105
21

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"MODELOS DINAMICOS PARA EL CAMBIO ESTRUCTURAL DE LA ECONOMIA Y LA POLITICA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

DIDIER ANTONIO TOSCANO GONZALEZ

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. PALOMA ZAPATA LILLO

1998

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Modelos Dinámicos para el cambio Estructural de la Economía y la Política"

realizado por Didier Antonio Toscano González

con número de cuenta 9362207-3, pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Paloma Zapata Lillo	Paloma Zapata
Propietario	M. en C. Sergio Hernández Castañeda	
Propietario	M. en I.D.O. María del Carmen Hernández Ayuso	Ma del Carmen Hdz Ayuso
Suplente	Act. Haydeé Guadalupe Vielma Hernández	Haydeé Vielma
Suplente	Mat. César Eduardo Sousa Mondragón	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en A.P. Pilar Alonso Reyes

Quiero dedicar este trabajo a mis padres:

José Antonio Toscano Jarquín
Alma Leticia González Galicia

Por su amor, su apoyo incondicional y por el gran ejemplo que me han dado como personas, como padres, como amigos y como profesionistas. De los cuales me siento muy orgulloso como hijo y como ser humano y le doy gracias a Dios de poder estar a su lado y poder entregarles este trabajo como agradecimiento a todo su esfuerzo y dedicación. Los quiero mucho.

Gracias papá, gracias mamá.

A Christian y Giovanni que siempre han sido grandes hermanos, por todos los momentos buenos que hemos pasado juntos, por sus juegos, por sus risas, por sus bromas, sus abrazos, su cariño y apoyo.

A mis cuatro abuelitos maravillosos:

(paternos)

Ignacio Toscano De la Torre
Gloria Jarquín Martínez

(maternos)

Mario González Marquez
Elodia Galicia Zamora

Con todo cariño les agradezco todo el apoyo y amor que han tenido a la familia Toscano González.

A mis familiares.

A mis amigos, grandes amigos:

Jorge (Giro)
Ramiro
Omar
Esteban(Estenancito)
Vladimir (Cuñado)
Ulises
Antonio (Toño)

A mis amigas:

Noemí (Mimí)
Haydeé (Hermanita y también mi sinodal)
Norma (Momish)
Laura (Lauris)
Ingrid

Porque todos ustedes son la neta y siempre he podido compartir grandes momentos con ustedes.

A mis amigos en general

Quiero agradecer especialmente a mis sinodales:

M. en C. Paloma Zapata Lillo

M. en C. Sergio Hernández Castañeda

M. en I.D.O. Carmen Hernández Ayuso

Act. Haydeé Vielma Hernández

Mat. César Sousa Mondragón

Por haber dedicado su tiempo a este trabajo.

A todos mis profesores que con su tiempo y dedicación ayudaron a mi formación

Al verano de la investigación científica por la gran experiencia.

A los dos años que viví en la Paz B. C. S.

A la música, que me acompaño en los momentos buenos y malos

A la UNAM, mi segunda casa

A la Facultad de Ciencias

A MEXICO, mi Patria

CONTENIDO

CAPITULO I

INTRODUCCION A LA TEORIA DE JUEGOS

CAPITULO II

CONVENCIONES Y SU RELACION CON LA TEORIA DE JUEGOS

CAPITULO III

PROCESOS DE ADAPTACION CON TEORIA DE GRAFICAS

CAPITULO IV

PROCESOS DE ADAPTACION CON PROCESOS ESTOCASTICOS

CAPITULO V

COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LOS PROCESOS DE ADAPTACION

CAPITULO VI

EJEMPLOS Y APLICACIONES

APENDICE

INTRODUCCION

En la sociedad existen costumbres o conductas que la mayoría de la gente sigue con frecuencia.

Estas conductas se han adoptado porque existen ciertas situaciones que se repiten constantemente y con el tiempo la sociedad ha aprendido a reaccionar ante éstas y ha obtenido resultados satisfactorios, de manera que se ha adoptado una respuesta convencional ante tal situación. A este tipo de conductas se les denominan convenciones.

La sociedad ha tomado a las convenciones como conductas válidas, que solas se hacen cumplir y no necesitan de ser normas legalmente obligatorias para que la mayoría de la gente las siga.

Algunos convenciones pueden ser por ejemplo que la fabricación de los automóviles en una región han adoptado por poner el volante del lado izquierdo y por ello se maneja por la derecha, otros ejemplos son los comportamientos típicos de reacción al pánico financiero en una bolsa de valores en un momento determinado, las relaciones obrero patronales, las relaciones entre una clase social y otra, los roles de parejas como algunas actitudes machistas también actitudes políticas en una situación especifica, etc.

En este trabajo se estudian las convenciones de una manera general y se plantea esta problemática desde el punto de vista de la Teoría de Juegos ya que la sociedad o algunos sectores de ella pueden verse como jugadores, las conductas como estrategias y los resultados que la sociedad obtiene como una función de pago. Una convención es entonces un equilibrio al que los jugadores han llegado en el juego. Este juego tiene que ser jugado repetidamente el número suficiente de veces para que la sociedad tenga las suficientes evaluaciones y así poder llegar a una convención de cómo jugarlo. Pero en un juego los equilibrios no siempre existen y si existen varios no se puede saber a priori cuál de ellos será el que la sociedad seleccione como convención. Entonces aquí se presentan resultados de cómo la sociedad puede establecer sus convenciones bajo ciertas condiciones.

En el capítulo I se establece algo de teoría básica de la Teoría de Juegos, la necesaria para estudiar a las convenciones desde éste punto de vista. En el capítulo II se plantea formalmente el problema de las convenciones como una secuencia de juegos y se establecen todas la hipótesis necesarias acerca de cómo la sociedad juega el juego, cuál es la forma de registrar los resultados, de qué manera deciden los jugadores las estrategias a utilizar, qué se considera un equilibrio y una convención para la sociedad y en que momento la sociedad ha establecido una convención. En este capítulo se supone una condición fuerte al proceso que consiste en que los jugadores nunca cometen errores o nunca experimentan al momento de decidir entre una estrategia u otra. A esta primera dinámica de jugar el juego repetidamente se le llamará proceso ó juego de adaptación sin errores. También en este capítulo se muestra mediante un ejemplo que la existencia de equilibrios en el juego de adaptación no es condición suficiente para que la sociedad llegue a una convención.

En el capítulo III se muestra que a la dinámica del proceso de adaptación se le puede asociar una gráfica cuyos vértices representan todas las formas en que la sociedad se puede comportar en un intervalo de la historia y las aristas se asocian a las formas en que la sociedad puede ir evolucionando conforme transcurre el tiempo. Se demuestra un teorema que establece condiciones suficientes sobre un proceso de adaptación para asegurar que la sociedad eventualmente llegue a una convención, a saber que la "gráfica de mejores réplicas" del juego que se está repitiendo sea "débilmente acíclica" y que haya una relación entre el "tamaño de la muestra" y "el de memoria" suficientemente pequeña.

En el capítulo IV se le añade al proceso de adaptación la hipótesis de que los jugadores a veces cometen errores o experimentan, a este proceso se le llama juego ó proceso de adaptación con errores. Además se estudia esta dinámica mediante la construcción de una matriz de Markov y se relacionan algunos conceptos establecidos en los capítulos anteriores con conceptos de Procesos Estocásticos. Con ello se demuestra que este proceso es irreducible, es decir, la sociedad tiene posibilidad de llegar a cualquier situación y se pueden calcular sus probabilidades en cualquier lapso de tiempo incluyendo una distribución estacionaria límite no importando donde se encuentre inicialmente, más aún, se muestra que el proceso de adaptación con errores se parece más al de adaptación sin errores conforme los errores se vayan haciendo más pequeños y se da una caracterización de la distribución límite. Se hace notar que en el proceso de adaptación con errores no existen convenciones permanentes a través del tiempo pero algunas pueden repetirse la mayoría de las veces.

En el capítulo V se demuestra que el teorema de Freidlin y Wentzell da una técnica de selección del equilibrio al que la sociedad tiene más posibilidades de establecer a través del tiempo, mediante la construcción de 2 gráficas que se relacionen entre sí y encontrando en una de ellas la antiarborescencia de rutas más cortas sobre todos los vértices que nos dará la convención a la que la sociedad le será más factible adoptar cuando la probabilidad de cometer errores es pequeña. Esto se da porque el proceso de adaptación con errores tiene conectada de alguna manera todas las posibilidades en que la sociedad se puede comportar en un intervalo de tiempo y así es posible comparar entre una y otra convención las probabilidades que tienen de ser seleccionadas, contrario al proceso de adaptación sin errores cuyas posibilidades de comportamiento pueden estar desconectadas y no es posible comparar entre una y otra convención por lo que la elección estará sujeta a las condiciones iniciales del proceso de adaptación.

Finalmente en el capítulo VI se trabajan ejemplos de juegos de 2x2 donde se dan algunas aplicaciones a la economía y la política en donde se muestra que la matriz de pagos es determinante para que se dé una convención determinada. De hecho se da un algoritmo general para juegos de 2x2 con dos equilibrios de Nash, el cual es más corto y que encuentra la convención que será seleccionada por la sociedad la mayor parte del tiempo. También se muestra un ejemplo de un juego 3x3 y dos más de juegos con n jugadores.

CAPITULO I

INTRODUCCION A LA TEORIA DE JUEGOS

En este capítulo, el análisis de la teoría de juegos se restringirá a los juegos finitos en su forma normal.

Definiciones Básicas

Sea $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ el *conjunto de jugadores o agentes* ; $n \in Z^+$

Para cada jugador $i \in I$ sea $S_i = \{1, 2, \ldots, m_i\}$ el *conjunto de estrategias puras del jugador i*, $i = 1, \ldots, n$; con $m_i \geq 2$. Por notación se escribirá cada estrategia del conjunto S_i con números enteros.

Un *vector de estrategias puras s* será de la forma $s = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ donde $s_i \in S_i$; es decir, s_i es una estrategia del jugador i.

El conjunto de vectores de estrategias puras $S = X_{i \in I} S_i$ es entonces el producto cartesiano de los conjuntos de estrategias puras de cada jugador. A veces el conjunto S se denomina el *espacio de estrategias puras del juego*.

Para cada vector de estrategias puras $s \in S$ y cada jugador $i \in I$ sea $\pi_i(s) \in \Re$ el *pago asociado al jugador i*.

La colección finita de números reales $\pi_i(s)$ define *la función de pago del jugador i*

$$\pi_i : S \to \Re \qquad\qquad \forall\, i \in I.$$

La combinación de las funciones de pago de los jugadores definen la *función de pago del juego*

$$\pi : S \to \Re^n$$

donde se asigna a cada vector de estrategias s el vector de pagos

$$\pi(s) = (\pi_1(s), \pi_2(s), \ldots, \pi_n(s))$$

Entonces, en términos de estrategias puras; un *juego en forma normal* se define como una triada

$$G = (I, S, \pi)$$

donde I es el conjunto de jugadores, S el espacio de estrategias y π la función de pago.

Especialmente en el caso de tener 2 jugadores se puede denotar la función de pago en 2 matrices A, B de $m_1 \times m_2$ donde $A = (a_{hk})$ denotará el pago para el jugador 1, $\pi_1(h, k)$ para $h \in S_1$, $k \in S_2$ y $B = (b_{hk})$ el pago para el jugador 2, $\pi_2(h, k)$.

Geometría de las Estrategias Mixtas

Una *estrategia mixta* para el jugador i es una distribución de probabilidad sobre el conjunto S_i de estrategias puras.

Además como el conjunto S_i es finito para todos los jugadores podemos representar cualquier estrategia mixta x_i para el jugador i como un vector en $\Re^{m_i}$ donde la r-ésima coordenada pertenece a $\Re$ y es la probabilidad que le asigna el jugador i a su r-ésima estrategia pura.

El conjunto de estrategias puras a los cuales es asignada una probabilidad positiva para alguna estrategia mixta x, se denomina como el *soporte de* x_i y se denotará por

$$C(x_i) = \{ h \in S_i : x_{ih} > 0 \}$$

Dado que las probabilidades son no negativas (para x_{ih} : $h = 1, \ldots, m_i$) y suman 1 , el conjunto de vectores de probabilidad se definirá como

$$\Delta_i = \{ x_i \in \Re^{+mi} : \sum_{h=1,mi} x_{ih} = 1 \}$$

Δ_i se denomina *simplejo unitario.*

El conjunto Δ_i tiene dimensión $m_i - 1$ ya que cualquier entrada puede escribirse como 1 menos la suma de las demás entradas.

Los *vértices o esquinas* de Δ_i son los vectores unitarios en el espacio $\Re^{mi}$, su notación será e^k_i que representa la estrategia mixta del jugador i que asigna probabilidad 1 a la estrategia k y cero a las demás estrategias.

El conjunto Δ_i se puede ver como el conjunto de combinaciones convexas de sus vértices: es decir, cada $x_i \in \Delta_i$ se puede escribir como

$$x_i = \sum_{h=1\ mi} x_{ih} \cdot e^h_i$$

Si un conjunto $X_i \subseteq \Delta_i$ es combinación convexa de algún subconjunto propio de estrategias puras, entonces X_i se le denomina como una *cara* de Δ_i .

Se define el *interior relativo* de Δ_i como

$$\boldsymbol{int}(\Delta_i) = \{ x_i \in \Delta_i : x_{ih} > 0 , \forall h \}$$

(es relativo porque visto como un subconjunto de $\Re^{m}$ el interior de Δ_i es vacío, no así visto como un subconjunto del hiperplano $H_i = \{ x_i \in \Re^{mi} : \sum_{h=1,mi} x_{ih} = 1 \}$)

Las estrategias que están en el interior relativo son llamadas *estrategias interiores o estrategias completamente mixtas* : y así, si $x_i \in \boldsymbol{int}(\Delta_i) \Rightarrow C(x_i) = S_i$

El conjunto de estrategias no interiores en Δ_i es llamado la *frontera de* Δ_i denotado por

$$\boldsymbol{bd}(\Delta_i) = \{ x_i \in \Delta_i : x_i \notin \boldsymbol{int}(\Delta_i) \}$$

en este caso si $x_i \in \boldsymbol{bd}(\Delta_i) \Rightarrow C(x_i) \subsetneq S_i$ propiamente.

Un *vector de estrategias mixtas* es un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde cada entrada es una estrategia mixta para el jugador i.

El conjunto de vectores de estrategias mixtas es el *espacio de estrategias mixtas*, denotado por

$$\Theta = \mathrm{X}_{i \in I}\ \Delta_i$$

Como cada Δ_i tiene dimensión $m_i - 1$, entonces Θ es un conjunto en $\Re^m$ ($m = \sum_{i=1,n} m_i$) y tiene dimensión $m - n$.

Un vector $x \in \Theta$ es *interior o completamente mixto* si cada entrada x_i es interior, es decir

$$Int\,(\Theta) = \mathrm{X}_{i \in I}\, int\,(\Delta_i)$$

También se puede escribir $C(x) = \mathrm{X}_{i \in I}\; C(x_i) \subseteq S$ para el soporte de $x \in \Theta$.

La *frontera de* Θ, $bd(\Theta)$ es el conjunto de elementos de Θ que no están en el interior.

Notación.- Escribiremos $(x \mid x_i)$ para un vector $x \in \Theta$ donde se especifica que el jugador **i** está jugando la estrategia x_i, mientras que los otros jugadores están jugando las estrategias de acuerdo al vector $x \in \Theta$.

Funciones de Pago de Estrategias Mixtas

Sabemos que cuando los jugadores tienen una estrategia mixta se tiene una probabilidad x_{ih} de que el jugador **i** juegue con la estrategia pura h. Cada jugador tiene una distribución de probabilidad que es independiente de las distribuciones de los otros jugadores. La probabilidad de que un vector de estrategias puras $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$ sea jugado, dado que cada jugador tiene una estrategia mixta y que todas estas estrategias forman el vector de estrategias $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es :

$$x(s) = \Pi_{i=1,n}\, x_{i,si}$$

donde cada $x_{i,si}$ es la probabilidad que asigna el jugador **i** a su estrategia s_i, dado que se está jugando $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Entonces el *valor esperado de pago para el jugador* **i** asociado al vector de estrategias mixtas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Theta$ es :

$$u_i(x) = \sum_{s \in S} x(s) \cdot \pi_i(s)$$

el número $u_i(x)$ será el pago esperado dado $x \in \Theta$.

Tenemos que

$$u_i(x) = \sum_{k=1,mj} u_i(x \mid e^k_j) \cdot x_{jk} \quad . \;\; . \;\; . \quad (1.\,1)$$

ya que jugar una estrategia pura k es equivalente a jugar la estrategia mixta e^k_j.

En otras palabras, el pago $u_i(x)$ se puede calcular como la suma ponderada de los pagos que el jugador **i** obtiene cuando el jugador **j** juega con la estrategia e^k_i. Las ponderaciones son las probabilidades que el jugador **j** asigna a la estrategia pura k en su estrategia mixta x_j.

La ecuación (1. 1) asigna un número a todos los vectores en $\mathfrak{R}^m$, no solo a los elementos de Θ: entonces se puede extender una función $u : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$ que es la *función de pago del jugador* **i**.

La *función de pago de las estrategias mixtas* será una función $u : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ definida por:

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$$

Como alternativa para un juego de estrategias puras $G = (I, S, \pi)$ se extiende el concepto de un juego de estrategias mixtas como $G = (I, \Theta, u)$

Relaciones de Dominación y Mejores Réplicas

En los juegos en donde los jugadores compiten hay dos tipos de ordenes parciales para los conjuntos de estrategias de los jugadores.

Dominación Débil y Estricta

Una estrategia se dice que *domina débilmente* a otra si la primera nunca obtiene un pago menor que la segunda estrategia y que a veces obtiene un pago mayor. Una estrategia se dice *no dominada* si ninguna estrategia la domina débilmente.

Formalmente se dice que $y_i \in \Delta_i$ domina débilmente a x_i si $u_i(x \mid y_i) \geq u_i(x \mid x_i)$ $\forall x \in \Theta$, con desigualdad estricta para algunos $x \in \Theta$. Una estrategia x_i es no dominada si no existe tal estrategia y_i.

Una estrategia $y_i \in \Delta_i$ *domina estrictamente* a otra $x_i \in \Delta_i$ si $u_i(x \mid y_i) > u_i(x \mid x_i)$ $\forall x \in \Theta$.

Se puede dar el caso en que una estrategia pura sea dominada por una estrategia mixta sin que sea dominada por ninguna estrategia pura.

Ejemplo 1. 1 : Considérese un juego con matriz de pago para el jugador 1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

la tercer estrategia para el jugador 1 no es dominada por ningún otra.

Sin embargo si $u_1(x \mid e^3_1) = x_{21}(1) + x_{22}(1) = 1$

y tomamos $y = (½, ½, 0) \in \Delta_1$ $\quad u_1(x \mid y_1) = u_1(x \mid e^1_2)\, x_{21} + u_1(x \mid e^2_2)\, x_{22}$

$= [\,½(3) + ½(0) + 0(1)]\, x_{21} + [\,½(0) + ½(3) + 0(1)]\, x_{22} = 3/2\, x_{21} + 3/2\, x_{22}$

$= 3/2 > u_1(x \mid e^3_1)$

Un postulado racional básico es que los jugadores racionales nunca usan estrategias estrictamente dominadas.

Mejores Réplicas

Una *mejor réplica pura* para el jugador i en laa estrategia $y \in \Theta$ es una estrategia pura $s_i \in S_i$, tal que ninguna otra estrategia pura disponible para el jugador i le da un pago mayor contra $y \in \Theta$.

Esto define una correspondencia de mejores estrategias puras para el jugador i.

$$\beta_i : \Theta \rightarrow P(S_i)$$

que mapea cada vector de estrategias mixtas $y \in \Theta$ al conjunto

$$\beta_i(y) = \{ h \in S_i : u_i(y \mid e^h_i) \geq u_i(y \mid e^k_i) \quad \forall \; k \in S_i \}$$

de mejores réplicas puras para el jugador i dado y.

Como cada estrategia mixta es una combinación convexa de estrategias puras y $u_i(y \mid x_i)$ es lineal en x_i se tiene que para cualquier $y \in \Theta$, $x_i \in \Delta_i$, y $h \in \beta_i(y)$:

$$u_i(y \mid x_i) = \sum_{k=1,mi} u_i(y \mid e^k_i)\, x_{ik} \quad \le \quad \sum_{k=1,mi} u_i(y \mid e^h_i)\, x_{ik}$$

$$= u_i(y \mid e^h_i) \sum_{k=1\, mi} x_{ik} \quad = \quad u_i(y \mid e^h_i)$$

Entonces $\beta_i(y) = \{ h \in S_i : u_i(y \mid e^h_i) \ge u_i(y \mid x_i)\ \forall\, x_i \in \Delta_i \}$

Dada una estrategia $y \in \Theta$, una *mejor réplica mixta* para el jugador i es una estrategia mixta $x_i \in \Delta_i$ tal que no hay otra estrategia mixta que le dé al jugador un mejor pago bajo el supuesto que los demás juegan con la estrategia y_j.

Por linealidad cualquier combinación convexa de mejores réplicas puras es una mejor réplica mixta.

Entonces se define la correspondencia de mejores réplicas de estrategias mixtas

$$\underline{\beta}_i : \Theta \multimap P(\Delta_i)$$

que mapea cada vector de estrategias mixtas en un subconjunto de Δ_i; de hecho en alguna cara de Δ_i; que dada la estrategia y, es generada por estrategias puras que son mejores réplicas.

$$\underline{\beta}_i(y) = \{x_i \in \Delta_i : u_i(y \mid x_i) \ge u_i(y \mid z_i)\ \forall\, z_i \in \Delta_i\}$$

$$= \{ x_i \in \Delta_i : x_{ih} = 0,\ \forall\, h \notin \beta_i(y) \} = \{ x_i \in \Delta_i : C(x_i) \subseteq \beta_i(y) \}$$

entonces como $\underline{\beta}_i(y)$ es una cara ; $\underline{\beta}_i(y) \subseteq \Delta_i$.

La correspondencia combinada de mejores réplicas puras es $\beta : \Theta \to P(S)$, y se define como el producto cartesiano de las mejores réplicas de todos los jugadores, es decir

$$\beta(y) = \mathrm{X}_{i\in I}\, \beta_i(y) \subseteq S$$

y la correspondencia $\underline{\beta} : \Theta \to P(\Theta)$ se define como

$$\underline{\beta}(y) = \mathrm{X}_{i\in I}\, \beta_i(y) \subseteq \Theta$$

Equilibrio de Nash

Definición.- Sea C un subconjunto de $\Re^m$ no vacío. Sea $f : C \multimap P(C)$ una correspondencia, se dice que $x \in C$ es un punto fijo de f si $x \in f(x)$.

Teorema de Kakutani. Sea C un subconjunto de $\Re^m$ no vacío. Sea $f : C \multimap P(C)$ una correspondencia cuya gráfica es cerrada; $\forall\, x \in C$, $f(x) \neq \varnothing$ y es convexo. Entonces f tiene un punto fijo.

La demostración de este teorema se encuentra en " *Modern Mathematics and Economic Analysis* " de Blaine Roberts & Shulze David (1973).

Definición.- $x \in \Theta$ es un equilibrio de Nash si $x \in \underline{\beta}(x)$; es decir, x es un punto fijo de $\underline{\beta}$.

Se sigue que si $x \in \Theta$ es un equilibrio de Nash, entonces toda estrategia pura que se encuentre en el soporte de cada componente x_i de x es una mejor réplica para x.

$$s_i \in C(x_i) \Rightarrow s_i \in \beta_i(x)$$

Se denotará al Equilibrio de Nash como Θ^{NE}.

Teorema. $\Theta^{NE} \neq \emptyset$

Para demostrar este resultado es suficiente demostrar que la correspondencia de mejores réplicas β tiene al menos un punto fijo, es decir que la correspondencia β cumple con las hipótesis del teorema de Kakutani.

Tenemos que $\beta(x) \neq \emptyset$ ya que dada una estrategia **x**, un jugador siempre tiene una mejor réplica a esta estrategia pues el conjunto de estrategias es finito. El producto cartesiano de las mejores réplicas de cada jugador es f(x).

La imagen de β es convexa; es decir, dada $\alpha \in [0, 1]$ y $x_1, x_2 \in \mathrm{Im}(\beta) \Rightarrow \varpi = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in \mathrm{Im}(\beta)$.

<u>*Demostración*</u>.

Tenemos que $u_i(x_1) \geq u_i(y)$ y $u_i(x_2) \geq u_i(y)$ $\forall y \in \Theta$ $\forall i \in I$

Entonces $u_i(\varpi) = u_i(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) = \alpha\, u_i(x_1) + (1-\alpha)\, u_i(x_2) \geq \alpha\, u_i(y) + (1-\alpha)\, u_i(y)$
$= u_i(y)$

$\forall y \in \Theta$ $\forall i \in I$

$\therefore$ $\mathrm{Im}(\beta)$ es convexa.

Por último demostraremos que la correspondencia $\beta : \Theta \to P(\Theta)$ tiene una gráfica cerrada

<u>*Demostración*</u>.

Sea $\{(x_n, y_n)\}_{n=1,\infty}$ una sucesión convergente en la gráfica de la correspondencia $\beta : \Theta \to P(\Theta)$.

Si $\{(x_n, y_n)\}_{n=1,\infty}$ converge a (x, y) basta demostrar que $y \in \beta(x)$

Como (x_n, y_n) pertenece a la gráfica de β para toda $n \in \aleph$ tenemos que

$$u_i(x_n \mid y'_n) \geq u_i(x_n \mid z_i)$$

$$\lim_{n\to\infty} u_i(x_n \mid y^i_n) \geq \lim_{n\to\infty} u_i(x_n \mid z_i)$$

y como u_i es continua implica

$$u_i(x \mid y^i) \geq u_i(x \mid z_i) \qquad \forall z_i \in \Delta_i \quad \forall i \in I$$

entonces (x, y) pertenece a la gráfica de β

$\therefore$ la gráfica de β es cerrada

$\therefore$ β tiene un punto fijo lo cual implica que $\Theta^{NE} \neq \emptyset$.

El juego de adaptación que se construirá se basa en el llamado juego ficticio, por lo que damos enseguida una breve descripción de éste.

Juego Ficticio

Sea $G=(I, S, \pi)$ un juego n personal en su forma estratégica y sea S_i el conjunto de estrategias disponibles para el jugador **i** .

Supondremos que cada jugador tiene una función de utilidad $\pi_i(s)$ para una n-ada de estrategias $s = (s_1, s_2, \ldots \ldots, s_n) \in X_{i=1,n} S_i$.

$t = 1, 2, \ldots$ denota periodos sucesivos de tiempo. El juego G se realiza una vez en cada periodo.

Al inicio del juego, cada agente jugará con una estrategia pura tomada al azar. A partir del segundo periodo los jugadores tendrán un criterio distinto para decidir con que estrategia pura jugarán. Este criterio esta basado en la construcción de una estrategia mixta **w** que se forma a partir de la distribución de frecuencias con que las estrategias de cada jugador han aparecido conforme se ha jugado el juego.

En el periodo t, cada jugador **i** escoge una estrategia pura que se denotará por $s_i(t)$ del conjunto de estrategias puras S_i que sea una mejor réplica pura a la estrategia mixta w.

A este proceso se le llama ***juego ficticio***. Es un juego que se repite constantemente y en donde los jugadores basan sus decisiones en toda la información que "la historia" del juego puede aportar para construir una distribución de frecuencias.

Es posible estudiar el comportamiento de las decisiones de cada jugador conforme el juego ha sido jugado un número considerable de veces.

Con el tiempo las expectativas y la forma de jugar de los jugadores pueden converger a un equilibrio.

CAPITULO II

CONVENCIONES Y SU RELACION CON LA TEORIA DE JUEGOS

Una convención es un patrón de conducta supuesto dentro de un grupo social, el cual es costumbre, y que sola se hace cumplir. Todos concuerdan con ese patrón de conducta y todos esperan que los demás concuerden : además, cada elemento de ese grupo social se conforma con la convención, siempre y cuando los demás elementos también estén conformes. Tales patrones de conducta pueden ser por ejemplo, ciertas costumbres sociales en una comunidad que sin ser leyes obligatorias son aceptadas y seguidas por todos los miembros de la comunidad.

Las convenciones no tienen porque ser simétricas, es decir existen convenciones en que los demás no tienen que hacer necesariamente lo que uno haga, un ejemplo puede ser una convención de tipo obrero patronal. En cada tarea de dichas interacciones asimétricas existe una conducta esperada para cada quien, la cual es costumbre. Todos la cumplirán con tal que los demás cumplan la conducta que les corresponde. Bajo éstas circunstancias decimos que la gente sigue una convención. Una convención es un equilibrio con en el que todos cuentan. Además es posible que a veces exista más de un equilibrio.

Existen distintas explicaciones de como la sociedad puede llegar a un equilibrio: algunas de ellas se basan en que algunos equilibrios son "a priori" más razonables que otros. Otro tipo de explicaciones consideran que los agentes o elementos del grupo concentran su atención en un equilibrio porque puede parecer más prometedor o destacado que los demás. Por último las más interesantes cuentan con dinámicas y formulan que con el tiempo las expectativas convergen a un equilibrio conforme se van obteniendo efectos positivos a través de éste.

Si suponemos a los agentes de la problemática como jugadores; a las distintas formas de actuar como un conjunto de estrategias; y a los efectos que se obtienen en una manera de comportarse como un pago; entonces, la problemática o la situación de estudio puede estudiarse como un juego.

Así, el estudio de las convenciones puede tratar de explicarse con la ayuda de la Teoría de Juegos.

Para que un patrón de conducta o una convención pueda darse, es necesario que una situación se repita constantemente, y que los agentes evalúen constantemente los resultados de las distintas maneras en que hayan reaccionado ante tal situación.

Si las convenciones pueden ser tratadas mediante la Teoría de Juegos, los juegos ficticios son los que parecen ser los más indicados para el estudio de estos patrones de conducta; sin embargo, aquí se dará una variación a los juegos ficticios, dicha variación serán los llamados ***procesos ó juegos de adaptación***, que pueden hacer un mejor estudio de las convenciones.

Lo que se busca con los procesos de adaptación es tener hipótesis más reales de las que se tienen en el juego ficticio.

Proceso de Adaptación

Sea $G = (I, S, \pi)$ un juego n personal, donde:

I es el conjunto de n jugadores

S el espacio de estrategias puras (con S_i el conjunto de estrategias puras disponibles para el jugador **i**), y

U la función de pago del juego.

Sea N una población finita de individuos que tiene una partición C de n clases no vacías $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Cada miembro de C_i es candidato a jugar como el jugador i en el juego.

Supongamos que $\forall\, i, j \in C_i$, $\pi_i = \pi_j$.

Sea $t = 1,2,...$ que denote periodos sucesivos de tiempo. El juego G es jugado una vez cada periodo. En el periodo t, un individuo $i \in C_i$ es escogido al azar; con $i = 1, \ldots, n$. y es asignado para jugar como el jugador i en el juego. Será conveniente referirnos al papel en el juego como jugador "i" solamente, aunque la identidad individual cambie de un periodo a otro.

El jugador i escoge una estrategia pura $s_i(t)$ del conjunto de estrategias puras S_i de acuerdo a una regla que se definirá.

A $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t))$ se le llamará *jugada al tiempo t*.

La historia de las jugadas al tiempo t es una secuencia :

$h(t) = (s(1), s(2), \ldots, s(t))$ que llamaremos *secuencia o historia.*

Los jugadores deciden como escoger sus estrategias de la siguiente manera:

Sean k, m $\in Z$ fijos, tal que $1 \leq k \leq m$. En el periodo $t+1$ ($t \geq m$), cada jugador toma una muestra de k jugadas escogidas sin reemplazo de las m jugadas mas recientes; es decir, de una secuencia:
$h(t) = (s(t-m+1), s(t-m+2), \ldots, s(t))$; $h(t)$ es una *secuencia o historia de tamaño m.*

A **m** se le llama el *tamaño de la memoria o la historia* y a **k** el *tamaño de la muestra* .

Sea H , el conjunto de todas las secuencias de tamaño m; $m \in Z$ fijo.

Las muestras se toman en forma independiente para los distintos jugadores. También se supone que cada subconjunto de k antecedentes tiene una probabilidad positiva de ser parte de la información del agente **i** ; $\forall$ **i**.

La fracción **k/m** mide que tan completa es la información con que cuentan los agentes con relación a los antecedentes que sobreviven en el tiempo.

Supongamos que las primeras m jugadas son escogidas al azar; entonces podemos estudiar el proceso de selección al principio del periodo $t = m+1$, para alguna secuencia inicial de m jugadas

$$h(m) = (s(1), s(2), \ldots, s(m))$$

Sucesor. Un sucesor de la secuencia $h \in H$ es cualquier secuencia de jugadas $h' \in H$, obtenido de la eliminación del elemento que esta más a la izquierda de h y añadiendo en la derecha un elemento nuevo.

El proceso de adaptación consiste en moverse de la secuencia en curso h a un sucesor h' en cada periodo de acuerdo con la siguiente regla de transición :

Para cada $s \in S_i$, sea $P_i(s \mid h)$ la probabilidad de que el agente **i** escoja s. Supondremos que $\forall$ i, s y h $P_i(s \mid h)$ no depende de t.

Diremos que la función $P_i(\cdot)$ es una distribución de mejores réplicas puras en el sentido que $P_i(s / h) > 0$ si y solo si existe una muestra h de tamaño k en donde s sea una mejor réplica pura para el jugador **i** . Si s es el elemento que esta más a la derecha de h, la probabilidad de moverse de h a h' es :

$$\begin{aligned} P^0_{hh'} &= \Pi_{i=1,n}\ P_i(s_i \mid h) \\ P^0_{hh'} &= 0 \quad \text{si } h' \text{ no es sucesor de h.} \end{aligned} \qquad \ldots (2.1)$$

El proceso $P^0 = (I, S, \pi, \mathbf{m}, \mathbf{k})$ será llamado *proceso ó juego de adaptación* con memoria **m** y muestra de tamaño **k** .

Un juego de adaptación consiste en un juego n personal fijo que es jugado una vez en cada periodo de tiempo discreto y en donde los jugadores son escogidos al azar de una población grande y finita de individuos.

Cada jugador escoge una estrategia óptima basada en las opiniones acerca del entorno que lo rodea. El jugador o agente forma sus opiniones en la observación con base a lo que otros agentes han hecho en un pasado reciente. Como la recolección de información es costosa, se hace la hipótesis de que cada jugador conoce solo una pequeña parte de la historia del juego esto es, basa sus acciones en una muestra de juegos hechos en periodos de tiempo recientes.

Una forma de imaginar el procedimiento de muestreo es que cada jugador "pregunta a su alrededor" para enterarse de cómo fue jugado el juego en periodos recientes. El proceso de preguntar se detiene cuando el jugador ha aprendido sobre k diferentes jugadas dentro de los últimos m periodos (dicho así, ha alcanzado su capacidad de retener información o la muestra de k jugadas ha alcanzado sus expectativas de información). Otra forma de entender el procedimiento de muestreo es que cada agente puede escuchar pasivamente acerca de ciertos antecedentes y k es el número de antecedentes que llaman la atención de cada jugador.

Las estrategias que los jugadores escogen en el periodo en curso son registradas y el juego es jugado nuevamente en el siguiente periodo por otro grupo de n agentes que es tomado de la misma población la cual es fija.

Cada uno de estos agentes toma una muestra aleatoria de juegos anteriores y reacciona de acuerdo a ella. Las acciones en periodos anteriores sirven de información para los agentes en periodos posteriores. No es necesario suponer que cada subconjunto de k antecedentes de los últimos m tiene igual posibilidad de constituir una información del agente. Por ejemplo, un agente tiene mayor posibilidad de escuchar acerca de antecedentes recientes que de los más lejanos en el tiempo.

De esta manera, cada vez que un agente juega, tiene que empezar de nuevo a buscar información para saber cual es la situación del juego o conflicto.

Se enfatiza que este modelo no tiene nada que ver con el aprendizaje a nivel individual, podemos suponer que una vez que un agente ha tomado parte en el juego, es eliminada la información que tiene sobre el conflicto y entonces el agente puede seguir formando parte del grupo pero sin información previa (teniendo el mismo tamaño de la muestra y misma función de utilidad). Esta suposición no es necesaria desde el punto de vista matemático; pero señala que ignoramos el efecto de aprendizaje a nivel individual.

Por otro lado; la partición *C* tiene por objeto dividir a la población en los distintos roles que se pueden tener en el juego. (por ejemplo en hombres y mujeres ; por edades ; etc.).

Convergencia

Una convención en los procesos de adaptación se puede interpretar como una forma común de jugar el juego; y como una convención es un equilibrio, el equilibrio en juegos es la mejor forma de jugar para cada uno de los jugadores. Si el juego es jugado repetidamente por distintos jugadores que tienen que aprender en cada ocasión: ¿cómo es que pueden establecerse los equilibrios en los juegos de adaptación?, si es que éstos existen.

Definición.- h es una convención en un juego de adaptación si $P^0_{hh'} > 0$ implica $h' = h$.

Observemos que cuando se juega un Equilibrio de Nash estricto m veces en sucesión, hemos caído en una sucesión que es equilibrio del sistema, en el sentido de que seguiremos jugando el equilibrio de Nash indefinidamente porque los jugadores responderán óptimamente a una muestra que solo contiene equilibrios de Nash. Tal sucesión de Equilibrios de Nash estrictos la llamaremos una convención.

Si el proceso de adaptación converge a una convención, entonces el juego debe de tener un equilibrio de Nash en estrategias puras. La existencia de tal equilibrio no es una condición suficiente para la convergencia ; considérese el siguiente ejemplo :

Ejemplo 2. 1 :
Sea la siguiente, una matriz de pagos de un juego bipersonal :

	a	b	c	d
a	2, 1	0, 0	1, 2	−1, −1
b	1, 2	2, 1	0, 0	−1, −1
c	0, 0	1, 2	2, 1	−1, −1
d	− 1, −1	−1, −1	−1, −1	3, 3

Aquí, la estrategia d es una mejor réplica de si misma, pero no lo es para cualquier mezcla de a, b y c, ya que si $x_1, x_2, x_3 \in \Re$, tal que $x_1+x_2+x_3 = 1$ y un jugador tiene una estrategia mixta $(x_1,x_2,x_3,0)$, se tiene que la esperanza de pago para el otro jugador usando la estrategia d es :

$$(-1)x_1+(-1)x_2+(-1)x_3=(-1)\cdot(x_1+x_2+x_3)= -1$$

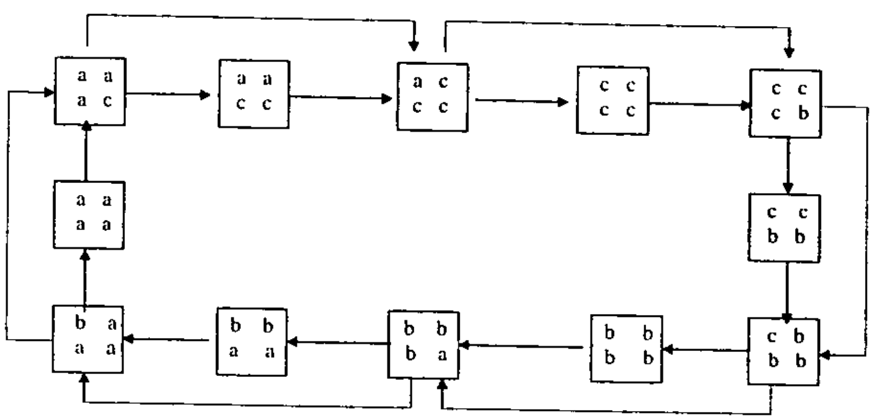
el cual es menor siempre que cualquier pago si se usa una mezcla de a, b ó c , puesto que sus valores son mayores o iguales a cero.

Si el estado inicial no involucra la estrategia d, entonces el juego de adaptación ocurre cíclicamente.

Considere por ejemplo el caso en que m = 2 y k = 1 ; sean las dos primeras jugadas (a, a) y (a, c), el jugador va a tomar de muestra una de las dos elecciones del jugador uno, (ambas son la estrategia a) y reaccionará con c ya que es el valor más alto para el jugador dos si el jugador uno juega con la estrategia a. Ahora el jugador uno va a tomar de muestra una de las dos elecciones previas que son a ó c con igual probabilidad (p = ½) y reaccionará jugando a ó c, dependiendo de su muestra ; si tomó como muestra a, entonces el valor más alto en la columna de a se obtiene escogiendo a ; si tomó como muestra a c, entonces el valor más alto de la columna de c es tomando la estrategia c.

Así que la jugada siguiente será (a, c) ó (c, c) con igual probabilidad de ser jugadas. El proceso se mueve de la secuencia de jugadas [(a, a) (a, c)] a la secuencia [(a, c) (a, c)] con probabilidad ½ ó a la secuencia [(a, c) (c, c)] con probabilidad ½ .

Las secuencias siguientes se repetirán y se ciclará el juego; formarán un ciclo de longitud 6 metido dentro de un ciclo más grande de longitud 12.



Cuando el juego se acicla usando respuestas que son mejores réplicas, se dice que el juego tiene una estructura de mejores réplicas cíclica.

En juegos como en el ejemplo anterior, no necesariamente los juegos de adaptación convergen. No obstante, hay muchos juegos que no tienen una estructura de mejores réplicas cíclicas.

Considérese un juego de coordinación bipersonal en el que los dos agentes tienen el mismo número de estrategias y cada uno prefiere estrictamente jugar su j-ésima estrategia si y solo si el otro jugador juega su j-ésima estrategia, para toda j. Claramente no hay un problema cíclico aquí, una vez que uno de ellos escoja una estrategia pura y el otro responda óptimamente, entonces habrán logrado un equilibrio coordinado.

Para tener otro ejemplo, supóngase que los agentes tienen intereses en común : para cualesquiera dos n-adas de estrategias s, y s' : sea el juego en que todos prefieren s a s' ó todos prefieren s' a s. Suponga además que no hay dos n-adas de estrategias que sean equivalentes en pago.

Dada una n-ada de estrategias s, que no sea un equilibrio de Nash, existe un agente **i** que puede mejorar jugando s_i' en vez de s_i.

Sea $s' = (s_i' \mid s\text{-}i)$, si s' no es un equilibrio de Nash, entonces existe otro agente **j** que puede mejorar usando s_j'' en vez de s_j'; sea $s'' = (s_j'' \mid s'_{-j})$, y así en cada paso de este proceso de ajuste la utilidad de cada uno, así que el proceso no puede ciclarse y debe de terminar en un equilibrio de Nash ; más aún, este equilibrio debe ser estricto porque existe la hipótesis de que no hay dos n-adas de estrategias que sean equivalentes en pago y que los jugadores tienen intereses en común.

Aquí se ha asumido que los jugadores toman sus decisiones con información limitada; es decir, solo se tiene conocimiento acerca de lo que otros agentes han hecho en el pasado más reciente . El tener un conocimiento de la historia relativamente corto, hace que los errores de coordinación sean olvidados eventualmente por la historia.

El siguiente paso es la obtención de condiciones suficientes que nos aseguren cuándo un juego converge a una convención.

CAPITULO III

PROCESOS DE ADAPTACION CON TEORIA DE GRAFICAS

A pesar de que existen procesos que no convergen a una convención, hay una clase importante de peocesos para los cuales si hay convergencia. Estos procesos tienen la propiedad de que para cualquier elección inicial de estrategias, existe una secuencia de mejores réplicas que conducen a un Equilibrio de Nash de estrategias puras.

Una vez que un equilibrio dado ha sido jugado las suficientes veces para que sea lo único que cada quien recuerda, éste equilibrio se convierte en la forma "convencional" de jugar el juego.

Un proceso de adaptación puede ser estudiado desde el punto de vista de la Teoría de Gráficas; así mismo puede resultar menos complicado llegar a ciertos resultados con ayuda de la Teoría de Redes.

Un proceso de adaptación $P^0 = (I, S, \pi, \mathbf{m}, \mathbf{k})$, puede verse como una gráfica dirigida $T = (V, A)$ de la siguiente manera:

$V = \{h \in H : h$ es de tamaño $\mathbf{m}\}$ y

$A = \{a \in VxV : a = (h, h') \Leftrightarrow h'$ es sucesor de h, y cada componente del último elemento de h' es una mejor réplica para alguna muestra de tamaño k de $h\}$

Además, si G es un juego n-personal en su forma normal en un espacio finito de estrategias puras $X_{i=1,n} S_i$.

La *gráfica= (V, A) de las mejores réplicas* de G es :

$V = \{s : s \in S = X_{i=1,n} S_i\}$ y

$A = \{a \in VxV : a = (s, s') \Leftrightarrow s$ es distinto de s' y existe exactamente un agente i tal que s_i' es una mejor réplica de s_{-i} y $s'_{-i} = s_{-i}\}$

Juego Acíclico. Un juego G es acíclico si su gráfica de mejores réplicas no contiene ciclos dirigidos (circuitos). Es acíclica débilmente si para cualquier vértice inicial s existe alguna ruta a algún vértice s^* de donde no hay aristas que salgan de él. (s^* es un vértice hundido)

Todo nodo que sea un sink de una gráfica de mejores réplicas es claramente un equilibrio de Nash estricto de estrategias puras. Así que un juego es débilmente acíclico si y solo si para cada n-ada de estrategias puras existe una secuencia finita de mejores réplicas para un agente que en un cierto tiempo termina en un equilibrio de Nash estricto de estrategias puras.

Demostraremos que los procesos de adaptación convergen con probabilidad 1, con las hipótesis de que el muestreo es suficientemente incompleto y que los jugadores no cometen errores.

Sea G un juego débilmente acíclico n personal. Para cada vector de estrategias s, sea L(s) la longitud del camino más corto en la gráfica de mejores réplicas que hay de s a un equilibrio de Nash estricto y sea $L_G = \max_s$ L(s).

Teorema 3.1. Sea G un juego n personal y débilmente acíclico. Si $k \leq m / (L_G + 2)$: entonces el proceso T de adaptación asociado al juego converge casi seguramente a una convención..

Demostración

Sean k y m fijos tal que $k \leq m / (L_G + 2)$; demostraremos que existe un entero positivo M, y una probabilidad positiva p, tal que para cualquier secuencia h, la probabilidad de que el juego de adaptación converja en M periodos a una convención es por lo menos p donde M y p son independientes de los periodos y de las secuencias. Entonces la probabilidad de no alcanzar una convención después de por lo menos $r \cdot M$ periodos es a lo mas $(1 - p)^r$; el cual converge a cero cuando $r \rightarrow \infty$.

Sea $h = (s (t - m + 1), \ldots , s (t))$ una secuencia en un periodo $t \geq m$.

En el periodo $t + 1$ hay una probabilidad positiva de que cada uno de los n agentes tome como muestra las ultimas k jugadas en h, sean éstas $\eta = (s (t - k + 1), \ldots , s (t))$.

Entonces $h = (s (t - m + 1), \ \ldots \ , \underbrace{s (t - k + 1), \ \ldots \ , s (t)}_{\eta})$

Sea s la n-ada de estrategias con la que los jugadores responden a la muestra η.

Entonces la siguiente secuencia será de la forma :

$$h' = (s (t - m + 2), \ \ldots \ , s (t - k + 1), \ \ldots \ , s (t), \ s)$$

También hay una probabilidad positiva de que, de periodos t + 2 a t + k inclusive, cada agente escoja la muestra η cada vez .

Finalmente hay una probabilidad positiva de que si un agente tiene una elección de distintas mejores réplicas para η el agente escogerá la misma mejor réplica k veces en sucesión.

Entonces existe una probabilidad positiva para una sucesión de tamaño k igual a $(s , s, \ \ldots \ , s)$ en los periodos de t + 1 a t + k incluso.

La sucesión completa será :

$$(s (t - m + k + 1), \ \ldots \ , \underbrace{\underbrace{s (t - k + 1), \ \ldots \ , s (t)}_{\eta}, \ s, \ s, \ldots , s, \ s}_{\text{memoria } 2k-1})$$

Nótese que este argumento depende de la memoria de los agentes siendo de por lo menos 2k−1 ya que de otra forma no podrían escoger la muestra η hasta el periodo t + k.

Supongase ahora que s es un equilibrio de Nash. Existe una probabilidad positiva de que, de los periodos t+k+1 a t + m, cada agente tome por muestra sólo las k ultimas jugadas, en cuyo caso la única mejor réplica para cada agente i es s_i. Así que juegan s por m−k periodos más.

En este momento un equilibrio ha sido alcanzado y continuarán jugando s por el resto del tiempo.

Supongamos en cambio que s no es un equilibrio de Nash. Como G es acíclico, existe un una ruta $s, s', \ldots , s^r$ en la gráfica de mejores réplicas tal que s^r es un equilibrio de Nash estricto. La primera arista en esa ruta es $s \rightarrow s'$.

Sea i el índice tal que $s'_{-i} = s_{-i}$ y s'_i es la mejor réplica a s_{-i} .

Considere el evento en el que el agente i toma por muestra la sucesión $(s, s, \ldots, s)$ que estaba establecida en los k periodos y responde jugando s_i, mientras que cada agente j distinto de i toma la muestra $\eta = (s(t-k+1), \ldots, s(t))$, el jugador i responderá por supuesto con s'_i y los demás contestarán con las mismas estrategias de s ya que cuando toman por muestra a η, las jugadas de s son las mejores réplicas a η. Entonces en el periodo t+k+1 se tendrá la n-ada de jugadas s^1.

También se tiene una probabilidad positiva de que este mismo evento ocurra en los periodos $t + k + 2$ a $t + k + k = t + 2k$, contando que $m \geq 3k - 1$ (la memoria no es 3k porque sólo se necesita tener la muestra η completa hasta el periodo $t + 2k - 1$.

Entonces se tiene la sucesión :

periodos : t-m+2k+1 ... t-k+1 ... t t+1 ... t+k , t+k+1 ... t+2k

$$(s(t-m+2k+1), \ldots, \underbrace{s(t-k+1), \ldots, s(t)}_{\eta}, \underbrace{s, s, \ldots, s, s}_{k \text{ veces}}, \underbrace{s^1, \ldots, s^1}_{k \text{ veces}})$$

Lo que se busca es hacer una corrida ahora de s^2 con k periodos y así hasta s·r también k veces.

Para poder hacer esto se necesita que el proceso tenga suficiente memoria; es decir, que m sea lo suficientemente grande

Si se busca pasar de $s^{n'}$ a $s^{n'+1}$ se necesita que los jugadores respondan con la misma estrategia de $s^{n'}$ excepto en el jugador que cambie su mejor réplica.

Entonces en cada arista de la gráfica de mejores réplicas $s^{n'} \to s^{n'+1}$ se necesita que los jugadores i tome por muestra :

i) La muestra η en caso de que el agente i no haya cambiado de estrategia en aristas anteriores.

ii) Si el agente i cambió de estrategia en la arista $s^{n'} \to s^{n'+1}$ con p anterior a n' tomará por muestra $(s^p, \ldots, s^p)$ de tamaño k donde s^p es precisamente la n-ada de estrategias en que este jugador responde con una mejor réplica distinta. En caso de que este jugador haya cambiado de estrategia varias veces en aristas anteriores a $s^{n'} \to s^{n'+1}$ tomará la muestra en la última arista en que hizo el cambio.

iii) El jugador que cambia de estrategia en la arista $s^p \to s^{p+1}$ tome por muestra las últimas k jugadas.

Estos eventos en cada paso $s^p \to s^{p+1}$ tienen probabilidad positiva de ocurrir, y en caso de darse eventualmente se tendrá una corrida de $s^r, \ldots, s^r$, k veces en los periodos de $t + kr$ a $t + kr + k = t + k(r+1)$:

$$(\underbrace{s(t+k+1), \ldots \ldots, s(t)}_{k \text{ periodos}}, \underbrace{s, \ldots, s}_{k \text{ periodos}}, s^1, \ldots, s^1, \ldots \ldots, s^{r-1}, \ldots, s^{r-1}, s^r, \ldots, s^r)$$

← 2k periodos →

← (r+1) k periodos →

← rk+2k periodos →

Ahora se tiene que $r \leq L_G$ entonces como $k \leq m / (L_G + 2) \Rightarrow k L_G + 2k \leq m$
y $rk + 2k \leq L_G k + 2k \leq m$ por lo que el proceso anterior es posible gracias a la hipótesis.

Se tiene también una probabilidad positiva de que todos los agentes tomen por muestra las últimas k jugadas y sabemos que responderán con s^r, además existe una probabilidad positiva de que lo hagan desde el periodo t+k+k+1 hasta $t + kr + m$ es decir por m–k–1 periodos más y así completarán una corrida $(s^r, \ldots, s^r)$ de tamaño m.

Entonces se tiene que dada un secuencia inicial *h*, existe una probabilidad positiva de converger a un equilibrio en $M = k L_G + m$ periodos (la m cuenta a partir de la primera s^r que aparece y que tendrán que completarse m, $k L_G$ cuenta a $s, s^1, \ldots, s^{r-1}$ que son a lo más L_G y cada una k veces) .

Sea $p = \min_{h \in H} P_h > 0$ se sigue que el proceso converge con al menos p de probabilidad para que se alcance un equilibrio. Esto completa la demostración.

En éste teorema sólo demuestra que las hipótesis son condiciones son suficientes para llegar a una convención cuando la sociedad cuenta con equilibrios en el juego sin establecer cuál convención sera la elegida. Esto es consecuencia de la estructura del juego de adaptación que puede observarse en la gráfica de los estados, a saber si es conexa o no y donde la sociedad llegará a una convención o a otra dependiendo de las condiciones iniciales de la dinámica: es decir, dependiendo del vértice en que inicie el proceso se podrá estar en una u otra componente conexa de la gráfica y llegar a la convención correspondiente a este componente.

Además no se afirma que la cota $k \leq m / (L_G + 2)$ es la mejor posible en todo juego débilmente acíclico. Sin la muestra incompleta ; sin embargo, el proceso puede no converger a un equilibrio de Nash de estrategias puras, como se mostró al final del capitulo II.

Considérese el siguiente ejemplo :

Ejemplo 3. 1 :

	a	b
a	0 0	1 $\sqrt{2}$
b	$\sqrt{2}$ 1	0 0

Sea k = m, así que los jugadores tomarán por muestra las mismas m jugadas en cada periodo.

Considere cualquier secuencia inicial de m jugadas en donde los jugadores siempre están no coordinados : esto es, ambos escogen a ó ambos escogen b en cada periodo. Sea f la frecuencia relativa en que han escogido "a" en la secuencia.

En el siguiente periodo, el jugador 1 escogerá la estrategia "a" si y solo si

$$(1 - f) \cdot 1 > f \sqrt{2}$$

y el segundo jugador hace lo mismo, así que en el siguiente periodo vuelven a estar no coordinados de nuevo. Como f es racional, la desigualdad es siempre estricta, así que nunca se considera la igualdad, así que si se empieza con una secuencia en perfecta descoordinación ; los jugadores descoordinarán siempre.

En este caso la distribución de la frecuencia converge a un equilibrio de Nash de estrategias mixtas del juego en la que los 2 jugadores toman la estrategia "a" con probabilidad :

$$f = 1 / (1 + \sqrt{2}) \text{ que se obtiene de } (1 - f) \cdot 1 = f \sqrt{2}$$

Más adelante se demostrará que en los procesos de adaptación cuando se converge a un equilibrio, este equilibrio debe corresponder a un equilibrio de Nash de estrategias puras.

CAPITULO IV

PROCESOS DE ADAPTACION CON PROCESOS ESTOCASTICOS

En la dinámica de un proceso de adaptación, como la definida en la primera sección se puede construir una cadena de Markov de la siguiente manera:

Sea H el conjunto de estados de la cadena de Markov igual al conjunto $H = X_{i=1,m} S$, de todas las secuencias de tamaño m en el juego de adaptación.

Y sea $P^0_{hh'}$ la función de transición de un estado h a otro h' ; como se definió en (2. 1).

En la sección anterior se vio que los juegos débilmente acíclicos, tienen la propiedad de que para cualquier elección inicial de estrategias, existe una secuencia de mejores réplicas que conducen a una convención que se compone de una sucesión de Equilibrios de Nash de estrategias puras.

La muestra incompleta de la historia crea una variabilidad estocástica suficiente para evitar que el proceso del juego se introduzca en ciclos subóptimos .

Una vez que un equilibrio dado ha sido jugado lo suficiente y se convierte en la forma "convencional" de jugar el juego se ha llegado a un equilibrio; en cadenas de Markov esto equivale a caer en un estado absorbente del proceso $P^0_{hh'}$.

Entonces podemos estudiar el proceso de selección al principio del periodo t = m + 1 para alguna secuencia inicial de m jugadas $h(m) = (s(1), s(2), \ldots, s(m))$.

Empecemos observando que h es un estado absorbente de este proceso si y solo si h consiste en un equilibrio de Nash estricto de estrategias puras jugado m veces en sucesión.

Supongamos que $h = (s^1, s^2, \ldots, s^m)$ es un estado absorbente. Para cada agente i, sea s_i una mejor réplica del jugador i para algún subconjunto de k jugadas tomadas de h y sea $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

Por hipótesis existe una probabilidad positiva de moverse de h a $h' = (s^2, s^3, \ldots, s^m, s)$ en un periodo. Como h es absorbente, $h = h'$ y entonces $s^1 = s^2$. Continuando de esta manera concluimos que $s^1 = s^2 = \ldots = s^m = s$; entonces $h = h'$. Por construcción, s_i es una mejor replica para alguna muestra de k elementos de h. Entonces s_i en una mejor replica a s_{-i} para cada i. Debe haber una única mejor respuesta a s_{-i}, porque de otro modo el proceso se movería a un sucesor distinto de h. Así que s es un equilibrio de Nash estricto de estrategias puras.

A la inversa, cualquier estado que consista de m repeticiones de un equilibrio de Nash estricto de estrategias puras es claramente un estado absorbente. Tal estado es una convención.

Procesos de adaptación con errores

La suposición de que los jugadores nunca cometen errores y que sus muestras son lo suficientemente incompletas es determinante para obtener los resultados del capitulo III, pero si suponemos que los jugadores cometen errores o experimentan ocasionalmente entonces podemos decir más.

El teorema 3.1 cae en el supuesto que, mientras los agentes basan sus decisiones en una información limitada, siempre escogen una mejor réplica en respuesta a la información que tienen. Este supuesto es irreal. Los agentes a veces cometen errores ; incluso pueden experimentar con respuestas que no son óptimas. En este caso el proceso estocástico no converge a un estado absorbente ya que carece de éstos. Los errores perturban constantemente el proceso y lo alejan del equilibrio.

Supondremos que los jugadores ocasionalmente pueden experimentar con diferentes estrategias, o que simplemente cometen errores: a este supuesto se le considerará como ruido o perturbación del proceso sin errores: esto quiere decir que el proceso sigue la función de transición de P^0 con una probabilidad alta, pero existen ciertas transiciones que no ocurren vía P^0 con una probabilidad pequeña.

Si además suponemos que todos los errores son posibles y que la probabilidad de cometerlos es independiente del tiempo, se mostrará que el proceso con perturbación tiene una única distribución estacionaria, y así podremos estudiar su conducta asintótica.

Para perturbar el nuevo proceso supongamos que en cada periodo de tiempo existe una probabilidad pequeña $\varepsilon \cdot \lambda_i > 0$ de que el jugador i experimente escogiendo una estrategia aleatoriamente de S_i ; en vez de optimizar, basándose en una muestra de tamaño k . El radio λ_i / λ_j es la probabilidad relativa con que el jugador de tipo i experimenta con respecto del jugador de tipo j. El factor ε determina una probabilidad con que los jugadores experimentan en su conjunto.

Para todo i, sea $q_i(s \mid h)$ la probabilidad condicional de que el jugador i escoja $s \in S_i$ dado que el jugador i experimenta y el proceso está en el estado h, donde :

$$\Sigma_{s \in S_i} q_i(s \mid h) = 1, \forall i, \ \forall h \in \boldsymbol{H}.$$

Se supone que el evento "i experimenta" es independiente del evento "j experimenta", $\forall\ i \neq j$, además $q_i(s \mid h)$ es independiente de t y $q_i(s \mid h) > 0\ \forall\ s \in S_i$.

A priori no sabemos las distribuciones de $\mathbf{q} = (q_1(\cdot), q_2(\cdot), \ldots, q_n(\cdot))$ ó la distribución relativa de experimentación $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Estas dos distribuciones están relacionadas de la siguiente manera :

· λ es el vector de distribuciones donde $\varepsilon \cdot \lambda_i$ es la probabilidad de que el agente i experimente, y

· $(1-\varepsilon \cdot \lambda_i)$ de que no experimente.

En caso de que el agente i experimente y el proceso esté en el estado h, la probabilidad de que cada estrategia pura $s \in S_i$ será escogida para experimentar está dada por $q_i(\cdot)$.

El proceso con perturbación puede describirse como sigue :

Suponga que el proceso está en el estado h al tiempo t.
Sea J un conjunto de jugadores $1 \leq j \leq n$. La probabilidad de que exactamente los jugadores de J experimenten y los otros no, está dada por

$$(\Pi_{j \in J}\ \varepsilon \lambda_j) \cdot (\Pi_{j \notin J}(1 - \varepsilon \cdot \lambda_j)).$$

En caso de que experimente un cierto subconjunto $J \subseteq N$ se tiene la probabilidad de transición para ir de h a h' :

$Q^J_{hh'} = (\Pi_{j \in J} q_j(s_j \mid h))(\Pi_{j \notin J} p_j(s_j \mid h))$ Si h' es un sucesor de h y $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ es el elemento más a la derecha de h'.

$Q^J_{hh'} = 0$ Si h no es sucesor de h'.

En caso de que ningún agente experimente, la probabilidad de transición para moverse de h a h' en un periodo es $P^0_{hh'}$, definida anteriormente.

Este evento tiene probabilidad $\Pi_{i=1,n}(1-\varepsilon\lambda_i)$.

El proceso con perturbación de Markov tiene entonces la función de transición :

$$P^{\varepsilon}_{hh'} = (\Pi_{i=n}(1-\varepsilon\lambda_i))\, P^0_{hh'} + \Sigma_{J\subseteq N\, J\neq\varnothing}\, \varepsilon^{|J|}\, (\Pi_{j\in J}\lambda_j)\,(\Pi_{j\notin J}(1-\varepsilon\lambda_j))\, Q^J_{hh'} \quad . . . \ (4.1)$$

La probabilidad de pasar del estado h al estado h' es igual a la probabilidad de que ningún jugador experimente por la probabilidad de pasar de h a h' en P^0 más la suma de las probabilidades de las distintas formas en que se puede experimentar y pasar de h a h'.

Definición. Sea h un sucesor de h en el proceso P^{ε} y sea s el elemento que está más a la derecha de h'. Un ***error*** en la transición h $\rightarrow$ h' es un componente s_i de s tal que no es mejor réplica del agente i para ninguna muestra de tamaño k de h.

Un error solo puede darse si un jugador experimenta, pero una elección experimental no tiene que ser necesariamente un error , ya que puede (por azar) ser una mejor réplica.

Definición. Sean h, h' $\in$ H en el proceso P^{ε}: si h' es un sucesor de h, se define la ***resistencia*** r (h, h') como el número total de errores envueltos en la transición h $\rightarrow$ h': si h' no es sucesor de h se define r (h, h') = ∞

El proceso P^{ε} se llamará *proceso ó juego de adaptación con memoria m, muestra de tamaño k y con probabilidad de experimentación* $\varepsilon \cdot \lambda_i$ con una distribución de experimentación q_i. Nótese que P^0 es el proceso definido anteriormente, y nos referimos a él como el proceso sin perturbación.

Definición. Sea P^{ε} una cadena de Markov estacionaria en un espacio de estados X finito con perturbación.
Se dice que el proceso P^{ε} es una *Perturbación Regular* de P^0 si cumple las siguientes condiciones:

$\forall$ x, y $\in X$

i) P^{ε} es aperiódico e irreducible $\forall\ \varepsilon\in (0,a]$

ii) $\lim_{\varepsilon\to 0} P^{\varepsilon}_{xy} = P^0_{xy}$

iii) $P^{\varepsilon}_{xy} > 0$ para alguna $\varepsilon \Rightarrow \exists\, r \geq 0 \ \ni\ 0 < \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-r} P^{\varepsilon}_{xy} < \infty$

Observación.- ε es un parámetro que mide el nivel de ruido con $\varepsilon \in (0,a] \subseteq \Re$ para alguna a $\in \Re$.

La condición i) implica que el proceso con perturbación tiene una única distribución estacionaria μ^{ε} para cada $\varepsilon \in (0,a]$.

La condición ii) señala que el proceso con perturbación converge al proceso sin perturbación cuando el ruido tiende a cero.

La condición iii) señala que la transición x $\rightarrow$ y , o es imposible en el proceso con perturbación $\forall\ \varepsilon\in (0,a]$, o es de orden ε^{-r} para algún número real r $\geq$ 0 mientras ε decrece.

Por virtud de ii) si r = 0 entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-r} P^{\varepsilon}_{xy} = \lim_{\varepsilon\to 0} P^{\varepsilon}_{xy} = P^0_{xy} \text{ es finito y positivo}$$

Proposición 4.2. El proceso P^{ε} definido en el proceso de adaptación con errores (4.1) es una perturbación regular.

Demostración

Sean h, h'∈ H con h ≠ h'; si P^{ε} está en el estado h al tiempo t, existe una probabilidad positiva de que todos los jugadores experimentarán por m periodos en sucesión ; recordando que m es el tamaño de la muestra , existe entonces una probabilidad positiva de que el proceso pase del estado h al estado h' al tiempo t + m ; por lo tanto el estado h' puede alcanzarse a partir del estado h en un número finito de transiciones es decir $P^{\varepsilon}{}_{h h'}{}^{(m)} > 0$ por lo tanto P^{ε} es irreducible.

Es aperiódica porque por lo anterior, el proceso se puede mover del estado h a h' en exactamente m periodos, pero también en exactamente m + 1 periodos; porque hay una probabilidad positiva en cada periodo de que aparezca cualquier n-ada de estrategias, de manera que hay probabilidades positivas en los periodos de t + 2 hasta t + m + 1 para que se escojan las estrategias que forman h'.

Ya tenemos que P^{ε} es aperiódico e irreducible $\forall\ \varepsilon \in (0,a]$.

P.D. $\lim_{\varepsilon\to 0} P^{\varepsilon}{}_{xy} = P^{0}{}_{xy}$

tenemos que

$\lim_{\varepsilon\to 0} P^{\varepsilon}{}_{xy}$

$= \lim_{\varepsilon\to 0} [(\Pi_{i=1,n}(1-\varepsilon\lambda_i))P^{0}{}_{xy} + \Sigma_{J\subseteq N\, J\neq\emptyset}\, \varepsilon^{|J|}(\Pi_{j\in J}\lambda_j)(\Pi_{j\notin J}(1-\varepsilon\lambda_j))Q^{J}{}_{xy}]$

$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\Pi_{i=1,n}(1-\varepsilon\lambda_i))P^{0}{}_{xy} + \Sigma_{J\subseteq N\, J\neq\emptyset} \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{|J|}(\Pi_{j\in J}\lambda_j)(\Pi_{j\notin J}(1-\varepsilon\lambda_j))Q^{J}{}_{xy}$

$= P^{0}{}_{xy} \lim_{\varepsilon\to 0}(\Pi_{i=1,n}(1-\varepsilon\lambda_i)) + \Sigma_{J\subseteq N\, J\neq\emptyset} Q^{J}{}_{xy} \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{|J|}(\Pi_{j\in J}\lambda_j)(\Pi_{j\notin J}(1-\varepsilon\lambda_j))$

donde $\lim_{\varepsilon\to 0}(\Pi_{i=1,n}(1-\varepsilon\lambda_i)) = 1$ y $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{|J|}(\Pi_{j\in J}\lambda_j)(\Pi_{j\notin J}(1-\varepsilon\lambda_j)) = 0$

entonces $\lim_{\varepsilon\to 0} P^{\varepsilon}{}_{xy} = P^{0}{}_{xy}$

Ahora si $P^{\varepsilon}{}_{xy} > 0$ para alguna ε ; <u>P. d.</u> $\exists\, r \geq 0 \ni 0 < \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-r}P^{\varepsilon}{}_{xy} < \infty$

Demostraremos que r = r (x, y) .

Si $P^{\varepsilon}{}_{xy} > 0$ entonces

$0 < (\Pi_{i=1,n}(1-\varepsilon\lambda_i))P^{0}{}_{xy} + \Sigma_{J\subseteq N\, J\neq\emptyset}\, \varepsilon^{|J|}(\Pi_{j\in J}\lambda_j)(\Pi_{j\notin J}(1-\varepsilon\lambda_j))Q^{J}{}_{xy}$

Las transiciones que son vía P^{0} suceden si y solo si no se comete ningún error en la transición x → y; entonces si $P^{\varepsilon}{}_{xy} > 0$ existen dos casos:

i) $P^{0}{}_{xy} > 0$; entonces

$0 < (\Pi_{i=1,n}(1-\varepsilon\lambda_i))P^{0}{}_{xy}$ y $0 = \Sigma_{J\subseteq N\, J\neq\emptyset}\, \varepsilon^{|J|}(\Pi_{j\in J}\lambda_j)(\Pi_{j\notin J}(1-\varepsilon\lambda_j))Q^{J}{}_{xy}$

En este caso no se comete ningún error ; entonces

$P^{\varepsilon}{}_{xy} = (\Pi_{i=1,n}(1-\varepsilon\lambda_i))P^{0}{}_{xy}$; y tomando r = 0 (el cual coincide con el número de errores) se tiene

$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-r} P^{\varepsilon}_{xy} = \lim_{\varepsilon\to 0} P^{\varepsilon}_{xy} = \lim_{\varepsilon\to 0} (\Pi_{i=1,n} (1-\varepsilon\lambda_i)) P^{0}_{xy} = P^{0}_{xy} < \infty$

por lo tanto $0 < \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-r} P^{\varepsilon}_{xy} = P^{0}_{xy} < \infty$

ii) $P^{0}_{xy} = 0$: entonces

$0 = (\Pi_{i=1,n} (1-\varepsilon\lambda_i)) P^{0}_{xy}$ y $0 < \Sigma_{J\subseteq N\, J\neq\emptyset} \varepsilon^{|J|} (\Pi_{j\in J} \lambda_j) (\Pi_{j\notin J}(1-\varepsilon\lambda_j)) Q^{J}_{xy}$

En este caso si se cometen errores en la transición ; entonces

$$P^{\varepsilon}_{xy} = \Sigma_{J\subseteq N\, J\neq\emptyset} \varepsilon^{|J|} (\Pi_{j\in J} \lambda_j) (\Pi_{j\notin J}(1-\varepsilon\lambda_j)) Q^{J}_{xy};$$

Observemos que P^{ε}_{xy} es un polinomio en ε de grado n, con $n \leq N$ y sin término independiente cuando $P^{0}_{xy} > 0$. Entonces podemos escribir:

$$P^{\varepsilon}_{xy} = \Sigma_{i=1,n} a_i \cdot \varepsilon^{i}$$

con $a_i \in \Re$, $\forall i = 1, n$; y con alguna a_i distinta de cero.

Sea $k = \min \{a_k \neq 0\}$. En este caso k es exactamente el mínimo número de errores que se tienen que cometer para que se dé la transición $x \to y$.

Entonces dividimos a P^{ε}_{xy} entre ε^{k} : y obtendremos un polinomio P con un término independiente igual a a_k entonces

$$0 < \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-k} P^{\varepsilon}_{xy} = \lim_{\varepsilon\to 0} P = a_k < \infty$$

Por lo tanto si $P^{\varepsilon}_{xy} > 0$ para alguna ε ; $\exists\, r \geq 0 \ni 0 < \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-r} P^{\varepsilon}_{xy} < \infty$

con $r = r (x, y)$.

Por lo tanto el proceso definido en (4.1) es una perturbación regular del proceso sin perturbación definido en el juego de adaptación sin errores (2.1).

Como el proceso P^{ε} es ergódico ; es decir, aperiódico e irreducible, resulta que tiene una única distribución estacionaria μ_{ε} que satisface la ecuación $\mu_{\varepsilon} P^{\varepsilon} = \mu_{\varepsilon}$.

El proceso sin perturbación por el contrario tienen muchas distribuciones estacionarias.

Observación. Se tiene que $\Sigma_{h\in H} \mu^{\varepsilon}_{h} = 1$ y además

$$P^{\varepsilon(\infty)} = \begin{pmatrix} \mu^{\varepsilon}_{h1} \dots & \mu^{\varepsilon}_{h|H|} \\ & \\ \mu^{\varepsilon}_{h1} \dots & \mu^{\varepsilon}_{h|H|} \end{pmatrix}$$

Las entradas dependen de ε ; entonces tiene sentido dar la siguiente definición :

Estabilidad estocástica . Un estado $h \in H$ es estocásticamente estable relativo al proceso P^{ε} si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu^{\varepsilon}{}_{h} > 0.$$

El límite indica que conforme se vaya jugando el juego; los estados que no son estocásticamente estables serán observados con poca frecuencia en comparación con los estados que sí lo son cuando la probabilidad de error ε es pequeño. En caso de que haya un único estado estocásticamente estable; entonces, éste se observará casi todo el tiempo.

Es posible dar una caracterización de la distribución límite, para ello volveremos a la Teoría de Gráficas.

Sea L un conjunto finito, cuyos elementos serán denotados por las letras i, j k, m, n, etc. y sea W un subconjunto seleccionado de L . Una gráfica que consiste de arcos $m \to n$ ($m \in L \backslash W$, $n \in L$, $n \neq m$) es llamada una *W - gráfica* si satisface las siguientes condiciones :

1) Todo vértice $m \in L\backslash W$ es vértice inicial de exactamente un arco

2) No hay ciclos cerrados en la gráfica.

La condición 2) puede ser remplazada por la siguiente condición

2') Para cualquier punto $m \in L\backslash W$ existe una secuencia de arcos que empieza en m y termina en algún punto $n \in W$

Denotaremos por G (W) el conjunto de todas las W-gráficas de L y usaremos la letra g para denotar a las gráficas con vértices en L

Si p_{ij} ($i, j \in L$, $j \neq i$) son números cualquiera asociados a la pareja (i, j) ; entonces $\Pi_{(m \to n) \in g}\, p_{mn}$ será denotado por $\pi(g)$.

Lema 4.1 Considérese una cadena de Markov en un conjunto finito de estados L y probabilidades de transición p_{ij} y tal que todo estado puede alcanzarse desde cualquier otro estado en un número finito de transiciones. Entonces la distribución estacionaria de la cadena es

$$\{ (\Sigma_{i \in L} Q_i)^{-1} Q_i ,\, i \in L \}$$

$$\text{donde } Q_i = \Sigma_{g \in G\{i\}} \pi (g) \qquad . . . \ (4.2)$$

Obsv. G{i} = { Conjunto de todas las antiarboresencias enraizadas en i }

<u>*Demostración.*</u>

Los números Q_i son positivos. Es suficiente demostrar que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$Q_i = \Sigma_{j \in L}\, p_{ij}\, Q_j \, (i \in L).$$

ya que se sabe que la distribución estacionaria es la única (salvo multiplicaciones por escalares) que resuelve este sistema. En la i-ésima ecuación podemos pasar el i-ésimo término del lado derecho al lado izquierdo de la igualdad

$$Q_i = p_{i1} Q_1 + . . . + p_{ii} Q_i + . . . + p_{in} Q_n$$

$$\Rightarrow Q_i - Q_i\, p_{ii} = p_{i1} Q_1 + . . . \quad . . . + p_{in} Q_n$$

$$\Rightarrow Q_i(1-p_{ii}) = \sum_{j\neq i} p_{ij} Q_j \quad \text{y como} \quad \sum_{k\in L} p_{ik} = 1$$

se tiene que $1-p_{ii} = \sum_{k\neq i} p_{ik}$

por lo que se tiene $\quad Q_i \sum_{k\neq i} p_{ik} = \sum_{j\neq i} p_{ij} Q_j \;. \;. \;. \quad (4.3)$

Sustituyendo (4.2) en (4.3) obtenemos :

$$\sum_{g\in G\{i\}} \pi(g) \sum_{k\neq i} p_{ik} = \sum_{j\neq i} p_{ij} \sum_{g\in G\{j\}} \pi(g) \;. \;. \;. \quad (4.4)$$

desarrollando el lado izquierdo de (4.4) obtenemos :

$$\begin{aligned}
&\sum_{g\in G\{i\}} \pi(g) \sum_{k\neq i} p_{ik} \\
&= \sum_{k\neq i} (p_{ik} \sum_{g\in G\{i\}} \pi(g)) \\
&= \sum_{k\neq i} (p_{ik} \sum_{g\in G\{i\}} \Pi_{(m\rightarrow n)\in g}\, p_{mn}) \\
&= \sum_{k\neq i} \sum_{g\in G\{i\}} (\Pi_{(m\rightarrow n)\in g}\, p_{mn}\, p_{ik})
\end{aligned}$$

desarrollando el lado derecho de (4.4) se tiene :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\neq i} \sum_{g\in G\{j\}} \pi(g)\, p_{ij} \\
&= \sum_{j\neq i} \sum_{g\in G\{j\}} (\Pi_{(m\rightarrow n)\in g}\, p_{mn})\, p_{ij}
\end{aligned}$$

por lo tanto $Q_i = \sum_{j\in L} Q_j\, p_{ji} \qquad (i\in L)$,

ya que $\sum_{k\neq i} \sum_{g\in G\{i\}} (\Pi_{(m\rightarrow n)\in g}\, p_{mn})\, p_{ik} = \sum_{j\neq i} \sum_{g\in G\{j\}} (\Pi_{(m\rightarrow n)\in g}\, p_{mn})\, p_{ij}$

Porque en ambos lados de la igualdad (4.4) se obtuvo la suma $\pi(g)$ sobre todas las gráficas g que satisfacen :

1) En cada gráfica existe exactamente un ciclo cerrado y este ciclo contiene el vértice enraizado(sea i ó j), ya que si en cada gráfica g (la cual es una antiarborescencia) agregamos unas arista a cada vértice $k\neq i$ (ó $k\neq j$) y como para cada k existe un solo camino de k a i (ó a j) en g ; se forma un único ciclo que contiene a i (ó a j).
2) Cada vértice $m\in L$ es el punto inicial de exactamente un arco $m\rightarrow n$ ($n\neq m$, $n\in L$)

Por lo tanto si P' es la función de transición de cualquier cadena de Markov aperiódica e irreducible definida en el espacio de estados X.

Y se define para cada $z\in X$ el número

$$P'_z = \sum_{g\in G\{z\}} \pi(g)$$

con P'_z es positivo.

Entonces si μ' es la distribución estacionaria de P' es decir $\mu' = P'\mu'$ se tiene que

$$\mu'_z = (P'_z / \sum_{x\in X} P'_x) > 0 \qquad . \;. \;. \;. \;(4.5)$$

Las cadenas de Markov de juegos de adaptación con errores no tienen estados absorbentes; pero en cambio, tienen una distribución estacionaria; entonces, hemos obtenido una caracterización de esta distribución, que describe la frecuencia relativa en que los diferentes estados son observados a lo largo del tiempo.

CAPITULO V

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LOS PROCESOS DE ADAPTACION

El resultado que se obtendrá será en los procesos de adaptación con errores y se hará una mejor caracterización del comportamiento asintótico del proceso (4.1) cuando el factor de experimentación ε se acerca a cero, utilizando todos los resultados que hasta ahora se han obtenido, tanto en análisis de redes como de cadenas de Markov.

Esta caracteización demostrará que el no conocer a priori las distribuciones q y λ no tiene mucha importancia. Si el parámetro de experimentación ε es pequeño y si los agentes experimentan independientemente uno del otro entonces la selección del equilibrio es independiente de q y λ.

Obtendremos entonces una teoría de selección de equilibrio.

Por hipótesis, el proceso con perturbación P^ε es aperiódico e irreducible, así que tiene una única distribución estacionaria para cada $\varepsilon > 0$; por el contrario, el proceso sin perturbación tiene muchas distribuciones estacionarias.

Se demostrará que $\lim_{\varepsilon\to 0}\mu^\varepsilon = \mu^0$, donde μ^0 es una de las distribuciones estacionarias de P^0 ; es decir, que si la probabilidad de cometer errores es pequeña, entonces la distribución estacionaria se concentra alrededor de un subconjunto particular del conjunto de equilibrios de Nash de estrategias puras.

Para caracterizar la distribución limite μ^0, deberemos definir dos gráficas dirigidas:

Defínase la siguiente red:

Dada $\varepsilon>0$

Sea $G = (X, A, r)$ donde:

$X = \{x \in X : x$ es un estado del proceso $P^\varepsilon\}$ y

$A = \{x \to y : P^\varepsilon_{xy} > 0\}$

$r : A \to \Re$ tal que $r(x \to y) = r(x, y)$, o sea igual la resistencia de la transición x– y

A la gráfica G se le llamara *Gráfica de Estados del proceso* P^ε.

Definición. Sean $X_1, X_2, \ldots \ldots, X_J$ las *clases de comunicación recurrente* de P^0 caracterizadas dentro de la gráfica G como sigue :

i) De cada vértice existe una ruta con resistencia cero para al menos una de las clases X_i.

ii) Para cualesquiera dos vértices x, y dentro de una misma clase X_i, existe una ruta x—y con resistencia cero y viceversa.

iii) Toda arista $x \to y$ con $x \in X_i$, $y \in X_j$, con $i \neq j$ tiene resistencia positiva.

Para toda $i \neq j$, sea r_{ij} la resistencias mínima que hay entre todas las rutas que van de X_i a X_j; para este propósito es suficiente dejar fijos 2 estados, un estado $x \in X_i$ y otro $y \in X_j$ y entonces encontrar la ruta con resistencia mínima entre x e y. Esto está bien definido ya que existe al menos una ruta entre una y otra clase de comunicación recurrente, por virtud de que el proceso P^ε es irreducible cuando $\varepsilon > 0$ y r_{ij} no depende de ε

Ahora defínase una segunda gráfica $\mathfrak{S}$ como sigue :

Los vértices son los índices de las clases de comunicación recurrente $\{1, . . . , J\}$, y para cada par (i, j) existe un arco de i a j con el peso r_{ij}.

A la gráfica $\mathfrak{S}$ se le llamará la *gráfica de las clases de comunicación recurrente* del proceso P^{ε} o simplemente las *gráfica de las clases* del proceso P^{ε}.

Generalmente $\mathfrak{S}$ es mucho más pequeña que G de hecho puede tener muy pocos vértices.

Definiciones:

i - árbol . Un i-árbol en $\mathfrak{S}$ es un una antiarborescencia con raíz en i.

Para cada vértice i, sea Ψ_i el conjunto de todos los i-árboles en $\mathfrak{S}$.

La *resistencia de un i-árbol* $\varphi \in \Psi_i$ es la suma de los pesos de sus arcos :

$$r(\varphi) = \Sigma_{(i,j)\in\varphi}\, r_{ij} \qquad . . . \ (5.1)$$

Un i-árbol indica una forma en que se puede llegar a H_i desde cualquier clase H_j distinta de H_i y la resistencia del i-árbol será el total de los errores que se cometen para llegar a la clase H_i desde cualquier clase H_j .

El conjunto Ψ_i es el conjunto de todas las formas posibles en que se puede llegar a la clase H_i desde cualquier clase de comunicación recurrente.

Potencial Estocástico. El potencial estocástico de una clase recurrente H_i es la resistencia más pequeña entre todos los i-árboles

$$\gamma_i = \min_{\varphi\in\Psi_i} r(\varphi) \qquad . . . \ (5.2)$$

Calcular γ_i para un conjunto de pesos $r_{ij} \geq 0$ es un problema de caracterización de antiarborescencias en análisis de redes.: en el cual existen algoritmos muy eficientes; uno de ellos se describe en el Apéndice.

Nótese que las cantidades r_{ij} dependen únicamente del número de errores al hacer las transiciones y no en la probabilidad de los errores específicos que se han hecho. Entonces el potencial estocástico es independiente de los parámetros λ_i y q_i.

Con las definiciones anteriores se puede demostrar el siguiente resultado:

Teorema 5.1(Freidlin y Wentzell) Sea P^0 una cadena de Markov estacionaria en un espacio finito de estados X con clases de comunicación recurrente $X_1, X_2, . . . , X_J$.

Sea P^{ε} una perturbación regular de P^0, y sea μ^{ε} la única distribución estacionaria para cada ε positivo.

Entonces :

i) Si $\varepsilon \rightarrow 0$ entonces μ^{ε} converge a una distribución estacionaria μ^0 de P^0.
ii) x es estocásticamente estable (i. e. $\mu^0_x > 0$) si y solo si x está contenido en una de las clases comunicación recurrente X_j que minimiza a γ_j.

La demostración se dividirá en dos lemas : en el primero, se establece i) y se muestra como caracterizar a los estados estocásticamente estables mediante la resolución de una serie de problemas de arborescencias en la gráfica

G : en el segundo lema demostraremos que esta caracterización se puede reducir a resolver problemas de arborescencias en la gráfica $\mathcal{S}$ que es mucho más pequeña y más simple.

Se empezará caracterizando los estados estocásticamente estables en términos de la gráfica G, cuyo conjunto de vértices es todo el espacio de estados X. Para cualquier vértice $z \in G$, un *z-árbol T* es un árbol expandido en G con antiraíz en z.

Sea $\tau_z = \{\text{z-árbol} \mid \text{z-árbol} \subseteq G\}$ y defínase :

$$\gamma(z) = \min_{T \in \tau_z} \sum_{[x,y] \in T} r(x, y) \qquad \ldots (5.3)$$

$\gamma(z)$ es el *potencial* de z.

Lema 5.1 Sea P^ε una distribución regular de P^0 y sea μ^ε su distribución estacionaria. Entonces $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu^\varepsilon = \mu^0$ existe y μ^0 es una distribución estacionaria de P^0. Más aún μ^0_x si y solo si $\gamma(x) \leq \gamma(y)$ para todo $y \in X$.

<u>*Demostración*</u>

Como el proceso P^ε es una cadena de Markov aperiódica e irreducible definida en el espacio de estados X : se puede aplicar el lema 4.1, entonces la distribución estacionaria de P^ε está dada por la fórmula (4.5) y así :

$$\mu^\varepsilon_z = P^\varepsilon_z \Big/ \sum_{x \in X} P^\varepsilon_x \quad \text{en la entrada z,}$$

$$\text{donde } P^\varepsilon_z = \sum_{T \in \tau_z} \prod_{[x,y] \in T} P^\varepsilon_{xy}.$$

Defínase $\gamma(z)$ como en (5.3) y sea $\gamma^* = \min_z \gamma(z)$. Vamos a demostrar que $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu^\varepsilon_z > 0$ si y solo si $\gamma(z) = \gamma^*$.

Tómese un z-árbol T cuya resistencia sea igual a $\gamma(z)$ es decir T es un árbol que minimiza a $\sum_{[x,y] \in T} r(x,y)$ con $T \in \tau_z$.

Si $r(T) = \sum_{[x,y] \in T} r(x,y)$ entonces

$$\varepsilon^{-\gamma^*} \prod_{[x,y] \in T} P^\varepsilon_{xy} = (\varepsilon^{r(T)} / \varepsilon^{r(T)}) \varepsilon^{-\gamma^*} \prod_{[x,y] \in T} P^\varepsilon_{xy} = (\varepsilon^{r(T)-\gamma^*} / \varepsilon^{-\Sigma r(x,y)}) \prod_{[x,y] \in T} P^\varepsilon_{xy}$$

$$= \varepsilon^{r(T)-\gamma^*} \cdot \varepsilon^{-\Sigma r(x,y)} \prod_{[x,y] \in T} P^\varepsilon_{xy} = \varepsilon^{r(T)-\gamma^*} \prod_{[x,y] \in T} \varepsilon^{-r(x,y)} P^\varepsilon_{xy}$$

$$\text{entonces } \varepsilon^{-\gamma^*} \prod_{[x,y] \in T} P^\varepsilon_{xy} = \varepsilon^{r(T)-\gamma^*} \prod_{[x,y] \in T} \varepsilon^{-r(x,y)} P^\varepsilon_{xy} \qquad \ldots\ldots (5.4)$$

ahora si $P^\varepsilon_{xy} > 0$ con $(x, y) \in T$; entonces por la tercer condición de regularidad de P^ε se tiene :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-r(x,y)} P^\varepsilon_{xy} > 0 \quad \forall (x, y) \in T \quad \ldots (5.5)$$

Si $r(T) = \gamma(z) > \gamma^*$ entonces $r(T) - \gamma^* > 0$ y por (5.5) y (5.4)

$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma^*} \prod_{(x,y)\in T} P^{\varepsilon}_{xy} = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{r(T)-\gamma^*} \prod_{(x,y)\in T} \varepsilon^{-r(x,y)} P^{\varepsilon}_{xy}$

$= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{r(T)-\gamma^*} \cdot \prod_{(x,y)\in T} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-r(x,y)} P^{\varepsilon}_{xy}$ tenemos que

$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-r(x,y)} P^{\varepsilon}_{xy} > 0 \quad \forall (x, y) \in T$ y $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{r(T)-\gamma^*} = 0$ entonces

$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma^*} \prod_{(x,y)\in T} P^{\varepsilon}_{xy} = 0$

Si $r(T) = \gamma(z) = \gamma^*$ tenemos

$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma^*} \prod_{(x,y)\in T} P^{\varepsilon}_{xy} = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{r(T)-\gamma^*} \cdot \prod_{(x,y)\in T} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-r(x,y)} P^{\varepsilon}_{xy}$

$= 1 \cdot \prod_{(x,y)\in T} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-r(x,y)} P^{\varepsilon}_{xy}$ y como $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-r(x,y)} P^{\varepsilon}_{xy} > 0 \quad \forall (x, y) \in T$

tenemos que $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma^*} \prod P^{\varepsilon}_{xy} > 0$.

Entonces :

$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma^*} P^{\varepsilon}_{z} = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma^*} \sum_{T\in\tau_z} \prod_{(x,y)\in T} P^{\varepsilon}_{xy}$

$= \sum_{T\in\tau_z} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma^*} \prod_{(x,y)\in T} P^{\varepsilon}_{z}$

$= 0$ si $r(T) = \gamma(z) > \gamma^* \quad \forall\ T \in \tau_z$ ....(5.6)

ó

> 0 si $r(T) = \gamma(z) = \gamma^*$ para algún $T \in \tau_z$ ....(5.7)

entonces como $\mu^{\varepsilon}_z = P^{\varepsilon}_z / \sum_{x\in X} P^{\varepsilon}_x$ tenemos que :

$\lim_{\varepsilon\to 0} \mu^{\varepsilon}_z = \lim_{\varepsilon\to 0} P^{\varepsilon}_z / \sum_{x\in X} P^{\varepsilon}_x = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma^*} P^{\varepsilon}_z / \varepsilon^{-\gamma^*} \sum_{x\in X} P^{\varepsilon}_x =$

$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma^*} P^{\varepsilon}_z / \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma^*} \sum_{x\in X} P^{\varepsilon}_x$ y por (5.6) y (5.7) se tiene que

$\lim_{\varepsilon\to 0} \mu^{\varepsilon}_z = 0$ si $r(T) = \gamma(z) > \gamma^*$ y

$\lim_{\varepsilon\to 0} \mu^{\varepsilon}_z > 0$ si $r(T) = \gamma(z) = \gamma^*$

Entonces se ha demostrado que $\lim_{\varepsilon\to 0} \mu^{\varepsilon}$ existe y que su soporte es el conjunto de estados z tal que minimizan $\gamma(z)$.

Como μ^{ε} satisface la ecuación $\mu^{\varepsilon} P^{\varepsilon} = \mu^{\varepsilon} \ \forall \varepsilon > 0$, se tiene por la segunda condición de la regularidad que $\mu^0 P^0 = \mu^0$.

Entonces μ^0 es una distribución estacionaria de P^0. Esto completa la demostración del lema 5.1.

Como μ^0 es una distribución estacionaria de P^0 ; $\mu_z^0 = 0 \ \forall\ z$ que no es recurrente bajo P^0.

Es fácil ver que todos los estados contenidos en una misma clase de comunicación recurrente tienen el mismo potencial estocástico, porque si tomamos un estado x en una clase X_j con T el x-árbol en G con potencial $\gamma(x)$ y y otro estado en X_j también podemos tomar una ruta con resistencia cero de x a y; la unión de esta ruta y el x-árbol contiene un y-árbol T' cuya resistencia es menor o igual a T porque sólo se agregaron aristas con resistencia cero.

Un argumento simétrico se puede emplear ahora con respecto a x donde T tiene una resistencia menor o igual a T' lo que implica que $\gamma(x) = \gamma(y)$.

Ahora se demostrará que el potencial de cada vértice de una clase de comunicación recurrente X_j es precisamente la resistencia mínima γ_j entre todos los j-árboles en la gráfica $\mathfrak{S}$.

Lema 5.2 $\gamma(x) = \gamma_j$ es el potencial estocástico para todos los estados $x \in X_j$.

<u>*Demostración*</u>

Tómese un estado fijo x_i en cada una de las clases X_i.

Demostraremos primero que $\gamma(x_i) \leq \gamma_i$ para toda i.

Tómese una clase fija X_j y un j-árbol Π en $\mathfrak{S}$ cuya resistencia $r(\Pi)$ sea igual a γ_j. Para toda $i \neq j$ existe exactamente una arista $(i, j) \in \Pi$ que sale del vértice $X_i \in \mathfrak{S}$. En la gráfica G cuyos vértices son los estados, tómese una ruta $D_{ii'}$ de los estados x_i, $x_{i'}$ fijos correspondientes a las clases X_i, $X_{i'}$ y cuya resistencia de x_i a $x_{i'}$ es $r_{ii'}$.

Ahora tómese un subárbol T_i en G tal que éste expanda a todos los vértices de X_i; es decir, para todo vértice en X_i existe una única ruta a x_i.

Como X_i es una clase de comunicación recurrente de P^0, T_i puede escogerse de manera que tenga resistencia total cero.

Sea E igual a la unión de todas las aristas en los árboles T_i, $i \in V(\mathfrak{S})$ y las aristas que conforman todas las rutas $D_{ii'}$ en G, $i \in V(\mathfrak{S})$ y donde $(i, i') \in \Pi$ en $\mathfrak{S}$. Por construcción E contiene al menos una ruta de x a x_j $\forall\, x \in X$, $x_j \in X_j$. Entonces E contiene un subconjunto de aristas que forman un x_j- árbol T en G.

La resistencia total de éste árbol es menor o igual que la suma de las resistencias de las rutas $D_{ii'}$ la cual es igual a $r(\Pi)$ entonces $r(T) \leq r(\Pi) = \gamma_j$ y como $\gamma(x_j) \leq r(T)$ implica que $\gamma(x_j) \leq \gamma_j$.

Para demostrar que $\gamma(x_j) \geq \gamma_j$ tómese la clase X_j fija para el estado $x_j \in X_j$ que se tomó fijo al inicio, escójase un x_j-árbol T en G cuya resistencia sea la menor de todos los x_j-árboles en G cuyo conjunto de vértices es X. Etiquétese cada uno de los vértices fijos x_i de cada clase X_i como "i" ; con referencia a la clase "i" a la cual pertenecen. Estos vértices serán llamados vértices especiales.

Una conjunción en T es cualquier vértice y que tiene al menos 2 aristas entrantes que pertenecen a T. Si la conjunción y no es un vértice especial, márquese "i" si existe una ruta en G con resistencia cero de y a cualquier vértice de X_i. Existe al menos una clase X_i de éstas porque son las clases recurrentes de P^0 y si hay varias clases de éstas ; tómese cualquiera de ellas como etiqueta.

Cada vértice que se haya marcado, o es un vértice especial, o una conjunción, o ambos.

Defínanse los predecesores especiales de un estado $x \in X$ como los vértices especiales x_i que estrictamente preceden a x en el árbol fijo T, es decir los vértices tales que hay una ruta de x_i a x en T y que no exista otro vértice especial x_j en la ruta x_i - x.

Si x_i es un predecesor especial de un vértice x etiquetado con k, entonces la única ruta en el árbol T de x_i a x tiene por lo menos una resistencia de r_{ik} . . . (5.8)

Esta propiedad se cumple porque : como x es etiquetado puede ser especial o conjunción (o ambos). Si es un vértice especial entonces pertenece a una clase de recurrencia k porque ésta es su etiqueta ; entonces la ruta x_i - x en el mejor de los casos sale de la clase X_i y entra a la clase X_k sin pasar por otra clase ; en este caso, la resistencia de esta ruta es r_{ik}. En caso de pasar por otra clase, la resistencia es mayor a r_{ik}.

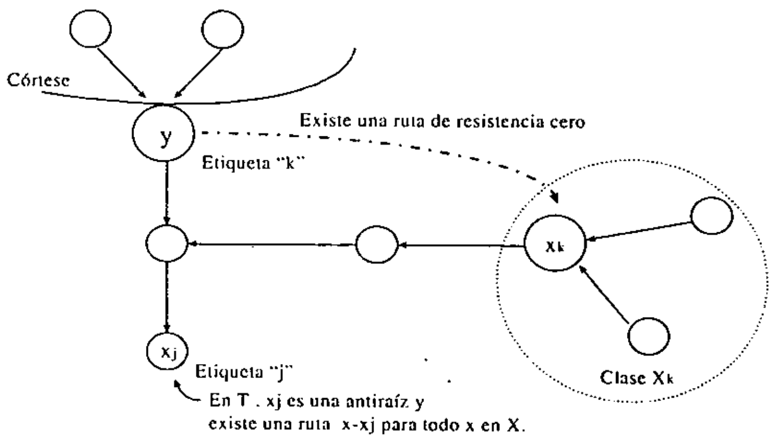
En caso de que el vértice especial sea una conjunción, se sabe que hay una ruta x-x_k en G con resistencia cero del vértice x a la clase X_k , ya que k es su etiqueta. Ahora, la unión de las rutas x_i - x y x - x_k forman una resistencia mayor o igual que la resistencia de la ruta x_i - x_k en el árbol T, la cual es r_{ik} ; (ya que la ruta x_i - x - x_k no pertenece al necesariamente al árbol T) entonces la resistencia de x_i-x es mayor o igual a r_{ik}.

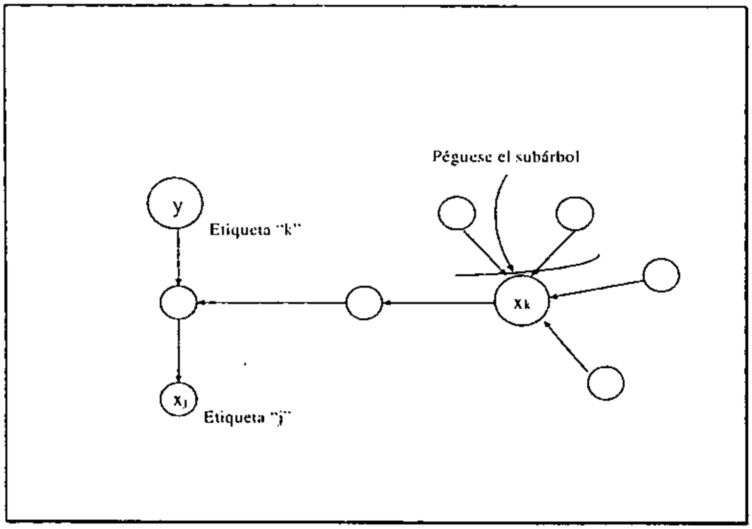
El siguiente paso es ejecutar ciertas operaciones en el árbol T que preservan la propiedad (5.8) en el árbol y que trae como consecuencia una estructura muy parecida a la estructura que tiene un j-árbol en $\mathfrak{I}$.

Haremos estas operaciones mediante la eliminación sucesiva de conjunciones que no son vértices especiales.

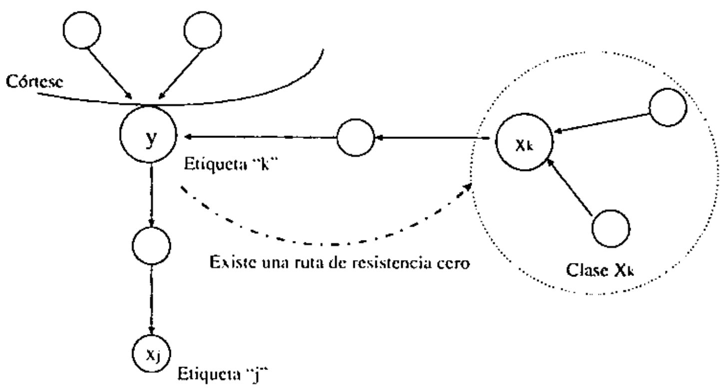
Supóngase que T contiene una conjunción *y*, que no es un vértice especial, y sea k su etiqueta. Se distinguen dos casos, dependiendo de si el vértice especial x_k es o no un predecesor de *y* en el árbol T.

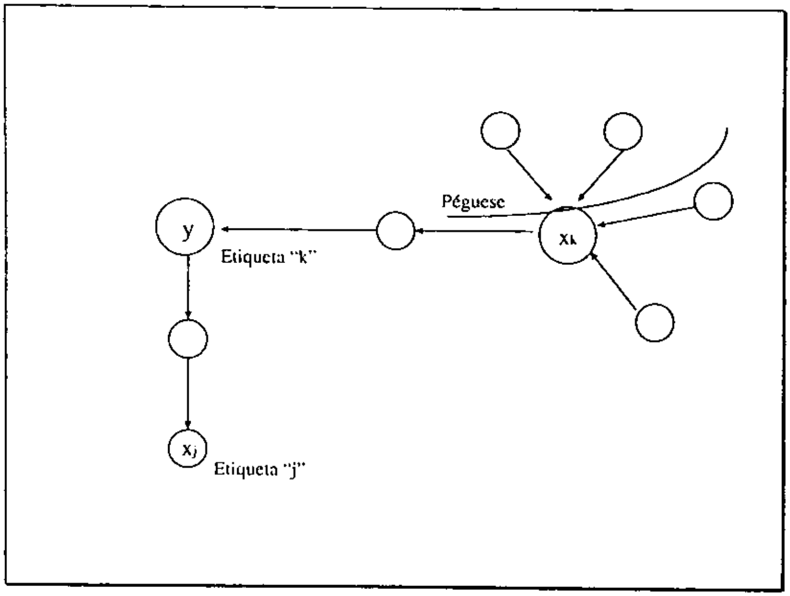
Caso 1 : Si x_k no es un predecesor de *y* en el árbol T, quítese el subárbol que consiste de todas las aristas y vértices que preceden a *y* y péguense en el árbol en el vértice x_k como se ve en la siguiente figura :





Caso 2 : Si x_k es un predecesor de *y* córtese el subárbol que consiste de todas las aristas y vértices que preceden a *y* (excepto en la ruta que va de x_k a *y* y todos los predecesores de x_k) y péguese este subárbol en x_k como lo indica la figura :





Estas dos operaciones preservan la propiedad (5.8) ya que si tomo un predecesor especial de un vértice etiquetado x : los únicos vértices que cambiaron de predecesores fueron y y x_k pero x_k tiene la etiqueta "k" y y también. La ruta x - y con predecesor x es igual a la ruta x-x_k excepto en el último vértice el cual es x_k ó y, pero éstos tienen etiqueta k, entonces la resistencia de x-x_k es igual a la resistencia de x-y.

Cada una de las operaciones anteriores reduce en uno el número de conjunciones que no son vértices especiales. Entonces repitiendo las operaciones, eventualmente se obtendrá un x_j-árbol T* en donde cada conjunción es un vértice especial, la propiedad (5.8) se cumple y T* tiene la misma resistencia total que T.

Ahora constrúyase un j-árbol Π con el conjunto de vértices $J=\{X_1, \ldots, X_n\}$ como sigue :

Para dos clases de comunicación recurrente X_i , $X_{i'}$, póngase el arco (i, i') en Π si y solo si $x_i \in X$ es un predecesor especial de $x_{i'} \in X$ en T*. Por construcción Π forma un j-árbol puesto que $x_j \in X$ es sucesor de todos los x_i 's.

Sea $D^*_{ii'}$ la única ruta en T* de x_i a $x_{i'}$, por la propiedad (5.8) la resistencia de $D^*_{ii'}$ es al menos $r_{ii'}$ además todas las rutas $D^*_{ii'}$ son disjuntas en aristas puesto que cada conjunción (que es donde se podrían dar las intersecciones no vacías de rutas) es un vértice especial.

Como T* contiene la unión de estas rutas $D^*_{ii'}$, la resistencia de T* es al menos

$\Sigma_{(i,i')\in\Pi} r_{ii'}$. Pero $\Sigma_{(i,i')\in\Pi} r_{ii'}$ es la resistencia de Π.

Por lo tanto $\gamma(x_j) = r(T^*) \geq \Sigma_{(i,i')\in\Pi} r_{ii'} = r(\Pi) \geq \gamma_j$

Esto completa la demostración del lema 5.2 que junto con el lema 1 demuestra el teorema 5.1

Se demostró entonces, que $\lim_{\varepsilon\to 0}\mu^{\varepsilon} = \mu^{0}$, donde μ^{0} es una de las distribuciones estacionarias de P^{0}. Entonces las perturbaciones seleccionan entre las clases de comunicación recurrente. De hecho, las perturbaciones normalmente seleccionan exactamente una de las clases de comunicación recurrente de P^{0}, ya que en un problema de antiarborescencias, es difícil que se presente el caso en que dos antiarborescencias distintas tengan como peso mínimo el mismo número; y que este número sea el mínimo que se obtiene de entre todos los estados.

La clase seleccionada (o las clases seleccionadas) fueron calculadas encontrando una ruta de menor resistencia entre una clase y otra; y entonces la clase seleccionada depende solamente de las resistencias $r(x, y)$; esto es, solamente en el orden de la magnitud de las distintas perturbaciones.

Esto es importante para las aplicaciones, donde la mayoría de las veces puede conocerse la forma de las perturbaciones pero no su valor preciso; es decir, se pueden encontrar aplicaciones en las que difícilmente se conozcan las probabilidades de cometer errores y sólo se tenga información de que estos errores son posibles de cometer.

Lo que es importante, es considerar que se tiene una probabilidad pequeña de cometer errores y que todos los errores son posibles, además de que los agentes los cometen independientemente uno del otro.

Con el teorema anterior se puede concluir un resultado particular para los juegos de adaptación.

Sea P^{ε} un Juego de Adaptación con errores como se definió en (4.1)

Constrúyase la gráfica de los estados H del proceso P^{ε}.

Sean $H_1, H_2, \ldots \ldots, H_J$, las clases de comunicación recurrente de la gráfica de estados del proceso de P^{ε}. Estas clases son disjuntas y están caracterizadas por las tres propiedades siguientes :

i) De cualquier estado existe un camino de cero resistencias para al menos una de las clases H_j.

ii) En cada clase H_j existe un camino de cero resistencias de cualquier estado a otro.

iii) Todo arco que sale de H_j tiene resistencia positiva.

En la gráfica estamos dividiendo a los estados de H conforme se puede llegar de un estado a otro sin cometer errores, en cada una de las transiciones, desde luego existen muchas transiciones de un estado en que se cometen errores y esto nos dice que para pasar de una clase a otra solo se hará cometiendo errores. El proceso no se saldrá de una comunicación recurrente en caso de que nunca se cometan errores en las transiciones. A pesar de que el proceso es irreducible, en realidad no se puede pasar de ciertos estados a otros en un número finito de pasos sin cometer errores.

En la gráfica de estados de P^{ε}, los pesos de las aristas son esencialmente independientes de las distribuciones particulares q_i y la probabilidad de error λ_i.

Ahora, dados dos estados distintos H_i y H_j considérense todos los caminos dirigidos que empiezan en H_i y terminan en H_j. Existe al menos uno, porque el proceso P^{ε} es irreducible. En todos estos caminos, encuéntrese el que tenga resistencia mínima total y denótese esta resistencia como r_{ij}. Claramente $r_{ij} \geq 0$ y se puede calcular como un problema de rutas más cortas.

Nótese que r_{ij} es independiente de qué vértice en que se empieza en H_i y en qué vértice se termina en H_j, porque cualesquiera dos vértices en la misma clase son alcanzables entre uno y otro con resistencia cero.

Constrúyase además la gráfica $\mathfrak{I}$ de las clases de P^{ε}.

Con la construcción de la gráfica de estados y la gráfica de las clases de P^ε, se tiene todas las hipótesis necesarias para aplicar el teorema 5.1 y con ello obtener una caracterización de los estados estocásticamente estables del juego de adaptación con errores.

Es sencillo ver que el siguiente teorema es un caso particular del teorema 5.1.

Teorema 5.2 Sea G un juego n-personal en un espacio de estrategias finito. Los estados estocásticamente estables del juego de adaptación P^ε son los estados contenidos en las clases de comunicación recurrente de P^0 con potencial estocástico mínimo. Estos estados son independientes de las probabilidades de experimentación λ_i y de las distribuciones de experimentación q_i mientras estos estados tengan un soporte completo: es decir, mientras λ_i sea distinta de cero para toda i, y todas las estrategias de cada jugador tengan probabilidad positiva de ser experimentadas.

Corolario 5.1 .- Si G es un juego acíclico y $k \leq m/(L_G+2)$, los estados estocásticamente estables del juego de adaptación son las convenciones de potencial estocástico mínimo.

Este corolario es una consecuencia directa del teorema 3.1 y 5.2 Ya que el teorema 5.2 dice Si $\varepsilon \to 0$ entonces μ^ε converge a una distribución estacionaria μ^0 de P^0; es decir, los estados a los que converge el proceso P^0 y que tienen potencial estocástico mínimo; el teorema 3.1 dice cuando un juego es acíclico y $k \leq m/(L_G+2)$: los estados a los que converge el proceso P^0 son las convenciones asociadas al juego sin perturbar.

En resumen: podemos encontrar los estados a los que converge el juego de adaptación cuando el error se acerca a cero, calculándolos en tres pasos :

i) Identificar las clases de comunicación recurrentes del proceso P^0 sin errores. Para juegos n-personales en general estas clases pueden ser bastante complicadas. Si el juego es débilmente acíclico y la muestra es lo suficientemente incompleta, el teorema 3.1 nos dice que las clases recurrentes corresponden 1-1 con el equilibrio de Nash de estrategias puras, el cual es fácil de identificar.

ii) Calcular las resistencias mínimas para moverse de una clase recurrente a otra. En teoría esto envuelve resolver una serie de rutas más cortas, pero en la práctica el cálculo puede a veces hacerse directamente de la matriz de pagos del juego.

Construir una digráfica con estas resistencias como pesos, y encontrar la antiarborescencia que tenga menor peso. Esto identifica la(s) convención(es) estocásticamente más estable(s), que es única excepto en caso de empates.

CAPITULO VI

EJEMPLOS Y APLICACIONES

EL CASO DE 2X2

Existen ejemplos que pueden adaptar su problemática a juegos de 2x2.

Cualquier situación en donde estén involucrados dos agentes y tengan algún conflicto de intereses y cada uno de ellos tenga dos caminos a seguir, la problemática puede modelarse con un juego de 2x2.

Por ejemplo :

-2 empresas que estén compitiendo el mercado de algún producto y tienen como opción pactar entre ellas el precio de dicho producto o violar lo pactado y bajar los precios.

-En el poder legislativo de algún país se puede pensar que los dos jugadores son la derecha y la oposición y las dos estrategias a seguir son la promulgación o derogación de alguna propuesta de ley.

-La política a seguir entre un sindicato y una empresa, ambas pueden decidir entre una política agresiva o una conciliadora.

La lucha de dos clases sociales, donde la clase en el poder tiene como estrategias entre ser una clase opresora o conciliadora y la otra clase tiene como estrategias luchar por el poder o someterse a poder de la otra clase.

Cuando se tiene un juego de 2x2, cada jugador o agente tiene dos estrategias puras a seguir, cada estrategia puede tener dos pagos distintos según la respuesta del jugador contrario.

La estrategia que contenga el mayor pago para cada jugador es una estategia que puede ser escogida cuando el jugador tiene mayor "ambición" en la función de pago. No obstante, jugar esa estrategia no garantiza obtener el mayor pago, ya que es posible que el otro jugador no juegue con la estrategia que le dará mayor pago al primero y pueda llevar a éste a obtener un pago menor. Esta estrategia puede verse como una estrategia agresiva puesto que el jugador ambiciona a obtener el mayor pago.

Si la estrategia agresiva no domina estrictamente a la otra estrategia, quiere decir que jugando con la otra estrategia se puede obtener un pago mayor o igual que al usar la estrategia agresiva según la respuesta del otro jugador, por esto el jugador puede también analizar en qué estrategia se encuentra la mínima pérdida, es posible que para un jugador exista una estrategia que contenga el mayor pago y también la mayor pérdida. Si el pago más pequeño se encuentra en la estrategia agresiva, entonces la otra estrategia es la que contiene la pérdida mínima, entonces ambas estrategias son tomadas en cuenta por el jugador para ser jugadas.

La estrategia que tiene la pérdida mínima es menos ambiciosa y puede ser considerada como solidaria o conciliadora. Entonces cada jugador puede diferenciar a sus estrategias, una como agresiva y la otra como conciliadora.

El problema para un jugador es que tiene que escoger entre una estrategia agresiva y una estrategia conciliadora que es donde el jugador puede obtener la mayor ganancia y la mínima pérdida respectivamente.

En situaciones donde los jugadores pueden tener una estrategia agresiva y otra conciliadora puede estudiarse bajo que condiciones existen equilibrios de Nash, y si los hay cúal de ellos será la convención con potencial estocástico mínimo.

Pueden darse 3 casos en los juegos de 2x2 : No existen equilibrios de Nash en estrategias puras, hay solo uno ó hay dos equilibrios.

En el primer caso, el juego puede no ser acíclico

Por ejemplo que un jugador tenga una estrategia agresiva y otra conciliadora no es condición suficiente para que exista un equilibrio de Nash.

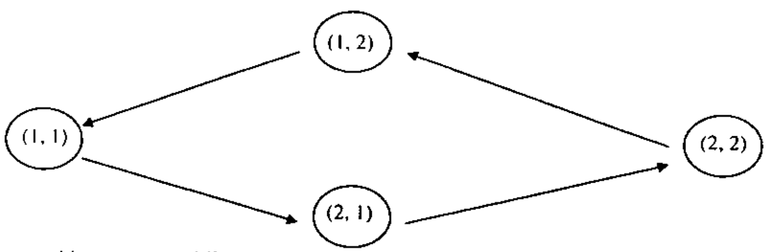
Considérese la siguiente matriz de pagos :

Ejemplo 6.1

5 2	14 -2
9 10	10 12

La estrategia agresiva del jugador 1 es la primer estrategia y la segunda estrategia es su estrategia conciliadora.

La gráfica de las mejores réplicas es



Por lo que el juego no es acíclico.

En general cuando $u_{11} < u_{21}$, $v_{21} < v_{22}$, $u_{22} < u_{12}$ y $v_{12} < v_{11}$ el juego no es acíclico.

Se puede dar el caso en donde los juegos tienen un solo equilibrio de Nash, en particular el dilema del prisionero cuya matriz de pagos es

u_{11} v_{11}	u_{12} v_{12}
u_{21} v_{21}	u_{22} v_{22}

donde : $u_{11} > u_{21}$, $v_{11} > v_{12}$ y $u_{22} < u_{12}$ ó $v_{22} < v_{21}$

Una problemática económica que se adapta a esta situación es cuando dos empresas están compitiendo en un mercado, y cuya estrategia conciliadora consiste en vender a un precio pactado entre ellas, y la agresiva consiste en violar lo pactado y bajar los precios para apoderarse de la mayor parte del mercado.
Dependiendo de la "fuerza" de cada empresa y de las condiciones del mercado se estarían en distintos casos.

Ejemplo 6.2:

	agresiva	conciliadora
agresiva	1 1	5 0
conciliadora	0 5	3 3

Aquí ambos jugadores son igualmente fuertes porque cuando ambos usan la misma estrategia ambos obtienen el mismo pago es decir obtienen los mismos beneficios en el mercado y ambos jugadores están igualmente propensos a traicionar el precio pactado cuando se encuentran ambos en estrategias conciliadoras.

El equilibrio de Nash se da cuando ambos usan sus estrategias agresivas porque una vez que se da esta situación ninguno tendrá intención de regresar a la estrategia conciliadora ya que saldrían totalmente perjudicados en la competencia del mercado.

Dependiendo de las condiciones de cada empresa, pueden variar las condiciones que imperarán en el mercado y entonces la matriz de pago puede variar. Supongamos que una empresa es más poderosa económicamente que la otra y puede obtener mayores beneficios o salir menos afectada conforme se usan las diferentes estrategias en el juego.

Ejemplo 6.3 :

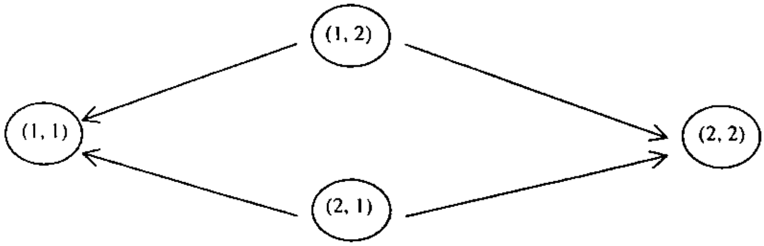
	agresiva	conciliadora
agresiva	5 2	15 0
conciliadora	3 9	9 4

Aquí la primer empresa es más poderosa porque obtiene mayores beneficios en todos los casos, excepto cuando la empresa poderosa usa la estrategia conciliadora y la otra empresa usa la agresiva, la primera pierde la mayoría en el mercado.

Si tomamos a la población de todas las empresas que compiten en un mercado y constantemente van cambiando las dos empresas que son líderes, podemos estudiar el comportamiento de las empresas cuando son una de las dos más competidoras en un momento dado, mediante los resultados que se obtuvieron anteriormente; es decir , verificar si existen conductas que se repiten entre las dos empresas líderes no importando que éstas vayan cambiando con el tiempo. Si suponemos que las empresas deciden por una estrategia agresiva o conciliadora con una muestra de lo que las otras empresas han hecho en los periodos de tiempo más reciente una vez que ocupan uno de los dos lugares líderes. podemos saber si se llega a una convención eventualmente.

El teorema 3.1 nos dice que las empresas llegarán a una conducta convencional eventualmente siempre y cuando las empresas no cometan errores o no experimenten y el tamaño de la muestra sea pequeña en relación con el tamaño de la historia, además de que el juego tiene que ser acíclico.

La gráfica de las mejores réplicas asociado al ejemplo 6.3 es :



Se puede observar que es acíclica débilmente y por lo tanto puede aplicarse el teorema 3.1, además aquí podemos saber que la única convención a la que llegarán las empresas es que las dos líderes siempre usen sus estrategias agresivas puesto que es el único equilibrio de Nash con que cuenta el juego. Así las empresas siempre que estén compitiendo por la mayoría del mercado eventualmente solo usarán la estrategia agresiva y no buscarán pactar el precio del producto en el mercado con las otras empresas.

Cuando las empresas cometen errores o experimentan pero la probabilidad de experimentar es pequeña se observará la convención de usar la estrategia agresiva casi todo el tiempo por lo que la estrategia de ser solidario no se dará por las empresas en la mayoría de los casos.

Existen situaciones que podemos modelar con juegos de 2x2 que tienen dos equilibrios de Nash, por ejemplo cuando en un congreso se quiere aprobar una ley y el congreso está dividido en dos partes iguales con ideas políticas diferentes se tiene la problemática de decisión en cada una de las partes. Ambas tendencias políticas tienen dos estrategias a seguir sean éstas las de aprobar o de no aprobar dicha ley, los dos equilibrios se dan cuando ambas partes están de acuerdo.

En este caso y en otros donde se tengan dos equilibrios de Nash podemos estudiar de manera general cuál de ellos es el estocásticamente más estable cuado el juego se repite y los jugadores cometen errores.

Con ello podremos saber qué equilibrio se observará casi todo el tiempo.

Sea G un juego matricial de 2x2 con 2 equilibrios de Nash estrictos en estrategias puras, es decir: dado un equilibrio de Nash se tiene que cada estrategia que pertenezca a éste es la única mejor réplica para cada jugador.

Considérese un juego de 2x2 con matriz de pagos M:

u_{11} v_{11}	u_{12} v_{12}
u_{21} v_{21}	u_{22} v_{22}

Donde $u_{11} > u_{21}$, $v_{11} > v_{12}$, $u_{22} > u_{12}$ y $v_{22} > v_{21}$.
Esta matriz de pagos tiene dos equilibrios de Nash: (1 , 1) y (2 ,2)

En este caso en que la matriz de pagos tiene dos equilibrios de Nash, un jugador puede discriminar entre uno y otro mediante la medición del riesgo total que puede llegar a tener; es decir, si los equilibrios son : (1 , 1) y (2, 2) al jugador 1 le puede interesar jugar la estrategia 2 y que el jugador 2 también así lo haga, pero si el jugador 2 juega con la estrategia 1 entonces el jugador 1 ha tenido un costo de oportunidad de $u_{11} - u_{21}$ por no haber jugado la estrategia 1. De igual manera si el jugador 1 juega con la estrategia 1 y el jugador 2 responde con la estrategia 2, el jugador 1 tiene un costo de oportunidad de $u_{22} - u_{12}$. El costo de oportunidad total o el riesgo total del jugador 1 es entonces $(u_{11} - u_{21}) + (u_{22} - u_{12})$.

De igual manera se puede ver que el costo de oportunidad total o el riesgo total del jugador 2 es $(v_{11} - v_{12}) + (v_{22} - v_{21})$.

Se puede medir el riesgo que tiene cada jugador al intentar llegar a cada equilibrio.
Para el equilibrio (1,1) el riesgo para el jugador 1 es $(u_{22} - u_{12}) / (u_{11} + u_{22} - u_{12} - ua_{1})$, y para el jugador 2 es $(v_{22} - v_{21}) / (v_{11} + v_{22} - v_{21} - v_{12})$. El menor riesgo será el que determine de alguna manera si se jugará o no la estrategia 1, puesto que los jugadores buscan minimizar su costo de oportunidad.

Igualmente para el equilibrio (2,2) el riesgo para el jugador 1 es $(u_{11} - u_{21}) / (u_{11} + u_{22} - u_{21} - u_{12})$, y para el jugador 2 es $(v_{11} - v_{12}) / (v_{22} + v_{11} - v_{12} - v_{21})$. El menor riesgo será el que determine igualmente si se jugará o no la estrategia 2.

Se han construido los elementos que llevan a la definición de dominación por riesgo, la cual establece una preferencia entre uno y otro equilibrio de Nash de la matriz de pagos M, mediante la minimización de los costos de oportunidad de cada jugador.

Definición. Sean

$$\gamma_1 = \min \{ (u_{11} - u_{21}) / (u_{11} + u_{22} - u_{21} - u_{12}), (v_{11} - v_{12}) / (v_{22} + v_{11} - v_{12} - v_{21}) \}$$

$$\gamma_2 = \min \{ (u_{22} - u_{12}) / (u_{11} + u_{22} - u_{12} - ua_{1}), (v_{22} - v_{21}) / (v_{11} + v_{22} - v_{21} - v_{12}) \}$$

Tenemos que $U = (u_{11}, v_{11})$ *domina por riesgo* a $V = (u_{22}, v_{22})$ cuando $\gamma_1 > \gamma_2$; si $\gamma_1 \geq \gamma_2$ entonces U *domina por riesgo* a V en *forma débil*.

V *domina por riesgo* a U cuando $\gamma_1 < \gamma_2$; si $\gamma_1 \leq \gamma_2$ entonces V *domina por riesgo* a U en *forma débil*.

Estabilidad Genérica. Un equilibrio de Nash de estrategias puras es genericamente estable si la convención asociada es estocásticamente estable, para toda k y m suficientemente grande, tal que $k \leq m / (L_G + 2)$.

Teorema 6.1 Sea G un juego de 2x2 con dos equilibrios de Nash estrictos en estrategias puras. El equilibrio genericamente estable es el equilibrio de Nash que domina por riesgo al otro en forma débil.

Demostración

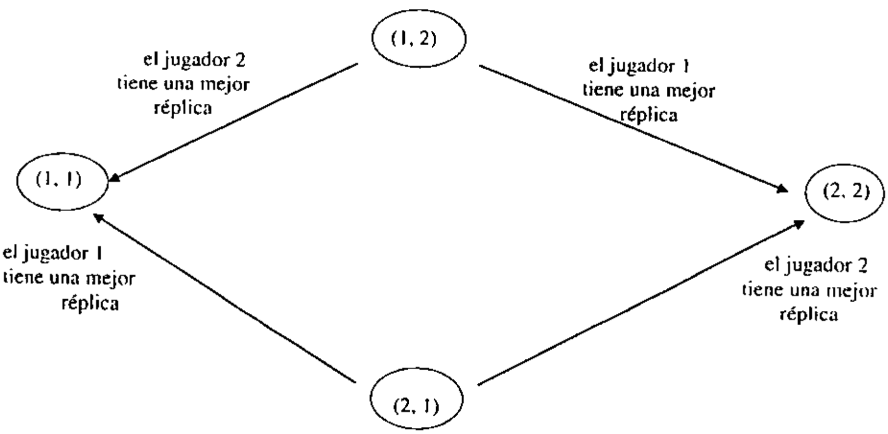
Sin pérdida de generalidad y en base a las hipótesis, el juego se puede escribir de la forma :

jugador 1 \ jugador 2		
	a_{11} b_{11}	a_{12} b_{12}
	a_{21} b_{21}	a_{22} b_{22}

El juego tiene como equilibrios de Nash a las estrategias (1, 1) y (2, 2), entonces se tiene que : $a_{11} > a_{21}$, $b_{11} > b_{12}$ $a_{22} > a_{12}$ y $b_{22} > b_{21}$.

Además, la estructura que necesita el juego para tener dos equilibrios de Nash estrictos es simplemente que los equilibrios no coincidan ni en renglones ni columnas.

La gráfica de mejores réplicas asociada al juego es :



Es claro que el juego es acíclico y que $L_G=1$.

El teorema 3.1 dice que si se tiene un juego acíclico y $k \leq m / (L_G + 2)$, entonces el juego de adaptación converge casi seguramente a una convención ; entonces para que el teorema se cumpla es necesario que $k \leq m / (L_G + 2) = m / (1 + 2) = m / 3$.

Así los estados absorbentes serán h_1=((1, 1), (1, 1),... ..., (1, 1)) y h_2= ((2,2),(2,2),... ...(2, 2)) ; cumpliéndose entonces las hipótesis del teorema, así el juego de adaptación convergerá casi seguramente a uno de los dos equilibrios.

Para determinar cual de los dos equilibrios será "seleccionado", será necesario calcular el equilibrio estocásticamente más estable; ésto se logra encontrando la ruta de menor resistencia entre las rutas $h_1 \rightarrow h_2$ y $h_2 \rightarrow h_1$ es decir, de las convenciones h_1 y h_2 se encuentra cuál de ellas tiene el potencial estocástico mínimo.

Primero calcularemos la resistencia mínima para ir de h_1 a h_2 ; de hecho se tomará en cuenta cuando se equivoca un sólo jugador para que la resistencia tenga valor mínimo de 1; pues en caso de que ambos jugadores se equivocaran, la resistencia sería de 2 .Sea h_1 el estado al tiempo $t = m$: para ir de h_1 a h_2 se requiere que por lo menos un jugador escoja por error la estrategia número 2. Más aún: el jugador debe de cometer el error de escoger la estrategia número 2, las suficientes veces para que exista al menos una muestra de tamaño k donde la mejor réplica del otro jugador sea la estrategia número 2. De otro modo el proceso no puede encontrarse en el estado absorbente h_2.

Suponga por ejemplo, que el jugador 1 escoge por error la estrategia número 2 en los periodos $t = m+1$ a $t= m+k'$, donde $k' \leq k$. A partir de ahí, el jugador 1 no comete más errores.

Si el jugador 2 escoge una muestra que incluye estas k' elecciones de la estrategia número 2 y k –k' elecciones de la estrategia número 1 hechas por parte del jugador 1; y en base a la definición de mejor réplica para el jugador dos, éste contestará con la estrategia número 2 si se cumple:

$$u_2\,(X\,/\,\text{jugador 2 juega 2}) \geq u_2\,(X\,/\,\text{jugador 2 juega 1}) \qquad (6.1)$$

donde $X=(1- k'/k,\ k'/k)$ que es la estrategia mixta del jugador 1 que resulta de la muestra tomada por el jugador 2.

La desigualdad (6.1) depende del valor de k' ya que (6.1) es igual a :

$$(1-k'/k)b_{12} +(k'/k)\ b_{22} \geq (1-k'/k)b_{11}+ (k'/k)\ b_{21}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_{12} - (k'/k)\ b_{12} +(k'/k)\ b_{22} \geq b_{11}- (k'/k)\ b_{11} + (k'/k)\ b_{21}$$

$$\Leftrightarrow \quad (k'/k)\ b_{22} + (k'/k)\ b_{11} - (k'/k)\ b_{12} - (k'/k)\ b_{21} \geq b_{11} - b_{12}$$

$$\Leftrightarrow \quad (k'/k)\ (b_{22} + b_{11} - b_{12} - b_{21}) \geq b_{11} - b_{12}$$

$$\Leftrightarrow \quad k' \geq k\ (b_{11} - b_{12})\ /\ (b_{22} + b_{11} - b_{12} - b_{21}) \quad (6.2)$$

Si esta desigualdad se cumple, entonces la estrategia 2 está entre las mejores réplicas del jugador 2, así que este jugador podrá escogerla con probabilidad positiva.

Supóngase que (6.2) se cumple y que la muestra del jugador 2 incluye todos los k' errores del jugador 1 en los periodos de $t = m+k'+1$ a $t = m+k'+k$. Dado que m es lo suficientemente grande respecto a k (es suficiente si $m \geq 2k$), este evento tiene probabilidad positiva.

Entonces la mejor réplica del jugador 2 será su estrategia número 2 desde el periodo $t = m+k'+1$ hasta el periodo $t = m+k'+k$ y ninguna de las elecciones de la estrategia 2 de parte del jugador 2 es error. En el periodo $t =m+k'+k+1$, el jugador 1 tiene una probabilidad positiva de tener una muestra que incluya todas las elecciones por parte del jugador 2 de la estrategia 2; mientras que éste puede de nuevo tomar la muestra que incluye todos los errores del jugador 1, en cuyo caso la mejor réplica para ambos jugadores es la estrategia 2. En el siguiente periodo, existe nuevamente una probabilidad positiva de que ambos jugadores tengan una muestra que incluya el suficiente número de veces la estrategia número 2, para que la mejor réplica de ambos jugadores sea nuevamente la estrategia número 2. Estas condiciones se mantienen hasta el periodo $t = m+3k-1$. En el periodo $t = m+3k$ la estrategia número 2 ha sido jugada el suficiente número de veces por ambos jugadores, para que la única muestra que puedan hacer los jugadores esté compuesta únicamente de la estrategia número 2. Esto porque $k \leq m/3$.

Entonces el proceso converge con probabilidad positiva al estado absorbente h_2 ; en otras palabras, son suficientes k' errores para mover el proceso del estado h_1 al estado h_2 dado que k' satisface (6.2) y m / k es lo suficientemente grande.

Análogamente, el proceso converge con probabilidad positiva a h_2 si el jugador 2 elige la estrategia 2 por error en k'' periodos en donde :

$$(1-k''/k)a_{11} + (k''/k)\ a_{12} \leq (1-k''/k)a_{21} + (k''/k)\ a_{22}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{11} - (k''/k)\ a_{11} + (k''/k)\ a_{12} \leq a_{21} - (k''/k)\ a_{21} + (k'/k)\ a_{22}$$

$$\Leftrightarrow \quad (k''/k)\ a_{21} + (k''/k)\ a_{12} - (k''/k)\ a_{11} - (k''/k)\ a_{22} \leq a_{21} - a_{11}$$

$$\Leftrightarrow \quad (k''/k)\ (-a_{21} - a_{12} + a_{11} + a_{22}) \geq a_{11} - a_{21}$$

$$\Leftrightarrow \quad k'' \geq k\ (a_{11} - a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12})$$

Sea

$$R_1 = \min \{\ (a_{11} - a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}),\ (b_{11} - b_{12}) / (b_{22} + b_{11} - b_{12} - b_{21})\ \}$$

Para todo número real x, sea $\lceil x \rceil$ el número que denota el menor entero mayor o igual a x. La resistencia de ir del estado h_1 al estado h_2 es $\lceil R_1 k \rceil$.

Un argumento similar puede hacerse en caso de que se quiera calcular el número mínimo de errores que se tienen que cometer para pasar del estado h_1 al estado h_2. Si suponemos que estamos en el estado h_2 y el jugador 1 es quien se equivoca al jugar usando la estrategia 1, tendrá que cometer este error un número k' de veces que sea suficiente para que el otro jugador pueda tener una muestra en donde su mejor réplica sea la estrategia 1. Entonces, dada la estrategia mixta del jugador 1 que se induce de la muestra que contiene todos los errores ; la mejor réplica del jugador 2 será la estrategia 1 si se cumple la siguiente desigualdad :

$$(1-k'/k)b_{21} + (k'/k)\ b_{11} \geq (1-k'/k)b_{22} + (k'/k)\ b_{12}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_{21} - (k'/k)\ b_{21} + (k'/k)\ b_{11} \geq b_{22} - (k'/k)\ b_{22} + (k'/k)\ b_{12}$$

$$\Leftrightarrow \quad (k'/k)\ b_{11} + (k'/k)\ b_{22} - (k'/k)\ b_{21} - (k'/k)\ b_{12} \geq b_{22} - b_{21}$$

$$\Leftrightarrow \quad (k'/k)\ (b_{11} + b_{22} - b_{21} - b_{12}) \geq b_{22} - b_{21}$$

$$\Leftrightarrow \quad k' \geq k\ (b_{22} - b_{21}) / (b_{11} + b_{22} - b_{21} - b_{12})$$

Y haciendo ahora la suposición de que el jugador 2 es quien se equivoca en un número k'' de veces; se tiene que, para que la estrategia mixta que se induce de la muestra que contiene todos los errores del jugador 2, pueda llevar al jugador 1 a responder con la estrategia 1, es necesario cumplir con la siguiente desigualdad:

$$(1-k''/k)a_{12} + (k''/k)\ a_{11} \leq (1-k''/k)a_{22} + (k''/k)\ a_{21}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{12} - (k''/k)\ a_{12} + (k''/k)\ a_{11} \leq a_{22} - (k''/k)\ a_{22} + (k'/k)\ a_{21}$$

$$\Leftrightarrow \quad (k''/k)\ a_{11} + (k''/k)\ a_{22} - (k''/k)\ a_{12} - (k''/k)\ a_{21} \leq a_{22} - a_{12}$$

$$\Leftrightarrow \quad (k''/k)\ (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}) \geq a_{22} - a_{12}$$

$$\Leftrightarrow \quad k'' \geq k\ (a_{22} - a_{12}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$$

Sea

$$R_2 = \min \{ (a_{22} - a_{12}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}),\ (b_{22} - b_{21}) / (b_{11} + b_{22} - b_{21} - b_{12}) \}$$

Entonces, se muestra similarmente que para ir del estado h_1 al estado h_2 es : [R2·k].

Si $R_1 > R_2$, entonces (1, 1) domina por riesgo a (2, 2) en forma débil, ya que significa que es mayor la resistencia para pasar de h_1 a h_2.

Si $R_1 \geq R_2$, entonces (1, 1) domina por riesgo a (2, 2) en forma débil. Cuando $R_1 > R_2$ entonces la única convención estocásticamente estable es (1,1), para valores suficientemente grandes de k y m / k. Si $R_1 = R_2$, entonces h_1 y h_2 son ambas convenciones estocásticamente estables para valores suficientemente grandes de k y m/k. Con ésto se demuestra el teorema 6.1

Nótese que la discriminación del proceso crece con el tamaño de la muestra, porque los jugadores solo pueden responder a distribuciones de frecuencias que envuelven enteros entre 0 y k. Para k suficientemente grande , el proceso puede distinguir pequeñas diferencias entre las resistencias de los dos equilibrios; es decir, que k sea lo suficientemente grande para distinguir que $[R_1] \neq [R_2]$. Es necesario que ocurran muchos periodos de tiempo para poder discriminar entre un equilibro y otro, puesto que el proceso no podrá distinguir entre una y otra convención si no se ha jugado el juego el número suficiente de veces y además que el tamaño de la muestra de los jugadores es lo suficientemente pequeña con respecto de la historia.

Se ha obtenido entonces una forma de calcular las convenciones estocásticamente más estables, pero es importante notar que dependiendo de los valores de la matriz de pagos se dará un equilibrio u otro. Puede haber un equilibrio que puede ser mejor para un jugador y otro para otro, por ejemplo:

Si tomamos el ejemplo de los que forman parte del poder legislativo en un país en donde las estrategias son aprobar (conciliatoria) o no aprobar (agresiva)una ley y la función de pago representa el nivel de aceptación por parte de los electores o gobernados, y suponiendo que los congresistas solo toman sus decisiones mediante este factor, entonces podemos tener en este ejemplo un juego de 2x2 con dos equilibrios de Nash y obtener distintas situaciones que dependen de la matriz de pago:

Ejemplo 6.4

Matriz I

	aprobar	no aprobar
aprobar	2 10	6 6
no aprobar	-2 -2	10 2

En esta matriz los equilibrios son (aprobar, aprobar) y (no aprobar, no aprobar), el primero y el segundo equilibrio le convienen más al segundo y al primer jugador respectivamente, con igualdad de pagos.

Cuando un jugador no está en el equilibrio que le es conveniente tiene exactamente la misma pérdida que tendría el otro en la situación contraria; además, cuando el juego no está en ninguno de los equilibrios ambos pierden lo mismo o ambos ganan lo mismo. En este caso ambos jugadores son igualmente fuertes.

En este caso la estabilidad genérica se calcula de la siguiente forma :

$$R_1 = \min \{ (a_{11} - a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}), (b_{11} - b_{12}) / (b_{22} + b_{11} - b_{12} - b_{21}) \}$$

$= \min \{ (2 - (-2)) / (2 + 10 - (-2) - 6), (10 - 6) / (2 + 10 - 6 - (-2)) \}$

$= \min \{ (4) / (8), (4) / (8) \} = 1/2$ y

$R_2 = \min \{ (a_{22} - a_{12}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}), (b_{22} - b_{21}) / (b_{11} + b_{22} - b_{21} - b_{12}) \}$

$= \min \{ (10 - 6) / (2 + 10 - 6 - (-2)), (2 - (-2)) / (10 + 2 - (-2) - 6) \}$

$= \min \{ (4) / (8), (4) / (8) \} = 1/2$

Entonces ambas convenciones son estocásticamente más estables y a lo largo del tiempo se darán de igual manera una u otra convención no importando el tamaño de la muestra ni de la historia puesto que ambos jugadores son igualmente fuertes y a la larga no habrá un dominio sobre el otro.

Podemos suponer la misma situación pero ahora con una matriz de pagos como la siguiente:

Matriz 2

	aprobar	No aprobar
aprobar	5 / 7	6 / 6
No aprobar	-2 / -5	12 / 1

En este caso el jugador 1 tiene mayor fuerza puesto que cuando se juega el equilibrio que conviene más al segundo jugador el primer jugador puede cambiar de estratregia y así provocar una pérdida mucho mayor al segundo jugador que cuando se está en la situación contraria y el segundo jugador es el que cambia de estrategia y provoca una pérdida al primer jugador.

Si ambos jugadores buscaran el equilibrio que más les conviene a cada uno se jugaría la estrategia (no aprobar, aprobar) y aquí el segundo jugador sale más dañado.

En este caso la convención asociada se obtiene:

$R_1 = \min \{ (a_{11} - a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}), (b_{11} - b_{12}) / (b_{22} + b_{11} - b_{12} - b_{21}) \}$

$= \min \{ (5 - (-2)) / (5 + 11 - (-2) - 6), (7 - 6) / (7 + 1 - 6 - (-5)) \}$

$= \min \{ (7) / (12), (1) / (7) \} = 1/7$ y

$R_2 = \min \{ (a_{22} - a_{12}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}), (b_{22} - b_{21}) / (b_{11} + b_{22} - b_{21} - b_{12}) \}$

$= \min \{ (11 - 6) / (5 + 11 - (-2) - 6), (1 - (-5)) / (7 + 1 - 6 - (-5)) \}$

$= \min \{ (5) / (12), (6) / (7) \} = 5/12$

entonces $R_1 < R_2$ esto es, cuando k es lo suficientemente grande es posible determinar la desigualdad $|kR_1| < |kR_2|$, entonces (no aprobar, no aprobar) domina estocásticamente a (aprobar, aprobar) lo que implica que cuando la muestra es lo suficientemente grande y el tamaño de la historia es grande con respecto de la muestras, la convención (no aprobar, no aprobar) se dará casi todo el tiempo cuando la probabilidad de cometer errores o experimentar es pequeña, esta convención es la que más conviene al jugador 1. Esto indica que la "fuerza" que tienen los jugadores en la función de pago es determinante en la selección de las convenciones que son estocásticamente más estables, en otras palabras las situaciones que más se presentarán a lo largo del tiempo y por las cuales la sociedad ha aceptado como convención dependen de la influencia con que algún o algunos sectores de la sociedad impongan.

EL CASO DE 3X3

Cuando los agentes tienen 3 ó más estrategias, no hay una fórmula simple análoga a la de dominación por riesgo que identifique el equilibrio estocásticamente estable. Primero, la ruta de resistencias mínima debe calcularse de un equilibrio a otro. Si la gráfica de las clases de comunicación recurrente es muy grande debe resolverse un problema de antiarborescencias para cada equilibrio. Se ilustrará esta problemática mediante un ejemplo.

Ejemplo 6.5 :

Supóngase que dos empresas están evaluando la posibilidad de lanzar al mercado el mismo producto, pero cada compañía ofrecerá tres distintos servicios que dan valor agregado al producto y dependiendo de ello es como se establece una preferencia en el mercado por una compañía y otra.

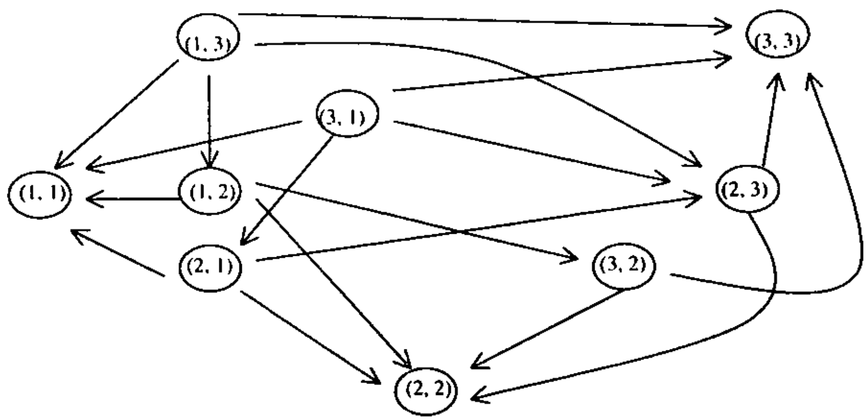
Entonces podemos plantear este problema como un juego de 3x3 donde los jugadores son las empresas, los servicios son las estrategias y la función de pago son las distintas formas en que pueden obtener beneficios adicionales en el mercado; obteniendo así una matriz de pagos (Este ejemplo puede encontrarse en el artículo *"The Evolutons of Conventions"* de Foster y Young en la revista Econometrica (1993)):

empresa 2

empresa 1

	1	2	3
1	6 6	0 5	0 0
2	5 0	7 7	5 5
3	0 0	5 5	8 8

La gráfica de mejores réplicas asociada al juego es :



Los pares (i, i) son equilibrios de Nash estrictos en estrategias puras, i=1, 2, 3.
Sea h_i que denote la convención en donde (i, i) es jugada m veces en sucesión. El Teorema 3.1 señala que éstos son los estados absorbentes del proceso sin perturbación cuando se tiene $k \leq m/3$ (Ya que $L_G=1$ como se observa en la gráfica). Calcularemos entonces la ruta de menores resistencias de una convención a otra.

Para calcular la resistencia mínima entre un estado y otro se hará un cálculo del mínimo número de errores que un jugador tendrá que cometer para que el otro jugador tenga una probabilidad positiva de tomar una muestra que contenga todos los errores que se han cometido. El calculo de errores se hará encontrando un número k' tal que haga que el jugador que reacciona ante los errores cambie de estrategia.

Para que un jugador cambie a una estrategia i, ésta tiene que ser mejor réplica para alguna muestra dada, en este caso se considera la muestra que contiene todos los errores.

Para los fines del cálculo supondremos que el jugador 2 es la que comete los errores y que el jugador 1 es el que reacciona óptimamente ; puede hacerse esto porque la matriz de pagos es simétrica y hace que no importe qué jugador comete los errores y qué jugador reacciona.

Si el proceso se encuentra en uno de los tres estados absorbentes del proceso sin perturbación, y se quiere ver el número mínimo de errores para salir de él se tienen que calcular todas las formas posibles de cometer un error que harán que el proceso cambie de un estado h_i a un estado h_j con i≠j, i, j=1, 2, 3. Las formas posibles para salir de un estado h_i a un estado h_j son tres :

i) Que un jugador cometa los errores jugando con la estrategia j.

ii) Que un jugador cometa errores con la tercer estrategia k pero el jugador que reacciona ante los errores tenga como mejor réplica a la estrategia j.

iii) Para pasar del estado h_i al estado h_j con el número mínimo de errores; sea conveniente pasar primero del estado h_j al tercer estado h_k , y de ahí al estado h_j.

A las transiciones de los primeros dos incisos se les consideran *transiciones directas*. A la tercer forma de transición se le llama *transición indirecta* y es la unión de dos transiciones directas.

Primero se calcularán los dos números correspondientes a los dos primeros incisos y se tomará como k'_{ij} el mínimo de éstos dos , éste número será el mínimo de errores para pasar de un estado i a otro estado j sin pasar por el tercero.

Una vez que se tengan todos los k'_{ij} 's de todas las transiciones directas de un estado a otro, se comparará con el número de errores de un jugador que se tienen que cometer para hacer la transición de forma inderecta, y se tomará la resistencia más pequeña; es decir, el mínimo de $\{k_{ij}, k_{ik} + k_{kj}\}$, este número es el que indica de todas las formas posibles de transición, la resistencia mínima r_{ij} para pasar de un estado a otro. Ya que calculados estos números, existe una probabilidad positiva de que el proceso salga del estado h_i. y caiga en el estado h_j sin más errores.

Al haber obtenido los r_{ij} 's se pueden resolver los problemas de antiarborescencias para cada estado en la gráfica 3 y obtener el estado con potencial estocástico mínimo.

Calcularemos los k_{ij} 's en base a la definición de mejor réplica con indeterminada k' (la cual involucra dos condiciones que nos darán dos números como resultado, siendo el mayor de estos dos el que cumpla con ambas condiciones).Se indicará previamente la transición correspondiente de un estado a otro, y cuál de las dos formas de transición directa se refiere ; al término del cálculo de los números que indican el número de los errores en cada una las transiciones directas, tomaremos como k_{ij} el mínimo de ambos números.

Calculo de las transiciones directas.

Usando la definición de mejor réplica y suponiendo que el jugador 1 ha tomado la muestra que contiene todos los k' errores que el jugador 2 ha cometido; entonces se tendrá que cumplir la siguiente desigualdad :

Transición de h_1 a h_2 .

Tipo de error del jugador 2: Usando la estrategia 2.
Las desigualdades son :

1ª) (Con respecto a la estrategia 1)

$$(1-k'/k)a_{21} + (k'/k)\, a_{22} \geq (1-k'/k)a_{11} + (k'/k)\, a_{12}$$

$$\Leftrightarrow (1-k'/k)(5) + (k'/k)(7) \geq (1-k'/k)(6) + (k'/k)(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (k'/k)(7-5+6) \geq 6-5$$

$$\Leftrightarrow \quad k' \geq k\,(1/8)$$

2ª)(con respecto a la estrategia 3)

$$(1-k''/k)a_{21} + (k''/k)\, a_{22} \geq (1-k''/k)a_{31} + (k''/k)\, a_{32}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-k'/k)(5) + (k'/k)(7) \geq (1-k'/k)(0) + (k'/k)(5)$$

$$\Leftrightarrow \quad (k'/k)(7-5-5) \geq -5$$

$$\Leftrightarrow \quad k' \leq k\,(5/2)$$

Entonces si $(1/8)k \leq k' \leq (5/2)\,k$ la estrategia 2 es mejor réplica a la muestra que contiene todos los errores. Por lo tanto el número de errores k' para pasar de h_1 a h_2 en este tipo de transición es $\lceil (1/8)k \rceil$.

Tipo de error del jugador 2: Usando la estrategia 3
Las desigualdades son :

1ª) (con respecto a la estrategia 1)

$(1\text{-}k'/k)a_{21}+(k'/k)\,a_{23} \geq (1\text{-}k'/k)a_{11}+(k'/k)\,a_{13}$

$\Leftrightarrow (1\text{-}k'/k)(5)+(k'/k)(5) \geq (1-k'/k)(6)+(k'/k)(0)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)(5\text{-}5+6) \geq 6\text{-}5$

$\Leftrightarrow \quad k' \geq k\,(1/6)$

2ª)(con respecto a la estrategia 3)

$(1\text{-}k''/k)a_{21}+(k''/k)\,a_{23} \geq (1\text{-}k''/k)a_{31}+(k''/k)\,a_{33}$

$\Leftrightarrow \quad (1-k'/k)(5)+(k'/k)(5) \geq (1\text{-}k'/k)(0)+(k'/k)(8)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)(5\text{-}5\text{-}8) \geq -5$

$\Leftrightarrow \quad k' \leq k\,(5/8)$

Entonces si $(1/6)k \leq k' \leq (5/8)\,k$ la estrategia 2 es mejor réplica a la muestra que contiene todos los errores. Por lo tanto el número de errores k' para pasar de h_1 a h_2 en este tipo de transición es $[(1/6)k]$.

El mínimo de número de errores para hacer la transición directa de h_1 a h_2 es :
$\min\{\,[(1/8)k],\ [(1/6)k]\,\}=[(1/8)k]$ para k suficientemente grande.

Transición de h_2 a h_1 .

Tipo de error del jugador 2: Usando la estrategia 1.
Las desigualdades son :

1ª) (Con respecto a la estrategia 2)

$(1\text{-}k'/k)a_{12}+(k'/k)\,a_{11} \geq (1\text{-}k'/k)a_{22}+(k'/k)\,a_{21}$

$\Leftrightarrow (1\text{-}k'/k)(0)+(k'/k)(6) \geq (1-k'/k)(7)+(k'/k)(5)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)(6\text{-}5+7) \geq 7$

$\Leftrightarrow \quad k' \geq k\,(7/8)$

2ª)(con respecto a la estrategia 3)

$(1\text{-}k''/k)a_{12}+(k''/k)\,a_{11} \geq (1\text{-}k''/k)a_{32}+(k''/k)\,a_{31}$

$\Leftrightarrow \quad (1-k'/k)(0)+(k'/k)(6) \geq (1\text{-}k'/k)(5)+(k'/k)(0)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)(6+5) \geq 5$

$\Leftrightarrow \quad k' \leq k\,(5/11)$

Se necesitan por lo menos [(7/8)k] de errores para que la estrategia 1 sea mejor réplica a la muestra que contiene todos los errores por esta vía para pasar del estado h_2 al estado h_1.

Tipo de error del jugador 2: Usando la estrategia 3

Las desigualdades son :

1ª) (con respecto a la estrategia 2)

$(1-k'/k)a_{12}+ (k'/k)\, a_{13} \geq (1- k'/k)a_{22} +(k'/k)\, a_{23}$

$\Leftrightarrow (1- k'/k)\,(0) + (k'/k)\,(0) \geq (1 - k'/k\,)(7) +(k'/k)\,(5)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)\,(7-5) \geq 7$

$\Leftrightarrow \quad k' \geq k\,(7\,/2)$

2ª)(con respecto a la estrategia 3)

$(1-k''/k)a_{12}+ (k''/k)\, a_{13} \geq (1-k''/k)a_{32} +(k''/k)\, a_{33}$

$\Leftrightarrow \quad (1 - k'/k\,)(0) +(k'/k)\,(0) \geq (1- k'/k)\,(5) + (k'/k)\,(8)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)\,(5-8) \geq 5$

$\Leftrightarrow$ $k' \leq k\,(-5\,/3)$ (esto muestra que la estrategia 1 no puede ser mejor replica cuando se cometen errores usando la estrategia 3)

Por lo tanto, el mínimo de número de errores para hacer la transición directa de h_2 a h_1 es : **[(7/8)k]** con k suficientemente grande.

Transición de h_1 a h_3.

Tipo de error del jugador 2: Usando la estrategia 3.
Las desigualdades son :

1ª) (Con respecto a la estrategia 1)

$(1-k'/k)a_{31}+ (k'/k)\, a_{33} \geq (1- k'/k)a_{11} +(k'/k)\, a_{13}$

$\Leftrightarrow (1- k'/k)\,(0) + (k'/k)\,(8) \geq (1 - k'/k\,)(6) +(k'/k)\,(0)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)\,(8+6) \geq 6$

$\Leftrightarrow \quad k' \geq k\,(6\,/11)$

2ª)(con respecto a la estrategia 2)

$(1-k''/k)a_{31}+ (k''/k)\, a_{33} \geq (1-k''/k)a_{21} +(k''/k)\, a_{23}$

$\Leftrightarrow \quad (1 - k'/k\,)(0) +(k'/k)\,(8) \geq (1- k'/k)\,(5) + (k'/k)\,(5)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)\,(8+5-5) \geq 5$

$\Leftrightarrow \quad k' \leq k\,(5\,/8)$

Se necesitan por lo menos [(5/8)k] de errores para que la estrategia 3 sea mejor réplica a la muestra que contiene todos los errores por esta vía para pasar del estado h_1 al estado h_3.

Tipo de error del jugador 2: Usando la estrategia 2

Las desigualdades son :

1ª) (con respecto a la estrategia 1)

$$(1-k'/k)a_{31}+ (k'/k)\, a_{32} \geq (1- k'/k)a_{11} +(k'/k)\, a_{12}$$

$$\Leftrightarrow (1- k'/k)\,(0) + (k'/k)\,(5) \geq (1 - k'/k\,)(6) +(k'/k)\,(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (k'/k)\,(5+6) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \quad k' \geq k\,(6\,/11)$$

2ª)(con respecto a la estrategia 2)

$$(1-k''/k)a_{31}+ (k''/k)\, a_{32} \geq (1-k''/k)a_{21} +(k''/k)\, a_{22}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - k'/k\,)(0) +(k'/k)\,(5) \geq (1- k'/k)\,(5) + (k'/k)\,(7)$$

$$\Leftrightarrow \quad (k'/k)\,(5+5-7) \geq 5$$

$$\Leftrightarrow \quad k' \geq k\,(5\,/3)$$

Se necesitan por lo menos [(5/3)k] de errores para que la estrategia 3 sea mejor réplica a la muestra que contiene todos los errores por esta vía para pasar del estado h_1 al estado h_3.

Por lo tanto, el mínimo de número de errores para hacer la transición directa de h_1 a h_3 es :
min {[(5/8)k], [(5/3)k] } = **[(5/8)k]** con k suficientemente grande.

Transición de h_3 a h_1 .

Tipo de error del jugador 2: Usando la estrategia 1.

Las desigualdades son :

1ª) (Con respecto a la estrategia 3)

$$(1-k'/k)a_{13}+ (k'/k)\, a_{11} \geq (1- k'/k)a_{33} +(k'/k)\, a_{31}$$

$$\Leftrightarrow (1- k'/k)\,(0) + (k'/k)\,(6) \geq (1 - k'/k\,)(8) +(k'/k)\,(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (k'/k)\,(8+6) \geq 8$$

$$\Leftrightarrow \quad k' \geq k\,(4\,/7)$$

2ª)(con respecto a la estrategia 2)

$$(1-k''/k)a_{13}+ (k''/k)\, a_{11} \geq (1-k''/k)a_{23} +(k''/k)\, a_{21}$$

$\Leftrightarrow$ $(1 - k'/k)(0) + (k'/k)(6) \geq (1 - k'/k)(5) + (k'/k)(5)$

$\Leftrightarrow$ $(k'/k)(6+5-5) \geq 5$

$\Leftrightarrow$ $k' \leq k\,(5/6)$

Se necesitan por lo menos $[(5/6)k]$ de errores para que la estrategia 1 sea mejor réplica a la muestra que contiene todos los errores por esta vía para pasar del estado h_3 al estado h_1.

Tipo de error del jugador 2: Usando la estrategia 2

Las desigualdades son :

1ª) (con respecto a la estrategia 3)

$(1-k'/k)a_{13} + (k'/k)\,a_{12} \geq (1-k'/k)a_{33} + (k'/k)\,a_{32}$

$\Leftrightarrow (1-k'/k)(0) + (k'/k)(0) \geq (1 - k'/k)(8) + (k'/k)(5)$

$\Leftrightarrow$ $(k'/k)(8-5) \geq 8$

$\Leftrightarrow$ $k' \geq k\,(8/3)$

2ª)(con respecto a la estrategia 2)

$(1-k''/k)a_{13} + (k''/k)\,a_{12} \geq (1-k''/k)a_{23} + (k''/k)\,a_{22}$

$\Leftrightarrow$ $(1 - k'/k)(0) + (k'/k)(0) \geq (1 - k'/k)(5) + (k'/k)(7)$

$\Leftrightarrow$ $(k'/k)(5-7) \geq 5$

$\Leftrightarrow$ $k' \leq k\,(-5/2)$ (esto muestra que la estrategia 1 no puede ser mejor réplica cuando se cometen errores usando la estrategia 2)

Por lo tanto, el mínimo de número de errores para hacer la transición directa de h_1 a h_3 es : **$[(5/6)k]$** con k suficientemente grande.

Transición de h_3 a h_2.

Tipo de error del jugador 2: Usando la estrategia 2.
Las desigualdades son :

1ª) (Con respecto a la estrategia 3)

$(1-k'/k)a_{23} + (k'/k)\,a_{22} \geq (1-k'/k)a_{33} + (k'/k)\,a_{32}$

$\Leftrightarrow (1-k'/k)(5) + (k'/k)(7) \geq (1 - k'/k)(8) + (k'/k)(5)$

$\Leftrightarrow$ $(k'/k)(7+8-5-5) \geq 8-5$

$\Leftrightarrow$ $k' \geq k\,(3/5)$

2ª)(con respecto a la estrategia 1)

$(1-k''/k)a_{23} + (k''/k)\,a_{22} \geq (1-k''/k)a_{13} + (k''/k)\,a_{12}$

$\Leftrightarrow \quad (1 - k'/k)(5) + (k'/k)(7) \geq (1 - k'/k)(0) + (k'/k)(0)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)(7-5) \geq -5$

$\Leftrightarrow \quad k' \geq k(-5/2)$

Se necesitan por lo menos $[(3/5)k]$ de errores para que la estrategia 3 sea mejor réplica a la muestra que contiene todos los errores por esta vía para pasar del estado h_1 al estado h_2.

Tipo de error del jugador 2: Usando la estrategia 1

Las desigualdades son :

1ª) (con respecto a la estrategia 3)

$(1-k'/k)a_{23} + (k'/k)a_{21} \geq (1-k'/k)a_{33} + (k'/k)a_{31}$

$\Leftrightarrow (1-k'/k)(5) + (k'/k)(5) \geq (1-k'/k)(8) + (k'/k)(0)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)(5-5+8) \geq 8-5$

$\Leftrightarrow \quad k' \geq k(3/8)$

2ª)(con respecto a la estrategia 1)

$(1-k''/k)a_{23} + (k''/k)a_{21} \geq (1-k''/k)a_{13} + (k''/k)a_{11}$

$\Leftrightarrow \quad (1 - k'/k)(5) + (k'/k)(5) \geq (1 - k'/k)(0) + (k'/k)(6)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)(5-5+6) \geq -5$

$\Leftrightarrow \quad k' \leq k(5/6)$

Entonces si $(3/8)k \leq k' \leq (5/6)k$ la estrategia 2 es mejor réplica a la muestra que contiene todos los errores. Por lo tanto el número de errores k' para pasar de h_3 a h_2 en este tipo de transición es $[(3/8)k]$.

Por lo tanto, el mínimo de número de errores para hacer la transición directa de h_1 a h_3 es :
$\min\{[(3/5)k], [(3/8)k]\} = [(3/8)k]$ con k suficientemente grande.

Transición de h_2 a h_3.

Tipo de error del jugador 2: Usando la estrategia 3.

Las desigualdades son :

1ª) (Con respecto a la estrategia 2)

$(1-k'/k)a_{32} + (k'/k)a_{33} \geq (1-k'/k)a_{22} + (k'/k)a_{23}$

$\Leftrightarrow (1-k'/k)(5) + (k'/k)(8) \geq (1-k'/k)(7) + (k'/k)(5)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)(7-5-5) \geq 7-5$

$\Leftrightarrow \quad k' \geq k(2/5)$

2ª)(con respecto a la estrategia 1)

$(1-k''/k)a_{32}+(k''/k)\,a_{33} \geq (1-k''/k)a_{12}+(k''/k)\,a_{11}$

$\Leftrightarrow \quad (1 - k'/k)(5) + (k'/k)(8) \geq (1- k'/k)(0) + (k'/k)(0)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)(8-5) \geq -5$

$\Leftrightarrow \quad k' \geq k(-5/3)$

Se necesitan por lo menos $[(2/5)k]$ de errores para que la estrategia 2 sea mejor réplica a la muestra que contiene todos los errores por esta vía para pasar del estado h_2 al estado h_3.

Tipo de error del jugador 2: Usando la estrategia 1

Las desigualdades son :

1ª) (con respecto a la estrategia 2)

$(1-k'/k)a_{32}+(k'/k)\,a_{31} \geq (1- k'/k)a_{22}+(k'/k)\,a_{21}$

$\Leftrightarrow (1- k'/k)(5) + (k'/k)(0) \geq (1 - k'/k)(7) + (k'/k)(5)$

$\Leftrightarrow \quad (k'/k)(7-5-5) \geq 7-5$

$\Leftrightarrow \quad k' \leq k(-2/3)$ (esto muestra que la estrategia 3 no puede ser mejor replica cuando se cometen errores usando la estrategia 1)

Entonces ya no es necesario calcular el número de errores con respecto de la estrategia 1.

Por lo tanto, el mínimo número de errores para hacer la transición directa de h_1 a h_3 es : **$[(2/5)k]$** con k suficientemente grande.

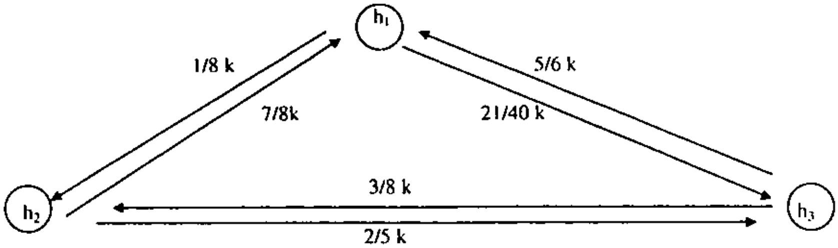
Se ha calculado el mínimo número de errores que tiene que cometer un jugador para pasar de un estado h_i a otro h_j en la forma directa.. Ahora podemos comparar este número con el mínimo número de errores que un jugador tiene que cometer para hacer la misma transición pero en la forma indirecta, donde éste es la suma de los dos números mínimos correspondientes a las transiciones directas que componen a la transición indirecta.

Los cálculos son :

resistencia mínima en la transición directa de :	resistencia mínima en la transición indirecta de :	resistencia mínima total
$h_1 \to h_2 = 1/8\ k$	$h_1 \to h_3 \to h_2 =$ **$(21/40$**$+3/8)k=36/40k$	$1/8k$
$h_2 \to h_1 = 7/8\ k$	$h_2 \to h_3 \to h_1 = (2/5+5/6)k=37/30k$	$7/8k$
$h_1 \to h_3 = 5/8\ k$	$h_1 \to h_2 \to h_3 = (1/8+2/5)k=$**$21/40k$**	**$21/40k$**
$h_3 \to h_1 = 5/6\ k$	$h_3 \to h_2 \to h_1 = (3/8+7/8)k=11/8k$	$5/6k$
$h_2 \to h_3 = 2/5\ k$	$h_2 \to h_1 \to h_3 = (7/8+$**$21/40$**$)k=56/40k$	$2/5k$
$h_3 \to h_2 = 3/5\ k$	$h_3 \to h_1 \to h_2 = (5/6+1/8)k=46/48k$	$3/8k$

Los números marcados con negritas son aquellos en los que la transición indirecta tiene resistencia menor que la transición directa, entonces se toma éste número como resistencia mínima total de un estado a otro.

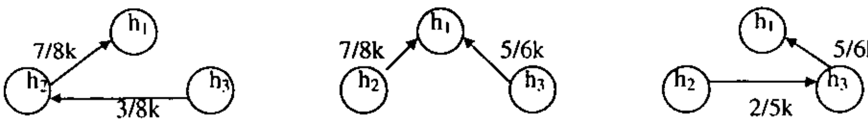
La gráfica de resistencias mínimas esta dada así :



Para cada vértice h_i hay tres antiarborescencias con antiraíz en h_i y el h_i-árbol de menores resistencias determina el potencial estocástico de h_i.

No será necesario calcular las antiarborescencias de menor peso con ningún algoritmo en esta ocasión, ya que la gráfica es pequeña y se pueden hacer los cálculos de los pesos de las aristas de la gráfica directamente.

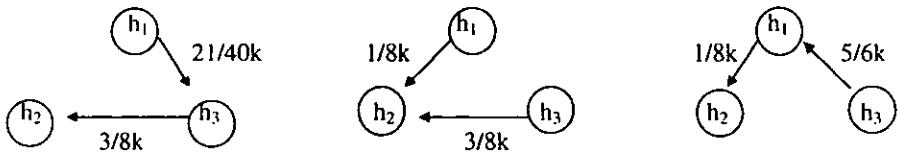
Los h_1-árboles son los siguientes :



peso=(7/8+3/8)k=10/8k peso =(7/8+5/6)k=41/24k peso=(2/5+5/6)k=37/30k

El de menor peso es el tercer árbol por lo que el potencial estocástico mínimo de h_1 es 37/30 k .

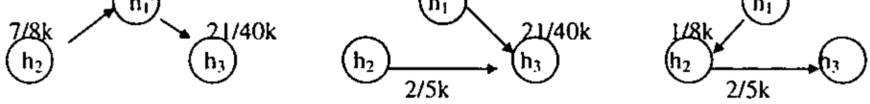
Los h_2-árboles son los siguientes :



peso = (21/40+3/8)k = 10/8k peso = (1/8+3/8)k = 1/2k peso = (1/8+5/6)k = 23/40k

El de menor peso es el segundo árbol por lo que el potencial estocástico mínimo de h_2 es 1/2 k .

Los h_3-árboles son los siguientes :



peso = (7/8+21/40)k = 56/40k peso = (21/40+2/5)k =37/40k peso = (5/40+16/40)k=21/40k

El árbol de menor peso es el tercero, por lo que el potencial estocástico mínimo de h_3 es 21/40 k .

El árbol de menores resistencias está enraizado en h_2, y tiene una resistencia total de [1/8 k][3/8 k]. Para k suficientemente grande, éste es el único árbol con resistencia menor, así que h_2 es la única convención genéricamente estable.

Entonces estas compañías se comportarán en el mercado usando su segunda estrategia casi todo el tiempo cuando el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande.

EL CASO DE N JUGADORES

Se pueden encontrar aplicaciones en donde se tienen n jugadores. Por ejemplo existen juegos n-personales de coordinación con dos estrategias cada jugador que resultan interesantes.

Ejemplo 6.6

Supongamos que existen n grandes capitalistas que tienen grandes inversiones en un país y que en un momento dado tienen que decidir si sacan su capital del país o lo dejan allí invertido con la probabilidad de ganar más pero arriesgando también una pérdida.

Este ejemplo consiste en un juego de n jugadores que consiste en los n grandes capitalistas y cada uno de ellos tiene dos estrategias a seguir : dejar su capital o sacarlo del país.

Para fines prácticos, la estrategia 1 será la estrategia en la que el jugador decide sacar su capital y la estrategia 2 será en la que el jugador decide dejar su capital en el país.

Supóngase cada jugador tiene una función de pago como la siguiente :

$$\varphi_j(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; r_j = \text{sacar el capital} \\ p & \text{si } \; r_j = \text{deja su capital en el país y la mayoría también deja su capital} \\ q & \text{si } \; r_j = \text{deja su capital en el país y la mayoría saca su capital del país} \end{cases}$$

con $p > 0$ y $q < 0$

En este juego los equilibrios de Nash son {(1, ... ,1), (2, ... 2)}

Las convenciones o equilibrios asociados son las secuencias de vectores formados por la primer estrategias o formados por la segunda estrategia. Llamaremos h_1 a la convención que siguen los jugadores de sacar su capital del país y h_2 a la convención que consiste en que todos los jugadores dejan su dinero dentro del país.

Se puede entonces examinar cuál es el equilibrio estocásticamente más estable dependiendo del valor de p y q cuando el tamaño de la muestra y de la historia cumplen con las hipótesis adecuadas.

Para calcular el equilibrio estocasticamente más estable basta con encontrar el mínimo de errores que tiene que se tienen que cometer para salir de un equilibrio y llegar al otro.

Por el teorema 5.1 se calcularán los errores entre las clases de comunicación recurrente que en vez de calcular la antiarborescencia de peso mínimo entre todos los vértices ; cuando $k \leq m / (L_G + 2)$ las clases de comunicación recurrente son las convenciones asociadas al juego.

Cálculo de los errores para pasar de h_1 a h_2 :

Supóngase que el proceso se encuentra en el estado h_1 al tiempo t; para pasar al estado h_2 es necesario que la mayoría de los jugadores cometan el número suficiente de errores en el número suficiente de periodos para que exista una muestra que contenga a todos los errores cometidos por la mayoría de los jugadores y que esta muestra tenga a la estrategia 2 como mejor réplica para la mayoría de los jugadores.

Entonces si nos encontramos en el estado h_1 al tiempo t, sabemos que existe una probabilidad positiva para que la mayoría (la cual es al menos $\lambda = [n/2]$ cuando n es impar ó $[n/2]+1$ si n es par) cometa el error de jugar con la estrategia 2 y suceda así durante k' periodos en total. También existe una probabilidad positiva de que un jugador tome la muestra que contiene a todos los errores que se han cometido en los últimos k' periodos con $k' \leq k$, sin pérdida de generalidad y gracias a que el juego es simétrico supóngase que son los últimos λ jugadores son los que cometen todos los errores durante los k' periodos. También existe una probabilidad positiva de que la mayoría de los jugadores tomen esta muestra durante k' periodos y a partir del periodo t+k'+1 ya no se cometan más errores y se tenga una probabilidad positiva de llegar al otro equilibrio.

Entonces el mínimo número de errores que se necesita para pasar de h_1 a h_2 será $\lambda k'$; esto es, que la mayoría de los jugadores (la cual es al menos λ) cometan el error de tomar la estrategia incorrecta durante k' periodos seguidos. Supondremos que los jugadores que escogen la muestra que contiene todos los errores son los mismos que los cometen. Entonces $\lambda k'$ es el mínimo número de errores que se necesitan para pasar de h_1 a h_2.

Si un jugador j toma por muestra los $\lambda k'$ errores entonces el jugador j obtiene de la muestra una estrategia mixta

$$x = (\underbrace{(1,0), \ldots (1,0)}_{n-\lambda}, \underbrace{(1-k'/k\,,\ k'/k), \ldots (1-k'/k\,,\ k'/k)}_{\lambda})$$

en donde las primeras $n-\lambda$ estrategias no se han cometido errores y las últimas λ estrategias contiene todos los errores. La estrategia 2 será mejor réplica si y solo si

$$u_j(x \mid e_j^{\,1}) \leq u_j(x \mid e_j^{\,2})$$

y como $u_j(x \mid e_j^{\,1}) = 0 \ \forall$ j implica que estamos buscando la k' tal que $0 \leq u_j(x \mid e_j^{\,2})$.

Tenemos que $u_j(x \mid e_j^{\,2}) = \sum_{s \in S} x(s)\, \pi_j(s)$; pero todas las estrategias $s \in S$ tal que las primeras $n-\lambda$ coordenadas sean una estrategia que no sea la estrategia pura 1 tienen probabilidad cero es decir $\pi_j(s) = 0$.

Entonces la esperanza de pago se restringe a todas las posibles estrategias en donde las primeras $n-\lambda$ estrategias tengan como estrategia pura (1,0) .

Si U es el conjunto de jugadores que se equivocan se tiene:

$$0 \leq u_j(x \mid e_j^{\,2}) = p\,(k'/k) + q \sum_{\substack{\text{las } s \in S \\ \text{en donde un} \\ \text{jugador de U} \\ \text{usa 1}}} x(s)\, \pi_j(s) + q \sum_{\substack{\text{las } s \in S \\ \text{en donde dos} \\ \text{jugadores de U} \\ \text{usan 1}}} x(s)\, \pi_j(s) + \ldots + q \sum_{\substack{\text{las } s \in S \\ \text{en donde todos} \\ \text{los jugadores de U} \\ \text{usan 1}}} x(s)\, \pi_j(s)$$

$$= p\,(k'/k)^{\lambda} + q \sum_{i=1,\lambda} C_i^{\lambda}\ (k'/k)^{\lambda-i}\ (1-k'/k)^i = p\,(k'/k)^{\lambda} + q\,(1-(k'/k)^{\lambda}) = k'^{\lambda}\,(p-q\,/\,k^{\lambda}) + q$$

entonces despejando k' se tiene un jugador que toma por muestra todos los errores tendrá como mejor réplica la estrategia dos si se cumple que

$$k'^{\lambda} \geq k^{\lambda}\ (-q\,/\,p-q)$$

$$\Rightarrow \quad k' \geq k\ (-q / p-q)^{1/\lambda} \qquad \text{donde } -q / p-q > 0$$

es decir se necesita un mínimo número de errores igual a $\lambda\,[\,k\ (-q / p-q)^{1/\lambda}\,]$ para pasa del estado h_1 al estado h_2.

El mínimo número de errores que se necesitan para pasar del estado h_2 al estado h_1 se calcula de la misma manera: es decir, con las mismas hipótesis de cómo se equivocan los jugadores y que la mayoría de los jugadores toman la muestra que contiene todos los errores. Entonces se tiene:

La estrategia mixta que se obtiene con todos los errores es

$$x = (\underbrace{(0,1), \ldots (0,1)}_{n-\lambda},\ \underbrace{(k'/k,\ 1-k'/k), \ldots (k'/k,\ 1-k'/k)}_{\lambda})$$

en donde las primeras $n-\lambda$ estrategias no se han cometido errores y las últimas λ estrategias contiene todos los errores. La estrategia 1 será mejor réplica si y solo si

$$u_j(x \mid e_j^{\,2}) \leq u_j(x \mid e_j^{\,1})$$

y como $u_j(x \mid e_j^{\,1}) = 0\ \ \forall$ j implica que estamos buscando la k' tal que $0 \geq u_j(x \mid e_j^{\,2})$.

Entonces la esperanza de pago es :

$$0 \geq u_j(x \mid e_j^{\,2}) = q\ (k'/k)^{\lambda} + p \sum_{i=1,\lambda} C_i^{\lambda}\ (1-(k'/k)^{\lambda-i})\,(k'/k)^{i}$$

$$= q\ (k'/k)^{\lambda} + p\ \ (1-(k'/k)^{\lambda}) = k'^{\,\lambda}(q - p / k^{\lambda}) + p$$

entonces despejando k' se tiene un jugador que toma por muestra todos los errores tendrá como mejor réplica la estrategia dos si se cumple que

$$k'^{\lambda} \geq k^{\lambda}\ (-p / q - p)$$

$$\Rightarrow \quad k' \geq k\ (p / p-q)^{1/\lambda} \qquad \text{donde } p / p-q > 0$$

es decir se necesita un mínimo número de errores igual a $\lambda\,[\,k\ (p / p-q)^{1/\lambda}\,]$ para pasa del estado h_2 al estado h_1.

El equilibrio h_1 es el que tiene el potencial estocástico mínimo si

$$\lambda\,[\,k\ (-q / p-q)^{1/\lambda}\,] > \lambda\,[\,k\ (p / p-q)^{1/\lambda}\,]$$

$$\Leftrightarrow \qquad -q / p-q)^{1/\lambda} > p / p-q)^{1/\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \qquad -q > p$$

el equilibrio h_2 es el que tiene el potencial estocástico mínimo si

$$\lambda\,[\,k\ (-q / p-q)^{1/\lambda}\,] < \lambda\,[\,k\ (p / p-q)^{1/\lambda}\,]$$

$$\Leftrightarrow \qquad -q / p-q)^{1/\lambda} < p / p-q)^{1/\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \qquad -q < p$$

es decir el estado que tiene el potencial estocástico mínimo depende solo del valor absoluto de p y q.

Entonces los inversionistas jugarán la estrategia 1 la mayoría del tiempo si $-q$ es mayor que p ó jugarán la estrategia 2 la mayor parte del tiempo cuando p es mayor que $-q$ y se cumplen las hipótesis de que k y m/k son lo suficientemente grandes y la probabilidad de cometer errores es pequeña..

Ejemplo 6.7 (n jugadores con r+1 estrategias cada uno)

Supongamos que un grupo de n personas tienen que decidir por quien votar para un puesto determinado de entre r candidatos. se denotará al candidato R como C_R.

Esta situación se puede plantear como un juego de n jugadores donde cada jugador tiene las mismas r estrategias.

La función de pago de un jugador puede definirse de la siguiente forma :

$$\varphi_i(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \sigma_j = \text{abstención o ningún candidato obtuvo la mayoría} \\ p_R & \text{si} \quad \sigma_j = C_R \text{ y } C_R \text{ obtiene la mayoría} \\ q_R & \text{si} \quad \sigma_j = C_R \text{ y otro candidato obtiene la mayoría} \end{cases}$$

$\forall R, j$ con $p_R > 0$ y $q_R < 0$

Aquí los equilibrios de Nash son las estrategias en donde todos los jugadores apoyan a un solo candidato. Sea h_r la convención asociada al equilibrio de Nash en donde todos apoyan al candidato r, es decir
$h_r = ((C_r, \ldots C_r), \ldots, (C_r, \ldots C_r))$.

Cuando el tamaño de la muestra k y m/k es lo suficientemente grande podemos calcular los estados con potencial estocástico mínimo mediante la resolución de la antiarborescencia de pesos mínimos en la gráfica de las clases de comunicación recurrente. Para ello se harán los cálculos del mínimo de los errores que se tendrán que cometer para pasar de un estado a otro.

Se calculará el mínimo número de errores para pasar de un equilibrio a otro de la siguiente manera

Supóngase que el proceso se encuentra en el estado h , al tiempo t y se quiere calcular el mínimo de errores que se tienen que cometer para pasar al estado h_s . Aquí se pueden hacer las mismas hipótesis que en el ejemplo anterior : es decir, si la mayoría de los jugadores es λ, y suponemos que los últimos λ jugadores son los que cometen el error de escoger al candidato s en vez del candidato r en un número k' de periodos. El total de errores para pasar del estado h_r al estado h_s será de $\lambda[k']$ errores por lo menos.

Suponiendo que la mayoría de los jugadores toman la muestra

$$x = (\underbrace{(0,\ldots,\underset{\substack{\text{en la}\\ \text{entrada r}}}{1},\ldots 0), \ldots, (0,\ldots 1,\ldots 0)}_{n-\lambda \text{ jugadores}}, \underbrace{(0,\ldots,\underset{\substack{\text{en la}\\ \text{entrada r}}}{1-k'/k},\ldots,\underset{\substack{\text{en la}\\ \text{entrada s}}}{k'/k},\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,1-k'/k,\ldots,k'/k,\ldots,0)}_{\lambda \text{ jugadores}})$$

donde x contiene todos los errores en el periodo k'+1, es posible llegar al estado h_s sin cometer más errores.

En el periodo k'+1 el jugador j que toma la muestra x responderá con C_s en vez de C_r si :

$$u_j(x \mid e_j^r) \le u_j(x \mid e_j^s)$$

$$\Leftrightarrow p_r \sum_{i=1,\lambda} C_i^\lambda (k'/k)^{\lambda-i} (1-k'/k)^i + q_r (k'/k)^\lambda \le p_s (k'/k)^\lambda + q_s \sum_{i=1,\lambda} C_i^\lambda (k'/k)^{\lambda-i} (1-k'/k)^i$$

$$\Leftrightarrow \quad p_r(1-(k'/k)^{\lambda}) + q_r(k'/k)^{\lambda} \le p_s(k'/k)^{\lambda} + q_s(1-(k'/k)^{\lambda})$$

$$\Leftrightarrow \quad k'^{\lambda}\,((q_r-p_r)/k^{\lambda}) + p_r \le k'^{\lambda}((p_s-q_s)/k^{\lambda}) + q_s$$

$$\Leftrightarrow \quad p_r - q_s \le k'^{\lambda}\,((p_s-q_s-q_r+p_r)/k^{\lambda})$$

$$\Leftrightarrow \quad k^{\lambda}\,(p_r-q_s/p_s-q_s-q_r+p_r) \le k'^{\lambda}$$

Entonces se necesitan $\lambda[\,k^{\lambda}\,(p_r-q_s/p_s-q_s-q_r+p_r)\,]$errores pasar de h_r a h_s.

De igual manera para pasar de h_s a h_r supóngase que el proceso se encuentra en el estado h_s al tiempo t y se quiere calcular el mínimo de errores que se tienen que cometer para pasar al estado h_r. El total de errores para pasar del estado h_s al estado h_r será también de $\lambda[k']$ errores por lo menos.

Supongamos que la mayoría de los jugadores toman la muestra

$$x = ((0,\ldots,1,\ldots0),\ldots,(0,\ldots,1,\ldots0),(0,\ldots,1-k'/k,\ldots,k'/k,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,1\text{-}k'/k,\ldots,k'/k,\ldots,0))$$

en la entrada s — en la entrada s — en la entrada r

$n-\lambda$ jugadores — λ jugadores

donde x contiene todos los errores en el periodo $k'+1$, es posible llegar al estado h_r sin cometer más errores.

En el periodo $k'+1$ el jugador j que toma la muestra x responderá con C_r en vez de C_s si :

$$u_j(x\,|\,e_j^{s}) \le u_j(x\,|\,e_j^{r})$$

$$\Leftrightarrow p_s \sum_{i=1,\lambda} C_i^{\lambda}(k'/k)^{\lambda-i}(1-k'/k)^i + q_s(k'/k)^{\lambda} \le p_r(k'/k)^{\lambda} + q_r \sum_{i=1,\lambda} C_i^{\lambda}(k'/k)^{\lambda-i}(1-k'/k)^i$$

$$\Leftrightarrow \quad p_s(1-(k'/k)^{\lambda}) + q_s(k'/k)^{\lambda} \le p_r(k'/k)^{\lambda} + q_r(1-(k'/k)^{\lambda})$$

$$\Leftrightarrow \quad k'^{\lambda}\,((q_s-p_s)/k^{\lambda}) + p_s \le k'^{\lambda}((p_r-q_r)/k^{\lambda}) + q_r$$

$$\Leftrightarrow \quad p_s - q_r \le k'^{\lambda}\,((p_r-q_r-q_s+p_s)/k^{\lambda})$$

$$\Leftrightarrow \quad k^{\lambda}\,(p_s-q_r/p_r-q_r-q_s+p_s) \le k'^{\lambda}$$

Entonces se necesitan $\lambda[\,k\,(p_s-q_r/p_r-q_r-q_s+p_s)^{1/\lambda}]$errores pasar de h_s a h_r.

Entonces de esta manera se puede construir la gráfica de las clases de comunicación recurrente donde los vértices son los estados h_r y el peso de una arista $h_r \rightarrow h_s$ es el mínimo de errores que se tendrán que cometer para pasar de un estado a otro ; es decir :

$$r_{r,s} = \lambda[\,k\,(p_r-q_s/p_s-q_s-q_r+p_r)^{1/\lambda}]$$

y entonces encontrar cuál de estas clases tiene la arborescencia de peso mínimo.

Se pueden simplificar los cálculos poniendo como pesos :

$$r_{r,s} = (p_r-q_s/p_s-q_s-q_r+p_r)$$

en una arista $h_r \to h_s$.

Se ilustrará este ejemplo con un caso particular :

Supóngase que se tiene el mismo juego con 5 candidatos donde la función de pago para el jugador jes :

$$\varphi_j(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \sigma_j = \text{abstención o ningún candidato obtuvo la mayoría} \\ 5 & \text{si} \quad \sigma_j = C_1 \text{ y } C_1 \text{ obtiene la mayoría} \\ -3 & \text{si} \quad \sigma_j = C_1 \text{ y otro candidato obtiene la mayoría} \\ 8 & \text{si} \quad \sigma_j = C_2 \text{ y } C_2 \text{ obtiene la mayoría} \\ -10 & \text{si} \quad \sigma_j = C_2 \text{ y otro candidato obtiene la mayoría} \\ 3 & \text{si} \quad \sigma_j = C_3 \text{ y } C_3 \text{ obtiene la mayoría} \\ -1 & \text{si} \quad \sigma_j = C_3 \text{ y otro candidato obtiene la mayoría} \\ 4 & \text{si} \quad \sigma_j = C_4 \text{ y } C_4 \text{ obtiene la mayoría} \\ -2 & \text{si} \quad \sigma_j = C_4 \text{ y otro candidato obtiene la mayoría} \\ 6 & \text{si} \quad \sigma_j = C_5 \text{ y } C_5 \text{ obtiene la mayoría} \\ -5 & \text{si} \quad \sigma_j = C_5 \text{ y otro candidato obtiene la mayoría} \end{cases}$$

Sabemos que los equilibrios de Nash se dan cuando todos los jugadores apoyan a un solo candidato.

Sea h_i la convención asociada al equilibrio de Nash en donde todos los jugadores apoyan al candidato i.

Calcularemos las resistencias entre un equilibrio y otro conforme a la fórmula que se encontró anteriormente y luego resolveremos los problemas de antiarborescencias con el fin de encontrar el equilibrio con potencial estocástico mínimo.

La resistencia para pasar del h_r al estado h_s es $r_{rs} = (p_r - q_s / p_s - q_s - q_r + p_r)$.

Entonces tenemos:

$r_{12} = (5 + 10 / 5 + 3 + 8 + 10) = 15 / 26$

$r_{21} = (8 + 3 / 5 + 3 + 8 + 10) = 11 / 26$

$r_{13} = (5 + 1 / 5 + 3 + 3 + 1) = 1 / 2$

$r_{31} = (3 + 3 / 5 + 3 + 3 + 1) = 1 / 2$

$r_{14} = (5 + 2 / 5 + 3 + 4 + 2) = 1 / 2$

$r_{41} = (4 + 3 / 5 + 3 + 4 + 2) = 1 / 2$

$r_{15} = (5 + 5 / 5 + 3 + 6 + 5) = 10 / 19$

$r_{51} = (6 + 3 / 5 + 3 + 6 + 5) = 9 / 19$

$r_{23} = (8 + 1 / 8 + 10 + 3 + 1) = 9 / 22$

$r_{32} = (3 + 10 / 8 + 10 + 3 + 1) = 13 / 22$

$r_{24} = (8 + 2 / 8 + 10 + 4 + 2) = 5 / 12$

$r_{42} = (4 + 10 / 8 + 10 + 4 + 2) = 7 / 12$

$r_{25} = (8 + 5 / 8 + 10 + 6 + 5) = 13 / 29$

$r_{52} = (6 + 10 / 8 + 10 + 6 + 5) = 16 / 29$

$r_{34} = (3 + 2 / 3 + 1 + 4 + 2) = 1 / 2$

$r_{43} = (4 + 1 / 3 + 1 + 4 + 2) = 1 / 2$

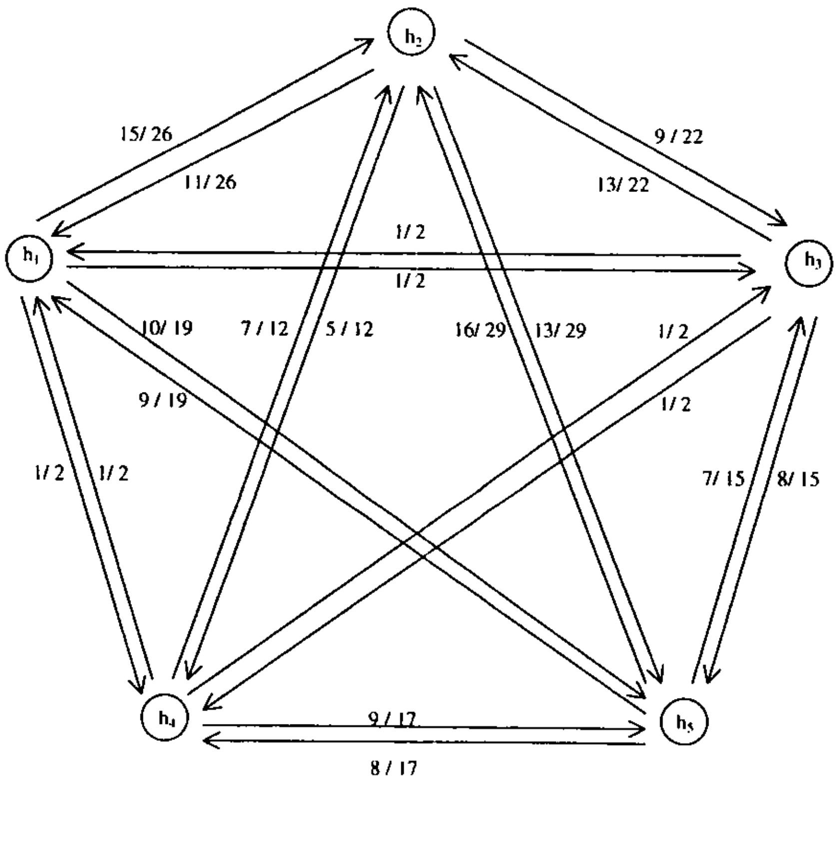
$r_{35} = (3 + 5 / 3 + 1 + 6 + 5) = 8 / 15$

$r_{53} = (6 + 1 / 3 + 1 + 6 + 5) = 7 / 15$

$r_{45} = (4 + 5 / 4 + 2 + 6 + 5) = 9 / 17$

$r_{54} = (6 + 2 / 4 + 2 + 6 + 5) = 8 / 17$

Cuando el tamaño de la muestra k y k / m donde m es el tamaño de la historia son lo suficientemente grandes, la gráfica de las clases de comunicación recurrente en este juego es la siguiente:



Entonces se calculan las antiarborescencias de peso mínimo en cada vértice y la menor de ellas es la que indica cuál es el estado con potencial estocástico mínimo.

Calculando γ_1 con el algoritmo de Dijkstra tenemos:

Inicialización de etiquetas:

$d(1) = 0$, $d(2) = \infty$, $d(3) = \infty$, $d(4) = \infty$, $d(5) = \infty$
$a(2) = 2$, $a(3) = 3$, $a(4) = 4$, $a(5) = 5$

Sea $p = 1$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(1) = \{2, 3, 4, 5\}$

$d(2) = \min\{d(2), d(1) + 11/26\} = 11/26$ $\quad a(2) = 1$

$d(3) = \min\{d(3), d(1) + 1/2\} = 1/2$ $\quad a(3) = 1$

$d(4) = \min\{d(4), d(1) + 1/2\} = 1/2$ $\quad a(4) = 1$

$d(5) = \min\{d(5), d(1) + 9/19\} = 9/19$ $\quad a(5) = 1$

El mínimo es : $9/19$

$d(5) = 9/19$ es permanente $a(5) = 1$

Sea $p = 5$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(5) = \{2, 3, 4\}$

$d(2) = \min\{11/26, 9/19 + 16/29\} = 11/26$ $\quad a(2) = 1$

$d(3) = \min\{1/2, 9/19 + 7/15\} = 1/2$ $\quad a(3) = 1$

$d(4) = \min\{1/2, 9/19 + 8/17\} = 1/2$ $\quad a(4) = 1$

El mínimo es : $1/2$

$d(4) = 1/2$ es permanente $a(4) = 1$

Sea $p = 4$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(4) = \{2, 3\}$

$d(2) = \min\{11/26, 1/2 + 5/12\} = 11/26$ $\quad a(2) = 1$

$d(3) = \min\{1/2, 1/2 + 1/2\} = 1/2$ $\quad a(3) = 1$

El mínimo es : $1/2$

$d(3) = 1/2$ es permanente $a(3) = 1$

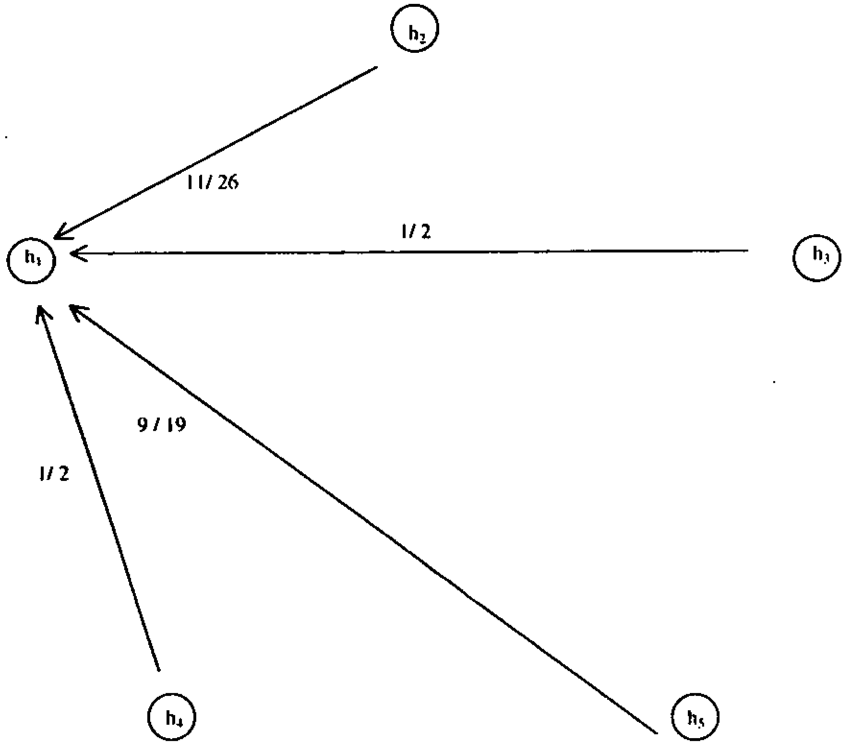
Sea $p = 3$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^{-}(3) = \{2\}$

$d(2) = \min\{11/26,\ 1/2 + 9/22\} = 11/26$ $\qquad a(2) = 1$

$d(2) = 1/2$ es permanente $\quad a(2) = 1$

La antiarborescencia es :



Con peso $\gamma_1 = 11/26 + 1/2 + 1/19 + 1/2 = 937/494$

Calculando γ_2 con el algoritmo de Dijkstra tenemos:

Inicialización de etiquetas:

$d(2) = 0$, $d(1) = \infty$, $d(3) = \infty$, $d(4) = \infty$, $d(5) = \infty$
$a(1) = 1$, $a(3) = 3$, $a(4) = 4$, $a(5) = 5$

Sea $p = 2$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(2) = \{1, 3, 4, 5\}$

$d(1) = \min\{d(1), d(2) + 15/26\} = 15/26$ $a(1) = 2$

$d(3) = \min\{d(3), d(2) + 13/22\} = 13/22$ $a(3) = 2$

$d(4) = \min\{d(4), d(2) + 7/12\} = 7/12$ $a(4) = 2$

$d(5) = \min\{d(5), d(2) + 16/29\} = 16/29$ $a(5) = 2$

El mínimo es : $16/29$

$d(5) = 16/29$ es permanente $a(5) = 2$

Sea $p = 5$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(5) = \{1, 3, 4\}$

$d(1) = \min\{15/26, 16/29 + 10/19\} = 15/26$ $a(1) = 2$

$d(3) = \min\{13/22, 16/29 + 8/15\} = 13/22$ $a(3) = 2$

$d(4) = \min\{7/12, 16/29 + 9/17\} = 7/12$ $a(4) = 2$

El mínimo es : $15/26$

$d(1) = 15/26$ es permanente $a(1) = 2$

Sea $p = 1$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(1) = \{3, 4\}$

$d(3) = \min\{13/22, 15/26 + 1/2\} = 13/22$ $a(3) = 2$

$d(4) = \min\{7/12, 15/26 + 1/2\} = 7/12$ $a(4) = 2$

El mínimo es : $7/12$

$d(4) = 7/12$ es permanente $a(4) = 2$

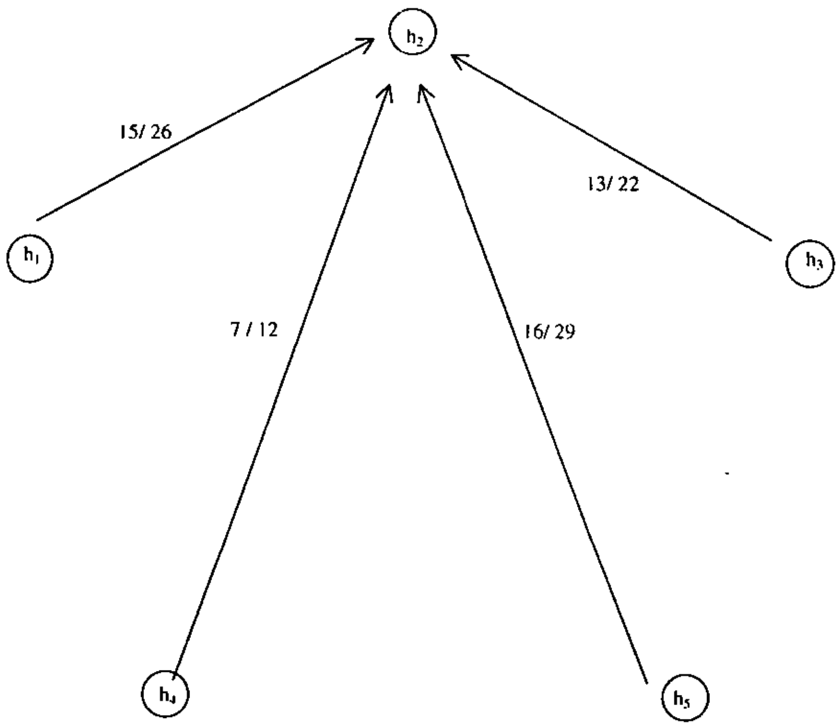
Sea $p = 4$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(4) = \{3\}$

$d(3) = \min\{13/22, 7/12 + 1/2\} = 13/22$ $a(3) = 2$

$d(3) = 13/22$ es permanente $a(3) = 2$

La antiarborescencia es :



Con peso γ_2 = 15 / 26 + 13 / 22 + 7 / 12 + 16 / 29 = 11461 / 49764

Calculando γ_3 con el algoritmo de Dijkstra tenemos:

Inicialización de etiquetas:

d (3) = 0 , d (1) = ∞, d (2) = ∞, d (4) = ∞, d (5) = ∞
a (1) = 1, a(2) = 2, a(4) = 4, a(5) = 5

Sea p = 3

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(3)$ = {1, 2, 4, 5}

d (1) = min {d(1), d (3) + 1 / 2} = 1 / 2 a (1) = 3

d (2) = min {d(2), d (3) + 9 / 22} = 9 / 22 a (2) = 3

d (4) = min {d(4), d (3) + 1 / 2} = 1 / 2 a (4) = 3

$d(5) = \min\{d(5), d(3) + 7/15\} = 7/15$ $a(5) = 3$

El mínimo es : $9/22$

$d(2) = 9/22$ es permanente $a(2) = 3$

Sea $p = 2$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^{-}(2) = \{1, 4, 5\}$

$d(1) = \min\{1/2, 9/22 + 15/26\} = 1/2$ $a(1) = 3$

$d(4) = \min\{1/2, 9/22 + 7/12\} = 1/2$ $a(4) = 3$

$d(5) = \min\{7/15, 9/22 + 16/29\} = 7/15$ $a(5) = 3$

El mínimo es : $7/15$

$d(5) = 7/15$ es permanente $a(5) = 3$

Sea $p = 5$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^{-}(5) = \{1, 4\}$

$d(1) = \min\{1/2, 7/15 + 9/17\} = 1/2$ $a(1) = 3$

$d(4) = \min\{1/2, 7/15 + 10/19\} = 1/2$ $a(4) = 3$

$d(1) = 1/2$ es permanente $a(1) = 3$

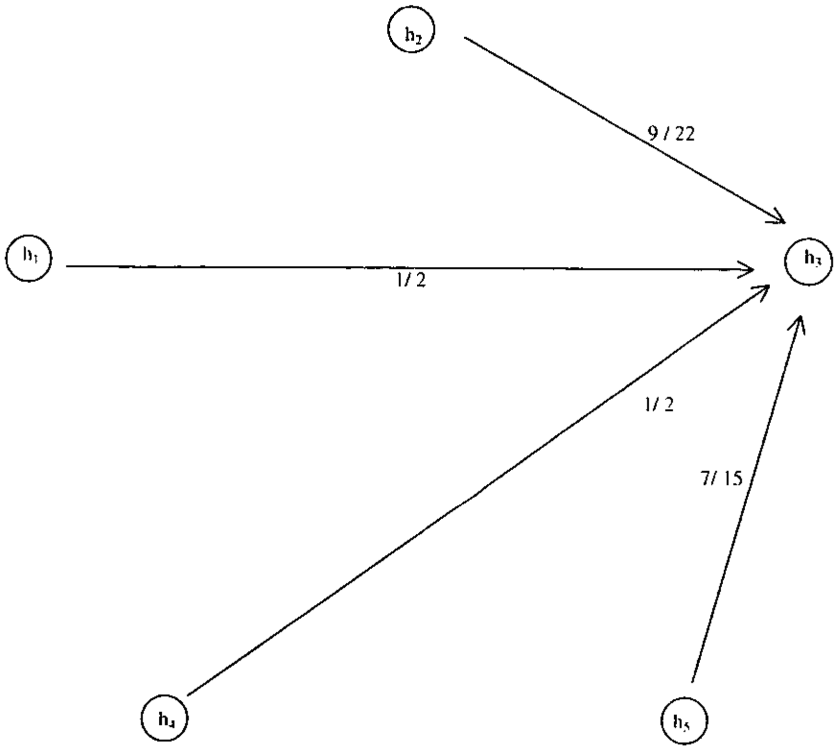
Sea $p = 1$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^{-}(1) = \{4\}$

$d(4) = \min\{1/2, 1/2 + 1/2\} = 1/2$ $a(4) = 3$

$d(4) = 1/2$ es permanente $a(4) = 3$

La antiarborescencia es :



Con peso $\gamma_3 = 9 / 22 + 1 / 2 + 1 / 2 + 7 / 15 = 619 / 330$

Calculando γ_4 con el algoritmo de Dijkstra tenemos:

Inicialización de etiquetas:

$d(4) = 0$, $d(1) = \infty$, $d(2) = \infty$, $d(3) = \infty$, $d(5) = \infty$
$a(1) = 1$, $a(2) = 2$, $a(3) = 3$, $a(5) = 5$

Sea $p = 4$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(4) = \{1, 2, 3, 5\}$

$d(1) = \min\{d(1), d(4) + 1 / 2\} = 1 / 2$ $\quad a(1) = 4$

$d(2) = \min\{d(2), d(4) + 5 / 12\} = 5 / 12$ $\quad a(2) = 4$

$d(3) = \min\{d(3), d(4) + 1 / 2\} = 1 / 2$ $\quad a(3) = 4$

$d(5) = \min\{d(5), d(4) + 8/17\} = 8/17$ $\quad a(5) = 4$

El mínimo es : $5/12$

$d(2) = 5/12$ es permanente $a(2) = 4$

Sea $p = 2$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(2) = \{1, 3, 5\}$

$d(1) = \min\{1/2, 5/12 + 15/26\} = 1/2$ $\quad a(1) = 4$

$d(3) = \min\{1/2, 5/12 + 13/22\} = 1/2$ $\quad a(3) = 4$

$d(5) = \min\{8/17, 5/12 + 16/29\} = 8/17$ $\quad a(5) = 4$

El mínimo es : $8/17$

$d(5) = 8/17$ es permanente $a(5) = 4$

Sea $p = 5$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(5) = \{1, 3\}$

$d(1) = \min\{1/2, 8/17 + 10/19\} = 1/2$ $\quad a(1) = 4$

$d(3) = \min\{1/2, 8/17 + 8/15\} = 1/2$ $\quad a(4) = 4$

$d(3) = 1/2$ es permanente $a(3) = 4$

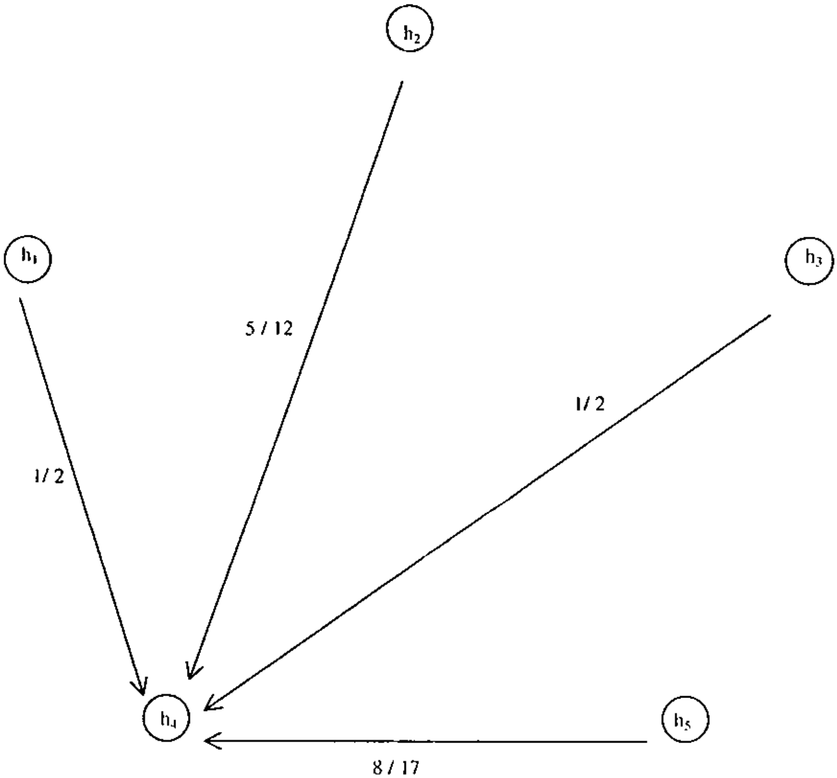
Sea $p = 3$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(3) = \{1\}$

$d(1) = \min\{1/2, 1/2 + 1/2\} = 1/2$ $\quad a(1) = 4$

$d(1) = 1/2$ es permanente $a(1) = 4$

La antiarborescencia es :



Con peso $\gamma_4 = 1 / 2 + 5 / 12 + 1 / 2 + 8 / 17 = 385 / 204$

Calculando γ_5 con el algoritmo de Dijkstra tenemos:

Inicialización de etiquetas:

$d(5) = 0$, $d(1) = \infty$, $d(2) = \infty$, $d(3) = \infty$, $d(4) = \infty$
$a(1) = 1$, $a(2) = 2$, $a(3) = 3$, $a(4) = 4$

Sea $p = 5$

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(5) = \{1, 2, 3, 4\}$

$d(1) = \min\{d(1), d(5) + 10 / 19\} = 10 / 19$ $\qquad a(1) = 5$

$d(2) = \min\{d(2), d(5) + 13 / 29\} = 13 / 29$ $\qquad a(2) = 5$

$d(3) = \min\{d(3), d(5) + 8 / 15\} = 8 / 15$ $\qquad a(3) = 5$

d (4) = min {d(4), d (5) + 9 / 17} = 9 / 17 a (4) = 5

El mínimo es : 13 / 29

d (2) = 13 / 29 es permanente a (2) = 5

Sea p = 2

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(2) = \{1, 3, 4\}$

d (1) = min {10 /19, 13 / 29 + 15 / 26 } = 10 /19 a (1) = 5

d (3) = min {8 / 15, 13 / 29 + 13 / 22} = 8 / 15 a (3) = 5

d (4) = min {9/ 1 7, 13 / 29 + 7 / 12} = 9 / 17 a (4) = 5

El mínimo es : 10 / 19

d (1) = 10 / 19 es permanente a (1) = 5

Sea p = 1

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(1) = \{3, 4\}$

d (3) = min {8 / 15, 10 / 19 + 1/ 2} = 8 / 15 a (3) = 5

d (4) = min {9 / 17, 10 / 19 + 1 / 2} = 9 / 17 a (4) = 5

d (4) = 9 / 17 es permanente a (4) = 5

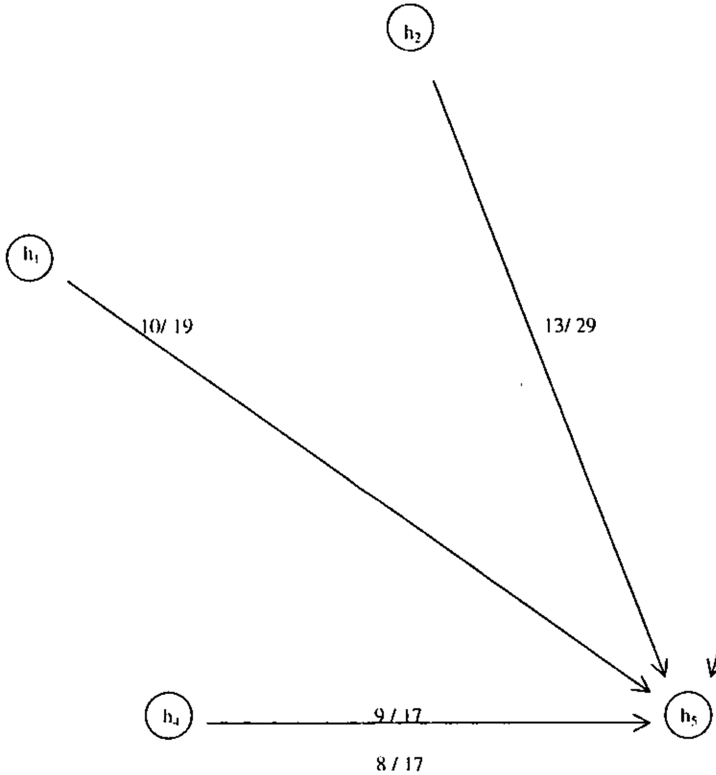
Sea p = 4

Actualización de etiquetas: $\Gamma^-(4) = \{3\}$

d (3) = min {8 / 15, 9 / 17 + 1 / 2} = 8 / 15 a (3) = 5

d (3) = 8 / 15 es permanente a (3) = 5

La antiarborescencia es :



Con peso γ_5 = 10 /19 + 13 / 29 + 8 / 15 + 9 / 17 = 286256 / 140505

El menor de los pesos en las antiarborescencias es γ_3 por lo tanto cuando k y k / m son lo suficientemente grandes el proceso estará en el equilibrio h_3 casi todo el tiempo.

Es importante notar que hay dos aspectos esenciales que caracterizan a la estabilidad estocástica :

El primer aspecto es que la estabilidad estocástica requiere observar todas las transiciones de i a j, incluso aquellas transiciones que contemplan otras estrategias

La segunda distinción es que la estabilidad estocástica cae en un criterio global (la resistencia de árboles expandidos) y puede comparar la estabilidad estocástica de distintas estrategias. La estabilidad estocástica selecciona el equilibrio al que el proceso (o la sociedad) le es más fácil llegar desde cualquier otro estado, incluyendo todos los estados que son equilibrios y los que no lo son.

CONCLUSION

En este trabajo se han mostrado condiciones suficientes sobre la manera en que se tiene que jugar un juego que es jugado repetidamente por diferentes agentes para que un equilibrio pueda darse. El modelo es similar al juego ficticio, en donde las expectativas de los jugadores están basadas en todos los antecedentes. En el juego de adaptación difiere en que los agentes basan sus decisiones en un conocimiento incompleto del pasado reciente y ocasionalmente cometen errores. Estas hipótesis parecen ser más reales que la dinámica determinística del juego ficticio y así podemos justificar el modelo con un poco de más realismo. También se tiene un papel importante técnicamente introduciendo un cierto ruido dentro del proceso de ajuste de la dinámica, que también hace más real al modelo y cuyo ruido permite que bajo ciertas condiciones los distintos equilibrios que existen en el proceso puedan compararse unos con otros para determinar cuál de ellos será escogido por la sociedad la mayor parte del tiempo.

Diversas cuestiones permanecen para ser analizadas. Una es la sensibilidad del equilibrio seleccionado en la forma que el modelo lo hace. Hemos mostrado que los equilibrios estocasticamente estables son invariantes con respecto a las distribuciones de perturbación siempre y cuando estas distribuciones sean independientes entre los jugadores, tengan un soporte completo y sean estacionarias; es decir, no cambien con el tiempo. Además mostramos que para juegos de 2x2 los equilibrios estocásticos son independientes de m y k siempre y cuando m/k y k sean suficientemente grandes. No es claro, cuándo este resultado se mantiene para juegos débilmente acíclicos en general.

Una segunda cuestión es, ¿es posible que los equilibrios estocásticamente estables pueden ser caracterizados en una forma más pequeña?. El método que se describió en el Teorema 5.1 muestra cómo se pueden calcular los equilibrios estocásticamente más estables en una amplia clase de modelos dinámicos con perturbaciones, pero no describe estos equilibrios en términos de una fórmula simple. Esta no es razón para pensar que tal fórmula existe en el caso general.

Otra cuestión es, ¿cómo cambiarían los equilibrios estocasticamente más estables si a los jugadores se les permite un ámbito mayor para tomar decisiones?. Por ejemplo, ¿qué sucedería si los jugadores aprenden mientras juegan a través del tiempo o hacen inferencia acerca de la regla de decisión de otros jugadores, o escogen el tamaño óptimo de la muestra basado en los costos de obtención de la información?. Estas nuevas hipótesis complican mucho el espacio de estados y el proceso estocástico. Requieren además un mayor conocimiento por parte de los agentes. En cualquier evento, si los agentes cometen errores frecuente e independientemente uno del otro, entonces los estados pueden todavía ser analizados estocásticamente usando las técnicas generales aquí expuestas. Se escogió deliberadamente el caso en el que los jugadores no aprenden con el fin de mostrar que la convergencia hacia un equilibrio puede ocurrir sin ningún conocimiento común y con sólo un mínimo grado de racionalidad por parte de los agentes

APENDICE

Elementos de la Teoría de Gráficas y Teoría de Redes

Una *gráfica* es una pareja de conjuntos [X, A], donde X es un conjunto de puntos llamados *vértices* o *nodos* y A es un conjunto de líneas que unen todos o algunos de los vértices. Una gráfica se denota con G = [X, A].

Si los elementos de A tienen dirección, representada con una flecha, se llaman *arcos* y se dice que la gráfica es dirigida u orientada. Si no tienen dirección se llaman *aristas* y G es no dirigida.

Un arco puede representarse como la pareja (i, j), donde $i, j \in X$ son los vértices que unen dicho arco. Si $a = (i, j) \in A$, i es el *vértice o extremo inicial* de a y j es el *vértice o extremo final* de a.

Sea G = [X, A] una gráfica dirigida y sea $i \in X$. Se llama *sucesor* de i a todo vértice $j \in X$ tal que existe $(i, j) \in A$. Se llama *predecesor* de i a todo vértice $j \in X$ tal que existe $(j, i) \in A$. También se definen las funciones
$\Gamma^+, \Gamma^- : X \rightarrow p(X)$ (conjunto potencia de X), donde, para $i \in X$:

$\Gamma^+ = \{\text{sucesores de } i\} = \{j \in X : (i, j) \in A\}$ y

$\Gamma^- = \{\text{predecesores de } i\} = \{i \in X : (j, i) \in A\}$

También puede definirse, tanto para las gráficas dirigidas como no dirigidas, el siguiente concepto. Un vértice j es *vecino* de un vértice i si existe la arista $(i, j) \in A$. Si la gráfica es dirigida $j \in X$ es vecino de $i \in X$ si j es predecesor o sucesor de i. Algunas veces se dice que i y j son *adyacentes*. Se define la función
$\Gamma : X \rightarrow P(X)$ como $\Gamma(i) = \{\text{vecinos de } i\}$ para $i \in X$.

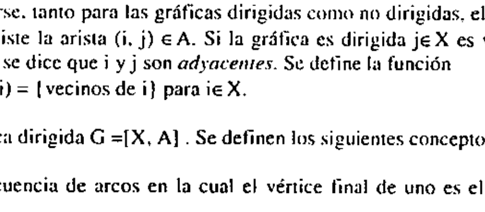
Considérese una gráfica dirigida G =[X, A] . Se definen los siguientes conceptos en ella.

Un *camino* es una secuencia de arcos en la cual el vértice final de uno es el vértice inicial del que le sigue en secuencia.
Un camino puede representarse con la secuencia de arcos que lo forman o por la secuencia de vértices extremos de estos arcos o por la secuencia alternada de vértices y arcos.
Si $a_1 = (i_1, i_2)$ es el primer arco del camino y $a_q = (i_q, i_{q+1})$ es el último arco, se dice que el camino es un camino de i_1 a i_{1+1}. Un *camino simple* es un camino es $a_1, a_2, \ldots, a_q$ tal que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$.

Un *camino elemental* es un camino $i_1, i_2, \ldots, i_q$ (secuencia de vértices) tal que $i_j \neq i_k$ si $j \neq k$.

Dicho en palabras, un camino simple es un camino en el cual no se repiten arcos y uno elemental es un camino que no repite vértices. Obsérvese que todo camino elemental es también simple.

Como ejemplo considérese la siguiente gráfica.



Puede verificarse fácilmente que $\Gamma^+(3) = \{5, 2\}$, $\Gamma^+(1) = \varnothing$ $\Gamma^-(6) = \{5, 2, 1\}$ y $\Gamma^-(2) = \{1, 3\}$.

La secuencia a_5, a_8, a_7, a_5 es un camino de 5 a 4. Este camino no es ni simple ni elemental.. El camino a_6, a_5, a_8, a_7, a_4 es simple y no elemental. El camino a_5 , a_8 , a_9 es simple y elemental .

En seguida se define un concepto válido para gráficas dirigidas y no dirigidas. Una *cadena* es una secuencia de aristas (o arcos) a_1, a_2, . . . , a_q donde a_i está conectada a a_{i-1} por un extremo a a_{i+1} y por el otro. Si la cadena es de cardinalidad dos, estas dos aristas deben estar conectadas por uno de sus extremos.

En la gráfica anterior a_1, a_9, a_7 , a_5 (ó 1, 2, 3, 5, 4) es una cadena que une los vértices 1 y 5. Análogamente que como fueron definidos camino simple y camino elemental se definen cadena simple y cadena elemental.

Hay algunos caminos y cadenas especiales por lo que reciben un nombre particular. Un *circuito* es un camino a_1, a_2, . . . , a_q donde el vértice final de a_q y el inicial de a_1 coinciden ; es decir, un circuito es un camino "cerrado". En la gráfica anterior a_5, a_8, a_7 es un circuito. Un *circuito simple* es un circuito con todos sus arcos distintos. Un *circuito elemental* es un circuito con todos sus vértices, excepto el inicial, distintos. Un ciclo es una *cadena* i_1, i_2, . . . , i_q donde $i_1 = i_q$. En la gráfica anterior a_4, a_6 , a_1 es un ciclo.

Sea G = [X, A] una gráfica dirigida y sea $i \in X$.

El *grado exterior* de i es el número de arcos que tienen a i como extremo inicial y se denota $g^+(i)$.
El *grado interior* de i es el número de arcos que tiene a i como extremo final y se denota $g^+(i)$.

Obsérvese que $g^+(i)$ es igual a la cardinalidad de $\Gamma^+(i)$ y $g^-(i)$ es igual a la cardinalidad de $\Gamma^-(i)$. Además, si m es el número de aristas y n es el número de vértices de G, entonces :

$$\sum_{i=1,n} g^+(i) = \sum_{i=1,n} g^-(i) = m$$

Ya que una arista tiene le corresponde solamente un vértice de extremo inicial y un vértice de extremo final.

El *grado* de $i \in X$, es el número de arcos que tienen a i como uno de sus extremos. Se denota g (i).

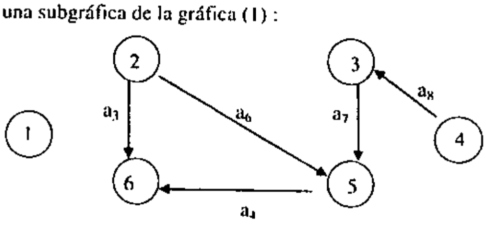
En gráficas no dirigidas se define el grado de $i \in X$ como la cardinalidad de $\Gamma(i)$.

En la gráfica anterior se tiene que $g^+(6) = 0$, $g^-(6) = 3$ y $g(6) = 3$.

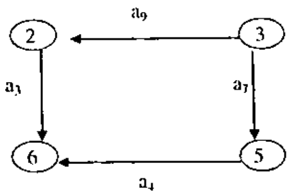
Existen ciertos subconjuntos de gráficas que son de utilidad y que a continuación se definen.

Sea G = [X, A] una gráfica. Una *gráfica parcial* de G es la gráfica $G_p = [X, A_p]$, donde $A_p \subseteq A$; es decir, es una gráfica constituida por todos los vértices y algunas aristas o arcos de G. Una *subgráfica* de G es la gráfica $G_s = [X_s, A_s]$, donde $X_s \subseteq X$ y $(i, j) \in A_s$ si y solo si $i, j \in X_s$ e $(i, j) \in A$; es decir, es una gráfica que consta de un subconjunto de los vértices de G y todas las aristas o arcos de G que unen los vértices de ese subconjunto.

La gráfica siguiente es una subgráfica de la gráfica (1) :



La gráfica siguiente es un ejemplo de una gráfica parcial de la gráfica (1).



Una gráfica G = [X, A] es *conexa* si par todo par de vértices i, j ∈ X existe una cadena que los une.

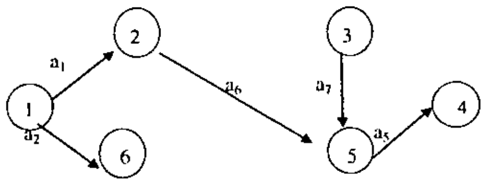
La gráfica (1) es una gráfica conexa.

Una *red* R =[X, A, f] es una gráfica [X, A] ponderada ; es decir, es una gráfica [X,A] con una función real f definida sobre sus arcos o aristas o sobre sus vértices o sobre ambos.

Un *árbol* es una gráfica T = [X, A] conexa y acíclica.

Sea G = [X, A] una gráfica no dirigida. Un *árbol expandido* de G es una gráfica parcial T = [X, A'], de G, que es un árbol.

Ejemplo : Considérese la gráfica 1 ; la siguiente gráfica es un árbol expandido de G



Obsérvese que una gráfica puede tener varios árboles expandidos.

Considérese una función p que asocia un real a cada arista de una gráfica. A este real se le llama *peso de la arista*. La función puede representar costos, distancias, tiempo etc.

El *peso de un árbol* es la suma de los pesos de las aristas que lo forman.

Propiedades de Arboles

Existen distintas definiciones de árboles equivalentes. Con el propósito de demostrar tales equivalencias se analizarán ciertas propiedades elementales de las gráficas.

Proposición 1. Sea G = [X, A] una gráfica. Supóngase que se agrega la arista a = (x, y) a la gráfica G entonces :

i. El número de componentes conexas de G disminuye una unidad si los extremos de a pertenecen a dos componentes conexas distintas. En este caso, la arista a no pertenece a ningún ciclo de la gráfica G' = [X, A∪{a}].
ii. El número de componentes conexas de G permanece igual si los extremos de a pertenecen a la misma componente conexa. En este caso, a pertenece a un ciclo de la gráfica G' = [X, A∪{a}].

Proposición 2. Sea G = [X, A] una gráfica con n vértices y m aristas.

a. Si G es conexa entonces $m \geq n-1$
b. Si g es acíclica entonces $m \leq n-1$

Teorema. Sea G =(X, A) una gráfica con n vértices. Supóngase que $n \geq 2$. Los postulados siguientes son equivalentes y caracterizan un árbol :

a) G es conexa y acíclica.
b) G es acíclica y tiene $n - 1$ aristas.
c) G es acíclica y si se agrega una arista se forma exactamente un ciclo.
d) G es conexa y tienen $n - 1$ aristas.
e) G es conexa pero deja de serlo si se elimina una arista.
f) Existe, en G, una única cadena entre todo par de vértices.

Corolario. Sea G = (X, A) una gráfica conexa, entonces G posee un árbol expandido T = (X, A').

Definición. Sea G = (X, A) una gráfica. Sea x un vértice de G. Se dice que x es un vértice pendiente si su grado es uno.

Proposición 3. Sea G = (X, A) un árbol con n vértices, donde $n \geq 2$. Entonces G tiene, al menos, dos vértices pendientes.

Proposición 4. Sea G = (X, A) un árbol. Entonces :

a) Si x es un vértices pendiente de G y a es la única arista adyacente a él, la gráfica $G' = (X-\{x\}, A-\{a\})$ es un árbol.
b) Si se agrega un vértice x a G y se conecta a G por medio de una arista, a, la gráfica resultante $G' = (X \cup \{x\}, A \cup \{a\})$ es un árbol.

Considérese el problema de encontrar el árbol expandido de peso mínimo en una gráfica con una función de peso asociada a sus aristas. Debe notarse que, para que el problema tenga solución, la gráfica tiene que ser conexa ; si esto se satisface, puede garantizarse la existencia de un árbol expandido y, por lo tanto, podrá procederse a la búsqueda del mejor árbol expandido.

Algoritmo de Kruskal

Este es un algoritmo que determina el árbol expandido de peso mínimo en una gráfica G conexa con n vértices y m aristas.

Descripción

1) Ordénese el conjunto de aristas de una manera creciente con respecto a la función de peso. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_m$ las aristas ordenadas. Hacer $k = j = 0$ y $A' = \emptyset$.
2) Hacer $j = j+1$. Si la arista a_j no forma un ciclo con las aristas de A' entonces $A' = A' \cup \{a_j\}$. Hacer $k = k+1$ e ir a 3. Si la arista a_j forma un ciclo ir a 3.
3) Si $k = n - 1$ terminar ; la gráfica T = (X, A') es el árbol expandido de peso mínimo de G. Si $k < n - 1$ regrésese a 2.

Método alternativo :

Algoritmo de Prim.

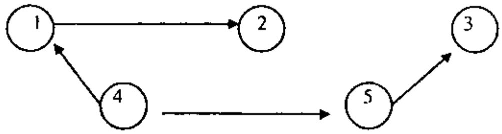
Descripción

1) Sea x_0 cualquier vértice de la gráfica G ; sean $x_0 = \{x_0\}$ y $A_0 = \emptyset$. Hacer k = 0.
   k = k + 1.
2) Sea C_k el conjunto de aristas que tienen exactamente un extremo en x_{k-1}. Sea a_k la arista de peso mínimo de y sea x_k el extremo de a_k que no pertenece a x_{k-1}.

3) Hacer $X_k = X_{k-1} \cup \{x_k\}$; $A = A_{k-1} \cup \{a_k\}$

4) Si k > n − 1 terminar. La gráfica $T_{n-1} = (X_{n-1}, A_{n-1})$ es un árbol expandido de peso mínimo de G.

Sea G = (X, A) una gráfica dirigida y sea $s \in X$; entonces s se llama raíz de G, si existe un camino de s a x para todo $x \in X$.
Una arborescencia en un árbol que tiene una raíz. La siguiente gráfica es una arborescencia de raíz 4 :



Sea G = (X, A) una gráfica dirigida. Una arborescencia de G es un árbol expandido de G que tiene un vértice que es raíz.

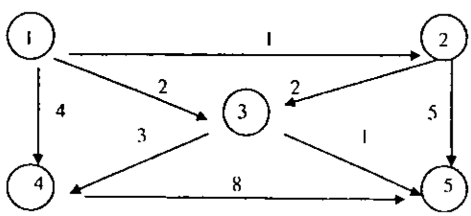
Considérese una red R = (X, A, d). Una arborescencia de rutas más cortas de R es aquella arborescencia tal que la única ruta de s a x, para todo $x \in X$, es una ruta más corta de s a x.

Para que exista la arborescencia de rutas más cortas de raíz s en una red cualquiera R = (X, A, d), ésta deberá cumplir que :

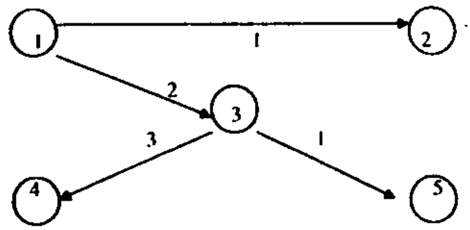
i) Existen caminos de s a x, para todo $x \in X$. Es decir, que s sea raíz de la red.
ii) No existen circuitos negativos en la red R ; ya que de presentarse éstos, el problema sería no acotado.

Es importante notar que la arborescencia de rutas más cortas es distinta del árbol de peso mínimo de una red ; puesto que, mientras el segundo concepto es no orientado, el primero solo es aplicable a redes dirigidas. Aún en el caso en que la red sea dirigida, un árbol no necesariamente es arborescencia ya que éste puede no tener raíz.

Podría suceder incluso que un árbol de peso mínimo resulte ser una arborescencia ; sin embargo, de ningún modo puede garantizarse que ésta sea de rutas más cortas. Por ejemplo, en la siguiente red :



Un árbol de peso mínimo resulta ser :



el cual, resulta ser una arborescencia de raíz 1. Sin embargo, la única ruta en la arborescencia entre los vértices 1 y 4 tiene una longitud de 5 unidades y existe otra ruta de longitud menor entre estos dos vértices en la red : en efecto, la ruta 1,4 tiene una longitud de 4 unidades. Por lo que la arborescencia no es de rutas más cortas.

Teorema. Sea $G = (X, A)$ una gráfica con n vértices. Supóngase que $n \geq 2$. Los postulados siguientes son equivalentes y caracterizan una arborescencia.

a) G es un árbol y tiene un vértice x_0 que es raíz.
b) Para todo vértice x existe un camino único de x_0 a x .
c) G tiene al vértice x_0 que es raíz y si se elimina una arista entonces x_0 ya no es raíz.
d) G es conexa, $g^-(x_0) = 0$ y $g^-(x) = 1$, para todo x distinto de x_0.
e) G es acíclica, $g^-(x_0) = 0$ y $g^-(x) = 1$, para todo x distinto de x_0.
f) G tiene como raíz a x_0 y es acíclica.
g) G tiene como raíz a x_0 y tiene $n - 1$ aristas.

Es importante señalar que el algoritmo que se dará para encontrar la arborescencia de rutas más cortas, tiene la ventaja de que, además de proporcionar la solución óptima cuando existe, detecta cuando ésta no existe ; ya sea dicha solución no exista porque s no es raíz de la red o por la presencia de circuitos negativos.

Algoritmo de Dijkstra

El propósito del algoritmo es la obtención de la arborescencia de rutas más cortas de raíz s en una red $R = (X, A, d)$ con costos no negativos en los arcos.

Descripción

1) (Inicialización de etiquetas). Sea $d(s) = 0$ y márquese esta etiqueta como permananete. Sea $d(x) = \infty$, para todo $x \neq s$ y considérense estas etiquetas como temporales.

Sean $a(x) = x$ (estas etiquetas indicarán el predecesor de x en la arborescencia). Sea $p = s$.

2) (Actualización de etiquetas) Para todo $x \in \Gamma^+(p)$ que tenga etiqueta temporal, actualizar etiquetas de acuerdo a :

$d(x) = \min \{ d(x), d(p) + d(p, x) \}$

si $d(x)$ se modificó, hacer $a(x) = p$. Sea x^* tal que $d(x^*) = \min \{ d(x) \mid d(x) \text{ es temporal} \}$. Si $d(x^*) = \infty$, terminar. En este caso no existe arborescencia alguna de raíz s. En otro caso, marcar la etiqueta $d(x^*)$ como permanente. Sea $p = x^*$.

3) (i) (Si solo se desea la ruta de s a t). Si p = t, terminar : d (p) es la longitud del camino más corto.

Si p ≠ t, ir al paso 2. (ii) (Si se desea la arborescencia). Si todos los vértices tienen etiquetas permanentes, terminar ; esta es la longitud del camino deseado y el conjunto de arcos (a (x), x) forman la arborescencia de caminos más cortos. En otro caso ir al paso 2.

(Las demostraciones y las justificaciones de los algoritmos pueden encontrarse en Análisis de Redes por Carmen Hernández Ayuso, Vínculos matemáticos N° 161, 1996 cuarta edición pp 5- 48)

Procesos Estocásticos y Cadenas de Markov

Considérense puntos discretos en el tiempo $\{\xi_k\}$ para k = 1, 2, ... y sea ξ_{tk} la variable aleatoria que caracteriza el estado o resultado del sistema en t_k . La familia de variables aleatorias $\{\xi_k\}$ forma un proceso estocástico.

Los estados en el tiempo actualmente representan los resultados (exhaustivos y mutuamente excluyentes) del sistema en ese tiempo. El número de estados puede ser, por consiguiente, finito o infinito.

Procesos de Markov

Un proceso de Markov es un proceso estocástico para el cual la ocurrencia de un estado futuro depende del estado inmediatamente anterior y únicamente de él. Por consiguiente, si $t_0 < t_1 < ... < t_n$ (n=0, 1, 2,...) representan puntos en el tiempo, la familia de variables aleatorias $\{\xi_k\}$ es un proceso de Markov si posee la propiedad markoviana siguiente :

$$P(\xi_{k} = x_n \mid \xi_{tn-1} = x_{n-1} \ldots , \xi_{t0} = x_0) = P(\xi_{tn} = x_n \mid \xi_{n-1} = x_{n-1})$$

para todos los valores posibles de $\xi_{t0}, \xi_{t1}, \ldots . \xi_{tn}$.

La probabilidad $p_{xn-1,xn} = P(\xi_{tn} = x_n \mid \xi_{tn-1} = x_{n-1})$ se conoce como la probabilidad de transición. Representa la probabilidad condicional de que el sistema esté en x_n en t_n dado que estuvo en x_{n-1} en t_{n-1} . Esta probabilidad también se conoce como la probabilidad de transición de un paso ya que describe el sistema entre t_{n-1} en t_n. Una probabilidad de transición de m pasos , por consiguiente se define por

$$p_{xn,xn+m} = P(\xi_{tn+m} = x_{n+m} \mid \xi_{tn} = x_n)$$

También se asume que para cualquier par de estados i, j y para toda t ,

$$P(\xi_t = i \mid \xi_{t-1} = j)$$

es independiente del tiempo ; esta hipótesis nos permite escribir

$P(\xi_t = i \mid \xi_{t-1} = j) = p_{ij}$ donde p_{ij} es la probabilidad de que el sistema esté en el estado i al tiempo t, dado que está en el estado j al tiempo t-1.

Cadenas de Markov

Sean $E_1, E_2, \ldots . E_j$ (j = 0, 1, 2, . . .) los resultados (estados) exhaustivos y mutuamente excluyentes de un sistema en cualquier tiempo. Inicialmente, en el tiempo t_0 el sistema puede estar en cualquiera de estos estados. Sea $a^{(0)}_j$ (j = 0, 1, 2, . . .) la probabilidad absoluta de que el sistema esté en el estado E_j en t_0 . Suponga además, que el sistema es markoviano.

Defínase a

$$p_{ij} = P(\xi_{tn} = i \mid \xi_{tn-1} = j)$$

como la probabilidad de transición de un paso de ir del estado i en t_{n-1} al estado j en t_n , y suponga que estas probabilidades son estacionarias (fijas) a través del tiempo.

Por consiguiente, las probabilidades de transición del estado E_i al E_j pueden disponerse de manera más conveniente en forma matricial como sigue.

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & \end{pmatrix}$$

La matriz P se conoce como una matriz estocástica o matriz homogenea de transición, porque todas las probabilidades de transición p_{ij} están fijas e independientes del tiempo. Las probabilidades p_{ij} deben satisfacer las condiciones.

$$\sum_j p_{ij} = 1 \text{ para toda } i$$
$$p_{ij} \geq 0. \text{ para toda } i \text{ y toda } j$$

La definición de una cadena de Markov puede darse ahora. Una matriz de transición P junto con las probabilidades iniciales $\{a^{(0)}_j\}$ asociadas a los estados E_j definen completamente una cadena de Markov.

Probabilidades absolutas y de transición

Dados $\{a^{(0)}_j\}$ y **P** de una cadena de Markov, es posible determinar las probabilidades absolutas del sistema después de un número especificado de transiciones. Sean $\{a^{(n)}_j\}$ las probabilidades absolutas del sistema después de n transiciones : esto es, en t_n. La expresión general de $\{a^{(n)}_j\}$en términos de $\{a^{(0)}_j\}$ y **P** puede encontrarse como sigue.

$$a^{(1)}_j = a^{(0)}_1 \cdot p_{1j} + a^{(0)}_2 \cdot p_{2j} + \ \ldots \ = \sum_i \ a^{(0)}_i . p_{ij}$$

También

$$a^{(2)}_j = \sum_i a^{(1)}_i \cdot p_{ij} = \sum_i (\sum_k a^{(0)}_k \cdot p_{ki}) p_{ij} = \sum_k a^{(0)}_k (\sum_i p_{ki} \cdot p_{ij}) = \sum_k a^{(0)}_k . p^{(2)}_{kj}$$

donde $p^{(2)}_{kj} = \sum_i p_{ki} \cdot p_{ij}$ es la probabilidad de transición de dos pasos o de segundo orden ; esto es, la probabilidad de pasar del estado k al j en exactamente dos transiciones.

De igual manera, puede encontrarse que

$$a^{(2)}_j = \sum_i a^{(0)}_i (\sum_k p^{(n-1)}_{ik} \cdot p_{kj}) = \sum_i a^{(0)}_i \ p^{(n)}_{ij}$$

donde $p^{(n)}_{ij}$ es la probabilidad de transición de n pasos o de n-ésimo orden dada por la fórmula recursiva

$$p^{(n)}_{ij} = \sum_k p^{(n-1)}_{ik} \cdot p_{kj}$$

En general, para toda i y toda j,

$$p^{(n)}_{ij} = \sum_k p^{(n-m)}_{ik} \cdot p^{(m)}_{kj} , \qquad 0 < m < n$$

Estas ecuaciones se conocen como las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.

Los elementos de una matriz de transición más alta $\|p^{(n)}_{ij}\|$ pueden obtenerse directamente por multiplicación matricial. Por consiguiente,

$$\|p^{(2)}_{ij}\| = \|p_{ij}\| \cdot \|p_{ij}\| = \mathbf{P}^2$$
$$\|p^{(3)}_{ij}\| = \|p^{(2)}_{ij}\| \cdot \|p_{ij}\| = \mathbf{P}^3$$

y, en general,

$$\|p^{(n)}_{ij}\| = \mathbf{P}^{n-1} \cdot \mathbf{P}^{n} = \mathbf{P}^{n}$$

Por lo tanto, si las probabilidades absolutas están definidas en forma vertorial como

$a^{(n)} = \{ a^{(n)}_1, a^{(n)}_2, a^{(n)}_3, \ldots \}$ entonces

$$a^{(n)} = a^{(0)} \mathbf{P}^{n}$$

Clasificación de estados en cadenas de Markov

Al usar el análisis de cadenas de Markov se puede estar interesado en estudiar el comportamiento del sistema sobre un corto periodo. En este caso, las probabilidades absolutas se calculan como se mostró en la sección anterior. Un estudio más importante, sin embargo, involucraría el comportamiento a largo plazo del sistema ; esto es, cuando el número de transiciones tiende a infinito. En tal caso, el análisis dado en la sección anterior es inadecuado y llega a ser necesario un procedimiento sistematico que pronostique el comportamiento a largo plazo del sistema.

Cadena de Markov irreducible

Una cadena de Markov se dice que es **irreducible** si cada estado E_j puede alcanzarse a partir de otro estado E_i después de un número finito de transiciones ; esto es, para $i \neq j$.

$$p^{(n)}_{ij} > 0 , \quad \text{para } 1 \leq n < \infty$$

En este caso, todos los estados de la cadena se **comunican.**

Conjunto cerrado y estados absorbentes.

En una cadena de Markov, un conjunto C de estados se dice que **es cerrado** si el sistema, una vez que está en uno de los estados de C, permanecerá en C indefinidamente. Un ejemplo especial de un conjunto cerrado es un solo estado E_i con probabilidad de transición $p_{ii} = 1$. En este caso E_i, se llama **un estado absorbente.**

Todos los estados de una cadena de irreducible deben formar un conjunto cerrado y ningún otro subconjunto puede ser cerrado. El conjunto cerrado C debe también satisfacer todas las condiciones de una cadena de Markov y por lo tanto puede ser estudiado de una manera independiente.

Tiempos de primer regreso

Una primer definición importante en la teoría de cadenas de Markov es el tiempo del **primer regreso.** Dado que el sistema está inicialmente en el estado E_j, puede regresar a E_j por primera vez en el n-ésimo paso, $n \geq 1$. El número de pasos antes de que el proceso regrese a E_j se llama tiempo del primer regreso.

Sea $f^{(n)}_{jj}$ la probabilidad de que el primer regreso ocurra en el E_j n-ésimo paso.
Entonces, dada la matriz de transición,

$$P = \| p_{ij} \|$$

puede determinarse una expresión para $f^{(n)}_{jj}$ como sigue

$$p_{jj} = f^{(1)}_{jj}$$

$$p^{(2)}_{jj} = f^{(2)}_{jj} + f^{(1)}_{jj}\, p_{jj}$$

o bien,

$$f^{(2)}_{jj} = p^{(2)}_{jj} - f^{(1)}_{jj}\, p_{jj}$$

Por inducción puede comprobarse en general que

$$p^{(n)}_{jj} = f^{(n)}_{jj} + \sum_{m=1,\, n-1} f^{(m)}_{jj}\, p^{(n-m)}_{jj}$$

lo cual proporciona la expresión requerida como

$$f^{(n)}_{jj} = p^{(n)}_{jj} - \sum_{m=1,\, n-1} f^{(m)}_{jj}\, p^{(n-m)}_{jj}$$

La probabilidad de al menos un regreso al estado E_j se da entonces como

$$f_{jj} = \sum_{m=1,\, \infty} f^{(m)}_{jj}$$

Por consiguiente, el sistema tiene la certeza de regresar a j si $f_{jj} = 1$. En este caso, si μ_{jj} define el tiempo medio (recurrencia) de regreso,

$$\mu_{jj} = \sum_{m=1,\, \infty} m \cdot f^{(m)}_{jj}$$

Si $f_{jj} < 1$, no es seguro que el sistema regresará a E_j y, consecuentemente, $\mu_{jj} = \infty$.

Los estados de una cadena de Markov pueden, por consiguiente, clasificarse con base en la definición del tiempo del primer regreso como sigue :

1. Un estado es **transitorio** si $f_{jj} < 1$; esto es, $\mu_{jj} = \infty$.
2. Dados dos estados i, j una **ruta** de i a j es una secuencia de transiciones que empiezan en i y terminan en j, tal que cualquier transición en la secuencia tiene probabilidad positiva de ocurrir.
3. Un estado j es **alcanzable** desde un estado i si existe una ruta que vaya de i a j.
4. Se dice que dos estados i, j se **comunican** si i es alcanzable desde j y j es alcanzable desde i.
5. Un estado i es un estado **absorbente** si $p_{ii} = 1$.
6. Un estado es **recurrente** (persistente) si $f_{jj} = 1$.
7. Un estado recurrente es nulo si $\mu_{jj} = \infty$ y **no nulo** si $\mu_{jj} < \infty$ (finito)
8. Un estado es **periódico** con periodo t si es posible un regreso únicamente en t, 2t, 3t, ... pasos. Esto significa que $p^{(n)}_{jj} = 0$ toda vez que *n* no es divisible entre t.
9. Un estado recurrente es **ergódico** si es no nulo y aperiódico (no periódico).

Cadenas de Markov ergódicas

Una cadena de Markov *irreducible* es ergódica si todos sus estados son ergódicos. En éste caso la distribución de probabilidad absoluta

$$a^{(n)} = a^{(0)} \mathbf{P}^n$$

siempre converge únicamente a una distribución límite cuando $n \to \infty$, donde la distribución límite es independiente de las probabilidades iniciales $a^{(0)}$.

Teorema. Todos los estados en una cadena de Markov infinita irreducible pueden pertenecer a una, y solo una, de las tres clases siguientes : estado transitorio, estado nulo recurrente, o estado no nulo recurrente. En cada caso todos los estados se comunican si tienen el mismo periodo. Para el caso especial donde la cadena tenga un número finito de estados, la cadena no puede consistir en estados transitorios ni puede contener ningún estado nulo.

Sea P la matriz de transición de una cadena de Markov finita con s estados y ergódica. Entonces existe un vector $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s \\ \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s \\ . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \\ \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s \end{pmatrix}$$

recuérdese que el ij elemento de $\mathbf{P}^n$ es $p^{(n)}_{ij}$. El teorema anterior nos dice que para cualquier estado inicial i.

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{ij} = \pi_j$$

Esto significa que después de un largo tiempo, existe una probabilidad π_j de que la cadena de Markovse encuentre en el estado j, independientemente del estado inicial i.

El vector $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s)$ es comúnmente llamado como la distribución estacionaria de los estados, o distribución equilibrio, de la cadena de Markov. Para una cadena con matriz de transición **P**.

Obsérvese que para una n grande y para toda i,

$$p^{(n+1)}_{ij} \cong p^{(n)}_{ij} \cong \pi_j \ \ldots (1)$$

como $p^{(n+1)}_{ij}$ = (renglon i de $\mathbf{P}^n$) · (columna j de P) podemos escribir

$$p^{(n+1)}_{ij} = \sum_{k=1,s} P^{(n)}_{ik}\, p_{kj} \ldots (2)$$

Si n es grande, se puede sustituir (1) en (2) dando

$$\pi_j = \sum_{k=1,s} \pi_k\, p_{kj}, \ldots (3)$$

En forma matricial (3) se puede escribir como

$$\pi = \pi \mathbf{P} \ldots (4)$$

Desafortunadamente el sistema de ecuaciones que están involucradas en (4) tiene un número infinito de soluciones, porque el rango de la matriz siempre es menor o igual a s − 1. Para obtener valores únicos en la distribución estacionaria de los estados, nótese que para cualquier n y para cualquier i.

$$P^{(n)}_{i1} + P^{(n)}_{i2} + \ldots + P^{(n)}_{is} = 1 \ldots (5)$$

Cuando n tiende a infinito en (5) obtenemos

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_s = 1 \ \ldots (6)$$

Y remplazando cualquiera de las ecuaciones de (3) por (6) podemos usar (4) para resolver el sistema y encontrar así la distribución estacionaria de los estados.

(Las demostraciones de esta sección pueden encontrarse en *Markov Processes* "characterizacion and convergence" de Either Stewart, "*Stochastic Processes*" *de* Emanuel Parzen e "*Introducción to stochastic processes*" de Hoel Paul Gerhar)

BIBLIOGRAFIA

[1] Blaine Roberts & Shulze David (1973)
" *Modern Mathematics and Economic Analysis* ".

[2] Binmore
"*Introducción a la Teoría de Juegos*" .

[3] Emanuel Parzen (1929)
"*Stochastic Processes*"

[4] Ethier. Stewart
Markov Processes : "*characterizations and convergence*" .

[5] Freidlin Mark and Alexander Wentzell (1984)
"*Random Perturbation of Dynamical Systems*".

[6] Foster y Young (1993)
"*The Evolutons of Conventions*" Econometrica.

[7] Görgen W. Weibull
"*Evolutionary Game Theory*".

[8] Harsany Jonh and Reinhard Selten (1988)
"*A general Theory of equilibrium Selection in Games*".

[9] Hernández Ayuso Carmen
"*Análisis de Redes*"
Vínculos matemáticos N° 161, 1996 cuarta edición

[10] Hoel Paul Gerhar
"*Introducción to stochastic processes*" .

[11] M. S. Bartlett
"An introdution to stochastic processes; with special reference to methods and aplications".

[12] Revoz
"*Markov Chains*" .

[13] Richard Bronson
"*Teoría y Problemas de Investigación de Operaciones*".

[14] S. R. Adke, S. M. Manjunath
"*An introdiction to finite markov processes*" .

[15] Winston
"*Operations Reserch : Aplications and Algorithms*" .