

00363

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE CIENCIAS

2  
1 eg.

4



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

EFFECTO DE LA DIVERGENCIA EN LA  
INTERACCION DE DOS VORTICES CICLONICOS

EJEMPLAR UNICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS  
(G E O F I S I C A)

P R E S E N T A

RODOLFO REVILLA DIAZ

MEXICO, D. F.





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A MI ESPOSA E HIJAS

A MIS PADRES

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

A TODAS AQUELLAS PERSONAS QUE

ME DIERON ALIENTO.

Quero expresar mi agradecimiento al Dr. Julián Adem por sus atinados consejos que hicieron posible la realización de esta Tesis; al M. en C. Enrique Buen día C. por haber revisado y corregido el manuscrito; y al Dr. Sergio Serra por sus atinadas sugerencias y observaciones.

## INDICE

### INTRODUCCION

- I ANALISIS DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO EN LA ATMOSFERA Y EL PROBLEMA DEL FILTRADO.
  - 1.1 Ondas de Sonido.
  - 1.2 Ondas Superficiales y de Gravedad
  - 1.3 Ondas de Rossby
  - 1.4 Problema del filtrado.
  
- II ANALISIS DE ESCALAS
  - 2.1 Las ecuaciones para la atmósfera.
  - 2.2 Escalamiento de las variables espaciales y temporales.
  - 2.3 La aproximación hidrostática.
  - 2.4 Escalamiento de las variables termodinámicas.
  - 2.5 La aproximación geostrófica
  - 2.6 Magnitud de las perturbaciones en las variables de estado
  - 2.7 La velocidad vertical
  - 2.8 La divergencia del viento
  - 2.9 La ecuación de corticidad

III    MODELO NO DIVERGENTE

3.1    Ecuaciones del modelo

3.2    La función corriente inicial

3.3    Solución numérica del modelo

IV    EL MODELO DIVERGENTE

4.1    Ecuaciones del modelo

4.2    Inicialización del modelo

4.3    Solución numérica del modelo divergente.

V    RESULTADOS Y CONCLUSIONES

5.1    Resultados

5.2    Conclusiones.

## INTRODUCCION

Uno de los fenómenos meteorológicos de mayor importancia que existen dentro de la escala sinóptica son los huracanes, ya que pueden traer grandes beneficios para la agricultura y a la energía eléctrica debido a la precipitación que producen pero también pueden producir daños considerables, sobre todo cuando penetran a tierra en lugares densamente poblados. Tomándose en consideración lo anterior, es necesario conocer y estudiar los factores que afectan el movimiento de estos meteoros, ya que a medida que se vaya conociendo mejor el comportamiento de este fenómeno, en esa medida será posible hacer un pronóstico cada vez mejor de su trayectoria, o bien disminuir su fuerza destructora de acuerdo a la hipótesis del proyecto Stormfury.

Algunas de las causas que pueden afectar la trayectoria de un vortice atmosférico son la variación del parámetro de Coriolis, su interacción con los continentes o con otros sistemas sinópticos, la temperatura del océano, etc. Adem (1956) hace un estudio analítico de los efectos producidos por la variación del parámetro de Coriolis sobre un vortice inmerso en una atmósfera barotrópica y en reposo. Siguiendo la misma técnica, Adem y Lezama (1960) hacen un estudio del

movimiento de un vortice inmerso en una corriente uniforme. Rao (1959) estudia los efectos de la fricción, debida a los continentes, sobre el movimiento de un vórtice.

La interacción de un par de vórtices ha sido estudiada por varios autores. Fujiwhara (1923) llevó a cabo experimentos de laboratorio con pares de vórtices obteniendo resultados interesantes concernientes a la interacción de sistemas binarios de vórtices. Encontró que cuando un par de vórtices ciclónicos se acoplan, se produce un efecto de rotación de uno con respecto al otro y una tendencia de atracción entre ellos.

En la atmósfera se presentan algunas ocasiones una situación análoga a la estudiada por Fujiwhara en el laboratorio, cuando dos ciclones tropicales se encuentran suficientemente cercanos para que exista interacción mutua. Varios de estos casos han sido reportados, siendo uno de los más recientes el de los ciclones Gwen y Hycint, reportado por Pikes (1977). Cuando se presenta esta interacción, el efecto Fujiwhara hace más difícil el pronóstico de la trayectoria de los huracanes; esta dificultad se hace evidente al comparar el error medio en el pronóstico a 24 horas de los huracanes bajo el efecto Fujiwhara, en el periodo de 1959 a 1967, con el error medio anual en el pronóstico a 24 horas

para todos los huracanes ocurridos en este mismo periodo (ver tabla 1).

Es evidente que el error medio en el pronóstico para los casos binarios es significativamente mayor que el error medio anual para todos los ciclones, aun cuando en el cálculo de este último también están considerados los casos binarios

AÑOS DE OCURRENCIA DE SISTEMAS BINARIOS	NUMERO DE SISTEMAS BINARIOS	ERROR MEDIO ANUAL EN PRONOSTICO A 24 HRS.	ERROR MEDIO PARA SISTEMAS BINARIOS A 24 HRS.
1960-1962		139.2	159.2
1964-1967	15	Millas Náuticas	Millas Náuticas

TABLA 1

Haurwitz (1951) calculó la velocidad angular de rotación de pares de ciclones tropicales en interacción mutua, suponiendo vórtices Rankine y utilizando el análisis de distribución de la presión. Brand (1969) también consideró vórtices Rankine para calcular la velocidad de rotación, pero supuso que el movimiento de cada vórtice es debido a la componente tangencial en su centro del campo de velocidad del vórtice contraparte. En este mismo trabajo, Brand es-

pecula que la tendencia de atracción detectada por Fujiwhara y observada en los casos atmosféricos, es debida a la convergencia del viento hacia el centro de los vórtices.

En el presente trabajo se hace un análisis de la interacción de dos vórtices ciclónicos utilizándose un modelo barotrópico. Se emplea primero un modelo no divergente y después un modelo divergente con el fin de aislar el efecto de la convergencia del viento, sobre la interacción del par de vórtices.

Este trabajo está dividido en 5 capítulos. En el capítulo 1 se hace un estudio de los principales tipos de movimiento ondulatorio que pueden presentarse en la atmósfera y se discute el problema del filtrado de las ondas más rápidas. El capítulo 2 está dedicado al análisis de escala de las ecuaciones que rigen el comportamiento de la atmósfera con el fin de poder hacer una simplificación de ellas. En el capítulo 3 se deducen las ecuaciones del modelo no divergente y se discuten las implicaciones de las hipótesis bajo las cuales se llega a estas ecuaciones. En este mismo capítulo se hace un corto análisis de los métodos numéricos utilizados para resolver este modelo. En el capítulo 4 se presenta el modelo divergente y se hace un análisis

sis de las hipótesis de éste comparadas con aquellas del mo  
delo no divergente. Se hace también una breve discusión so  
bre el método numérico utilizado en este estudio.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan y discuten  
los resultados, proporcionándose las conclusiones que ema-  
nan de las investigación realizada.

6.

## I.-ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO EN LA ATMÓSFERA Y EL PROBLEMA DEL FILTRADO.

Cuando en un fluido se produce una perturbación, ésta puede propagarse a través del fluido como un movimiento ondulatorio. Siendo la atmósfera un fluido, se producen en ella movimientos ondulatorios cuyo espectro va desde las rápidas ondas de sonido con longitud de onda relativamente corta, hasta las ondas sinópticas o de Rosby con longitud de onda bastante mayor que la del sonido y con una velocidad de propagación mucho menor. Estas últimas son las de más interés meteorológico ya que son las causantes de las condiciones del tiempo a gran escala. Sin embargo, en la solución de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de la atmósfera van incluidos todos los tipos de onda y por lo tanto la parte de la solución de interés meteorológico puede perderse debido a la amplificación de las ondas más rápidas durante el proceso de resolución de las ecuaciones por métodos numéricos, por la llamada inestabilidad computacional.

Por lo tanto es conveniente en algunos casos introducir restricciones en el comportamiento de la atmósfera de tal forma que se remuevan los mecanismos físicos responsables de la existencia de ondas que en un dado caso no sean de in-

terés meteorológico. Considérese como ejemplo el caso de las ondas de sonido; se sabe que éstas se producen debido a la compresión y expansión adiabática del aire, por lo que si se considera una atmósfera incompresible, entonces no puede existir este tipo de ondas. Sin embargo, esta restricción es demasiado radical en el modelaje de la atmósfera, por lo que se hace necesario buscar otro mecanismo para filtrar las ondas de sonido. Esto hace necesario hacer un análisis de los diferentes tipos de ondas que pueden presentarse en la atmósfera.

### 1.1 Ondas de Sonido.

La ecuación de movimiento para un fluido ideal está dada por (Symon K.R., 1963)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{F} \quad 1.1$$

donde  $\vec{V}$  es el vector velocidad,  $\rho$  es la densidad,  $p$  la presión y  $\vec{F}$  es una fuerza de cuerpo por unidad de masa (fuerza externa) y  $\nabla$  el operador tridimensional en coordenadas cartesianas. Considérese ahora un fluido inicialmente en reposo, con densidad  $\rho_0$  y presión  $p_0$ , y  $\vec{F}=0$ , sobre el cual se produce una pequeña perturbación de tal manera que la densidad, presión y velocidad son ahora dadas por:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho' \\ p &= p_0 + p' \\ \bar{v} &= \bar{v}_0 + \bar{v}' \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde las perturbaciones  $\rho'$ ,  $p'$  y  $\bar{v}'$  son suficientemente pequeñas para que sus productos y cuadrados puedan ser despreciados.

Bajo las hipótesis anteriores, la ecuación (1.1) se convierte en:

$$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p' \tag{1.3}$$

la conservación de la masa está dada por la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0$$

Substituyéndose (1.2), esta ecuación queda de la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = - \rho_0 \nabla \cdot \bar{v}' - \bar{v}' \cdot \nabla \rho_0$$

y suponiéndose que  $\rho_0$  es uniforme, se convierte en:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = - \rho_0 \nabla \cdot \bar{v}' \tag{1.4}$$

Por otra parte, se define el módulo de Bulds como menos la razón entre el incremento de presión  $\Delta p$  y el cambio en el volumen  $\Delta V$  por unidad de volumen, es decir

$$B = \frac{\Delta p}{\Delta V/V} \tag{1.5}$$

o de otra forma

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta p}{B} \tag{1.6}$$

La densidad  $\rho$  es definida como la masa por unidad de volúmenes, es decir

$$\rho = \frac{M}{V}$$

donde  $M$  es la masa contenida en el volumen  $V$

Si se supone que no hay pérdida ni ganancia de masa en el sistema considerado, entonces

$$\Delta \rho = M \left( \frac{1}{V + \Delta V} - \frac{1}{V} \right)$$

lo cual puede escribirse como

$$\Delta \rho = M \frac{-\Delta V}{V(V + \Delta V)}$$

y si se considera que  $\Delta V \ll V$  entonces

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = - \frac{\Delta V}{V} \quad 1.7$$

comparándose (1.6) y (1.7), se obtiene que

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{\beta} \quad 1.8$$

Para el caso considerado  $\Delta \rho = \rho'$ ,  $\Delta p = p'$  por lo que (1.8) se transforma en

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{\beta}$$

y derivandose con respecto a  $t$  se obtiene

$$\frac{\rho_0}{\beta} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t} \quad 1.9$$

por lo que, sustituyéndose (1.9) en (1.5), se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -\beta \nabla \cdot \vec{V}' \quad 1.10$$

Se se toma la divergencia de la ecuación (1.3) y la ecuación (1.10) se deriva con respecto al tiempo, y enton-

ces se elimina la divergencia de  $\bar{V}'$ , se llega a la ecuación

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \nabla^2 p'$$

que es la ecuación de una onda con velocidad de fase dada por

$$c^2 = \frac{B}{\rho_0} \quad 1.11$$

Puesto que las ondas de sonido se producen con gran rapidez, entonces pueden ser consideradas como un proceso adiabático, por lo que en (1.14) deberá usarse el módulo de Bulks adiabático, el cual puede deducirse de la siguiente manera.

Supóngase que los incrementos en presión, densidad y volumen son infinitesimales, entonces la ecuación (1.8) queda como

$$\frac{df}{f} = \frac{dp}{B} \quad 1.12$$

Por otra parte de la la. Ley de la termodinámica, se tiene que para un proceso adiabático

$$C_p dT = \frac{dp}{\rho} \quad 1.13$$

donde  $C_p$  es la capacidad calorífica a presión constante. De la ecuación de estado para un gas ideal se tiene que  $T = p/\rho R$  de donde

$$dT = \frac{1}{R} \left( \frac{dp}{\rho} - p \frac{d\rho}{\rho^2} \right)$$

y por lo tanto (1.13) se transforma en

$$\frac{C_p}{R} \left( \frac{dp}{\rho} - p \frac{d\rho}{\rho^2} \right) = \frac{dp}{\rho}$$

lo que puede reescribirse como

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{C_p - R}{C_p} \frac{dp}{\rho}$$

y como  $c_p - R = c_v$ , donde  $c_v$  es la capacidad calorífica a volumen constante, se tiene finalmente que

$$\frac{\partial p}{\rho} = \frac{dp}{\rho \beta} \quad 1.14$$

donde  $\beta = \frac{c_p}{c_v}$

De las ecuaciones (1.12) y (1.14) se llega a la conclusión de que para procesos adiabáticos  $\beta = \beta p$  y, por lo tanto, la velocidad de fase de las ondas de sonido es dada por

$$c = \sqrt{\frac{\beta p}{\rho}}$$

o bien aplicándose la ecuación de estado

$$c = \sqrt{\beta R T} \quad 1.15$$

Para el aire, a una temperatura de  $0^\circ \text{C}$ , la ecuación (1.15) da una velocidad de fase de aproximadamente 330 m/seg, lo que está de acuerdo con las observaciones experimentales.

De lo anterior se concluye que las ondas de sonido deben su existencia a cambios en la presión, debidos a la compresión y descompresión adiabática, por lo que, si el fluido es incompresible, no pueden existir este tipo de ondas.

## 1.2 Ondas Superficiales de Gravedad.

Considérese la superficie libre de un fluido con movimiento ondulatorio bajo la acción de la fuerza gravitacional. Si se supone movimiento solamente en el plano X-Y, donde X es el eje horizontal y Y el vertical, la altura de la super-

ficie, en un instante  $t$ , estará dada por:

$$Y(x, t) = H + a \operatorname{sen}(mx - nt) \quad 1.16$$

donde  $H$  es la altura del nivel medio de la superficie del fluido y  $N = a \operatorname{sen}(mx - nt)$  es la altura de la onda sobre el nivel medio (fig. 1.1)

Fig. 1.1 Movimiento ondulatorio de la superficie libre de un fluido.

La ecuación (1.16) representa una onda desplazándose en dirección  $X$ , con una velocidad de fase  $c = n/m$ , longitud de onda  $L = 2\pi/m$  y un periodo  $T = 2\pi/n$ . Esta ecuación puede expresarse como  $Y - N - H = 0$  y, puesto que la superficie se mueve con el fluido, entonces  $d(Y - N - H)/dt = 0$  y, por lo tanto, en la superficie se cumple:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} = v$$

donde  $u = \frac{dx}{dt}$  y  $v = \frac{dy}{dt}$  son las componentes de la velocidad en dirección horizontal y vertical respectivamente.

Si se supone que las perturbaciones sobre el fluido, inicialmente en reposo, son suficientemente pequeñas de tal forma que sus productos puedan ser despreciados, se obtiene:

Considerándose un fluido incompresible e irrotacional, existe una función corriente  $\Psi$  y una función potencial de velocidad  $\phi$ , tales que

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad 1.18$$

$$u = - \frac{\partial \Psi}{\partial y} = - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

por lo que la ecuación (1.17) se convierte en

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad 1.19$$

que es la condición cinemática de superficie para este tipo de ondas.

De la ecuación (1.19) y de la definición de  $N$ , se tiene que, en la superficie del fluido

$$\Psi = \int -na \cos(mx - nt) dx + C$$

es decir

$$\Psi = K \operatorname{sen}(mx - nt) + C$$

donde se ve que, en la superficie del fluido  $\Psi$  debe ser proporcional a  $\operatorname{sen}(mx - nt)$ .

Si  $\Psi$  y  $\phi$  son la función corriente y el potencial de velocidad, en un movimiento bidimensional, se define el potencial complejo del movimiento por

$$\omega = \phi + i \Psi$$

de tal forma que,  $-\frac{d\omega}{dz} = u + iv$  es llamada la velocidad compleja.

Por otra parte, dado un número complejo  $z = x + iy$ , se tiene que

$$\cos(mz-nt) = \cos(mx-nt)\cosh(my) - i\sin(mx-nt)\sinh(my) \quad 1.20$$

Por lo tanto considerándose que  $\psi$  debe ser proporcional a  $\sin(mx-nt)$ , en base a (1.20) y a la definición de potencial complejo, se puede proponer un potencial complejo de la forma

$$\omega = b\cos(mz-nt) \quad 1.21$$

donde  $b$  debe ser de tal forma que se cumpla la condición cinemática de superficie

De (1.20), (1.21) y la definición de potencial complejo, se tiene que  $\psi = -b \sinh(my)\sin(mx-nt)$  y, por lo tanto, en la superficie se tendrá que

$$\psi = -b\sinh(mH)\sin(mx-nt) \quad 1.22$$

donde se ha considerado que debido a que la amplitud de las ondas es pequeña, comparada con la profundidad del fluido, en la superficie se tiene  $y = H$  como buena aproximación.

Aplicándose la condición dada por (1.19) en (1.22), se obtiene que  $b = (an)/m\sinh(mH)$  y, por lo tanto, el potencial complejo en la superficie estará dado por:

$$\omega = ac \coth(mH)\cos(mx-nt) - ac\sin(mx-nt)$$

donde  $c = \frac{n}{m}$  es la velocidad de fase

Por lo tanto, el potencial complejo y la función corriente estarán dados por

$$\Phi = \operatorname{acoth}(mH) \cos(mx-nt) \quad 1.23$$

$$\Psi = -\operatorname{acsen}(mx-nt)$$

Con el fin de obtener una condición dinámica de superficie, considérese la ecuación de movimiento para un fluido ideal, ecuación (1.1). Esta ecuación puede reescribirse de la siguiente forma

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(|\bar{V}|^2) - \bar{V} \times \nabla \times \bar{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \bar{F} \quad 1.24$$

donde  $|\bar{V}|$  es el módulo o magnitud del vector velocidad.

Para un fluido barotrópico, irrotacional y bajo la acción de fuerzas externas conservativas, se tiene que la presión  $p$  es sólo función de la densidad  $\rho$  y, por lo tanto,  $\int \frac{dp}{\rho}$  existe; también se tiene que  $\nabla \times \bar{V} = 0$  y  $\bar{F} = -\nabla \Omega$ , donde  $\Omega$  es el potencial del campo de fuerza conservativo. Bajo estas circunstancias (1.24) queda:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\nabla \left( \int \frac{dp}{\rho} + \Omega + \frac{1}{2} |\bar{V}|^2 \right) \quad 1.25$$

pero como el flujo es irrotacional, existe el potencial de velocidad  $\Phi$ , tal que  $\bar{V} = -\nabla \Phi$  y, por lo tanto, (1.25) se transforma en

$$\nabla \left( \int \frac{dp}{\rho} + \Omega + \frac{1}{2} |\bar{V}|^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0$$

o en otra forma

$$\int \frac{dp}{\rho} + \Omega + \frac{1}{2} |\bar{V}|^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C(t) \quad 1.26$$

donde  $C(t)$  es función sólo del tiempo.

Para el caso de un fluido incompresible  $\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$  y, por

lo tanto, la ecuación (1.26) se convierte en

$$\frac{p}{\rho} + \Omega + \frac{1}{2}|\bar{V}|^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial t} = C(t)$$

además, si  $\bar{F}$  es sólo la fuerza gravitacional, se tiene que  $\Omega = gh$ , donde  $h$  es la altura media desde algún nivel horizontal arbitrario. La ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{p}{\rho} + gh + \frac{1}{2}|\bar{V}|^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial t} = C(t) \quad 1.27$$

En el caso considerado de las ondas en una superficie libre, se puede despreciar  $\frac{1}{2}|\bar{V}|^2$ , ya que se ha supuesto que las perturbaciones son pequeñas y, entonces, (1.27) queda como

$$p = \rho \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} - Ng \right) + C(t)$$

donde  $N$  es la altura de las ondas sobre el nivel medio del fluido.

Considérese la presión en un punto en la parte interior de la frontera superior del fluido, la presión será

$$p_i = \rho_i \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} - Ng \right) + C(t)$$

En un punto en la parte exterior, la presión es:

$$p_o = \rho_o \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} - Ng \right) + C(t)$$

Despreciándose la tensión superficial en la interfase,

$p_i - p_o$  es cero, por lo que

$$(\rho_i - \rho_o) \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} - Ng \right) = 0$$

de donde se obtiene que:

$$Ng = \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad 1.28$$

lo cual es la condición dinámica para la superficie.

Combinándose (1.19) y (1.28), se obtiene que

$$g \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

y substituyéndose  $\psi$  y  $\phi$  de (1.23), se tiene:

$$\frac{n^2}{m^2} = c^2 = \frac{g}{m} \tanh(mH)$$

pero como  $L = 2\pi/m$ , entonces,  $m = \frac{2\pi}{L}$  y

$$c^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi H}{L}\right) \quad 1.29$$

donde  $L$  es la longitud de la onda y  $H$  es la profundidad media del fluido.

Para ondas suficientemente cortas, como para que  $L \ll H$ , se tiene que  $\tanh\left(\frac{2\pi H}{L}\right) \approx 1$  y  $c \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$ . Por otra parte, para ondas largas,  $\tanh\left(\frac{2\pi H}{L}\right) \approx \frac{2\pi H}{L}$  y, entonces,  $c \approx \sqrt{gH}$

Hasta ahora se ha considerado movimiento del fluido en un marco de referencia inercial, sin embargo, esto no es válido en la atmósfera para movimiento a gran escala, pues en este caso debe considerarse el movimiento de rotación de la tierra sobre su propio eje. Este nuevo factor trae como consecuencia un nuevo modo de oscilación, como se verá más adelante.

### 1.3 Ondas de Rossby.

Considérese una atmósfera incompresible, de tal manera

que no puedan existir ondas de sonido. Suponiendo movimiento únicamente en la horizontal, es decir, que no exista movimiento vertical, no pueden producirse ondas de gravedad. Si se considera, además, que el fluido es homogéneo en la horizontal, entonces  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$  y por lo tanto las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad 1.30$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad 1.31$$

donde  $f = 2\Omega \sin\phi$  es llamado parámetro de Coriolis,  $\phi$  es la latitud y  $\Omega$  la velocidad angular de la tierra.

La ecuación de continuidad, bajo la hipótesis de incompresibilidad, queda como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad 1.32$$

Derivándose (1.31) con respecto a  $x$  y restándole la derivada con respecto a  $y$  de (1.30), se obtiene:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + (f + \xi) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad 1.33$$

donde  $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  es la componente vertical de la vorticidad.

Puesto que  $f$  depende sólo de la latitud  $y$ , puesto que, el eje  $X$  es en dirección latitudinal, se tiene que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ . Aplicándose esto último y la condición dada por (1.32), la ecuación (1.33) queda de la siguiente forma

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + \beta v = 0 \quad 1.34$$

donde  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$

Si se supone que existe uniformidad en dirección  $y$ , es decir, que la velocidad no cambia en esta dirección, entonces  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  y, por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0 \tag{1.35}$$

De la ecuación (1.32) y de la condición de que  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , se tiene que  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  y, por lo tanto,  $u$  será a lo más función del tiempo. Considerándose una corriente básica constante  $u = U$  y suponiéndose  $\beta = cte$ , la ecuación (1.35) es lineal y tiene solución periódica de la forma

$$v = A e^{i\kappa(x - ct)}$$

donde  $\kappa$  es el número de onda y  $c$  es la velocidad de propagación.

Sustituyéndose esta solución en (1.35) se tiene que

$$c = U - \frac{\beta}{\kappa^2} \tag{1.36}$$

que es la velocidad característica de propagación de este nuevo tipo de ondas, llamadas ondas de Rossby o Sinópticas.

#### 1.4 Problema de filtrado.

En la atmósfera no se presentan los diferentes tipos de ondas de una manera aislada, sino que, éstas aparecen mezcladas. Las ondas de sonido y de gravedad tienen amplitudes pequeñas comparadas con las de Rossby; por ejemplo, la amplitud en la presión de las ondas de Rossby es de alrededor de

20 milibarios, mientras que, las de gravedad y de sonido no exceden a 1 milibario. Esto hace pensar que como componentes de un patrón de presión atmosférica, las ondas de sonido y de gravedad son despreciables. Por otra parte, la velocidad de propagación de las ondas de Rossby es pequeña (alrededor de 10 m/seg) comparada con la de las ondas de sonido y gravedad, cuya velocidad de propagación es del orden de  $10^2$  m/seg. Esto es un gran inconveniente cuando se trata de resolver las ecuaciones por método de diferencias finitas, pues si no se cumplen ciertas condiciones matemáticas, se puede producir una amplificación excesiva de las ondas rápidas, lo cual puede hacer que se pierda aquella parte de la solución de interés meteorológico. Esto puede verse al considerar los esquemas de diferencias finitas utilizados para resolver los diferentes tipos de movimiento ondulatorio.

Considérese primero las ondas de sonido. Con el fin de simplificar el análisis, se supondrá solamente propagación en dirección X. Con esto, la ecuación de onda dada por (1.11) se transforma en

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad 1.37$$

en donde se han suprimido las primas en las perturbaciones

Sin considerar, en este momento, problemas de frontera, es decir, suponiéndose un dominio infinito, la resolución de

(1.37) es un problema de condiciones iniciales, siendo la solución determinada por valores iniciales de  $p$  y  $\frac{\partial p}{\partial t}$ . Para construir un esquema de diferencias finitas para la ecuación (1.37), se supondrá que  $x = n\Delta x$  y  $t = m\Delta t$ , de manera que el valor de  $p$  en el punto  $(n, m)$  de la rejilla, denotado por  $p(n, m)$ , será  $p(n\Delta x, m\Delta t)$ .

Considerándose diferencias finitas centradas, la derivada de  $p$  respecto de  $X$  en el punto  $(n\Delta x, m\Delta t)$  será aproximado por

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(n, m) = \frac{p(n + \frac{1}{2}, m) - p(n - \frac{1}{2}, m)}{\Delta x}$$

y siguiéndose el mismo procedimiento

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)(n, m) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(n + \frac{1}{2}, m) - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(n - \frac{1}{2}, m)}{\Delta x}$$

por lo que se tiene

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)(n, m) = \frac{p(n+1, m) - 2p(n, m) + p(n-1, m)}{(\Delta x)^2} \quad 1.38$$

y de manera semejante

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)(n, m) = \frac{p(n+1, m) - 2p(n, m) + p(n-1, m)}{(\Delta x)^2} \quad 1.39$$

Sustituyéndose (1.38) y (1.39) en (1.37), se obtiene el esquema de diferencias finitas

$$\frac{p(n, m+1) - 2p(n, m) + p(n, m-1)}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{p(n+1, m) - 2p(n, m) + p(n-1, m)}{(\Delta x)^2} \quad 1.40$$

Suponiéndose conocidos los valores iniciales de  $p$  y de  $\frac{\partial p}{\partial t}$  es posible, mediante una extrapolación lineal, obtener  $p(n, 1)$  y, después, aplicando repetitivamente (1.40), obtener  $P(n, 2)$   $P(n, 3)$ , etc.

Para conocer algunas de las propiedades generales de la ecuación (1.40), no es necesario llevar a cabo el procedimiento descrito en el párrafo anterior. En lugar de ello, supongase que la ecuación (1.40) tiene soluciones de forma semejante a las que posee la ecuación diferencial (1.37), esto es

$$p(n, m) = A e^{i(n\Delta x - m\Delta t)K} \quad 1.41$$

donde  $K$  es un número de onda real y  $\kappa$  es la frecuencia, la cual puede ser compleja.

Sustituyéndose (1.41) en (1.40), se encuentra que

$$e^{-iK\Delta t} - 2 + e^{iK\Delta t} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (e^{-iK\Delta x} - 2 + e^{iK\Delta x})$$

y haciéndose uso de la relación  $e^{\pm ia} = \cos(a) \pm i \sin(a)$  y de que  $\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right) = \cos(a) - 1$  se obtiene que

$$\text{sen}^2\left(\frac{K\Delta t}{2}\right) = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{K\Delta x}{2}\right)$$

de donde, despejando a  $K$ , se tiene sus posibles valores

$$K = \pm \frac{2}{\Delta x} \arcsen\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \text{sen} \frac{K\Delta x}{2}\right) \quad 1.42$$

y, por lo tanto, las soluciones de (1.40) son

$$P_{1,2}(n, m) = A e^{\pm iK_1 m \Delta t} e^{i(n\Delta x \mp K_1 m \Delta t)} \quad 1.43$$

donde  $K = K_r + iK_i$  e  $i = \sqrt{-1}$

De (1.43) se puede ver que si  $K_i \neq 0$  una de las soluciones es amplificada al aumentar el tiempo. Esta amplificación, que ocurre al resolver la ecuación diferencial por una aproximación de diferencias finitas, es lo que se llama inestabilidad.

bilidad computacional. Por supuesto, esto se puede evitar si  $K_i = 0$  es decir, si  $K$  es real, por lo que la condición de estabilidad es que (1.42) tenga solución real, para lo cual, es suficiente que

$$\frac{c \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad 1.44$$

Haciéndose un análisis semejante para el caso de las ondas de gravedad, se obtiene que la condición de estabilidad es la misma dada por (1.44).

Para el caso de las ondas de Rossby, la ecuación (1.35) puede simplificarse suponiéndose que tiene soluciones de la forma:  $v = A e^{iK(x-ct)}$ , en cuyo caso,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -K^2 v$ , y por lo tanto, (1.35) puede escribirse como

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad 1.45$$

donde  $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x}$  y  $c = U - \frac{\beta}{K^2}$

Si se utiliza un esquema de diferencias finitas adelantadas para las derivadas temporales y centradas para las espaciales, se obtiene el siguiente esquema de diferencias finitas para la ecuación (1.45):

$$\zeta(n, m+1) - \zeta(n, m) + \frac{c \Delta t}{2 \Delta x} (\zeta(n+1, m) - \zeta(n-1, m)) \quad 1.46$$

Nuevamente, supóngase que (1.46) tiene solución del tipo (1.41), es decir

$$\zeta(n, m) = A e^{i(n \Delta x K + m \Delta t \kappa)} \quad 1.47$$

Al ser sustituida (1.47) en (1.46) se obtiene el siguiente resultado

$$e^{iK\Delta t} - 1 + \frac{C\Delta t}{2\Delta x} (e^{iM\Delta x} - e^{-iM\Delta x}) = 0$$

por lo que, suponiéndose  $K = K_r + iK_i$  y haciéndose uso de la fórmula de Euler, la ecuación anterior se transforma en

$$\left[ e^{-K_i\Delta t} \cos(K_r\Delta t) - 1 \right] + i \left[ e^{-K_i\Delta t} \operatorname{sen}(K_r\Delta t) + \frac{C\Delta t}{\Delta x} \operatorname{sen}(M\Delta x) \right]$$

de donde

$$e^{-K_i\Delta t} \cos(K_r\Delta t) = 1$$

$$e^{-K_i\Delta t} \operatorname{sen}(K_r\Delta t) = -\frac{C\Delta t}{\Delta x} (\operatorname{sen} M\Delta x)$$

Elevándose al cuadrado y sumándose las dos últimas ecuaciones, se obtiene:

$$e^{-2K_i\Delta t} = 1 + \left( \frac{C\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \operatorname{sen}^2(M\Delta x)$$

donde se puede ver que  $K_i$  será siempre diferente de cero, más aun, puesto que el segundo miembro es siempre mayor que 1, entonces,  $K_i < 0$  y, por lo tanto la solución (1.47) siempre será amplificada al transcurrir el tiempo y, por consiguiente, el esquema de diferencias finitas adelantadas en el tiempo es incondicionalmente inestable, para resolver ondas de Rossby. Puesto que las ecuaciones hidrodinámicas para la atmósfera aceptan como solución ondas de Rossby, se concluye que éstas no pueden ser resueltas con diferencias finitas adelantadas en el tiempo.

Considérese ahora un esquema de diferencias finitas

centradas en el tiempo y en el espacio. El esquema para la ecuación (1.45) es dado por:

$$\frac{1}{2\Delta t} [\zeta(m+1, n) - \zeta(m-1, n)] + \frac{c}{2\Delta x} [\zeta(m, n+1) - \zeta(m, n-1)] = 0$$

Considerándose una solución igual a (1.47) y sustituyéndola en esta última ecuación, se tiene que

$$\text{sen}(K\Delta t) + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \text{sen}(K\Delta x) = 0$$

de donde

$$K = -\frac{1}{\Delta t} \arcsen \left[ \frac{c\Delta t}{\Delta x} \text{sen}(K\Delta x) \right]$$

por lo que  $K$  será real si  $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$  y, por consiguiente, las soluciones dadas por este esquema de diferencias finitas no serán amplificadas y, por lo tanto, bajo esta condición será un esquema estable.

Se ha visto, entonces, que la condición de estabilidad computacional para resolver ondas de sonido, de gravedad y de Rossby por el método de diferencias finitas es que

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad 1.49$$

En vista de lo anterior, si las ecuaciones hidrodinámicas se resuelven en su forma original, entonces, para un tamaño de rejilla de por ejemplo 400 km,  $\Delta t$  deberá ser del orden de 10 minutos, con el fin de que se cumpla (1.49).

Por otra parte, si de alguna manera se eliminan las ondas de sonido y gravitacionales, que como ya se dijo al principio de esta sección, no son de importancia meteorológica,

el paso de tiempo que puede usarse es del orden de 2 horas y, de esta forma, el proceso de computación será más corto y, por lo tanto, más económico.

La eliminación de cierto tipo de ondas es lo que se conoce como "Filtrado" y es llevado a cabo modificando las ecuaciones. Para poder determinar que tipo de modificaciones o restricciones deben imponerse en las ecuaciones, para filtrar las ondas que no son de interés, es necesario analizar la forma como estas ondas se producen en la atmósfera. Por ejemplo, para el caso de las ondas de sonido, ya se ha establecido que éstas se producen por compresión y descompresión adiabática, por lo que la hipótesis de incompresibilidad las elimina. Sin embargo, para las ondas gravitacionales, no es tan fácil determinar cual es la condición para su filtrado y, por otra parte, es posible la existencia de una condición para la eliminación de las ondas de sonido no tan drástica como la incompresibilidad, por lo cual se hace necesario un análisis más a fondo.

Para una atmósfera seca, las ecuaciones que rigen su comportamiento son: la ecuación de conservación de momento, la ecuación de conservación de energía o ecuación termodinámica, la ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad y la ecuación de estado. Considerándose una

atmósfera seca, adiabática y libre de fricción, estas ecuaciones son:

$$\frac{du}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - f v = 0 \quad 1.50 \text{ A}$$

$$\frac{dv}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + f u = 0 \quad 1.50 \text{ B}$$

$$\frac{dw}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad 1.50 \text{ C}$$

$$\alpha \frac{dp}{dt} + p \gamma \frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad 1.50 \text{ D}$$

$$\alpha \nabla \cdot \vec{v} - \frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad 1.50 \text{ E}$$

$$p \alpha = R T \quad 1.50 \text{ F}$$

donde  $u, v$  y  $w$  son las componentes del vector velocidad,  $\alpha = \frac{1}{\rho}$  es el volumen específico,  $p$  es la presión,  $f$  el parámetro de Coriolis y  $g$  la fuerza gravitacional. En la ecuación termodinámica se ha eliminado la temperatura mediante la ecuación de estado, por lo que, las primeras cinco ecuaciones forman un sistema cerrado, de cinco ecuaciones con cinco incógnitas:  $u, v, w, \alpha$  y  $p$ . Ese es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, para las cuales la teoría matemática es aun muy limitada, por lo que, para resolverlas analíticamente es necesario simplificarlas. Esto último se hace aplicando el método de perturbaciones:

Supóngase que cada variable dependiente se puede escribir como la suma de una parte estacionaria más una pequeña perturbación, es decir

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z) + u'(x, y, z, t)$$

$$v(x, y, z, t) = V(x, y, z) + v'(x, y, z, t)$$

$$w(x, y, z, t) = W(x, y, z) + w'(x, y, z, t)$$

$$P(x, y, z, t) = P(x, y, z) + P'(x, y, z, t)$$

$$\alpha(x, y, z, t) = \bar{\alpha}(x, y, z) + \alpha'(x, y, z, t)$$

Sustituyéndose esto último en el sistema de ecuaciones (1.50 A-E); suponiéndose que los campos no perturbados cumplen con las ecuaciones y que las perturbaciones son lo suficientemente pequeñas para despreciar productos de ellas, se obtienen las ecuaciones para las perturbaciones.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} + W \frac{\partial u'}{\partial z} + u' \frac{\partial U}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} + w' \frac{\partial U}{\partial z} + \\ + \bar{\alpha} \frac{\partial P'}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial P}{\partial x} - f v' = 0 \end{aligned} \quad 1.51 A$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + V \frac{\partial v'}{\partial y} + W \frac{\partial v'}{\partial z} + u' \frac{\partial V}{\partial x} + v' \frac{\partial V}{\partial y} + w' \frac{\partial V}{\partial z} + \\ + \bar{\alpha} \frac{\partial P'}{\partial y} + \alpha' \frac{\partial P}{\partial y} + f u' = 0 \end{aligned} \quad 1.51 B$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} + V \frac{\partial w'}{\partial y} + W \frac{\partial w'}{\partial z} + u' \frac{\partial W}{\partial x} + v' \frac{\partial W}{\partial y} + w' \frac{\partial W}{\partial z} + \\ + \bar{\alpha} \frac{\partial P'}{\partial z} + \alpha' \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad 1.51 C$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \left( \frac{\partial P'}{\partial t} + U \frac{\partial P'}{\partial x} + V \frac{\partial P'}{\partial y} + W \frac{\partial P'}{\partial z} + u' \frac{\partial P}{\partial x} + v' \frac{\partial P}{\partial y} + w' \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \\ + P \left( \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + V \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + W \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} + u' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) + \\ + \alpha' \left( U \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial y} + W \frac{\partial P}{\partial z} \right) + P' \left( U \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + V \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + W \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad 1.51 D$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + V \frac{\partial \alpha'}{\partial y} + W \frac{\partial \alpha'}{\partial z} + \right. \\ \left. + u' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad 1.51 E$$

Con el fin de hacer más simple el análisis considérese que hay movimiento sólo en el plano X-Z y que existe uniformidad de los campos en dirección Y. Supóngase también que U es constante,  $V=W=0$ , que los campos no perturbados están en balance hidrostático y que la tierra no tiene rotación. Bajo estas hipótesis, las ecuaciones (1.51) se transforman en

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad 1.52 A$$

$$a \left( \frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\alpha' g}{\bar{\alpha}} = 0 \quad 1.52 B$$

$$\bar{\alpha} \left( \frac{\partial p'}{\partial t} + U \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{w' g}{\bar{\alpha}} \right) + \rho P \left( \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) = 0 \quad 1.52 C$$

$$\bar{\alpha} \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - d \left( \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) = 0 \quad 1.52 D$$

donde  $a = 0$  si las perturbaciones son hidrostáticas y  $a = 1$  en caso contrario;  $d = 0$  si el fluido es incompresible y  $d = 1$  si es compresible.

Suponiéndose que las ecuaciones tengan solución armónica con amplitud constante, es decir

$$u' = E e^{i(\lambda x + \kappa z - \nu t)}$$

$$w' = F e^{i(\lambda x + \kappa z - \nu t)}$$

$$p' = G e^{i(\lambda x + \kappa z - \nu t)}$$

$$\alpha' = H e^{i(\lambda x + \kappa z - \nu t)}$$

donde  $\lambda$  y  $\kappa$  son números de onda en dirección X y Z respectivamente y  $\nu$  es la frecuencia, entonces, sustituyéndose en (1.51), se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas, te-

niéndose como incógnitas a las amplitudes E, F, G y H

$$\begin{aligned} (\lambda U - \nu)E + \bar{\alpha} \lambda G &= 0 \\ i a (\lambda U - \nu)F + i \bar{\alpha} \kappa G - \frac{g}{\alpha} H &= 0 \\ (P \kappa \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} - g)F + i \bar{\alpha} (\lambda U - \nu)G + i P \kappa (\lambda U - \nu)H &= 0 \\ \lambda \bar{\alpha} E + (\bar{\alpha} \kappa - i d \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z})F - i d (\lambda U - \nu)H &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicándose por  $-i$  las 3 últimas ecuaciones, el sistema queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (\lambda U - \nu)E + \bar{\alpha} \lambda G &= 0 \\ \bar{\alpha} (\lambda U - \nu)F + i \bar{\alpha} \kappa G - \frac{g}{\alpha} H &= 0 \\ i (g - P \kappa \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z})F + \bar{\alpha} (\lambda U - \nu)G + P \kappa (\lambda U - \nu)H &= 0 \\ \lambda \bar{\alpha} E + (\bar{\alpha} \kappa + i d \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z})F - d (\lambda U - \nu)H &= 0 \end{aligned}$$

Este es un sistema homogéneo, por lo que, tendrá solución no trivial si y sólo si el determinante de la matriz de coeficientes es cero, es decir

$$\begin{vmatrix} \lambda U - \nu & 0 & \bar{\alpha} \lambda & 0 \\ 0 & a(\lambda U - \nu) & \bar{\alpha} \kappa & \frac{i g}{\alpha} \\ 0 & i (g - P \kappa \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z}) & \bar{\alpha} (\lambda U - \nu) & P \kappa (\lambda U - \nu) \\ \lambda \bar{\alpha} & \bar{\alpha} \kappa - i d \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} & 0 & d (\lambda U - \nu) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollándose el determinante, dividiéndose entre  $\bar{\alpha}$  y poniéndose  $\bar{\alpha} P = RT$ , se obtiene

$$\begin{aligned} a d (\lambda U - \nu)^2 - [RT \kappa (\kappa^2 + \lambda^2 a) + g \kappa (\alpha - 1) + d \frac{g}{\alpha} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z}] (\lambda U - \nu)^2 - \\ - g \lambda^2 (g - PRT \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z}) = 0 \end{aligned} \tag{1.53}$$

Los términos que involucran a  $g$  en el término cuadrático de

(1.53) pueden ser despreciados, ya que, mientras que el orden de magnitud de  $g$  es de  $10^3$ , el de  $RT$  es de  $10^8$ . Con este ajuste (1.53) queda entonces como

$$\alpha d(\lambda U - v)^4 - RT \mu (\kappa^2 + \alpha \lambda^2) (\lambda U - v)^2 - g \lambda^2 (g - \mu RT \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z}) = 0 \quad 1.54$$

La temperatura potencial  $\theta$  es definida por la siguiente relación

$$\left(\frac{T}{\theta}\right)^{C_p/R} = \frac{P}{1000}$$

de donde, al derivar con respecto a  $z$ , se obtiene, después de hacer simplificaciones, que

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = - \frac{Rg}{C_p P \alpha} \quad 1.55$$

en donde se ha supuesto que  $\frac{\partial P}{\partial z} = - \frac{g}{\alpha}$

Por otra parte, de la ecuación de estado, se tiene que

$$\alpha \frac{\partial P}{\partial z} + P \frac{\partial \alpha}{\partial z} = R \frac{\partial T}{\partial z}$$

por lo que al dividir entre  $\alpha P$  se obtiene

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z} \quad 1.56$$

Si se sustituye (1.56) en (1.55) y se despeja el término de la temperatura potencial, ésta queda de la siguiente forma, después de hacer algunas simplificaciones

$$-\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{g}{\alpha P} \left(1 - \frac{R}{C_p}\right) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z} \quad 1.57$$

Pero como  $R = C_p - C_v$ , entonces, utilizándose esto y multiplicándose por  $\mu RT$  en (1.57),

se obtiene que

$$-\frac{RT\kappa}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} = g - \frac{RT\kappa}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

Sustituyéndose esto último en la ecuación (1.54) se llega a la siguiente expresión

$$ad(\lambda U - v)^4 - RT\kappa(k^2 + a\lambda^2)(\lambda U - v)^2 + \frac{2\lambda^2 RT\kappa}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad 1.58$$

En esta expresión, únicamente el último término involucra a  $g$ , por lo que, si este término es eliminado, se anula la posibilidad de existencia de ondas gravitacionales. Con esta restricción y suponiéndose además que  $U = 0$ , la ecuación (1.58) se transforma en

$$ad v^2 - RT\kappa(k^2 + a\lambda^2) = 0 \quad 1.59$$

Si se pone  $a = d = 1$ , es decir, si se supone compresibilidad y perturbaciones no hidrostáticas, se obtiene que

$$\frac{v^2}{k^2 + \lambda^2} = \kappa RT$$

y como  $\frac{v^2}{k^2 + \lambda^2} = c^2$ , entonces

$$c^2 = \kappa RT$$

lo cual corresponde a ondas de sonido con velocidad de propagación  $(\kappa RT)^{1/2}$ , relativa a la corriente uniforme con velocidad  $U$ .

Anteriormente y se había establecido que la hipótesis de incompresibilidad elimina las ondas de sonido, esto se comprueba al hacer  $d = 0$  en la ecuación (1.59). De la misma

ecuación (1.59) se puede ver que existe otra opción para eliminar las ondas de sonido; en efecto, si en (1.59) se hace  $a = 0$ , entonces no aparecen ondas de sonido, por lo que, se concluye que la hipótesis de equilibrio hidrostático elimina ondas de sonido que tengan componente vertical de propagación.

En párrafos anteriores se estableció que cuando no existe movimiento vertical, no pueden producirse ondas gravitacionales. Esta restricción es muy drástica al modelar la atmósfera con fines meteorológicos, pues en este caso el movimiento vertical es de gran importancia, por lo que, es conveniente tener otra forma de filtrar las ondas gravitacionales.

Para poder determinar otra opción para el filtrado de las ondas gravitacionales, se considerará un modelo que admita ondas de Rossby y de gravedad, con el fin de poder determinar de que otra forma es posible filtrar estas últimas, reteniéndose a las ondas de Rossby que, como ya se ha dicho, son de gran importancia en la evolución de los fenómenos meteorológicos a gran escala.

Considérese una atmósfera homogénea, incompresible, libre de fricción y en equilibrio hidrostático. Las ecuaciones de movimiento para tal atmósfera son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad 1.60 A$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu + \alpha \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad 1.60 B$$

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad 1.60 C$$

De la condición de incompresibilidad, se tiene que  $\frac{d\alpha}{dt} = 0$  y, por lo tanto, la ecuación de continuidad es dada por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad 1.61$$

Esta última ecuación junto con las ecuaciones (1.60 A-C), forman un conjunto de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas  $u, v, w$  y  $p$

Puesto que la atmósfera es homogénea,  $\alpha$  no depende de las coordenadas espaciales y por lo tanto, de (1.60C) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{g}{\alpha} \right) = 0 \quad 1.62 A$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{g}{\alpha} \right) = 0 \quad 1.62 B$$

de donde se concluye que el gradiente horizontal de presión es independiente de la altura.

Si se derivan las ecuaciones de movimiento horizontal (1.60 A-B) con respecto a  $Z$ , entonces, debido a (1.62 A-B) se puede ver que si el campo de velocidad horizontal es inicialmente independiente de la altura, también lo será la aceleración, lo cual a su vez implica que la velocidad ho-

horizontal permanecerá, en todo tiempo, independiente de la altura.

Por lo anterior, si en este modelo se supone que inicialmente la velocidad horizontal no depende de la altura, los términos de advección vertical en (1.60 A-B) son cero.

Debido a la homogeneidad de la atmósfera, la ecuación hidrostática es fácilmente integrada en la vertical, dando por resultado que

$$p = \frac{\rho}{\alpha} (h - z)$$

en donde h es la altura de la superficie libre, la cual existe debido a la hipótesis de incompresibilidad

De la última ecuación se deduce que

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{\partial h}{\partial y}$$

por lo que las ecuaciones (1.60 A-B) pueden reescribirse de la siguiente forma, después de hacer cero los términos de advección vertical

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad 1.63 A$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad 1.63 B$$

Debido a que la velocidad horizontal no depende de la altura, entonces, la divergencia horizontal también será independiente de la altura, por lo que, la ecuación de conti-

nidad (1.61) puede ser fácilmente integrada en la vertical, dando por resultado que

$$w_h - w_o = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h \quad 1.64$$

donde  $w_h$  es la velocidad vertical en la frontera superior y  $w_o$  en la inferior.

Suponiéndose el terreno plano, la velocidad vertical debe ser cero en la frontera inferior, es decir,  $w_o = 0$ . La velocidad vertical en la frontera superior debe ser igual a la razón de cambio de la altura de la superficie libre, esto es,  $w_h = \frac{dh}{dt}$

Aplicándose esto último en la ecuación (1.64), ésta se convierte en

$$\frac{dh}{dt} = -h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad 1.65$$

Si al sistema de ecuaciones, (1.63 A-B) y (1.65), se le aplica la técnica de perturbaciones, se obtiene un sistema casi-lineal, ya que  $f$  es función de  $y$ , por lo que el análisis se hace complicado. Por otra parte, si se considera un valor promedio de  $f$ , el problema se hace lineal pero se omiten los efectos de la variación del parámetro de Coriolis. Esta situación puede subsanarse si en lugar de la ecuación (1.63 B) se utiliza la ecuación de vorticidad, obtenida al derivar (1.63 B) con respecto a  $X$  y restarle (1.63 A)

derivada con respecto a  $y$ . Haciendo esto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad 1.66 A$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (\beta v + (\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (\zeta + f) \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad 1.66 B$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad 1.66 C$$

Con el fin de poder obtener una solución analítica al sistema (1.66), éste se linealiza aplicándose el método de perturbaciones. Para esto, se supone una corriente básica constante  $U$  uniforme en la dirección  $y$ . Haciéndose  $u = U + u'$ ,  $v = v'$  y  $h = H + h'$  y sustituyéndose en (1.66), se obtienen las ecuaciones para las perturbaciones

$$D \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u' - f v' + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad 1.67 A$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) h' + \frac{\partial H}{\partial y} v' + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad 1.67 B$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta' + \beta v' + f \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad 1.67 C$$

donde  $\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x}$ ,  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$  y  $D$  vale cero si  $v$  se considera geostrofico, e igual a uno en caso contrario.

Al aplicar el método de perturbaciones, se supone que los campos no perturbados cumplen las ecuaciones, por lo que, en el estado no perturbado la ecuación (1.60 B) será:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

pero como en este caso se supone que  $v = 0$ , entonces  $fU = -g \frac{\partial H}{\partial y}$

lo cual se puede sustituir en la ecuación (1.65 B)

Suponiéndose a  $f$  y  $\beta$  como constantes, se puede considerar que existen soluciones armónicas para las ecuaciones

(1.67) del tipo

$$\begin{aligned} u' &= A e^{i(kx - vt)} \\ v' &= B e^{i(kx - vt)} \\ w' &= C e^{i(kx - vt)} \end{aligned} \quad 1.68$$

donde  $k$  es un número de onda en dirección  $X$ , y  $v$  es la frecuencia.

Sustituyéndose estas soluciones en el sistema (1.67), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} D(kU - v) \lambda A - fB + g \lambda k C &= 0 \\ \lambda kHA - \frac{fU}{g} B + (Uk - v) \lambda C &= 0 \\ \lambda fKA + [\beta - k(Uk - v)] B &= 0 \end{aligned} \quad 1.69$$

Para que puedan existir soluciones armónicas del tipo (1.68), el sistema (1.69) debe tener solución no trivial y, para ello, el determinante de la matriz de coeficientes de (1.69) debe ser cero, es decir

$$\begin{vmatrix} D(KU-v)\lambda & -f & g\lambda k \\ \lambda k H & -\frac{fU}{g} & (UK-v)\lambda \\ \lambda f k & \beta - k(UK-v) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollándose el determinante, se obtiene la ecuación que determina las frecuencias permisibles, ésta es:

$$D\beta(UK-v)^2 - DK(UK-v)^3 + f^2 k(UK-v) - gk^2 H\beta + gk^3 H(UK-v) - f^2 k^2 U = 0 \quad 1.70$$

pero como  $v = \frac{c}{k}$ , donde  $c$  es la velocidad de propagación de onda, entonces  $UK-v = k(U-c)$ , por lo que, si la ecuación (1.70) es dividida entre  $k^2$ , ésta se convierte en:

$$D\beta(U-c)^2 - DK^2(U-c)^3 + f^2(U-c) - gH\beta + gHK^2(U-c) - f^2 U = 0$$

la cual puede ser factorizada de la siguiente manera:

$$[\beta - K^2(U-c)][D(U-c)^2 - gH] + f^2[(U-c) - U] = 0 \quad 1.71$$

Con el fin de obtener valores aproximados de las raíces de esta ecuación, supóngase que la rapidez de propagación de las ondas es mucho mayor que las ondas de Rossby, es decir, que  $|c| \gg |U - \frac{\beta}{k^2}|$ . Puesto que  $U$  es del mismo orden de magnitud de las ondas de Rossby, se tiene también que

Con estas aproximaciones, se concluye que  $|\beta| \ll |k^2(U-c)|$  y  $|U-c| \gg |U|$  lo que, aplicándose a la ecuación (1.71) da la siguiente aproximación:

$$k^2 [D(U-c)^2 - gH] + f^2 \approx 0$$

cuya solución con  $D = 1$  es:

$$c = U \pm \sqrt{gH - \frac{f^2}{k^2}}$$

Al comparar este resultado con la ecuación (1.29), se concluye que estas dos raíces corresponden a ondas de gravedad en un fluido, donde la profundidad del mismo es comparable a la longitud de la onda. El término  $\frac{f^2}{k^2}$  es el efecto de la rotación terrestre.

La otra raíz de la ecuación (1.71) puede calcularse si en ésta se hace  $D = 0$ , con lo cual se obtiene

$$k^2(U-c)gH - \beta gH + f^2(U-c) - f^2U = 0$$

cuya raíz es

$$c = U - \frac{\beta + f^2U/gH}{k + f^2/gH}$$

que es aproximadamente la velocidad de Rossby, modificada por los efectos gravitacionales.

De todo el análisis anterior se concluye que las ondas gravitacionales se filtran si  $D = 0$ , lo que equivale a considerar la aproximación geostrofica.

## II.- ANALISIS DE ESCALAS

En las ecuaciones que rigen el comportamiento de la atmósfera aparecen términos con distintos órdenes de magnitud, por lo que es posible, dependiendo de la escala del fenómeno, despreciar algunos de ellos en comparación con los otros. Un análisis de escala de las ecuaciones, hace posible determinar cuales de los términos pueden ser despreciados y cuales no.

### 2.1. Las ecuaciones para la Atmósfera.

Considerándose movimiento adiabático y sin fricción, el sistema de ecuaciones que gobiernan el movimiento de una atmósfera seca, es el siguiente

$$\frac{d\bar{V}_3}{dt} + 2\Omega \times \bar{V}_3 = \alpha \nabla_3 p + g \quad 2.1A$$

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = -\nabla_3 \cdot \bar{V}_3 \quad 2.1B$$

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = 0 \quad 2.1C$$

$$p \alpha = RT \quad 2.1D$$

en donde:

$\vec{V}_3$  = Vector velocidad tridimensional

$\vec{\Omega}$  = Velocidad angular de la Tierra

$\alpha$  = Volumen específico del aire

$p$  = Presión atmosférica

$\vec{g} = g \hat{k}$  = Fuerza gravitacional

$\nabla_3 = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$

$\rho$  = Densidad del aire

$C_p$  = Capacidad calorífica a presión constante

$R$  = Constante específica del aire

$T$  = Temperatura del aire

La primera ecuación es la 2a. Ley de Newton aplicada a la atmósfera, la segunda es la ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad, la tercera, la ecuación termodinámica, es una ecuación de conservación de energía y finalmente, la ecuación de estado para un gas ideal.

La ecuación vectorial de movimiento puede descomponerse en tres ecuaciones escalares, dos de movimiento horizontal y una de movimiento vertical.

## 2.2 Escalamiento de las variables espaciales y temporales.

Con el fin de llevar a cabo el análisis dimensional de

las ecuaciones, se consideran valores característicos de las diferentes variables físicas que intervienen en el problema. La escala de longitud horizontal será representada por  $L$ ;  $H$  representa la altura característica de la atmósfera;  $D$  la escala vertical del fenómeno estudiado,  $V$  y  $W$  las escalas de las velocidades horizontal y vertical respectivamente.

Para la variable temporal se utilizará el período advectivo  $L/V$ .

Si  $x, y, z$  son las coordenadas espaciales,  $u, v$  y  $w$  las componentes de la velocidad y  $t$  el tiempo, entonces, utilizándose las escalas características se puede escribir  $x = Lx'$ ,  $y = Ly'$ ,  $z = Dz'$ ,  $u = Vu'$ ,  $v = Vv'$ ,  $w = Ww'$  y  $t = (L/V)t'$ , donde las variables primadas son adimensionales, con un orden de magnitud alrededor de la unidad.

Puesto que los movimientos de la atmósfera a escala sinóptica siguen esencialmente la forma de la Tierra, es conveniente expresar las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas con el fin de analizar la magnitud de los términos que aparecen debido a la curvatura de la Tierra.

### 2.3 La aproximación hidrostática.

Considérese la ecuación de movimiento vertical en coordenadas esféricas, dada por Holton (1972)

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega u \cos\phi + g + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad 2.2$$

donde  $r$  es la distancia radial desde el centro de la Tierra y  $\phi$  es la latitud.

Introduciendo las variables adimensionales en la ecuación (2.1) se obtiene

$$\frac{VW}{L} \frac{dw'}{dt'} - \frac{V^2}{r} (u' + v') - Vf u' + g + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

El orden de magnitud del primer término es el de  $\frac{VW}{L}$  y para movimientos a escala sinóptica, se tiene que  $W < V$  por lo que  $\frac{VW}{L} < \frac{V^2}{L}$ . El orden de magnitud de  $V$  y  $L$  para movimientos a escala sinóptica son,  $V \sim 10$  m/seg y  $L \sim 10^6$  m. por lo que  $\frac{VW}{L} < 10^{-4}$ .

El segundo término de (2.2) es del orden de  $V^2/r$ , y como  $r \approx 6 \times 10^6$  m, entonces  $V^2/r < 10^{-4}$

El parámetro de Coriolis es del orden de  $10^{-4}$  seg<sup>-1</sup> para latitudes medias, por lo que el orden de magnitud del tercer término es de  $10^{-3}$ .

El análisis de los tres primeros términos de (2.2) hace ver que son al menos cuatro órdenes de magnitud menores que  $g \sim 10$ , por lo que pueden ser despreciados en comparación con éste. Esto quiere decir que, para movimientos atmosféricos a escala sinóptica, se puede considerar un -

balance entre la fuerza de gravedad y la fuerza debida al gradiente vertical de presión, es decir, un balance hidrostático. La ecuación de movimiento vertical se reduce entonces a

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

donde  $\rho = \frac{1}{\alpha}$

#### 2.4 Escalamiento de las variables termodinámicas.

Con el fin de encontrar una relación entre la altura característica de la atmósfera  $H$  y los valores de las variables termodinámicas, considérese la ecuación hidrostática integrada en la vertical. Utilizándose la ecuación de estado, la ecuación hidrostática puede escribirse de la siguiente forma

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g \frac{p}{RT}$$

y por lo tanto

$$\int_P^p \frac{dp}{p} = -g \int_0^z \frac{dz}{RT} \quad 2.3$$

en donde  $P$  es la presión al nivel del mar ( $z = 0$ ) y  $p$  es la presión a una altura  $z$  sobre el nivel medio del mar.

Con el fin de simplificar la integración de (2.3), considérese que la atmósfera está a una temperatura  $\bar{T}$  constante en la vertical (por ejemplo la temperatura promedio en la vertical). Con esta suposición se obtiene de (2.3) que

$$p = P e^{-\frac{gz}{R\bar{T}}} \quad 2.4$$

Si se define la escala para la altura de la atmósfera, como la altura a la cual la presión es  $P/e$  (aproximadamente 35% de la presión al nivel del mar), entonces

$$H = \frac{R\bar{T}}{g} \quad 2.5$$

Considerándose la temperatura  $\bar{T}$  como escala característica para la temperatura  $T$  y para la temperatura potencial  $\Theta$ , la presión promedio  $\bar{P}$  para escalar la presión  $p$  y  $\bar{\rho}$  para la densidad, se puede escribir que

$$T = \bar{T} T' \quad 2.6A$$

$$\Theta = \bar{T} \Theta' \quad 2.6B$$

$$p = \bar{P} p' \quad 2.6C$$

$$\rho = \bar{\rho} \rho' \quad 2.6D$$

en donde  $T'$ ,  $\Theta'$ ,  $p'$ , y  $\rho'$  son variables adimensionales con un orden de magnitud alrededor de la unidad.

Supóngase ahora una atmósfera standard , en donde los valores de las variables termodinámicas dependen únicamente de la altura, es decir

$$P_s = P_s(z) \tag{2.7A}$$

$$T_s = T_s(z) \tag{2.7B}$$

$$\theta_s = \theta_s(z) \tag{2.7C}$$

$$\rho_s = \rho_s(z) \tag{2.7D}$$

Las variables termodinámicas para una atmósfera real pueden, entonces, ser descritas como la suma de los valores standard más una perturbación, que dependerá de la posición y del tiempo.

$$P = P_s(z) + \Delta P(x, y, z, t) \tag{2.8A}$$

$$T = T_s(z) + \Delta T(x, y, z, t) \tag{2.8B}$$

$$\theta = \theta_s(z) + \Delta \theta(x, y, z, t) \tag{2.8C}$$

$$\rho = \rho_s(z) + \Delta \rho(x, y, z, t) \tag{2.8D}$$

$$\alpha = \alpha_s(z) + \Delta \alpha(x, y, z, t)$$

2.8E

en donde  $\alpha_s = \frac{1}{\rho_s}$

De las ecuaciones (2.6) y (2.8) se tiene que

$$p' = \frac{p_s(z)}{\bar{p}} + \frac{\Delta p}{\bar{p}}$$

$$T' = \frac{T_s(z)}{\bar{T}} + \frac{\Delta T}{\bar{T}}$$

$$\theta' = \frac{\theta_s(z)}{\bar{\theta}} + \frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}}$$

$$p' = \frac{p_s(z)}{\bar{p}} + \frac{\Delta p}{\bar{p}}$$

$$\alpha' = \frac{\alpha_s(z)}{\bar{\alpha}} + \frac{\Delta \alpha}{\bar{\alpha}}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

y por lo tanto, sustituyéndose en (2.6)

$$p = \bar{p} (p'_s(z) + \delta p')$$

2.9A

$$T = \bar{T} (T'_s(z) + \delta T')$$

2.9B

$$\theta = \bar{\theta} (\theta'_s(z) + \delta \theta')$$

2.9C

$$p = \bar{p} (p'_s(z) + \delta p')$$

2.9D

$$\alpha = \bar{\alpha} (\alpha'_s(z) + \delta \alpha')$$

2.9E

en donde  $p'_s(z) = \frac{p_s(z)}{\bar{p}}$  y  $\delta p' = \Delta p / \bar{p}$ . De manera semejante se definen  $T'_s$ ,  $\theta'_s$ ,  $\rho'_s$ ,  $\alpha'_s$ ,  $\delta T'$ ,  $\delta \theta'$ ,  $\delta \rho'$  y  $\delta \alpha'$ . Obviamente  $p'_s$ ,  $T'_s$ ,  $\theta'_s$ ,  $\rho'_s$  y  $\alpha'_s$  son adimensionales, con un orden de magnitud alrededor de la unidad, mientras que  $\delta p'$ ,  $\delta T'$ ,  $\delta \theta'$ ,  $\delta \rho'$  y  $\delta \alpha'$  son también adimensionales, de un orden de magnitud menor que la unidad.

Supóngase que las variables  $\bar{T}$ ,  $\bar{p}$  y  $\bar{\rho}$  se seleccionan de tal manera que cumplan la ecuación de estado, es decir,  $\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}$ . Utilizándose esto y la ecuación (2.5), se tiene que  $\bar{\rho} = \bar{p} / gH$  y  $\bar{\alpha} = gH / \bar{p}$ , por lo que, el conjunto de ecuaciones (2.9) puede reescribirse de la siguiente manera

$$p = \bar{p} (p'_s(z) + \delta p') \tag{2.10A}$$

$$T = \bar{T} (T'_s(z) + \delta T') \tag{2.10B}$$

$$\theta = \bar{\theta} (\theta'_s(z) + \delta \theta') \tag{2.10C}$$

$$\rho = \frac{\bar{p}}{gH} (\rho'_s(z) + \delta \rho') \tag{2.10D}$$

$$\alpha = \frac{gH}{\bar{p}} (\alpha'_s(z) + \delta \alpha') \tag{2.10E}$$

Utilizándose esto último en la definición de temperatura potencial, se obtiene



$$\theta'_s + \delta\theta' = (T'_s + \delta T') \left[ \frac{P}{\bar{P}(p'_s + \delta p')} \right]^{R/c_p}$$

y para la atmósfera estandard, en donde las perturbaciones son cero, se tiene

$$\theta'_s = \left( \frac{P}{\bar{P}} \right)^{R/c_p} T'_s p'_s^{-R/c_p} \quad 2.11$$

De manera semejante, se puede demostrar que para la atmósfera estandard, se cumplen las siguientes relaciones

$$p'_s = \frac{1}{\alpha'_s}, \quad p'_s = p'_s T'_s, \quad H \frac{\partial p'_s}{\partial z} = -p'_s \quad 2.12$$

Empleándose las ecuaciones (2.10), la ecuación de estado puede escribirse de la siguiente forma

$$\bar{P}(p'_s + \delta p') \frac{R\bar{T}}{P} (\alpha'_s + \delta\alpha') = R\bar{T}(T'_s + \delta T')$$

Utilizándose (2.11) y (2.12), despreciándose producto de perturbaciones y dividiéndose entre  $\alpha'_s p'_s$ , se llega a

$$\frac{\partial \alpha'_s}{\alpha'_s} + \frac{\delta p'_s}{p'_s} = \frac{\delta T'_s}{T'_s} \quad 2.13$$

## 2.5 La aproximación geostrófica.

Desarrollándose el segundo término en el primer miembro de la ecuación de movimiento, se tiene que

$$2\Omega \times \bar{V}_s = (2\omega\Omega \cos\phi - 2v\Omega \sin\phi)\hat{i} + (2u\Omega \sin\phi)\hat{j} + (-2u\Omega \cos\phi)\hat{k}$$

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

en donde el término  $2\omega R \cos\phi$  puede ser despreciado en comparación con los demás, por lo que, se puede escribir

$$2\bar{\Omega} \times \bar{V}_3 = f \hat{k} \times \bar{V} - 2\omega R \cos\phi \hat{k}$$

donde  $f = 2\Omega \sin\phi$  y  $\bar{V}$  es el vector velocidad horizontal. Con esto último, la ecuación de movimiento horizontal es

$$\frac{d\bar{V}}{dt} + f \hat{k} \times \bar{V} = -\alpha \nabla p$$

en donde  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j}$

Introduciéndose variables adimensionales en la ecuación de movimiento horizontal, ésta puede escribirse de la siguiente forma

$$\frac{V^2}{L} \frac{d\bar{V}'}{dt'} + V f \hat{k} \times \bar{V}' = -\frac{gH\bar{P}}{PL} \alpha' \nabla' (p'_s + \delta p') \quad 2.14$$

en donde  $t = \frac{L}{V} t'$

$$\bar{V} = V \bar{V}' = V(u' \hat{i} + v' \hat{j})$$

$$\alpha = \frac{gH}{P} (\alpha'_s + \delta \alpha') = \frac{gH}{P} \alpha'$$

$$\nabla = \frac{\nabla'}{L} = \frac{1}{L} \left( \frac{\partial}{\partial x'} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y'} \hat{j} \right)$$

Para latitudes medias,  $f$  es del orden de  $10^{-4}$ , por lo que, en el primer miembro de (2.14) se tiene que, para movimientos a escala sinóptica, el primer término es un orden de magnitud menor que el segundo, por lo que, en primera aproximación, la aceleración puede ser despreciada obteniéndose de esta manera la llamada aproximación geostrófica

$$f \hat{k} \times \bar{V} = -\alpha \nabla p \tag{2.15}$$

2.6 Magnitud de las perturbaciones en las variables de estado.

Puesto que  $p'_s$  depende sólo de  $z$  entonces

$\nabla'(p'_s + \delta p') = \nabla' \delta p'$  . Aplicándose esto y dividiéndose entre  $\bar{f}V$  en la ecuación (2.14), ésta queda como

$$\frac{V}{\bar{f}L} \frac{dV'}{dt'} + \frac{f}{\bar{f}} \hat{k} \times V' = -\frac{gH}{L\bar{f}V} \alpha' \nabla' \delta p' \tag{2.16}$$

en donde  $\bar{f}$  es un promedio del parámetro de Coriolis.

Introduciéndose el número de Rossby, que es la razón entre aceleración y fuerza de Coriolis, y el número de Froude, que es la razón entre aceleración y fuerza de gravedad, la ecuación (2.16) puede ser reescrita en la siguiente forma

$$R_o \frac{dV'}{dt'} + \frac{f}{\bar{f}} \hat{k} \times \bar{V}' = \frac{H R_o}{D F} \alpha' \nabla' \delta p' \tag{2.17}$$

en donde  $R_o = \frac{\bar{V}}{fL}$  es el número de Rossby y  $F = \frac{V^2}{gD}$  es el número de Froude.

Para movimiento a escala sinóptica,  $R_o \sim 10^{-1}$ , por lo que, el primer miembro de (2.17) es del orden de la unidad y por lo tanto también el segundo, es decir

$$\frac{H}{D} \frac{R_o}{F} \alpha' \nabla' \delta p' \sim 1 \quad 2.18$$

Puesto que  $\alpha'$  y  $\nabla'$  son del orden de magnitud de la unidad, entonces, de (2.18) se concluye que

$$\delta p' \sim \frac{DF}{HR_o} \quad 2.19$$

Introduciéndose variables adimensionales en la ecuación hidrostática se obtiene

$$g + \frac{gH}{\bar{p}} (\alpha'_s + \delta \alpha') \left( \frac{\bar{p}}{H} \frac{\partial p'_s}{\partial z'} + \frac{\bar{p}}{D} \frac{\partial \delta p'}{\partial z'} \right) = 0$$

en donde, para el caso de la perturbación  $\delta p'$ , la coordenada vertical se escala con la altura característica del sistema  $D$ , en lugar de la altura de la tropósfera.

Utilizándose la tercera relación de (2.12) y haciéndose simplificaciones, la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{\delta \alpha'}{\alpha'_s} + \frac{H}{D} (\alpha'_s + \delta \alpha') \frac{\partial \delta p'}{\partial z'}$$

El orden de magnitud del segundo término es el de  $\frac{H}{D} \delta p'$  por lo que, de (2.19) se tiene que

$$\frac{\delta \alpha'}{\alpha'_s} \sim \frac{F}{R_0} \quad 2.20$$

Puesto que  $\rho \alpha = 1$ , entonces, aplicándose (2.10) y despreciándose el producto de perturbaciones se llega a

$$\rho'_s \alpha'_s + \rho'_s \delta \alpha' + \alpha'_s \delta \rho' = 1$$

Puesto que  $\rho'_s$  y  $\alpha'_s$  son del orden de la unidad, entonces

$$\frac{\delta \alpha'}{\alpha'_s} \sim \frac{\delta \rho'}{\rho'_s}$$

y por lo tanto de (2.20) se tiene que

$$\frac{\delta \rho'}{\rho'_s} \sim \frac{F}{R_0} \quad 2.21$$

Empleándose (2.19) y (2.20) en (2.13) se obtiene que

$$\frac{\delta T'}{T'_s} \sim \frac{F}{R_0} + \frac{D}{H} \frac{F}{R_0}$$

y como  $\frac{D}{H} \ll 1$  entonces

$$\frac{\delta T'}{T'_s} \sim \frac{F}{R_0} \quad 2.22$$

Introduciéndose (2.10) en la definición de temperatura potencial, ésta se puede escribir de la siguiente forma

$$\bar{T}(\theta'_s + \delta \theta') = \bar{T}(T'_s + \delta T') \left( \frac{p'}{p_s} \right)^{R/c_p} \left( \frac{p_s}{p} \right)^{-R/c_p} \left( 1 + \frac{\delta p'}{p'_s} \right)^{-R/c_p}$$



Considerándose la serie binomial para el último factor del segundo miembro de la última ecuación, se obtiene

$$\left(1 + \frac{\Delta p'}{p'_s}\right)^{-R/c_p} = 1 - \frac{R}{c_p} \frac{\Delta p'}{p'_s} + \frac{(-R/c_p)(-R/c_p - 1)}{2!} \left(\frac{\Delta p'}{p'_s}\right)^2 + \dots$$

y como  $\frac{\Delta p'}{p'_s} \ll 1$ , los términos de grado mayor o igual a dos se pueden despreciar, quedando

$$\left(1 + \frac{\Delta p'}{p'_s}\right)^{-R/c_p} = 1 - \frac{R}{c_p} \frac{\Delta p'}{p'_s}$$

por lo que

$$\theta'_s + \delta \theta' = \left[ T'_s \left(\frac{p}{p'}\right)^{R/c_p} p_s^{-R/c_p} + \delta T' \left(\frac{p}{p'}\right)^{R/c_p} p_s^{-R/c_p} \right] \left(1 - \frac{R}{c_p} \frac{\Delta p'}{p'_s}\right)$$

Sustituyéndose  $\theta'_s$  de la ecuación (2.11), efectuándose el producto y despreciándose el producto de perturbaciones en esta última ecuación, se tiene finalmente que

$$\frac{\delta \theta'}{\theta'_s} = \frac{\delta T'}{T'_s} - \frac{R}{c_p} \frac{\Delta p'}{p'_s} \quad 2.23$$

De las ecuaciones (2.19), (2.22) y (2.23) se tiene que

$$\frac{\delta \theta'}{\theta'_s} \sim \frac{F}{R_0} + \frac{R}{c_p} \frac{F D}{H R_0}$$

y como  $\frac{R}{c_p} < 1$  y  $\frac{D}{H} \lesssim 1$ , entonces

$$\frac{\delta \theta'}{\theta'_s} \sim \frac{F}{R_0} \quad 2.24$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 2.7 La velocidad vertical.

Si en la Temperatura potencial se toma el logaritmo y se deriva con respecto al tiempo, se obtiene que

$$\frac{d}{dt}(\ln \theta) = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{c_p} \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$$

Si en la ecuación anterior se multiplica por  $c_p T$  y se sustituye  $\frac{RT}{p}$  de la ecuación de estado, entonces

$$\frac{d}{dt}(\ln \theta) = c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}$$

y por lo tanto la ecuación termodinámica, para movimiento adiabático puede escribirse de la forma siguiente

$$\frac{d}{dt}(\ln \theta) = 0$$

o bien, desarrollándose la derivada material

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \right) \ln \theta + w \frac{d}{dz}(\ln \theta) = 0 \quad 2.25$$

en donde  $\bar{V}$  es el vector velocidad horizontal.

Utilizándose la forma de la temperatura potencial dada en (2.9) y tomándose en consideración que  $\theta_s$  es función sólo de  $z$ , el primer término de (2.25) queda como sigue

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \right) \ln \theta = \frac{1}{L} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \right) \ln \left( 1 + \frac{\delta \theta'_s}{\theta'_s} \right)$$

pero como

$$\ln \left( 1 + \frac{\delta \theta'_s}{\theta'_s} \right) = \ln(1) + \frac{\delta \theta'_s}{\theta'_s} - \frac{1}{2} \left( \frac{\delta \theta'_s}{\theta'_s} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{\delta \theta'_s}{\theta'_s} \right)^3 + \dots$$

entonces, despreciándose términos de grado mayor o igual a dos, se tiene que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla\right) \ln \theta = \frac{V}{L} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \bar{V}' \cdot \nabla'\right) \frac{\delta \theta'}{\theta_s}$$

y de la relación (2.24), se concluye que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla\right) \ln \theta \sim \frac{V}{L} \frac{F}{R_0} \quad 2.26$$

Tratándose de manera similar, el segundo término de (2.25) toma la siguiente forma

$$w \frac{\partial}{\partial z} (\ln \theta) = w \frac{\partial}{\partial z} (\ln \theta_s) + \frac{w}{D} \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\delta \theta'}{\theta_s}\right)$$

Considérese el parámetro de estabilidad basado en la atmósfera estandar:  $\sigma_s \equiv D \frac{\partial}{\partial z} (\ln \theta_s)$ . Con ésto y con la ecuación anterior, se obtiene que

$$w \frac{\partial}{\partial z} (\ln \theta) \sim \frac{w \sigma_s}{D} + \frac{w F}{D R_0} \quad 2.27$$

Puesto que en la ecuación (2.25) el segundo miembro es cero, entonces de (2.26) y (2.27) se sigue que

$$\frac{V}{L} \frac{F}{R_0} + \frac{w \sigma_s}{D} + \frac{w F}{D R_0} \sim 0 \quad 2.28$$

Por otra parte se tiene que, para movimiento a escala sinóptica,  $\frac{F}{R_0} \sim 10^{-2}$  y que, para la atmósfera estandar,  $\sigma_s \sim 10^{-1}$ , por lo que  $\frac{w \sigma_s}{D} > \frac{w F}{D R_0}$  y por lo

tanto  $\frac{V F}{L R_0} \sim \frac{W \sigma_s}{D}$  de donde se obtiene que

$$W \sim \frac{V F}{L} \frac{D}{R_0 \sigma_s} \quad 2.29$$

En el sistema de coordenadas (x, y, p, t) la "velocidad vertical"  $\omega$  es definida por

$$\omega = \frac{dp}{dt}$$

Desarrollándose la derivada material y utilizándose la aproximación hidrostática,  $\omega$  puede ser expresada de la siguiente forma

$$\omega = \frac{\partial p}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla p - g \rho w$$

Empleándose variables adimensionales en ésta última ecuación, se tiene que

$$\omega = \frac{V \bar{P}}{L} \left[ \frac{\partial}{\partial t'} (p'_s + \delta p') + \bar{V}' \cdot \nabla' (p'_s + \delta p') \right] - \frac{\bar{P} W}{H} (p'_s + \delta p')$$

y puesto que  $p'_s$  es función sólo de z entonces

$$\omega = \frac{V \bar{P}}{L} \left( \frac{\partial}{\partial t'} + \bar{V}' \cdot \nabla' \right) \delta p' - \frac{\bar{P} W}{H} (p'_s + \delta p')$$

Utilizándose los resultados dados en (2.19) y (2.29), se obtiene el orden de magnitud de los términos de la última ecuación, esto es

$$\omega \sim \frac{V \bar{P} D F}{L H R_0} + \frac{D V F \bar{P}}{L \sigma_s H R_0}$$

y como  $\sigma_s \sim 10^{-1}$ , entonces el segundo término es de un orden de magnitud mayor que el primero por lo que puede uti-

lizarse como un factor de escala para  $\omega$ , es decir

$$\omega = \frac{\sqrt{F D F}}{L \sigma_z H R_0} \omega'$$

donde  $\omega'$  es una variable adimensional, con un orden de magnitud alrededor de la unidad.

## 2.8 La divergencia del viento.

Helmholtz ha demostrado, que todo vector puede expresarse como la suma de una parte no divergente y una parte errortacional, por lo que el vector velocidad  $\bar{V}$  puede expresarse de la siguiente forma

$$\bar{V} = \bar{V}_\psi + \bar{V}_\chi \quad 2.31$$

en donde  $\nabla \cdot \bar{V}_\psi = 0$  y  $\nabla \times \bar{V}_\chi$

En el sistema  $(x, y, p, t)$ , la ecuación de continuidad queda en la forma

$$\nabla \cdot \bar{V} = - \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

donde las derivadas en el operador  $\nabla$  son a  $p$  constante.

Empleándose (2.31), esta última ecuación puede escribirse como

$$\nabla \cdot \bar{V}_\chi = - \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad 2.32$$

Si se introducen variables dimensionales y se utiliza el resultado de (2.30) en (2.32), la ecuación de continuidad puede expresarse de la siguiente forma

en donde  $\bar{v}_x = v_x \bar{v}'_x$ .

Considerándose los ordenes de magnitud, se tiene que

$$v_x \sim \frac{DVF}{H\sigma_s R_0} \lesssim \frac{VF}{\sigma_s R_0} \quad 2.33$$

y como  $F \sim 10^{-3}$ ,  $\sigma_s \sim 10^{-1}$  y  $R_0 \sim 10^7$  entonces

$v_x \lesssim 10^{-1}v$ , en donde  $v$  es la escala característica de la velocidad de viento. De este último resultado, se tiene que la parte divergente del viento es al menos un orden de magnitud menor que la parte no divergente.

## 2.9 La ecuación de vorticidad.

Si se considera una atmósfera en equilibrio hidrostático y se desprecia la fuerza de fricción, las ecuaciones de movimiento en un sistema de coordenadas  $(x, y, z, t)$ , son dadas por

$$\frac{du}{dt} = f v - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} = -f u - \alpha \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

En un sistema de coordenadas  $(x, y, p, t)$ , las ecuaciones

de movimiento pueden escribirse, de acuerdo a Holton (1972), de la siguiente forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad 2.33A$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad 2.33B$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \quad 2.33C$$

en donde  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p}$  es llamado el geopotencial y las derivadas espaciales y velocidades son calculadas sobre superficies isobáricas.

Si a la derivada con respecto a  $x$  de (2.33B) se le resta la derivada con respecto a  $y$  de (2.33A), se obtiene la ecuación de vorticidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \\ + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} + \beta v = 0 \end{aligned} \quad 2.34$$

donde  $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  es la componente vertical de la vorticidad.

En forma vectorial esta ecuación puede expresarse como sigue

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla_p (\zeta + f) + (\zeta + f) \nabla_p \cdot \bar{V} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} - \hat{K} \cdot \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial p} \times \nabla_p \omega \right) = 0 \quad 2.35$$

La variación del parámetro de Coriolis, dada por  $\beta = \frac{\partial f}{\partial \gamma}$  puede expresarse en términos del radio de la Tierra. Puesto

que  $f = 2 \Omega \sin \phi$ , entonces  $\beta = \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \gamma}$ , pero como

$$\frac{\partial \phi}{\partial \gamma} = \frac{1}{a}, \quad \text{se tiene que}$$

$$\beta = \frac{2 \Omega \cos \phi}{a}$$

Con esto último y aplicándose los resultados obtenidos anteriormente en el análisis de escalas, es posible hacer un análisis de los órdenes de magnitud de los términos de la ecuación de vorticidad. Para hacer esto último, se presenta enseguida una lista de los diferentes términos con sus órdenes de magnitud expresados en función de las escalas características de las variables.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \sim \frac{V^2}{L^2}$$

$$\bar{V} \cdot \nabla \zeta = (\bar{V}_y + \bar{V}_x) \cdot \nabla \zeta \sim \frac{V^2}{L^2} \left( 1 + \frac{F}{\sigma_s R_0} \right)$$

$$\bar{V} \cdot \nabla f = \beta (v_y + v_x) \sim \frac{2 \Omega \cos \phi}{a} V \left( 1 + \frac{F}{\sigma_s R_0} \right)$$

$$(\zeta + f) \nabla \cdot \bar{V} = (\zeta + f) \nabla \cdot \bar{V}_x \sim \left( \frac{V}{L} + f \right) \frac{V}{L} \frac{F}{\sigma_s R_0}$$

$$\omega \frac{\partial \xi}{\partial p} \sim \frac{DFV\bar{p}}{L\sigma_s HR_0} \frac{V}{\beta L} \sim \frac{V^2 D F}{L^2 H \sigma_s R_0} \lesssim \frac{V^2 F}{L^2 \sigma_s R_0}$$

$$\hat{K} \cdot \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial p} \times \nabla \omega \right) \sim \frac{V}{\beta} \left( 1 + \frac{F}{\sigma_s R_0} \right) \frac{DFV\bar{p}}{L^2 \sigma_s H R_0} \lesssim \frac{V^2 F}{L^2 \sigma_s R_0} \left( 1 + \frac{F}{\sigma_s R_0} \right)$$

Para el caso particular de movimiento a escala sinóptica en latitudes medias, se tiene que  $L \sim 10^6$ ,  $v \sim 10$ ,  $F \sim 10^{-3}$ ,  $\sigma_s \sim 10^{-1}$ ,  $R_0 \sim 10^{-1}$ ,  $a \sim 10^7$ ,  $2 \Omega \cos \phi \sim f \sim 10^{-4}$ , por lo que, para este caso

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \sim 10^{-10} \quad 2.36A$$

$$\bar{V} \cdot \nabla \xi \sim 10^{-10} (1 + 10^{-1}) \quad 2.36B$$

$$\bar{V} \cdot \nabla f \sim 10^{-10} (1 + 10^{-1}) \quad 2.36C$$

$$(\xi + f) \nabla \cdot \bar{V} \sim 10^{-11} + 10^{-10} \quad 2.36D$$

$$\omega \frac{\partial \xi}{\partial p} \sim 10^{-11} \quad 2.36E$$

$$\hat{K} \cdot \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial p} \times \nabla \omega \right) \sim 10^{-11} + 10^{-12} \quad 2.36F$$

Es inmediato que los dos últimos términos, el de advección vertical de vorticidad y el de inclinación pueden

despreciarse ya que son al menos un orden de magnitud menor que los anteriores. En los términos de advección horizontal (2.36B) (2.36C), la advección por la parte divergente del viento es un orden de magnitud menor que la correspondiente a la parte no divergente, por lo que puede despreciarse. - Finalmente, en el término de la divergencia puede despreciarse el producto de ella por la vorticidad relativa.

Con todas las aproximaciones anteriores, la ecuación de vorticidad, en latitudes medias, queda de la siguiente forma

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{V}_\psi \cdot \nabla (\zeta + f) + f \nabla \cdot \bar{V}_\chi = 0 \quad 2.37$$

### III. MODELO NO DIVERGENTE

#### 3.1 Ecuaciones del modelo.

Considérese una atmósfera sin fricción, incompresible y en balance hidrostático. Bajo estas condiciones, las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad 3.1A$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad 3.1B$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \quad 3.1C$$

Por la hipótesis de incompresibilidad, la ecuación de continuidad es dada por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad 3.2$$

Tomándose la derivada de (3.1B) con respecto a  $x$  y restándole la derivada de (3.1A) con respecto a  $y$ , se obtiene la ecuación de vorticidad en un sistema de coordenadas  $(x, y, z, t)$ .

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = -(\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad 3.3$$

Si se supone una atmósfera barotrópica, la densidad es función sólo de la presión:  $\rho = \rho(p)$  y por lo tanto

$$\nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \hat{k} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial p} \nabla p$$

Esto último significa que  $\nabla \rho$  y  $\Delta p$  son paralelos y por lo tanto, las superficies de presión y densidad constante son paralelas.

El último término de la ecuación de vorticidad (3.3) se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} = \hat{k} \cdot (\nabla \rho \times \Delta p)$$

por lo que, para una atmósfera barotrópica, este término es cero en vista del paralelismo de  $\nabla \rho$  y  $\nabla p$ .

Si se hace la hipótesis de no divergencia horizontal, entonces, de (3.2) se tiene que

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad 3.4$$

y por lo tanto  $w = \text{constante}$  en la vertical. Por otra parte, si se supone una superficie inferior plana, se tiene que  $w=0$

en  $z = 0$ , por lo que, la hipótesis de no divergencia horizontal, hace que  $w = 0$  en cualquier punto.

Por todo lo anterior, las hipótesis de barotropía y no divergencia, reducen la ecuación de vorticidad a la forma

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0 \quad 3.5$$

Puesto que el movimiento es no divergente se puede introducir la función corriente  $\Psi$ , tal que

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad 3.6$$

con lo que automáticamente se cumple la condición de no divergencia (3.4) y la vorticidad puede expresarse de la forma siguiente

$$\zeta = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \quad 3.7$$

Sustituyéndose (3.6) y (3.7) en la ecuación (3.5), se obtiene la ecuación de pronóstico para el modelo barotrópico no divergente, siendo ésta:

$$\nabla^2 \psi_t = F(x, y) \quad 3.8$$

donde  $F(x, y) = J(\nabla^2 \psi, \psi) - \beta \psi_x$ ,  $J(\nabla^2 \psi, \psi) = \psi_y (\nabla^2 \psi)_x - \psi_x (\nabla^2 \psi)_y$ ,  $A_r = \frac{\partial A}{\partial r}$  y  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$

La ecuación (3.8) puede ser resuelta para  $\psi_t$  si se conoce inicialmente la función corriente  $\psi$ . Una vez resuelta (3.8), la tendencia de la función corriente  $\psi_t$  se usa para obtener  $\psi$  para un tiempo  $\Delta t$  posterior mediante una aproximación lineal.

Las hipótesis utilizadas en este modelo, filtran las ondas rápidas de sonido y gravitacionales. La condición de incompresibilidad o la suposición hidrostática filtran las ondas de sonido, como ya se hizo notar en el Capítulo I. En este modelo no pueden existir ondas de gravedad ya que no se permite movimiento vertical.

### 3.2 La función corriente inicial.

Considérese una función corriente dada por

$$\psi(x, y) = \delta \psi_0 \left[ 1 - \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{r_0^2} \right]^4 \tag{3.9}$$

donde  $\delta = 1$  si  $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leq r_0^2$  y cero en caso contrario. Esta función corriente representa un vórtice de radio  $r_0$ , con su centro en el punto  $(x_1, y_1)$ . Este tipo de función corriente es semejante a la utilizada por Adem (1956).

Las componentes del vector velocidad son dadas por

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

por lo que para (3.9) se tiene que

$$u = A (y - y_1) \qquad 3.10A$$

$$v = -A (x - x_1) \qquad 3.10B$$

donde  $A = A(x, y) = \frac{8 \psi_0}{r_0^2} \left[ 1 - \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{r_0^2} \right]^4$ , por lo que la función  $A$  es del mismo signo que el parámetro  $\psi_0$ .

Para  $\psi_0$  negativa se tiene que  $u$  es negativa cuando  $y_1 < y$  y positiva cuando  $y < y_1$ ; por su parte  $v$  es positiva si  $x > x_1$  y negativa si  $x < x_1$ . De lo anterior, se tiene que la función (3.9) representa un vórtice, con circulación ciclónica cuando  $\psi_0 < 0$  y anticiclónica cuando  $\psi_0 > 0$ .

El vector  $\vec{r}'$  que va del centro del vórtice a un punto cualquiera  $(x, y)$  dentro del mismo es dado por

$$\vec{r}' = (x - x_1) \hat{i} + (y - y_1) \hat{j} \qquad 3.11$$

Si se toma el producto escalar de este vector con el vector velocidad se obtiene  $\vec{v} \cdot \vec{r}' = 0$ , lo que significa que la velocidad es perpendicular al radio de curvatura y por lo tanto tangencial. Tomándose las componentes de la velocidad

dadas en (3.10), la magnitud del vector velocidad, o sea la rapidez, es

$$V = A^2 r' \quad 3.12$$

donde  $r'$  es la magnitud del vector  $\bar{r}'$ . Por otra parte si (3.11) se sustituye en (3.9), la función corriente puede expresarse como

$$\psi = \delta \psi_0 \left[ 1 - \frac{(r')^2}{r_0^2} \right]^4$$

La derivada de  $\psi$  respecto de  $r'$  es entonces

$$\frac{d\psi}{dr'} = - \frac{8\psi_0}{r_0^2} \left[ 1 - \frac{(r')^2}{r_0^2} \right]^3 r' \quad 3.13$$

De acuerdo a la definición de la función  $A$  y a las expresiones (3.12) y (3.13), se concluye que, para un vórtice ciclónico

$$V = \frac{\partial \psi}{\partial r'}$$

Tomándose la derivada de  $V$  con respecto a  $r'$  e igualándola a cero se puede obtener el radio de máxima velocidad tangencial, esto es

$$\frac{24\psi_0}{r_0^2} \left[ 1 - \frac{(r')^2}{r_0^2} \right]^2 \left( - \frac{2(r')^2}{r_0^2} \right) - \frac{8\psi_0}{r_0^2} \left[ 1 - \frac{(r')^2}{r_0^2} \right]^3 = 0$$

de donde despejando a  $r'$  se obtiene  $r' = \sqrt{\frac{1}{7}} r_0$

Resumiendo, se tiene que la función corriente dada por (3.9) representa, para  $\Psi_0 < 0$ , un vórtice ciclónico de radio  $r_0$ , centrado en  $(x_1, y_1)$  y con una velocidad máxima a una distancia del centro igual a  $\sqrt{\frac{1}{7}} r_0$ . Los datos de entrada necesarios para iniciar una función corriente de este tipo son las coordenadas del centro, el radio  $r_0$  y la velocidad máxima. Utilizándose la ecuación (3.13), el parámetro  $\Psi_0$  se expresa, en función de  $r_0$  y de la velocidad máxima, de la siguiente forma

$$\Psi_0 = -0.525 r_0 V_{max} \tag{3.14}$$

Para el estudio de la interacción de dos vórtices ciclónicos, la función corriente inicial se obtiene como la superposición de dos funciones corriente del tipo dado por (3.9). Con esto la función corriente inicial es dada por

$$\Psi(x, y) = \delta_1 \Psi_1(x, y) + \delta_2 \Psi_2(x, y) \tag{3.15}$$

en donde  $\delta_i = 1$  si  $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \leq r_0^2$ , cero en caso contrario y las  $\Psi_i$  son dadas por

$$\Psi_i(x, y) = \Psi_0 \left[ 1 - \frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{r_0^2} \right]^4$$

La expresión (3.15) representa un par de vórtices ciclónicos (con  $\Psi_0 < 0$ ) de igual intensidad y tamaño con una dis

tancia entre sus centros  $D = [(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2]^{1/2}$

Los vórtices estarán en interacción cuando  $D < 2r_0$ .

### 3.3 Solución numérica del modelo.

La ecuación (3.8), es una ecuación de Poisson en y puede resolverse analíticamente bajo ciertas restricciones; por ejemplo, Adem (1956), da una solución de esta ecuación, suponiendo que  $F(x, y)$  se puede escribir como una suma de términos de la forma  $G(r) \sin(n\theta)$  y  $H(r) \cos(n\theta)$ , donde  $n$  es un entero y  $(r, \theta)$  son coordenadas polares. En condiciones generales, ésta ecuación no puede resolverse por métodos analíticos, por lo que, es necesario aplicar métodos numéricos de solución.

Considérese una malla o rejilla de tal forma que cada punto  $(x, y)$  de la malla es dado por  $(i \Delta x, j \Delta y)$  donde  $i = 0, 1, \dots, N$  y  $j = 0, 1, 2, \dots, M$ . En estas condiciones el número de puntos de la malla es  $(N + 1)(M + 1)$  Si  $A$  es una función definida en una región dentro de la malla y  $(x, y)$  es un punto en ésta, el valor de  $A$ , en este punto, es  $A(x, y) = A(i \Delta x, j \Delta y)$  para valores dados de  $i$  y  $j$ . Con el fin de simplificar la notación, se expresa  $A(i \Delta x, j \Delta y)$  por  $A_{i, j}$ .

Para resolver la ecuación (3.8), utilizándose diferencias finitas, las derivadas que aparecen en ella se reemplazan por formas adecuadas de diferencias finitas. Los operadores de diferencias finitas utilizados en este caso se definen a continuación

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+\frac{1}{2},j} - A_{i-\frac{1}{2},j}}{d} \quad 3.16A$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+\frac{1}{2}} - A_{i,j-\frac{1}{2}}}{d} \quad 3.16B$$

donde  $d = \Delta x = \Delta y$ . Las derivadas de orden superior se obtienen por aplicaciones sucesivas de los operadores dados en (3.16). Cuando al aplicar estos operadores se necesita el valor de la función en un punto intermedio entre dos puntos de la malla, éste se obtiene por interpolación por medio de los siguientes operadores.

$$\left(\bar{A}^x\right)_{i,j} = (A_{i+\frac{1}{2},j} + A_{i-\frac{1}{2},j})/2 \quad 3.17A$$

$$\left(\bar{A}^y\right)_{i,j} = (A_{i,j+\frac{1}{2}} + A_{i,j-\frac{1}{2}})/2 \quad 3.17B$$

Aplicándose los operadores definidos en (3.16) y (3.17) al operador  $\nabla^2 \psi$ , éste estará dado por

$$\left(\nabla^2 \psi\right)_{i,j} = \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j}}{d^2} \quad 3.18$$

Para obtener el esquema de diferencias finitas para la función  $F$ , que aparece en (3.8), se reescribe  $F$  de la siguiente forma

$$F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \nabla^2 \psi \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \nabla^2 \psi \right) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

y aplicándose (3.16) y (3.17) se obtiene

$$\begin{aligned} F_{\lambda, j} = & \frac{1}{4d^2} [(\Psi_{\lambda+1, j+1} - \Psi_{\lambda+1, j-1})(\nabla^2 \Psi)_{\lambda+1, j} - (\Psi_{\lambda-1, j+1} - \Psi_{\lambda-1, j-1}) \\ & (\nabla^2 \Psi)_{\lambda-1, j} - (\Psi_{\lambda+1, j+1} - \Psi_{\lambda-1, j+1})(\nabla^2 \Psi)_{\lambda, j+1} + (\Psi_{\lambda+1, j-1} - \Psi_{\lambda-1, j-1}) \\ & (\nabla^2 \Psi)_{\lambda, j-1}] - \frac{\beta}{2d} (\Psi_{\lambda+1, j} - \Psi_{\lambda-1, j}) \end{aligned} \quad 3.19$$

El esquema de diferencias finitas para la ecuación (3.9) será entonces

$$(\nabla^2 \Psi)_{\lambda, j} = G_{\lambda, j} \quad 3.20$$

donde  $\nabla_{\lambda, j}^2 = d^2 \nabla_{\lambda, j}$  y  $G_{\lambda, j} = d^2 F_{\lambda, j}$

La ecuación de diferencias finitas (3.20) deberá cumplirse solamente en puntos interiores de la malla, ya que, en los puntos frontera no es posible aplicarla. Aplicándose (3.20)

en cada uno de los puntos interiores, se obtiene un conjunto de  $(N - 1) (M - 1)$  ecuaciones y si se supone que los valores de  $\Psi_t$  en los puntos frontera son conocidos, se tendrán  $(N - 1) (M - 1)$  incógnitas, que son los valores de  $\Psi_t$  en cada punto interior de la malla. Por lo anterior, la solución de (3.20) puede considerarse como la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas. Sin embargo, (3.8) no se resuelve en esta forma ya que el número de puntos en una malla con fines meteorológicos, puede llegar a ser del orden de  $10^3$ , por lo que, el sistema de ecuaciones simultáneas a resolver resulta demasiado grande.

Existe otro método para resolver ecuaciones del tipo dado por (3.20). Este método es llamado método de Relaxación consiste en dar un valor estimado o simplemente estimado - inicial como solución (no importa que tan malo sea) y después se va mejorando por aproximaciones sucesivas. La descripción de este método se presenta en los párrafos siguientes.

Supóngase que en cada punto de la malla se considera un valor arbitrario de  $\Psi_t$  como posible solución de (3.20). Este primer estimado de la solución se denota por  $(\Psi_t)_{\lambda, j}^0$ , donde el super índice indica el orden de la estimación. En general  $(\Psi_t)_{\lambda, j}^0$  no cumplirá la ecuación (3.20), por lo que, al substituirse en ésta, se obtiene

$$(\Psi^2 \Psi^0)_{i,j} = G_{i,j} + R_{i,j}^0 \quad 3.21$$

donde  $R_{i,j}^0$  es llamado "residual" y dá una medida de la diferencia entre el estimado de la solución y la solución misma. Así, en este caso, un valor grande de  $R_{i,j}^0$  indica que el estimado inicial es malo, mientras que  $R_{i,j}^0$  pequeño indica que el estimado inicial se acerca a la solución. Si  $R_{i,j}^0$  fuera cero en todos los puntos entonces,  $(\Psi^2)_{i,j}$  sería la solución de (3.20).

Aplicándose la definición de  $\Psi$  y haciéndose a  $\Psi_{\pm} = \Phi$  con el fin de simplificar la notación, la ecuación (3.21) se puede escribir así

$$\Phi_{i+1,j}^0 + \Phi_{i-1,j}^0 + \Phi_{i,j+1}^0 + \Phi_{i,j-1}^0 - 4\Phi_{i,j}^0 = G_{i,j} + R_{i,j}^0 \quad 3.22$$

Supóngase ahora que, sin cambiar nada en los puntos adyacentes, en el punto  $(i, j)$  se hace un nuevo estimado  $\Phi_{i,j}^1$ , de tal forma que se cumpla (3.20) en dicho punto, es decir

$$\Phi_{i+1,j}^0 + \Phi_{i-1,j}^0 + \Phi_{i,j+1}^0 + \Phi_{i,j-1}^0 - 4\Phi_{i,j}^1 = G_{i,j} \quad 3.23$$

De (3.22) y (3.23) se observa que el nuevo estimado  $\Phi_{i,j}^1$  deberá ser

$$\Phi_{i,j}^1 = \Phi_{i,j}^0 + \frac{1}{4} R_{i,j}^0 \quad 3.24$$

donde  $R_{i,j}^0 = (\nabla^2 \Phi^0)_{i,j} - G_{i,j}$

Haciéndose esto en cada punto interior de la malla, sin utilizar los nuevos estimados que posiblemente se hayan hecho en puntos adyacentes a un punto dado, se obtiene una nueva estimación  $\Phi^1$  de la solución de (3.20). Por supuesto que al sustituir este nuevo estimado en (3.20), los residuales no serán cero en todos y cada uno de los puntos de la malla, pues como se puede ver de (3.23),  $R_{i,j}$  es cero en el punto  $(i, j)$  pero utilizándose a los estimados iniciales en los puntos adyacentes. Al sustituir el nuevo estimado  $\Phi^1$  en (3.20) se obtiene

$$(\nabla^2 \Phi^1)_{i,j} = G_{i,j} + R_{i,j}^1$$

donde  $R_{i,j}^1$  es el nuevo residual correspondiente a  $\Phi_{i,j}^1$ .

El proceso puede repetirse una y otra vez para obtener nuevos estimados de la solución hasta que el residual, en todos y cada uno de los puntos, sea menor que un valor prescrito, dependiendo de la exactitud deseada. Más adelante se demostrará que el método es convergente, es decir, que en cada nueva estimación el error cometido va siendo menor. La fórmula (3.24) puede ser generalizada para obtener el estimado de orden  $m + 1$  en forma recursiva, esto es

$$\Phi_{i,j}^{m+1} = \Phi_{i,j}^m + \frac{1}{4} R_{i,j}^m \quad 3.25$$

donde  $R_{i,j}^m = (\nabla^2 \Phi^m)_{i,j} - G_{i,j}$

La fórmula (3.25) puede generalizarse si se supone que la diferencia entre un nuevo estimado y el precedente es proporcional al residual de este último, es decir

$$\Phi_{i,j}^{m+1} = \Phi_{i,j}^m + \frac{\alpha}{4} R_{i,j}^m \quad 3.26$$

donde  $\alpha$  es el factor de proporcionalidad.

Con el fin de llevar a cabo la demostración de convergencia del método, despéjese a  $G_{i,j}$  de la ecuación (3.20) y sustitúyase en la expresión para el residual  $R_{i,j}^m$ ; el resultado es

$$R_{i,j}^m = [\nabla^2(\Phi^m - \Phi)]_{i,j}$$

o bien, notándose que  $(\Phi^m - \Phi)$  es precisamente el error  $\epsilon^m$  en la emesima aproximación

$$R_{i,j}^m = (\nabla^2 \epsilon^m)_{i,j} \quad 3.27$$

Por otra parte, si se resta  $\Phi_{i,j}$  en ambos miembros de (3.26) se obtiene

$$\varepsilon_{i,j}^{m+1} = \varepsilon_{i,j}^m + \frac{\alpha}{4} R_{i,j}^m$$

y sustituyéndose (3.27) en ésta última

$$\varepsilon_{i,j}^{m+1} = \varepsilon_{i,j}^m + \frac{\alpha}{4} (\nabla^2 \varepsilon^m)_{i,j} \quad 3.28$$

Las condiciones a la frontera de la función error  $\varepsilon$  es que  $\varepsilon_{i,j} = 0$  para  $i = 0$ ,  $i = N$ ,  $j = 0$  y  $j = M$  ya que en estos puntos los valores de  $\Phi$  son prescritos y mantenidos constantes.

Como la función error tiene el mismo dominio que  $\Phi$ , es decir el rectángulo  $[0, N \Delta x]$   $[0, M \Delta y]$ , entonces es posible representar la función error en un punto  $(i, j)$  de la malla como una serie discreta de Fourier de la forma

$$\varepsilon_{i,j}^m = \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{q=1}^{M-1} K_{pq}^m \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi i \Delta x}{N \Delta x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi j \Delta y}{M \Delta y}\right)$$

Considérese ahora una componente del espectro de la función error, esto es

$$\varepsilon_{i,j}^m = K^m \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi i}{N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi j}{M}\right)$$

Si se aplica el operador  $\nabla^2$  utilizándose esta última expresión, se tiene

$$(\nabla^2 \varepsilon^m)_{i,j} = 2 \varepsilon_{i,j}^m \left( \cos \frac{p\pi}{N} + \cos \frac{q\pi}{M} - 2 \right)$$

o bien usándose la identidad trigonométrica

$$\cos\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

se puede escribir

$$\left(\nabla^2 \varepsilon^m\right)_{i,j} = -4 \varepsilon_{i,j}^m \left(\operatorname{sen}^2 \frac{p\pi}{2N} + \operatorname{sen}^2 \frac{q\pi}{2M}\right)$$

sustituyéndose esta última expresión en la ecuación (3.28) y

dividiéndose todo entre  $\varepsilon_{i,j}^m$  se tiene que

$$\frac{\varepsilon_{i,j}^{m+1}}{\varepsilon_{i,j}^m} = 1 - \alpha \left(\operatorname{sen}^2 \frac{p\pi}{2N} + \operatorname{sen}^2 \frac{q\pi}{2M}\right)$$

de donde se observa que la condición de convergencia es

$$\left|1 - \alpha \left(\operatorname{sen}^2 \frac{p\pi}{2N} + \operatorname{sen}^2 \frac{q\pi}{2M}\right)\right| < 1$$

Puede notarse que para el caso particular en que  $\alpha = 1$ , esto siempre se cumple, ya que  $0 < \operatorname{sen}^2 \frac{p\pi}{2N} + \operatorname{sen}^2 \frac{q\pi}{2M} < 2$  debido a que  $1 < p < N$  y  $1 < q < M$ .

El proceso de relajación descrito anteriormente se dice simultáneo, ya que los residuales, y por lo tanto las nuevas aproximaciones se hacen todos utilizándose el estimado anterior en todos y cada uno de los puntos de la malla, por lo que pueden ser calculados en forma simultánea.

Existe una variante de este proceso en la que los residuales se calculan utilizándose las nuevas aproximaciones hechas en puntos anteriores de la malla. Por ejemplo, para

calcular el residual  $R_{i,j}^m$ , se utilizan los valores de calculados previamente en los puntos  $(i-1, j)$  y  $(i, j-1)$ . La fórmula para el residual se transforma en

$$R_{i,j}^m = \Phi_{i+1,j}^m + \Phi_{i,j+1}^m + \Phi_{i-1,j}^{m+1} + \Phi_{i,j-1}^{m+1} - 4\Phi_{i,j}^m - G_{i,j}$$

Por la forma como se sigue este proceso es llamado "Relajación secuencial".

Una vez calculada  $\psi_t$  en cada punto de la malla, mediante el proceso descrito anteriormente, se pronostica la función corriente para un tiempo  $\Delta t$  posterior, mediante una extrapolación lineal. Para ello se aproxima  $\psi_t$  por diferencias finitas adelantadas, es decir

$$\psi_t = \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t}$$

de donde se obtiene

$$\psi(t+\Delta t) = \psi(t) + \Delta t \psi_t$$

Con esta nueva función corriente se resuelve nuevamente la ecuación (3.8) para obtener la tendencia de  $\psi$  con la que se calcula una nueva función corriente por extrapolación lineal. El proceso se repite una y otra vez hasta obtener el pronóstico deseado. La aproximación por diferencias finitas adelantadas en el tiempo se utiliza únicamente

en el primer paso de tiempo; para pasos de tiempo posteriores se usan diferencias finitas centradas, esto es

$$\psi_t = \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

de donde se obtiene

$$\psi(t+\Delta t) = \psi(t-\Delta t) + 2\Delta t \psi_t$$

La condición de frontera utilizada para resolver la ecuación (3.8) es, en este caso, que  $\psi$  sea constante, es decir  $\psi_t = 0$ .

IV.-EL MODELO DIVERGENTE.

4.1.-Ecuaciones del modelo.

Considérese una atmósfera homogénea, incompresible, libre de fricción y en equilibrio hidrostático. Las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad 4.1 A$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad 4.1 B$$

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad 4.1 C$$

en donde se ha utilizado el resultado del capítulo I de que  $\alpha \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial h}{\partial x}$  y  $\alpha \frac{\partial p}{\partial y} = g \frac{\partial h}{\partial y}$  donde h es la altura de la superficie libre, que existe debido a la hipótesis de incompresibilidad.

Si se supone que, inicialmente, el campo horizontal de velocidad es independiente de la altura, entonces así permanecerá como ya fue demostrado en el capítulo I. Las ecuaciones de movimiento se transforman, bajo esta hipótesis en

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad 4.2 A$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad 4.2 B$$

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad 4.2 C$$

Por la condición de incompresibilidad el término  $\frac{d\rho}{dt}$  es cero en la ecuación de continuidad, por lo que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad 4.3$$

Puesto que el campo horizontal de velocidad es independiente de Z, entonces (4.3) es fácilmente integrada en la vertical, de Z = 0 a Z = h, obteniéndose

$$w_h - w_0 = -h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad 4.4$$

donde  $w_h$  y  $w_0$  son la velocidad vertical en Z = h y Z = 0 respectivamente.

Por condiciones de frontera, la componente de la velocidad normal a una superficie rígida es cero, por lo que si se supone una superficie inferior plana y horizontal, entonces  $w_0 = 0$ . Para la frontera superior, la velocidad vertical deberá ser la velocidad con que se mueva verticalmente la superficie libre, es decir,  $w_h$  debe ser la razón de cambio de h con respecto al tiempo, esto es

$$w_h = \frac{dh}{dt} \quad 4.5$$

Sustituyéndose (4.5) en (4.4) y aplicándose la fórmula para la derivada de un producto, se tiene que

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial(uh)}{\partial x} - \frac{\partial(vh)}{\partial y} \quad 4.6$$

Si se multiplica (4.2 A) por  $h$  y se le suma la ecuación (4.6) multiplicada por  $u$ , se obtiene

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} = - \frac{\partial(huu)}{\partial x} - \frac{\partial(hvu)}{\partial y} - gh \frac{\partial h}{\partial x} + fvh \quad 4.7$$

De manera semejante, para la ecuación (4.2 B) se obtiene

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} = - \frac{\partial(huv)}{\partial x} - \frac{\partial(hvv)}{\partial y} - gh \frac{\partial h}{\partial y} - fuh \quad 4.8$$

Las ecuaciones (4.6), (4.7) y (4.8) son las ecuaciones de pronóstico para el modelo divergente. Las variables a pronosticar son la altura de la superficie libre y el producto de ésta por las componentes de la velocidad horizontal.

Como puede verse del capítulo I (ecuaciones (1.63) y (1.65)), este modelo admite ondas de Rossby y ondas de gravedad modificadas por la rotación de la tierra (ondas inerciales de gravedad) cuya velocidad de propagación es del orden de  $10^2$  m/seg. En comparación con el modelo no divergente, el paso de tiempo utilizado para extrapolar los campos a pronosticar, debe ser bastante más pequeño con el fin de que se cumpla la condición de estabilidad computacional.

#### 4.2.-Inicialización del Modelo.

Para poder calcular las tendencias de los campos a pronosticar, mediante las ecuaciones (4.6-8), es necesario conocer inicialmente el campo de velocidad y el campo de altura

Para el campo inicial de velocidad se utiliza el mismo que para el modelo no divergente, el cual puede ser obtenido directamente de la función corriente. Para obtener el campo de altura correspondiente, se resuelve la ecuación de balance (Haltiner 1972) por el método de relajación. Esta ecuación es dada por

$$g \nabla^2 h = f \nabla^2 \psi + 2(\psi_{xx} \psi_{yy} - \psi_{xy}^2) + \beta \psi_y$$

Esta ecuación implica un balance entre la componente rotacional del viento y el campo geopotencial.

Para el parámetro de Coriolis, se supone una variación lineal con respecto a la latitud de la siguiente forma

$$f(y) = f_0 + \beta y$$

donde  $f_0 = 5 \times 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$  y  $\beta = 1.7 \times 10^{-13} \text{ cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$

#### 4.3.- Solución Numérica del Modelo Divergente.

Uno de los problemas que se presentan al utilizar las ecuaciones primitivas en el modelaje de la atmósfera, es que, como existe más de una variable dependiente, al ser éstas representadas en forma discreta sobre una malla de puntos, con el fin de resolver las ecuaciones por el método de diferencias finitas, pueden existir dos o más soluciones separadas e independientes que pueden ser divergentes una de la otra.

Considérese el caso de ondas de gravedad propagándose en una sola dirección. Las ecuaciones que gobiernan su propagación son

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad 4.9 A$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x} \quad 4.9 B$$

donde  $g$  y  $H$  son constantes.

Puesto que estas ecuaciones son lineales, es posible considerar soluciones correspondientes a una sola componente del espectro, esto es, soluciones de la forma

$$u = A e^{i(kx - vt)} \quad 4.10 A$$

$$h = B e^{i(kx - vt)} \quad 4.10 B$$

las que al ser sustituidas en las ecuaciones (4.9), da por resultado un sistema de dos ecuaciones homogéneas, teniendo como incógnitas las amplitudes  $A$  y  $B$ , esto es

$$-vA + gkB = 0$$

$$HkA - vB = 0$$

La condición para que este sistema tenga solución no trivial es que el determinante de la matriz de coeficientes sea cero. De esta condición se obtiene la ecuación que determina las frecuencias permisibles

$$v^2 - g H k^2 = 0$$

y puesto que  $v = c k$ , entonces

$$c = \pm \sqrt{g H} \quad 4.11$$

lo que demuestra que el sistema de ecuaciones (4.9) tiene como solución ondas de gravedad propagándose, con rapidez

$\sqrt{g H}$ , en ambas direcciones del eje X. Esta rapidez de propagación no depende del número de onda y por lo tanto no existe la dispersión de las ondas.

Utilizándose diferencias finitas centradas para las derivadas espaciales, el esquema para el sistema (4.9) es

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i = -g \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2 \Delta x} \quad 4.12 A$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_i = -H \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2 \Delta x} \quad 4.12 B$$

Sustituyéndose soluciones análogas a (4.10) en (4.12), se obtiene lo siguiente

$$-v A e^{i(kx \Delta x - vt)} = -g \frac{e^{ik \Delta x} - e^{-ik \Delta x}}{2 \Delta x} B e^{i(kx \Delta x - vt)}$$

$$-v B e^{i(kx \Delta x - vt)} = -H \frac{e^{ik \Delta x} - e^{-ik \Delta x}}{2 \Delta x} A e^{i(kx \Delta x - vt)}$$

Utilizándose la fórmula de Euler, se tiene que  $e^{ik \Delta x} - e^{-ik \Delta x} = 2 \operatorname{sen}(k \Delta x)$  Y, por lo tanto, las ecuaciones anteriores se simplifican dando por resultado el siguiente sistema de ecuaciones homogéneas.

$$\begin{aligned} -vA + g \frac{\text{sen}(\kappa \Delta x)}{\Delta x} B &= 0 \\ H \frac{\text{sen}(\kappa \Delta x)}{\Delta x} A - vB &= 0 \end{aligned}$$

el cual tendrá solución diferente de la trivial si su determinante es cero. Esto lleva a la ecuación de frecuencia

$$v^2 - gH \frac{\text{sen}^2(\kappa \Delta x)}{(\Delta x)^2} = 0$$

de donde se obtiene la velocidad de propagación de las ondas permitidas por el sistema de ecuaciones de diferencias finitas (4.12). Si se representa esta velocidad por  $C^*$ , entonces

$$C^* = C \frac{\text{sen}(\kappa \Delta x)}{\kappa \Delta x} \quad 4.13$$

donde  $C = \sqrt{gH}$  es la velocidad física de propagación, y  $C^*$  puede ser llamada velocidad computacional.

El significado de (4.13) es que la discretización espacial de las variables, trae como resultado un error en la velocidad de propagación de las ondas.

Este error es mayor entre más grande sea el número de onda, en efecto, cuando  $\kappa \Delta x$  tiende a cero  $C^*$  tiende a  $C$  y a medida que  $\kappa \Delta x$  crece  $C^*$  es cada vez menor que  $C$  y se hace cero cuando  $\kappa \Delta x = \pi$ . Por otra parte, puesto que ahora la velocidad de propagación de las ondas si depende del número de onda se produce la dispersión de las mismas.

Esta dispersión es de origen computacional, pues se debe a la discretización espacial de las variables.

Considérese una distribución de las variables  $u$  y  $h$  sobre una malla de longitud  $L$  con distancia entre puntos igual a  $\Delta x$ , tal como lo muestra la figura 4.1

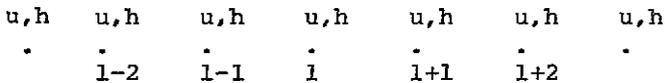


Fig. 4.1 Distribución de las variables dependientes sobre una malla con espaciamento entre puntos igual a  $\Delta X$ .

Si  $N$  es el número de intervalos de la malla, está definida en puntos discretos  $x = j\Delta x$  con  $j = 0, 1, 2, \dots, N$ . Se tienen entonces  $N + 1$  valores de  $u$ , dados por

$$u_j = u(j\Delta x)$$

La función  $u$  puede ser representada por una serie de Fourier de la forma

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right)$$

pero puesto que solamente se tiene  $J + 1$  valores de  $u$ , entonces, aplicándose la serie para cada uno de estos valores se tendrán únicamente  $N + 1$  ecuaciones, por lo que es posible calcular solamente  $N + 1$  coeficientes  $a_n, b_n$  distintos. Se consideran únicamente los términos en la serie de Fourier correspondiente a las longitudes de onda más largas, estos  $N + 1$  coeficientes corresponden a valores de

$n = 1, 2, 3, \dots, \frac{N}{2}$ . De estas componentes, la de longitud de onda más corta corresponde a  $n = \frac{N}{2}$ , con longitud de onda  $\frac{L}{n} = \frac{2L}{N}$ , y como  $N = L/\Delta X$ , entonces la longitud de onda más corta que es posible resolver es  $2\Delta X$ , que corresponde a un número de onda máximo  $k = \pi/\Delta x$

La malla mostrada en la figura 4.1 puede representarse como la superposición de dos mallas como las de la siguiente figura

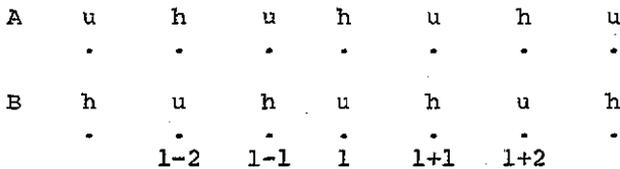


Fig. 4.2 Desdoblamiento de la malla de la Fig. 4.1 en dos mallas elementales.

Como puede notarse, la aplicación del esquema de diferencias finitas definido en (4.12) sobre la malla de la figura 4.1 es equivalente a aplicar este esquema separadamente en las mallas A y B de la figura 4.2. Esto significa que al utilizar una malla como la de la figura 4.1 para resolver las ecuaciones (4.9), se obtendrán dos soluciones separadas e independientes, totalmente desacopladas una de la otra. Por lo tanto, es más conveniente obtener sólo una de estas

soluciones utilizándose una de las mallas de la figura 4.2. Este tipo de malla es llamado "escalonada"

Por otra parte, puesto que ahora la misma variable aparece en puntos separados por una distancia  $2\Delta X$ , la longitud de onda más corta permisible es  $4\Delta X$ , que corresponde a un número de onda máximo  $k = \pi/2\Delta X$ , es decir, se han eliminado los números de onda tales que  $k\Delta X > \frac{\pi}{2}$ , que de acuerdo a la ecuación (4.13) son las ondas que producen mayor error en la velocidad de fase.

Se analizará ahora el caso bidimensional. Las ecuaciones que gobiernan la propagación de ondas de gravedad en dos dimensiones son

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad 4.14 A$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial y} \quad 4.14 B$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad 4.14 C$$

Se consideran soluciones del mismo tipo que para el caso unidimensional, es decir

$$u = A e^{i(kx + ly - vt)} \quad 4.15 A$$

$$v = B e^{i(kx + ly - vt)} \quad 4.15 B$$

$$h = C e^{i(kx + ly - vt)} \quad 4.15 C$$

donde  $K$  y  $l$  son números de onda en dirección  $X$  e  $Y$  respectivamente y  $\nu$  es la frecuencia. Al sustituir éstas en (4.14), se obtiene la ecuación de frecuencias permisibles

$$\nu^2 = gH(k^2 + l^2)$$

y como  $\nu^2 = C^2(k^2 + l^2)$ , entonces,  $C = \sqrt{gH}$  que es la misma velocidad de propagación que para el caso unidimensional.

Considérese una distribución espacial de las variables sobre una malla como la mostrada en la siguiente figura

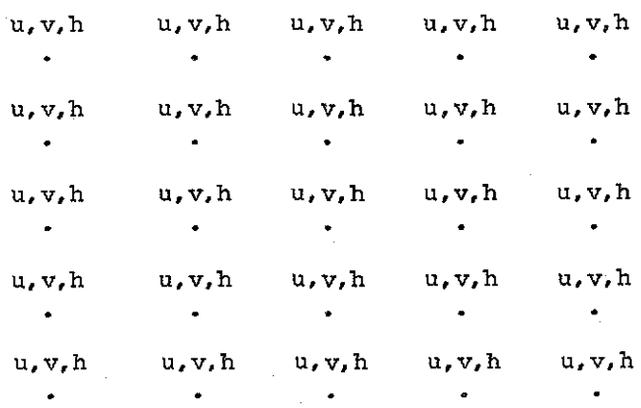
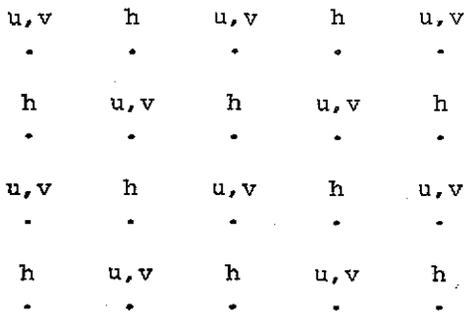
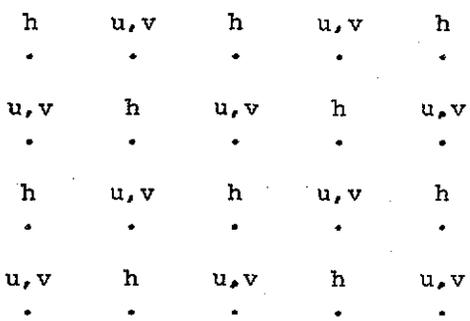


Fig. 4.3 Malla con todas las variables definidas en cada punto.

Este arreglo puede obtenerse como la superposición de dos mallas "escalonadas", como las mostradas en la siguiente figura.



A



B

Fig. 4.4 Desdoblamiento de la malla de la figura 4.2 en dos mallas escalonadas.

Haciéndose un análisis similar al del caso unidimensional, pero utilizándose series de Fourier dobles para representar las funciones, se pueden encontrar los números de onda permisibles. Si se supone que la distancia entre puntos es  $d$  en ambas direcciones, las regiones de números de onda

permisibles por las mallas de las figuras 4.3 y 4.4, se representan en la figura que sigue.

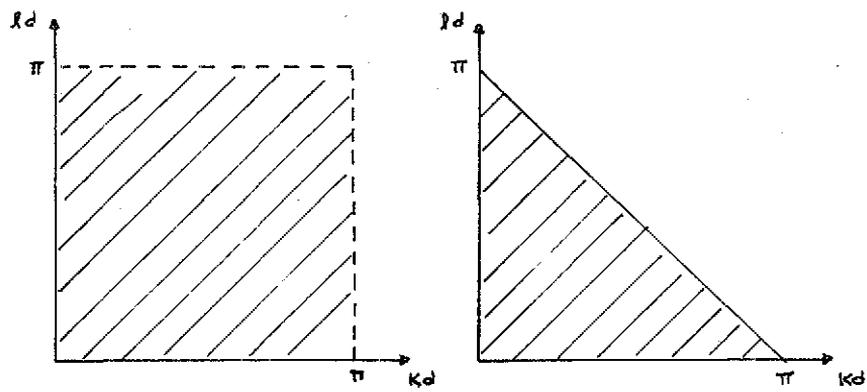


Fig. 4.5 Números de onda permitidos por : (a) malla de la figura 4.3, (b) mallas de la figura 4.4.

Como puede verse de la figura, la malla escalonada reduce la región de números de onda permisibles a la mitad, eliminándose los números de onda grandes, que son los que producen mayor error en la velocidad de fase, como se verá en seguida.

Con el uso de diferencias finitas centradas para las derivadas espaciales, las ecuaciones de diferencias finitas correspondientes a las ecuaciones diferenciales (4.14) son:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j} = -g \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2d} \tag{4.16 A}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i,j} = -g \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2d} \tag{4.16 B}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{i,j} = -H \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2d} \quad 4.16 C$$

La aplicación de este esquema sobre una malla como la de la figura 4.3, es equivalente a aplicar este esquema separadamente en las mallas A y B de la figura 4.4. Nuevamente se tiene el problema de la separación de soluciones como en el caso unidimensional

Sustituyéndose soluciones semejantes a las de (4.15) en las ecuaciones (4.16) se obtiene la ecuación de frecuencias permitidas, esta es

$$v^2 = gH \frac{\text{sen}^2(\kappa d) + \text{sen}^2(\lambda d)}{d^2}$$

y como  $v^2 = c^2 / (\kappa^2 + \lambda^2)$ , entonces

$$C^* = c \left( \frac{\text{sen}^2(\kappa d) + \text{sen}^2(\lambda d)}{(\kappa d)^2 + (\lambda d)^2} \right)^{1/2} \quad 4.17$$

donde  $C = \pm \sqrt{gH}$  es, nuevamente la velocidad física de propagación de las ondas gravitacionales. Se tiene nuevamente que la discretización espacial de las variables produce un error en la velocidad de fase, siendo este mayor para números de onda grandes.

En la figura 4.6 se muestran isolíneas de  $C^*/C$ , en la región de números de onda permitidos por la malla no escalonada. Solamente se presenta la mitad de la región, pues existe simetría con respecto a la línea  $\kappa = 1$ . Entre más pequeña es la razón  $C^*/C$  mayor es el error en la velocidad de



fase. La malla escalonada admite solamente la parte inferior de la región mostrada y, por lo tanto, con este tipo de malla se eliminan los números de onda que producen un mayor error en la velocidad de fase. Además el tiempo de computación se reduce a la mitad

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

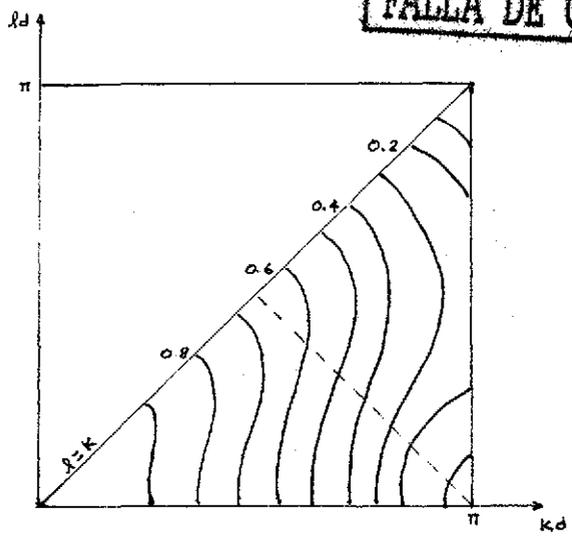


Fig. 4.6 Velocidad relativa de fase para ondas de gravedad cuando las derivadas espaciales son aproximadas por diferencias finitas centradas.

Por todo lo anterior, resulta más conveniente la utilización de mallas escalonadas para resolver, por el método de diferencias finitas, modelos de ecuaciones primitivas. En

la solución de las ecuaciones del modelo presentado en la primera sección de este capítulo, se utiliza una malla escalonada semejante a las de la figura 4.4, con la diferencia que está girada un ángulo de  $45^\circ$  (Fig. 4.7)

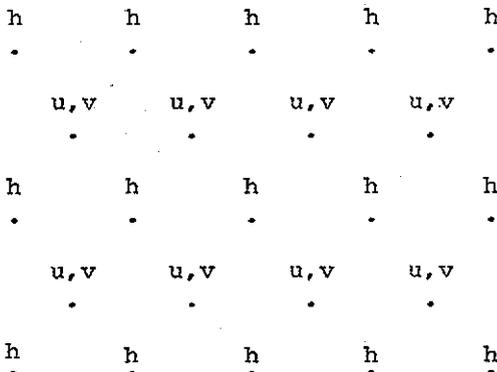


Fig. 4.7 Malla escalonada para la solución del modelo divergente.

El esquema de diferencias finitas para las ecuaciones

(4.6-7-8) es el siguiente

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} = -h(\overline{uh^x u^x})_x - (\overline{vh^y u^y})_y - g\overline{h^{xy} h^y}_x + fvh + k((uh)_{xx} + (uh)_{yy}) \quad 4.18 A$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} = -h(\overline{uh^x v^x})_x - (\overline{vh^y v^y})_y - g\overline{h^{xy} h^x}_y - fuh + k((vh)_{xx} + (vh)_{yy}) \quad 4.18 B$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -(\overline{hu^y})_x - (\overline{hv^x})_y \quad 4.18 C$$

donde el último término de las ecuaciones (4.18 A y B) es un término de difusión el cual se incluye con el fin de evitar

la acumulación de energía en la región de onda corta, debida a la inestabilidad computacional no lineal.

Los operadores para derivadas y promedios que aparecen en (4.18), son definidos en un punto  $(i, j)$  de la siguiente manera.

$$\alpha_x \equiv (\alpha_{i+1/2, j} - \alpha_{i-1/2, j}) / \Delta x$$

$$\alpha_y \equiv (\alpha_{i, j+1/2} - \alpha_{i, j-1/2}) / \Delta y$$

$$\overline{\alpha}^x \equiv (\alpha_{i+1/2, j} + \alpha_{i-1/2, j}) / 2$$

$$\overline{\alpha}^y \equiv (\alpha_{i, j+1/2} + \alpha_{i, j-1/2}) / 2$$

$$\alpha_{rs} \equiv (\alpha_r)_s$$

$$\overline{\alpha}^{rs} \equiv \overline{(\alpha^r)}^s$$

donde  $r$  y  $s$  pueden ser  $Y$  o  $X$  y donde

$$\alpha_{i,j} = \alpha(i \Delta x, j \Delta y)$$

Para las derivadas temporales se utilizan diferencias finitas centradas "Leapfrog", excepto para el primer paso de tiempo, para el que se emplean diferencias finitas adelantadas.

## V.-RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

### 5.1.-Resultados.

Con el modelo no divergente, se hicieron experimentos utilizando vórtices con un radio de 600 kms y una velocidad máxima de 30 m/seg (108 km/hr). La distancia entre puntos de la malla utilizada fue de 60 km y el paso de tiempo de media hora.

Con el fin de calcular la velocidad de rotación de un vórtice con respecto al otro, en función de la distancia de separación entre ellos, se hicieron pronósticos de 12 horas con diferentes valores para la distancia de separación. Los resultados se comparan en la figura 5.1 con los resultados obtenidos por Brand (1970) de la observación de 22 casos de pares binarios. En la figura 5.2 se presenta el perfil de la velocidad tangencial de los vórtices utilizados en este trabajo (línea a rayas), comparado con el perfil de velocidad tangencial promedio, obtenido por Hughes (1952) de un conjunto de huracanes (línea punteada).

Para distancias grandes (mayores a 500 km aproximadamente), la velocidad de rotación calculada es menor que la observada. Esto es debido a que la velocidad tangencial observada es mayor que la teórica. Para distancias más cortas

la velocidad calculada es mayor que la observada, por lo que, la velocidad de rotación calculada se espera que sea mayor que la observada. En efecto, como puede verse de la figura 5.1, así sucede, aunque no en la proporción esperada. Esto puede deberse a que en el caso real, la porción de un vórtice inmerso en el campo de velocidades del otro, es mayor que para el caso teórico, en donde la región de interacción es más pequeña debido a que el campo de velocidad disminuye a cero más rápidamente.

Se hicieron dos pronósticos a 40 hrs, uno con  $\beta = 0$  (fig. 5.4), y el otro con  $\beta = 1.7 \times 10^{-13} \text{ cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$  (fig. 5.5). El resultado, en cuanto al efecto Fujiwhara de rotación, es el mismo en ambos casos; la diferencia es que para  $\beta \neq 0$ , el vórtice que se mueve hacia el norte tiende a debilitarse al disminuir la vorticidad relativa  $\zeta$  debido a la conservación de la vorticidad total  $\zeta + f$ . Puede observarse también que la distancia entre los vórtices ha aumentado; un resultado contrario a lo observado en la realidad.

Con el modelo divergente se hizo un pronóstico a 12 horas. La característica de los vórtices y de la malla fue la misma que para el caso no-divergente. El paso de tiempo empleado fue de 90 segundos. En la figura 5.6 se presenta el

campo de altura inicial. En esta figura se ha graficado la diferencia entre la altura calculada de la ecuación de balance y la altura constante prescrita en la frontera que fue de 5000 metros. La figura 5.7 es el pronóstico a 12 horas con el modelo divergente. Se puede observar, nuevamente, el efecto de rotación de un vórtice con respecto al otro, pero también puede observarse que la distancia entre los vórtices ha disminuido. Este resultado está más acorde con lo observado en la naturaleza, en donde dos vórtices ciclónicos en interacción tienden a atraerse e incluso pueden llegar a organizarse en un solo sistema como ya ha sido reportado por varios autores.

5.2 Conclusiones.

De los resultados obtenidos y de las observaciones hechas, es claro que la velocidad de rotación de un vórtice con respecto al otro depende de la distancia de separación entre ellos, así como de la distribución de la velocidad tangencial. Esta velocidad de rotación podría, probablemente, ser calculada de una manera más exacta si se consideran vórtices con un perfil de velocidad tangencial más real, por ejemplo  $v = K/r$ , donde K es una constante y r es la distancia radial.

La conclusión más importante que se puede obtener, al comparar los resultados del modelo no divergente con los del divergente, es que el efecto de atracción de uno con respecto al otro puede deberse, entre otras cosas, a la convergencia del viento hacia el centro de los vórtices. Esta posibilidad ha sido apuntada por Brand (1970).

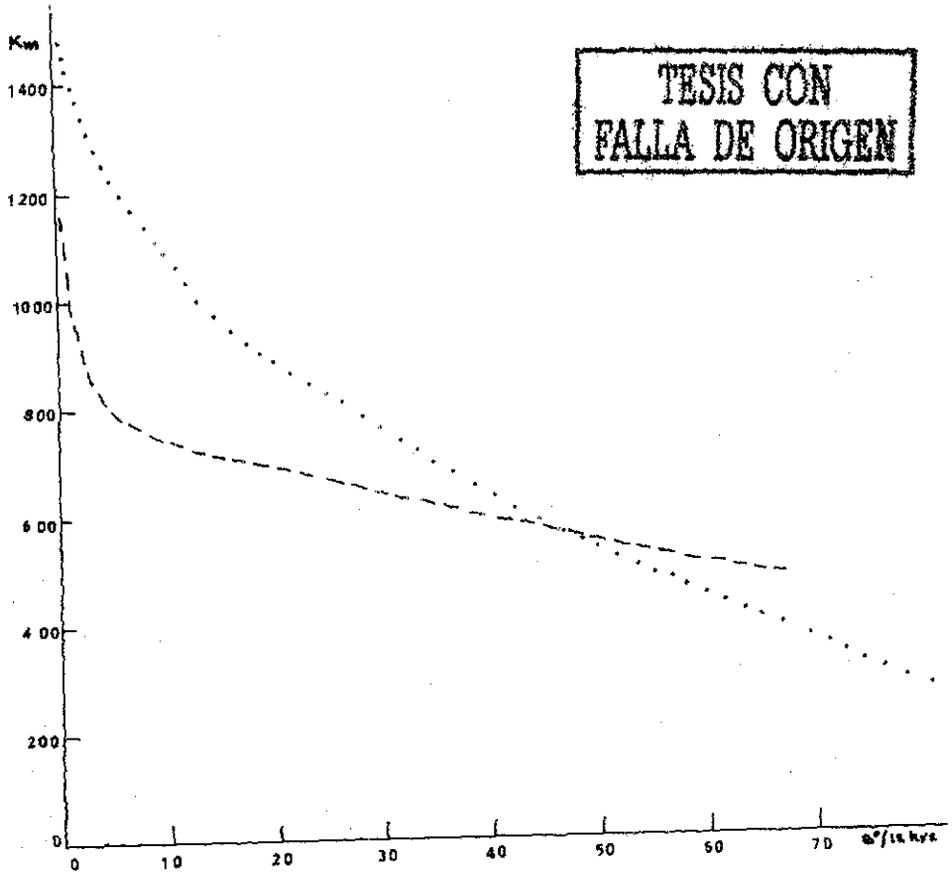
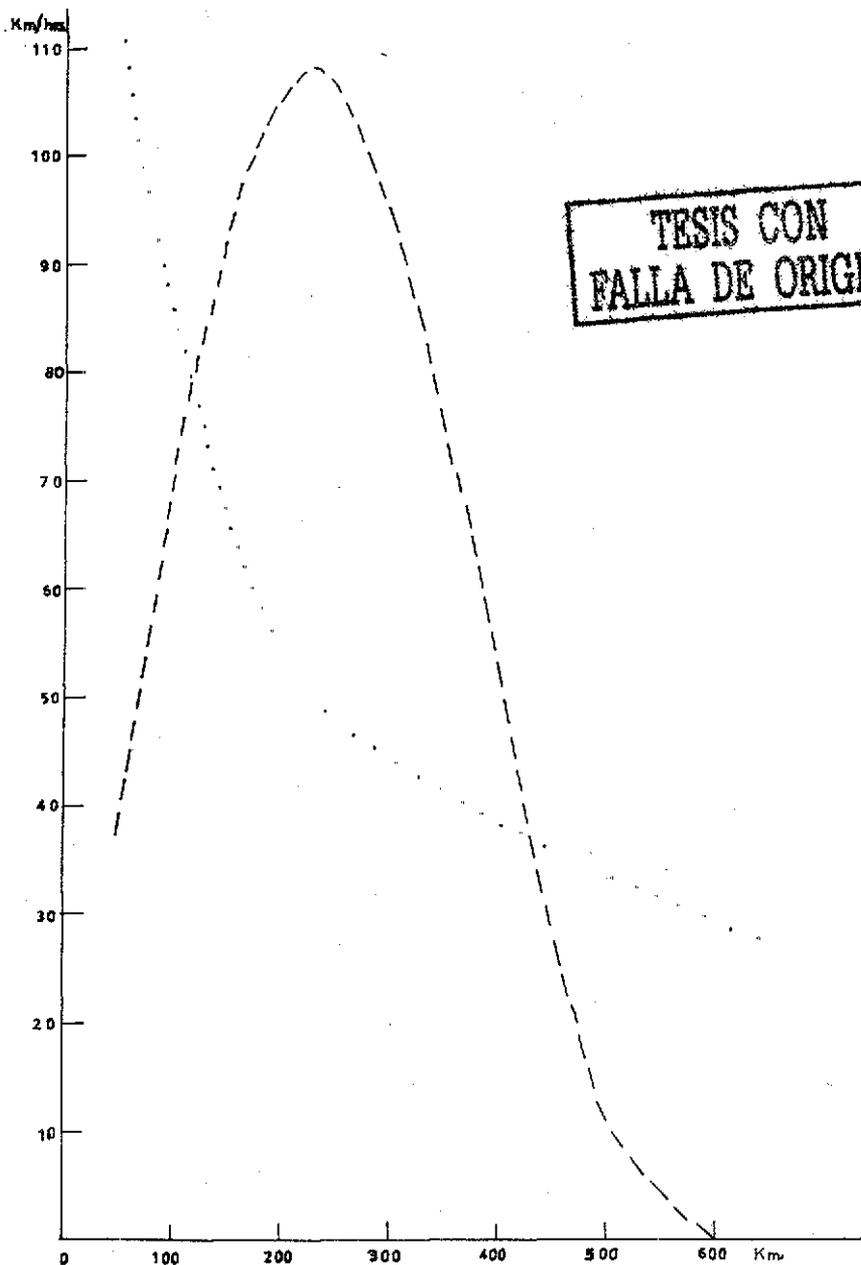


Figura 5.1.-Velocidad de rotación contra distancia de separación entre vórtices. Línea a rayas: calculada. Línea punteada: observada.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Fig. 5.2.-Perfil de velocidad tangencial promedio observado comparado con el perfil teórico.

100.  
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

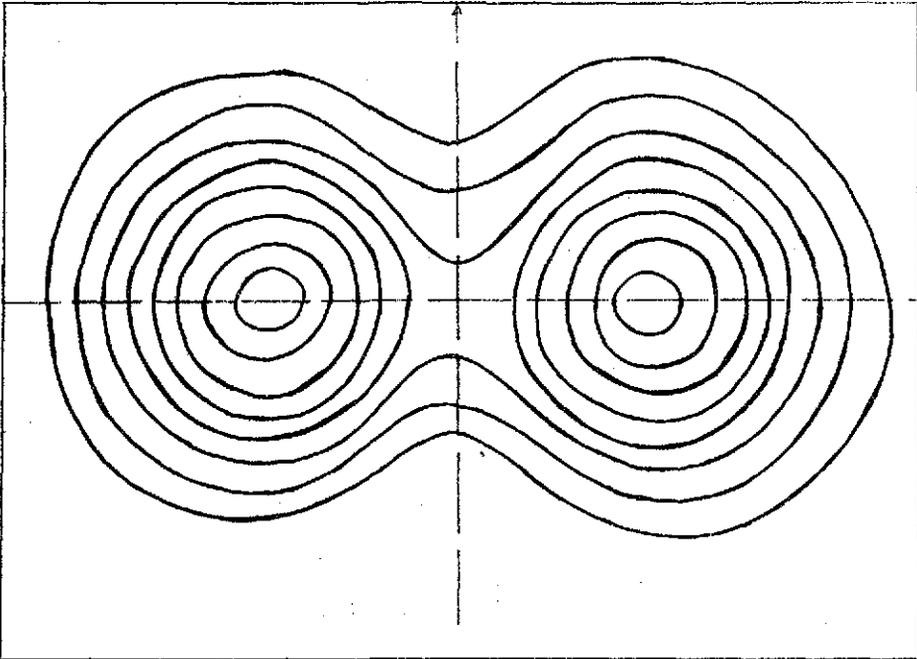


Fig. 5.3.-Función corriente inicial: dos vórtices de 600 km de radio y velocidad máxima de  $30 \text{ m seg}^{-1}$  con una distancia entre centros de 900 kms.

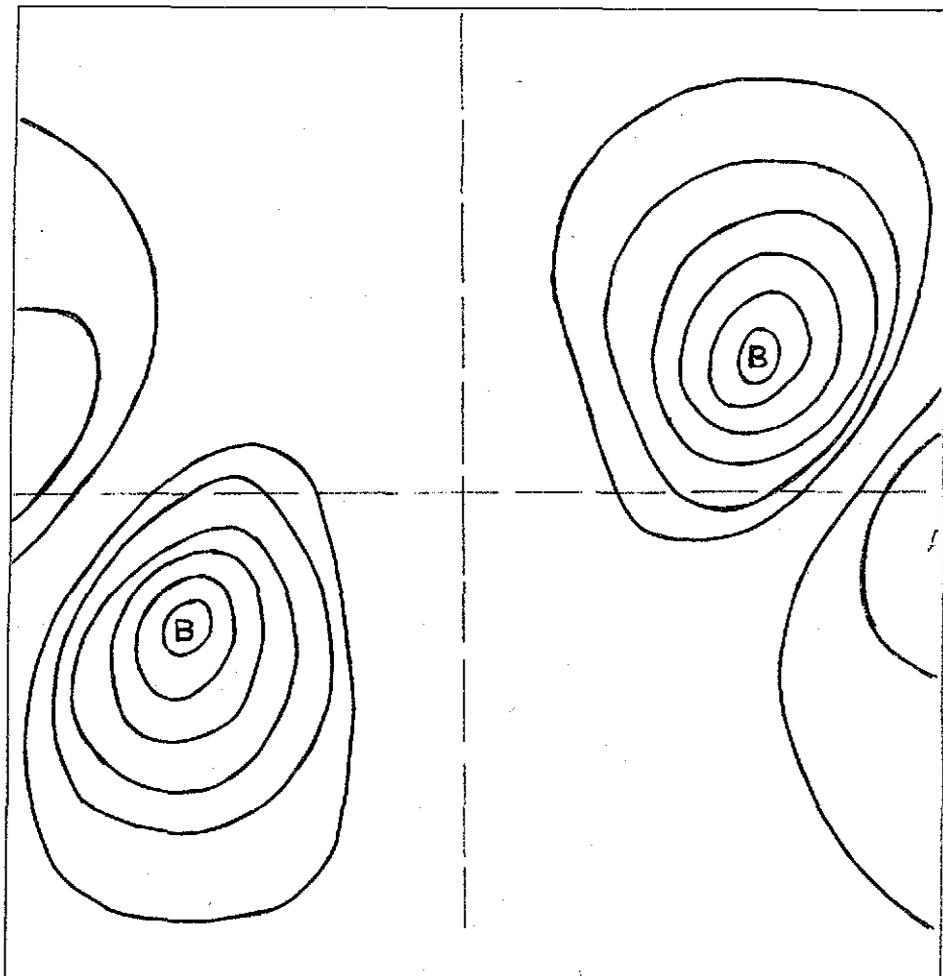


Fig. 5.4.- Función corriente pronosticada 40 horas después con el modelo no-divergente, con  $\beta = 0$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

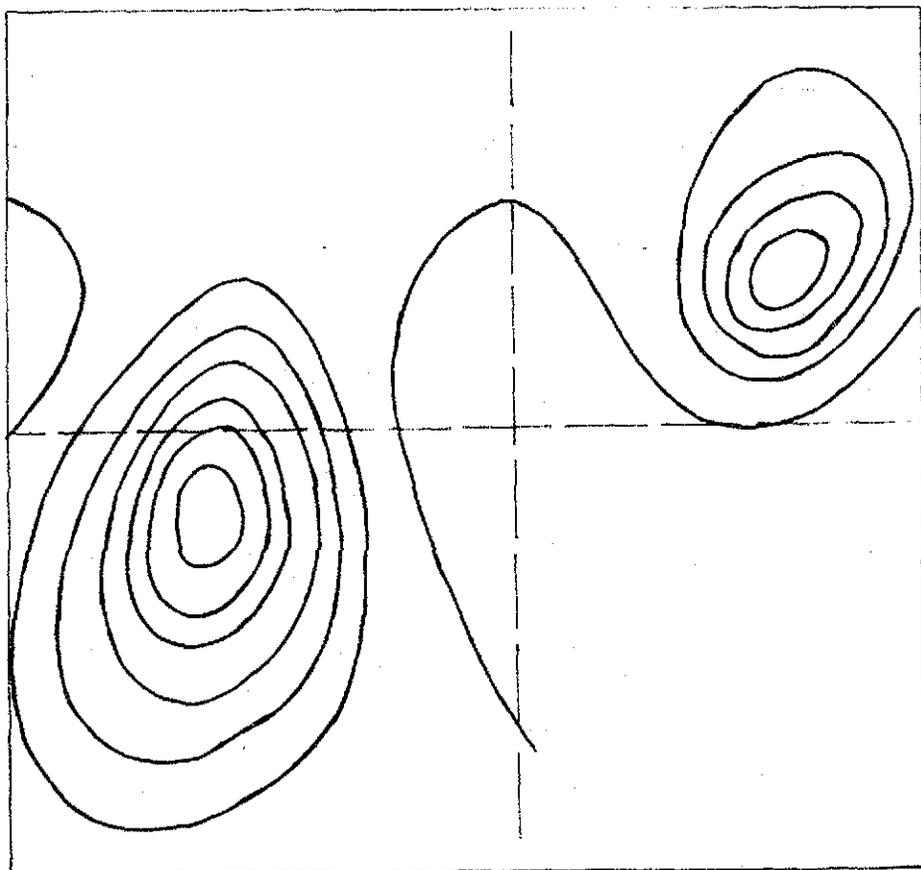


Fig. 5.5.- Pronóstico a 40 horas con el modelo no divergente  
tomando  $\beta = 1.7 \times 10^{-13} \text{ seg}^{-1} \text{ cm}^{-1}$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

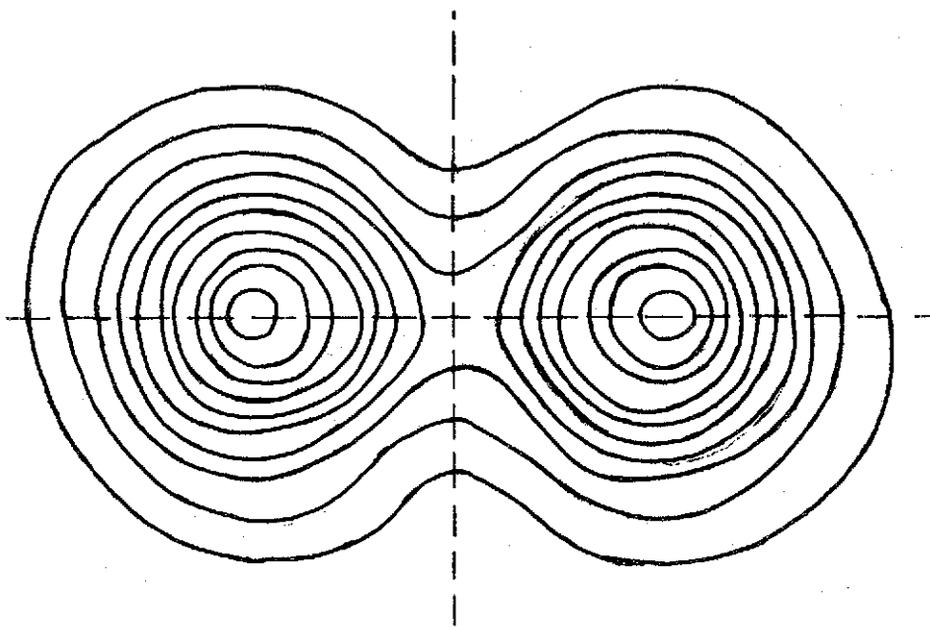
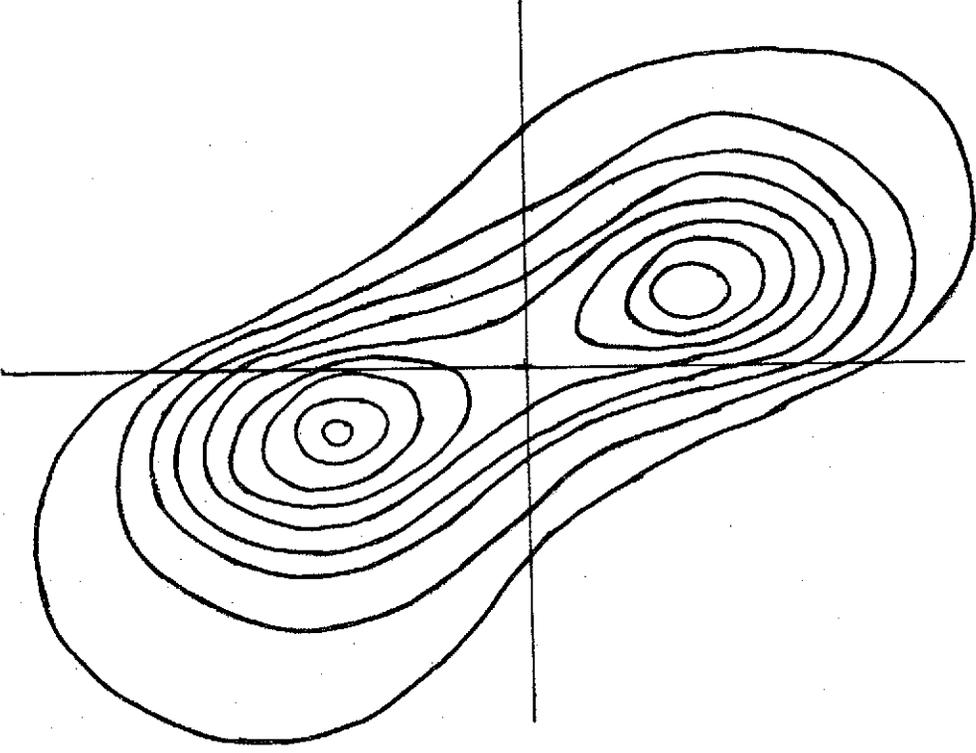


Fig. 5.6.-Campo inicial de altura para el modelo divergente



5.7.-Pronóstico a 12 horas del campo de altura con el modelo divergente.

BIBLIOGRAFIA

Adem, J., 1956: A series solution for the barotropic vorticity equation and its application in the study of atmospheric vortices. *Tellus*, 8, 364-372.

Adem, J., y Lezama, P., 1960: On the motion of a cyclone embedded in a uniform flow. *Tellus*, 12, 255-258.

Anthes, R., y Hoke, J., 1975: The effect of horizontal divergence and the latitudinal variation of the Coriolis parameter on the drift of a model hurricane. *Monthly Weather Review*, 103, 757-763.

Brand, S., 1970: Interaction of binary tropical cyclones of the western Pacific Ocean. *Journal of Applied Meteorology*, 9, 433-441.

Carnahan, B., Luther, H.A., James, O.W., 1969: *Applied numerical methods*, New York, John Wiley and Sons, Inc.

Fujiwhara, S. 1923: On the growth and decay of vortical systems. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 49, 75-104.

Haltiner, G.J., 1971: *Numerical weather prediction*, New York, John Wiley and Sons, Inc.

Haurwitz, B., 1951: The motion of binary tropical cyclones, *Arch Meteor. Geophys. Biokim*, B4, 73-86.

Hotton, J.R., 1972: *An introduction to dynamic meteorology*, New York, Academic Press Inc.

Milne, L., Thompson, C., 1955: *Theoretical hydrodynamics*, New York, The Macmillan Company.

Mesinger, F., y Arakawa, A., 1976: Numerical methods used in atmospheric models, Vol I, GARP publication series, No. 17, WMO-ICSU, Joint organizing committee, Genova, 64 pp.

Thompson, P.D., 1961: *numerical weather analysis and prediction*, New York, The Macmillan Company, Inc.

Pike, A.C., 1977: Merger of tropical cyclone remnants over the northeast Pacific., National Weather Service/National Environmental Satellite Service, Satellite application information, note 77/5.

Symon, K.R., 1963: Mechanics, Massachusetts, Addison Wesley Publishing Company, Inc.