

00363

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

2<sup>a</sup> ley.

EXPERIMENTOS NUMERICOS SOBRE DINAMICA  
ATMOSFERICA A CORTO PLAZO

**EJEMPLAR UNICO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS  
(GEOFISICA)

P R E S E N T A

LIC. TOMAS MORALES ACOLTZI

MEXICO, D.F. 2002

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A MIS PADRES: Gloria Acoltzi de Morales  
José Morales Pérez

Fieles guías en la trayectoria de mi vida

A MIS HERMANOS

Con mucho cariño

A TODOS MIS PARIENTES

Que de una u otra forma colabo  
raron en el logro de mi prepa-  
ración académica.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Al M. en C. Enrique J. Buendía Carrera.  
Jefe del Departamento de Climatología  
Física y Dinámica del Centro de Ciencias  
de la Atmósfera de la U.N.A.M.

A quien guardo una eterna deuda de gratitud,  
y a quien le atribuyo mi admiración y res-  
pe- to, no solo por su amable estímulo y a veces,  
por la franca crítica merecida, sino también  
por la visión y perspectiva que solamente un  
verdadero experto puede aportar.

Quiero expresar mi reconocimiento al Dr. Clifford H. Dey  
de la Atmospheric Analysis Branch Development Division,  
N. M. C., Washington D.C., por su estímulo y sus valiosas  
discusiones sobre ecuaciones primitivas.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

A LOS SEÑORES PROFESORES

Dr. Nicolás Grijalva Ortiz

M. en C. Sergio Serra Castelán

M. en C. Enrique J. Buendía Carrera

M. en C. Everardo Hernández Hernández

Dr. José Merino y Coronado

M. en C. Liborio Cruz López

M. en C. Gabriel Haro Aguilar

Por haber aceptado ser miembros del jurado.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

AL CUERPO DE CATEDRATICOS DE LA MAESTRIA EN CIENCIAS  
(GEOFISICA) DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA U.N.A.M.

Adem, J., Buendía, C.E., Cruz L. L. F.,  
Estrada, B. J., Leyva, A., Serra, C. S.,  
Tajonar, H.

Por haberme brindado la oportunidad de una superación  
Académica.

Finalmente, deseo agradecer a la Srita. E. Morales R. por el mecanografiado del manuscrito.

El Centro de Servicio de Cómputo de la U.N.A.M. dió las facilidades de cálculo para ejecutar los programas.

R. A. M. S. A. facilitó parte de información de su banco de datos.

Limitar los conocimientos científicos a un pequeño número de personas debilita el espíritu filosófico de un pueblo y conduce a su empobrecimiento espiritual.

EINSTEIN

... dividir cada una de las dificultades que examinase, en tantas partes como fuera posible y como se requiriese, para su mejor resolución.

DESCARTES: Discurso del método



## C O N T E N I D O

### INTRODUCCION.

- I El espectro de los procesos atmosféricos.
  - 1) Oscilaciones Micrometeorológicas.
  - 2) Oscilaciones Mesometeorológicas.
  - 3) Oscilaciones Sinópticas.
  - 4) Oscilaciones Globales.
  - 5) Oscilaciones Estacionales.
  - 6) Oscilaciones interanuales.
- II Ecuaciones fundamentales en coordenadas genera  
lizadas.
  - 1) Notación Vectorial.
  - 2) Notación Lagrangiana.
  - 3) Simplificaciones Métricas.
  - 4) Simplificaciones Potenciales.
  - 5) Simplificación Hidrostática.
- III Análisis de Escala.
  - 1) Ecuaciones de Movimiento.
  - 2) Ecuación de vorticidad.
  - 3) Ecuación de Divergencia.
- IV Modelaje del Flujo Atmosférico.
  - 1) Los modelos filtrados.
  - 2) Un modelo de ecuaciones primitivas.

V Selección del procedimiento matemático de integración.

- 1) Método discreto.
- 2) Método Espectral.
- 3) Método de elemento finito.

VI Discusión de los experimentos numéricos.

VII Conclusiones.

Apéndices.

A. Derivación de las ecuaciones Lagrangianas.

- 1) Ecuaciones de movimiento.
- 2) Ecuación de continuidad.

B. Algunos inconvenientes del método discreto.

- 1) Dispersión Computacional.
- 2) Análisis de la ecuación de advección bidimensional.
- 3) Análisis de la ecuación de advección no-lineal unidimensional.

C. Discusión del esquema de Arakawa.

D. Gráficas y figuras complementarias al trabajo.

E. Listado de los programas para el caso de modelos filtrados.

F. Un ejemplo de programa para el caso de un modelo de ecuaciones primitivas.

" ... mi propósito no es el de enseñar aquí el método que cada cual debe seguir para guiar acertadamente su razón, sino solamente el de mostrar de que manera he tratado de guiar la mía".

Discurso del método.

¡ No alcanzarás el país de las ideas !  
Me es conocida la orilla.  
Quien no cree en conquistar las islas  
puede echar el ancla.

Goethe.

## INTRODUCCION

La investigación científica, con los esfuerzos comunes, de varios países de latitudes medias, E. U., U.R.-S.S. por ejemplo, ha creado una estructura físico - matemática adecuada para el flujo atmosférico que predomina sobre dichas latitudes. Esta estructura no puede ser aplicada, en todo el espectro de espacio y tiempo, al flujo atmosférico de latitudes bajas, pues existen diferencias físicas entre ambos flujos; por ejemplo: contenido del vapor de agua, estructura tridimensional del campo de vientos, variación del parámetro de coriolis, número de ondas, el tiempo de vida de una "acción de bloqueamiento", el es más largo en latitudes altas que en latitudes bajas, etc.

Para realizar pronóstico numérico en México, país en el cual predomina un flujo atmosférico de latitudes bajas que "interacciona" con el flujo de latitudes medias (apéndice D), es necesario adaptar una dinámica atmosférica apropiada que permita el diseño de modelos físicos - matemáticos consistentes.

Para efectuar dicha adaptación, entre otras cosas,

se debe hacer un análisis de la teoría hidrodinámica para el pronóstico numérico a corto plazo de latitudes medias.

Considerando que la integración numérica de las ecuaciones atmosféricas como un problema de valor inicial es la base principal para la predicción de perturbaciones de escala sinóptica para períodos entre 12 horas y tal vez 3 y 4 días y, además, para algunas escalas más pequeñas y períodos mucho más largos, se tienen problemas en común pues las fuentes de error en tal predicción son una consecuencia de:

- a) "Huecos" y errores en los datos los cuales hacen el estado inicial.
- b) Limitaciones en los esquemas de análisis-inicialización los cuales son aplicados a los datos.
- c) Errores de truncación en los esquemas de integración numérica.
- d) Representación incompleta de los procesos físicos complicados al modelar en la atmósfera y,
- e) Limitaciones impuestas por la predictibilidad de la atmósfera.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

En este trabajo se presentan algunos experimentos numéricos de dicho análisis, en su primera etapa, con modelos "filtrados" de área limitada y se analiza un modelo de ecuaciones primitivas.

No se trata de diseñar de un solo golpe un sistema de la naturaleza atmosférica para latitudes bajas, sino de considerar problemas particulares e ir formulando hipótesis lógicas. Pues la función esencial de una hipótesis consiste en la guía que ofrece a las nuevas observaciones y experimentos numéricos, por medio de la cual nuestra conjetura es o confirmada, o refutada, o modificada, por medio de la cual - en pocas palabras - se ensancha nuestra experiencia, en particular los conceptos obtenidos por abstracción matemática.

La tesis se presenta a través de siete capítulos.

En el capítulo I, se analiza el espectro de espacio-tiempo de los fenómenos atmosféricos y se selecciona la escala espacial y temporal para este trabajo.

En el capítulo II, sin querer eliminar para siempre los problemas de fundamentación — pues los fundamentos últimos y el sentido último de las matemáticas permanecen como problema abierto, y como la verdadera legalidad de la naturaleza, de acuerdo con el principio de continui-

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

dad de Leibniz, encuentra su expresión en leyes de acción-próxima, que conectan sólo los valores de las cantidades físicas para puntos vecinos del espacio-tiempo, así las relaciones básicas de la geometría deban tratar solo con puntos adyacentes infinitamente cercanos — se analizan los principios fundamentales en coordenadas generalizadas.

En el capítulo III, se aplica un análisis de escala a las ecuaciones de movimiento, vorticidad y de divergencia.

En el capítulo IV, se presentan dos modelos filtrados de un sólo parámetro ( altura geopotencial) para la superficie isobárica de 500 mb. se comparan las propiedades de descripción espectral de ambos modelos. Además, para investigar la posibilidad de usar modelos no-filtrados se presenta un modelo de ecuaciones una atmósfera barotrópica.

En el capítulo V, se presentan 3 métodos numéricos de integración y se analizan someramente su procedimiento, méritos y desventajas de cada uno de ellos. Se se lecciona el método discreto para efectuar la integración.

En el capítulo VI, se presenta la discusión de los experimentos numéricos.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Finalmente en el capítulo VII, se plantean nuevos experimentos numéricos de acuerdo con los resultados.

Además, se anexan seis apéndices que complementan el contenido del trabajo y lo hacen más sencillo y accesible, pues este trabajo ha sido escrito con el anhelo de que lleguen los alumnos a encontrar utilidad en él.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## Espectro de los procesos atmosféricos.

Los campos de los elementos meteorológicos-la velocidad del movimiento del aire, temperatura, presión, humedad, etc.- fluctúan con el tiempo. Sus oscilaciones tienen componentes con períodos que comprenden desde una fracción de un segundo hasta cientos de años.

El espectro completo de esos períodos de oscilación puede ser dividido en seis intervalos principales.

- 1) Oscilaciones micrometeorológicas, con períodos comprendiendo desde una fracción de un segundo a un minuto. Le corresponde una escala horizontal de  $L \approx 600m$ . Los contribuidores principales son la turbulencia, ondas acústicas y ondas gravitacionales de corto período.
- 2) Oscilaciones mesometeorológicas, con períodos comprendiendo desde un minuto a una hora. Que corresponde a una escala espacial del orden de la profundidad efectiva de la atmósfera, 10km. Las tormentas y ondas gravitacionales con amplitudes grandes son ejemplos característicos de estas oscilaciones.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

3) Oscilaciones sinópticas, con períodos comprendidos de algunas horas a varios días.

Se determinarán las escalas del espacio y tiempo de estas oscilaciones.

Se realizará con más detalle, ya que es la escala de interés para este trabajo.

La masa, M, de la atmósfera es  $5.3 \times 10^{21}$  g. La energía cinética total, E, de su movimiento tiene una magnitud del orden de  $10^{21}$  Joules. La energía cinética por unidad de masa, E/M, es del orden de  $10^2 \text{ J kg}^{-1} = (10 \text{ m seg}^{-1})^2$ ; por lo tanto  $U = 10 \text{ m seg}^{-1}$  es considerada como la rapidez típica del movimiento del aire en procesos de escala sinóptica.

De acuerdo con OBUKHOV, la longitud de la escala típica para los procesos sinópticos es del orden de  $L = \frac{C}{f}$ , donde C es la rapidez del sonido y  $f = 2\omega \cos \theta$  es el parámetro de Coriolis ( $\omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$  es la velocidad angular de rotación de la tierra, y  $\theta$  es la latitud más  $\pi/2$ ); en latitudes medias  $L = 3 \times 10^3 \text{ km}$  con lo cual se obtiene un período de  $\tau \approx L/U \sim 3 \times 10^5 \text{ seg}$ , alrededor de ocho días.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

- 4) Oscilaciones Globales, con períodos comprendidos desde semanas a meses. Estas son de gran interés para los - problemas de predicción del tiempo a largo plazo.
- 5) Oscilaciones estacionales, son las oscilaciones con un período de un año y sus armónicos.
- 6) Oscilaciones interanuales, con períodos del orden de - varios años. El espectro de esas variaciones no está estudiado completamente. Pero puede considerarse las oscilaciones de 26 meses en la estratósfera ecuatorial, observadas por varios científicos, y también la hipó- tesis de que el ciclo de 11 años de la actividad solar que se manifiesta en la circulación general de la - atmósfera.

Puesto que el tiempo típico para la disipación de la energía cinética de los procesos sinópticos es de - una semana, la clasificación anterior puede dividirse en - procesos a corto plazo y largo plazo.

Así, en los pronósticos de corto-plazo compren- derán procesos con períodos menores a una semana y los - pronósticos a largo plazo comprenderán procesos con perío- dos mayores que una semana.

Entonces en la teoría del pronóstico a corto-pla zo se pueden ignorar fuentes y sumideros de energía; esto

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

4

es, se puede usar la aproximación adiabática. Obviamente en la teoría del pronóstico a largo-plazo se deben considerar los efectos no adiabáticos, es decir, las fuentes y sumideros de calor en la atmósfera así como la interacción Atmósfera-Océano.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Ecuaciones fundamentales en coordenadas generalizadas.

Introducción

Las bases físicas están en los principios de conservación de Momentum, masa, y energía, esos principios fundamentales estan expresados matemáticamente por las ecuaciones de movimiento de Newton para un medio continuo , la ecuación de continuidad (para la conservación de la masa), y la ecuación de energía termodinámica.

II.1 Notación vectorial

Se comenzará con las ecuaciones fundamentales en notación vectorial.

Las ecuaciones de movimiento referidas a un marco rotando con la superficie de la Tierra:

dU/dt + 2Ω x U - ∇(ΩR)^2 = -1/ρ ∇p - ∇Φ\*

el primer término es la aceleración relativa del viento, - el segundo término la aceleración de Coriolis, con Ω = vector de la velocidad angular de la Tierra, el tercer término la aceleración debida a la fuerza centrífuga, con R = distancia desde el eje de rotación de la Tierra al punto de referencia, el cuarto término es la fuerza debida a las



6

variaciones espaciales de la presión atmosférica y  $\phi^*$  representa el potencial de atracción terrestre.  $\nabla$  es el operador tridimensional (gradiente).

Ecuación de continuidad

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (\text{II-2})$$

La ecuación adiabática

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \left( \frac{p_0}{p} \right)^k \quad (\text{II-3})$$

La ecuación de estado

$$P = \rho R T \quad (\text{II-4})$$

En estas relaciones se ha despreciado toda clase de fuentes de calor y fuentes de momentum debidas a fuerzas de fricción externas e/o internas.

Para dar solución a las ecuaciones fundamentales (II-1), (II-2) y (II-3) numéricamente:

- a) Es necesario pasar de la forma vectorial a la forma escalar, ya que en vista de la capacidad actual de las computadoras, para excluir al menos la propagación vertical de las ondas de sonido al usar la ecuación hidrostática en vez de la componente vertical de las ecuaciones

de movimiento, hecho que será analizado más adelante.

- b) Es deseable simplificar las métricas y transformar las ecuaciones en un sistema de coordenadas cartesianas especialmente limitado en el cual la orografía terrestre coincide con un nivel de coordenada vertical constante generalizada, así como para asegurar una estructura simple de malla y un espaciamiento equidistante conveniente de un número limitado de puntos de la reja.

Para satisfacer estas condiciones se hará por medio del uso de una notación Lagrangiana completamente equivalente a la notación vectorial, además de tener ciertas ventajas sobre la notación vectorial, como se hará notar en el momento adecuado.

### II.2 Notación Lagrangiana

La derivación de las ecuaciones Lagrangianas está en el apéndice A.

Con referencia a un caso especial, con coordenadas espaciales

$$r_n = r_1, r_2, r_3$$



y con velocidades generalizadas

$$\frac{d\dot{q}_k}{dt} = \ddot{q}_k = \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3$$

Entonces las ecuaciones fundamentales dadas por

(II-1), (II-2) y (II-3) pueden ser escritas:

Ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (K - \Phi^*) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (K - \Phi^*) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial q_k} ; k=1,2,3 \quad (\text{II-5})$$

Ecuación de continuidad

$$\frac{1}{\rho D} \frac{d}{dt} (\rho D) + \frac{\partial}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0 \quad (\text{II-6})$$

Ecuación adiabática

$$\frac{d}{dt} \Theta = 0 \quad (\text{II-7})$$

con

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \quad (\text{II-8})$$

$$K = \frac{1}{2} V^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \quad (\text{II-9})$$

es la energía cinética expresada en términos de  $\dot{q}_k$ ,  $\dot{q}_k$  ;

$$D^2 = \left| \frac{\partial q_i X_i}{\partial \dot{q}_k} \right| = \left| \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_i K \right| \quad (\text{II-10})$$

En las expresiones anteriores debe considerarse:

- 1.- Por convención tensorial se debe sumar sobre términos que incluyan el mismo índice doble de 1 a 3, es decir

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial \dot{q}_3}{\partial \dot{q}_3}$$



- 2.-  $\dot{q}_k$  y  $q_k$  son considerados como variables independientes.
- 3.-  $\Phi^*$  el potencial de atracción depende solamente de las coordenadas espaciales  $q_k$  pero no de las  $\dot{q}_k$ . Por lo tanto se puede reemplazar en la ecuación

(II-5)

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (K - \Phi^*) \right] \quad \text{por} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} K \right)$$

- 4.- Para especificar las ecuaciones escalares fundamentales en algún sistema de coordenadas, se necesita solamente especificar la forma métrica  $(ds)^2$  en términos de  $dq_k$  y/o la energía cinética K en términos de  $q_k, \dot{q}_k$ .
- 5.- Con referencia a el marco relativo de la tierra rotando, en la ecuación (II-9) las velocidades  $\dot{q}_k$  deben ser expresadas en el marco relativo y en movimiento.
- 6.- Para convertir de un sistema coordinado a otro, se necesita solamente transformar la energía cinética K, en vez de el conjunto completo de ecuaciones.

Las ecuaciones (II-5) y (II-6) serán referidas a las coordenadas esféricas:

$$q_k = \psi, \varphi, r \quad \text{y} \quad \dot{q}_k = \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{r}$$

a) Formas métricas

La métrica del sistema de coordenadas considerado está definida por la forma del elemento de trayectoria  $ds$ , en coordenadas esféricas

$$(ds)^2 = (r \cos \varphi d\psi)^2 + (r d\varphi)^2 + (dr)^2 \quad (II-11)$$

De (II-11) se deriva

- 1) La energía cinética, referida al movimiento absoluto  $\dot{\psi}_a, \dot{\varphi}, \dot{r}$

$$K = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[ (r \cos \varphi \dot{\psi}_a)^2 + (r \dot{\varphi})^2 + (\dot{r})^2 \right] \quad (\text{II-12})$$

donde  $\dot{\psi}_a$  es la velocidad angular absoluta.

- 2) La energía cinética, referida al movimiento relativo  $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{r}$

$$K = \frac{1}{2} \left[ r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\psi} + \Omega)^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\Omega) + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \right] + \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \varphi \Omega^2 \quad (\text{II-13})$$

con  $\dot{\psi}_a = \dot{\psi} + \Omega$ ,  $\dot{\psi}$  es la velocidad angular relativa.

- 3) La función de Lagrange

$$K - \Phi^* = \frac{1}{2} \left[ r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\psi}^2 + 2\Omega\dot{\psi}) + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \right] - \Phi \quad (\text{II-14})$$

con

$$\Phi = \Phi^* - \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \varphi \Omega^2 \quad (\text{II-15})$$

como geopotencial o potencial gravitacional aparente = suma del potencial de atracción y el potencial centrífugo.

4) La forma D,

$$D^2 = \left| \begin{array}{ccc} \partial_{\dot{\psi}}^2 K & 0 & 0 \\ \partial_{\dot{\varphi}}^2 K & 0 & 0 \\ \partial_r^2 K & 0 & 0 \end{array} \right| = r^2 \cos^2 \varphi$$

$$\circ \quad D = r^2 \cos \varphi \quad (\text{II-16})$$

y notando, que la derivada total con respecto al tiempo está definida por

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + \dot{\psi} \partial_{\psi} + \dot{\varphi} \partial_{\varphi} + \dot{r} \partial_r \quad (\text{II-17})$$

b) Ecuaciones fundamentales

Sustituyendo la función Lagrangiana  $K - \Phi^*$  (II-14) en la ecuación general Lagrangiana (II-5) y considerando -  $\frac{q}{k} = \psi, \varphi, r$  las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas resultan

$$\frac{d}{dt} [r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\psi} + \Omega)] = -\frac{1}{r} \partial_{\psi} \Phi - \partial_{\psi} \Phi \quad (\text{II-18})$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) + \sin \varphi \cos \varphi r^2 (\dot{\psi}^2 + 2\Omega \dot{\psi}) = -\frac{1}{r} \partial_{\varphi} \Phi - \partial_{\varphi} \Phi \quad (\text{II-19})$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{r}) - r \cos^2 \varphi (\dot{\varphi}^2 + 2\Omega \dot{\psi}) - r \dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{r} \partial_r \Phi - \partial_r \Phi \quad (\text{II-20})$$

Sustituyendo D, de (II-16), en la ecuación general Lagrangiana (II-6) se obtiene la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{d}{dt} (r^2 \cos \varphi) + \partial_{\psi} \dot{\psi} + \partial_{\varphi} \dot{\varphi} + \partial_r \dot{r} = 0 \quad (\text{II-21})$$

## Simplificaciones meteorológicas

En esta parte se efectuarán algunas modificaciones a las ecuaciones fundamentales, usualmente aplicadas para - simplificar y facilitar los procedimientos numéricos pero - no afectan sustancialmente el fenómeno meteorológico de sus soluciones.

### i) Simplificaciones métricas

Para simplificar las ecuaciones y resolviendo los procedimientos numéricos, algunos de los términos encontrados en las ecuaciones fundamentales, referidas en coordenadas esféricas, son usualmente despreciados.

Para ser consistentes métricamente se justificará esta aproximación por una modificación simple en la métrica y, por lo tanto, es preferible derivar las consecuencias - con el uso de la forma Lagrangiana de las ecuaciones fundamentales.

El espesor de la atmósfera de interés meteorológico es pequeño comparado con el radio de la Tierra. Esto justifica la hipótesis, que en la forma métrica  $\sigma^2 r^2$  el - radio puede ser considerado constante, cuando no es diferenciado. Esta hipótesis define una nueva métrica consistente, donde el régimen atmosférico en los niveles de coordenada vertical  $\gamma$  constante tiene la misma curvatura -

independiente de la coordenada variable  $r$ .

$$r = a \quad dr = dr \quad (II-22)$$

Como una consecuencia de (II-22) se obtiene, en vez de las relaciones (II-11) a (II-15)

Elemento de trayectoria

$$(dr)^2 = (a \cos \varphi d\psi)^2 + (a d\varphi)^2 + (dr)^2 \quad (II-23)$$

Energía cinética

$$K = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2, \text{ referida a el marco relativo}$$

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \left[ a^2 \cos^2 \varphi (\dot{\psi} + \Omega)^2 + a^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ a^2 \cos^2 \varphi (\dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\Omega) + a^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \right] + \frac{1}{2} a^2 \cos^2 \varphi \Omega^2 \quad (II-24)
 \end{aligned}$$

Función de Lagrange

$$K - \Phi^* = \frac{1}{2} \left[ a^2 \cos^2 \varphi (\dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\Omega) + a^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \right] - \Phi \quad (II-25)$$

con

$$\Phi = \Phi^* - \frac{1}{2} a^2 \cos^2 \varphi \Omega^2 \quad \text{como geopotencial o potencial gravitacional aparente.}$$

La forma D

$$D^2 = \left| \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_k} \right| = a^4 \cos^2 \varphi, \quad D = a^2 \cos \varphi \quad (II-26)$$

Sustituyendo la función Lagrangiana (II-25) en la ecuación Lagrangiana de movimiento (II-5) y considerando

$$q_k = \psi, \varphi, r \quad \dot{q}_k = \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{r}$$

se obtienen las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas observando, sin embargo, la métrica simplificada

$$\frac{d}{dt} [a^2 \cos^2 \varphi (\dot{\psi} + \Omega)] = -\frac{1}{\rho} \partial_{\psi} \Phi - \partial_{\psi} \bar{\Phi} \quad (\text{II-27})$$

$$\frac{d}{dt} [a^2 \dot{\psi}] + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi a^2 (\dot{\psi}^2 + 2\Omega \dot{\psi}) = -\frac{1}{\rho} \partial_{\psi} \Phi - \partial_{\psi} \bar{\Phi} \quad (\text{II-28})$$

$$\frac{d}{dt} [\dot{r}] = -\frac{1}{\rho} \partial_r \Phi - \partial_r \bar{\Phi} \quad (\text{II-29})$$

con

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + \dot{\psi} \partial_{\psi} + \dot{\varphi} \partial_{\varphi} + \dot{r} \partial_r \quad (\text{II-30})$$

y componentes del viento

$$u = a \cos \varphi \dot{\psi}, \quad v = a \dot{\varphi}, \quad w = \dot{r} \quad (\text{II-31})$$

se transforman las ecuaciones en

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv}{a} \tan \varphi - f v = -\frac{1}{\rho a \cos \varphi} \partial_{\psi} \Phi - \frac{1}{a \cos \varphi} \partial_{\psi} \bar{\Phi} \quad (\text{II-32})$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{a} \tan \varphi + f u = -\frac{1}{\rho a} \partial_{\varphi} \Phi - \frac{1}{a} \partial_{\varphi} \bar{\Phi} \quad (\text{II-33})$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \partial_r \Phi - \partial_r \bar{\Phi} \quad (\text{II-34})$$

Sustituyendo la forma D, (II-26), en la ecuación Lagrangiana de continuidad (II-6) se obtiene la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas simplificadas métricamente

$$\frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{d}{dt} (\rho \cos \varphi) + \partial_{\psi} \dot{\psi} + \partial_{\varphi} \dot{\varphi} + \partial_r \dot{r} = 0$$

la cual con (II-30) y (II-31) puede ser transformada en

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \partial_\nu \mu + \partial_\varphi [V \cos \varphi] \right\} + \partial_r W = 0 \quad (II-35)$$

En las ecuaciones (II-32) a (II-35) se observa, - que debido al uso de una métrica simplificada (II-23) los - términos usualmente despreciados son automáticamente omitidos, y que  $\gamma$  ha sido reemplazado por el radio constante  $a$ , cuando no es diferenciado.

ii) Simplificaciones potenciales

Para aplicaciones atmosféricas, el sistema de coordenadas más adecuado debe ser un sistema ortogonal, - donde la coordenada "Vertical" sigue las líneas de fuerza de la resultante de las fuerzas de atracción y centrífuga. En este sistema

- a) Las superficies de coordenadas verticales cons - tantes coincidirán con superficies de poten-- cial gravitacional aparente constante  $\Phi$  o con la superficie libre de la tierra, consistiendo, por ejemplo de agua, encontradas cuando sola-- mente las fuerzas de atracción y centrífuga - están presentes.

- b) El geopotencial  $\Phi$  no dependerá de las coordenadas "horizontales".

Ya que el geoide, es decir la superficie de  $\Phi$  constante, puede ser aproximado por una esfera, y para simplificar además las ecuaciones, se supondrá que el geopotencial  $\Phi$  depende solamente de la coordenada vertical, y no transformará las ecuaciones a coordenadas elípticas o geoidales, sino que retendrá el sistema esférico

$$\partial_{\psi} \Phi = \partial_{\phi} \Phi = 0 \quad \text{o} \quad \partial_s \Phi = 0 \quad (\text{II-36})$$

con  $\partial_s$  representando algún incremento horizontal.

Además, se considerará la extensión vertical de la capa atmosférica tal que sea suficientemente pequeña para justificar la hipótesis,  $\Phi$  sea una función lineal de la coordenada vertical en el área de interés meteorológico:

$$\partial_r \Phi = g \quad (\text{II-37})$$

donde  $g$  = aceleración aparente de la gravedad.

### iii) Simplificación hidrostática

Para evitar pasos de tiempo, no económicos para procedimientos de solución numérica, se eliminarán las ondas de sonido propagándose verticalmente suponiendo un equilibrio hidrostático para todos los tiempos

$$0 = -\frac{1}{\rho} \partial_r \rho - \partial_r \Phi \quad (\text{II-38})$$



o considerando (II-37)

$$0 = -\frac{1}{\rho} \partial_r \phi - g$$

Esta ecuación hidrostática reemplaza la componente vertical de las ecuaciones de movimiento (II-34) y resulta - por despreciar  $\frac{dw}{dt}$  comparado con uno de los términos de (II-38).

Considerando todas las simplificaciones hechas se reescribirá el conjunto completo de ecuaciones resultando

Las ecuaciones de movimiento, resultantes de (II-32), (II-33) y (II-34) con (II-36), (II-37) y (II-38), componentes horizontales

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv}{a} \tan \varphi - f_v = -\frac{1}{\rho a \cos \varphi} \partial_v \phi \quad (\text{II-39})$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{a} \tan \varphi + f_u = -\frac{1}{\rho a} \partial_\varphi \phi \quad (\text{II-40})$$

Componente vertical, la ecuación hidrostática

$$0 = -\frac{1}{\rho} \partial_r \phi - g \quad (\text{II-41})$$

La ecuación de continuidad (II-35)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{a \cos \varphi} [\partial_v u + \partial_\varphi (v \cos \varphi)] + \partial_r w = 0 \quad (\text{II-42})$$

La ecuación adiabática

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (\text{II-43})$$

La ecuación de estado

$$\dot{\phi} = pRT \quad (\text{II-44})$$

que permanece inalterable por las simplificaciones realizadas.

Con

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \partial_t + \dot{\psi} \partial_\psi + \dot{\phi} \partial_\phi + \dot{r} \partial_r \\ &= \partial_t + \frac{u}{a \cos \psi} \partial_\psi + \frac{v}{a} \partial_\phi + W \partial_r \end{aligned} \quad (\text{II-45})$$

$$u = a \cos \psi \dot{\psi}, \quad v = a \dot{\phi}, \quad W = \dot{r} \quad (\text{II-46})$$

Análisis de escala

Un análisis de escala provee un método sistemático de comparar las magnitudes de los diferentes términos contenidos en las ecuaciones hidrodinámicas que gobiernan los movimientos atmosféricos. Esta teoría, junto con las consideraciones energéticas, permite el diseño de modelos físico-matemáticos consistentes, para el análisis dinámico y predicción numérica del tiempo.

- 1) Ecuaciones de movimiento: Para comparar las magnitudes de los términos en las ecuaciones (II-39) y (II-40), - primero se notará que el desarrollo de las derivadas - totales de  $u$  y  $v$  como sumas de sus variaciones parciales dan origen a términos cuyas dimensiones y magnitudes son de  $2 v^2/L$ , donde  $v$  es una rapidez característica del viento horizontal y  $L$  es la distancia característica entre un máximo y un mínimo del campo de velocidad. Tales términos serán comparados con  $uv \tan \phi/a$  y  $u^2 \tan \phi/a$ , cuyas magnitudes son de  $v^2/a$ . - Así, puesto que la mitad de la longitud de onda característica de las perturbaciones del tiempo a gran escala es del orden de  $10^3$  Km, y el radio de la Tierra es del orden de  $6 \times 10^3$  Km, términos de magnitud de  $2v^2/L$

son un orden de magnitud más grande que aquellos cuya magnitud es  $\sqrt{v^2/a}$ . Términos del orden de  $2\sqrt{v^2/L}$  serán comparados también con  $uW/a$  y  $vW/a$ , cuyas magnitudes son de  $vW/a$ , donde  $W$  es una rapidez vertical característica. Ahora, la rapidez característica del viento horizontal está en el rango de  $10^3$  a  $10^4$  cm/seg, mientras la magnitud característica de la rapidez vertical asociada con las perturbaciones de gran escala está en el rango de 1 a 10 cm/seg. Así, términos del tamaño de  $2\sqrt{v^2/L}$  son aproximadamente cuatro órdenes de magnitud más grandes que aquellos cuyo tamaño es  $vW/a$ . Con buena aproximación, por lo tanto, se puede omitir de las ecuaciones (II-39) y (II-40) aquellos términos que contienen productos de componentes de velocidad, así que esas ecuaciones toman la forma

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho a \cos \phi} \partial_{\phi} \phi \quad (\text{III-1})$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho a} \partial_{\phi} \phi \quad (\text{III-2})$$

considerando la componente vertical

$$\frac{1}{\rho} \partial_{\phi} \phi = -g \quad (\text{III-3})$$

Esta es la forma aproximada de las ecuaciones de movimiento que es generalmente empleada en el análisis de problemas meteorológicos.

Considerando que las variaciones en las direcciones de los ejes coordenados son despreciables, entonces es posible combinar las ecuaciones (III-1) y (III-2) en una ecuación vectorial de movimiento horizontal

$$\frac{dV}{dt} + \hat{k} \times fV + \frac{1}{r} \nabla p = 0 \tag{III-4}$$

donde  $V$  es la proyección del vector velocidad sobre una superficie "horizontal",  $\hat{k}$  es un vector unitario dirigido verticalmente hacia arriba y  $\nabla$  es el operador gradiente horizontal en coordenadas esféricas.

Ahora se estimarán las magnitudes del primer y segundo términos de la ecuación (III-4). Ellos son del orden de  $2V^2/L$  y  $\Omega V$ , respectivamente. Si  $V$  es tomado como  $10^3$  cm/seg, el primero de ellos es del orden de  $10^{-2}$  cm  $\text{seg}^{-2}$ , mientras el último es del orden de  $10^{-1}$  cm  $\text{seg}^{-2}$ . Sin embargo tales estimaciones crudas ciertamente no muestran que la aceleración horizontal del aire sea despreciable, ellas muestran que hay una "tendencia" para que exista un balance entre las fuerzas de coriolis y la del gradiente de presión horizontal. Aproximadamente, entonces

$$V = \hat{k} \times \frac{1}{f} \nabla p \tag{III-5}$$

Esta relación se conoce como viento geostrófico. Que muestra que el viento tiende a soplar paralelo a las



isobaras en superficies de altura constante, y que su rapidez es aproximadamente proporcional al gradiente horizontal de presión.

- 2) Ecuaciones de vorticidad y divergencia. Para propósitos de análisis dinámico y predicción numérica del tiempo resulta ventajoso reemplazar la ecuación vectorial de movimiento horizontal (III-4) por dos ecuaciones escalares, las ecuaciones de vorticidad y de divergencia.

Para obtener la primera, se aplica el operador  $\hat{k} \cdot \nabla_p \times$  a la ecuación (III-4) modificada ligeramente, suponiendo que la presión es determinada hidrostáticamente y -- considerando la fuerza de fricción, es decir

$$\frac{dV}{dt} = -\nabla_p \Phi - f \times V + \frac{R}{p} \quad (\text{III-6})$$

se obtiene

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + V \cdot \nabla_p (\zeta + f) + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} = -(\zeta + f) \nabla_p \cdot V + \hat{k} \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial p} \times \nabla_p \omega \right) + \hat{k} \cdot \nabla_p \times \frac{R}{p} \quad (\text{III-7})$$

La ecuación de divergencia se obtiene aplicando el operador  $\nabla_p \cdot$  a la ecuación (III-6), resultando

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot [(V \cdot \nabla) V] + \nabla \omega \cdot \frac{\partial V}{\partial p} + \omega \frac{\partial S}{\partial p} = -\nabla^2 \Phi - \nabla \cdot (f \times V) + \nabla \cdot \frac{R}{p} \quad (\text{III-8})$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

donde  $\delta = \nabla \cdot \mathbf{V}$ .

Se analizará la ecuación de vorticidad.

Un teorema de Helmholtz permite la partición del viento en una parte rotacional y otra divergente, esto es,

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi \quad \cdot \exists \cdot \quad \mathbf{V}_\psi = \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \psi \quad \mathbf{V}_\chi = \nabla \chi \quad (\text{III-9})$$

donde  $\psi$  representa la función corriente para la componente de la velocidad rotacional y  $\chi$  es la función velocidad potencial para la componente divergente.

Entonces la ecuación de continuidad se puede escribir como

$$\delta = \nabla \cdot \mathbf{V}_\chi = - \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (\text{III-10})$$

Con lo cual la ecuación de vorticidad se transforma en

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi) \cdot \nabla \xi + \beta (\mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi) + \omega \frac{\partial \xi}{\partial p} + (\xi + f) \delta + \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \omega \times \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi) = 0 \quad (\text{III-11})$$

$$\frac{V^2}{L^2} + \frac{V^2}{L^2} \left( 1 + \frac{1}{R_i R_1} \right) + (2 \sin \theta) \frac{V}{a} \left( 1 + \frac{1}{R_i R_1} \right) + \frac{V^2}{R_i R_1 L^2} + \quad (\text{III-12})$$

$$\left( \frac{V}{L} + 10^{-4} \right) \frac{1}{R_i R_1} \frac{V}{L} + \frac{1}{R_i R_1} \frac{V^2}{L^2} \left( 1 + \frac{1}{R_i R_1} \right) = 0 \quad \cdot \exists \cdot \quad \begin{array}{l} R_i = \text{número especial} \\ \text{de Richardson} \\ R_1 = \text{número de Rossby} \end{array}$$

Donde se ha considerado que la divergencia del viento geostrófico tradicional

$$\nabla \cdot \left( \hat{\mathbf{k}}^{-1} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \phi \right) = -\beta \psi f^{-1} \quad (\text{III-13})$$

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

tiene la misma magnitud que la divergencia actual, pero - debe ser de signo opuesto.

Aquí el orden de magnitud de los términos involucrando  $\omega$  han sido tomados considerando  $f \sim 10^{-4} \text{ seg}^{-1} \sim 2 \Omega \cos \theta$ ,  $\frac{v}{L} \sim 10^{-5}$  y  $(R_i R_1)^{-1} \sim 10^{-1}$  para movimientos de gran escala.

Prosiguiendo con el método que se le aplicó a la ecuación (III-42), es evidente que el término  $\hat{k} \cdot \nabla \omega \times \frac{\partial v_x}{\partial p}$  es el menos importante. Como una segunda aproximación, términos del orden  $v^2/L^2 R_i R_1$  pueden ser omitidos. Una tercera aproximación será que la advección del parámetro de Coriolis con el viento divergente, puede ser omitido puesto que es más pequeño que el término de divergencia, al menos para longitudes de onda típicas de la escala sinóptica, se obtiene

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v_y \cdot \nabla (\xi + f) + f \nabla \cdot v_x = 0 \quad (\text{III-14})$$

Sin embargo para mantener la constricción integral sobre la vorticidad global, un valor medio de  $\xi$  debe ser usado en el término de la divergencia, además, reemplazando  $\nabla \cdot v_x$  por  $-\frac{\partial \omega}{\partial p}$  de la ecuación de continuidad (III-10) se obtiene la forma casi-geostrófica

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v_y \cdot \nabla (\xi + \bar{f}) = \bar{f} \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (\text{III-15})$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Como una aproximación final el término de la divergencia es omitido, reduciéndose (III-15) a la ecuación de vorticidad barotrópica

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla_{\psi} \cdot \nabla(\zeta + f) = 0 \tag{III-16}$$

Un análisis similar para la ecuación de divergencia (III-8), muestra que

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla \delta + \omega \frac{\partial \delta}{\partial p} + \delta^2 + \nabla \omega \cdot \frac{\partial \nabla}{\partial p} - f \zeta + \beta u - 2J(u, v) + \nabla^2 \phi = 0 \tag{III-17}$$

$$\frac{1}{R_1 R_1} \frac{V^2}{L^2} + \frac{1}{R_1 R_1} \frac{V^2}{L^2} + \frac{1}{(R_1 R_1)^2} \frac{V^2}{L^2} + \frac{1}{(R_1 R_1)^2} \frac{V^2}{L^2} + \frac{1}{R_1 R_1} \frac{V^2}{L^2} + 10^{-4} \frac{V}{L} + 10^{-4} \frac{V}{a} + \frac{V^2}{L^2} + \frac{1}{R_1} \frac{V^2}{L^2} = 0 \tag{III-18}$$

Los términos predominantes son  $f \zeta$  y  $\nabla^2 \phi$  seguidos por  $\beta u$  y  $J(u, v)$ . Notando que la posición divergente del viento es un orden de magnitud menor que la parte rotacional, entonces se debe considerar la componente rotacional del viento,  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \psi$ , en los dos últimos términos, con lo que se obtiene

$$\nabla^2 \phi - f \nabla^2 \psi - \nabla \psi \cdot \nabla f + 2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{III-19}$$

El uso de esta aproximación implica un balance con

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

tínuo entre la componente rotacional del viento y el campo geopotencial.

Omitiendo los dos últimos términos no lineales de (III-19) se obtiene la llamada ecuación de balance lineal

$$\nabla \cdot (\bar{f} \nabla \psi) - \nabla^2 \bar{\phi} = 0 \quad (\text{III-20})$$

Finalmente un valor constante del parámetro de Coriolis en (III-20) da la aproximación casi-geostrófica

$$\bar{f} \nabla^2 \psi - \nabla^2 \bar{\phi} = 0 \quad (\text{III-21})$$

la cual forma una pareja consistente con la ecuación de vorticidad geostrófica (III-15).

## Modelaje del flujo atmosférico

Los modelos, filtrados y de ecuaciones primitivas, que se desarrollarán en este capítulo se obtendrán para una atmósfera barotrópica.

## 1) Modelos filtrados.

En una atmósfera barotrópica la densidad es una función solo de la presión; por lo tanto las superficies de densidad temperatura, y presión todas coinciden. Además, con barotropía, todas las superficies de presión son paralelas; entonces solamente un nivel necesita ser pronosticado. En la práctica la ecuación de vorticidad barotrópica ha sido aplicada al nivel de 500 mb.

## a) Modelo barotrópico equivalente.

Para derivar la ecuación de predicción, se considerará la forma aproximada de la ecuación de vorticidad

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\zeta + f) = \bar{f} \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (\text{IV-1})$$

donde  $\mathbf{v}$  y  $\zeta$  son evaluados geostroficamente o con una función de corriente.

Se supondrá que la dirección del viento es constante en la vertical; sin embargo, la rapidez podrá cambiar. -

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Con lo cual el viento podrá expresarse en la forma

$$\bar{V} = A(p) \bar{V} \quad (\text{IV-2})$$

donde A es una función empírica de la presión y la barra - sobre la velocidad representa la integral media con respecto a la presión, esto es

$$\bar{(\quad)} = \frac{1}{p_0} \int_{p_0}^{p_1} (\quad) dp' \quad (\text{IV-3})$$

Si el operador barra es aplicado a (IV-2), el resultado es  $\bar{\bar{V}} = \bar{A} \bar{V}$ . De lo cual se deduce que  $\bar{A} = 1$ . Datos climatológicos indican que en promedio, en latitudes medias, A es menor que 1 desde la superficie hasta cerca del nivel de 600 mb; A es aproximadamente 1 en 600 mb, y entonces continúa incrementándose con la altura en la tropósfera.

De (IV-2) es evidente que la vorticidad es

$$\zeta = A(p) \bar{\zeta} \quad (\text{IV-4})$$

La sustitución de (IV-2) y (IV-4) en (IV-1) y aplicando el operador barra (IV-3) se obtiene

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \bar{A}^2 \bar{V} \cdot \nabla \bar{\zeta} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{f} = \bar{f} \frac{\omega_0}{p_0} \quad (\text{IV-5})$$

donde  $\omega_0$  representa la "velocidad vertical" en la frontera más baja  $p_0$ . En la frontera superior ( $p=0$ )  $\omega$  es igual a cero.

Desarrollando  $W = g^{-1} \frac{d\Phi}{dt}$  en términos de derivadas parciales, se encuentra

$$gW = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v \cdot \nabla \Phi + \omega \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

Ahora sustituyendo la relación hidrostática y despejando  $\omega$

$$\omega = p \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v \cdot \nabla \Phi - gW \right] \quad (IV-6)$$

Si la frontera inferior es nivel, la condición de frontera cinemática requiere que  $W_0 = 0$ . Además, si la aproximación geostrófica es usada, se sigue  $g' v_g \cdot \nabla \Phi = 0$ . Con esas dos condiciones el valor de  $\omega$  en la frontera inferior se reduce a

$$\omega_0 = p_0 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{p=p_0} = p_0 \lambda(p_0) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (IV-7)$$

La última relación se encuentra directamente de (IV-2) y la aproximación del viento geostrófico.

La forma de (IV-5) puede ser simplificada definiendo

$$v^* = \bar{A}^2 \bar{v} \quad \text{y} \quad \phi^* = \bar{A}^2 \bar{\phi} \quad (IV-8)$$

Multiplicando (IV-5) por  $\bar{A}^2$  y utilizando (IV-7) y (IV-8) conduce a

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t} + v^* \cdot \nabla (\phi^* + f) = M' \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \quad (IV-9)$$

donde

$$M' = \frac{\bar{p} p_0 \lambda_0}{\bar{p}_0} = \frac{\bar{p} \lambda_0}{RT}$$

Nótese que (IV-9) tiene una variable dependiente o incógnita,  $\Phi^*$ , ya que  $V^*$  y  $\xi^*$  están geostroficamente relacionadas a  $\Phi^*$ .

El término  $M' \frac{\partial \Phi^*}{\partial t}$  en (IV-9) representa el efecto de divergencia de velocidad sobre la generación de vortici-  
 dad. Un término de este tipo puede aparecer por otras con-  
 sideraciones, por ejemplo, por la simulación de la presencia  
 de la estratósfera. Puesto que se han hecho varias simplifi-  
 caciones al obtener las ecuaciones de predicción, valores -  
 óptimos de los coeficientes, tales como  $M'$ , son determina-  
 dos normalmente con la verificación estadística de los pro-  
 nósticos con datos observados.

Para realizar un análisis de la ecuación (IV-9) se  
 considerará la versión linealizada basada en una corriente  
 zonal constante  $U$  y perturbaciones las cuales son indepen-  
 dientes de la latitud, se obtiene (eliminando\* por convenien-  
 cia)

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} + U \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v - M' \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{IV-10})$$

Suponiendo que  $v$  sea geostrofica y armónica en

$x$  y  $t$  se tiene que

$$\Phi = \Phi_0 e^{ik(x-ct)}, \quad v = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Sustituyendo en (IV-10) produce

$$ik^3 \Phi_0 - U i k^3 \Phi_0 + i k \beta \Phi_0 + f M' i k c \Phi_0 = 0$$

.  $\therefore k = \frac{2\pi}{L}$

$$c = \frac{U - \beta L^2 / 4\pi^2}{1 + M' \frac{\beta}{f} L^2 / 4\pi^2} \quad (\text{IV-11})$$

Que es la velocidad de fase de las ondas armónicas.

b) Modelo Barotrópico

Cuando  $M' = 0$  se obtiene

$$c = U - \beta L^2 / 4\pi^2 \quad (\text{IV-12})$$

Que comprende a la ecuación del modelo barotrópico.

Cuando  $L$  es muy grande, (IV-12) toma valores negativos para la velocidad de fase.

Lo cual significa una retrogresión rápida de las ondas planetarias de números 1, 2 y 3.

Mientras que verificando mapas de datos actuales muestran que ellas son casi-estacionarias.

Así la inclusión de la divergencia de la velocidad de la forma particular  $M' \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  en (IV-9) conduce a un mejor control de las ondas ultra-largas o planetarias, como se aprecia en la ecuación (IV-11), es decir reduce la rapidez de ondas sinusoidales, especialmente ondas largas, sin haber aumentado el número de incógnitas.

El último punto puede ser hecho más evidente utilizando la aproximación geostrófica simplificada en (IV-9) como sigue

$$V_g = \frac{g}{f} \hat{k} \times \nabla z \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{g}{f} \nabla^2 z \quad (\text{IV-13})$$

así

$$(\nabla^2 - M) \frac{\partial z}{\partial t} + J[z, (\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z + f)] = 0 \quad (\text{IV-14})$$

donde

$$M = f^2 \frac{A_0}{RT}, \quad \Phi \equiv \int z \quad (\text{IV-15})$$

o en forma de diferencias finitas

$$\left( \frac{m_{ij}^2}{d^2} \nabla^2 - M \right) \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{ij} = - \frac{m_{ij}^2}{4d^2} \mathbb{I}(z_{ij}, \eta_{ij}) \quad (\text{IV-16})$$

La preparación de pronósticos numéricos usando el Modelo barotrópico equivalente requiere la solución de (IV-14) sobre la región de pronóstico.

La ecuación (IV-14) es del tipo Helmholtz para  $M > 0$ , esto es

$$\nabla^2 T - M T = F(x, y) \quad (\text{IV-17})$$

donde  $T$  es la tendencia de la altura y  $F$  es una función conocida sobre la región.

Cuando  $M = 0$ , (IV-17) es una ecuación del tipo de Poisson. Ambos tipos son resueltos por métodos de relajación si  $T$  es conocida sobre la frontera. Si la región es suficientemente grande, la tendencia puede ser tomada como cero sobre la frontera sin afectar seriamente el pronóstico en el interior de la región.



Cuando la tendencia  $T = \frac{\partial Z}{\partial t}$  ha sido obtenida por solución de (IV-17), la altura a un tiempo futuro puede ser obtenida, por ejemplo, por una extrapolación con diferencias finitas centradas como sigue

$$Z_{t+\Delta t} = Z_{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)_t 2\Delta t \quad (\text{IV-18})$$

Habiendo obtenido un nuevo campo de altura, el proceso puede ser repetido tantas veces como sea necesario para producir un pronóstico para alguna "longitud" del tiempo deseada. La extrapolación con diferencias centradas, representadas por (IV-18), es obviamente no aplicable para el primer paso desde las condiciones iniciales, entonces una extrapolación hacia adelante es usualmente usada, esto es

$$Z_{\Delta t} = Z_0 + \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)_0 \Delta t \quad (\text{IV-19})$$

## 2) Un Modelo con ecuaciones primitivas

Las ecuaciones para un modelo bi-dimensional libre de superficie son

$$\frac{\partial u}{\partial t} + m \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \hat{f}v - m \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (\text{IV-21})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + m \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\hat{f}u - m \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (\text{IV-22})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + m^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi \frac{u}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Phi \frac{v}{m} \right) \right] = 0 \quad (\text{IV-23})$$

donde  $u$  y  $v$  son las componentes de la velocidad en las direcciones  $x$  y  $y$ ,  $\Phi$  es la altura geopotencial,  $m$  es el factor de escala,  $i \in \dots$ ,  $m = 2 / (1 + \sin \varphi)$ , donde  $\varphi$  es la latitud, y  $\hat{f}$  está definido como

$$\hat{f} = f + m^2 \left[ v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{m} \right) - u \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{m} \right) \right]$$

donde  $f$  es el parámetro de Coriolis.

Para resolver este conjunto de ecuaciones, las ecuaciones son expresadas en diferencias finitas.

Se considerarán los siguientes operadores definidos por

$$\begin{aligned} \bar{Q}^x &\equiv \frac{1}{2} (Q_{i+1/2} + Q_{i-1/2}) & \langle Q \rangle &= \frac{1}{2} [Q(t+\Delta t) + Q(t-\Delta t)] \\ Q^x &\equiv (Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2}) & \bar{Q}^{ex} &= \frac{1}{2} (Q_{i+1} + Q_{i-1}) \end{aligned}$$

y sus operadores compuestos

$$\bar{Q}^{xy} = (\bar{Q}^x)^y \quad Q_{xx} = (Q_x)_x, \text{ etc.}$$

donde  $Q$  es una variable arbitraria,  $i$  es el índice de la malla en la coordenada  $x$  y  $\Delta t$  es el incremento del tiempo.

Las ecuaciones (IV-21), (IV-22) y (IV-23) son aproximaciones por ecuaciones de diferencias finitas como

$$u(t+\Delta t) - u(t-\Delta t) = -\hat{p}(v, u) + 2 \Delta t \hat{f} \bar{v}^{xy} - \frac{2 \Delta t}{\sigma} \bar{m}^x \phi_x \quad (\text{IV-24})$$

$$v(t+\Delta t) - v(t-\Delta t) = -\hat{p}(v, v) - 2 \Delta t \hat{f} \bar{u}^{xy} - \frac{2 \Delta t}{\sigma} \bar{m}^y \phi_y \quad (\text{IV-25})$$

$$\phi(t+\Delta t) - \phi(t-\Delta t) = - \left\{ \frac{2\Delta t}{d} \bar{\Phi}_0 \eta^2 \left[ \frac{(\mu/\bar{m}^x)_x + (v/\bar{m}^y)_y}{\Delta t} + \frac{2\Delta t}{d} \eta^2 \left[ \frac{(\mu \bar{\phi}^x/\bar{m}^x)_x + (v \bar{\phi}^y/\bar{m}^y)_y}{\Delta t} \right] \right] \right\} \quad (\text{IV-26})$$

donde  $\bar{\Phi}$  es dividido en dos,  $\bar{\Phi}_0$ , la altura geopotencial media la cual es constante con el tiempo y espacio,  $\phi = \bar{\Phi} - \bar{\Phi}_0$ , la desviación de la altura media.

El término no-lineal es tratado con el esquema generalizado de Arakawa (ver apéndice II).

El esquema es modificado para incluir el factor de escala  $m$ .

Así, el término  $\bar{\phi}$  está expresado como

$$P(u, u) = \frac{2\Delta t}{3} \frac{\Delta t}{d} \bar{m}^x \left[ 2 \mu \bar{u}_x^x + \bar{u}^{2x} \bar{u}_x^x + \frac{1}{2} \left\{ \mu_{xx} \bar{u}_x^x + \overline{(\mu \nabla^2 \mu)}_x^x \right\} / (\bar{m}^x)^2 + 3 \bar{v}^{xy} \bar{u}_y^y + \frac{1}{4} \left\{ \bar{v}_y^x \mu_{yy} \right\} / (\bar{m}^x)^2 \right],$$

$$P(v, v) = \frac{2}{3} \frac{\Delta t}{d} \bar{m}^y \left[ 2 v \bar{v}_y^y + \bar{v}^{2y} \bar{v}_y^y + \frac{1}{2} \left\{ v_{yy} \bar{v}_y^y + \overline{(v \nabla^2 v)}_y^y \right\} / (\bar{m}^y)^2 + 3 \bar{u}^{xy} \bar{v}_x^x + \frac{1}{4} \left\{ \bar{u}_x^y v_{xx} \right\} / (\bar{m}^y)^2 \right],$$

donde  $\nabla^2$  es un Laplaciano discreto, i. e.,  $\nabla^2 Q = Q_{xx} + Q_{yy}$ .

El esquema semi-implícito evita las complicaciones de iteración característica de un esquema implícito completo.

De acuerdo a este esquema, el tratamiento semi-

implícito es aplicado a los términos del gradiente espacial de la altura geopotencial en las ecuaciones de movimiento y a el término de divergencia del flujo bidimensional que está multiplicado por la altura geopotencial media en la ecuación de continuidad.

Específicamente, en las ecuaciones (IV-24), (IV-25) y (IV-26), se hacen las siguientes modificaciones

$$2\phi_x(t) \longrightarrow \phi_x(t+\Delta t) + \phi_x(t-\Delta t)$$

$$2\phi_y(t) \longrightarrow \phi_y(t+\Delta t) + \phi_y(t-\Delta t)$$

$$2\bar{\Phi}_0 \left[ \left( \frac{u}{\bar{m}^x} \right)_x + \left( \frac{v}{\bar{m}^y} \right)_y \right] \longrightarrow \bar{\Phi}_0 \left[ \left( u(t+\Delta t) + u(t-\Delta t) / \bar{m}^x \right)_x + \left( v(t+\Delta t) + v(t-\Delta t) / \bar{m}^y \right)_y \right]$$

Sustituyendo esas expresiones en (IV-24), (IV-25) y (IV-26), usando las diferencias centradas para las derivadas en el tiempo y desarrollando se encuentra

$$\langle u \rangle + \frac{\Delta t}{d} \bar{m}^x \langle \phi_x \rangle = R_1 \quad (\text{IV-27})$$

$$\langle \phi \rangle + \frac{\Delta t}{d} \bar{m}^2 \bar{\Phi}_0 \left[ \left( \langle u \rangle / \bar{m}^x \right)_x + \left( \langle v \rangle / \bar{m}^y \right)_y \right] = R_3 \quad (\text{IV-28})$$

$$\langle v \rangle + \frac{\Delta t}{d} \bar{m}^y \langle \phi_y \rangle = R_2 \quad (\text{IV-29})$$

con

$$R_1 = -\frac{1}{2} f(v, u) + \Delta t \bar{f} \bar{v}^{xy} + u(t-\Delta t)$$

$$R_2 \equiv -\frac{1}{2} \phi(v, v) - \Delta t \bar{\phi} \bar{u}'' + v (t - \Delta t)$$

$$R_3 \equiv -\frac{\Delta t}{d} m^2 \left[ (\mu \bar{\phi}'' / \bar{m}^x)_x + (v \bar{\phi}' / \bar{m}^y)_y \right] + \phi(t - \Delta t)$$

En las ecuaciones (IV-27), (IV-28) y (IV-29), - las variables desconocidas son  $\langle u \rangle$ ,  $\langle v \rangle$  y  $\langle \phi \rangle$ .

Con el objeto de resolver este conjunto de - - ecuaciones simultáneas, se elimina  $\langle u \rangle$  y  $\langle v \rangle$  de esas ecuaciones en favor de  $\langle \phi \rangle$  y se obtiene

$$\langle \phi \rangle - \left( \frac{\Delta t}{d} \right)^2 m^2 \bar{\phi}_0 \left[ \langle \phi \rangle_{xx} + \langle \phi \rangle_{yy} \right] = R_4 \quad (\text{IV-30})$$

donde

$$R_4 \equiv R_3 - \frac{\Delta t}{d} m^2 \bar{\phi}_0 \left[ (R_1 / \bar{m}^x)_x + (R_2 / \bar{m}^y)_y \right]$$

Esta es una ecuación de Helmholtz en  $\langle \phi \rangle$  y  $R_4$  es la función de forzamiento, la cual es conocida en el - tiempo  $t$ .

Se resuelve la ecuación de Helmholtz numéricamente para  $\langle \phi \rangle$ , los resultados finales para las tres variables son obtenidas de

$$u(t + \Delta t) = -\frac{2\Delta t}{d} \bar{m}^x \langle \phi \rangle_x + 2R_1 - u(t - \Delta t) \quad (\text{IV-31})$$

$$v(t + \Delta t) = -\frac{2\Delta t}{d} \bar{m}^y \langle \phi \rangle_y + 2R_2 - v(t - \Delta t) \quad (\text{IV-32})$$

$$\phi(t + \Delta t) = 2 \langle \phi \rangle - \phi(t - \Delta t) \quad (\text{IV-33})$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## C A P I T U L O V

Selección del procedimiento matemático de integración.

En cualquier integración numérica de las ecuaciones hidrodinámicas, se busca predecir ciertos campos vectoriales o escalares dependientes del tiempo.

La estrategia básica del procedimiento matemático, el cual es usado para este propósito, está afectado profundamente por la forma en la cual esos campos son representados numéricamente.

Tres métodos pueden ser utilizados. Método de diferencias finitas o método discreto, método espectral y el método de elemento finito.

A continuación será descrito el procedimiento, méritos y desventajas de cada uno de ellos.

- 1) Método de diferencias finitas (MDF). En el MDF los campos pueden ser representados como funciones discretas sobre una malla la cual cubre el espacio físico con el cual el problema está relacionado.
- 2) Método Espectral (ME). En el ME los campos pueden ser representados por los coeficientes de un desarrollo en funciones ortogonales.

3) Método de elemento finito (MEF). En el MEF al iniciar, es supuesta una solución aproximada en la forma de una combinación de funciones especificadas (bases). Los coeficientes (multiplicadores) de las funciones bases deben ser determinados para producir la mejor solución aproximada. Esto está acoplado con el - minimizar una medida del error (llamada función residual) asociado con la solución asumida. Hay varias técnicas para minimizar residuales.

En el MDF las aproximaciones para las derivadas son usadas para construir un sistema de ecuaciones algebraicas que aproximan las ecuaciones diferenciales parciales representativas del problema.

En el ME las ecuaciones se reducen a un conjunto - de ecuaciones diferenciales ordinarias, así que los coeficientes de las series pueden ser calculados como funciones del - tiempo.

El MEF es una generalización del método de residuales pesados.

Para ilustrar la técnica del ME se considerará la ecuación de vorticidad barotrópica.

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \hat{k} \times \nabla \psi \cdot \nabla (\nabla^2 \psi) = 0 \quad (v-1)$$

donde  $\Psi$  es la función corriente y por simplicidad el término beta ha sido despreciado.

Desarrollando  $\Psi$  en la siguiente serie

$$\Psi(x_1, x_2, t) = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(t) Y_{\alpha}(x_1, x_2) \quad (V-2)$$

Las funciones  $Y_{\alpha}$  son ortogonales y normalizadas así que

$$\int Y_{\beta}^* Y_{\alpha} ds = \delta_{\alpha\beta} \quad (V-3)$$

La integración en (3) es efectuada sobre la región completa de pronóstico.

Las funciones  $Y_{\alpha}$  satisfacen la ecuación

$$\nabla^2 Y_{\alpha} + K_{\alpha} Y_{\alpha} = 0 \quad (V-4)$$

donde los eigenvalores  $K_{\alpha}$  son positivos.

Sustituyendo (2) en la ecuación de pronóstico (1), multiplicando por  $Y_{\beta}^*$ , integrando sobre la región completa y usando la relación (3) se encuentra

$$-k_v \frac{d\Psi}{dt} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} L_{\beta, \alpha, \beta} \Psi_{\alpha} \Psi_{\beta} = 0 \quad (V-5)$$

Los coeficientes de interacción, los cuales pueden ser calculados, son dados por

$$L_{\beta, \alpha, \beta} = -K_{\beta} \int Y_{\beta}^* \hat{k} \cdot \nabla Y_{\alpha} \times \nabla Y_{\beta} ds \quad (V-6)$$



La ecuación (5) representa un número infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias donde todos los valores apropiados  $\delta$  están considerados.

En la práctica las series dadas por (2) es truncada en tal forma que las características meteorológicas sean descritas aceptablemente. Las ecuaciones para los coeficientes restantes pueden ser entonces integradas en el tiempo numéricamente.

El ME tiene varias ventajas sobre el método descrito.

El ME calcula las derivadas espaciales exactamente así que el error de fase el cual ocurre con el MDF es eliminado.

También Aliasing (Ver apéndice B) que ocurre con el MDF está excluido y como un resultado es fácil conservar cantidades las cuales son conservadas en las ecuaciones continuas.

Otra ventaja es el tratamiento de movimientos globales sin la presencia de singularidades.

La desventaja más importante del ME es que requiere mucho más tiempo de proceso que el método descrito discreto D si hay muchos grados de libertad.

Para meteorología, la principal ventaja del MEF

es la posibilidad de cambiar fácilmente de tamaño y forma del elemento.

Para la integración de las ecuaciones resultantes en los modelos filtrados y de ecuaciones primitivas, - de este estudio, se seleccionó el método discreto (ver apéndice B ) por razones de tiempo de proceso.

## C A P I T U L O VI

## Discusión de los Experimentos Numéricos

La atmósfera modelo seleccionada para la simulación es homogénea, incomprensible, barotrópica e hidrostática, como se había mencionado anteriormente.

Las ecuaciones gobernando el flujo atmosférico, según los dos modelos filtrados de un sólo parámetro: Modelo Barotrópico (MB) y el Modelo Barotrópico Equivalente (MBE), son integrados sobre una área limitada, que corresponde a la región IV. La malla de integración está compuesta de un arreglo rectangular de 13 x 17 puntos, cuyo espaciamiento es 462.8426 Km. (Fig. VI-1). Se realizan simulaciones para 12 y 24 horas.

Las condiciones iniciales para los modelos se muestran en las figuras 2 y 3, condiciones en superficie y en el nivel de 500 mb, respectivamente, del día 2/I/76 a las 00.00 horas. La razón para escoger este período para probar los modelos obedece a dos razones principales:

- a) Se tiene la película de la circulación general atmosférica que incluye el mes de enero de 1976, lo cual permite hacer un análisis de las condiciones atmosféricas desde un punto más realista para el modelaje.
- b) Enero corresponde al mes intermedio del invierno en el Hemisferio Norte época en que el

FIG. (VI-1)

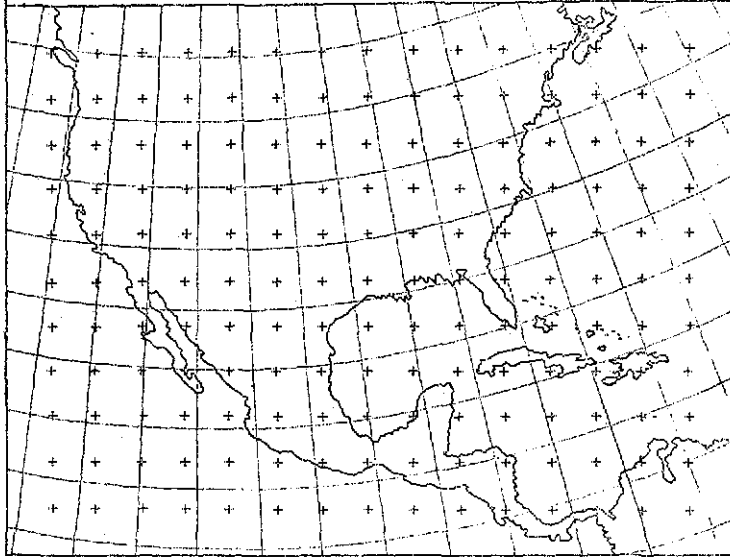


Figura 1. Malla de integración sobre la región IV.

Figura 2. Condiciones en superficie el día 2/1/76 a las 00.00Z (condición inicial).

Figura 3. Campo de Geopotencial, en la superficie de 500 mb. del día 2/1/76 a las 00.00Z (condición inicial).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

FIG. (VI-2)

43-B

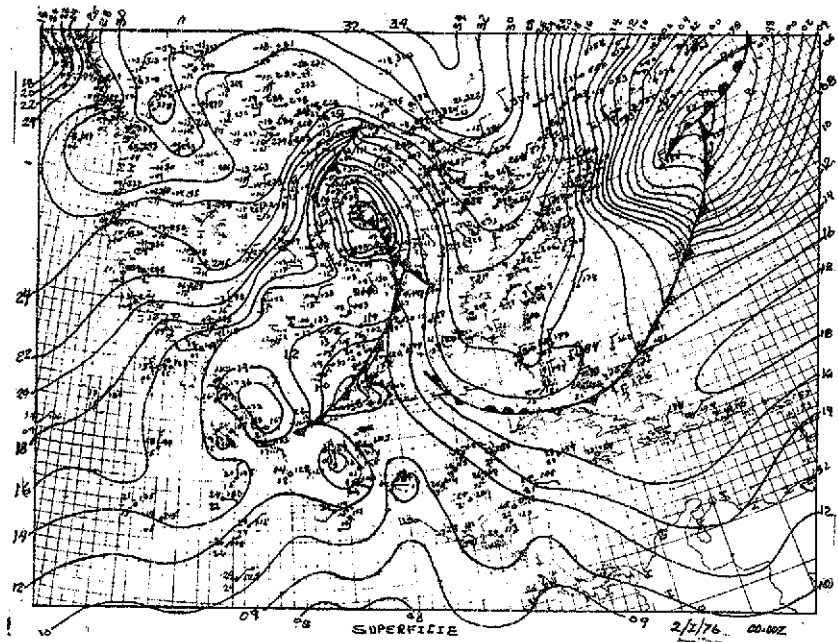
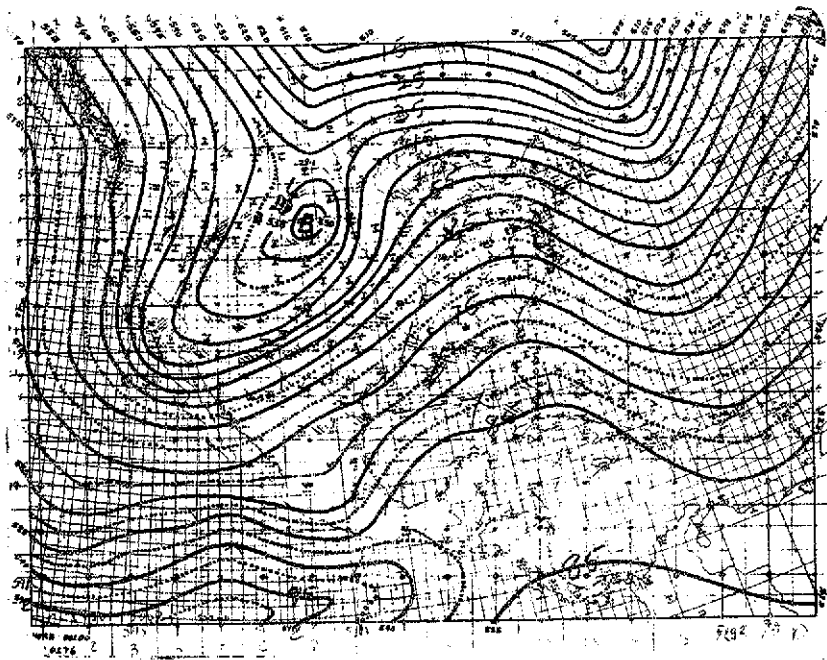


FIG. (VI-3)



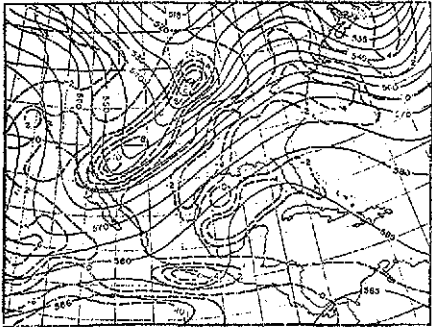
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

flujo de latitudes medias tiene su máximo "corrimiento" hacia latitudes bajas, lo cual justifica la integración sobre la región IV.

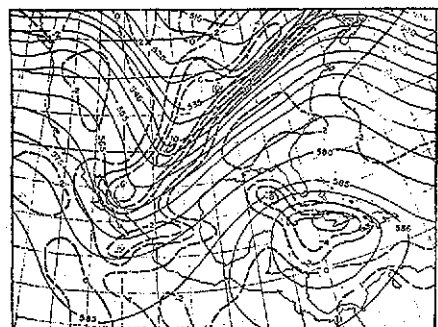
Se analizarán los resultados desde el punto de vista de descripción de los dos principales sistemas sobre la región, uno sobre la parte central de E.U. que se extiende hasta el océano pacífico pasando por San Diego, B.C.N. y otro sobre el océano atlántico, es de interes considerar la inclinación, en la horizontal, de los sistemas (fig. 3).

En la figura 4a se muestran los campos del Geopotencial y vorticidad observados doce horas después, y en la figura 4b se muestran los correspondientes campos del geopotencial y vorticidad calculados numéricamente, para doce horas, con el MB se puede apreciar que los campos, de geopotencial y vorticidad, observados y calculados son muy similares en general, las posiciones de los dos sistemas principales tienen la misma inclinación, en la horizontal, existen ligeras diferencias en los campos de vorticidad para latitudes bajas.

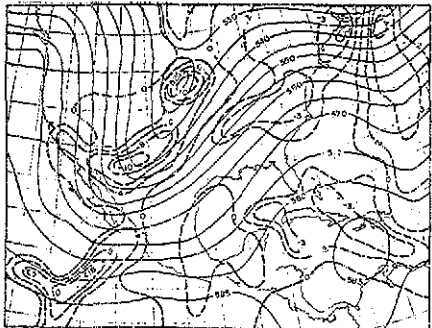
En la figura 5a se muestran los campos al geopotencial y vorticidad observados veinticuatro horas después de las 00.00 hs., y en la figura 5b se muestran los correspondientes campos del geopotencial y vorticidad calculados numéricamente, para veinticuatro horas, con el MB. Para la



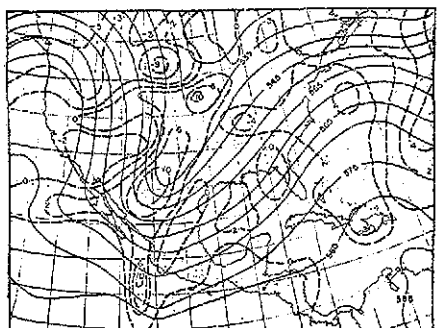
( a )



( a )



( b )



( b )

FIG. (VI-4)

FIG. (VI-5)

Figura 4. Campos de Geopotencial y vorticidad, en la superficie de 500 mb, del día 2/1/76 a las 12.00Z, en (a) observadas y en (b) calculados numéricamente con el MB.

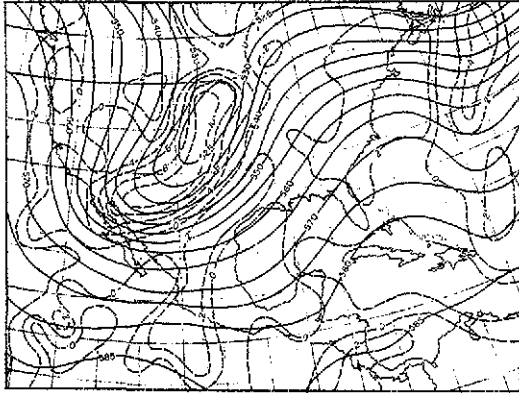
Figura 5. Campos de geopotencial y vorticidad, en la superficie de 500 mb, del día 3/1/76 a las 00.00Z, en (a) observados y en (b) calculados numéricamente con el MB.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

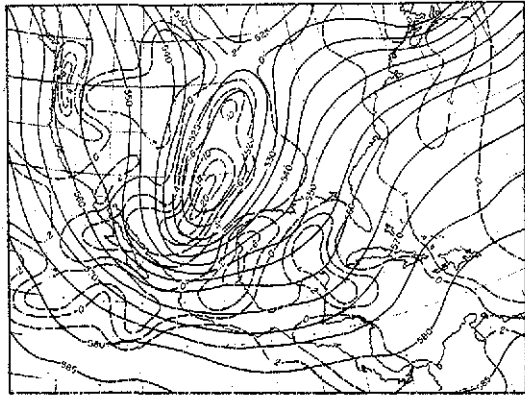
simulación de 24 horas se pierde gran parte de la resolución de los campos, lo cual es debido a la integración sobre una area limitada, efectos de frontera, error de truncación, falta de una unidad adecuada de datos en latitudes bajos, etc.

En las figuras 6a y 6b se presentan los campos del geopotencial y vorticidad calculados numéricamente con el MBE para doce y veinticuatro horas después, respectivamente. Nuevamente, se aprecia que los campos correspondientes para veinticuatro horas calculados numéricamente pierden resolución.





( a )



( b )

FIG (VI-6)

Figura 6. Campos de geopotencial y vorticidad, en la superficie de 500 mb, calculados numéricamente con el MBE en (a) para el día 2/1/76 a las 12.00Z y en (b) para el día 3/1/76 en las 00.00Z.

## C A P I T U L O VII

## Conclusiones

De los experimentos numéricos realizados con los modelos filtrados en una área limitada, analizados en el capítulo VI, se puede concluir lo siguiente:

A pesar de la barotropía incluida en los modelos, - una gran cantidad de precipitación asociada con las tormentas indican que grandes conversiones de energía se efectúan, lo cual no se puede detectar - la simulación numérica obtenida es buena, con ambos modelos filtrados para un período de 12 horas solamente, lo anterior se deduce de los matrices de diferencias entre los campos de geopotencial observados y calculados (Figuras 7 y 8).

La simulación numérica con el MBE no fué mejor, apreciablemente, como se esperaba de acuerdo con la discusión realizada con la ecuación (IV-11) ver figuras 7 y 8. Se aprecia que la máxima diferencia usando el MB es de 136.1 metros, mientras la máxima diferencia usando el MBE es de 220.8 metros, lo cual no está de acuerdo con lo esperado, pues en el MBE la inclusión de la divergencia de la velocidad, de la forma particular  $M' \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  en (IV-9) conduce a un mejor control de las ondas ultra-largas o planetarias como se aprecia en la ecuación (IV-11) es decir reduce la rapidez de ondas largas, por lo que se espera una mejor simulación. Para tener una mejor prueba de la influencia

GLDI - OED  
SRR 1246  
T<sub>max</sub> T<sub>1</sub>

-172.5	-145.2	-130.7	-116.1	-105.1	-92.5	-81.7	-73.9	38.8	99.3	166.9	191.1	137.4	-73.2	-116.9	-57.8
-167.2	-94.0	-60.8	-88.5	-96.1	-101.6	-51.9	-25.1	-14.6	-1.2	44.4	66.2	8.1	-83.1	-47.0	-51.1
-34.2	-47.2	-26.2	-31.1	-26.2	-48.9	-72.8	-55.0	-28.0	-5.6	26.7	37.0	-13.2	-57.7	-60.4	-65.1
-20.1	-12.9	-5.5	-7.5	-8.5	31.1	70.9	16.9	31.5	39.1	63.1	45.9	29.1	1.1	5.2	-10.6
3.2	8.6	-0.7	10.4	67.5	46.5	67.1	82.6	76.6	73.5	60.0	40.8	37.2	27.1	43.0	27.8
29.3	2.0	9.9	4.2	17.8	67.2	118.8	104.4	107.7	82.2	65.1	45.1	40.7	33.6	43.0	36.6
23.4	-7.8	14.0	33.4	58.7	100.8	136.1	119.7	106.9	87.7	74.5	54.9	36.2	30.0	35.7	32.3
0.8	-11.9	-7.5	28.3	68.6	107.9	80.0	120.0	70.9	100.9	86.2	48.6	25.1	16.8	10.8	18.7
15.3	-47.0	-51.3	-6.3	29.1	71.5	74.8	122.7	119.4	87.9	55.8	34.4	16.0	0.4	-3.6	0.5
-61.2	-67.5	-50.5	1.0	43.2	49.9	45.6	93.3	83.2	70.3	43.1	19.8	9.5	-2.5	-8.9	-12.0
-58.5	-15.1	-11.8	53.6	51.6	9.5	-1.7	26.0	19.8	20.9	18.4	9.5	5.9	-5.3	-10.2	-11.1
-20.1	-9.4	26.8	47.3	39.9	14.5	0.5	10.2	-20.9	-5.7	4.3	3.6	-1.8	-9.1	-11.4	-11.5
-30.2	-28.1	-59.1	-36.0	-37.0	-36.0	-25.0	-26.1	-30.1	-11.1	-1.2	-11.3	-14.4	-14.5	-14.6	-3.0

L<sub>1</sub> 40

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

GE01 = QEO

844 740 41

124.

7.7.

172.5	165.3	145.2	138.7	116.1	105.1	62.5	41.7	34.6	9.3	166.9	191.1	137.4	73.2	116.9	57.8
107.2	90.1	56.9	73.1	89.5	99.2	46.4	18.8	7.8	5.9	50.9	76.0	22.3	24.2	34.4	46.2
34.0	28.0	48.0	7.8	13.0	42.7	60.9	46.4	26.7	3.2	37.5	52.0	2.8	36.8	45.2	38.3
28.0	16.7	45.6	39.5	11.5	39.0	103.1	37.4	33.0	42.5	73.5	63.1	49.5	20.0	19.2	31.6
3.2	32.7	56.5	68.5	120.2	92.5	158.0	154.5	121.3	101.0	65.1	60.8	56.8	44.0	55.2	34.2
28.3	29.2	65.0	57.0	91.0	132.2	220.8	195.6	168.8	121.0	90.8	66.6	58.6	48.0	52.6	41.6
23.4	8.5	53.0	79.5	115.6	157.5	212.0	188.0	169.6	126.4	102.6	76.7	52.9	42.6	43.4	36.1
4.8	0.0	16.0	66.5	100.1	138.1	181.1	162.3	115.7	137.6	113.8	70.2	41.2	27.9	17.5	21.0
15.3	38.3	36.8	14.1	51.4	89.6	88.0	154.7	160.2	124.5	83.1	24.8	31.6	11.1	2.8	6.5
61.2	64.2	26.3	12.8	54.9	64.5	53.2	118.2	115.6	99.6	87.7	37.8	23.2	7.6	2.5	4.2
98.5	12.9	7.5	59.9	60.9	21.9	6.8	42.1	34.4	41.2	33.2	21.7	15.7	2.4	5.1	10.2
50.9	8.2	28.5	51.4	48.0	42.0	4.5	29.4	17.8	70.4	11.1	9.9	3.6	5.2	8.6	11.6
90.2	28.1	30.1	36.0	37.0	36.0	25.0	26.1	30.1	11.1	1.2	11.3	14.6	14.5	14.6	14.6

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

de la inclusión de la divergencia de la velocidad, en el MBE, se debe realizar una integración en malla fina para "detectar" más realmente el efecto orográfico parametrizado a través del término  $M' \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ . Además, al tener una malla fina, el error de truncación debido a la discretización se reducirá lo cual hará más realista la simulación. Se debe integrar sobre una región más amplia para evitar, lo más posible, el efecto de frontera; pues observando la película se ve la necesidad de tener una frontera sur más realista.

A P E N D I C E A

Derivación de las ecuaciones Lagrangianas.

En este apéndice se derivarán las ecuaciones Lagrangianas (II-5) y (II-6) del Capítulo II.

Se supone que las  $q_k$  y  $D$  son independientes del tiempo, pero las ecuaciones resultantes también se cumplen para casos donde esos términos son funciones del tiempo.

A-I Ecuaciones de Movimiento.

Se comenzará con las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas, refiriéndose al marco inercial, usando el teorema de d'Alembert, donde las  $\delta x_i$  y/o las  $\delta q_k$  son desplazamientos espaciales arbitrarios.

( d u\_i / d t + D\_{x\_i} Phi + 1/t D\_{x\_i} phi ) delta x\_i = 0 A - 1

Con i = 1, 2, 3 como componentes cartesianas del movimiento y con X\_i = X\_1, X\_2, X\_3 como coordenadas cartesianas espaciales.

Las coordenadas X\_i pueden depender generalmente de las coordenadas generalizadas q\_k y vice-versa.

X\_i = X\_i(q\_k), q\_k = q\_k(X\_i) -> i, k = 1, 2, 3 A - 2

Obteniéndose las siguientes relaciones de transformación

$$\partial_{x_i} = \partial_{\dot{q}_j} \partial_{x_i} \dot{q}_j \quad \partial_{\dot{q}_k} = \partial_{x_j} \partial_{\dot{q}_k} x_j \quad \text{A - 3}$$

$$\delta x_i = \partial_{\dot{q}_j} x_i \delta \dot{q}_j \quad \text{A - 4}$$

$$\mu_i = \dot{x}_i = \partial_{\dot{q}_j} x_i \dot{q}_j \quad \text{A - 5}$$

o más generalmente

$$\frac{d}{dt} = \left\{ \partial_{\dot{q}_j} \right\} \dot{q}_j + \partial_t \quad \text{A - 6}$$

$$\partial_{\dot{q}_j} \mu_i = \partial_{\dot{q}_j} x_i$$

de acuerdo con (A-5).

Sustituyendo (A-4) en (A-1) y considerando (A-3) se obtiene, con  $j \equiv k$

$$\left( \frac{d\mu_i}{dt} \partial_{\dot{q}_k} x_i + \partial_{\dot{q}_k} \Phi^* + \frac{1}{c} \partial_{\dot{q}_k} \phi \right) \delta \dot{q}_k = 0 \quad \text{A - 7}$$

El primer término de (A-7) puede ser desarrollado en

$$\frac{d\mu_i}{dt} \partial_{\dot{q}_k} x_i = \frac{d}{dt} (\mu_i \partial_{\dot{q}_k} x_i) - \mu_i \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}_k} x_i)$$

o debido a (A-6)

$$\frac{d\mu_i}{dt} \partial_{\dot{q}_k} x_i = \frac{d}{dt} (\mu_i \partial_{\dot{q}_k} x_i) - \mu_i \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}_k} x_i) =$$

$$\frac{d}{dt} \left( \partial_{\dot{q}_k} \frac{\mu_i^2}{2} \right) - \mu_i \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}_k} x_i)$$

A - 8

Considerando a  $q_k$  y  $\dot{q}_k$  como variables independientes, los operadores  $\frac{d}{dt}$  y  $\partial_{\dot{q}_i}$  conmutan. Se muestra esta propiedad para el último término en (A-8)

$$\begin{aligned} M_i \partial_{\dot{q}_k} \partial_{q_k} X_i &= M_i \dot{q}_k \partial_{\dot{q}_i \dot{q}_k}^2 X_i = M_i \partial_{q_k} (\dot{q}_i \partial_{\dot{q}_i} X_i) = M_i \partial_{\dot{q}_k} \left( \frac{dX_i}{dt} \right) \\ &= M_i \partial_{\dot{q}_k} \dot{X}_i = M_i \partial_{\dot{q}_k} M_i = \partial_{\dot{q}_k} \left( \frac{M_i^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Con esta relación se reescribe (A-8)

$$\frac{dM_i}{dt} \partial_{\dot{q}_i} X_i = \frac{d}{dt} \left( \partial_{\dot{q}_k} \frac{M_i^2}{2} \right) - \partial_{\dot{q}_k} \left( \frac{M_i^2}{2} \right) \tag{A-9}$$

y con (A-9) la ecuación (A-7) se transforma en

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left( \partial_{\dot{q}_k} \frac{M_i^2}{2} \right) - \partial_{\dot{q}_k} \left( \frac{M_i^2}{2} - \mathcal{E}^* \right) + \frac{1}{r} \partial_{q_k} p \right\} \delta q_k = 0 \tag{A-10}$$

Donde  $\frac{M_i^2}{2}$  es la energía cinética K, para ser expresada en términos de  $q_k$  y  $\dot{q}_k$ , la ecuación (A-10) verifica exactamente la ecuación (II-5) del capítulo II, notando que  $\mathcal{E}^*$  depende de las  $q_k$ , pero no de las  $\dot{q}_k$ , y los desplazamientos  $\delta q_k$  pueden ser completamente arbitrarios.

A-II Ecuación de continuidad.

Se comenzará con la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas

$$\frac{1}{r} \frac{dp}{dt} + \partial_{x_i} M_i = 0 \tag{A-11}$$



considerando (A-5) y (A-3) se transforma primero  $\partial_{x_i} \mu_i$  de (A-11) y se obtiene

$$\partial_{x_i} \mu_i = \partial_{q_j} \mu_i \partial_{x_i} q_j = \partial_{x_i} q_j \partial_{q_j} (\partial_{q_k} x_i \frac{q_j}{k})$$

o

$$\partial_{x_i} \mu_i = \frac{q_j}{k} \partial_{x_i} q_j \partial_{q_j}^2 x_i + \partial_{x_i} q_j \partial_{q_j} x_i \partial_{q_j} \frac{q_j}{k} \quad \text{A-12}$$

Donde

$$\left. \begin{aligned} \partial_{x_i} q_j \partial_{q_j} x_i &= \partial_{q_j} q_j = \delta_{jk} \\ \text{y viceversa} \\ \partial_{q_j} x_i \partial_{x_i} q_j &= \partial_{x_i} x_i = \delta_{jk} \end{aligned} \right\} \quad \text{A-13}$$

$$\delta_{jk} \text{ (matriz unitaria)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Ahora se supondrá que

$$\partial_{x_i} q_j \partial_{q_j}^2 x_i = \frac{1}{D} \partial_{q_j} D \quad \text{A-14}$$

posteriormente se demostrará en relación a (A-14)

$$D = \left| \partial_{q_k} x_i \right|$$

y  $D$  está definido por la ecuación (II-10).

Con (A-13) y (A-14) se reescribe (A-12)

$$\partial_{x_i} \mu_i = \frac{q_j}{k} \frac{1}{D} \partial_{q_j} D + \partial_{q_j} \frac{q_j}{k} \quad \text{A-15}$$

y considerando (A-5)

$$\partial_{x_i} u_i = \frac{1}{D} \frac{dD}{dt} + \partial_{\dot{q}_k} \dot{q}_k$$

Observando (A-15), la ecuación de continuidad (A-11)

transformada en coordenadas generalizadas  $q_k$ ,  $\dot{q}_k$  se

escribe

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dt} + \partial_{\dot{q}_k} \dot{q}_k = 0$$

o

$$\frac{1}{\rho D} \frac{d(\rho D)}{dt} + \partial_{\dot{q}_k} \dot{q}_k = 0$$

A-16

En esta notación la ecuación A-16 es idéntica a la ecuación de continuidad (II-6) del Capítulo II.

Para completar las derivaciones anteriores se mostrará que D, definido por la ecuación (II-10), es idéntico con el determinante funcional

$$|\partial_{\dot{q}_k} x_i|.$$

Considerando (A-5)

$$u_i = \dot{x}_i = \partial_{\dot{q}_i} x_i \dot{q}_i - \partial_{\dot{q}_k} x_i \dot{q}_k$$

y

$$u_i u_i = \partial_{\dot{q}_i} x_i \partial_{\dot{q}_k} x_i \dot{q}_i \dot{q}_k$$

obteniendo la energía cinética K

$$K = \frac{u_i u_i}{2} = \frac{1}{2} \partial_{\dot{q}_i} x_i \partial_{\dot{q}_k} x_i \dot{q}_i \dot{q}_k$$

de la cual se encuentra

$$\partial_{\dot{q}_i \dot{q}_k}^2 K = \partial_{\dot{q}_i} x_i \partial_{\dot{q}_k} x_i$$

y con referencia a (II-10)

$$D^2 \equiv \left| \frac{\partial^2 K}{\partial q_j \partial q_k} \right| = \left| \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_j \partial q_k} \right|$$

Obviamente

$$\left| \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_j \partial q_k} \right| = \left| \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_k \partial q_j} \right|$$

y siguiendo las reglas de multiplicación para determinantes,

se obtiene

$$D^2 = \left| \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_j \partial q_k} \right| \left| \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_k \partial q_j} \right| = \left| \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_k \partial q_k} \right|^2$$

y

$$D = \left| \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_k \partial q_k} \right|$$

$$\left| \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_k \partial q_k} \right| = \frac{\partial(X_i)}{\partial(q_i)} \quad \text{p.e. } i=1,2,3$$

es el determinante funcional o el Jacobiano

$$\left| \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_k \partial q_k} \right| =$$

$J(X_1, X_2, X_3)$  diferenciado con respecto a  $q_1, q_2, q_3$ .

La suposición (A-14) está justificada.

con una velocidad constante  $c$  a lo largo del eje  $x$ . No hay dispersión.

Ahora se considerará la ecuación

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2 \Delta x} = 0 \tag{B-4}$$

que es obtenida por la aproximación de la derivada espacial en (B-1) por un cociente de diferencias centradas. A (B-4) se le puede llamar ecuación semi-discreta. Las ecuaciones de diferencias finitas obtenidas cuando la derivada temporal en (B-4) es aproximada usando un esquema consistente en la -diferenciación temporal se aproxima a (B-4) cuando el paso de tiempo se aproxima a cero. Así, para  $\Delta t$  pequeño (B-4) representa una aproximación a esas ecuaciones de diferencias finitas. Puesto que la derivada temporal retiene su forma diferencial, cualquier error en (B-4) es debido a la diferenciación espacial.

Notando que (B-4) tiene una solución en la forma de una componente armónica

$$u_i(t) = \text{Re} \left[ U(t) e^{ik i \Delta x} \right] \tag{B-5}$$

lo cual da

$$\frac{dU}{dt} + ik \left( c \frac{\sin k \Delta x}{\Delta x} \right) U = 0 \tag{B-6}$$

## A P E N D I C E B

Algunos inconvenientes al representar en forma discreta los campos.

Se analizarán tres inconvenientes del método discreto, con la finalidad de mostrar su alcance y limitaciones además hacer notar la necesidad de hacer un estudio detallado de la aproximación discreta más adecuada a la ecuación en cuestión.

## I) Dispersión computacional.

La ecuación lineal de advección

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ; \quad c = \text{const.} \quad \text{B-1}$$

tiene una solución en la forma de una componente armónica

$$u(x,t) = \text{Re} [ U(t) e^{ikx} ] \quad \text{B-2}$$

con lo que obtiene

$$\frac{dU}{dt} + ikc U = 0 \quad \text{B-3}$$

En esta ecuación de oscilación  $kc$  es igual a la frecuencia  $\nu$ , y  $c = \nu/k$  es la rapidez de fase de las ondas. Muestra que las ondas de todas las longitudes de onda son propagadas con la misma rapidez de fase, esto es, la función  $u(x,t)$  es adveccionada sin cambiar de forma -

Se ha escrito en forma conveniente para compararla con (B-3). En vez de la rapidez de fase constante C, se observa que las ondas ahora se propagan con la rapidez de fase

$$c^* = c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \quad B-7$$

Esta rapidez de fase es una función del número de ondas  $k$ . Así, la diferenciación finita espacial causa una dispersión de las ondas, a lo cual se le denominará dispersión computacional. Como  $k\Delta x$  se incrementa desde cero, la rapidez de fase  $c^*$  decrece monóticamente desde C, y alcanza el cero para longitudes de onda resolubles más cortas que  $(2 \Delta x)$ , cuando  $k\Delta x = \pi$ . Así, todas las ondas se propagan con una rapidez que es menor que la rapidez de fase C verdaderas, este efecto desacelerante se incrementa cuando la longitud de onda decrece.

Hasta aquí se han encontrado dos efectos. Primero, la rapidez de advección es menor que la rapidez de advección verdadera. La consecuencia de este error es una retardación general de los procesos de advección. Segundo, la rapidez de advección cambia con el número de ondas; esta falsa dispersión es particularmente seria para las ondas más cortas.

Si el patrón que está siendo adveccionado representa una superposición de más de una onda, esta falsa disper--

si3n resultará en una deformaci3n de ese patr3n. Esto es especialmente para patrones de peque1a escala en la atm3sfera, es decir, frentes, l3neas de sizallamiento, etc., que representan una superposici3n de varias ondas. Por esta raz3n, en pron3stico num3rico, tales patrones, si est3n presentes en los campos iniciales, son deformados r3pidamente, hasta que ellos adquieren una forma la cual es menos aguda que en el principio. Puesto que tales caracter3sticas de peque1a escala s3n de particular importancia en los procesos de tiempo. El efecto de dispersi3n computacional merece mucho cuidado.

Se analizar3 la velocidad de grupo. En el caso de la ecuaci3n lineal (B-1) se obtiene para la velocidad de grupo  $C_g$

$$C_g = \frac{d(kc)}{dk} = c \tag{B-8}$$

As3, la velocidad de grupo es constante e igual a la rapidez de fase  $c$ . Con la ecuaci3n semi-discreta (B-7), sin embargo, (B-7) d3 para la velocidad de grupo  $C_g^*$

$$C_g^* = \frac{d}{dk}(kc^*) = c \cos kAx \tag{B-9}$$

As3, cuando  $kAx$ , se incrementa desde cero, la velocidad de grupo  $C_g^*$ , decrece mon3ticamente desde  $C_g$ , y llega al valor  $-C_g$  para las ondas m3s cortas que  $(2Ax)$  de longitud de onda.

Estos resultados estan mostrados en la Figura ( D-5a ) . Para la ecuación de advección exacta (B-1) las ondas individuales y el paquete de ondas (lugares donde la superposición de ondas resulta en una amplitud máxima de un grupo de números de ondas vecinas) ambas se propagan con la misma velocidad constante  $C = C_g$  . La introducción del cociente de diferencias finitas espaciales centradas en (B-4) en ambas se hace que la rapidez de fase y la velocidad de grupo disminuyan cuando el número de ondas se incrementa. El error es particularmente grande para las longitudes de onda más cortas resolvibles; ondas con longitudes de ondas menores que  $(4\Delta x)$  siempre tienen una velocidad de grupo negativa. Esto significa que el paquete de ondas correspondiente a dichas ondas se propagara en la dirección opuesta a la velocidad de advección y opuesta a la dirección de propagación de las ondas individuales. Lo cual muestra la necesidad de hacer un análisis similar con esquemas de diferencias finitas no centradas, y así seleccionar el más adecuado desde el punto de vista físico.

II) La ecuación de advección bidimensional.

La ecuación de advección, que describe la advección de una variable dependiente, está considerada en la práctica como la parte más importante de las ecuaciones



atmosféricas.

Se considerará la ecuación de advección lineal bidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C_x \frac{\partial u}{\partial x} + C_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad C_x, C_y = \text{const.} \quad \text{B-10}$$

donde  $u = u(x, y, t)$  es una función de dos variables espaciales, y  $C_x, C_y$  son las componentes de la velocidad de advección. Así la rapidez de advección es dada por

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \quad \text{B-11}$$

Se probará la estabilidad de un esquema para la solución numérica de (B-10). Así, las derivadas espaciales son aproximadas por cocientes de diferencias de segundo orden, dando

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = -C_x \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - C_y \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad \text{B-12}$$

donde los valores aproximados  $u(i\Delta x, j\Delta y)$  son denotados por  $u_{ij}$ . Como una solución tentativa de (B-12) se sustituye

$$u_{ij} = \text{Re} \left[ U(t) e^{i(kx + ly)} \right] \quad \text{B-13}$$

dando la ecuación de oscilación

$$\frac{dU}{dt} = i \left( -\frac{C_x}{\Delta x} \sin k\Delta x - \frac{C_y}{\Delta y} \sin l\Delta y \right) \quad \text{B-14}$$

60

Si el esquema de Leapfrog es usado para la derivada temporal, se obtiene como criterio de estabilidad

$$\left| \left( \frac{c_x}{\Delta x} \operatorname{sen} k \Delta x + \frac{c_y}{\Delta y} \operatorname{sen} l \Delta y \right) \Delta t \right| \leq 1 \quad \text{B-15}$$

Esto debe ser satisfecho por todos los valores admisibles de los números de ondas

Por simplicidad, se considerará solamente el caso - donde  $\Delta x = \Delta y$  ; se denotará este tamaño del enrejado por  $d^*$ . En el plano número de ondas, esto es, un diagrama con co-ordenadas  $k, l$ , los números de ondas admisibles están contenidos en la región cuadrada mostrada en la Figura (D-5e) . Dentro de la región el valor máximo del lado izquierdo de (B-15) es obtenido en el centro del cuadrado, marcado con un círculo. La onda representada por ese punto tiene longitudes de onda  $4d^*$  en direcciones  $x$  y  $y$  así que  $\operatorname{sen} k \Delta x = \operatorname{sen} l \Delta x = 1$ . Para un valor dado de la rapidez de advección el lado izquierdo de (B-15) tiene un valor máximo en este punto si la velocidad de advección hace un ángulo de  $\pi/4$  con el eje  $x$ , en este caso  $c_x = c_y = \left\{ \sqrt{2}/2 \right\} c$ . Así se obtiene el criterio de estabilidad

$$\frac{\sqrt{2} c \Delta t}{\Delta x} < 1$$

B-16

(e)

Si el criterio (B-16) no se cumple , modos de ondas parásitas son introducidos, los cuales se amplifican rápidamente dando por resultado que la solución no es correcta.

La existencia de la inestabilidad computacional es una de las primeras motivaciones para usar ecuaciones filtradas. En el sistema casi-geostrófico no ocurren ondas de gravedad ni ondas de sonido. Así, la rapidez  $C$  en (B-16) es - justo la rapidez del viento máximo. Típicamente,  $c < 50 \text{ m seg}^{-1}$  así que para un intervalo de enrejado de 200 km. un incremento de tiempo sobre una hora debe ser permisible. Por otro lado, si se usan las ecuaciones completas,  $C$  debe ser igual a la rapidez del sonido el cual es la onda más rápida descrita por las ecuaciones. Así,  $C = 300 \text{ m seg}^{-1}$  y para un intervalo de 200 km en el enrejado un paso de tiempo de solamente unos pocos minutos es permitido.

### III) Ecuación de advección no-lineal unidimensional.

Se analizará otra limitación de la representación discreta a través de la ecuación de advección no-lineal uni-dimensional.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{B-17}$$

Como se ha regresado a una dimensión, así que  $u = u(x, t)$ .

Su solución general tiene la forma

$$u = f(x - ut),$$

como puede ser fácilmente verificado. Aquí  $f$  es una función arbitraria.

Aquí se considerará solamente el efecto de la multiplicación en (B-17). Cuando es realizado en diferencias finitas dá como resultado un error relacionado a la inabilidad de la discretización para resolver longitudes de onda más cortas que  $(2\Delta x)$ , esto es, números de ondas más grandes que  $k_{MAX} = \pi/\Delta x$ .

Así, considérese una función  $u(x)$  la cual puede ser representada por valores en los puntos del enrejado, por ejemplo

$$u = \sin kx \tag{B-18}$$

donde  $k < k_{MAX}$ . Sin embargo, sustituyendo (B-18) en el término no-lineal de (B-17) se encuentra  $u \frac{\partial u}{\partial x} = k \sin kx \cos kx = \frac{1}{2} k \sin 2kx$  B-19  $\nabla$

Entonces, si el número de ondas en (B-18) está en el intervalo  $\frac{1}{2} k_{MAX} < k \leq k_{MAX}$ , el término no-lineal dará un número de onda que está lejos del rango que puede ser resuelto por el enrejado. Lo cual no puede, por lo tanto, ser propiamente reproducido en un cálculo con diferencias finitas.

Para analizar que sucede en tal situación, considérese una onda para la cual  $k > k_{MAX}$ . Por ejemplo, sea  $L = \frac{4\Delta x}{3}$  una onda con esa longitud de onda es mostrada por -

63  
la línea continua en la Figura (D-5c) . Conociendo solamente los valores en los puntos del enrejado no se podrá distinguir esta onda de la mostrada por la línea discontinua. Así, con la convención adoptada anteriormente la cual supone que las ondas más largas están presentes, se cometerá un error. Este es el error conocido como "Aliasing".

Se analizarán las consecuencias del error "Aliasing" en una integración numérica. Una variable atmosférica, como una función de las coordenadas espaciales, puede ser imaginada que consiste de una serie de componentes armónicos. Esto es útil para considerar la "energía" de esas componentes, que es, su contribución al valor promedio del cuadrado de la variable considerada como una función del número de ondas.

Este es el espectro de la "energía". Por ejemplo, si las variables son las componentes de la velocidad, esta función es el espectro de la energía cinética. Este espectro describe la importancia relativa de características de diferentes escalas en el campo de la variable. Puesto que, la experiencia muestra que el espectro de las variables atmosféricas no cambian mucho con el tiempo. Es decir, sobre mapas sinópticos no se tienen situaciones donde las características de escala pequeña sean dominantes en un día, y ausentes en el siguiente. También, el espectro de las variables atmosféricas

no cambian mucho en su forma general. La energía de una componente particular puede, naturalmente cambiar, pero la forma característica del espectro como un todo es casi constante.

En una integración con diferencias finitas, además de esos, relativamente, pequeños cambios físicos, la forma de un espectro está sujeto a cambios debidos a errores "aliasing". La experiencia muestra que, si no se toman medidas con respecto al error debido al "aliasing" la integración es no aceptable físicamente. El fenómeno es debido a los términos no-lineales de las ecuaciones, y por lo tanto, es denominado como inestabilidad no-lineal.

Una de las formas de evitar la inestabilidad no-lineal es usar una formulación Lagrangiana de los términos de advección en vez de una formulación Euleriana.

A P E N D I C E C

Discusión del esquema de Arakawa

Se introducirá el procedimiento de Arakawa considerando la ecuación de Vorticidad (IV-1) ligeramente modificada

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta = 0 ; \quad \zeta = \nabla^2 \psi \tag{C - 1}$$

donde la velocidad  $\mathbf{v}$  se supone que sea no divergente, esto es

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \psi \tag{C - 2}$$

sustituyendo en (II-1) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = \mathbb{J}(\nabla^2 \psi, \psi) \tag{C - 3}$$

Esta ecuación da el cambio local en vorticidad como un resultado de advección por una velocidad bi-dimensional no-divergente. Esta es también una ecuación de advección no-lineal. Sin embargo, en contraste con la ecuación uni-dimensional (B -17), (C -3) da una descripción aproximada de los procesos atmosféricos de gran escala.

Para ilustrar el procedimiento de Arakawa para la ecuación de vorticidad (C-3), se necesita algún conocimiento de sus propiedades integrales en el espacio número de ondas. Es decir se desea estudiar los intercambios de

energía entre los diferentes armónicos que son permitidos por esa ecuación.

Considérese primero el espectro de energía cinética cuando la velocidad es bi-dimensional y no-divergente, así que ella puede ser dada por (II-2). Se puede casi siempre suponer que en la región considerada "A", la función corriente puede ser expresada como una serie de funciones ortogonales

$$\Psi = \sum_n \Psi_n \tag{C-4}$$

donde las funciones  $\Psi_n$  son eigenfunciones de la ecuación de HELMHOLTZ

$$\nabla^2 \Psi_n + \lambda_n^2 \Psi_n = 0 \tag{C-5}$$

Los parámetros  $\lambda_n$  son conocidos como "números de onda generalizados" de las componentes  $\Psi_n$ .

Como un ejemplo, sea "A" una región rectangular con lados  $L_x, L_y$ . Para condiciones de frontera se supone que la función corriente es periódica en  $x$  con período  $L_x$  y es cero a lo largo de las fronteras superior e inferior. Entonces se puede escribir la función corriente

$$\Psi = \sum_{n_1, n_2} \left( a_{n_1, n_2} \cos \frac{2\pi n_1 x}{L_x} + b_{n_1, n_2} \sin \frac{2\pi n_1 x}{L_x} \right) \sin \frac{\pi n_2 y}{L_y} \tag{C-6}$$



Diferenciando ésta se obtiene

$$\nabla^2 \psi_n = - \left[ \left( \frac{2\hat{n}n_1}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{\hat{n}n_2}{L_y} \right)^2 \right] \psi_n$$

con lo cual se tiene que

$$\lambda_n^2 = \left( \frac{2\hat{n}n_1}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{\hat{n}n_2}{L_y} \right)^2$$

Si la región "A" tuviese diferente geometría, otro conjunto de funciones ortogonales deben satisfacer (C-5) y las condiciones de frontera, a través del desarrollo de (C-4). Esas funciones serán soluciones de la ecuación de HELMHOLTZ (C-5).

Definiendo el promedio de una variable  $\alpha$  por

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{1}{A} \int_A \alpha \, dA$$

Entonces el valor promedio de la energía cinética por unidad de masa será

$$\bar{K} = \frac{1}{2} \overline{(u^2 + v^2)} = \frac{1}{2} \overline{\nabla \psi \cdot \nabla \psi} \quad (C-7)$$

Sustituyendo (C-4), y suponiendo que esta serie puede ser diferenciada e integrada término a término, se obtiene

$$\bar{K} = \frac{1}{2} \overline{\nabla \sum_n \psi_n \cdot \nabla \sum_m \psi_m} = \frac{1}{2} \sum_n \overline{\nabla \psi_n \cdot \sum_m \nabla \psi_m} = \frac{1}{2} \sum_n \sum_m \overline{\nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_m}$$

Pero

$$\nabla \Psi_m \cdot \nabla \Psi_n = \nabla \cdot (\Psi_m \nabla \Psi_n) - \Psi_m \nabla^2 \Psi_n$$

Suponiendo que no ocurre transporte de masa a través de las fronteras de "A", esto es;

$$\overline{\nabla \cdot (\Psi_m \nabla \Psi_n)} = 0$$

Usando (C-5), entonces se obtiene

$$\bar{K} = -\frac{1}{2} \sum_m \sum_n \overline{\Psi_m \nabla^2 \Psi_n} = \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \lambda_n^2 \overline{\Psi_m \Psi_n}$$

Puesto que las funciones  $\Psi_m$  son ortogonales, esto es,

$$\Psi_m \Psi_n = 0 \quad \text{para } m \neq n,$$

la doble suma se reduce a sumar sobre solamente un subíndice, esto es,

$$\bar{K} = \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n^2 \overline{\Psi_n^2}$$

Por lo tanto se tiene expresada la energía cinética promedio en la región "A" como una suma de contribuciones de diferentes armónicos

$$\bar{K} = \sum_n K_n$$

(C-8)

donde

$$K_n \equiv \frac{1}{2} \lambda_n^2 \overline{\psi_n^2} \quad (C-9)$$

Las contribuciones  $K_n$ , consideradas como una función de  $n$ , representan el espectro de energía cinética. Como se ve de (C-9), ellas nunca son negativas. Cuando la función corriente  $\psi$  es conocida, las funciones  $\psi_n$  pueden ser calculadas por métodos estándar de desarrollos en serie.

La vorticidad cuadrada media

$$\overline{\zeta^2} = \overline{(\nabla^2 \psi)^2}$$

puede ser expresada como una suma de contribuciones de diferentes armónicos en una forma similar. Sustituyendo (C-4), usando (C-5), y la ortogonalidad de las funciones,  $\psi_n$  se obtiene

$$\overline{\zeta^2} = \sum_n \lambda_n^4 \overline{\psi_n^2} \quad (C-10)$$

Sustituyendo la expresión (C-9) para la energía cinética de una componente  $\psi_n$ ; se encuentra para el valor promedio de la mitad de la vorticidad cuadrada (MVC)

$$\frac{1}{2} \overline{\zeta^2} = \sum_n \lambda_n^2 K_n \quad (C-11)$$

10

Comparando esto con (C-8) se ve que el número de ondas promedio está relacionado a valores promedio de la (MVC) y energía cinética. Se define el número de ondas promedio como

$$\lambda = \left\{ \frac{\sum_n \lambda_n^2 k_n}{\sum_n k_n} \right\}^{1/2} \quad (C-12)$$

Sustituyendo (C-11) y (C-8) se encuentra

$$\lambda = \left\{ \frac{1}{2} \frac{\overline{\xi^2}}{\overline{k}} \right\}^{1/2} \quad (C-13)$$

Así, cuando la velocidad es bi-dimensional y no-divergente, el número de ondas promedio está determinado por la razón de los valores promedio de la "MVC" y energía cinética.

Para estudiar la dependencia temporal de la energía de las componentes espectrales permitidas por la ecuación de vorticidad (C-3), será suficiente analizar la dependencia con el tiempo de (C-13).

(C-3) da

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \overline{\xi^2} = \overline{\xi \frac{\partial}{\partial t} \xi} = \overline{\xi \mathbb{J}(\xi, \psi)} \quad (C-14)$$

Suponiendo nuevamente que no hay transporte a través de las fronteras de A, se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{K}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 = \nabla \psi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi \\ &= -\psi \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -\psi \mathbb{I}(\psi, \psi) \end{aligned} \quad (\text{C-15})$$

Sin embargo, para cualesquiera dos cantidades escalares  $p, q$ , se tiene

$$\mathbb{I}(p, q) = \hat{k} \cdot \nabla_x (p \nabla q) = -\hat{k} \cdot \nabla_x (q \nabla p)$$

Usando el teorema de Stokes, se observa que

$$\mathbb{I}(p, q) = 0 \quad (\text{C-16})$$

si  $p$  ó  $q$  es constante a lo largo de la frontera de  $A$ .

Bajo las mismas condiciones, se obtiene

$$p \mathbb{I}(p, q) = 0, \quad q \mathbb{I}(p, q) = 0$$

Por lo tanto, si se supone que  $\psi$  es constante a lo largo de la frontera de  $A$ , (C-14) y (C-15) da

$$\frac{1}{2} \bar{\psi}^2 = \text{const}, \quad \bar{K} = \text{const}. \quad (\text{C-18})$$

En esta forma, se encuentra el número de ondas promedio que no cambia con el tiempo con flujo no-divergente bi-dimensional. En otras palabras, una cascada de energía sistemática hacia números de ondas más altos no es posible.

Después de este breve análisis, se tratará con la solución numérica de ( C-3) y el problema de inestabilidad no-lineal asociado.

Obviamente, si un esquema de diferencias finitas puede ser construido tal que conserve los valores promedios de la "MVC" y la energía cinética, el número de ondas promedio no podrá cambiar, y por lo tanto, un transporte sistemático de energía hacia los números de ondas más altos no podrá ser posible. Los esquemas de Arakawa tienen precisamente la propiedad ( C-17) de el Jacobiano analítico. Por lo tanto, los promedios de la "MVC" y energía cinética son conservados en los términos de advección, así también el número de ondas promedio. La inestabilidad no-lineal es por lo tanto prevenida. Además se debe considerar la propiedad ( C-16) y así también conservar la vorticidad promedio.

Es decir manteniendo las propiedades ( C-16) y ( C-17) en un cálculo de diferencias finitas garantizará la conservación de los dos primeros momentos de esta distribución.

Se ilustrará en forma breve el método de Arakawa considerando como satisface ( C-17). En el cálculo de diferencias finitas toma la forma

$$\sum_{i,j} \mathbb{I}_{i,j}(\varphi, \psi) = \frac{1}{N} \sum_{i,j} \tilde{f}_{i,j} \mathbb{I}_{i,j}(\varphi, \psi) = 0 \quad (II-19)$$

donde  $\mathbb{I}$  denota una aproximación en diferencias finitas del

Jacobiano, y N el número total de puntos en la Malla.

Hay varias formas de construir aproximaciones de diferencias finitas para el Jacobiano. Se pueden usar cualquiera de las tres expresiones analíticas equivalentes

$$\begin{aligned}
J(p, q) &= \partial_x^+ p \partial_y q - \partial_y^+ p \partial_x q \\
&= \partial_y (q \partial_x p) - \partial_x (q \partial_y p) \quad (C-20) \\
&= \partial_x (p \partial_y q) - \partial_y (p \partial_x q)
\end{aligned}$$

Se considerarán solamente aproximaciones de segundo orden de aproximación. Con la diferenciación especial centrada más simple, se requieren valores de  $p, q$  en un arreglo de nueve puntos para evaluar (C-20), como está mostrado en la fig. D-50. Haciendo  $d$  para el tamaño del enrejado y  $p_k, q_k$  para los valores de  $p, q$  en los puntos denotados por  $k$ . Entonces se obtienen las siguientes aproximaciones para las expresiones (C-20)

$$J^{++}(p, q) = \frac{1}{4d^2} \left\{ (p_1 - p_3)(q_2 - q_4) - (p_2 - p_4)(q_1 - q_3) \right\} \quad (C-21a)$$

$$\begin{aligned}
J^{*+}(p, q) &= \frac{1}{4d^2} \left\{ q_2 (p_5 - p_6) - q_4 (p_8 - p_7) - \right. \\
&\quad \left. - q_1 (p_5 - p_8) + q_3 (p_6 - p_7) \right\} \quad (C-21b)
\end{aligned}$$

$$J^{+x}(p, q) = \frac{1}{4d^2} \left\{ p_1 (q_5 - q_2) - p_2 (q_4 - q_7) - \right. \\ \left. - p_2 (q_5 - q_6) + p_4 (q_3 - q_7) \right\} \quad (C-21c)$$

Los superíndices + y x denotan las posiciones de los puntos desde los cuales valores de p y q, respectivamente, son usados para formar la aproximación. Cada una de las aproximaciones (C-21) es consistente y de segundo orden de precisión. Una aproximación más general pueden ser formada como una combinación lineal de esas tres, esto es

$$J(p, q) = \alpha J^{++} + \beta J^{+x} + \gamma J^{+y} \quad (C-22)$$

con el requerimiento de consistencia

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Esta aproximación es también de segundo orden de precisión.

Cuando se evalúa la suma en (C-19) usando (C-22) se obtienen 24 términos en cada punto del enrejado en la región computacional. Todos esos términos serán de la forma  $\text{const.} \cdot \sum_k q_k \sum_l p_l \sum_m v_m$ . Pero escogiendo los constantes  $\alpha, \beta, \gamma$  apropiadamente se pueden cancelar todos esos términos en los procesos de sumación, por lo tanto satisfaciendo (C-19). Por ejemplo, el punto "0" contribuirán términos a (C-19) de la forma



$$\xi_0 J_0(\xi, \psi) = \frac{1}{4d^2} (\propto \xi_0 \xi_1 \psi_2 + 23 \text{ términos más})$$

Un término conteniendo  $\xi_0 \xi_1 \psi_2$  también aparecerá en la expresión para  $\xi_1 J_1(\xi, \psi)$ .

Después de un análisis, más detallado, sobre la suma de (C-19) se deduce que la aproximación

$$J_A \equiv \frac{1}{3} (J^{++} + J^{x+} + J^{+x}) \quad (C-23)$$

Conservará la vorticidad promedio, "MVC" y energía cinética cuando es usada para la solución numérica de (C-3). Esto es más que suficiente para la prevención de inestabilidad no-lineal. La aproximación (C-23) es llamado el Jacobiano de Arakawa.

APENDICE D

Gráfica y Figuras Complementarias al trabajo.

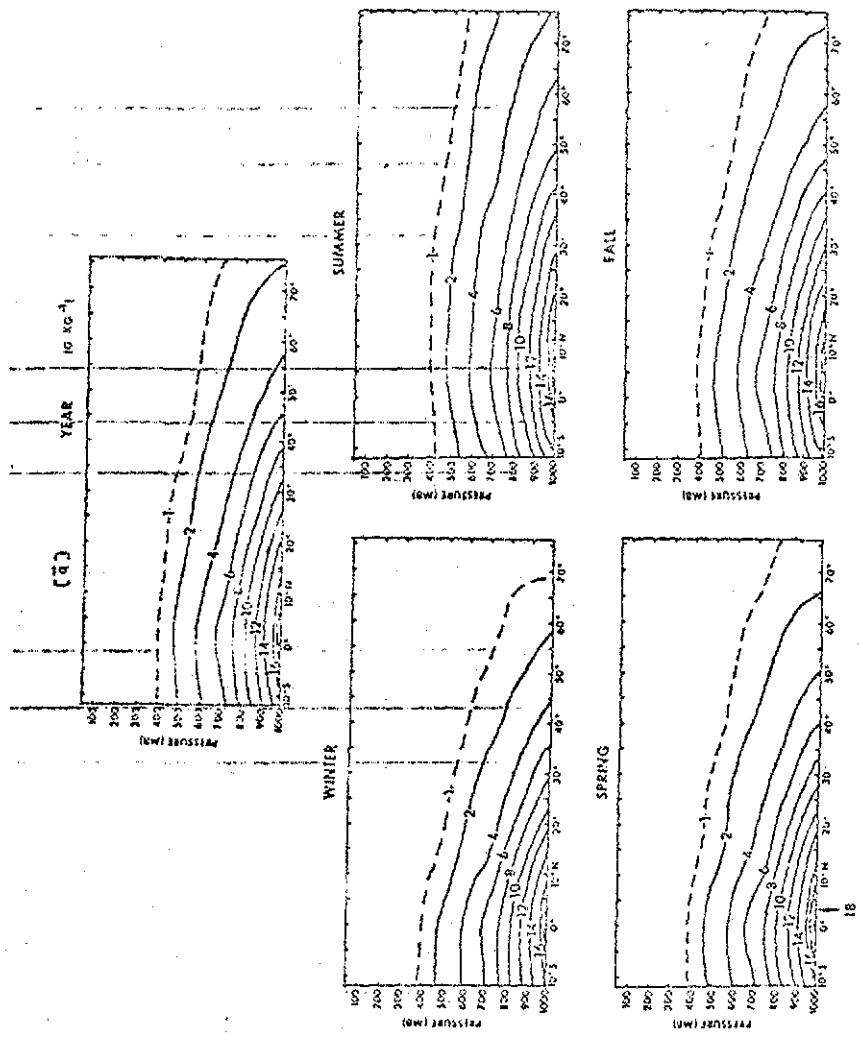
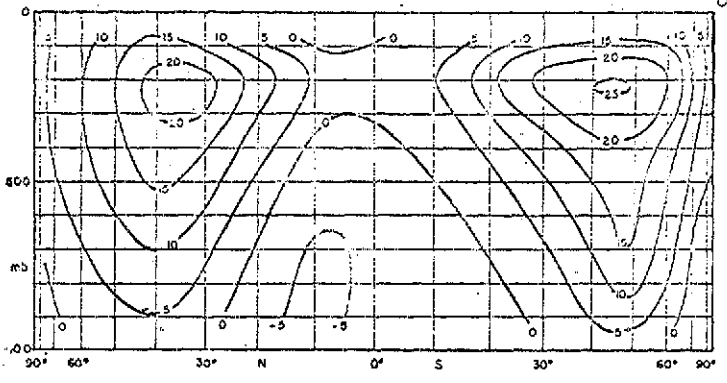
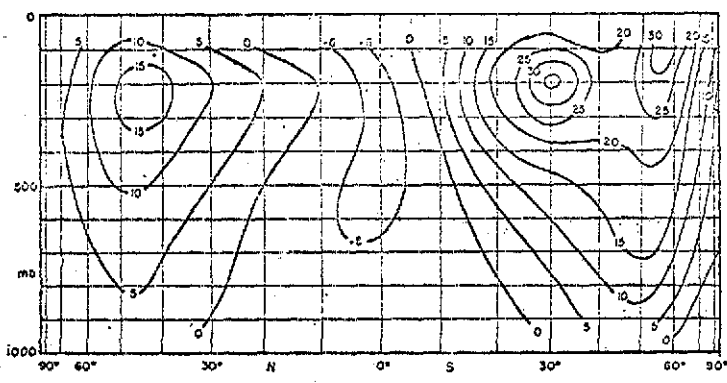


FIG. (0-1) Humedad especifica media ( $\bar{q}$ ), anual y estacional (unidades gr. de vapor de agua por kg. de aire).

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



— Corte meridional del viento zonal, promediado en tiempo y longitud, para el invierno del hemisferio norte y el verano (Octubre-Marzo) del hemisferio sur. Valores en m seg<sup>-1</sup>. Según Lorenz (1967).



— Corte meridional del viento zonal, promediado en tiempo y longitud, para el verano del hemisferio norte y el invierno (Abril-Setiembre) del hemisferio sur. Valores en m seg<sup>-1</sup>. Según Lorenz (1967).

FIG. (D-2)

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

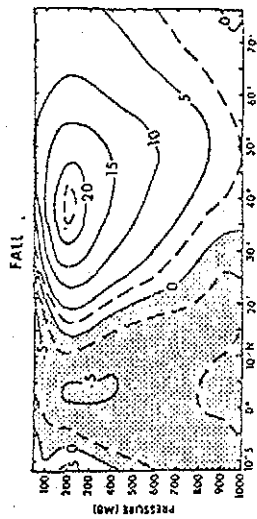
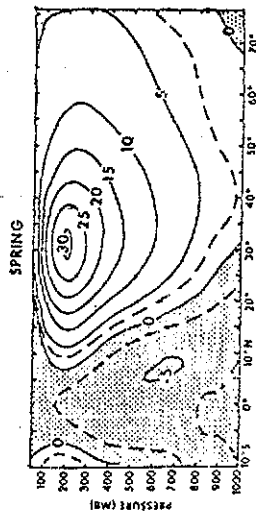
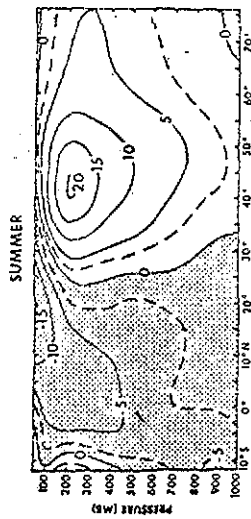
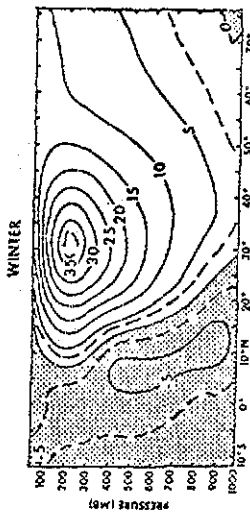
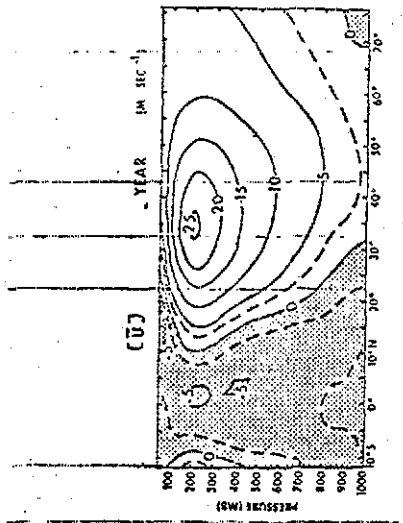


FIG. (D-3) Componente zonal media ( $\bar{u}$ ), anual y estacional (unidades en  $m\ sec^{-1}$ )

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

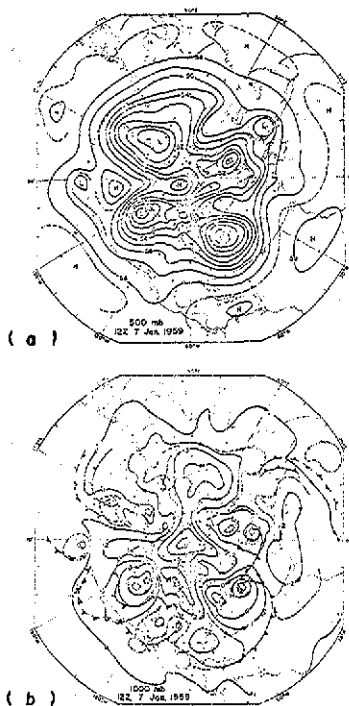
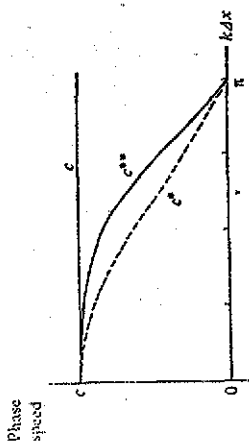


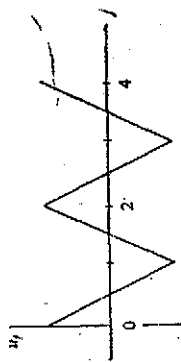
FIG. ( D-4 )

Figura (D-4) En (a), un ejemplo del patrón espectral en la superficie de 500 mb.  
En (b), superficie de 1000 mb, se muestran las condiciones asociadas en superficie.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



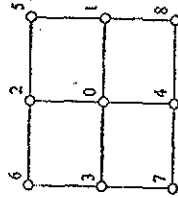
( a )



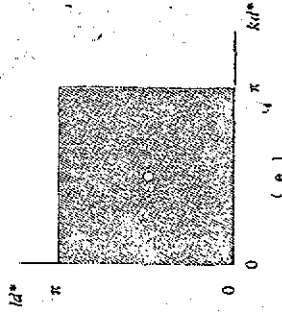
( b )



( c )



( d )



( e )

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

FIG. ( D-5 )

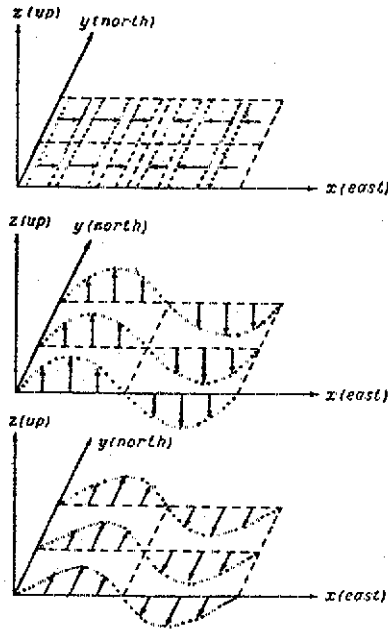


FIG. (D-6)

Figura (D-6) Distribución esquemática de las perturbaciones de velocidad asociadas con (a) ondas de compresión moviéndose hacia el Este, (b) ondas transversales-verticales moviéndose hacia el Este y (c) ondas transversales-horizontales moviéndose hacia el Este.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



LEYENDAS

- Figura (D-5a). Rapidez de fase para la ecuación lineal de - advección, C, y para la correspondiente ecuación semi-discreta con una diferenciación espacial centrada de segundo orden (C\*) y con cuarto orden (C\*\*).
- Figura (D-5b). Un ploteo de la onda "doble intervalo de enrejado", con una longitud de onda de  $2(\Delta X)$ .
- Figura (D-5c). Una onda de longitud de onda  $4 \Delta X/3$ , mal representada por el arreglo de diferencias finitas como una onda de longitud de onda  $4(\Delta X)$ .
- Figura (D-5d). Arreglo usado para definir aproximaciones al Jacobiano.
- Figura (D-5e). Región admisible de números de onda para una malla cuadrada bi-dimensional, con longitud de enrejado  $\Delta X = \Delta y = \Delta z$ .
- Figura (D- 4) En (a), un ejemplo de patrón espectral en la superficie de 500 mb, en (b), superficie de 1000 mb, se muestran las condiciones asociadas en superficie.
- Figura (D-6) Distribución esquemática de las perturbaciones de velocidad asociadas con (a) ondas de compresión moviéndose hacia el Este, (b) ondas transversales-verticales moviéndose hacia el Este y (c) ondas transversales-horizontales moviéndose hacia el Este.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN























FORMAT SEGMENT IS 007A LONG  
SEGMENT JOB IS 008E LONG

NO ERRORS DETECTED. NUMBER OF CARDS = 275. SECONDS IN PROCESSING STORAGE REQUIREMENT = 0313 WORDS.  
COMPILED IN 10.404 SECONDS. RECORDS IN PROCESSING STORAGE REQUIREMENT = 0313 WORDS.  
PROGRAM CODE FILE SECS001.RD IN PUNCH COMPILER COMPILED ON 08/07/77

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN





519.1525.1531.1535.4539.6536.9534.3537.1540.0545.6551.2557.9564.6568.6572.7574.7576.7577.4578.9581.3583.6587.3590.0591.1140.1  
519.6526.4533.0536.6540.2539.6547.0542.0545.6550.8556.6562.4568.2571.3574.3575.9577.5578.7579.8581.9584.0587.4590.8596.9599.1140.1  
521.1528.1535.2539.6544.1544.9545.7548.9552.2557.0561.9566.3570.6573.1575.7577.6579.5580.9582.4583.5584.7587.6590.5590.5590.0  
522.4529.8537.3542.7548.0550.2552.3555.8559.3563.3567.2570.1573.0575.0577.0579.2581.4583.2585.0585.2585.3587.7590.0489.6  
523.2530.9538.6544.3550.0553.1556.2559.5562.8566.2569.6572.3574.9576.7578.6580.9583.2584.3585.4585.4586.5587.7588.2588.1  
524.0532.0539.9546.0552.6556.0560.0563.2566.3569.2572.0574.4576.8578.5580.0582.0585.0585.0585.4585.4585.4585.4585.4587.7  
523.4531.6539.9540.2552.2557.0561.2564.6567.8570.7573.4575.8578.1579.7581.3583.3585.3585.7586.2586.0585.85585.2585.7586.1  
522.7531.3539.0540.4553.0558.0563.0564.1569.2572.2575.1577.2579.3580.9582.5584.0585.5586.0586.5586.3586.1585.6585.1585.0  
520.8529.4537.9544.9551.9557.2562.5566.1569.6572.3575.1577.4579.8581.5583.3584.5585.8586.2586.7586.4586.1585.6585.1585.0585.0  
518.9527.5536.0543.0550.7556.4562.0566.0570.0572.5575.0577.6580.2582.1584.0585.0586.0586.4586.8586.4586.0585.0585.0585.0  
516.1524.5532.8540.4548.0553.7559.5563.6567.4570.7573.6576.4579.2581.3583.5584.8586.0586.3586.6586.61585.7585.3585.0585.0  
513.2521.5529.6537.5545.2551.1557.0561.3565.5568.8572.1575.1578.1580.6583.0584.5586.0586.2586.3585.8585.3585.2585.0585.0  
512.8520.0527.3535.0543.0548.8559.3563.0567.2570.8573.8577.4581.9583.7585.5585.9586.61585.7585.3585.2585.0585.0  
512.3518.0524.6532.0540.8546.7552.9557.3562.8565.5569.0572.4575.8578.3580.8582.9585.0585.4585.6585.3585.0585.0  
520.2525.0529.9536.1542.3547.4552.0557.0561.7565.0568.3571.6575.0577.5580.0584.0585.4585.6585.3585.1585.0585.0

528.0531.0539.4543.8548.1552.3556.8561.3564.4567.5570.8574.1576.7579.3581.2583.0584.2585.3585.3585.2585.1585.0585.0584.9  
535.5538.8542.0545.5548.9552.7556.0560.2563.8566.4568.9571.7574.5576.7579.0580.8582.6583.9585.2585.1585.0585.0484.9  
543.0546.0549.0551.5554.0557.4560.8563.3568.3570.3572.6574.8576.7578.4580.4582.2583.6585.0585.1585.2585.1584.9  
548.3551.2554.2556.8559.5562.3565.1567.0568.9570.5572.2574.0575.9577.7579.4580.9582.5583.7585.0585.1585.2585.0585.0484.9  
553.5536.4539.3542.2545.0547.8551.4554.2557.0559.8562.6565.4568.2571.0573.8576.6579.4582.2585.0585.1585.2585.0585.0484.9



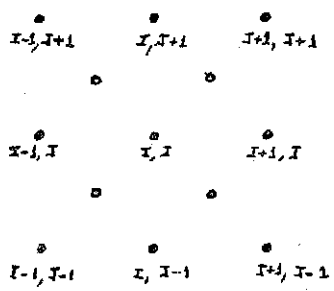


APENDICE F

Un ejemplo de programa para el caso de Modelos de ecuaciones primitivas. Por simplicidad, se analizará el esquema lógico del programa en una sola dimensión.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + f_v - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

*advección      Coriolis      Gradiente de presión*



← Muestra del arreglo (MALLA).

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \bar{u}^{xy} \bar{u}_x^y \equiv \text{TERM1}$$

$$\text{TERM1} = 0.25 * \left\{ [u(i, j) + u(i+1, j) + u(i, j+1) + u(i+1, j+1)] * [u(i+1, j+1) - u(i, j+1) + u(i+1, j) - u(i, j)] \right\} / 2 * \Delta x$$

$$f_v \equiv \bar{f}^{xy} \bar{v}^{xy} \equiv \text{TERM2}$$

**TESIS CON FALLA DE ORIGEN**

$$\text{TERM2} = 0.25 * [f(I, J) + f(I+1, J) + f(I, J+1) + f(I+1, J+1)] * \\ 0.25 * [v(I, J) + v(I+1, J) + v(I, J+1) + v(I+1, J+1)]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \equiv \overline{\Phi}'_x \equiv \text{TERM3}$$

$$\text{TERM3} = [\overline{\Phi}(I+1, J+1) - \overline{\Phi}(I, J+1) + \overline{\Phi}(I+1, J) - \overline{\Phi}(I, J)] / 2 * \Delta x$$

Tendencia de  $\mu$

$$D\phi \quad | \quad J = 1, J_{\text{MAX}} - 1$$

$$D\phi \quad | \quad I = 1, I_{\text{MAX}} - 1$$

$$\mu T(I, J) = - \text{TERM1} + \text{TERM2} - \text{TERM3}$$

1 ~~CONTINUE~~

Se calculará la tendencia en los puntos interiores,  
según el arreglo.

$$D\phi = 2 \quad J = 2, \quad J_{MAX} = 2$$

$$D\phi = 2 \quad I = 2, \quad I_{MAX} = 2$$

$$UTT = 0.25 * [ \mu_T(I-1, J-1) + \mu_T(I, J-1) + \mu_T(I-1, J) + \mu(I, J) ]$$

$$U_A = \mu(I, J)$$

$$\mu(I, J) = \mu_0(I, J) + DT * 2 * UTT$$

$$\mu_0(I, J) = U_A$$

## 2 CONTINUE

Cuando  $F_m$  más niveles  $\Rightarrow$   $F$  un índice más, por ejemplo K.

En este caso se tiene

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mu}{\partial x} + f_v - \frac{\partial \phi}{\partial x} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}$$

Los términos  $\mu \frac{\partial \mu}{\partial x}$  y  $f_v$  se calculan como antes.

$$\begin{array}{rcl}
 \mu & \text{-----} & K+1 \\
 \sigma & \text{-----} & K+1/2 \\
 \mu & \text{-----} & K \\
 \sigma & \text{-----} & K-1/2 \\
 \mu & \text{-----} & K-1
 \end{array}$$

← angolo in  
la Vertical

$$\sigma \frac{\partial \mu}{\partial \sigma} \equiv \overline{\sigma \mu}^{\sigma y} \equiv \text{TERM 4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{TERM 4} = & 0.5 * \left\{ \sigma(I, J, K-1/2) * \left[ \mu(I, J, K-1) + \mu(I+1, J, K-1) + \mu(I, J+1, K-1) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mu(I+1, J+1, K-1) \right] - 0.25 * \left[ \mu(I, J, K) + \mu(I+1, J, K) + \mu(I, J+1, K) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mu(I+1, J+1, K) \right] \right\} + \\
 & \left. \left\{ \sigma(I, J, K+1/2) * \left[ 0.25 * \left[ \mu(I, J, K) + \mu(I+1, J, K) + \mu(I, J+1, K) \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \mu(I+1, J+1, K) \right] - 0.25 * \left[ \mu(I, J, K+1) + \mu(I+1, J+1, K+1) + \mu(I, J+1, K+1) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \mu(I+1, J+1, K+1) \right] \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \equiv \overline{\frac{\sigma}{x}}^{\sigma y} \equiv \text{TERM 3}$$

$$\begin{aligned} \text{TERM 3} = 0.25 * \left\{ \left[ \Phi(I+1, I+1, K-1/2) - \Phi(I, I+1, K-1/2) + \right. \right. \\ \left. \left. \Phi(I+1, I, K-1/2) - \Phi(I, I, K-1/2) \right] / 2 * \Delta x + \right. \\ \left. \left[ \Phi(I+1, I+1, K+1/2) - \Phi(I, I+1, K+1/2) + \right. \right. \\ \left. \left. \Phi(I+1, I, K+1/2) - \Phi(I, I, K+1/2) \right] / 2 * \Delta x \right\} \end{aligned}$$

Con lo cual se calculará la tendencia de  $\mu$  como:

$$D\phi \quad | \quad K=1, K_{MAX}-1$$

$$D\phi \quad | \quad I=1, I_{MAX}-1$$

$$D\phi \quad | \quad I=1, I_{MAX}-1$$

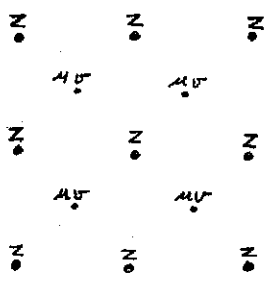
$$\mu T(I, I) = - \text{TERM1} + \text{TERM2} - \text{TERM3} - \text{TERM4}$$

↓ CONTINUE

Se sobre-entiende la continuación de la secuencia lógica a seguir.

Se analizarán brevemente otros arreglos horizontales a través de la ecuación

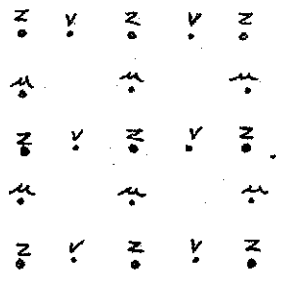
$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = f v - g \frac{\partial z}{\partial x}$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial t} &= f v - g \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= f v - g \bar{z}'_x \\ &= f(I+1/2, J+1/2) * v(I+1/2, J+1/2) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &g [z(I+1, J+1) - z(I, J+1) + z(I+1, J) - \\ &z(I, J)] / 2 * \Delta x \end{aligned}$$

Nótese que no se tiene promedio en el término de Coriolis.



$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -g \bar{z}^{xy} + f \bar{v}^{xy}$$

$$\begin{aligned} \mu T(I, J) = & -0.25 * g \left\{ [Z(I+1, J+1) - Z(I, J+1) + Z(I+1, J) - \right. \\ & \left. Z(I, J)] / 2 * \Delta x^2 + \right. \\ & \left. [Z(I, J+1) - Z(I-1, J+1) + Z(I, J) - Z(I-1, J)] / \Delta x \right\} \\ & + f(I, J+1/2) * 0.25 * \left\{ v(I+1/2, J+1) + v(I-1/2, J+1) \right. \\ & \left. + v(I+1/2, J) - v(I-1/2, J) \right\} \end{aligned}$$

Como puede notarse, existen una gran variedad de arreglos de los campos en la horizontal, pero se utilizará el más adecuado al problema, de acuerdo al máximo "rendimiento" físico-matemático que involucra cada arreglo.



- Adem, J. 1962 "On the theory of the general circulation of the Atmosphere".  
Tellus, Vol. 4, No. 1.
- Arakawa, A. 1966 "Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. Part 1".  
Journal of computational physics 1, 119-143.
- Alvarez, G.G.S. 1978 "Integración numérica del modelo barotrópico para el flujo atmosférico sobre la República Mexicana".  
Tesis profesional. Facultad de Ciencias,  
U.N.A.M.
- Arfken, G. 1970 "Mathematical methods for physicists".  
Academic Press.
- Armendariz, C.S.A. 1978 "Principios del pronóstico numérico a corto plazo modelo barotrópico".  
Tesis profesional. Escuela Superior de Física y Matemáticas, I.P.N.
- Buendía, C.E. y Morales, A.T. 1976-77 "Integración numérica preliminar del modelo barotrópico en la Región IV, Parte I". Vol. 22-23

Buendía, C.E. y Morales, A.T. 1977 "Global thermodynamic Model" Third Conference on Numerical Weather Prediction. Omaha, Nebr. Conference paper. American Meteorological Society 117-133.

Buendía, C.E., Morales, A.T., 1979 "Incorporation of a variable lapse rate in the global thermodynamic model". Journal of meteorological society of Japan. Vol. 57, No. 1.

Carnahan, B., Luther, H.A., 1969 "Applied numerical methods" John Wiley.

Cressman, G. P. 1958 "Barotropic divergence and very long atmospheric waves". Mon. Wea. Rev. August.

Dennery, P. and KRZYWICKI, A. 1967 " Mathematics for physicists" Harper-Row.

Eliassen, A. 1956 "A procedure for numerical integration of the primitive equations of the two-parameter model of the atmosphere" Scientific report No. 4. U.C.L.A.

Fischer, G. 1965 "A survey of finite-difference approximations to the primitive equations" Mon. Wea. Rev., Vol. 93, No. 1.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

- Fowles, G.R. 1970 "Analytical mechanics"  
Holt, Rinehat and Winston Inc.
- Haltiner, G.J. and Williams, R.T. "Some recent advances in  
numerical weather prediction"  
Mon. Wea. Rev., Vol. 103
- Haltiner, G.J. 1971 "Numerical Weather Prediction"  
John Wiley
- Hess, S.L. 1959 "Introduction to theoretical meteorology"  
Holt, Rinehat Winston, N.Y.
- Holton, J.R. 1973 "An introduction to dynamic meteorology"  
Academic Press.
- Kasakara, A. 1965 "On certain finite-difference methods for  
fluid dynamics"  
Mon. Wea. Rev., Vol. 93, No. 1.
- Kasakara, A. 1977 "Numerical integration fo the global baro  
tropic primitive equations with Hough  
Harmonic Expansion"  
Journal of the atmospheric sciences,  
Vol. 34, No. 5.
- Krishnamurti, T.N. 1975 "Lectures on tropical meteorological"  
Report No. 75-8.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

- Kurihara, Y. 1965 "On the use of implicit and iterative methods for the time integration of the wave equation"  
Mon. Wea. Rev., Vol. 93, No. 1.
- Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. 1959 "Fluid Mechanics".  
Addison-Wesley.
- Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. 1965 "Mecánica"  
Reverté.
- Lilly, D.K. 1965 "On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems"  
Mon. Wea. Rev., Vol. 93, No. 1.
- Lorenz, E.N. 1967 "The nature and theory of the general circulation of the atmosphere"  
N. M. O.
- Mesinger, F. and Arakawa, A. 1976 "Numerical methods used in atmospheric Models"  
GARP Publications Series No. 17.
- Monin, A.S. 1972 "Weather forecasting as a problem in physics"  
The MIT Press Cambridge, Massachusetts,  
London, England.

- 111
- Platzman, G.W. 1958 "The lattice structure of the finite-difference primitive and vorticity equations"  
Mon. Wea. Rev., Vol. 86, No. 8.
- Phillips, N.A. 1960 "On the problem of initial data for the primitive equations"  
Tellus XII.
- Rosenthal, S.L. 1965 "Some preliminary theoretical considerations of tropospheric wave motions in equatorial latitudes".  
Mon. Wea. Rev., Vol. 93, No. 10.
- Robert, A.J., Shuman, F. G. and Gerrity, J.P. Jr. 1970 "On partial difference equations in mathematical physics"  
Mon. Wea. Rev., Vol. 98, No. 1.
- Saucier, J. 1967 "Principles of meteorological analysis"  
The University of Chicago Press.
- Shapiro, R. 1970 "Smoothing, Filtering, and boundary effects"  
Reviews of Geophysics and Space Physics,  
Vol. 8, No. 2.
- Silberman, I. 1954 "Planetary waves in the atmosphere"  
Journal of Meteorology, Vol. 11, 27-34.

Sokolnikoff, J.S. 1951 "Tensor Analysis"  
John Wiley.

Shuman, F.G. 1957 "Numerical methods in weather prediction: II. Smoothing and Filtering"  
Mon. Wea. Rev., Vol. 85, No. 11.

Shuman, F.G. 1962 "Numerical experiments with the primitive equations.  
Meteorological Society of Japan.  
Proceedings of the International Symposium of Numerical Weather Prediction in Tokyo.

Shuman, F.G. and Stackpole, J.D. 1968 "Note on the formulation of finite difference equations incorporating a map scale factor"  
Mon. Wea. Rev., Vol. 96, No. 3.

Tu-cheng Yeh 1949 "On energy dispersion in the atmosphere"  
Journal of Meteorology. Vol. 6, No. 1.

Tokyo 1969 "Proceedings of the WMO/IUGG Symposium on Numerical Weather Prediction in Tokyo"  
Japan Meteorology Agency.

U. R. S. S. 1965 "Lectures on numerical short-range Weather  
Prediction"

Moscow.

Wolff, P.M. k958 "The error in numerical forecasts due to  
to retrogression of ultra-long waves".

Mon. Wea. Rev., Vol. 86, No. 7.