$

Esta definición tiene una diferencia significativa con respecto a las funciones reales. En el caso real, sólo necesitamos chequear el límite $f'(x_0)$ en dos direcciones, cuando x se aproxima a x_0 por la izquierda y por la derecha. En el caso complejo, debemos chequear el límite en todas las direcciones posibles que hay en el plano, y estos límites deben ser (todos) los mismos.

Por ejemplo, sea $f_c(z) = z^2 + c$, con c compleja. Entonces

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z^2 + c) - (z_0^2 + c)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z + z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0 \end{aligned}$$

y este límite es independiente de cómo z tiende a z_0 . De aquí que $f'(z_0)$ existe para cada z_0 en \mathbb{C} .

1.6. Funciones Analíticas

Sea \mathbb{C} el campo de los números complejos, y sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que una función f es **analítica** en un punto z_0 , si es diferenciable en una vecindad de z_0 , es decir que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

existe, y en tal caso se denota como $f'(z_0)$. Ahora consideremos U como un conjunto abierto conexo contenido en \mathbb{C} . La transformación $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en U si F es analítica en todo $z_0 \in U$.

1.7. Función Meromorfa

Se dice que la función $f(z)$ es una función **meromorfa** si es analítica en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Ejemplo 1.7.1. El cociente $f(z) / g(z)$ es una función meromorfa. Aquí f y g son polinomios.

1.8. Singularidades

Una función $f(z)$ tiene una singularidad en un punto z_0 si $f(z)$ no es analítica en z_0 . Decimos que, $f(z)$ tiene una singularidad aislada en z_0 si es analítica en una vecindad de z_0 , excepto en z_0 .

1.9. Propiedades básicas de Mapeos Analíticos

Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y suponga $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ un mapeo analítico, entonces

- i) $F^{(n)} : U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítico. Aquí, $F^{(n)}$ es la n -ésima derivada de F . (Cauchy).
- ii) $F(U)$ es abierta en \mathbb{C} , cuando F es no constante.
- iii) Si \bar{U} es acotado, entonces $F(z)$ toma su máximo valor en la frontera de U . (Liouville)².
- iv) (Montel) Este teorema se estudiará en detalle en la sección 4.2 del capítulo 4.

² **Teorema de Liouville.** Toda función entera acotada es constante. Tengamos en cuenta que una función es entera si es homeomorfa en todo el plano.

1.9.1. Función de Clase C^r

Sea $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es de *clase C^r* en un intervalo cerrado I si $f^{(r)}(x)$ existe y es continua en todo $x \in I$, donde $f^{(r)}(x)$ es la r -ésima derivada de f . Se dice que f es una función *suave* si es de clase C^1 .

1.9.2. Función de Clase C^∞ .

La función $f(x)$ es de clase C^∞ si sus k derivadas parciales existen y son continuas $\forall k$.

1.9.3. Difeomorfismo

Se dice que $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un *difeomorfismo* si F es una función uno-a-uno, sobre y C^∞ , y su inversa es también C^∞ .

1.10 Proyección Estereográfica

En el plano complejo (como en el plano real) no es posible representar al ∞ como un punto (x, y) . Debido a esto, se introduce la esfera, contenida en \mathbb{R}^3 , de radio 1 y con centro en el punto $(0,0,0)$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

lo cual nos permite "ver" el punto al infinito y la relación que tiene con los puntos del plano complejo. La esfera la denotamos por S^2 y se le conoce como la *Esfera de Riemann*.

Para cada punto $z = x + iy$ en el plano complejo existe un punto $\xi = (x_1, x_2, x_3)$ en la esfera y viceversa. Véase la figura 1.10.1.

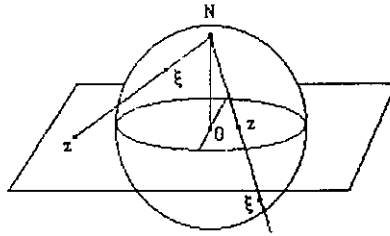


Figura 1.10.1. Proyección estereográfica en la esfera de Riemann

El polo sur, S, de la esfera "descansa" sobre el plano complejo en el punto $(0,0,-1)$. El polo norte, N, es el punto al que conocemos como el *punto al infinito* y corresponde al punto $(0,0,1)$ en la esfera. A lo anterior se le conoce como *Proyección Estereográfica* y a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ lo llamamos el *plano complejo extendido*.

La correspondencia uno a uno entre el plano \mathbb{C} y $S^2 - \{N\}$ está definida de la siguiente manera: consideremos la intersección del rayo que va del polo norte al punto $z = x + iy$ en \mathbb{C} . La intersección de este rayo con la esfera en el punto $\xi = (x_1, x_2, x_3)$ en $S^2 - \{N\}$ es lo que define a la proyección estereográfica de $x + iy$ a (x_1, x_2, x_3) . Esta transformación está dada por

$$T(x + iy) = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2} \right)$$

o bien,

$$T(x + iy) = \left(\frac{2 \operatorname{Re} z}{1+|z|^2}, \frac{2 \operatorname{Im} z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right) \quad (1.10.1)$$

siendo la inversa de esta función:

$$T^{-1}(\xi) = T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3}$$

si identificamos a $z \in \mathbb{C}$ como

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3}$$

entonces

$$x = \frac{x_1}{1-x_3} \quad y \quad y = \frac{x_2}{1-x_3}$$

Por ejemplo, para el punto (0,0) la transformación $T(0,0) = (0,0,-1)$. El punto $z = (1,0)$ corresponde al punto $T(1,0) = (1, 0, 0)$.

Cuando $x + iy$ tiende a infinito, $x^2 + y^2$ crece sin límite, entonces la primera coordenada de T es el cociente

$$\frac{2x}{1+x^2+y^2},$$

que tiende a cero. De manera similar, la segunda coordenada de T también tiende a 0. Pero la tercer coordenada tiende a 1, es decir

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2} = 1.$$

es decir, hacemos $x^2 + y^2 = u$ y vemos que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u-1}{1+u} = 1.$$

Esto es, el rayo que se forma entre los puntos $z \in \mathbb{C}$ y $\xi \in S^2$ forma un ángulo con el plano complejo, que irá siendo cada vez mayor a medida que z se aleje del origen, lo cual hace que ξ se acerque más y más al polo norte. Así, tenemos que el punto $\xi = (0,0,1)$ no proviene de ningún z del plano complejo y se considera como el punto al ∞ . Véase la figura 1.10.1.

Teorema 1.10.1. Círculos y rectas en la esfera corresponden a círculos o a rectas en el plano complejo y viceversa.

Demostración. Supongamos que en una recta $L \subset \mathbb{C}$ tenemos una sucesión infinita

$$(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

de puntos. Como hemos visto, para cada $z_k \in \mathbb{C}$ existe un $\xi_k \in S^2$. Entonces, cada segmento de la recta, que une a estos puntos, se va transformando en un arco en la esfera, en donde cada arco será una porción de un círculo en S^2 , como se muestra abajo.

La recta L tiende al ∞ por sus dos puntas, y, bajo la transformación T en S^2 se unen en el punto $N=(0,0,1)$. Y ésta es la razón de que el círculo que le corresponde en la esfera pase por el infinito.

Ahora, el análisis matemático a considerar es el siguiente: un círculo en la esfera está dado por la intersección del plano

$$x_n, P = \{ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a_0 \},$$

con la esfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

en donde todo punto (x_1, x_2, x_3) de este círculo satisface ambas ecuaciones, y además el plano no es tangente a la esfera. De esto tenemos que,

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \text{ y } 0 \leq a_0 < 1.$$

Es decir, el plano intersectado en S^2 está trasladado del origen una magnitud a_0 y, además al no ser tangente con S^2 el valor de a_0 no puede ser 1. Si $a_0 = 1$ el resultado de $P \cap S^2$ será el punto $(0,0,1)$ y no una curva en S^2 .

Si (x_1, x_2, x_3) en S^2 satisface estas ecuaciones entonces, a partir de (1.10.1) tenemos que la ecuación del plano es

$$\frac{a_1 2x}{z\bar{z} + 1} + \frac{a_2 2y}{z\bar{z} + 1} + \frac{a_3(\bar{z}z - 1)}{z\bar{z} + 1} = a_0$$

y despejando tenemos,

$$a_1 2x + a_2 2y + a_3(x^2 + y^2 - 1) = a_0(x^2 + y^2 + 1).$$

Haciendo cálculos y ordenando términos esta ecuación queda como:

$$(1.10.2) \quad (a_0 - a_3)(x^2 + y^2) - 2a_1x - 2a_2y + a_0 + a_3 = 0.$$

Si $\delta = a_0 - a_3$, entonces

$$\delta x^2 + \delta y^2 - 2a_1x - 2a_2y + a_0 + a_3 = 0.$$

Completando los respectivos binomios cuadrados perfectos se obtiene,

$$(1.10.3) \quad (x - a_1/\delta)^2 - (y - a_2/\delta)^2 = (1 - a_0^2)/\delta$$

Como $0 \leq a_0 < 1$, (1.10.3) es la ecuación de un círculo con centro en $(a_1/\delta, a_2/\delta)$. Si $\delta = 0$, la ecuación (1.10.2) se reduce a:

$$(1.10.4) \quad a_1 x + a_2 y = a_3$$

que es la ecuación de una línea recta. Inversamente, dada la ecuación de un círculo o de una recta hay cuatro constantes a_0, a_1, a_2, a_3 que satisfacen $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, 0 \leq a_0 < 1$ tal que la ecuación del círculo aparece de la forma (1.10.3) y de la línea recta de la forma (1.10.4), donde $a_0 = a_3$ ■.

Así, círculos en el plano complejo extendido son de dos tipos: círculos en \mathbb{C} (en el sentido euclideo) y conjuntos de la forma $\Lambda \cup \{\infty\}$, donde Λ es una línea recta en \mathbb{C} .

Capítulo II

Iteración de Sistemas Dinámicos Complejos

2.1. Definición de Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico es una transformación $f: X \rightarrow X$ donde X es un subconjunto $X \in \mathbb{R}^n$. Es un proceso que se desarrolla o evoluciona en el tiempo. Los Sistemas Dinámicos están presentes en todas las ramas de la ciencia. Su propósito es modelar el comportamiento y los resultados de un proceso o fenómeno, además de ayudar a predecir su conducta futura. Esto último es posible cuando conocemos totalmente su historia pasada. Pero esta predicibilidad no siempre es posible, ya que el fenómeno que se esté estudiando puede llegar a ser muy complejo de modo que sería difícil predecir su comportamiento futuro.

Sin embargo, podemos preguntarnos ¿en qué consiste tal complejidad que hace predecibles a unos sistemas y a otros no? Básicamente se debe a la cantidad de variables. Por ejemplo, los fenómenos meteorológicos, la economía, entre otros, tienen una cantidad grande de variables. Y en contra parte, aquellos con pocas variables son más susceptibles de estudiar y, por lo tanto, son más fáciles de entender. Aunque esto no siempre resulta cierto, ya que hay sistemas muy simples, de una sola variable, que pueden resultar altamente impredecibles y tener un comportamiento aleatorio. Y la razón de esto es que el caos puede penetrar aun en el más sencillo de los sistemas.

2.2 Iteración de funciones complejas.

2.2.1 Iteración

En la matemática, y en cualquier otra ciencia, sabemos lo importante que resulta utilizar la información que se genera en el tiempo t , u otra unidad de medida, para calcular una salida en el tiempo $t+1$. En el estudio del crecimiento de una población, los datos recabados hasta el año n sirven de base para realizar estimaciones en años posteriores. Utilizando una función, por ejemplo, $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, (λ es una constante positiva) se lleva a cabo un tipo de análisis relacionado con la población en estudio.

Retroalimentando la información a través de un sistema dinámico se está realizando la *iteración*. Iteración es precisamente *repetir* un proceso una y otra vez. Dentro de la Dinámica consiste en iterar una función $f(z)$, así

$$f(z), f^2(z), f^3(z), \dots, f^n(z)$$

son las iteradas de $f(z)$. Donde denotamos $f^n(z)$ la n -ésima iterada $f(f(\dots(f(z))))$. Esto es, f^n es igual a la composición $f \circ f \circ f \dots \circ f$ (n veces) de la función f . Como ejemplo a esto último, considérese $f_c(z) = z^2 + c$, donde $z, c \in \mathbb{C}$; iterando $f_c(z)$ repetidamente se está calculando una composición de funciones se obtiene

$$f_c(z) = f_c(z) = z^2 + c$$

$$f_c^2(z) = f_c(f_c(z)) = (z^2 + c)^2 + c$$

$$f_c^3(z) = f_c(f_c(f_c(z))) = ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c.$$

y así sucesivamente.

2.3. Órbitas

El conjunto de iteradas sucesivas de un punto z_0 , se llama la *órbita* de ese punto. Por ejemplo, si $f(z) = \text{sen } z$, con $z_0 = 1.23$, tenemos que

$$f(1.23) = \text{sen}(1.23) = -0.459$$

$$f^2(1.23) = \text{sen}(f(1.23)) = -0.443$$

$$f^3(1.23) = \text{sen}(f^2(1.23)) = -0.429$$

$$f^4(1.23) = \text{sen}(f^3(1.23)) = -0.416$$

⋮

$$f^{18}(1.23) = -0.307$$

$$f^{19}(1.23) = -0.302$$

$$f^{20}(1.23) = -0.298$$

etcétera.

Entonces cada valor que se obtiene al calcular $f^n(z_0)$, $n \geq 0$, se llama la órbita de z_0 . Denotaremos por $O(z)$ la órbita del punto z . Se observa que

$$f(O(z)) = O(f(z)).$$

2.3.1 Órbitas estables

Cuando cambiamos el valor inicial z y se obtienen órbitas cuyo comportamiento es más o menos similar a la órbita de z inicial, decimos que la órbita es **estable**. Para el caso de $f(z) = z^2$ las órbitas de un punto z tal que $|z| < 1$ tienden a cero, en tanto que las de $|z| > 1$ tienden a ∞ .

Las órbitas estables se deben considerar "buenas" ya que si nuestro sistema dinámico representa un proceso físico cuya salida debemos predecir, entonces trabajando en el modelo físico es posible incurrir en pequeños errores en las observaciones lo cual conduzca a elegir una nueva entrada inicial. Si el resultado es una órbita estable, entonces las posibilidades son que estos pequeños errores no alterarán el comportamiento último de nuestro sistema y, de esta forma, las predicciones basadas en el modelo son más o menos exactas.

Otra razón de que las órbitas estables son buenas, se aprecia al enfrentarse a los errores de redondeo. Al iterar un sistema dinámico sucesivamente, cada iteración produce sólo una aproximación del valor siguiente, de modo que hay una diferencia pequeña entre un valor y el otro, así se va acumulando un error de redondeo, conduciendo a que finalmente se tengan errores de predicción. Sin embargo, si el valor w_0 inicial es una órbita estable, los errores no incurrirán en el modelo dinámico y los cambios pequeños que se generen en cada etapa de iteración no afectarán el comportamiento final de la órbita.

El propósito de los sistemas dinámicos es comprender la naturaleza de todas las órbitas las cuales pueden ser periódicas, eventualmente periódicas, asintóticas, etc. Generalmente esto es una tarea imposible.

2.4. Puntos fijos y periódicos

Hay diferentes tipos de órbitas en un sistema dinámico. Sin lugar a dudas, el más importante es el **punto fijo**.

Si $f(z_0) = z_0$ decimos que z_0 es un punto fijo de f , y si $f^p(z_0) = z_0$, para un entero $p \geq 1$, entonces z_0 es un **punto periódico** de f . El mínimo entero p , tal que $f^p(z) = z$, se llama el periodo de z . Así, la órbita de un punto fijo es la sucesión constante

$$z_0, z_0, z_0, \dots$$

Un punto fijo jamás cambia y es un valor que permanece fijo para una función $f(z)$. Por ejemplo los puntos fijos de $f(z) = z^2$ son 0 y 1 ya que si hacemos $z = f(z) = z^2$, entonces $z^2 - z = 0$ tiene como únicas soluciones a 0 y 1.

2.4.1. Clasificación de puntos fijos

Es importante considerar que para encontrar los puntos fijos de una función $f(z)$ debe resolverse la ecuación $f(z) = z$ y las soluciones serán los puntos fijos de $f(z)$. Por ejemplo, si $f_c(z) = z^2 + c$, entonces

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$$

Proposición 2.4.1. Sea z_0 un punto fijo para $f_c(z)$. Entonces,

a) z_0 es un *punto fijo atractor* para $f_c(z)$ si

$$0 < |f_c'(z_0)| < 1$$

b) z_0 es un *punto fijo superatractor* de $f_c(z)$ si

$$|f_c'(z_0)| = 0$$

c) z_0 es un *punto fijo expansivo* para $f_c(z)$ si

$$|f_c'(z_0)| > 1$$

d) z_0 es un *punto fijo neutral o indiferente* si

$$|f_c'(z_0)| = 1$$

donde $f_c'(z_0)$ denota la derivada de $f_c(z)$.

Demostración. Haremos la demostración para las desigualdades en a) y c).

Tomemos el círculo con centro en el origen y de radio 2 con el fin de analizar el comportamiento de puntos dentro y fuera de él. Supongamos que $|c| \leq 2$.

Ahora, decimos que si un punto en la órbita de z está fuera del círculo de radio 2, entonces la órbita se va a ∞ . Para checar esto sólo debemos comprobar si un punto en la órbita tiene módulo mayor a 2. Si esto sucede, decimos que z está en una órbita expansiva. Si $|z| > 2$ y $|c| \leq 2$, entonces

$$|f_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c|,$$

esto se basa en una versión de la desigualdad del triángulo. Sin embargo,

$$|z|^2 - |c| > |z|^2 - |z| = (|z| - 1)|z|$$

ya que $|z| > |c|$ y, por lo tanto, al restar $|z|^2$ a la desigualdad anterior tenemos que $-|c| > -|z|$. Ahora

$$|z| - 1 > 1$$

ya que $|z| > 2$. Por lo tanto, podemos escribir

$$|z| - 1 = 1 + \xi$$

es decir $\xi = |z| - 2$, para $\xi > 0$. De esta manera, tenemos

$$|f_c(z)| > (1 + \xi)|z|$$

lo cual se comprueba dando valores a ξ y a z . En particular,

$$|f_c(z)| > |z|.$$

Esto quiere decir que $f_c(z)$ está más alejado del origen que z . Este análisis podemos aplicarlo también a:

$$f_c^2(z) = f_c(f_c(z)),$$

donde $|f_c(z)| > 2$. Entonces, podemos encontrar

$$\begin{aligned} |f_c^2(z)| = |f_c(f_c(z))| &> (1 + \xi) |f_c(z)| \\ &> (1 + \xi)^2 |z| \end{aligned}$$

Así, $f_c^2(z)$ se aleja más del origen que $f_c(z)$. Siguiendo el mismo análisis, vemos que

$$|f_c^n(z)| > (1 + \xi)^n |z|.$$

Como $\xi > 0$, entonces $(1 + \xi) > 1$. A partir de esto, apreciamos que

$$(1 + \xi)^n \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

De esto, concluimos que $|f_c^n(z)| \rightarrow \infty$ esto es, la órbita de z se va al ∞ ■.

Se sigue un esquema similar para demostrar que si $|f_c'(z)| < 1$, entonces z es un punto fijo atractor.

Aunque aquí lo hemos demostrado sólo para el caso en que $f_c(z) = z^2 + c$, este resultado es cierto para cualquier función f y cualquier punto fijo z tal que $f'(z) = 0$.

En este contexto la idea de un punto fijo atractor consiste en que las órbitas de un punto fijo z_0 tienden a 0 al ser iteradas, es decir, son "atraídas" al valor cero. Por otro lado, un punto fijo expansivo es un valor z_0 que al ser iterado "escapa" hacia el infinito.

Ejemplo 2.4.1. Sea $f_c(z) = z^2 + c$, supongamos $c = 0$. entonces los puntos fijos de $f_0(z)$ son:

$$f_c(z) - z = z(z - 1) \text{ es decir } z_0 = 0; z_1 = 1.$$

Ahora, evaluamos z_0 y z_1 para investigar qué tipo de punto fijo es cada uno, hacemos lo siguiente:

$$f_c'(z_0) = 0 \text{ y, por lo tanto } z_0 = 0 \text{ es un punto fijo superatractor,}$$

$$f_c'(z_1) = 2 > 1, \text{ así, } z_1 = 1 \text{ es un punto fijo expansivo.}$$

2.4.2. Teorema del punto fijo

Supóngase que $F: [a,b] \rightarrow [a,b]$ es continua. Entonces hay un punto fijo para F en $[a,b]$.

Observaciones.

1. Este teorema afirma la existencia de por lo menos un punto fijo para F en $[a,b]$. Por ejemplo, todos los puntos en algún intervalo $[a,b]$ son fijos para la función identidad $f(z) = z$.

2. Hay varias hipótesis importantes en este teorema. Las dos primeras son la continuidad y el hecho de que F toma el intervalo $[a,b]$ en sí mismo. La violación de cualquiera de éstas puede producir una función sin puntos fijos.

3. También es importante que el intervalo $[a,b]$ sea cerrado. Por ejemplo, $f(z) = z^2$ toma valores dentro de $(0, \frac{1}{2})$ y además es continuo, pero no hay puntos fijos ahí por ser abierto tal intervalo.

4. Mientras el teorema de punto fijo afirma la existencia de al menos un punto fijo, desafortunadamente no nos da algún método para encontrar este punto. sin embargo, en la práctica necesitamos saber dónde está ubicado el punto fijo. El simple hecho de conocer que está presente en un cierto intervalo basta para nuestros propósitos.

2.4.3. Teorema del punto fijo atractor

Supóngase que z_0 es un punto fijo atractor para una función compleja f . Entonces hay un disco D de la forma $|z-z_0| < \delta$ con centro en z_0 en el cual se satisface la siguiente condición: si $z \in D$ entonces, $f^n(z) \in D$ y, además, $f^n(z) \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Para la demostración, consultar [1].

2.4.4. Teorema del punto fijo expansivo

Supóngase que z_0 es un punto fijo expansivo para una función compleja f . Entonces hay un disco D de la forma $|z-z_0| < \delta$ con centro en z_0 en el cual se cumple la siguiente condición: si $z \in D$ pero, $z \neq z_0$ entonces, hay un entero $n > 0$ tal que $f^n(z) \notin D$. Para la demostración véase [1].

La combinación de los teoremas de punto fijo y de punto fijo expansivo son precisamente la justificación de utilizar los términos "atractor" y "expansivo" para describir los correspondientes puntos fijos. En particular nos hablan de los sistemas dinámicos "locales" cercanos a algún punto fijo z_0 para el cual $|f'(z_0)| \neq 1$.

Una diferencia principal entre los puntos fijos atractores y los puntos fijos expansivos consiste en que los puntos atractores son "visibles" al graficarlos. mientras que los puntos fijos expansivos por lo general no lo son. Con frecuencia encontramos un punto fijo atractor, eligiendo una semilla aleatoria inicial y calculamos sus órbitas numéricamente. Si estas órbitas entran siempre en el intervalo I , alrededor de un punto fijo atractor, entonces podemos saber qué pasará con esta órbita. Esta converge necesariamente al punto fijo atractor. Por otro lado, en el caso de un punto fijo expansivo, la órbita elegida aleatoriamente, deberá caer exactamente sobre el punto fijo. para que podamos verlo gráficamente. Es raro que esto ocurra y si la órbita llegara muy cercana al punto fijo expansivo, el error de redondeo nos lanzará lejos este punto fijo y extenderá una órbita que se mueve distante.

Punto interior. Entendemos que hay un pequeño disco abierto con centro en z_0 de la forma $\{z: |z-z_0| < \delta\}$ que está contenido totalmente en \mathbb{R} .

2.4.5. Principio del mapeo en la frontera

Supongamos que R es un conjunto cerrado en el plano. Si z_0 es un punto interior en R , entonces $f_c(z_0)$ es un punto interior de la imagen $f_c(R)$.

Una forma equivalente de formular este principio es suponer que z_0 pertenece a la frontera de $f_c(R)$. Entonces, las imágenes inversas de z_0 se encuentran en la frontera de R .

El **Principio del Mapeo en la Frontera** es válido para una función compleja que tiene una derivada compleja en todas direcciones.

Para ver por qué se mantiene válido el Principio del Mapeo en la Frontera introducimos la noción de "trozo de cuña" con centro en z_0 . Supongamos primero que $z_0 \neq 0$ y que $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. Supongamos que $r_1 < r_0 < r_2$ y $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$. Entonces, definimos un trozo de cuña con centro en z_0 como un conjunto de la forma

$$W = \{ re^{i\theta} \mid r_1 < r < r_2, \theta_1 < \theta < \theta_2 \}$$

con $z_0 \in W$. Tal cuña se muestra en la figura 2.4.5.1

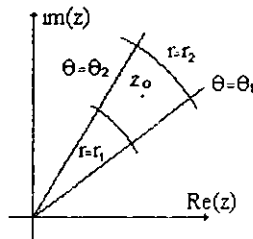


Figura 2.4.5.1. Un trozo de cuña W con centro en z_0 .

En el caso especial donde $z_0 = 0$, tomamos la cuña de un disco pequeño centrado en cero. Para la función $f_0(z) = z^2$, las imágenes de cuñas siempre serán cuñas bajo f_0 . La imagen de la cuña W bajo f_0 que se muestra en la figura 2.4.5.1 está dada por

$$f_0(W) = \{ re^{i\theta} \mid r_1^2 < r < r_2^2, 2\theta_1 < \theta < 2\theta_2 \}$$

La siguiente observación nos permite ver por qué el Principio del Mapeo en la Frontera se mantiene para un trozo de cuña que es iterado por f_c .

Para $c \neq 0$, f_c transforma trozos de cuñas en regiones. Estas regiones son cuñas que han sido trasladadas por el número complejo c , ver figura 2.4.5.2.

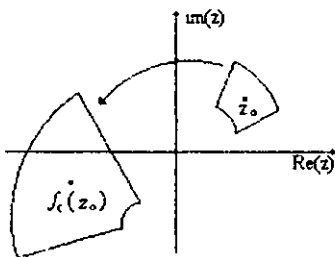


Figura 2.4.5.2. f_c traslada la cuña con centro en z_0 a la cuña con centro en $f_c(z_0)$.

Dado z_0 dentro de una región R , simplemente elegimos una cuña lo suficientemente pequeña con centro en z_0 que está totalmente dentro de R . Entonces, la imagen de esta cuña está dentro de $f_c(R)$. La función $f_c(z_0)$ está en el interior de $f_c(R)$.

2.5. Punto periódico de periodo n .

A partir de las ideas expuestas anteriormente, extendemos las definiciones de atracción y repulsión a puntos periódicos de periodo n .

Al igual que los puntos fijos, los puntos fijos periódicos de periodo n también se clasifican en atractores, expansivos y neutrales o indiferentes. La diferencia es que aquí el cálculo es un poco más complicado. Veremos cómo se obtienen los puntos fijos de periodo n de la función cuadrática $f_c(z) = z^2 + c$.

Definición. Un punto z_0 es un *punto periódico de periodo n* si $f^n(z_0) = z_0$. Así, la órbita de z_0 es

$$f(z_0), f^2(z_0), f^3(z_0), \dots, f^{n-1}(z_0).$$

El conjunto de todas las iteradas sucesivas de un punto periódico forma una órbita periódica. Un mapeo puede tener muchos puntos fijos, por ejemplo, en el mapeo identidad $f(z) = z$ todos los puntos son fijos en \mathbb{C} .

Sea S^1 el círculo unitario en el plano complejo, es decir $|z| = 1$. Representamos un punto en S^1 por su ángulo θ medido en radianes. Entonces un punto está determinado por un ángulo

de la forma $\theta + 2k\pi$, para un entero k . Ahora, sea $f(\theta) = 2\theta$. (Notemos que $f(\theta + 2k\pi) = f(\theta)$). Ahora,

$$f^n(\theta) = 2^n \theta,$$

así que θ es periódica de periodo n si y sólo si $2^n \theta = \theta + 2k\pi$, para k entero, es decir, si y sólo si $\theta = 2k\pi / (2^n - 1)$, donde, $0 \leq k \leq 2^n - 1$. De esto, los puntos periódicos de periodo n para f son las $(2^n - 1)$ raíces de la unidad.

Un punto periódico de periodo n es atractor (expansor) si éste es un punto fijo atractor (expansor) para $f^n(z)$. Esto establece que las órbitas periódicas de periodo n pueden contener algunos puntos que son atractores y algunos que son expansores..

Así por ejemplo en el mapeo anterior $\theta \rightarrow 2\theta \dots$ etc.

En la función cuadrática $f(z) = z^2$, debemos resolver la ecuación $f^n(z) = z$ para encontrar sus puntos periódicos de periodo n , la cual es una ecuación polinomial de grado 2^n . Si utilizamos una computadora para esto, generaríamos errores de redondeo que se acumularían, ocasionando así que los puntos periódicos no puedan ser visibles en la computadora. Iremos ahora mostrando cómo resolver la ecuación $f^n(z) = z$ utilizando la ecuación de Euler.

La función cuadrática es fácil de entender en el plano complejo. Así, definimos $z_0 = re^{i\theta}$, entonces las órbitas de z_0 bajo $f(z)$, están dadas por

$$\begin{aligned} z_0 &= re^{i\theta}, \\ z_1 &= r^2 e^{i(2\theta)}, \\ &\vdots \\ z_n &= r^{2^n} e^{i(2^n \theta)} \end{aligned}$$

De esto, se ve que para la órbita de z_0 , $|z_0| < 1$, entonces, $r^{2^n} \rightarrow 0$, si $n \rightarrow \infty$ y si $|z_0| > 1$ entonces $f^n(z) \rightarrow \infty$. Por consecuencia, $|f^n(z_n)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Ya hemos visto cómo se obtienen los puntos fijos de $f(z_n)$, y además cómo se evalúan para determinar su comportamiento. Un método que nos ayuda a obtener los puntos fijos de periodo n consiste de lo siguiente. Para empezar, debemos resolver la ecuación

$$f^n(z) - z = 0.$$

Dentro de la familia de funciones $f_c(z) = z^2 + c$ el caso más simple, sucede cuando $c = 0$, ya que los puntos fijos de periodo n se obtienen de forma muy sencilla según hemos visto arriba. Por lo tanto, los puntos fijos para $f_0(z) = z^2$ son 0, ∞ y 1, y los puntos fijos periódicos están en S^1 . Pero,

el problema surge cuando $c \neq 0$ pues es muy complicado seguir el mismo procedimiento que en $c = 0$. En tal caso debemos iterar $f_0(z)$ un número finito de veces y observar hacia qué punto tiende $f_0(z)$ para un z inicial. Luego de hallar los puntos fijos de periodo n también los evaluamos para conocer si son atractores, expansivos o neutrales.

Hasta que no se mencione lo contrario especificamos que para el siguiente análisis tomamos $c = 0$ en la función cuadrática $f_c(z) = z^2 + c$.

Si queremos obtener los puntos fijos de periodo-2, debemos resolver

$$f_0^2(z) - z = 0, \text{ es decir, } f(f(z)) - z = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f_0(f_0(z)) - z &= z^4 - z \\ &= z(z^3 - 1) \end{aligned}$$

Para los puntos fijos de periodo-3 debemos resolver

$$f_0^3(z) - z = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned} f_0(f_0(f_0(z))) - z &= z^8 - z \\ &= z(z^7 - 1). \end{aligned}$$

Y en general, para los puntos fijos de periodo- n hay que hallar las raíces de

$$\begin{aligned} z^{2^n} - z &= 0 \\ &= z(z^{2^n-1} - 1) \end{aligned}$$

Para cualquier $n \geq 1$, tendremos siempre una raíz $z_1 = 0$, como puede observarse en el análisis anterior. Para este ejemplo, hay $2^n - 1$ raíces, pues ya se tiene $z_1 = 0$. Entonces las raíces de $z^{(2^n-1)} = 1$, requieren considerar $z = re^{i\theta}$, el cual es el círculo con centro en 0 y radio 1. El ángulo es $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y el círculo se dividirá en $2^n - 1$ rebanadas, las cuales corresponden a cada raíz o punto fijo de periodo n . Como ya vimos, $2^n \theta = \theta + 2k\pi$ y

$$\theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1}$$

Ahora si a cada uno de estos puntos los representamos por

$$w_j = e^{i\theta}$$

$$w_j = e^{i\left(\frac{2\pi j}{2^n - 1}\right)}$$

Entonces cada uno de estos puntos están distribuidos sobre el círculo, como se muestra en la figura 2.5.1, en la que la longitud de arco es $2\pi / (2^n - 1)$ entre cada punto.

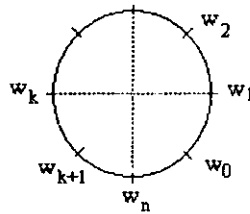


Figura 2.5.1. Puntos en el círculo unitario con argumento $\theta = 2\pi j / (2^n - 1)$.

Como ya se mencionó cada w_j es una raíz de $z^{2^n - 1} = 1$ en el círculo unitario. Ahora, si elegimos n tal que

$$\frac{2\pi}{2^n - 1} < (\theta_2 - \theta_1)$$

Entonces debemos garantizar que hay al menos un punto fijo de periodo n con argumento $2\pi j / (2^n - 1)$ entre θ_2 y θ_1 . Es decir, si se considera una vecindad en algún w_j se tiene la seguridad que habrá un punto fijo de periodo n , aunque claro, podemos preguntarnos, ¿la unión de todos los w_j nos genera el círculo? Para esto, supondremos que $U = \{w_j\}$ en el que los ángulos θ son racionales módulo 2π . Ahora, la unión de todos los w_j en realidad no forman por completo el círculo, ya que θ es racional módulo 2π .

Por lo tanto

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} w_j \not\subseteq S^1$$

Por otra parte, la cerradura de U sí es igual a S^1 , es decir, $\bar{U} = S^1$. De lo anterior vemos que en alguna vecindad $\varepsilon > 1 / (2^n - 1)$, de un ángulo irracional en S^1 , hay uno o más w_j con θ racional.

Investigaremos ahora si los puntos fijos de periodo n

$$w_j = e^{i\left(\frac{2\pi j}{2^n - 1}\right)}, \text{ donde } \theta = 2\pi j / (2^n - 1).$$

son puntos fijos atractores o expansivos. Para esto, simplemente comprobamos si

$$|f^n(w_j)'| < 1 \text{ ó } |f^n(w_j)'| > 1$$

respectivamente. Entonces, obtenemos la derivada de $f^n(z) - z$, es decir, derivamos

$$z^{2^n} - z = 0$$

así,

$$f^n(z)' = 2^n z^{2^n-1} - 1$$

Luego, analizamos $z = w_j$ en $f^n(z)'$:

$$|f^n(w_j)'| = \left| 2^n \left\{ e^{i\left(\frac{2\pi}{2^n-1}\right)} \right\}^{2^n-1} - 1 \right|$$

En resumen, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.5.1. El mapeo cuadrático $f_0(z) = z^2$ es caótico en el círculo unitario. Si $|z| < 1$, entonces $|f_0^n(z)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y $|f_0^n(z)| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow 0$.

El mapeo cuadrático es muy sensible a condiciones iniciales en el siguiente sentido. Sea z_0 un punto en el círculo unitario. Dada una bola abierta con centro en z_0 , podemos encontrar siempre dentro de ella un trozo de cuña de la forma

$$W = \{ re^{i\theta} \mid r_1 < r < r_2, \text{ donde } \theta_1 < \theta < \theta_2 \}$$

Con $r_1 < 1 < r_2$. Este pedazo de cuña se muestra en la figura 2.4.5.1 (página 31).

Ahora, la imagen de W es un nuevo trozo de cuña dado por

$$f(W) = \{ re^{i\theta} \mid r_1^2 < r < r_2^2, \text{ donde } 2\theta_1 < \theta < 2\theta_1 \}$$

A partir de $r_1 < 1 < r_2$ tenemos que $r_1^2 < r_1 < 1 < r_2 < r_2^2$. Vemos que cada aplicación de f tiene el mismo efecto, así que el tamaño de $f^n(W)$ crece con n . Poco a poco el ángulo de $f^n(W)$ llegará a exceder a 2π , así que, para n lo suficientemente grande, $f^n(W)$ es la región anular determinada por

$$r_1^{2^n} < r < r_2^{2^n}$$

De todo esto vemos que el radio más interno de $f^n(W)$ tiende a cero, mientras que el radio más externo tiende a ∞ . Por lo tanto vemos que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(W) = \mathbb{C} - \{0\}$$

Esto es, las órbitas de puntos en W alcanzan eventualmente cualquier punto en \mathbb{C} , excepto 0 (ver figura 2.5.3). Esta es la dependencia sensitiva extrema: arbitrariamente cercano a un punto en el círculo unitario hay un punto cuya órbita incluye algún otro punto en el plano, con una excepción, el origen.

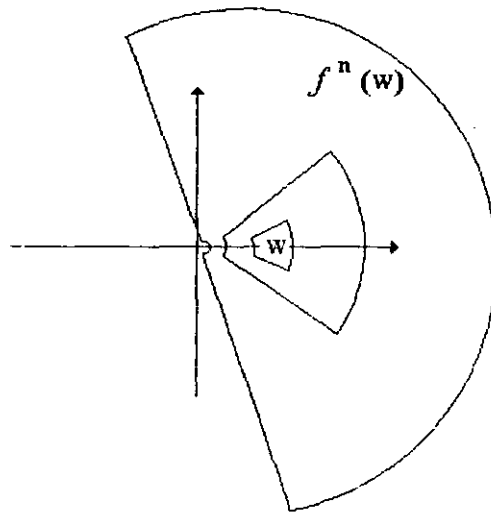


Figura 2.5.3. La función f amplifica la cuña W hasta cubrir todo \mathbb{C} excepto al cero.

Definición 2.5.1. La órbita de z bajo f está acotada si existe K tal que $|f^n(z)| < K$ para toda n . De otra forma, es no acotada.

Para la función cuadrática, la órbita de un punto en el interior y sobre el círculo unitario está acotada. Los puntos fuera del círculo unitario tienen órbitas no acotadas.

Definición 2.5.2. La órbita z bajo f es supersensitiva si una bola abierta B con centro en z tiene la propiedad de que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(B)$$

coincide con \mathbb{C} menos un punto.

Para la función cuadrada, sólo los puntos sobre el círculo unitario tienen órbitas supersensitivas. Si $|z| < 1$, podemos elegir una bola abierta pequeña con centro en z y que está situada por completo dentro del círculo unitario. Entonces la órbita de un punto en esta bola jamás saldrá del conjunto $\{z : |z| < 1\}$. Si $|z| > 1$, podemos encontrar de manera similar una bola abierta pequeña fuera de $\{z : |z| \leq 1\}$ cuya órbita permanece fuera de esta región.

Definición 2.5.3. Sea $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Un mapeo de $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ se llama analítico si $f'(z)$ existe para todo z y

$$f'(\infty) = \left[\begin{array}{c} 1 \\ f' \left[\begin{array}{c} 1 \\ z \end{array} \right] \end{array} \right]'$$

existe. Como ejemplo, tenemos:

1) $f(z) = p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$.

2) $f(z) = \text{Sen } z, f(z) = \text{Cos } z$.

3) Series de funciones analíticas es analítica.

4) Producto.

5) Tienen desarrollo en series de Taylor en cualquier punto $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

6) $\{f_n\}$ que converge uniformemente en compactos. Esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = F$$

que es analítica. [ver 11].

Capítulo III

El caos en sistemas dinámicos

3.1 Introducción

La investigación matemática del caos tiene sus inicios hacia 1890, cuando Henri Poincaré estudió la estabilidad del sistema solar. Él se preguntó si los planetas podrían continuar indefinidamente en sus órbitas naturales, o si alguno de ellos la abandonaría y se perdería en la oscuridad, o estrellarse en el sol. Poincaré no encontró una respuesta y a partir de esto creó un nuevo método, la geometría de la dinámica. Hoy en día sus ideas se han desarrollado en una rama llamada topología, la cual es la geometría de las deformaciones continuas. Poincaré fue el primero en descubrir el caos en el movimiento orbital de tres cuerpos que ejercen fuerzas gravitacionales entre sí.

En un sistema dinámico se presentan con frecuencia características que alteran su estabilidad, de modo que si realizamos predicciones por medio de él, la fiabilidad de los cálculos se verá limitada. Por ejemplo, en la predicción del tiempo meteorológico, los datos coinciden con la realidad cuando el intervalo de predicción es corto, por decir, de 1 a 3 días. Pero, para rangos más grandes, el estado real del tiempo difiere del estimado en los cálculos y el número de parámetros crece. La razón de esto es que el sistema meteorológico tiene un carácter *caótico*, es decir sus patrones de conducta no son constantes sino que cambian a través del tiempo, y además, el sistema no es lineal.

El meteorólogo E. Lorenz llegó a la conclusión de que las predicciones a largo plazo en este sistema no son posibles debido a su aleatoriedad. Sin embargo, los científicos buscan afanosamente modelos más adecuados, lo cual permita que este tipo de predicciones sean más exactas y a mayor plazo.

El comportamiento caótico puede definirse algunas veces por una simple fórmula, en otras es necesario ir paso a paso en el sistema hasta que ocurra el punto de ruptura que nos lleva *del orden al caos*.

El término *caos* se utiliza con frecuencia para describir el comportamiento complejo de sistemas no lineales, y los mapeos complejos se utilizan para describir ciertos aspectos de los sistemas dinámicos que tienen un comportamiento *irregular* (caótico).

La rama de las matemáticas que estudia los sistemas caóticos es la *dinámica no lineal* y los procesos que estudia, ocurren en todas las ramas de la ciencia.

El caos es un término matemático con el cual referimos que un sistema tiene un comportamiento inherentemente impredecible. Por ejemplo, la bolsa de valores, el tiempo meteorológico, e incluso el caos se presenta en aspectos cotidianos de nuestra vida, como el movimiento de las moléculas del agua hirviendo, el comportamiento del humo del cigarro, etc.

En un sistema caótico, el factor que produce esto es lo que se llama *dependencia sensitiva a condiciones iniciales*. Es decir, para cambios insignificantes en los valores de entrada del sistema, habrá cambios muy grandes en el estado final del proceso. Decimos entonces que el sistema es *extremadamente* sensitivo a medidas iniciales. Por ejemplo las soluciones de un sistema caótico tienden a oscilar o a “vagar” alrededor de la aleatoriedad, en donde no parece existir el orden. Si tomamos otra solución cercana a la original, la nueva salida se comportará de manera aleatoria. Sin embargo, después de un periodo inicial de similitud, las dos soluciones serán diferentes entre sí.

Un descubrimiento reciente en Dinámica muestra que este tipo de caos también puede presentarse en sistemas completamente determinísticos, es decir, en los modelos matemáticos que no permiten algún error en la predicción de la variable dependiente.

Las soluciones que se obtienen de ellos pueden presentar un carácter totalmente aleatorio. Incluso en el más simple de los modelos matemáticos es posible encontrar un comportamiento complejo.

Hoy en día hay cuatro preguntas que los investigadores de la teoría del caos se hacen:

- ¿Cómo detectar la manera en la cual se entra inevitablemente al caos?
- ¿Se puede formular este proceso mediante simples términos matemáticos?
- ¿Qué implicaciones tienen todos estos descubrimientos para el paradigma científico tradicional?
- ¿Cómo se comportan los sistemas naturales en la transición del orden al caos?

En general, la teoría del caos nos permite apreciar que muchos fenómenos fundamentalmente son impredecibles y que muchos de estos los tuvimos (o tendremos algún día) bajo nuestro control, no son simplemente receptivos a un orden racional. Los fenómenos naturales no son los únicos que entran en esta categoría, podemos incluir, por ejemplo, las decisiones que se toman en los negocios y que producen ciertas condiciones que nos llevan inevitablemente al caos.

3.2. Tipos de Complejidad en Sistemas Dinámicos.

El meteorólogo Ernest Lorenz describió la sensibilidad en sistemas caóticos. Dando una desviación inicial, el sistema caótico pronto tendrá un error muy grande, en el mismo orden y magnitud que los valores reales del sistema.

El fenómeno de la dependencia sensitiva a condiciones iniciales se ha descrito como una *cualidad* que definitivamente todo sistema dinámico tiene. Otros sistemas pueden o no exhibir sensibilidad. Este es ya un gran paso adelante en la comprensión del caos.

Los estudios que se han realizado sobre dinámica han sugerido que hay tres niveles de complejidad en sistemas "naturales". La clasificación es la siguiente:

Simplicidad Organizada. Caracteriza a los sistemas que pueden describirse por un pequeño número de parámetros relacionados determinísticamente entre sí. Los parámetros de tales sistemas no son todos igualmente importantes, y los efectos de algunos de ellos con frecuencia no son considerados. Los mecanismos newtonianos son ejemplos clásicos de tales sistemas.

Complejidad Desorganizada. Esta emerge en sistemas caracterizados por un número grande de distintos parámetros no determinísticos. Tales sistemas pueden describirse mediante métodos estadísticos.

Complejidad Organizada. Caracteriza a los sistemas que tienen un gran número de parámetros determinísticos pero interrelacionados, y todos contribuyen significativamente con el sistema y por esto deben tomarse muy en cuenta. Este tipo de sistemas se encuentran en la economía y en sistemas construidos por el hombre.

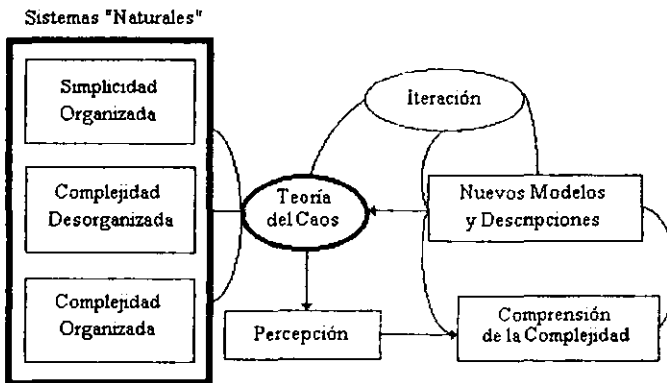


Figura 3.2.1 Complejidad y Teoría del Caos

Nosotros tendemos a actuar en todos los sistemas como en la primer categoría. Siempre que reconocemos que no son de este tipo, simplificamos nuestros modelos para hacerlos más receptivos para nuestros conceptos de *simplicidad organizada*

Como lo indica la figura 3.2.1, la teoría del caos nos permite comprender algunas posibilidades que son inherentes en las otras categorías. Esto sirve sólo para comprender mejor la realidad.

Al principio mencionamos la sensibilidad en sistemas dinámicos. Ahora tratamos esto de manera más formal.

Definición 3.2.1. Sea J un subconjunto en \mathbb{R}^n . El mapeo $f: J \rightarrow J$ tiene *dependencia sensitiva* a condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que, para algún $x \in J$ y una vecindad N de x , existe $y \in N$ y $n \geq 0$ tal que

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$$

Intuitivamente, un mapeo posee dependencia sensitiva a condiciones iniciales si existen puntos arbitrariamente cercanos a x los cuales se separan poco a poco de x por al menos δ unidades bajo iteración de f . Hacemos énfasis en que no todos los puntos cercanos a x necesitan separarse eventualmente de x , sino que debe haber al menos uno de tales puntos en toda la vecindad de x . Si un mapeo tiene dependencia sensitiva a condiciones iniciales, entonces para todos los propósitos prácticos, la dinámica del mapeo requiere de cálculos en la computadora.

Los pequeños errores de cálculo que se introducen por redondeo, pueden llegar a ser muy grandes mediante el proceso de iteración. Los resultados del cálculo de una órbita, no logran exactitud, pueden conducir a una órbita que no se parezca a la órbita real.

Definición 3.2.2. Sea J un subconjunto topológico en \mathbb{R}^n , la correspondencia $f: J \rightarrow J$ es *topológicamente transitiva* si para un par de conjuntos abiertos $U, V \subset J$ existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

De manera intuitiva, un mapeo topológicamente transitivo tiene puntos que se mueven eventualmente bajo iteración de una vecindad arbitrariamente pequeña a otra. Por consecuencia, el sistema dinámico no puede descomponerse en dos conjuntos abiertos disjuntos los cuales son invariantes bajo el mapeo.

Ahora, dirigimos nuestra atención sobre la noción de un sistema dinámico caótico.

Hay diversas definiciones de caos en un sistema dinámico. La siguiente, es una definición particular que consideramos, ya que se aplica a una gran variedad de ejemplos, y también porque en muchos casos es fácil de verificar.

Definición 3.2.3. Sea V un subconjunto de \mathbb{R}^n . El mapeo $f: V \rightarrow V$ se dice que es caótico en V si:

1. f tiene dependencia sensitiva a condiciones iniciales.
2. f es topológicamente transitiva.
3. Los puntos periódicos son densos en V .

Para resumir, un mapeo caótico tiene tres ingredientes: la impredecibilidad, la indecomponibilidad (no puede descomponerse) y un elemento de regularidad.

Ejemplo 3.2.1. Sea el mapeo del círculo $f: S^1 \rightarrow S^1$ dado por $f(\theta) = 2\theta$ es caótico. Como podemos ver, la distancia angular entre dos puntos es duplicada bajo iteración de f . De aquí que f es sensitiva a condiciones iniciales. La transitividad topológica también se sigue de esta

observación, donde un pequeño arco en S^1 es expandido eventualmente por algún f^k hasta cubrir todo S^1 y, en particular, algún otro arco en S^1 .

La densidad de los puntos periódicos se estableció en el capítulo 1. Este mapeo tiene una fuerte forma de dependencia sensitiva llamada *expansividad*.

Definición 3.2.4. El mapeo $f: J \rightarrow J$ es *expansivo* si existe $\nu > 0$ tal que para algún $x, y \in J, x \neq y$, existe n tal que

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \nu$$

La expansividad se diferencia de la dependencia transitiva en que todos los puntos cercanos entre sí se separan eventualmente al menos por ν .

Estudiaremos la presencia del caos en el sistema dinámico, tomando $f_0(z) = z^2$. Tomemos $z \in \mathbb{C}$ en coordenadas polares, y $|z| = 1$, entonces

$$z = \rho e^{i\theta} \text{ con } \rho = 1.$$

y

$$f_0(e^{i\theta}) = e^{i2\theta} \text{ con } \rho = 1$$

Esto significa que el punto con ángulo polar θ es "movido" por f_0 al punto con ángulo 2θ .

3.3. Caos en la función $f_0(z) = z^2$.

Recordemos que $f_0(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$. Veremos que f_0 restringida al círculo unitario es caótica (según definición 3.2.2). Para comprender el caos en la función f_0 debemos exhibir las tres propiedades de la definición 3.2.2

1) La *dependencia sensitiva a condiciones iniciales* es un componente esencial en un sistema caótico. Para ver esto, tomemos dos puntos θ_0 y θ_1 en el círculo, muy cercanos entre sí.

Supongamos que δ es la distancia entre ellos, la cual se mide a lo largo del círculo. Veamos qué sucede con estos puntos al iterar f_0 .

Se puede apreciar que la distancia entre $f_0(\theta_0)$ y $f_0(\theta_1)$ se duplica (siempre y cuando $f_0(\theta_0)$ y $f_0(\theta_1)$ permanezcan cercanos entre sí).

Al iterar de nuevo, la distancia entre $f_0^2(\theta_0)$ y $f_0^2(\theta_1)$ se duplica otra vez. Continuando n veces con la iteración, vemos que la distancia entre $f_0^n(\theta_0)$ y $f_0^n(\theta_1)$ es $2^n\delta$. Así, las órbitas de θ_0 y θ_1

se separan totalmente y de una forma rápida por ejemplo, en 12 iteraciones la distancia entre los dos puntos es $2^{12} \delta = 4096\delta$. Veamos la figura 3.4.1.

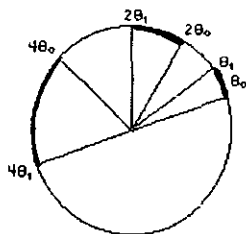


Figura 3.4.1. La función cuadrática polar duplica distancias en el círculo.

Esto significa que la cercanía entre dos puntos, es de poca importancia bajo f_0^n ya que en pocas iteraciones se apartarán por completo y de manera exponencial.

Ahora bien, si tomamos una región W alrededor de $z_0 \in S^1$, la cual tiene forma de un trozo de cuña (ver figura 3.4.2) En ésta tendremos todos los números complejos que cumplan lo siguiente:

1. $\theta_1 < \theta < \theta_2$ y
2. $r_1 < r < r_2$

donde

$$\theta_1 < \theta_0 < \theta_2 \text{ y}$$

$$r_1 < 1 < r_2.$$

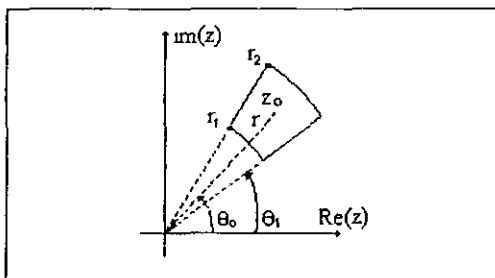


Figura 3.4.2. Trozo de cuña alrededor de z_0 .

Notemos que podemos elegir esta cuña tan pequeña como queramos, para esto, elegimos r_1 y r_2 cercanos a 1 y θ_1 y θ_2 cercanos a θ_0 . A esta cuña la representamos por W .

El hecho de tomar W sin importar qué tan pequeña sea e iterarla bajo $f_0(z)$ es lo que provoca la aparición de la sensibilidad, ya que las imágenes de $f_0^n(W)$ irán haciéndose cada vez más grandes hasta que poco a poco se encuentran con todos los puntos en el plano, con por lo menos una excepción. Esto significa que la k -ésima imagen de W se “acercará” a algún punto atractor dentro o fuera del círculo del que inicialmente partió. Ver la figura 3.4.3.

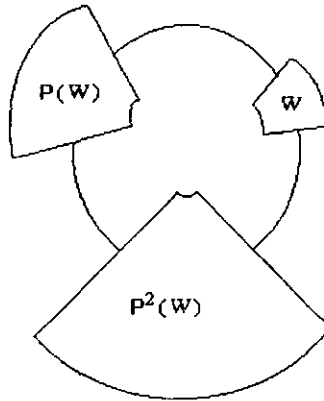


Figura 3.4.3. Aquí $r_1 \rightarrow 0$ y $r_2 \rightarrow \infty$.

Como se ve en la figura anterior, $f_0(W)$ hace que W se vuelva cada vez más grande en cada iteración. El radio mayor, r_2 , aumenta hasta el ∞ , mientras que r_1 decrece hasta converger a cero.

De manera similar, cada ángulo del trozo de cuña se duplica en cada etapa. De este modo vemos que no importa lo pequeña que sea W ya que bajo iteración se expande hasta alcanzar un punto en el plano (con el cero como una excepción).

2) La transitividad topológica (definición 3.2.2):

Un mapeo que es topológicamente transitivo tiene puntos que bajo iteración se mueven (a la larga) de una vecindad arbitrariamente pequeña a otra. Por consecuencia, el sistema dinámico no se puede descomponer en dos conjuntos abiertos disjuntos los cuales son invariantes bajo el mapeo.

Tengamos en cuenta que si un mapeo tiene una órbita densa, entonces es topológicamente transitiva.

Demostración.

1) Los abiertos de S^1 son

$$A_{\mathbb{R}^2} \cap S^1$$

y están generados por $D \cap S^1$, donde D son discos abiertos en \mathbb{R}^2 . Ver la figura 3.4.4.

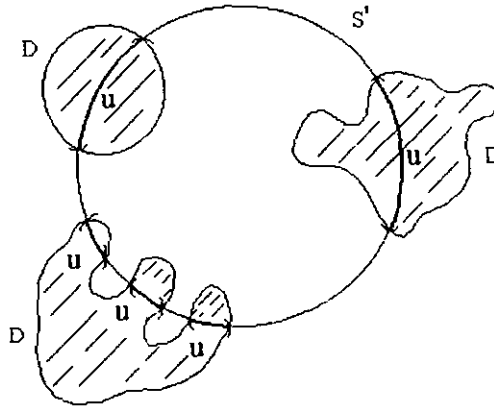


Figura 3.4.4. Los abiertos de S^1 son $A_{\mathbb{R}^2} \cap S^1$ generados por $D \cap S^1$.
Cada abierto $u = D \cap S^1$.

2) Sin pérdida de generalidad.

Sean u, v dos conjuntos abiertos, tales que

$$u = D \cap S^1, \text{ y } v = D \cap S^1.$$

Y sea D un disco abierto. Ver la figura 3.4.5.

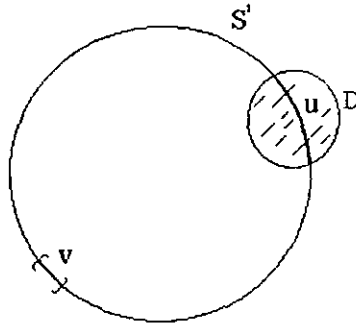


Figura 3.4.5. El conjunto v estará cubierto por $f^n(u)$. Aquí u y v están dados por $D \cap S^1$.

Como explicamos en el caso anterior,

Existe n tal que $f^n(D) \supset S^1$, es decir, $f^n(D)$ cubre a S^1 .

$\Rightarrow f^n(u) \supset S^1$.

Como $f^n(u) \supset S^1 \supset V$,

Por tanto, tenemos que $f^n(u) \cap V \neq \emptyset$. ■

3) La densidad de puntos periódicos:

Primero, damos un punto periódico en un arco de la forma $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Esto quiere decir que debemos encontrar un n y un θ tal que

$$f_0^n(e^{i\theta}) = e^{i(2^n\theta)}$$

con $\theta_1 < \theta < \theta_2$.

Ahora,

$$f_0^n(e^{i\theta}) = e^{i(2^n\theta)}$$

Como hemos visto, $f_0(e^{i\theta}) = f_0(e^{i(\theta + 2k\pi)})$. Entonces

$$2^n \theta = \theta + 2k\pi$$

Para k, n enteros. Esto es, θ debe satisfacer lo siguiente:

$$\theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1}$$

donde $0 \leq k < 2^n - 1$. De esto, los puntos periódicos de periodo n para f son las $2^n - 1$ raíces de la unidad, y los números complejos con argumentos $2k\pi / (2^n - 1)$ son distribuidos en todo el círculo con longitud de arco

$$\frac{2\pi}{2^n - 1}$$

entre los puntos sucesivos.

Si elegimos n tal que

$$\frac{2\pi}{2^n - 1} < \theta_2 - \theta_1$$

garantizamos que hay al menos un punto con argumento

$$\frac{2k\pi}{2^n - 1}$$

entre θ_1 y θ_2 . Este punto es periódico de periodo n . De todo esto se sigue que el conjunto de puntos periódicos son densos en S^1 , pues f_0^n expande el arco $|\theta_1 - \theta_2| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ suficientemente, tal que su imagen cubre a S^1 .

Para resumir, un sistema caótico tiene tres ingredientes:

- La impredecibilidad,
- La indescomponibilidad, y
- Un elemento de regularidad.

Un sistema dinámico es impredecible debido a la dependencia sensitiva a condiciones iniciales. No obstante, en el centro de este comportamiento aleatorio tendremos un elemento de regularidad, a saber, los puntos periódicos los cuales son densos.

El sistema dinámico es indescomponible si hay una órbita que entra poco a poco a una región preasignada en el plano, sin importar lo pequeña que esta sea. Así que, esta órbita se acerca

arbitrariamente a un punto cualquiera en C , y no podemos separar el sistema dado en dos subsistemas separados que se comporten de manera independiente.

El hecho de que un sistema dinámico no pueda descomponerse en dos subsistemas (dos subconjuntos abiertos e invariantes) los cuales no actúan bajo f debido a la transitividad topológica).

Capítulo 4

Conjuntos de Julia

La investigación en matemática experimental ha abierto la puerta hacia una gran cantidad de estructuras fractales, imágenes y formas fantásticas que se desarrollan como sistemas dinámicos complejos. Estos, tienen una estrecha relación con el orden y el caos, ambos en coexistencia. Estas estructuras construidas van más allá de nuestra imaginación y en muchas ocasiones las encontramos al verlas en la vida real, ya que se asemejan a formas y a comportamientos de fenómenos de la naturaleza. Por ejemplo, la actividad de las hormigas en los hormigueros, la estructura creada por la caída de un árbol en un bosque, la forma de un helecho, etc.

La belleza y complejidad de mapeos que representan cálculos iterativos de Julia ha sido explorada recientemente gracias a los avances en computación. Benoît B. Mandelbrot ha extendido la teoría y representación gráfica de la iteración de funciones como una nueva rama de las matemáticas llamada *Geometría Fractal*.

Los fractales representan a objetos rugosos o patrones en los que se observa la autosimilaridad, esto es, no importa qué escala se utilice para ver una porción de la imagen fractal, pues la parte ampliada se parece al patrón original.

Funciones en el plano complejo, tan simples como $f_c(z) = z^2 + c$ resulta ser un patrón a partir del cual obtendremos las gráficas fractales y la forma que tenga dependerá del valor que se le de al parámetro c .

Para establecer las propiedades básicas de los conjuntos de Julia tomaremos en cuenta los conceptos matemáticos de familia normal de funciones analíticas y el teorema de Montel.

De aquí en adelante supondremos que f es analítica.

4.1 Familia Normal

Sea $\{F_n\}$ una familia de funciones analíticas complejas definidas en un conjunto abierto $U \in \mathbb{C}$. Con frecuencia, para nuestros propósitos, F_n será la n -ésima iterada de un mapeo F , pero por el momento adoptaremos un punto de vista más general.

Definición 4.1.1. La familia $\{F_n\}$ es una *familia normal* en U si toda sucesión de las F_n 's tiene una subsucesión, la cual cumple cualquiera de las dos condiciones siguientes:

1. Converge uniformemente en subconjuntos compactos cerrados de U , ó bien
2. Tiende a ∞ en U .

Por el teorema de Liouville, esto significa que la subsucesión converge a una función analítica acotada o bien a ∞ en cada componente conexo de U . La familia $\{F_n\}$ es normal en el punto w de U si hay algún subconjunto abierto V de U que contiene a w , tal que $\{F_n\}$ es una familia normal en V . Esto equivale a decir que hay una vecindad V de w en la que toda sucesión tomada de $\{F_n\}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente en una función analítica acotada o a ∞ .

Ejemplo 4.1.1. Sea $F(z) = az$ con $|a| < 1$ y sea el conjunto $F_n(z) = F^n(z) = a^n z$, es decir, la n -ésima iterada de F . Entonces $\{F_n\}$ forma una familia normal de funciones en un dominio $U \subseteq \mathbb{C}$ para todo z en \mathbb{C} , en donde F_n converge uniformemente a la función constante cero, pues a^n tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

Ejemplo 4.1.2. Sea $F(z) = az$ con $|a| > 1$, entonces la familia del ejemplo anterior es normal en un dominio W que no incluye al cero, pues en W , $\{F_n\}$ se va al ∞ , es decir, cumple la segunda condición de la definición 4.1.1. Pero la familia no es normal si el dominio incluye al cero. De hecho, en toda vecindad del cero hay un punto z para el cual $|F^n(z)|$ es arbitrariamente grande para algún n , lo cual nos conduce a que una vecindad U cumple que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U) = \mathbb{C}$$

que por Liouville no puede ser analítica.

Estos ejemplos muestran que los conjuntos de Julia de mapeos de la forma $F(z) = az$, o de manera más general, $F(z) = az + b$ son totalmente simples. Por tanto, este tipo de mapeos los descartamos y aquí consideraremos los polinomios de grado mayor o igual a 2.

Definición 4.1.2. La familia $\{F_n\}$ no es normal en z_0 si la familia deja de ser una familia normal en toda vecindad de z_0 .

Proposición 4.1.1. Sea F analítica y supóngase que z_0 es un punto fijo expansivo para F . Entonces la familia de iteradas de F no es normal en z_0 .

Demostración.

Supongamos que $\{F^n\}$ es normal en una vecindad de z_0 . Ya que $F^n(z_0) = z_0$ para toda n , se sigue $F^n(z)$ no converge a ∞ en U .

De este modo, una sucesión de $\{F^n\}$ tiene una subsucesión $\{F^{n_i}\}$ la cual converge uniformemente a un subconjunto G de \mathbb{C} . De aquí, $|(\{F^{n_i}\})'(z_0)| \rightarrow |G'(z_0)|$. Sin embargo, $|(\{F^{n_i}\})'(z_0)| \rightarrow \infty$. Entonces, esta contradicción establece el resultado.

Es claro que la proposición 4.1.1 se extiende para puntos periódicos expansivos. ■

4.2. Teorema de Montel

Teorema 4.2.1. Supongamos que $\{F_n\}$ es una familia de funciones analíticas definida en un dominio U . Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq b$, tal que $F_n(z) \neq a$ y b , para toda n y toda $z \in U$. Entonces, $\{F_n\}$ es una familia normal en U .

Demostración. Consúltese [11].

Como consecuencia del teorema anterior tenemos,

Teorema 4.2.2. (Teorema de Montel)

Sea $\{F_n\}$ una familia de funciones analíticas complejas definidas en un dominio abierto U . Si $\{F_n\}$ es una familia no normal, entonces para todo $w \in \mathbb{C}$, con a lo más una excepción, tenemos que $F_n(z) = w$ para algún $z \in U$ y $n > 0$.

Este teorema dice que si hay una familia de funciones $\{F_n\}$ acotada uniformemente, entonces la familia es normal. También afirma que las familias de funciones no normales toman todo punto excepto, posiblemente, un valor complejo z_0 . Para la demostración consúltese [11].

Una de las consecuencias más importantes de que una familia deje de ser normal en un punto dado es que la familia de funciones debe tomar virtualmente todo valor en una vecindad del punto. Este resultado es una variante del Teorema de Montel.

4.3. El Conjunto de Julia.

Definición 4.3.1. El Conjunto de Julia de una función analítica f , $J(f)$, es el conjunto de puntos donde la familia de iteradas $\{f^n\}$ es no normal. El Conjunto de Fatou, $F(f)$, es el complemento del conjunto de Julia, es decir, los puntos donde la familia de iteradas $\{f^n\}$ es normal.

Ahora bien, si $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ es un polinomio, el ∞ es un atractor (como vimos en el capítulo 2, sección 2.4.1) y tiene su cuenca de atracción

$$A(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \rightarrow \infty, \text{ con } n \rightarrow \infty\}$$

La frontera de $A(\infty) = \partial A(\infty)$ está formada por la cerradura de los puntos periódicos expansivos y por lo tanto, $\partial A(\infty) = J(f)$, (ver teorema 4.6.1).

Por conveniencia de exposición tomaremos de aquí en adelante a $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como un polinomio de grado $n \geq 2$ con coeficientes complejos

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n.$$

Y escribimos $f_c(z)$ para denotar la función $f_c(z) = z^2 + c$.

Como vemos, estas funciones analíticas tienen un conjunto de Julia que es un sistema dinámico expansivo bajo iteración de f y, es el "lugar" en el que toda función compleja es caótica. Por ejemplo,

para $c = 0$ $J(f_0) = \{z : |z| = 1\}$ es un círculo de radio 1 y con centro en 0,

Para todos los otros valores de c , el conjunto de Julia es un conjunto asombrosamente complicado. De hecho, es un fractal, pues $J(f_c)$ tiene cambios "dramáticos" en su estructura, al dar diferentes valores a c .

Como puede verse, para $c = 0$ el conjunto de Julia no es un fractal.

Para valores pequeños de c en $f_c(z) = z^2 + c$, $J(f_c)$ difiere ligeramente de S^1 pero es una curva fractal como está indicado en la figura 4.3.1.

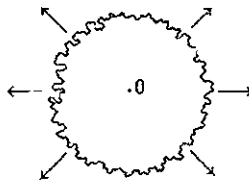


Figura 4.3.1. Para valores de c muy pequeños, $J(f)$ se parece a un círculo muy "distorsionado".

El conjunto $J(f) \cup \partial A(\infty)$ es el objeto central de nuestro interés dentro de la teoría de iteración en el plano complejo \mathbb{C} .

Junto con $A(\infty)$ y $\partial A(\infty)$ tenemos un tercer objeto:

$$K = \mathbb{C} - A(\infty) = \{z_0 \in \mathbb{C} : f^k(z_0) \text{ está acotado para toda } k.\}$$

A este conjunto se le conoce como el *conjunto de Julia lleno*. A partir de esto resulta que

$$\partial K \cap J(f) = \partial A(\infty)$$

es decir, $J(f)$ es la frontera entre las órbitas cuyo atractor es ∞ y las que permanecen acotadas cuando $k \rightarrow \infty$.

Entonces el plano complejo se descompone en dos regiones el *conjunto estable*, que consiste del conjunto $K \cup A(\infty) \setminus J(f)$ y el *conjunto caótico*, que es el conjunto de Julia, en honor al matemático

francés Gaston Julia quien estudió por primera vez este conjunto a principios del siglo XX. (Ver el teorema 4.3.2)

Ahora introduciremos los conceptos básicos que conforman la teoría de los conjuntos de Julia:

A) $J(f)$ = la cerradura {del conjunto de todos los puntos periódicos expansivos de $f(z)$ }.
Para la demostración consultar [6].

B) Desde el tiempo de Pierre Fatou y G. Julia se ha definido a $J(f)$ como el conjunto de puntos en el que la familia de iteradas de $f(z)$ dejan de ser normales (ver el teorema 4.3.1).

Proposición 4.3.1. Sea f un polinomio de grado $n \geq 2$. Entonces $J(f) \neq \emptyset$.

Demostración.

Si $J(f) = \emptyset$ todos los puntos son normales con respecto a la familia $\{f^n\}$. Como ∞ es atractor, entonces $A(\infty) = \mathbb{C}$. Entonces, no hay puntos fijos. Este hecho determina el resultado ■.

Proposición 4.3.2. Sea f^n la n -ésima iterada de f , entonces $J(f) = J(f^n)$.

Demostración.

$J(f^n)$ = la cerradura {de los puntos periódicos expansivos de f^n } y
 $J(f)$ = la cerradura {de los puntos periódicos expansivos de f }

1. Para demostrar que $J(f) = J(f^n)$ primero debemos probar que dado un entero $p \geq 2$ tenemos que

$$J(f^n) \subset J(f)$$

Sea $z \in J(f^n)$, por lo tanto existe m tal que

$$(f^n)^m(z) = z \text{ y } |(f^n)^m(z)'| > 1$$

Entonces si $p = mn$

$$f^p(z) = z$$

Por lo tanto z es periódico para f y puesto que $| (f)^p(z)' | > 1$, entonces es expansivo.

2. Ahora, debemos demostrar que $J(f) \subset J(f^n)$.

Sea z un punto en $J(f)$. Entonces, existe p tal que

$$f^p(z) = z, \text{ entonces } f^{np}(z) = z,$$

y además

$$| f^p(z)' | > 1$$

entonces

$$| f^{np}(z)' | > 1$$

por tanto

$$z \in J(f^n).$$

De esto se concluye que $J(f) = J(f^n)$ ■.

El siguiente teorema muestra que las dos últimas definiciones de $J(f)$ son equivalentes.

Teorema 4.3.1. $J(f) = \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{la familia } \{ f^n \} \text{ no es normal en } z, n \geq 0 \}$.

Demostración. Hemos mencionado que $\{ f^n \}$ no es normal en un punto periódico expansivo (ver proposición 4.1.1).

Como $J(f) =$ la cerradura {de los puntos periódicos expansivos} entonces $J(f)$ está contenido en el conjunto de no normalidad.

Debemos demostrar que

1. $J(f) \subset \{ f^n \}$ y

2. $J(f) \supset \{ f^n \}$

1. $J(f) \subset \{ f^n \}$. Si $z \in J(f)$, por el teorema 4.3.1 z es no normal.

2. Para $J(f) \supset \{f^{-n}\}$, si $z \in \{f^{-n}\}$ no es normal } hay que probar que para toda vecindad u de z existe $w \in u$ que es periódico expansivo. Consideremos la órbita de u :

$$\{u, f^n(u), f^{2n}(u), f^{3n}(u), \dots\}$$

por el teorema de Montel, el límite cubre todo \mathbb{C} excepto a lo más un punto. Por lo tanto, existe N tal que $f^N(u) \cap u \neq \emptyset$ de hecho, $f^N(u) \supset u$. Sea h una rama del mapeo inverso $f^{-N}(u)$, esto es,

$$h: f^N(u) \rightarrow u,$$

es una contracción y, por lo tanto tiene un punto fijo w , o sea $h(w) = w$. Tomando inversos tenemos,

$$f^N(w) = h^{-1}(w) = f^N(w)$$

por lo que w es un punto periódico, si h es contracción f^N es expansión ■.

A partir del hecho de que $J(f) \neq \emptyset$ (proposición 4.3.1) podemos encontrar un punto periódico expansivo z_0 . Por la proposición 4.3.2 podemos suponer que z_0 es un punto fijo para f . Debido a que el conjunto de puntos periódicos expansivos es invariante bajo f , decimos que $J(f)$ es un conjunto perfecto. Esto significa que (corolario):

Corolario 4.3.1. $J(f)$ es completamente invariante, o sea que $J(f) = f^{-1}(J(f))$.

Demostración.

Debemos demostrar que

- a) $J(f) \subset f^{-1}(J(f))$
- b) $J(f) \supset f^{-1}(J(f))$

a) $J(f) \subset f^{-1}(J(f))$

Sea $z \in J(f)$ y sea u una vecindad de z , entonces $\{f^n(u, \epsilon)\}$ es no normal, y por tanto

$$\{f \circ f^n(u, \epsilon)\}$$

es no normal.

Por lo tanto

$$f(z) \in J(f)$$

y

$$z \in f^{-1}J(f)$$

$$\text{b) } J(f) \supset f^{-1}(J(f))$$

Sea $w \in J(f)$ entonces $f(w) \in J(f)$. Sea V cualquier vecindad de w . Entonces $f(V)$ es vecindad de $f(w)$. Como

$$\{f^n|_{f^{-1}(V, \dots, f)}\}$$

es no normal. Entonces $\{f^n|_{f^{-1}(V, \dots, f)}\}$ es no normal ■.

De la demostración anterior decimos que si $\{f^n\}$ no es normal en z_0 , entonces $\{f^n\}$ tampoco es normal en una imagen inversa de z_0 , usando el teorema 4.3.1, si $z_0 \in J(f)$, entonces $f^{-1}(z_0) \in J(f)$ también.

A través de esto, entendemos que $J(f)$ contiene todas las imágenes hacia adelante, además de las preimágenes de puntos en J . Como consecuencia, el complemento de $J(f)$ es también completamente invariante.

Ahora daremos algunas propiedades del conjunto de Julia para mapeos cuadráticos $f_c(z) = z^2 + c$.

Proposición 4.3.3. (Criterio de Escape). Sea $|c| > 2$. Supongamos que $|z| \geq |c|$. Entonces

$$f_c^n(z) \rightarrow \infty, \text{ con } n \rightarrow \infty.$$

Demostración.

Por la desigualdad del triángulo tenemos,

$$\begin{aligned} |z^2 + c| &\geq |z^2| - |c| \\ &\geq |z^2| - |z|, \text{ ya que } |z| \geq |c| \\ &= |z|(|z| - 1) \end{aligned}$$

Dado que $|z| > 2$, hay un $\lambda > 0$ tal que, $|z| - 1 > 1 + \lambda$. De esto,

$$|z^2 + c| > (1 + \lambda)|z|$$

En particular, $|z^2 + c| > |z|$. Aplicando repetidamente el mismo argumento, encontramos que

$$|f^n(z)| > (1 + \lambda)^n |z|$$

De este modo, la órbita de z tiende a ∞ ■.

De lo anterior notamos que, si $|z| > 2$, entonces $|f_c'(0)| = |c| > 2$. Entonces, la órbita de 0, el punto crítico, necesariamente escapa al infinito si $|c| > 2$.

Proposición 4.3.4. Sea $z_0 \in J(f)$. Entonces

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(z_0)$$

Esta proposición nos da un buen algoritmo para graficar los conjuntos de Julia. Para esto, simplemente encontramos un punto fijo expansivo para f y calculamos sus preimágenes. También podemos utilizar esta idea para describir por completo algunos conjuntos de Julia.

Una consecuencia de lo que hemos mencionado es lo siguiente,

Corolario 4.3.3. $J(f)$ tiene un interior vacío.

Demostración.

Si $J(f)$ tiene un conjunto abierto U contenido en él, entonces debido a la invariancia bajo f y al teorema de Montel $J(f) = \mathbb{C} \setminus \{\text{un punto } a\}$. Sin embargo, esto no puede ocurrir ya que la cuenca de atracción de ∞ sería un punto.

Hacemos notar que los resultados de esta sección no son ciertos para las clases más generales de mapeos analíticos, tales como mapeos racionales o funciones enteras.

Teorema 4.3.2. $f_c(z)$ es caótica en $J(f_c)$.

Demostración.

Sea $u = v \cap J$ un abierto en J . Tenemos que para $f: J \rightarrow J$ es caótica. Por la propiedad (B) la familia de funciones $\{f^n\}$ no es normal en z . Si $z \in J$ entonces,

$$v_z, f(v_z), \dots, f^n(v_z), \dots$$

no converge (ver figura 4.3.2.1). Más aun,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(V_z) = \mathbb{C} - \text{a lo más un punto}$$

sino sería normal. Consultar [6].

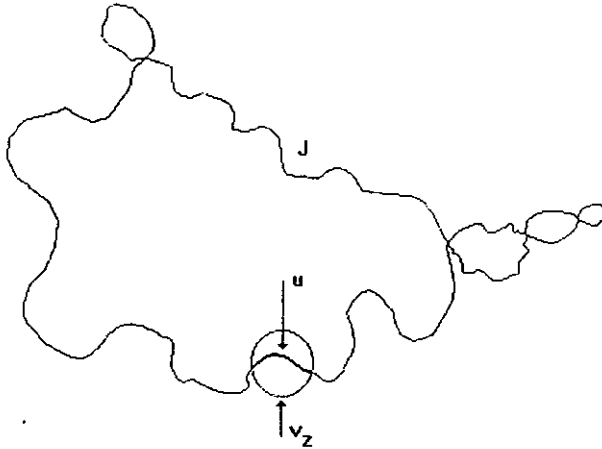


Figura 4.3.2.1. La función $f^n(u)$ cubre todo J , y $f^n(v_z)$ cubre todo el plano complejo excepto un punto.

Entonces si $u \subset J$ es un abierto, entonces existe n tal que $f^n(u) = J$. De esto tenemos que se cumple que:

- (1) f es transitiva en J .
- (2) f es sensitiva a condiciones iniciales.
- (3) Ver la propiedad (A).

Por lo tanto $f_c(z)$ es caótica en $J(f_c)$ ■.

A partir de la teoría expuesta en la sección 4.1, tenemos lo siguiente:

Corolario 4.3.4. Si $z \in J(f)$, entonces la familia de iteradas $\{f^n\}$ deja de ser normal en z .

Corolario 4.3.5. Sea F un mapeo analítico. Sea $z_0 \in J(F)$ y sea U una vecindad de z_0 , entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U)$$

omite a lo mucho un punto en \mathbb{C} .

Demostración.

Si $F^n(U)$ omite dos puntos, entonces $\{F^n\}$ debe ser una familia normal en U .

De este modo, el peor comportamiento posible de la familia de iteradas de F en una vecindad de un punto en el conjunto de Julia es que este omite un valor en \mathbb{C} . Esto puede ocurrir, como lo muestra el ejemplo $f_0(z) = z^2$. El conjunto de Julia para este mapeo es el círculo unitario y, si U es un conjunto abierto el cual se une con S^1 pero no con el 0, entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U) = \mathbb{C} - \{0\}$$

Corolario 4.3.6. Si $z_0 \in J(f)$, entonces para toda vecindad U de z_0 , se cumple que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_c^n(U) = \mathbb{C} - \{z_0\} \text{ ó } = \mathbb{C}$$

Esto significa que por muy pequeña que sea la vecindad, irá creciendo (bajo f_c^n) hasta que llegue el momento en que cubra todo el plano \mathbb{C} .

Ejemplo 4.3.2. Sea $f_0(z) = z^2$. La figura 4.3.3 muestra esto que acabamos de mencionar.

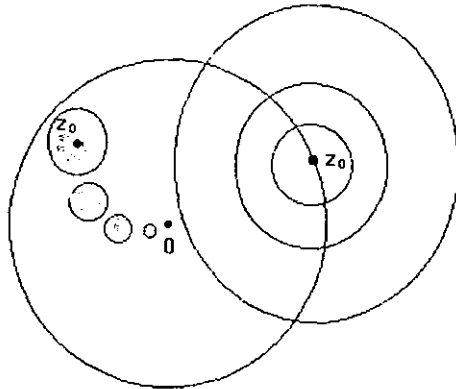


Figura 4.3.3. Se toma una vecindad muy pequeña de $z_0 \in J(f_c)$ y bajo $f_c(z)$ obtenemos otra mucho mayor. Si tomamos una vecindad en el interior del círculo, entonces bajo $f_c(z)$ se hará muy pequeña hasta converger a 0.

4.4. La geometría de los Conjuntos de Julia de la familia cuadrática $z^2 + c$.

Los conjuntos de Julia no son curvas suaves o "lisas", pues su naturaleza fractal las vuelve complejas, con formas "rugosas" y "extrañas". Como hemos visto, los conjuntos de Julia se generan por iteración de una función analítica. En particular si $f(z) = z^2 + c$ cuyo conjunto de Julia para $c \rightarrow 0$ es $|z| = 1$, una curva cerrada con frontera no suave. Este "círculo rugoso" (figura 4.3.1) limita las cuencas de atracción de 0 y de ∞ .

Los puntos fijos de $f_c(z)$ también se pueden obtener mediante la ecuación

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2c}$$

con $c < 1/4$. Esto nos ayuda a obtener los ceros de $f_c(z) - z = 0$.

Proposición 4.4.1. Supongamos que $|c| < 1/4$, entonces el conjunto de Julia de $f_c(z)$ es una curva conexa.

Demostración. Demostraremos esta proposición en dos partes. En la primera probaremos que las imágenes $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \dots$ de un círculo Γ_0 bajo f_c están en la cuenca de atracción del infinito si Γ_0 está en esa cuenca y, además, veremos el comportamiento de estas curvas en $A(\infty)$.

Por otro lado, consideraremos las preimágenes $\Gamma^{-1}, \Gamma^{-2}, \Gamma^{-3}, \dots$ de Γ_0 , y probaremos entonces que el conjunto de Julia es $\Gamma^{-\infty}$ que será una curva conexa.

Primera parte.

Consideremos $1-4c = 0$ (de $z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$). Como sabemos, para $c = 1/4$ f_c tiene un punto fijo neutral.

Demostrando cada uno de los siguientes lemas demostraremos esta proposición.

Lema 1. Si $|z| > 2$, entonces $z \in A(\infty)$ para todo c .

Lema 2. El cero es el único punto crítico de f_c y entonces si $|c| < 1/4$, $|f_c^n(0)| < 2$ para toda $n \geq 0$.

Lema 3. Sea $\Gamma_0 = \{z \mid |z| = 3\}$ está en la cuenca de atracción del infinito.

Lema 4. ∞ es atractor.

Lema 5. La órbita de cero permanece acotada si $|c| < 1/4$.

Como ya vimos en los capítulos I y II, para $|f'_c(z)| > 1$, $z \in A(\infty)$ y, por lo tanto $\Gamma_0 \subset A(\infty)$. Antes de proceder a probar los lemas tengamos en cuenta la siguiente figura:

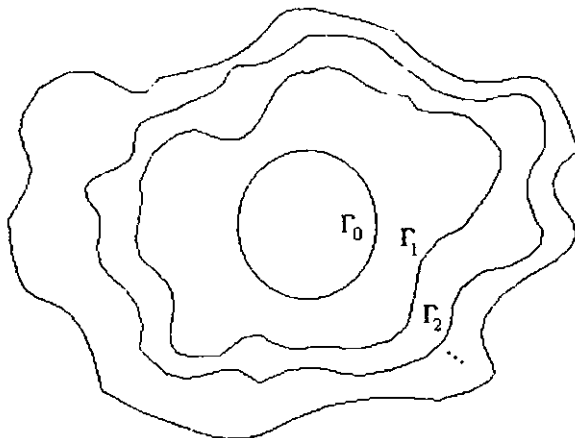


Figura 4.4.1. Las imágenes de Γ_0 , bajo f_c , se encuentran en $A(\infty)$.

La primera consideración de la figura 4.4.1 es que $\Gamma_0 \subset \Gamma_1$, lo cual mostraremos junto con el lema 1.

Demostración del Lema 1.

El lema 1 dice que si $|z| > 2$, entonces $z \in A(\infty)$.

Debemos mostrar que si $|z| > 2$, entonces $|f_c(z)| > k|z|$, para $k \geq 1$. Supóngase que $k = 1.001$. Tenemos que $|z| > 2$, $|c| < 1/4$.

Supongamos que $|z^2 + c| \leq k|z|$, entonces $\left| \frac{z^2 + c}{z} \right| \leq k$.

Aplicando la siguiente regla

$$|z| - |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$$

tenemos que

$$\left| z - \frac{c}{z} \right| \leq \left| z + \frac{c}{2} \right| \leq k$$

$$\left| z - \frac{1}{4|z|} \right| \leq k$$

Al suponer que z toma el valor 2, y que $k = 1.001$, obtenemos

$$2 - 1/8 < k \Rightarrow 1.875 > k.$$

Por lo tanto,

$$|f_c(z)| > k|z|.$$

Aplicando f_c sucesivamente a $|f_c(z)| > k|z|$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f_c^2(z)| &> k|f_c(z)| > k^2|z| \\ &\vdots \\ |f_c^n(z)| &> k^n|z| \end{aligned}$$

y de esta manera garantizamos que $z \in A(\infty)$. De esto, entendemos que si

$$|f_c(z)| > k|z|,$$

entonces $f(\Gamma_0) = \Gamma_1 \supset \Gamma_0$.

Demostración del Lema 2.

Para esta demostración tengamos en cuenta que para un z dado su órbita es

$$f_c(z) = z^2 + c$$

$$f_c^2(z) = [z^2 + c]^2 + c = [f_c(z)]^2 + c$$

$$f_c^3(z) = [z^2 + c]^2 + c = [f_c^2(z)]^2 + c$$

$$\dots$$

$$f_c^n(z) = [f_c^{n-1}(z)]^2 + c$$

El cero es el único punto crítico de f_c y entonces $|f_c^n(0)| < 2$ para toda $n \geq 0$.

Debemos probar que la órbita de 0 se encuentra en un círculo de radio 2, y por esto, la órbita de cero no se va al infinito.

De este modo, la órbita para $z = 0$, es

$$|0|, |c|, |c^2 + c|, |(c^2 + c)^2 + c|, \dots$$

Como $|c| < \frac{1}{4}$, debemos demostrar que $f_c^n(0) < \delta$, para un $\delta > 0$. Con esto demostraremos que la órbita de cero es menor a 2.

Supongamos que $|c| < \delta$, entonces $\frac{1}{4} < \delta$. Supóngase que $f_c^n(0) < \delta$, entonces tenemos que demostrar que si

$$f_c^{n+1}(0) < \delta,$$

entonces

$$|f_c^{n+1}(0)| < \delta.$$

En principio, tenemos que

$$|f_c^n(0)| = |[f_c^{n-1}(0)]^2 + c|$$

$$|f_c^{n-1}(0)| = |[f_c^n(0)]^2 + c|$$

Ahora,

$$|[f_c^{n-1}(0)]^2 + c| \leq |[f_c^n(0)]^2 + c| \leq |[f_c^n(0)]|^2 + |c| < \delta^2 + |c| < \delta.$$

Tomemos $\delta^2 + |c| < \delta$ de la desigualdad anterior, con lo cual encontraremos el valor de δ .

Resolviendo $\delta^2 - \delta + |c| = 0$, vemos que

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4|c|}}{2} > \delta$$

Paso 1. $|f_c(0)| = |c| < \delta$, es decir, $|c| < \frac{1 + \sqrt{1 - 4|c|}}{2}$. Resolviendo $4|c| = 0$, obtenemos $|c| = 0$. De esto vemos que

$$\frac{1}{2} < \delta < \frac{1 + \sqrt{1 - 4|c|}}{2} \quad (4.4.1)$$

Paso 2. $|[f_c^n(0)]^2 + c| \leq |[f_c^n(0)]^2| + |c| < \delta^2 + |c| < \delta$.

Esto satisface la desigualdad (4.4.1) y, por lo tanto, demuestra que la órbita de 0 es menor a 2, es decir se encuentra dentro del círculo de radio 2■.

Demostración del Lema 3.

La demostración del lema 3 se deduce de las demostraciones que hemos hecho sobre los lemas 1 y 2. Esto es, la curva

$$\Gamma_0 = \{z: |z| = 3\} \text{ está en } \Lambda(\infty) \blacksquare.$$

Demostración del Lema 4.

La demostración del Lema 4 se ve a partir del hecho de que

$$|f_c^n(z)| > k^n |z|$$

es decir,

$$|f_c^n(z)| \rightarrow \infty, \text{ cuando } n \rightarrow \infty \blacksquare.$$

Demostración del Lema 5.

La demostración del Lema 5 se ve también con la demostración del Lema 2. Es decir, para $z = 0$, tenemos que

$$|f_c^n(0)| < 2, \text{ para toda } n \geq 0.$$

Por lo tanto, la órbita de 0 permanece acotada■.

Veamos ahora cómo se comportan las imágenes de Γ_0 en $\Lambda(\infty)$.

Como la curva Γ_0 es un círculo de radio 3, tenemos Γ_0 que es una curva simple y cerrada.

Supongamos que la curva $\Gamma_1 = f_c(\Gamma_0)$ es también simple y cerrada, entonces $f_c^k(\Gamma_0) = \Gamma_k$ es también simple y cerrada.

Analicemos ahora el comportamiento de la k -ésima imagen de Γ_0 . Sea Γ_k una curva en $\Lambda(\infty)$. La figura 4.4.2 muestra esta curva.

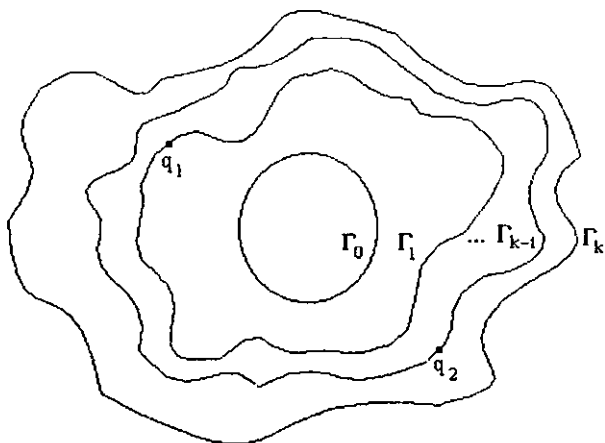


Figura 4.4.2. Imágenes de Γ_0 bajo f_c .

Sea w un punto en Γ_k . Este punto tiene siempre dos preimágenes q_1 y q_2 en Γ_{k-1} . La razón de esto es que

$$z^2 + c = w, \quad (\text{o sea } f_c(z) = w).$$

$$z = \pm\sqrt{w-c}$$

Es decir, para un punto $z \in \Gamma_{k-1}$, hay un punto imagen w , bajo $f_c(z)$, en Γ_k . Las dos preimágenes de w son $z_1 = \sqrt{w-c}$ y $-z_1$. En particular, $f_c(0) = c$ es el único punto que no tiene dos preimágenes.

Para que Γ_k sea una curva conexa necesitamos que su preimagen Γ_{k-1} no se interseque a sí misma en algún punto de ella. Esto es, no debe ocurrir lo que se observa en la figura 4.4.3, en Γ_{k-1} .

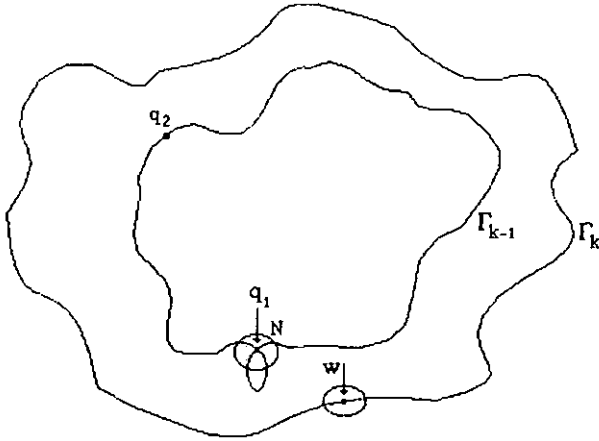


Figura 4.4.3. La curva Γ_{k-1} se interseca a sí misma formando un “lazo”.

Sean q_1 y q_2 las dos preimágenes en Γ_{k-1} de $w \in \Gamma_k$. Consideremos $q_1 \in \Gamma_{k-1}$ y que $(f(q_1))' \neq 0$. Si sucediera que $f'(q_1) = 0$, estaríamos diciendo que $0 \in A(\infty)$, lo cual no es cierto, según el lema 1, ya que la órbita de 0 no está en la cuenca de atracción del infinito.

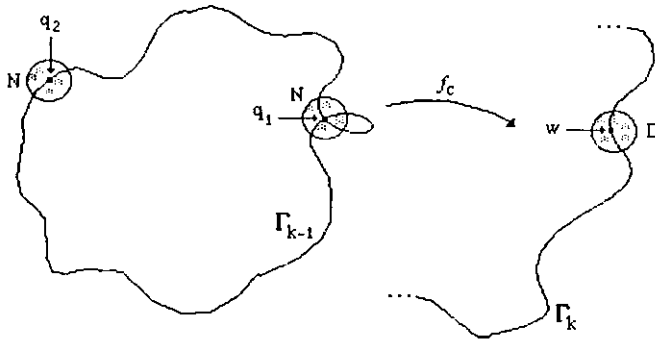


Figura 4.4.4. Esta situación no ocurre.

Luego, existe una vecindad N de q_1 tal que $N(q_1) \rightarrow D(w)$. Como $N(q_1) \rightarrow D(w)$ debe ser homeomorfa, la situación de la figura 4.4.4 no ocurre. Esto es, la vecindad $N(q_1)$ no es mapeada en la vecindad $D(w)$.

Si la curva Γ_{k-1} tuviera la forma de la figura 4.4.5

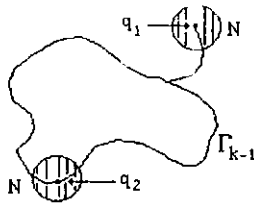


Figura 4.4.5. Curva no conexa.

y si $f_c(\Gamma_{k-1})$ fuera la curva de la figura 4.4.6

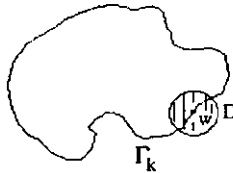


Figura 4.4.6. Curva conexa

y supusiéramos que

$$N(q_1), N(q_2) \rightarrow D(w).$$

estaríamos equivocados, ya que tampoco esto es cierto. Por lo tanto, las curvas

$$\Gamma_2, \Gamma_3, \dots \in A(\infty)$$

son curvas simples si Γ_0 y Γ_1 son simples.

Segunda parte

En la segunda parte de la demostración de la proposición 4.4.1 tomaremos las preimágenes de Γ_0 y veremos que el conjunto de Julia es una curva conexa.

Supongamos que Γ_0 es un círculo muy grande en la cuenca de atracción del infinito. Todas las preimágenes de Γ_0 están contenidas en el interior de Γ_0 , incluso el conjunto de Julia. El propósito de tomar las imágenes inversas de Γ_0 es "acorrallar" al conjunto de Julia y luego demostrar que $J(f)$ es una curva conexa. Esta idea se aprecia en la figura 4.4.7.

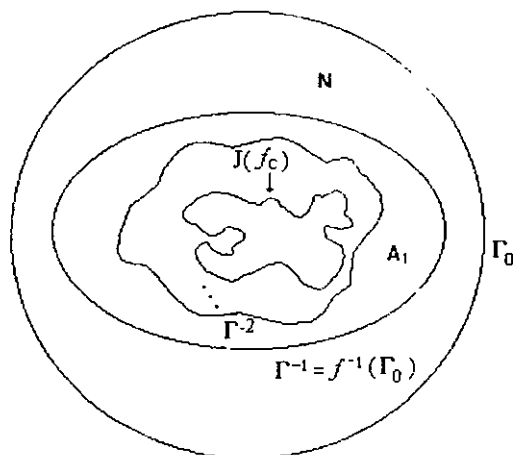


Figura 4.4.7. La curva $\Gamma_0 \in A(\infty)$ contiene en su interior a las curvas Γ^{-1} , Γ^{-2} , incluso al conjunto de Julia.

Sea $N \in A(\infty)$ el anillo definido por las curvas Γ_0 , y Γ^{-1} .

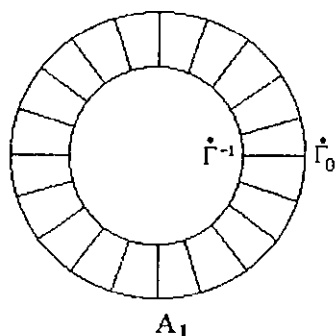


Figura 4.4.8. Llenamos la región A_1 por muchos rayos perpendiculares a $\hat{\Gamma}_0$ y a $\hat{\Gamma}^{-1}$.

Sea ahora A_1 la región entre $f^{-1}(\hat{\Gamma}_0) = \hat{\Gamma}^{-1}$ y $f^{-2}(\hat{\Gamma}_0) = \hat{\Gamma}^{-2}$. Entonces $f: A_1 \rightarrow N$ en la forma 2 a 1.

Tomemos ahora la sucesión

$$\text{int } \dot{\Gamma}_0$$

$$\text{int } \dot{\Gamma}^{-1} \subset \text{int } \dot{\Gamma}_0$$

$$\frac{\text{int } \dot{\Gamma}^{-2}}{D_{-2}} \subset \frac{\text{int } \dot{\Gamma}^{-1}}{D_{-1}} \subset \frac{\text{int } \dot{\Gamma}_0}{D_0}$$

$$\dots \subset D_{-2} \subset D_{-1} \subset D_0$$

El límite definido por

$$D_{-\infty} = \bigcap_{i=0}^{\infty} D_{-i}$$

es un conjunto conexo (por topología) y su frontera es J_c que por lo tanto es conexa ■.

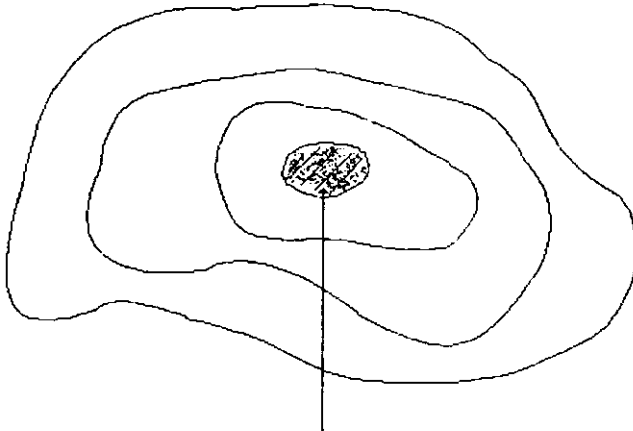


Figura 4.4.9. Representación del límite $D_{-\infty} = \bigcap_{i=0}^{\infty} D_{-i}$

Ahora veremos que si $|c| > 2$ $J(f)$ es desconexo.

Teorema 4.4.2 Supongamos que $|c| > 2$. Entonces la órbita de 0 escapa a infinito bajo f_c .

Demostración. Restrinjamos ahora nuestra atención para el caso $|c| > 2$. Sea D el disco cerrado

$$\{z : |z| \leq |c|\}$$

Entonces, el conjunto de Julia lleno de f_c está dado por

$$D \cup f_c^{-n}(D)$$

donde $f_c^{-n}(D)$ es la preimagen de D bajo f_c^n , esto es,

$$f_c^{-n}(D) = \{z \mid f_c^n(z) \in D\}$$

Esto se sigue ya que si $z \notin D$ entonces, existe $k \geq 0$ tal que $f_c^k(z) \notin D$ y así, la órbita de z tiende a infinito por el corolario 4.4.3. De esta manera, para comprender a K_c sólo necesitamos entender la intersección infinita ■.

El siguiente corolario es una refinación del criterio de escape que vimos en la proposición 4.3.4 de la sección 4.3.

Corolario 4.4.2. Supongamos que $|z| > \max\{|c|, 2\}$. Entonces,

$$|f_c^n(z)| > (1+\lambda)^n |z|,$$

y así,

$$|f_c^n(z)| \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Aquí observamos que si $|f_c^k(z)| > \max\{|c|, 2\}$ para $k \geq 0$, entonces podemos aplicar este corolario a $|f_c^k(z)|$ para encontrar:

Corolario 4.4.3. Supongamos que para un $k \geq 0$ tenemos $|f_c^k(z)| > \max\{|c|, 2\}$. Entonces,

$$|f_c^{k+1}(z)| > (1+\lambda) |f_c^k(z)|.$$

Así,

$$|f_c^n(z)| \rightarrow \infty, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Este corolario nos da un algoritmo para calcular el conjunto de Julia lleno de f_c para alguna c . Calculamos la órbita de un punto z que cumpla que $|z| \leq |c|$. Si para un n , $f_c^n(z)$ cae fuera del círculo de radio $\max\{|c|, 2\}$ garantizamos que la órbita escapa a infinito. A partir, de esto decimos que z no está en el conjunto de Julia lleno. Por otro lado, si $|f_c^n(z)|$ no rebasa esta frontera, entonces, por definición z está en K_c .

Digamos ahora que C denota el círculo de radio $|c|$ con centro en el origen. Notemos que C es la frontera de D . Lo primero que tomamos en cuenta es preguntarnos ¿qué forma tiene $f_c^{-1}(D)$?

Sea $\gamma = \{f_c^{-1}(z) \mid |z| = |c|\}$, es decir, γ es la preimagen del círculo $|z| = |c|$ con centro en el origen. Para obtener el conjunto γ debemos sustraer c de algún punto w en C . Esto tiene el efecto de trasladar el círculo C que está centrado en $-c$ y en efecto, pasa a través del origen.

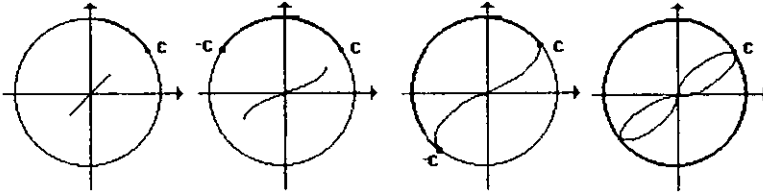


Figura 4.4.10. La preimagen de $|z| = |c|$ tiene la forma de un "8".

Vemos que el 0 es la única preimagen de un punto c en $|z| = |c|$, mientras que todos los puntos en $|z| = |c|$ tienen dos preimágenes, una positiva y la otra negativa.

Entonces, calculamos las raíces cuadradas complejas de todos los puntos de este nuevo círculo, como se explicó en el capítulo 1. Esto produce una curva en forma de "8", como se ve en la figura 4.4.10.

Aquí γ está en el interior del disco $|z| \leq |c|$. Ahora, decimos que γ es precisamente la curva que tiene forma de "8"

Notamos que $f_c^{-1}(C)$ está totalmente contenida en el interior de D y también vemos que los puntos dentro de D son mapeados al interior de γ . Una pregunta que podemos hacernos es la siguiente, ¿a dónde van los puntos fuera de γ (y dentro de γ)? La respuesta es que estos puntos son mapeados al exterior del círculo C , es decir, tienden a infinito. De esto, estos puntos están en el conjunto estable. Además, por el Principio del mapeo en la frontera, $f_c^{-1}(D)$ es precisamente esta figura del "8", junto con sus dos pétalos interiores. Denotemos a estos dos pétalos por I_0 y I_1 como se ve en la figura 4.4.11.

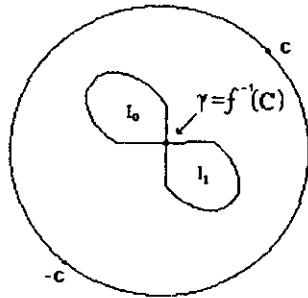


Figura 4.4.11. La imagen inversa del círculo C es una curva con forma de "8".

Notemos que I_0 y I_1 están simétricamente ubicados con respecto al origen y que f_c mapea cada uno de ellos en D en la forma 1 a 1 .

Ahora, elegimos un $r < |c|$ de forma tal que γ está contenida en el interior del disco D dado por $|z| \leq r$. La preimagen del disco D , consiste de dos conjuntos simples y convexos, uno en cada pétalo del "8".

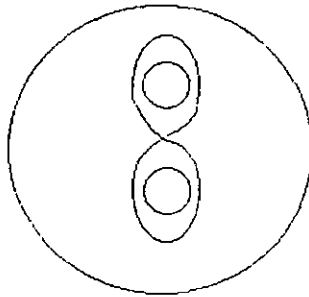


Figura 4.4.12. La preimagen del disco D son dos curvas, una en cada pétalo del "8".

Cada uno de estos discos son mapeados difeomórficamente sobre $|z| \leq r$.

Ya que f_c es 1 a 1 en I_0 y I_1 , y $f_c^{-1}(C)$ está contenida en el interior de D , se sigue que $f_c^{-2}(C)$ es un par de curvas pequeñas en forma de "8", una contenida en el interior de I_0 y el otro en el interior de I_1 .

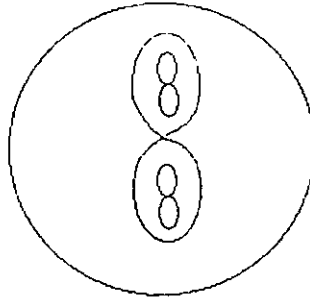


Figura 4.4.13. $f_c^{-2}(C)$ consiste de dos curvas en forma de "8".

Invocando de nuevo el Principio del mapeo en la frontera, encontramos que $f_c^{-2}(D)$ consiste de dos figuras en forma de "8" junto con sus cuatro pétalos, los que definimos como:

$$\begin{aligned}
 I_{00} &= \{z \in I_0 \mid f_c(z) \in I_0\} \\
 I_{01} &= \{z \in I_0 \mid f_c(z) \in I_1\} \\
 I_{10} &= \{z \in I_1 \mid f_c(z) \in I_0\} \\
 I_{11} &= \{z \in I_1 \mid f_c(z) \in I_1\}
 \end{aligned}$$

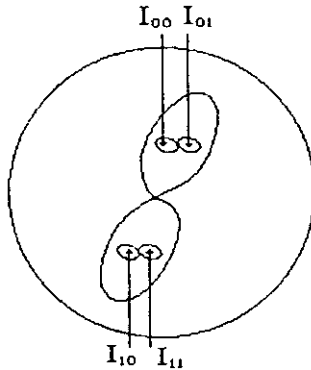


Figura 4.4.14. Construcción de I_{00} , I_{01} , I_{10} , y de I_{11} .

Continuando de esta manera, vemos que $f_c^{-n}(D)$ consiste de 2^{n-1} figuras en forma de "8" junto con 2^n pétalos.

4.4.3. Propiedad de intersección de anidamiento. Supongamos que B_1, B_2, \dots son intervalos cerrados no vacíos. Supongamos que $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, entonces,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \text{ es no vacío.}$$

Para la demostración, consúltese [1].

Definamos ahora lo siguiente:

$$I_{s_0, s_n} = \{z \in D \mid z \in I_{s_0}, f_c(z) \in I_{s_1}, \dots, f_c^n(z) \in I_{s_n}\}$$

Para mostrar que I_{s_0, s_n} es un pétalo cerrado que está contenido en el interior del pétalo $I_{s_0, s_{n+1}}$. De esto, el I_{s_0, s_n} forma una *intersección de anidamiento* de conjuntos cerrados. Por lo tanto,

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0, s_n}$$

es un conjunto no vacío.

Este hecho es análogo para la Propiedad de intersección de anidamiento. De esta manera, si

$$z \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0, s_n}$$

entonces

$$f_c^k(z) \in D \text{ para toda } k.$$

Así, $z \in K_c$.

Llamamos un componente de K_c a una intersección infinita de figuras en forma de "8" y sus pétalos dada por

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_n, s_n}$$

Notamos que dos componentes cualquiera de K_c son necesariamente disjuntos.

A la inversa, un $z \in K_c$ debe estar en uno de estos componentes. Como consecuencia, podemos asociar una cadena infinita de ceros y unos a algún z mediante la regla $S(z) = S_0 S_1 \dots S_n$ dada

$$z \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_n, s_n}$$

Hemos mostrado que hay una correspondencia natural entre puntos en la secuencia en dos símbolos y los componentes de K_c . La idea básica de esto es la siguiente: el conjunto de Julia completo es una intersección anidada de curvas en forma de "8" y sus pétalos, como se muestra en la figura 4.4.15.

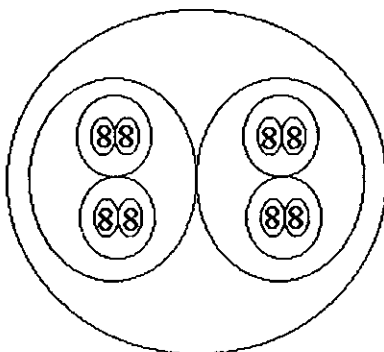


Figura 4.4.15. El conjunto de Julia es una intersección anidada de curvas en forma de "8" cuando $|c| > 2$.

Aceptando el hecho de que cada componente de K_c es un punto cuando $|c| > 2$, vemos que el conjunto de Julia y el conjunto de Julia lleno son idénticos.

La figura 4.4.15 indica que f_c también es extremadamente sensitiva a condiciones iniciales en su conjunto de Julia cuando $|c| > 2$. En verdad, dado un $z \in K_c$ y una pequeña bola conteniendo a z en su interior, podemos escoger k grande de manera que el pétalo I_{s_n, s_n} conteniendo a z está también contenido en esta bola. Pero, entonces f_c^k mapea este pétalo sobre el disco entero D , e iteraciones subsecuentes expanden este disco más allá. Eventualmente un punto en

el plano está situado en la imagen de este pétalo bajo una iterada de f_c lo suficientemente grande. De aquí f_c es supersensitiva en J_c .

Remarcamos el hecho de que, cuando $|c| > 2$, la órbita de cero tiende a infinito.

4.4.4. Ejemplos y contraejemplos.

Diferentes tipos de comportamientos de Julia.

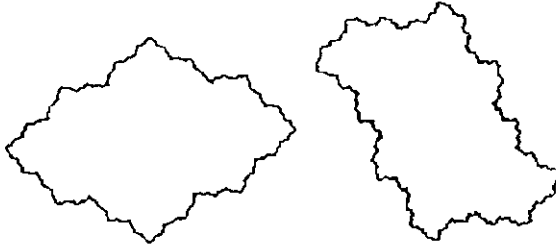


Figura 4.4.4.1. Para $c = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10}i$ y $c = \frac{1}{2}i$ los conjuntos de Julia de f_c son una curva conexa.

Ejemplo 4.4.4.1. Consideremos el caso de un punto periódico atractor. El Conjunto de Julia es necesariamente muy diferente en este caso. Sea $P(z) = z^2 - 1$. Nótese que $P(0) = -1$ y $P(-1) = 0$. Ya que $P(0)' = 0$ se sigue que 0 y -1 están en una órbita periódica atractora de periodo 2.

Hay dos puntos fijos expansivos que son:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Un punto fijo repulsor:

$$z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

que es el punto en que se divide la cuenca de atracción de 0 y -1. Podemos mostrar que hay dos curvas cerradas simples γ_0 y γ_1 en $J(P)$ las cuales rodean a 0 y -1 respectivamente.

Las curvas γ_0 y γ_1 se encuentran en el punto fijo $z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. A diferencia de la situación para f_c , la cuenca de atracción de 0 no es completamente invariante. Una preimagen del interior de γ_0 es γ_1 , pero aquí debe haber también otra que rodea a la otra preimagen de 0, es decir, 1. Esto es, hay una tercer curva cerrada simple en $J(P)$ alrededor de 1 también. Ahora, 1 y -1 deben tener un par de preimágenes distintas cada una rodeada por una curva cerrada simple en

$J(P)$. Continuando de esta forma, vemos que $J(P)$ debe contener curvas cerradas simples infinitamente.

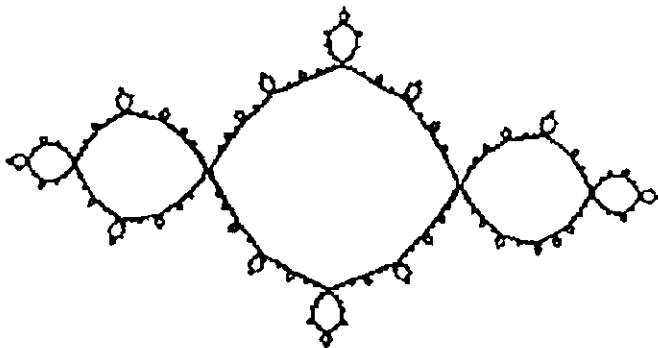


Figura 4.4.4.1. El conjunto de Julia de $P(z) = z^2 - 1$.

El hecho de que hay infinitos componentes conexos en el conjunto estable de P no es una coincidencia, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.4.4.1. Supongamos que P es un polinomio de grado 2. Entonces el conjunto estable de P consiste de 1, 2, o infinitos componentes conexos.

Para la demostración consúltese [1] y [18].

Se puede probar (ver [6]) que existe c real tal que satisface que: *el punto crítico 0 es eventualmente periódico*. En este caso, f_c tiene puntos periódicos densos (expansivos) en el intervalo $[-p, p]$, es decir es caótica en $[-p, p]$.

Ejemplo 4.4.4.2. Consideremos el polinomio $f_c(z) = z^2 + c$ para c real.

El valor de c que produce este fenómeno es $c \approx -1.543689$ y $-p \approx -0.83928675$. La gráfica de f_c se muestra en la figura 4.4.4.2.

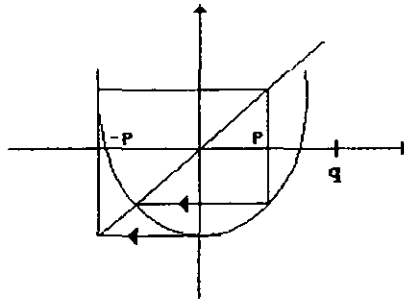


Figura 4.4.4.2.

De esto, el intervalo $[-p, p]$ está contenido en $J(f_c)$. Por invarianza hacia atrás, todas las preimágenes de este intervalo están también en $J(f_c)$. De hecho, $J(f_c)$ es la cerradura de este conjunto de intervalos.

Luego, f_c tiene un segundo punto fijo expansivo en q , y utilizando el análisis gráfico, es fácil ver que

$$[-q, q] \subset J(f_c)$$

Ya que $c \in (-q, q)$, la preimagen de este intervalo consiste de dos intervalos, $[-q, q]$ en sí y un segundo intervalo localizado simétricamente con centro en 0 pero en el eje imaginario.

Este intervalo es la preimagen de $[-q, c]$. Ahora, la preimagen de este par de intervalos consiste de cuatro curvas, como se muestra en la figura 4.4.4.3.

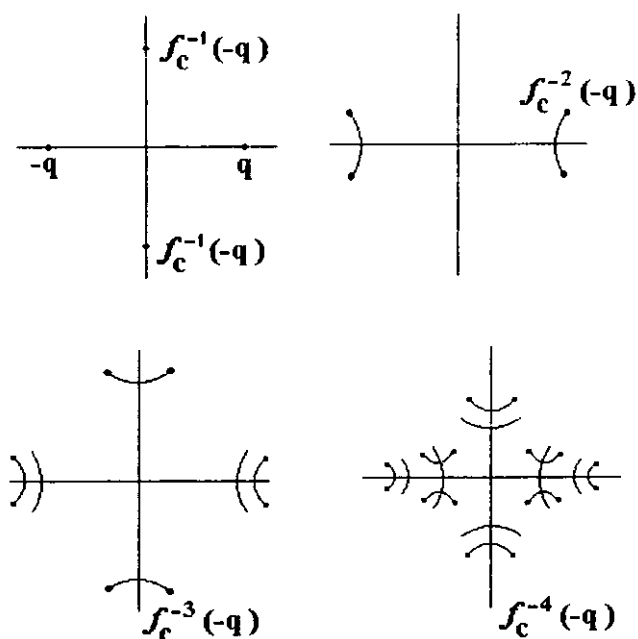


Figura 4.4.4.3. Iteración inversa del intervalo $[-q, q]$.

Estas curvas se intersectan en 0 y en $f_c^{-1}(0)$. Siguiendo vemos que $f_c^{-n}([-q, q])$ consiste de 2^n segmentos curvos disjuntos. Estos segmentos se encuentran, uno con otro, en las preimágenes de 0 y los puntos finales de estos segmentos son preimágenes del punto fijo q .

Por los resultados de la sección 4.3, $J(f_c)$ es la cerradura de este conjunto de preimágenes. Note que a diferencia de los ejemplos previos, $f_c^{-n}([-q, q])$ no acota una región en \mathbb{C} .

Si seguimos iterando hacia atrás sucesivamente las curvas de la figura 4.4.4.3 obtendremos una dendrita (figura 4.4.4.4).

Las estructuras como de árbol de

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f_c^n[-q, q]$$

se llama *dendrita*. El conjunto de Julia completo de este mapeo se ve en la figura 4.4.4.4.



Figura 4.4.4.4. El conjunto de Julia de f_c para $c \approx -1.5$ (una dendrita).

Estos ejemplos ilustran la dependencia del conjunto de Julia en la órbita del punto crítico, al menos para mapeos cuadráticos. Cuando el punto crítico tiende a un punto fijo atractor o a un punto periódico, el conjunto de Julia es la cerradura de una o muchas curvas cerradas simples. Y cuando el punto crítico es eventualmente periódico, pero no periódico, el conjunto de Julia es una dendrita como se ve en la figura 4.4.4.4.

Para el polinomio $f_i(z) = z^2 + i$, los puntos $-1+i$ y $-i$ están en una órbita periódica expansiva de periodo 2. Note que $f_i^2(0) = -1+i$. Así, 0 es eventualmente periódico de nuevo. El conjunto de Julia de f_i comparte muchas de las propiedades del ejemplo previo. El conjunto de Julia de f_i se muestra en la figura 4.4.4.5.

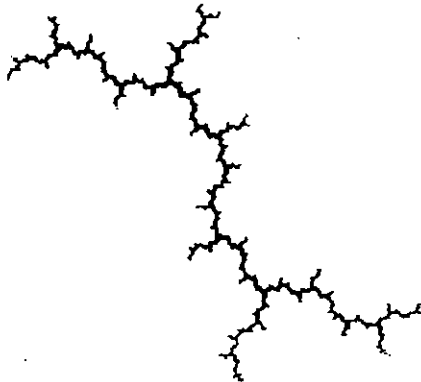


Figura 4.4.4.5. El conjunto de Julia de $f_i(z) = z^2 + i$.

La órbita de z bajo f_c está acotada si existe K tal que $|f_c^n(z)| < K$ para toda n . De otra forma la órbita es no acotada.

Para la familia cuadrática, la órbita de un punto en el interior y sobre el círculo unitario está acotado.

Como se ha visto, los polinomios cuadráticos exhiben una cantidad enorme de diferentes fenómenos, puntos fuera del círculo unitario tienen órbitas no acotadas.

Definición 4.4.4.1. La órbita de z bajo f_c es *supersensitiva* si una bola abierta B con centro en z tiene la propiedad de que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f_c^n(B)$$

será toda C con la excepción de al menos un punto.

Para la función cuadrática, sólo puntos en el círculo unitario tienen órbitas supersensitivas. Si $|z| < 1$, podemos elegir una pequeña bola abierta con centro en z que está completamente dentro del círculo unitario. Entonces la órbita de un punto en esta bola nunca sale del conjunto $\{z: |z| \leq 1\}$. Si $|z| > 1$, podemos encontrar de manera similar una pequeña bola abierta de $\{z: |z| \leq 1\}$ cuyas órbitas permanecen fuera de esta región.

Definición 4.4.4.2. El conjunto de Julia lleno de f_c es el conjunto de puntos cuyas órbitas están acotadas. El conjunto de Julia de f_c es la frontera del conjunto de Julia lleno.

Denotamos el conjunto de Julia lleno por K_c . Para $f_0(z) = z^2$ hemos mostrado que

$$J_0 = \{z: |z| = 1\}$$

Ahora, denotamos

$$K_0 = \{z: |z| \leq 1\}$$

Notemos que K_c está formado precisamente de los puntos cuyas órbitas son supersensitivas en J_0 y que f_0 es caótica en J_0 . Además el conjunto K_c también está formado de los puntos que son estables, que están en las regiones acotadas de Fatou.

4.5. Obteniendo el Conjunto de Julia lleno.

La función cuadrática $f_c(z) = z^2 + c$ tiene una cantidad enorme de conjuntos de Julia llenos que son mucho más interesantes que los que acabamos de describir.

Veremos ahora el camino a seguir para obtener los conjuntos de Julia llenos. Para esto retomaremos la definición de K_c .

Consideremos una malla rectangular de puntos en una región del plano complejo. Para cada punto en esta malla, calculamos la órbita correspondiente y checamos si tiende a infinito o no. Si la órbita no escapa, decidimos entonces que el punto original está en K_c , y lo graficamos en color negro. Para decidir si la órbita escapa o no, utilizamos el Criterio de Escape (Proposición 4.3.4 de la sección 4.3).

4.5.1. Algoritmo para graficar el Conjunto de Julia lleno.

Definir un número máximo N de iteraciones. Para cada punto z en la malla, calculamos los N primeros puntos en la órbita de z . Si $|f_c^i(z)| > \max\{|c|, 2\}$, para $i \leq N$, entonces detenemos la iteración y el color del punto z será blanco. Si $|f_c^i(z)| \leq \max\{|c|, 2\}$ para toda $i \leq N$, entonces el color para el punto z será negro.

Los puntos de color blanco tienen órbitas que escapan a infinito, mientras que los puntos negros permanecen acotados, al menos para las primeras N iteraciones. Así, los puntos en color negro dan una aproximación al conjunto de Julia lleno.

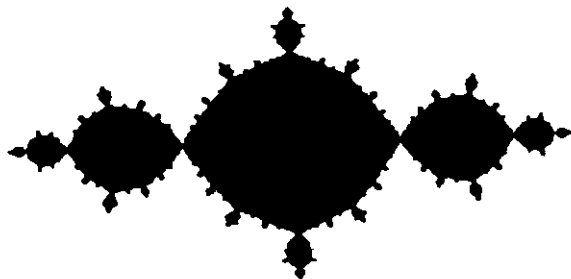
Observaciones.

1. Este algoritmo no está libre de pruebas, pues puede haber puntos que requieran un número de iteraciones mayor a N para salir de la frontera $\max\{|c|, 2\}$. En este caso el algoritmo grafica en negro estos puntos aunque no estén en K_c .
2. A pesar de esto, usualmente es mejor establecer el menor número de iteraciones cuando utilicemos este algoritmo. Por lo general, 30 ó 60 iteraciones son suficientes para dar una buena aproximación de K_c , excepto en los casos donde K_c tiene un punto periódico indiferente. Para amplificar porciones del conjunto de Julia debemos aumentar el valor de N .
3. Para definir los colores para los conjuntos de Julia completos el algoritmo es diferente. El conjunto de Julia lleno se colorea en negro, y los puntos cuyas órbitas escapan, tienen un color que depende del número de iteraciones para que la órbita rebase $\max\{|c|, 2\}$.

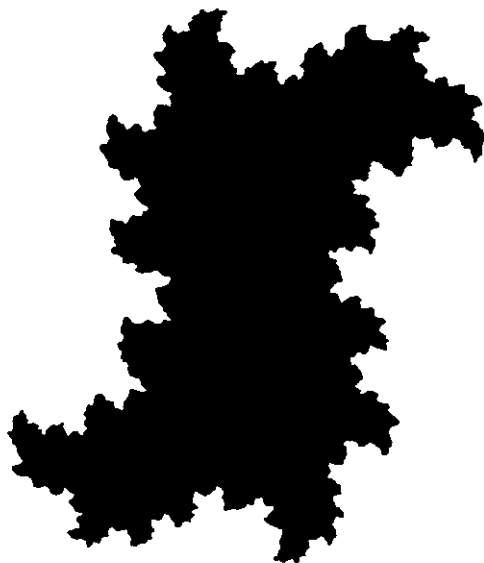
Los puntos con órbitas que escapan más lentamente tienen un color rojo. Los puntos con órbitas que escapan lentamente son color violeta. Los colores naranja, amarillo, verde, azul e

indigo se asignan de acuerdo al número de iteraciones necesarias para que estas órbitas escapen.

Observación 1. Para diferentes valores de c , K_c adquiere una amplia variedad de formas. A menudo K_c consiste de un gran conjunto conexo en el plano. Algunas de estas regiones se aprecian en la figura 4.5.1.



(a) $c = -1$



(b) $c = 0.3 - 0.4 i$

Figura 4.5.1. Los conjuntos de Julia llenos para f_c , $c = -1, 0.3 - 0.4i$



(c) $c = 0.360284 + 0.100376 i$



(d) $c = -0.1 + 0.8 i$

Figura 4.5.1. Los conjuntos de Julia llenos para f_c . Con $c = 0.360284+0.100376i, -0.1+0.8i$.

Estos conjuntos son diferentes por completo de los que encontramos para $c = 0$ y $c = 2$. Ahora la frontera es mucho más compleja. Si amplificamos una porción de la frontera de alguna de las imágenes de los conjuntos de Julia llenos, veremos un patrón definitivo de autosimilaridad.

Observación 2. Los conjuntos de Julia para f_c aparecen como conjuntos autosimilares que son en sí fractales (esto es en realidad un teorema).

Observación 3. K_c consiste de algunos puntos aislados para muchos valores de c , como vimos en el teorema 4.4.2, esto sucede cuando la órbita \bar{O} bajo f_n tiende a ∞ . También K_c parece cambiar abruptamente de una pieza conexas a muchos puntos aislados y piezas para ciertos valores de c .

4.6. Los Conjuntos de Julia como un repulsor.

Al calcular los conjuntos de Julia completos, comenzamos siempre definiendo una región cuadrada en el plano complejo con centro en el origen, cuyos lados tienen longitud 4. Por el Criterio de Escape, las órbitas de puntos fuera de esta región escapan cuando $|c| > 2$.

Como ya hemos visto, los conjuntos de Julia muestran ciertas propiedades:

1. Los puntos periódicos expansivos fueron densos en el conjunto de Julia.
2. f_c es supersensitiva en algún punto de J_c .

El hecho de mostrar que un punto periódico expansivo está en J_c nos lleva de alguna manera a un segundo algoritmo que calcula la imagen de un conjunto de Julia.

4.7. Estimaciones de Cauchy

Estimaciones de Cauchy. Supóngase que $P(z)$ es un polinomio complejo y que $|P(z)| \leq M$ para todo z en el disco $|z - z_0| \leq r$. Entonces

$$|P'(z_0)| < \frac{M}{r}$$

donde $M = \max \{|c|, 2\}$. Para la demostración ver [6].

4.8. Algoritmo para calcular el conjunto de Julia de $f_c(z)$.

1. Elija un $z \in \mathbb{C}$ y un punto $z_0 \in J_c$. Sea U una vecindad de z_0 . Por la supersensitividad, existe $w \in U$ y una iterada k tal que $f_c^k(w) = z$.

Esto significa que dado un z en \mathbb{C} , podemos encontrar preimágenes de z bajo f_c^k para k grande, arbitrariamente cercana a un punto en J_c ¹.

De este modo, para encontrar puntos en J_c , elegimos un punto z en \mathbb{C} y calculamos sus órbitas hacia atrás. Cada punto w , excepto c , tienen dos preimágenes bajo f_c , éstas son $\pm\sqrt{w-c}$.

Así, para calcular la órbita hacia atrás de w , elegimos arbitrariamente una de las dos preimágenes en cada etapa.

4.9. Algoritmo de iteración inversa.

1. Tomar un punto z en \mathbb{C} .
2. Calcular 10,000 puntos en la órbita inversa de z , eligiendo aleatoriamente una de las dos posibles preimágenes de f_c en cada etapa.
3. Graficar todos los puntos de las primeras 100 iteraciones.

Este algoritmo trabaja bien cuando $|c| > 2$, a diferencia del que vimos para calcular el conjunto de Julia lleno.

¹ $z = 0$ es la única excepción para f_c , el cual se tiene a sí mismo como preimagen para $f_0(z) = z^2$. De aquí, el cero no tiene preimágenes bajo f_c^k que estén cercanas a J_c .

Conclusiones

El estudio de la teoría de Sistemas Dinámicos hace más interesante el análisis de fenómenos en el medio ambiente. La manera en que la matemática aborda un comportamiento en la naturaleza genera otra forma de describir mejor un fenómeno.

Es importante tener en cuenta que todo en el universo obedece a una ley matemática que de alguna forma pone una frontera entre lo que llamamos el orden y el comportamiento dinámico que conocemos como caos.

Dentro de la región del orden, podemos observar cómo se comporta una ecuación matemática que represente a algún fenómeno, y será muy sencillo predecir el estado de la ecuación, es decir, su valor. Esto será posible siempre y cuando los cálculos se realicen en la región del orden, pues a medida que nuestro análisis vaya obteniendo resultados “cerca” de la frontera entre el orden y el caos, será impredecible cada valor.

La ecuación matemática tendrá un comportamiento totalmente aleatorio cuando vaya entrando a la región caótica. De esta forma, será complicado determinar qué pasará con la ecuación en cada punto (valor) que tome dentro de esta región.

Cuando una función compleja entra al caos, por lo general genera valores que son “arrojados” a una región cercana “alrededor” del infinito. En tal caso podemos entender que el fenómeno que se está describiendo tiene un comportamiento totalmente fuera de orden.

De esta investigación los aspectos importantes a destacar son:

- ⇒ El análisis paso a paso de una función compleja, desde que entra del orden al caos. O dicho de otra forma, la iteración de un sistema dinámico complejo.
- ⇒ Los ejemplos reales de sistemas dinámicos y su comportamiento caótico.
- ⇒ La representación gráfica del orden y del caos.

La Geometría Fractal, como parte de las matemáticas cada vez se desarrolla más. Las aplicaciones que se le pueden dar, son muy diversas, por ejemplo, la predicciones meteorológicas, la compactación de imágenes, etc. La Geometría Fractal apoyada en la computadora, es la herramienta que se adentra en la parte caótica que se quiere estudiar y nos muestra el aspecto de un fenómeno que se encuentra en el caos.

Bibliografía

[1] L. Devaney Robert.

A First Course in Chaotic Dynamical Systems, Theory and Experiment.

Addison Wesley Publishing Co. Inc.

[2] F. Barnsley Michael, B. Mandelbrot Benoit, L. Devaney Robert, Peitgen Heinz-Otto.

The Beauty Of Fractals Images of Complex Dynamical Systems.

Springer-Verlag. New York.

[3] Becker Karl-Heinz, Dörfler Michael.

Dynamical Systems And Fractals. Computer Graphics Experiments in Pascal.

Cambridge University Press. 1989.

[4] Peitgen, Jürgens, Saupe.

Fractals for the Classroom Part One. Introduction to Fractals and Chaos.

Springer-Verlag,

[5] Peitgen, Jürgens, Saupe.

Fractals for the Classroom Part Two.

Springer-Verlag.

[6] L. Devaney Robert.

An introduction to Chaotic Dynamical Systems

Addison Wesley Publishing Co. Inc.

[7] Sheng Xiang, J. Spurr Michael.

Symmetries of Fractals. The Mathematical Intelligencer Vol. 18 pp. 35-51 (Articulo). Num. 1..

Springer-Verlag New York. 1996.

[8] J. Crilly A, A. Earnshaw R, Jones H.

Applications of Fractals and Chaos..

Springer-Verlag

[9] Cherbit G.

Fractals Non-Integral Dimensions and Applications.

John Wiley & Sons.

- [10] Wiggins Stephen.
Chaotic Transport in Dynamical Systems.
Springer-Verlag.
- [11] V. Ahlfors Lars.
Complex Analysis an Introduction to the Theory of Analitic Functions of One Complex Variable.
Mc Graw-Hill Book Company Inc. 1953.
- [12] Feder Jens.
Fractals.
Plenum Press
- [13] Timothy I. Wegner.
El Mundo de los Fractales.
Anaya Multimedia
- [14] Jay Greenberg Marvin.
Euclidean and Non-Euclidean Geometries Development and History.
W. H. Freeman and Company
- [15] J. Trudeau Richard.
The non Euclidean Revolution.
Birkhäuser
- [16] T. Stevens Robert.
Fractal Programming in C.
M&T Books
- [17] Hoviss Daniel, Oliver Dick.
Fractal Graphics for Windows.
Sams Publishing

[18] Barnley Michael.

Fractals Everywhere.

Academic Press Inc. 1988.

[19] McGuire Michael.

An Eye for Fractals. A Graphic & Photographic Essay.

Addison-Wesley Publishing Company. 1990.

[20] J. Lewis Donald, Kaplan Wilfred.

Cálculo y Algebra Lineal Vol. I.

Limusa

[21] I. Maltsev A.

Fundamentos de Algebra Lineal.

Siglo Veintiuno Editores S.A.

[22] V. Churchill Ruel, Ward Brown James.

Complex Variables And Applications.

Mc Graw- Hill International Editions.

[23] L. Devaney Robert.

Chaos Fractals and Dynamics Computer Experiments in Mathematics.

Addison Wesley.

[24] Falconer Kenneth. *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications.*

Wiley & Sons. 1990.