

2 eje



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DISEÑO DE MARCOS RIGIDOS DE ACERO  
ESTRUCTURAL CONFORME AL RCDF - 1987

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERO CIVIL  
P R E S E N T A:

FELIX CAMPOS RIOS



ESTA TESIS NO DEBE  
SER DE LA BIBLIOTECA

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Ciudad Universitaria

1994



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIRECCION  
60-I-204

SR. FELIX CAMPOS RIOS  
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Ing. Marco Antonio Alvarez Solis, y que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de ingeniero civil.

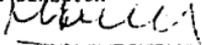
DISEÑO DE MARCOS RIGIDOS DE ACERO  
ESTRUCTURAL CONFORME AL RCDF-1987

- I. INTRODUCCION
- II. ALCANCES
- III. ASPECTOS GENERALES DE LOS MARCOS RIGIDOS
- IV. METODOS DE ANALISIS
- V. EJEMPLO
- VI. CONCLUSIONES

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

A t e n t a m e n t e  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Ciudad Universitaria, D.F., a 25 de septiembre de 1989  
EL DIRECTOR

  
DANIEL RESENDIZ NUÑEZ

DRN/MJC/jrs  
ra

**DEDICO ESTE TRABAJO**

**A MIS PADRES POR SU CARIÑO Y BUEN EJEMPLO.**

**A MI ESPOSA CON AMOR.**

**A MIS HIJOS FELIX JULIAN Y MARA CINDY POR SU  
NATURAL ALEGRÍA.**

**A MIS HERMANOS MARIA LUISA, RAUL, NIDIA,  
RAFAEL, ANA MARÍA Y MARGARITA POR SU  
INCONDICIONAL APOYO.**

**A MIS COMPAÑEROS DE TRABAJO POR SUS  
COTIDIANAS ENSEÑANZAS.**

**Expreso mi agradecimiento al Ing. Marco Antonio Alvares Solis por su dirección y a Carlos Badillo Pérez por su colaboración en la transcripción de este trabajo.**

**DISEÑO DE MARCOS RIGIDOS DE ACERO  
ESTRUCTURAL CONFORME AL RCDF-1987**

INDICE	Pag.
<b>CAPITULO I</b>	
INTRODUCCION.	1
<b>CAPITULO II</b>	
ALCANCES.	3
II.1 Criterios de diseño .....	3
II.2 Tipo de estructura .....	4
II.3 Ejemplos .....	4
<b>CAPITULO III</b>	
ASPECTOS GENERALES DE LOS MARCOS RIGIDOS.	8
III.1 El marco rígido como sistema estructural .....	8
III.2 Descripción del marco rígido .....	12
<b>CAPITULO IV</b>	
METODOS DE ANALISIS.	13
IV.1 Principios fundamentales del análisis estructural .....	14
IV.2 Método de flexibilidades .....	18
IV.3 Método de rigideces .....	30
<b>CAPITULO V</b>	
EJEMPLOS.	42
V.1 Ejemplo No. 1 .....	42
V.1.1 Análisis del marco .....	42
V.1.2 Dimensionamiento de los elementos estructurales .....	62
V.1.2.1 Requisitos de seguridad.....	62
V.1.2.1a Diseño de la trabe T-2.....	63
V.1.2.1b Diseño de la columna C-2B.....	66
V.1.2.1c Diseño de la conexión X-2B.....	73
V.1.2.1d Diseño de la placa base PB-C.....	83
V.2 Ejemplo No. 2 .....	88
<b>CAPITULO VI</b>	
COMENTARIOS Y CONCLUSIONES.	100

## INDICE DE FIGURAS

Fig.	TITULO	Pag.
1	Estructuración propuesta para ejemplificar el análisis y dimensionamiento de marcos rígidos.....	6
2	Sistemas de carga en el eje 2.....	6
3	Elementos estructurales del eje 2 en los que se revisarán los estados límite de falla.....	7
4	Marco rígido del 2 ejemplo, para mostrar la aplicación del método de análisis de flexibilidades.....	7
5	Marcos rígidos de construcciones industriales y de construcciones urbanas.....	9
6	Marco contraventeado. Conexiones articuladas.....	10
7	Marco contraventeado. Conexiones rígidas.....	10
8	Marcos contraventeados en plataformas marinas.....	11
9	a) Polinomio de primero ó segundo grado, b) Polinomio de primer grado.....	28
10	a) Polinomio de tercero ó cuarto grado, b) polinomio de primer grado.....	27
11	Signos convencionales para el método de rigideces.....	31
12	Deformaciones angulares en un elemento recto.....	35
13	Cargas factorizadas. Numeración de nudos, y numeración y orientación de las barras.....	43
14	Grados de libertad del marco.....	43
15	Cargas factorizadas.....	53
16	Placa base.....	83

## **CAPITULO I**

### **INTRODUCCION**

Los dos materiales más importantes en las estructuras civiles modernas son el acero y el concreto reforzado. De entre ellos, el acero tiene mejores propiedades de resistencia, rigidez y ductilidad. Su eficiencia estructural es además alta debido a que puede fabricarse en secciones con la forma más adecuada para resistir flexión, compresión u otro tipo de sollicitación.

El acero estructural tiene ventajas importantes cuando se pretenden cubrir áreas grandes con pocos apoyos intermedios y cubiertas ligeras. Su peso propio relativamente reducido, facilidad para apoyar o colgar de la estructura maquinaria y equipo, y la sencillez con que se modifica o amplía cuando es necesario, convierten al acero en el material estructural más adecuado para la construcción de fábricas, bodegas, almacenes, cines y gimnasios cubiertos.

Su utilización en edificios altos refleja algunas ventajas: menor peso en la estructura, disminuyendo el costo de la cimentación y reduciendo las sollicitaciones sísmicas, ductilidad y capacidad de admitir deformaciones inelásticas sin sufrir daños importantes, mayor resistencia, que permite obtener elementos estructurales de dimensiones menores, y el hecho de que la estructura se fabrique fuera de la obra al mismo tiempo que se construye la cimentación, disminuyendo el tiempo total de construcción y con ello el costo total de la obra.

En el ámbito de la Industria Petrolera, se fabrican plataformas marinas para ser instaladas en los litorales del país, principalmente en la zona denominada Sonda de Campeche en el Golfo de México, con la finalidad de proporcionar en algunos lugares del mar, áreas de trabajo y campamento. Hasta la fecha, en nuestro país, se han fabricado e instalado plataformas marinas sobre subestructuras cimentadas profundamente mediante pilotes. La estructura en su totalidad se fabrica de acero estructural.

El empleo de la soldadura para interconectar a los elementos estructurales de acero a originado que se obtengan estructuras más eficientes y económicas.

Entre las desventajas que presenta el acero como material estructural se encuentran su baja resistencia al fuego y la posibilidad de ser atacado por la corrosión.

La resistencia estructural del acero depende en alto grado de la temperatura. La pérdida de resistencia estructural es bastante notable a altas temperaturas y la fractura frágil, sin que fluya el material, se asocia con las bajas temperaturas, obligando a emplear costosos recubrimientos y cierto mantenimiento en condiciones ambientales severas.

En las estructuras mencionadas, el marco rígido es el sistema estructural más comúnmente usado, en las que constituye generalmente el esqueleto vertical resistente.

Debido a la amplia utilización de los marcos rígidos en las estructuras actuales, en este trabajo se revisará el procedimiento de diseño establecido en el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (RCDF) de 1987.

Para tal efecto, en el Capítulo II se exponen los lineamientos generales del RCDF - 1987 para el diseño de marcos rígidos de acero estructural y se proponen dos marcos rígidos sencillos para su solución.

En el Capítulo III se mencionan algunas de las ventajas que resultan cuando se utilizan en las construcciones los sistemas estructurales a base de marcos rígidos y se describen los elementos que lo forman.

El Capítulo IV presenta dos opciones para efectuar el análisis estructural de los marcos rígidos, el método de flexibilidades y el de rigideces.

La solución de los marcos rígidos propuestos en el Capítulo II se presenta en el Capítulo V. El análisis estructural se realiza con los métodos desarrollados en el Capítulo IV y el dimensionamiento, con los procedimientos y requisitos especificados por el RCDF - 1987.

Finalmente, en el Capítulo VI se presentan los comentarios y conclusiones del trabajo realizado.

## CAPITULO II

### ALCANCES

En este capítulo nos hemos planteado como objetivo describir en forma breve algunos de los aspectos que deben considerarse durante las etapas de análisis y dimensionamiento de marcos rígidos de acero estructural, según lo establecido por el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal RCDF de 1987. Se proponen además, dos ejemplos sencillos para su análisis y dimensionamiento.

#### II.1 CRITERIOS DE DISEÑO

El proceso del Diseño Estructural está necesariamente ligado a reglamentos y normas; estos documentos cambian frecuentemente a medida que se incorporan nuevos conocimientos y nuevas técnicas. En el desarrollo de los temas aquí tratados, se adoptan los procedimientos y requisitos especificados por el RCDF, el cual estipula que para que una construcción cumpla con las funciones para las que está siendo proyectada, es necesario que la respuesta de la estructura ante las acciones externas, se mantenga dentro de límites que no afecten su correcto funcionamiento ni su estabilidad. Se llama estado límite (ó límite de utilidad estructural) de una estructura, a cualquier etapa de su comportamiento a partir del cual su respuesta se considera inaceptable.

En el Capítulo III del Título Sexto del RCDF se establece que toda estructura y cada una de las partes que la componen, deberán diseñarse para cumplir con los siguientes requisitos básicos:

I.- Tener seguridad adecuada contra la aparición de todo estado límite de falla posible ante las combinaciones de acciones mas desfavorables que puedan presentarse durante su vida esperada y

II.- No rebasar ningún estado límite de servicio ante combinaciones de acciones que correspondan a condiciones normales de operación.

Los estados límite de falla son aquellos relacionados con la seguridad y corresponden a situaciones en las que la estructura sufre falla total o parcial, o simplemente presenta daños que afectan su capacidad para resistir nuevas acciones. La falla de una sección por cortante, flexión, torsión, carga axial o cualquier combinación de esos efectos, constituye un estado límite de falla, así como la inestabilidad o falta de equilibrio global de la estructura, el pandeo de uno de sus miembros o el pandeo local de una sección. Se debe evitar la aparición de estados límite de falla debidos a las acciones que ocurren durante la operación normal de la estructura y a las acciones correspondientes a condiciones extremas.

El otro tipo de estados límite se relaciona con aquellas situaciones que afectan el correcto funcionamiento de la construcción, y comprenden las deflexiones, agrietamientos y vibraciones excesivas, así como el daño en elementos no estructurales de la construcción. Los requisitos de servicio se relacionan principalmente con la rigidez de la estructura y de sus miembros; de ella dependen principalmente los movimientos, flechas y vibraciones.

Para satisfacer los requisitos indicados en I (estados límite de falla), debe revisarse que para las distintas combinaciones de acciones especificadas en el RCDF y para cualquier estado límite de falla posible, la resistencia de diseño sea mayor al efecto de las acciones que intervengan en la combinación de cargas en estudio, multiplicado por el factor de carga correspondiente. Lo anterior se expresa como sigue:

$$(FR)(R) \geq (Fc) \left( \sum S_n \right)$$

El significado de los símbolos que aparecen en esta expresión es el siguiente:

- $R$  = Resistencia nominal  
 $FR$  = Factor de reducción de la resistencia correspondiente a la resistencia nominal que se está considerando.
- $\sum S_n$  = Acción especificada en el Reglamento (el símbolo  $\Sigma$  indica que debe considerarse la suma de todas las acciones que tengan una probabilidad no despreciable de ocurrir simultáneamente).
- $F_c$  = Factor de carga, correspondiente a la acción o combinación de acciones que se está considerando.

El producto ( $FR$ ) ( $R$ ) recibe el nombre de resistencia de diseño.

Las acciones, y las combinaciones entre ellas, así como los factores de carga que han de considerarse en el análisis, se incluyen en el Título Sexto del Reglamento.

Las resistencias nominales y de diseño con las que ha de revisarse cada uno de los posibles estados límite de falla dependen de las características de los materiales, por lo que en las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Acero se proporcionan los valores del factor de reducción  $FR$  que corresponde a los elementos y estructuras que deben diseñarse de acuerdo a ellas, y se dan métodos y fórmulas para evaluar, en cada caso, las resistencias nominales.

En la revisión de los estados límite de servicio se toma siempre un factor de carga unitario; es decir, la revisión se efectúa con las cargas nominales (cargas de trabajo).

## II.2 TIPO DE ESTRUCTURA

Las características de una estructura de acero dependen, en buena parte, de las conexiones entre los elementos que la componen, las que determinan la manera en que interactúan esos elementos.

En las Normas Técnicas Complementarias se establecen dos tipos básicos de estructuras; las estructuras continuas o marcos rígidos (tipo 1), cuyo análisis y diseño se basa en la suposición de que al deformarse las estructuras no se alteran los ángulos que forman los ejes de las barras que concurren en cada conexión, y las tipo 2, que se analizan y diseñan como si las vigas estuviesen articuladas en las columnas. En este trabajo nos ocuparemos de las estructuras continuas o marcos rígidos.

## II.3 EJEMPLOS

Desarrollaremos dos de las etapas fundamentales del Proceso de Diseño de un sistema estructural. Las etapas son el análisis y el dimensionamiento, tomando como punto de partida la estructuración a base de marcos rígidos de acero estructural y el sistema de carga actuante.

Consideraremos como primer ejemplo, la estructuración que se muestra en la Figura 1 y los sistemas de carga que se indican en la Figura 2. Analizaremos estructuralmente el marco del eje 2 utilizando el método de rigideces que se desarrollará en un capítulo posterior. El análisis se efectuará para cada combinación de cargas que indica el RCDF y los cálculos los realizaremos auxiliándonos con una calculadora de escritorio.

En la Figura 3, se muestran los elementos estructurales del marco del eje 2 que se han seleccionado para revisar los diferentes estados límite de falla; la trabe T-2, la columna más solicitada de entre las C-2A y C-2B, la conexión rígida X-2B y la placa base PB- C.

El método de flexibilidades será desarrollado en un capítulo posterior para su utilización como un método alternativo en el análisis de marcos rígidos. Para mostrar su aplicación incluiremos, como segundo ejemplo, un marco con un sistema de cargas arbitrario, como el mostrado en la figura 4. En este marco no efectuaremos el dimensionamiento de los elementos estructurales.

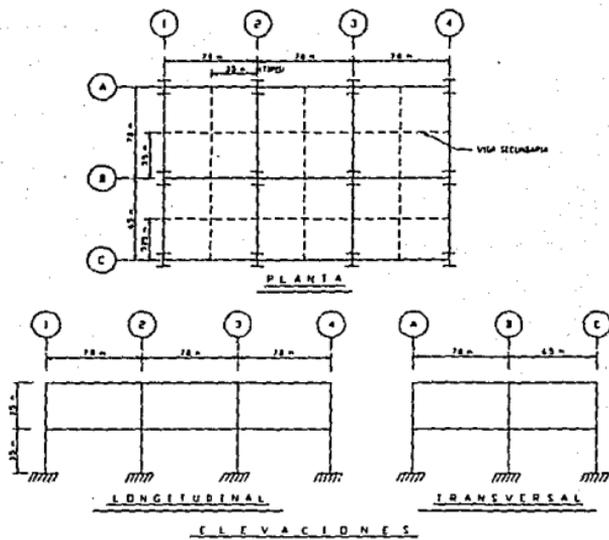


Figura 1. Estructuración propuesta para ejemplificar el análisis (método de rigideces) y dimensionamiento de marcos rígidos.

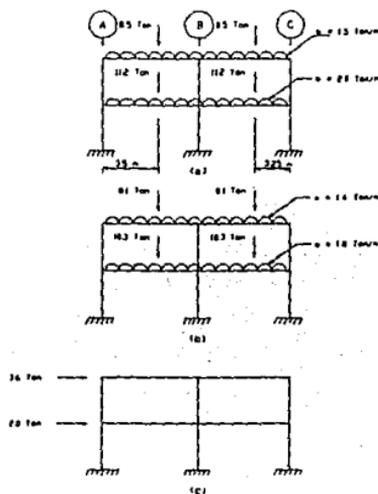


Figura 2. Sistemas de carga en el cje 2. a) cargas muertas más cargas vivas máximas. b) cargas muertas más cargas vivas instantáneas y c) cargas laterales (sismo).

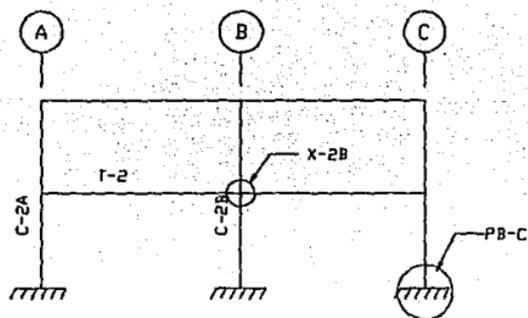


Figura 3. Elementos estructurales del eje 2 en los que se revisarán los estados límite de falla.

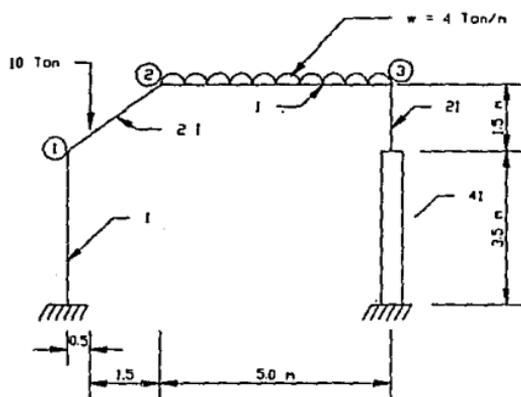


Figura 4. Marco rígido del segundo ejemplo, para mostrar la aplicación del método de análisis de flexibilidades.

## CAPITULO III

### ASPECTOS GENERALES DE LOS MARCOS RIGIDOS.

#### III.1 EL MARCO RIGIDO COMO SISTEMA ESTRUCTURAL

Una estructura se forma generalmente con algunos de los elementos estructurales básicos tales como columnas, vigas, contraventeos, arcos, losas y muros. En el arreglo estructural se deben aprovechar las características peculiares de cada elemento para lograr la forma más eficiente del sistema estructural global.

Algunos de los sistemas estructurales más empleados en las estructuras son aquellos arreglos formados por barras, que pueden ser tipo marco o tipo armadura y aquellos formados mediante placas verticales (muros) y horizontales (losas), denominados generalmente tipo cajón. Existen además, diversos sistemas estructurales que pueden formarse combinando los elementos estructurales básicos mencionados anteriormente.

Sabemos que la principal función de una estructura es transmitir las cargas vivas verticales y el peso de instalaciones, cubiertas, muros, cancelos, etc., a la cimentación y, eventualmente, al terreno. La existencia de la estructura resistente ocasiona incrementos en las cargas verticales y la aparición de empujes de viento ó fuerzas de inercia ocasionadas por el movimiento del terreno durante un temblor. Para obtener estructuras económicas deben minimizarse las solicitaciones que se han de resistir, lo anterior puede lograrse reduciendo las cargas o utilizando sistemas estructurales que las transmitan al terreno de la manera más eficiente posible. Las cargas vivas y ciertas cargas muertas, no pueden reducirse en general, pues constituyen la razón de ser de las estructuras, en cambio, sí puede disminuirse el peso propio, y con él, los efectos ocasionados por temblores.

El sistema estructural más eficiente suele ser el que resiste las fuerzas accidentales horizontales, de sismo o viento, con el menor incremento de material por encima del necesario para soportar las inevitables cargas permanentes.

Se cuenta con tres alternativas para proporcionar resistencia y rigidez laterales en una estructura: marcos rígidos, contraventeos verticales y muros de cortante, cualquier problema puede resolverse con uno solo o combinándolos.

Los marcos rígidos convencionales (fig. 5) son eficientes en construcciones urbanas o fabriles de poca altura, pero dejan de serlo cuando, al crecer ésta, se vuelven críticos los efectos de las fuerzas horizontales, que se resisten esencialmente por flexión tanto en las vigas como en las columnas, lo que obliga a aumentar sus dimensiones para obtener la resistencia y rigidez lateral necesarias. Esta limitación se supera si se recurre a utilizar contraventeos ó muros que por su alta rigidez absorben la mayor parte de las cargas laterales. Los contraventeos verticales y los muros de cortante resisten las fuerzas horizontales de manera más eficiente. Los primeros en tensión o compresión, aprovechan las propiedades del acero mucho mejor que cuando trabajan en flexión; los muros de cortante suelen ser de concreto reforzado.

El uso de contraventeos y de los muros de cortante hacen que el marco rígido deje de ser indispensable al poder construir con vigas y columnas articuladas entre sí la estructura de soporte de un edificio, proporcionando la rigidez y resistencia laterales necesarias para evitar problemas de inestabilidad y para soportar los efectos producidos por fuerzas horizontales por medio de armaduras verticales formadas por las columnas, vigas y contraventeos en diagonal colocados entre ellas (fig. 6). Sin embargo es conveniente utilizar marcos rígidos aún cuando se empleen elementos resistentes adicionales, de manera que las cargas verticales permanentes sean soportadas fundamentalmente por ellos y ayuden a resistir las solicitaciones horizontales eventuales (fig. 7).

Los marcos contraventeados son una buena solución para edificios de altura intermedia, al diseñarlos se busca que el marco propiamente dicho resista las cargas verticales permanentes y el contraventeo las horizontales.

En estructuras industriales se emplean contraventeos verticales, combinados muchas veces con marcos rígidos.

El sistema estructural de las plataformas marinas es a base de marcos rígidos y contraventeos verticales (fig. 8).

Los marcos rígidos forman parte de una estructura tridimensional, en la que se encuentran orientados en dos direcciones frecuentemente ortogonales. Sin embargo, en este trabajo, para su análisis y diseño, consideraremos a cada marco como una estructura plana, soportada lateralmente por los marcos normales a él, despreciando los momentos torsionantes de las vigas pero teniendo en cuenta que las columnas están sometidas a flexión biaxial, por formar parte de los dos marcos que se cruzan en ella.

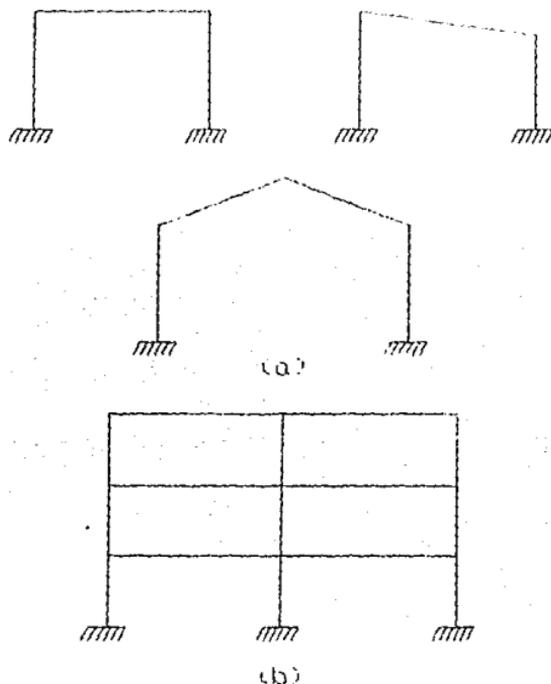


Figura 5. (a) Marcos rígidos de construcciones industriales y (b) de construcciones urbanas.

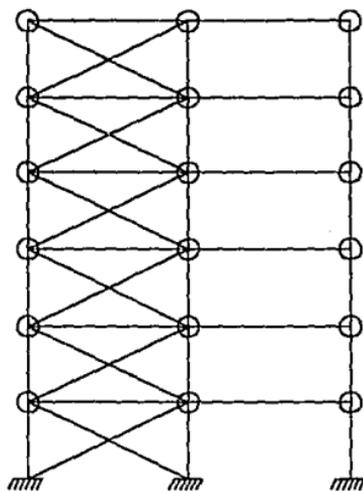


Figura 6. Marco contraventado. Conexiones articuladas.

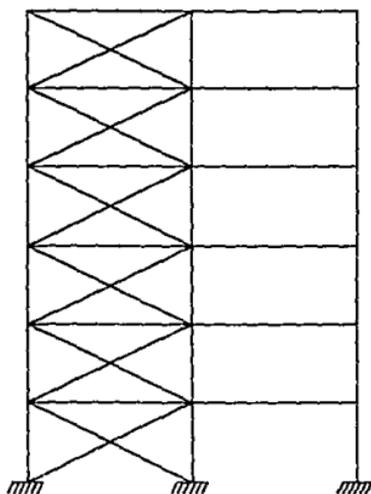
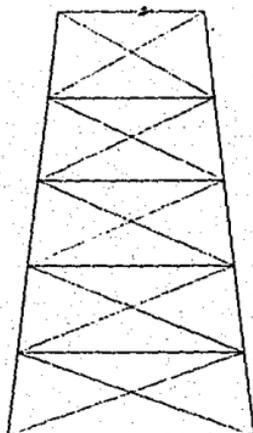
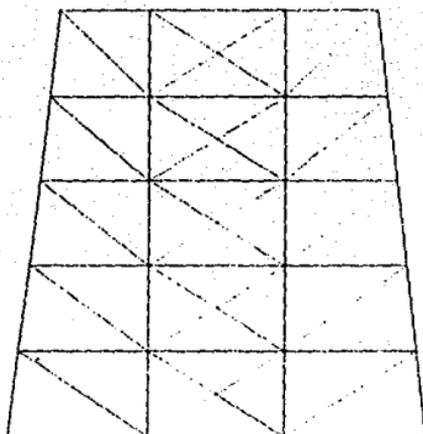


Figura 7. Marco contraventado. Conexiones rígidas.



(a)



(b)

Figura 8. Marcos contraventeados en plataformas marinas con conexiones rígidas. a) Marcos transversales y b) Marcos longitudinales.

## III.2 DESCRIPCIÓN DEL MARCO RÍGIDO

Un marco es una estructura formada por vigas y columnas como miembros principales.

El marco más elemental que puede imaginarse, para transmitir cargas verticales solamente, es el que se obtiene por la simple superposición de vigas sobre columnas, de manera que cada uno cumple su función sin una interacción compleja entre ellos, las vigas trasladan las cargas verticales hacia sus apoyos y las columnas las bajan a la cimentación. En este sistema no existe transmisión de momentos entre vigas y columnas, lo que hace que la distribución de cargas sea poco eficiente, especialmente para cargas laterales. La resistencia a cargas laterales se funda en el trabajo en voladizo de las columnas, que deben estar empotradas en la cimentación.

Un marco rígido está formado por vigas, columnas, conexiones rígidas entre ellas y elementos de contraventeo, si son necesarios. La transmisión de cargas de uno a otro miembro de la estructura no se realiza por simple sobreposición, sino que la conexión existente entre ellos tiene rigidez suficiente para transmitir momentos, fuerzas normales y cortantes sin que haya desplazamientos lineales o angulares relativos entre los extremos de los miembros que concurren en ella.

Las vigas son elementos generalmente horizontales o con pequeña inclinación que reciben las cargas verticales que actúan en la estructura y debido a la continuidad con el resto de la estructura aparecen momentos en sus extremos, resultando en momentos flexionantes y fuerzas cortantes importantes. Las fuerzas normales suelen ser despreciables, excepto en vigas de crujeas contraventeadas. Adicionalmente, contribuyen a la rigidez lateral del conjunto de la estructura. Son miembros en flexión básicamente, aunque tienen que tomarse en cuenta los efectos de las fuerzas cortantes y normales cuando son significativos.

Las columnas, generalmente verticales, deben soportar las cargas y los momentos que les transmiten las vigas adyacentes y las columnas que se encuentran sobre ellas y bajarlas a la cimentación. Además deben resistir parte de las fuerzas laterales en marcos contraventeados y resistirlas en su totalidad en marcos no contraventeados. Trabajan fundamentalmente en flexocompresión.

Las conexiones rígidas transmiten momentos, fuerzas normales y cortantes de las vigas a las columnas y viceversa, así como las fuerzas que aparecen en las diagonales de la estructura.

Los contraventeos son los elementos situados en planos verticales para contribuir a resistir las fuerzas horizontales que obran sobre el marco y para mejorar su rigidez lateral.

## CAPITULO IV

### METODOS DE ANALISIS

Para efectuar el análisis, el comportamiento de las estructuras se supone elástico lineal, es decir, estructuras en que los desplazamientos varían linealmente con las fuerzas aplicadas. Se considera que todas las deformaciones son pequeñas en comparación con las dimensiones de los elementos de manera que los desplazamientos resultantes no afectan significativamente la geometría de la estructura y por lo tanto no alteran las fuerzas de los elementos. En tales condiciones, los esfuerzos, las deformaciones y los desplazamientos debidos a diferentes acciones se pueden sumar usando el principio de la superposición. La mayoría de las estructuras actuales están diseñadas para que sufran solo pequeñas deformaciones y se deformen linealmente, siendo el caso de las estructuras de acero, en las que el material se comporta de acuerdo con la ley de Hooke.

Los materiales reales, incluyendo al acero, tienen un comportamiento cercano al elástico lineal nada más cuando los esfuerzos son relativamente bajos, por lo tanto, el análisis elástico lineal es útil solamente para investigar la respuesta de las estructuras bajo cargas de trabajo. El comportamiento elástico termina cuando el esfuerzo de fluencia,  $F_y$ , aparece por primera vez en algún punto de la estructura. Este esfuerzo es básico en todos los métodos de análisis y diseño.

El comportamiento de la estructura después de que en algún punto se ha alcanzado el esfuerzo de fluencia (análisis plástico) está fuera del alcance de este trabajo.

La finalidad del análisis estructural es determinar las fuerzas externas (reacciones) y las fuerzas internas (resultantes de esfuerzos). Las fuerzas deben satisfacer las condiciones de equilibrio y producir deformaciones compatibles con la continuidad de la estructura y las condiciones de apoyo. Las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para determinar las fuerzas desconocidas en una estructura estáticamente indeterminada y es necesario complementirlas con relaciones geométricas simples entre las deformaciones de la estructura. Estas relaciones aseguran la compatibilidad de las deformaciones con la geometría de la estructura y se conocen como condiciones geométricas o condiciones de compatibilidad.

Se pueden usar dos métodos generales de análisis. El primero es el método de "fuerzas" o de "flexibilidades", en el que se proporcionan suficientes liberaciones para hacer a la estructura estáticamente determinada. La estructura liberada sufre deformaciones inconsistentes y la inconsistencia geométrica se corrige después con la aplicación de fuerzas adicionales.

El segundo es el método de "desplazamientos" o "rigideces". En este método se agregan sujeciones para impedir el movimiento de los nudos y se determinan las fuerzas que se necesitan para producir la fijación. Después se permite que tengan lugar desplazamientos en los nudos hasta que hayan desaparecido las fuerzas ficticias de sujeción. Conocidos los desplazamientos en el nudo, las fuerzas en los elementos de la estructura se determinan por superposición de los efectos de los desplazamientos separados.

Se puede usar indistintamente el método de flexibilidades o el de rigideces para analizar cualquier estructura. En el método de flexibilidades, como la solución se lleva a cabo para las fuerzas necesarias para restablecer la uniformidad geométrica, el análisis generalmente comprende la solución de varias ecuaciones simultáneas en el mismo número que el de fuerzas desconocidas, es decir del número de liberaciones que se necesitan para hacer a la estructura estáticamente determinada. Las incógnitas en el método de rigideces son las posibles traslaciones y rotaciones de los nudos. La cantidad de fuerzas de fijación que se deben agregar a la estructura es igual al número de posibles desplazamientos de los nudos.

Para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas, generalmente se necesita resolver ecuaciones lineales simultáneas, cuyo número depende del método de análisis empleado. Algunos métodos evitan las ecuaciones simultáneas con el uso de técnicas iterativas o de corrección sucesiva para reducir la cantidad de cálculos y son adecuados cuando los cálculos se hacen a mano o con una pequeña calculadora. Para estructuras grandes, el cálculo manual es impráctico y se tiene que usar una computadora. La formulación eficiente del problema para su solución en computadora es usando matrices y álgebra matricial. Por esta razón, las ecuaciones en este trabajo se plantean en forma matricial.

En la actualidad, las computadoras electrónicas se han establecido como las herramientas más poderosas para efectuar el análisis estructural, al grado de que no se concibe una estructura de importancia grande o mediana que no pueda analizarse con ellas. Permiten efectuar análisis tridimensionales más rigurosos y liberan al estructurista de buena parte del trabajo que tenía que desempeñar, disminuyendo la probabilidad de cometer errores numéricos, la dificultad de localizarlos y la necesidad de repetir los cálculos para corregirlos.

Sin embargo, también están creando problemas que antes no existían. Se pone ahora demasiado énfasis en el análisis "exacto", descuidando el diseño y la concordancia entre el modelo y la estructura. Cuando se utilizan métodos manuales se conoce el orden de magnitud de los elementos con los que se trabaja y pueden hacerse comprobaciones de resultados parciales a lo largo de todo el proceso; con las computadoras se pierde el control del análisis por lo que deben revisarse cuidadosamente los resultados finales. Tienen además, una influencia negativa en la enseñanza y el aprendizaje.

En un intento por tratar de contrarrestar algunos de los aspectos e influencias negativas que tienen el uso de las computadoras electrónicas en el Proceso del Diseño Estructural, en el presente trabajo se repasan los métodos convencionales de análisis estructural de marcos planos que pueden utilizarse para soluciones manuales (método de flexibilidades) y para soluciones por computadora (método de rigideces).

Para dar paso a la descripción y desarrollo de los métodos de análisis, a continuación se exponen los tres principios fundamentales del análisis estructural.

#### IV.1 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL ANALISIS ESTRUCTURAL

1) **Principio de continuidad (compatibilidad).** Establece que los desplazamientos en una estructura son funciones continuas, o sea que conocidas las funciones de desplazamiento, es posible obtener las funciones de deformación.

El adjetivo "continuo", en la Mecánica del Medio Continuo, se refiere a la hipótesis simplificadora fundamental de que los materiales estudiados pueden idealizarse como si estuviesen constituidos por una masa continua, sin huecos ni separaciones en su interior. Se acepta además, que tales materiales son isótropos.

Las deformaciones en un medio continuo, referidas a los cambios en la posición relativa de las partículas que lo constituyen se representan por medio de un "tensor de las deformaciones", mediante el cual es posible analizar su cambio de forma.

El tensor de las deformaciones  $\{e\}$  es:

$$e(i) = e_x i + e_y j + e_z k$$

$$e(j) = e_{yx} i + e_y j + e_z k$$

$$e(k) = e_{zx} i + e_{yz} j + e_z k$$

donde  $e_x, e_y, e_z$  representan a las magnitudes de las deformaciones unitarias longitudinales (o elongaciones) sufridas por los vectores  $i, j, k$  respectivamente; los coeficientes  $e_{xy}, e_{xz}$  etc., representan las magnitudes de las deformaciones unitarias angulares sufridas por dichos vectores, en sentido normal al eje correspondiente al primer subíndice y paralelo al eje correspondiente al segundo.

Es importante establecer una relación entre las deformaciones que acabamos de mencionar y los desplazamientos de las partículas en el interior del medio. Llamemos  $\{d\}$  al vector de desplazamientos de las partículas, tal que:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix}$$

donde  $d_x, d_y, d_z$  son las componentes del desplazamiento de las partículas en las direcciones de los vectores  $i, j, k$  respectivamente.

Se puede demostrar que:

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ e_{xy} \\ e_{xz} \\ e_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial i \partial X & 0 & 0 \\ 0 & \partial i \partial Y & 0 \\ 0 & 0 & \partial i \partial Z \\ \partial i \partial Y & \partial i \partial X & 0 \\ \partial i \partial Z & 0 & \partial i \partial X \\ 0 & \partial i \partial Z & \partial i \partial Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

que sintéticamente podemos escribir:

$$\{e\} = [A]\{d\} \quad \text{----- IV.1}$$

donde  $[A]$  se conoce como la matriz de continuidad del medio continuo.

2) **Ley de Hooke.** Se asume que el comportamiento del material es elástico lineal, lo cual quiere decir que los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones.

El problema fundamental de la mecánica de los medios deformables es el de calcular los esfuerzos que aparecerán a consecuencia de un cierto estado de deformaciones, o bien, las deformaciones que resultarán en el medio, cuando este se sujete a un estado de esfuerzos.

Escribiendo el tensor de esfuerzos  $\{\sigma\}$  en forma análoga al tensor de deformaciones tenemos:

$$\sigma(i) = \sigma_x i + \tau_{xy} j + \tau_{xz} k$$

$$\sigma(j) = \tau_{yx} i + \sigma_y j + \tau_{yz} k$$

$$\sigma(k) = \tau_{zx} i + \tau_{zy} j + \sigma_z k$$

donde  $\sigma_x$  representa la componente normal del esfuerzo ejercido sobre un elemento de superficie normal al eje "x". Análogamente,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  representan, respectivamente, los esfuerzos normales en las direcciones de los ejes "y" y "z". Por otro lado,  $\tau_{xy}$  representa la componente tangencial del esfuerzo ejercido sobre un elemento de superficie normal al eje "x", dirigida igual que el eje "y". Interpretaciones análogas pueden hacerse para todos los coeficientes de  $\tau$ . Los esfuerzos normales se consideran positivos cuando representan tensiones, y negativos, cuando representan compresiones.

Es importante establecer que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  por lo que podemos escribir el vector de esfuerzos en la forma siguiente:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

Para medios elásticos, la relación entre esfuerzos y deformaciones está dada por las fórmulas que representan a la "Ley de Hooke generalizada":

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ e_{xy} \\ e_{xz} \\ e_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

donde  $E$  = módulo de elasticidad o módulo de Young

$$G = \text{módulo de elasticidad al esfuerzo cortante} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$\nu$  = coeficiente de Poisson

en forma sintética, la ley de Hooke es:

$$\{e\} = [f]\{\sigma\} \quad \text{----- IV.2}$$

donde  $[f]$  se conoce como la matriz de flexibilidades del medio continuo.

3) **Equilibrio.** Cada uno de los elementos que componen a la estructura, y la estructura en general, están en equilibrio antes y después de que se apliquen las cargas. Lo cual quiere decir que la suma de las fuerzas externas y las internas deben ser iguales a cero en cualquier parte de la estructura.

En la mecánica de los cuerpos deformables, se establece que un cuerpo está en equilibrio si se cumple que:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

en donde  $X$  es igual a la intensidad de fuerza aplicada en el cuerpo en la dirección "x".  $Y$  y  $Z$  son las correspondientes en la dirección "y" y "z".

que escrito en forma sintética tenemos:

$$\{F\} + [A]^T \{\sigma\} = \{0\} \quad \text{----- IV.3}$$

donde  $\{F\}$  es el vector de intensidad de fuerzas en el cuerpo, y  $[A]^T$  es la matriz de equilibrio.

## IV.2 METODO DE FLEXIBILIDADES

### IV.2.1 Breve descripción del método.

La mayoría de las estructuras actuales son estáticamente indeterminadas y con el método de flexibilidades es necesario conocer para una estructura en particular, el grado de indeterminación estática. La secuencia de aplicación del método puede resumirse de la siguiente forma:

- Conocido el grado de indeterminación estática, se introduce un número de liberaciones igual al grado de indeterminación, efectuando cada liberación eliminando una fuerza externa o interna. Las liberaciones, también denominadas fuerzas redundantes, se seleccionan de manera que la estructura resultante sea estable y estáticamente determinada.
- Las liberaciones introducen incongruencias en los desplazamientos y como segundo paso se calculan estos en la estructura liberada.
- Se calculan los desplazamientos en la estructura liberada debido a valores unitarios de las redundantes, estos desplazamientos se necesitan en el mismo lugar y en la misma dirección que el error en desplazamientos determinados en el inciso b).
- Ahora se determinan los valores de las fuerzas redundantes necesarias para eliminar los errores en los desplazamientos. Esto exige escribir ecuaciones de superposición en las que se suman los efectos de las fuerzas redundantes separadas a los desplazamientos de la estructura liberada.
- Finalmente, encontramos las fuerzas que actúan sobre la estructura indeterminada original, sumando las fuerzas de corrección (redundantes) y las fuerzas aplicadas en la estructura liberada.

### IV.2.2 Discretización del problema

Para aplicar la teoría del análisis elástico de un medio continuo a un problema discreto, como el marco rígido plano, introduciremos las cuatro siguientes consideraciones que nos permitan discretizar el problema.

- Los desplazamientos se calculan para puntos (nudos) discretos en el marco, de manera que el vector de desplazamientos es:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_{x_1} \\ d_{y_1} \\ \varphi_1 \\ d_{x_2} \\ d_{y_2} \\ \varphi_2 \\ - \\ - \\ - \\ d_{x_n} \\ d_{y_n} \\ \varphi_n \end{Bmatrix}$$

donde  $d_{xn}, d_{ym}$  son las magnitudes de los desplazamientos en las direcciones de los ejes coordenados "x" y "y" para el nudo "n" y  $\varphi_n$  corresponde al giro en dicho nudo.

2) Las deformaciones también se discretizan, se consideran solamente las deformaciones por flexión de los elementos estructurales. Las deformaciones por efecto de carga axial y cortante no se consideran en este trabajo.

3) Esfuerzos. Los esfuerzos pueden calcularse una vez que se conocen los elementos mecánicos correspondientes, por lo tanto, introduciremos el vector de los elementos mecánicos  $\{p\}$  sustituyendo al vector de esfuerzos  $\{\sigma\}$ , tal que

$$\{p\} = \left\{ \begin{array}{l} \{p\}_1 \\ \{p\}_2 \\ \vdots \\ \{p\}_{n_b} \end{array} \right\} \text{----- IV.4A}$$

donde  $\{p\}_i =$  a los elementos mecánicos de interés en la barra "i" de la estructura. Pueden ser momentos flexionantes, carga axiales, etc.

$n_b =$  número de barras en la estructura.

4) Fuerzas externas. Las fuerzas externas se consideran conocidas y aplicadas en los elementos y/o nudos de la estructura. Las cargas pueden ser concentradas, lineales y parabólicas.

#### IV.2.3 Desarrollo del método.

El problema consiste en encontrar los valores de los vectores de desplazamiento  $\{d\}$ , deformaciones  $\{e\}$  y los elementos mecánicos (momentos flexionantes)  $\{p\}$  del marco. Para su obtención, consideremos los tres principios fundamentales como sigue:

##### Equilibrio

Llamemos  $[a]$  a la matriz de continuidad de una estructura elástica discreta, y reemplacémosla por la matriz de continuidad  $[A]$  del medio elástico continuo en la ecuación IV.3. La ecuación de equilibrio es ahora.

$$\{F\} = [a]^T \{p\} \text{----- IV.4}$$

donde  $[a]^T$  se conoce como la matriz de equilibrio del sistema.

La matriz  $[a]^T$  representa a una estructura hiperestática, por ello, es posible subdividirla en la siguiente forma:

$$[a]^T = \left[ [a_o]^T ; [a_R]^T \right]$$

tal que  $[a_o]^T$  sea una matriz cuadrada y no singular, para lo cual es necesario que represente a una estructura isostática estable y por lo tanto  $[a_R]^T$  es la matriz de equilibrio de las redundantes. En consecuencia, escribiremos la ecuación del equilibrio en la siguiente forma:

$$\{F\} = \begin{bmatrix} [a_o]^T \\ [a_R]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p_I\} \\ \{p_R\} \end{Bmatrix} \quad \text{----- IV.5}$$

donde  $\{p_I\}$  es el valor de los elementos mecánicos en los miembros de la estructura isostática y  $\{p_R\}$  es el vector de los elementos mecánicos de los elementos redundantes, despejando a  $\{p_I\}$  tenemos:

$$\{p_I\} = [a_o^T]^{-1} \{F\} - [a_o^T]^{-1} [a_R]^T \{p_R\} \quad \text{----- IV.6}$$

Definamos ahora al vector  $\{R\}$  de las redundantes como:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \equiv \\ R_n \end{Bmatrix} = \{p_R\}$$

Podemos escribir entonces:

$$\{p_R\} = [o] \{F\} + [I] \{R\} \quad \text{----- IV.7}$$

Agrupando las ecuaciones IV.6 y IV.7 tenemos:

$$\begin{Bmatrix} \{p_I\} \\ \{p_R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_o^T]^{-1} & -[a_o^T]^{-1} [a_R]^T \\ [o] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{R\} \end{Bmatrix}$$

que sintéticamente las podemos escribir como:

$$\{p\} = [b_o] \{F\} + [b_R] \{R\} \quad \text{----- IV.8}$$

en donde  $[b_o]$  representa a los valores del vector  $\{p\}$  en la estructura isostática, producidas por fuerzas unitarias aplicadas en los puntos y en la dirección en la que se desea el desplazamiento.

$[b_R]$  son los valores del vector  $\{p\}$  en la estructura isostática, producidos por las redundantes R unitarias.

### Ley de Hooke

La ley de Hooke la representaremos ahora con la ecuación:

$$\{e\} = [f]\{p\} \text{----- IV.9}$$

### Continuidad

La ecuación IV.1 de la continuidad, la podemos escribir en forma análoga a la de equilibrio IV.5:

$$\begin{Bmatrix} \{e_I\} \\ \{e_R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_o] \\ [a_R] \end{bmatrix} \{d\}$$

de donde obtenemos que

$$\{e_I\} = [a_o]\{d\}$$

$$\{e_R\} = [a_R]\{d\}$$

despejando al vector  $\{d\}$  de la primera igualdad,

$$\{d\} = [a_o]^{-1}\{e_I\}$$

el cual podemos escribir en la siguiente forma:

$$\{d\} = \begin{bmatrix} [a_o]^{-1}[o] \\ [a_R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e_I\} \\ \{e_R\} \end{Bmatrix}$$

y por lo tanto:

$$\{d\} = [b_o]^T \{e\} \text{----- IV.10}$$

Si ahora sustituimos la ecuación IV.9. de la ley de Hooke en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\{d\} = [b_o]^T [f]\{p\} \text{----- IV.11}$$

Con esta ecuación y una vez conocidos los valores del vector  $\{p\}$ , podemos calcular los valores del vector de desplazamientos en la estructura hiperestática.

También, al igual que para el vector  $\{d\}$ , puede demostrarse que:

$$\{u\} = [b_R]^T \{e\} \text{----- IV.12}$$

donde  $\{u\}$  = vector de los desplazamientos relativos de las redundantes.

Si sustituimos la ecuación de la ley de Hooke IV.9 en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\{u\} = [b_R]^T [f] \{p\} \text{----- IV.13}$$

De aquí, podemos deducir que la solución del problema es aquella que hace que el vector de los desplazamientos relativos de las redundantes  $\{u\}$  sea igual a cero.

Agrupando las ecuaciones IV.10 y IV.12 podemos escribir la ecuación de la continuidad en la forma siguiente:

$$\begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{u\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [b_o]^T \\ [b_R]^T \end{Bmatrix} \{e\} \text{----- IV.14}$$

Por otro lado, si sustituimos la ecuación del equilibrio IV.8 en la ecuación de la ley de Hooke IV.9, obtenemos:

$$\{e\} = [f] [[b_o] \{F\} + [b_R] \{R\}] \text{----- IV.15}$$

si ahora sustituimos la ecuación anterior en la ecuación de la continuidad IV.12, y la igualamos a cero, se tiene:

$$\{u\} = [b_R]^T [f] [[b_o] \{F\} + [b_R] \{R\}] = \{0\}$$

y efectuando algunas operaciones simples obtenemos finalmente la siguiente expresión:

$$[[b_R]^T [f] [b_R]] \{R\} = -[[b_R]^T [f] [b_o]] \{F\} \text{----- IV.16}$$

que representa un sistema de ecuaciones lineales de  $Rn$  ecuaciones con  $Rn$  incógnitas. Al resolver este sistema de ecuaciones, se obtienen los valores del vector de las redundantes  $\{R\}$ .

Adicionalmente, de la ecuación del equilibrio IV.8 podemos deducir las siguientes formas simplificadas para obtener los valores del vector  $\{p_o\}$  y de las matrices  $[b_o]$  y  $[b_R]$ .

a) Si  $\{R\} = \{0\}$ , entonces:

$$\{p_o\} = [b_o] \{F\} \text{----- IV.17}$$

donde  $\{p_o\}$  son los elementos mecánicos en los miembros del marco, producidos por las cargas reales aplicadas en la estructura isostática.

$$b) \quad \text{Sea} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \equiv \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \{R\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \equiv \\ 0 \end{Bmatrix}$$

entonces, la primera columna de  $[bo]$  es igual a los valores de  $\{p\}$  obtenidos por estática resolviendo la estructura isostática con el siguiente sistema de cargas:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \equiv \\ 0 \end{Bmatrix}$$

y en general, las columnas de la matriz  $[bo]$  corresponden a los valores de  $\{p\}$  producidos por fuerzas unitarias aplicadas en la estructura isostática, o sea que:

$$[bo] = [\{p_o\}_1; \{p_o\}_2; \dots] \text{----- IV.18}$$

$$\text{si se cumple que: } \{F\} = [I] \quad \text{y} \quad \{R\} = \{o\}$$

c) Análogamente, si hacemos que:

$$\{F\} = [O] \quad \text{y} \quad \{R\} = [I]$$

entonces obtenemos a:

$$[b_R] = [\{p_o\}_1; \{p_o\}_2; \dots; \{p_o\}_{RN}] \text{----- IV.19}$$

Donde  $\{p_o\}_i$  son los valores de  $\{p\}$  en la estructura isostática, producidos por la redundante  $R_i$  unitaria.

Por lo tanto, las ecuaciones IV.8 y IV.16 las escribiremos en la siguiente forma:

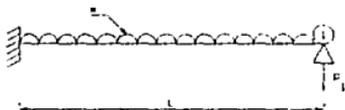
$$\{p\} = \{p_o\} + [b_R]\{R\} \text{----- IV.20}$$

$$[[b_R]^T [f] [b_R]]\{R\} = -[b_R]^T [f] \{p_o\} \text{----- IV.21}$$

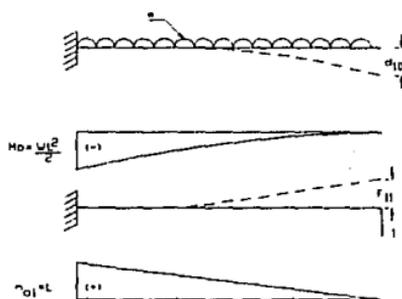
A continuación, ilustraremos algunas equivalencias entre los miembros de las ecuaciones deducidas anteriormente y las fórmulas del principio del trabajo virtual, con el propósito de incluir algunas fórmulas de integración numérica que nos permitan simplificar los cálculos numéricos durante la evaluación de los productos entre vectores y matrices en las ecuaciones mencionadas en este tema.

Consideremos la siguiente viga hiperestática, empotrada en un extremo y apoyada en el otro, sometida a la acción de una carga uniformemente repartida. Este problema tiene una reacción hiperestática. Lo resolveremos eligiendo como redundante a la reacción vertical en el apoyo que llamaremos  $R_1$  y calcularemos el desplazamiento de la isostática aplicando el principio del trabajo virtual.

Hiperestática



Isostática



donde  $M_o$  es el diagrama de momentos en la estructura isostática producido por las cargas externas.

$m_{o1}$  es el diagrama de momentos en la estructura isostática producido por la redundante  $R_1$  con valor unitario, en la dirección en la que se desea el desplazamiento.

La solución del problema es el valor de  $R$  que origina que el valor del desplazamiento en el nudo 1 (desplazamiento relativo de la redundante) sea igual a cero. Por el principio del trabajo virtual sabemos que para la isostática

$$d_{10} = \int M_o m_{o1} \frac{ds}{EI} = \frac{1}{4} \left( \frac{L}{EI} \right) \left( -\frac{wL^2}{2} \right) (L) = -\frac{wL^4}{8}$$

$$f_{11} = \int m_{o1} m_{o1} \frac{ds}{EI} = \frac{1}{3} \left( \frac{L}{EI} \right) (L)(L) = \frac{L^3}{3EI}$$

Por lo tanto, el valor de la redundante  $R_1$  se calcula de la siguiente forma:

$$u_1 = d_{10} + f_{11} R_1 = 0 \text{ ----- IV.22}$$

Sustituyendo, encontramos que  $R_1 = 3wl/8$ , y puede trazarse el diagrama de momentos flexionantes ( $M$ ) para la viga hiperestática, quedando como se muestra a continuación:



Si ahora igualamos a cero la ecuación IV.21, tenemos:

$$[b_R]^T [f] \{p_o\} + [b_R]^T [f] [b_R] \{R\} = \{0\} \text{----- IV.23}$$

de las ecuaciones IV.22 y IV.23 observamos que:

$$d_{10} = \int M_o m_{o1} \frac{ds}{EI} = [b_R]^T [f] \{p_o\} \text{----- IV.24}$$

$$f_{11} = \int m_{o1} m_{o1} \frac{ds}{EI} = [b_R]^T [f] [b_R] \text{----- IV.25}$$

Los desplazamientos en la estructura hiperestática están dados por:

$$\{d\} = \int M m_o \frac{ds}{EI}$$

que por la ley de Hooke, ecuación IV.11, equivale a:

$$\{d\} = \int M m_o \frac{ds}{EI} = [b_o]^T [f] \{p\}$$

De lo anterior, podemos afirmar que en general deseamos obtener integrales de la forma:

$$I = \int_L M m \frac{ds}{EI} \quad \text{ó} \quad I = \int_L m m \frac{ds}{EI}$$

donde  $M$  es una función polinómica de los siguientes grados:

- Grado 1. Cargas concentradas
- Grado 2. Carga uniforme
- Grado 3. Carga lineal
- Grado 4. Carga parabólica

La función  $m$  siempre es un polinomio de grado 1.

Para la solución de la integral se distinguen dos casos:

- a)  $M$  es una función de grado 1 ó 2 (las cargas sobre la barra son concentradas o uniformemente repartidas), entonces la función  $M_m$  será de grado 2 ó 3. En este caso el vector  $\{p\}_i$  de la ecuación IV.4a es:

$$\{p\}_i = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{Bmatrix}_i$$

donde  $M_A, M_B, M_C$  son los valores de los momentos flexionantes de la barra  $i$  en los puntos  $A, B, C$  indicados en la figura 9a.

En este caso, el valor de la integral puede calcularse con la fórmula de Simpson como sigue:

$$I = \frac{L}{6EI} [M_A m_A + 4M_B m_B + M_C m_C] \text{----- IV.26}$$

donde  $m_A, m_B, m_C$  son los valores de los momentos flexionantes de la barra  $i$  en los puntos  $A, B, C$  correspondientes a una carga unitaria aplicada a la estructura (figura 9b) y  $L$  es la longitud de la barra  $i$ .

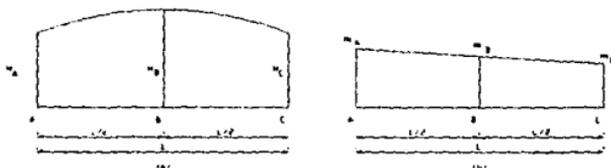


Figura 9. a) Polinomio de primero o segundo grado, b) Polinomio de primer grado.

Podemos escribir la ecuación IV.26. en la forma:

$$I = \begin{Bmatrix} m_A \\ m_B \\ m_C \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{Bmatrix} \times \frac{L}{6EI}$$

que en forma sintética la expresaremos como:

$$I = \{m\}^T \{f\} \{M\} \text{----- IV.27}$$

por comodidad y por ser una matriz diagonal, asumiremos en adelante que:

$$[f]_i = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{----- IV.28}$$

b)  $M$  es una función de grado 3 ó 4 (las cargas en las barras son lineales o parabólicas), entonces la función  $M_m$  será de grado 4 ó 5. En este caso, el vector  $\{p\}_i$  es:

$$\{p\}_i = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \\ M_E \end{Bmatrix} \text{----- IV.29}$$

donde  $M_A, M_B, M_C, M_D, M_E$  son los valores de los momentos flexionantes de la barra  $i$  en los puntos A, B, etc., indicados en la figura 10a.

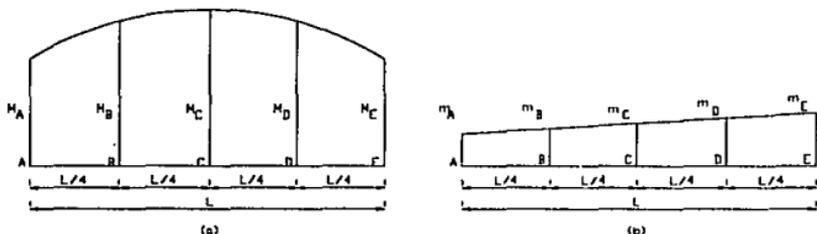


Figura 10. (a) Polinomio de tercero o cuarto grado. (b) Polinomio de primer grado

En este caso, el valor de la integral lo calcularemos con la fórmula de integración de Newton-Cotes como sigue:

$$I = \begin{Bmatrix} m_A \\ m_B \\ m_C \\ m_D \\ m_E \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \\ M_E \end{Bmatrix} \times \frac{L}{90EI}$$

que al escribirla en forma sintética nos queda:

$$I = \{m\}^T [f] \{M\} \text{----- IV.30}$$

de igual manera, en adelante asumiremos que para cargas lineales o parabólicas en la barra  $l$ ,

$$[f]_l = \frac{L}{90EI} \begin{Bmatrix} 7 \\ 32 \\ 12 \\ 32 \\ 7 \end{Bmatrix} \text{----- IV.31}$$

A continuación, introduciremos la definición y la generalización de la matriz de flexibilidades de las barras para su utilización posterior.

- 1.- Definición. Le llamaremos barra a todo elemento recto de sección constante que tenga momentos flexionantes y fuerzas cortantes sin discontinuidades.
- 2.- Generalización de la matriz de flexibilidades:

$$[f] = \begin{bmatrix} [f]_1 & & & \\ & [f]_2 & & \\ & & \equiv & \\ & & & [f]_{nb} \end{bmatrix}$$

donde  $[f]_i$  es igual a la ecuación IV.28 ó IV.31 según el caso.

Por facilidad y por ser una matriz diagonal, la manejaremos en la siguiente forma:

$$[f]_{nb \times nb} = \begin{Bmatrix} [f]_1 \\ [f]_2 \\ \equiv \\ [f]_{nb} \end{Bmatrix}$$

#### IV.2.4. Resumen del método.

El análisis de marcos rígidos planos por el método de flexibilidades lo podemos resumir en la siguiente forma:

Obtenemos el valor de los redundantes  $\{R\}$  con la ecuación:

$$[b_R]^T [f] [b_R] \{R\} = -[b_R]^T [f] \{P_0\} \text{----- IV.21}$$

En seguida utilizando la ecuación del equilibrio, calcularemos los valores del vector  $\{p\}$ :

$$\{p\} = \{p_0\} + [b_R] \{R\} \text{----- IV.20}$$

Con la ecuación de la ley de Hooke, obtenemos los valores del vector de deformaciones  $\{e\}$ :

$$\{e\} = [f] \{p\} \text{----- IV.9}$$

Posteriormente, con las ecuaciones de la continuidad obtenemos los valores del vector de desplazamientos  $\{d\}$  y comprobamos los resultados verificando que el vector de desplazamientos relativos de las redundantes sea igual a cero:

$$\{d\} = [b_0]^T [f] \{p\} \text{----- IV.11}$$

$$\{u\} = [b_R]^T \{e\} \text{----- IV.12}$$

Las reacciones y las fuerzas internas también se pueden determinar por la superposición del efecto de las cargas externas sobre la estructura liberada y el efecto de las fuerzas redundantes. Esto se puede expresar con la ecuación de superposición siguiente:

$$\{H\} = \{H_0\} + [h] \{R\} \text{----- IV.32}$$

basada en el principio del equilibrio y semejante a la ecuación IV.20., donde:

$\{H_0\}$  = vector de las reacciones en la estructura isostática producidas por las cargas externas.

$$[h] = [\{H_0\}_1; \{H_0\}_2; \dots; \{H_0\}_{R_n}]$$

donde  $\{H_0\}_i$  es el vector de las reacciones en la estructura isostática producidas por la redundante  $R_i$  unitaria.

La aplicación de este método en el análisis de marcos planos, se verá en un capítulo posterior.

## IV.3 METODO DE RIGIDECES

### IV.3.1. Breve descripción del método.

Cuando una estructura compuesta de varios elementos se sujeta a cargas, los nudos sufren desplazamientos en forma de rotación y traslación. En el método de rigideces, las cantidades desconocidas son la rotación y la traslación de los nudos.

Los diferentes desplazamientos en los nudos son independientes entre ellos, ya que a cualquiera de ellos se le puede dar un valor arbitrario por la introducción de fuerzas apropiadas. Al número de desplazamientos independientes de los nudos de una estructura se le conoce como grado de indeterminación cinemática o número de grados de libertad. El método, lo podemos describir en forma breve como sigue:

- a) Conocido el grado de indeterminación cinemática, se establece un sistema de coordenadas para identificar la ubicación y dirección de los desplazamientos de los nudos. Se introducen fuerzas restringentes en igual número que el grado de indeterminación cinemática para impedir el desplazamiento de los nudos.
- b) Se determinan las fuerzas restringentes como una suma de las fuerzas en extremos fijos (empotrados) que se juntan en un nudo. Para la mayoría de los casos prácticos, las fuerzas de empotramiento se pueden calcular con la ayuda de tablas.
- c) Se supone ahora que la estructura está deformada de tal modo que un desplazamiento es igual a la unidad y todos los demás desplazamientos tienen valor cero, y se determinan las fuerzas necesarias para mantener a la estructura en esta configuración. Estas fuerzas se aplican en los diferentes grados de libertad. Se determinan las fuerzas internas en los lugares necesarios correspondientes a esta configuración. Se repite el procedimiento para un valor unitario de desplazamiento en cada uno de los grados de libertad.
- d) Se determinan los valores de los desplazamientos necesarios para eliminar las fuerzas restringentes introducidas en (b). Esto demanda el uso de ecuaciones de superposición en que se suman los efectos de los desplazamientos separados sobre las fuerzas restringentes.
- e) Finalmente, se obtienen las fuerzas sobre la estructura original sumando las fuerzas aplicadas sobre la estructura restringida a las fuerzas producidas por los desplazamientos de nudos calculados en (d).

### IV.3.2. Desarrollo del método.

#### IV.3.2.1 Parte I. Se consideran cargas aplicadas en los nudos de la estructura solamente.

Para el desarrollo de este método nos apoyamos en las consideraciones hechas en el punto IV.2.2 que nos permiten utilizar las fórmulas que representan a un medio continuo, en un medio discreto como los marcos rígidos planos. Por estas consideraciones, las ecuaciones básicas para el desarrollo del método de rigideces son las mismas que para el método de flexibilidades, por lo que en algunas ocasiones nos apoyaremos en ellas. El problema nuevamente consiste en encontrar los valores de los vectores de desplazamiento  $\{d\}$ , deformaciones  $\{e\}$  y elementos mecánicos (momentos flexionantes)  $\{p\}$  del marco.

#### IV.3.2.1.1 Notación y signos convencionales.

En este método se necesita un sistema de signos que se deben definir con claridad. Como se realizan operaciones algebraicas, los signos correctos son de máxima importancia, por ello, ahora daremos los signos convencionales y la notación para el método de rigideces. Esto se explica mejor en relación con la figura 11a, que representa la forma desviada A'B' de una barra recta AB de sección constante de un marco rígido plano. El momento externo (de nudo sobre barra) o giro en sentido contrario a las manecillas del reloj, se considera positivo. La traslación relativa  $\Delta$  de los extremos perpendiculares a la dirección original del elemento,  $\Delta = y_B - y_A$ , produce flexión; la traslación relativa a lo largo del eje  $x$  se considera que es cero, es decir, se supone que no ocurre ningún cambio de longitud. La rotación de la cuerda,  $\psi = \Delta / L$ , se considera positiva cuando es en el sentido de las manecillas del reloj. La notación adicional es como sigue:

$\varphi_A$  = giro en el extremo A (extremo cercano)

$\varphi_B$  = giro en el extremo B (extremo lejano)

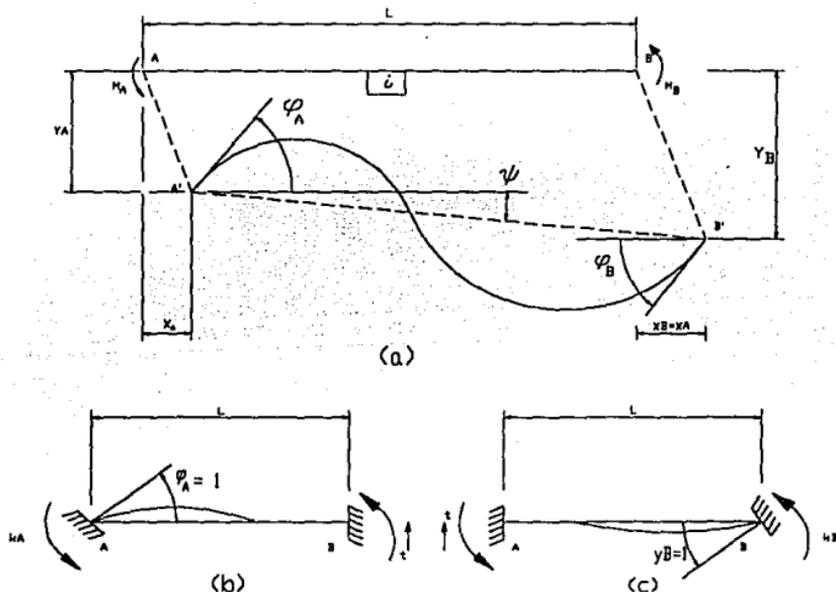


Figura 11. Signos convencionales para el método de rigideces.

(a) Direcciones positivas de rotaciones de los extremos  $\varphi_A$  y  $\varphi_B$ , y rotación de la cuerda  $\psi$ .

(b) Momentos de extremo producidos por un giro unitario en A. (c) Momentos de extremo originados por un giro unitario en B.

$k_A$  = rigidez angular del extremo A, es decir, el momento de extremo en A correspondiente a un giro unitario en A mientras se impide el desplazamiento en B (figura 11b).

$k_B$  = rigidez angular del extremo  $B$ , es decir, el momento de extremo en  $B$  que corresponde a un giro unitario en  $B$  mientras se restringe el desplazamiento en el extremo  $A$  (figura 11c).

$t$  = momento de transporte, es decir, el momento en un extremo empotrado  $B$  producido por una rotación unitaria del extremo  $A$  (figura 11b).

$T_{AB}$  = factor de transporte de  $A$  a  $B$ .

$T_{BA}$  = factor de transporte de  $B$  a  $A$ .

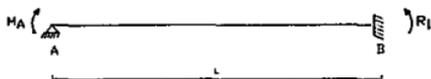
Necesitamos conocer los valores de  $k_A$ ,  $k_B$  y  $t$  para un miembro prismático. Para ello nos apoyaremos en el principio del trabajo virtual.

La rigidez angular  $k_A$  de un miembro prismático se define como:

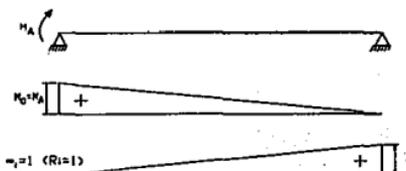
$$k_A = \frac{M_A}{\varphi_A}$$

Para conocer su valor, consideremos un momento  $M_A$  aplicado en la siguiente viga hiperestática y elijamos como redundante  $R_1$  al momento de reacción en el extremo empotrado.

Hiperestática



Isostática



Los giros en la isostática debidos a los momentos aplicados son:

$$\delta_{AO} = \int \frac{M_O m_i ds}{EI} = \frac{1}{EI} (L)(M_A)(1) = \frac{M_A L}{6EI}$$

$$f_{11} = \int \frac{m_i m_i ds}{EI} = \frac{1}{3} \left( \frac{L}{EI} \right)$$

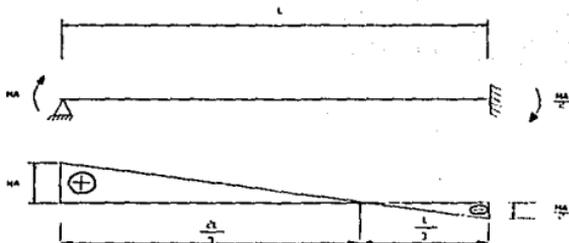
Por lo tanto calculamos el valor de la redundante  $R_1$  con la ecuación:

$$\delta_{A0} + f_{11}R_1 = 0$$

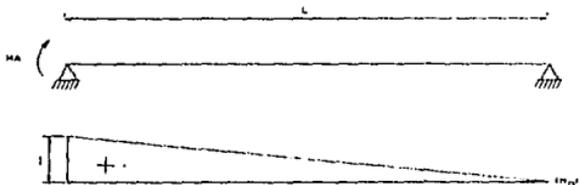
$$\frac{M_A L}{6EI} + \frac{L}{3EI} R_1 = 0$$

$$R_1 = -\frac{M_A}{2}$$

La solución de la hiperestática es:



Lo cual quiere decir que el factor de transporte de momento de A a B,  $T_{AB}$  es igual a  $1/2$ . Para obtener el giro en el punto A,  $\varphi_A$ , aplicamos un par unitario en la isostática, como se muestra:



Luego

$$\varphi_A = \int \frac{Mm_0 ds}{EI} = \frac{1}{6} \left( \frac{L}{EI} \right) \left( 2M_A - \frac{M_A}{2} \right)$$

$$\varphi_A = \frac{M_A L}{4EI}$$

Por lo tanto, la rigidez angular  $k_A$  para una barra de sección constante vale

$$k_A = \frac{M_A}{\varphi_A} = \frac{4EI}{L} \text{----- IV.33}$$

De la misma forma, se puede demostrar que

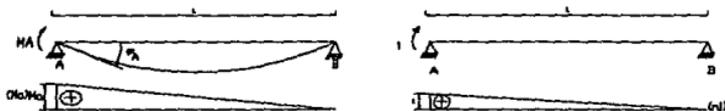
$$k_B = k_A = \frac{4EI}{L}$$

Como el factor de transporte es de 1/2, el momento de transporte  $t$  en el extremo empotrado es:

$$t = T_{AB}(k_A) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4EI}{L}\right) = \frac{2EI}{L} \text{----- IV.34}$$

Si el extremo opuesto del elemento está simplemente apoyado, la rigidez angular se modifica y su valor se determinará en seguida.

Supongamos que se aplica un momento  $M_A$  al extremo izquierdo de una viga simple como se muestra, que resulta en un giro  $\varphi_A$ . El valor del  $\varphi_A$  lo encontraremos nuevamente aplicando un par unitario en la viga, teniendo:



y por lo tanto:

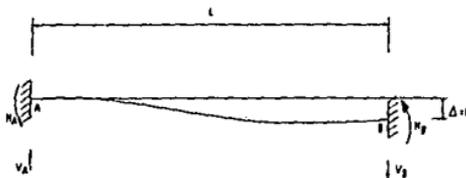
$$\varphi_A = \int \frac{M_G m_1 ds}{EI} = \frac{1}{3EI} (L)(M_A)(1) = \frac{M_A L}{3EI}$$

Entonces, la rigidez modificada es:

$$k_A = \frac{M_A}{\varphi_A} = \frac{3EI}{L} \text{----- IV.35}$$

y obviamente, en este caso, el factor de transporte es igual a cero por estar articulado el extremo opuesto.

Los valores de los momentos del extremo fijo inducidos por apoyos desplazados de miembros prismáticos son:



donde

$$M_A = M_B = \frac{6EI}{L^2} \quad \text{----- IV.36}$$

$$\text{----- IV.37}$$

$$V_A = -V_B = \frac{12EI}{L^3}$$

### IV.3.2.1.2 Ecuaciones de momento para un elemento recto.

Consideremos la curva A'B' que representa la configuración deformada de un elemento AB de cualquier marco rígido plano sometido a cargas laterales (figura 11a). Los momentos  $M_A$  y  $M_B$  en los extremos A y B se pueden expresar como la suma de los momentos inducidos por las rotaciones en los extremos A y B del momento debido a la carga lateral sobre el elemento con los desplazamientos de extremo impedidos. Por lo tanto,

$$M_A = \frac{4EI}{L} \varphi_A + \frac{2EI}{L} \varphi_B + \frac{6EI}{L^2} \Delta \quad \text{----- IV.38}$$

$$M_B = \frac{2EI}{L} \varphi_A + \frac{4EI}{L} \varphi_B + \frac{6EI}{L^2} \Delta$$

Démosle ahora al elemento A'B' una rotación en el sentido antihorario alrededor de A' igual a  $\psi = \Delta/L$  para obtener la posición A''B'' indicada en la figura 12 y llamemos a  $\theta_A$  y  $\theta_B$  las deformaciones angulares en A'' y B'' respectivamente, tal que

$$\theta_A = \varphi_A + \frac{\Delta}{L} \quad \text{----- IV.39}$$

$$\theta_B = \varphi_B + \frac{\Delta}{L}$$

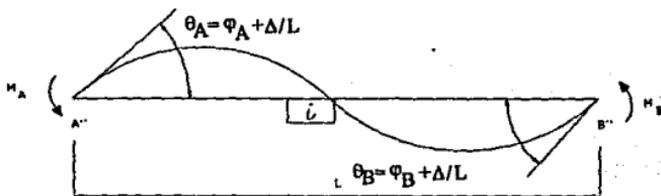


Figura 12. Deformaciones angulares en un elemento recto.

Podemos escribir las ecuaciones IV.38 en la forma siguiente:

$$M_A = \frac{4EI}{L} \theta_A + \frac{2EI}{L} \theta_B$$

$$M_B = \frac{2EI}{L} \theta_A + \frac{4EI}{L} \theta_B$$

en forma matricial tenemos

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} \text{----- IV.40}$$

y si el elemento tiene articulación en el extremo más cercano, la ecuación será:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix}$$

#### IV.3.2.1.3 Principios fundamentales

##### Ley de Hooke

La ley de Hooke para el método de flexibilidades quedó representada por la ecuación IV.9 que aquí transcribimos.

$$\{e\} = [f]\{p\}$$

Si de esta ecuación despejamos el vector  $\{p\}$  tenemos:

$$\{p\} = [f]^{-1}\{e\}$$

donde  $[f]^{-1} = [k]$  = matriz de rigidez de los elementos.

Por lo tanto, la ley de Hooke la representaremos ahora en la forma siguiente:

$$\{p\} = [k]\{e\} \text{----- IV.41}$$

Si llamamos a

$$\{p\}_i = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix}_i \quad \text{----- IV.42}$$

$$[k]_i = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{----- IV.43}$$

$$\{e\}_i = \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix}_i \quad \text{Entonces diremos que:}$$

$$\{p\}_i = [k]_i \{e\}_i \quad \text{----- IV.44}$$

es la ecuación fundamental del método de rigideces aplicado a marcos rígidos sujetos a flexión.

La ecuación IV.41, en forma genérica y considerando la ecuación IV.43 tendrá la forma siguiente:

$$\begin{Bmatrix} \{p\}_1 \\ \{p\}_2 \\ \equiv \\ \{p\}_{nR} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} [k]_1 & [O] & [O] & [O] \\ & [k]_2 & [O] & [O] \\ & & \equiv & \equiv \\ & & [k]_{nR} & \{e\}_{nR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e\}_1 \\ \{e\}_2 \\ \equiv \\ \{e\}_{nR} \end{Bmatrix} \quad \text{----- IV.45}$$

### Continuidad

La ecuación de la continuidad IV.1 es

$$\{e\} = [a]\{d\}$$

De la ecuación IV.43, sabemos que

$$\{e\}_i = \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix}_i$$

y de la ecuación IV.39 sabemos que

$$\begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} \varphi_A + \Delta / L \\ \varphi_B + \Delta / L \end{Bmatrix}_i$$

podemos escribir

$$\begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/L \\ 0 & 1 & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \Delta \end{Bmatrix}_i \quad \text{IV.46}$$

que es igual a

$$\{e\}_i = [a]_i \{d\}_i \quad \text{IV.47}$$

donde

$$[a]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/L \\ 0 & 1 & 1/L \end{bmatrix} = \text{matriz de continuidad de el elemento } i \text{ del marco.}$$

Por lo tanto, la ecuación IV.1. para el método de rigideces la podemos escribir en forma genérica y considerando la ecuación IV.47 en la forma siguiente:

$$\begin{Bmatrix} \{e\}_1 \\ \{e\}_2 \\ \equiv \\ \{e\}_{nB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [a]_1 \\ [a]_2 \\ \equiv \\ [a]_{nB} \end{bmatrix} \{d\} \quad \text{IV.48}$$

### Equilibrio

La ecuación IV.4 del equilibrio es:

$$\{F\} = [a]^T \{p\}$$

Por lo tanto, la solución es:

Sustituyo la ecuación de la continuidad IV.1 en la ecuación de la ley de Hooke IV.41 y obtenemos:

$$\{p\} = [k][a]\{d\} \quad \text{IV.49}$$

Luego sustituimos la ecuación de la ley de Hooke IV.49 en la ecuación del equilibrio:

$$\{F\} = [a]^T [k][a]\{d\}$$

o bien

$$\{F\} = [K]\{d\} \text{----- IV.50}$$

donde  $[K] = [a]^T [k] [a]$  = a la matriz de rigidez de la estructura.

Resolviendo el sistema de ecuaciones IV.50 obtenemos los valores del vector  $\{d\}$ ; con la ecuación de la continuidad IV.47, obtenemos los valores del vector  $\{e\}$  y los valores del vector  $\{p\}$  los obtenemos con la ecuación de la ley de Hooke IV.41. La comprobación la realizaremos chequeando el equilibrio con la ecuación del equilibrio IV.4.

Cuando no se cuenta con un programa de computadora que efectúe el producto  $[a]^T [k] [a]$  para encontrar los elementos de la matriz de rigidez  $[K]$  de la estructura, éstos pueden calcularse en forma directa como se muestra a continuación:

Si en la ecuación IV.50 hacemos que

$$\{d\} = [I]$$

donde  $[I]$  es la matriz identidad, entonces

$$\{F\} = [K] \text{----- IV.51}$$

lo cual quiere decir que las columnas de la matriz de rigidez  $[K]$  representan a las fuerzas que hay que aplicar para producir desplazamientos unitarios en los diferentes grados de libertad de la estructura.

#### IV.3.2.2 Parte II. Se consideran cargas aplicadas en los nudos y en los elementos de la estructura.

En general, los marcos que tenemos que analizar están sujetos a cargas aplicadas tanto en los nudos como en los elementos que lo componen. Para su solución, procederemos de la siguiente forma:

##### Estado I

Se consideran nulos todos los desplazamientos (nudos empotrados) y se determina el vector  $\{F\}$  de las fuerzas de fijación (fuerzas y momentos de empotramiento) de los nudos como una suma de las fuerzas en extremos fijos que se juntan en un nudo. Además, con los momentos de empotramiento de las barras, integraremos el vector  $\{p\}_I$  de los elementos mecánicos del Estado I.

##### Estado II

Llamaremos vector de fuerzas efectivas  $\{F_{eff}\}$ , al vector negativo (fuerzas y momentos aplicados en sentido contrario) del vector  $\{F\}$  de las fuerzas de fijación de los nudos obtenidos en el Estado I.

Con el vector de fuerzas efectivas  $\{F_{eff}\}$  aplicado en el marco, efectuaremos el análisis estructural de acuerdo a lo antes expuesto en la Parte I (cargas aplicadas en los nudos de la estructura solamente). Del análisis, obtenemos los valores de los vectores de desplazamiento  $\{d\}$  y deformaciones  $\{e\}$  del marco. Con el vector de deformaciones  $\{e\}$  y la ecuación IV.41 de la ley de Hooke, calcularemos los valores del vector  $\{p\}_{II}$  de los elementos mecánicos del Estado II.

El vector  $\{p\}$  de los elementos mecánicos correspondiente al marco, lo obtendremos sumando los vectores de elementos mecánicos de los Estados I y II, o sea que

$$\{p\} = \{p\}_I + \{p\}_{II} \text{----- IV.52}$$

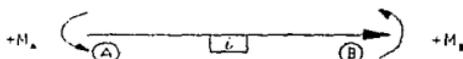
Finalmente, procederemos a obtener los diagramas de los elementos mecánicos del marco: momentos flexionantes (DMF), fuerzas cortantes (DFC) y fuerzas normales (N).

El diagrama de momentos flexionantes lo obtendremos a partir del vector  $\{p\}$  de los elementos mecánicos. Para ello es necesario introducir la siguiente:

**REGLA:** Al momento en el extremo A (extremo cercano) de la barra  $i$  del vector  $\{p\}$ , debemos cambiarle el signo cuando se construye el diagrama de momentos flexionantes (DMF) de la barra  $i$ ; El momento en el extremo B (extremo lejano) de la barra  $i$  del vector  $\{p\}$  mantiene su signo cuando se construye el diagrama de momentos flexionantes.

La regla anterior podemos ejemplificarla como sigue:

a) si  $\{p\}_i = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix}$  o sea que

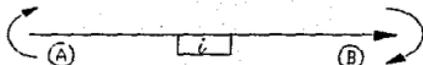


entonces el (DMF) $_i$  es:

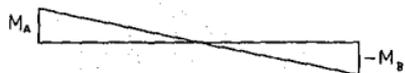


b) si  $\{p\}_i = \begin{Bmatrix} -M_A \\ -M_B \end{Bmatrix}$  o sea que

o sea que



entonces el (DMF) $_i$  es:



Por otro lado, el diagrama correspondiente a las fuerzas cortantes (DFC) lo obtendremos a partir del diagrama de momentos flexionantes auxiliándonos en la ecuación que relaciona al momento con la fuerza cortante como sigue:

$$\frac{dM}{dx} = -V \text{ ----- IV.53}$$

El diagrama de fuerzas normales, lo obtendremos efectuando el equilibrio en cada uno de los nudos del marco.

En el capítulo siguiente, se resuelve un marco utilizando el método de rigideces y se ejemplifica la obtención de los diagramas antes mencionados.

## **CAPITULO V**

### **EJEMPLOS**

#### **V.1 EJEMPLO No. 1**

Recordando que nuestro objetivo principal consiste en efectuar el análisis y dimensionamiento de marcos rígidos de acero estructural conforme a los procedimientos y requisitos especificados por el RCDF-1987, en este ejemplo mostraremos la aplicación del método de rigideces durante la etapa de análisis de un marco rígido y, con los resultados obtenidos, dimensionaremos los elementos estructurales seleccionados (fig. 3), aplicando los conceptos establecidos en el RCDF.

El marco rígido a analizar se muestra en las figuras 1 y 2. Los elementos estructurales elegidos para su dimensionamiento se muestran en la figura 3.

##### **V.1.1 ANALISIS DEL MARCO**

En el artículo 188 del capítulo III del Título Sexto del RCDF-187, se establece que la seguridad de una estructura deberá verificarse para el efecto combinado de todas las acciones que tengan una probabilidad no despreciable de ocurrir simultáneamente, considerándose dos categorías de combinaciones:

I.- Combinaciones que incluyan acciones permanentes y acciones variables.

II.- Combinaciones que incluyan acciones permanentes, variables y accidentales.

En el artículo 194, se establece que para las combinaciones de acciones clasificadas en la fracción I anterior, se aplicará un factor de carga  $F_c$  de 1.4, mientras que para las calificadas en la fracción II, se aplicará un factor de 1.1.

Cuando se emplean métodos de análisis elásticos de primer orden para la determinación de las acciones internas (fuerzas cortantes, momentos flexionantes, etc.) necesarias para revisar un estado límite de falla determinado, se obtienen los mismos resultados si se efectúa el análisis con las cargas nominales (de trabajo) y se multiplican después los elementos mecánicos correspondientes a ellas por el factor de carga, o si primero se multiplican las cargas por  $F_c$  y el análisis se realiza con las cargas factorizadas.

Como dimensionamiento preliminar, consideraremos que las columnas y las trabes del marco son perfiles estructurales IR 356 X 79.0 (W 14 X 53), por lo tanto, el producto  $EI = \text{etc.}$  en todos los elementos del marco.

##### **V.1.1a Análisis del marco ante cargas verticales.**

La combinación que incluye acciones permanentes (cargas muertas) y acciones variables (cargas vivas máximas), clasificadas en la fracción I del artículo 188, se muestra en la figura 2a. Antes de efectuar el análisis, multiplicaremos las cargas nominales de la figura 2a por el factor de cargas correspondiente ( $F_c = 1.4$ ), teniendo las cargas factorizadas que se muestran en la figura 13. En la misma figura se muestra la numeración de nudos y barras y la orientación de éstas últimas.

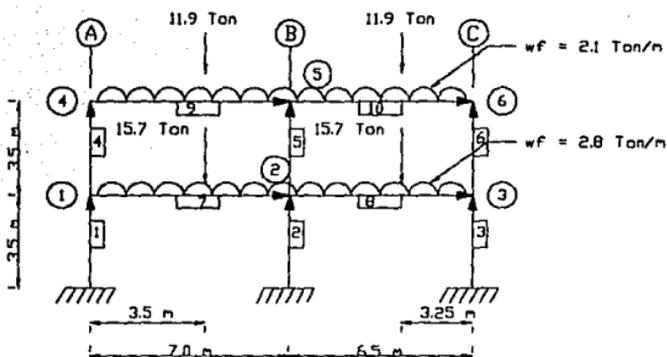


figura 13. Cargas factorizadas. Numeración de nudos y, numeración y orientación de las barras.

#### Método de rigideces

En la sección IV.3.1 mencionamos que las incógnitas son la rotación y la traslación de los nudos, normalmente conocidos como número de grados de libertad o grado de indeterminación cinemática de la estructura.

En nuestro ejemplo tenemos ocho grados de libertad: seis giros (uno por cada nudo) y dos desplazamientos (uno por cada nivel de marco).

En la figura 14 se muestran los seis giros y los dos desplazamientos, que representan a los ocho desplazamientos independientes del marco.

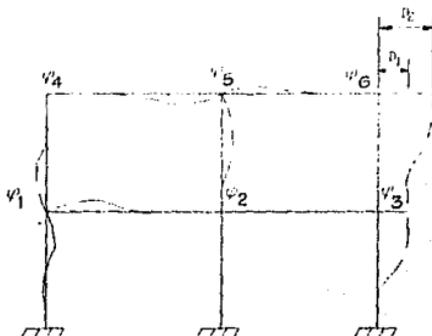


Figura 14. Grados de libertad del marco.

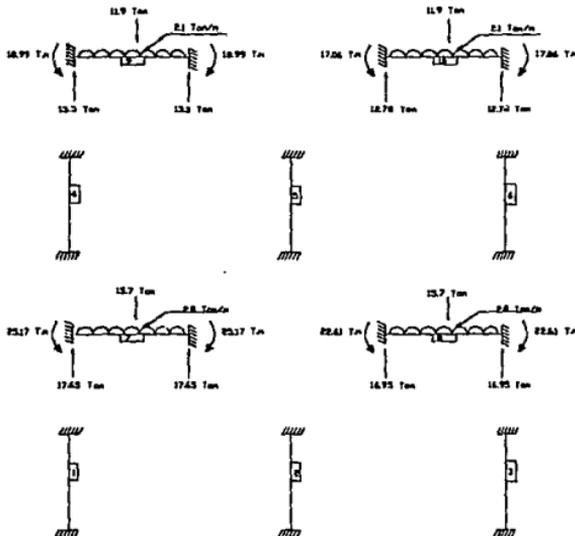
El vector  $\{d\}$  de desplazamientos del marco será:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \dots \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad \text{----- V.I}$$

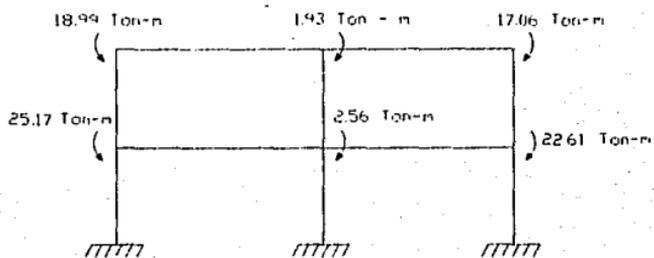
Para efectuar el análisis, procederemos de acuerdo con lo establecido en la sección IV.3.2.2 por tener cargas aplicadas en los elementos estructurales.

Estado I

Las barras 1 a 6 no tienen cargas aplicadas en su longitud, por lo tanto, no tienen momentos de empotramiento.



y las fuerzas de fijación totales de los nudos son:



en consecuencia, el vector  $\{F\}$  de las fuerzas de fijación es:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ \dots \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25.17 \\ -2.56 \\ -22.61 \\ 18.99 \\ -1.93 \\ -17.06 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

y el vector  $\{p\}_I$  de los elementos mecánicos del Estado I es:

$$\{p\}_I = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix}_1 \\ \equiv \\ \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix}_6 \\ \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix}_7 \\ \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix}_8 \\ \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix}_9 \\ \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix}_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \equiv \\ 0 \\ 0 \\ 25.17 \\ -25.17 \\ 22.61 \\ -22.61 \\ 18.99 \\ -18.99 \\ 17.06 \\ -17.06 \end{Bmatrix} \quad \text{----- V.2}$$

## Estado II

Con el vector de fuerzas efectivas  $\{F_{ef}\}$  aplicado en el marco, efectuamos el análisis estructural según lo expuesto en la sección IV.3.2.1.

$$\{F_{ef}\} = -\{F\} = \begin{Bmatrix} -25.17 \\ 2.56 \\ 22.61 \\ -18.99 \\ 1.93 \\ 17.06 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{--- V.3}$$

Sabemos que los valores del vector de desplazamiento  $\{d\}$  (ecuación V.1) los obtendremos resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones (IV.50):

$$\{F\} = [K]\{d\}$$

para resolver el sistema, encontraremos los valores de la matriz de rigidez  $[K]$  del marco según la ecuación IV.51 que nos dice que:  $\{F\} = [K]\{d\}$  si  $\{d\} = \{I\}$ . De acuerdo con esta ecuación, las columnas de la matriz  $[K]$  son las fuerzas que hay que aplicar para producir desplazamientos unitarios en la estructura, obteniendo:

$$[K] = \begin{bmatrix} 2.857 & 0.286 & 0.000 & 0.571 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.490 \\ 0.286 & 3.472 & 0.308 & 0.000 & 0.571 & 0.000 & 0.000 & 0.490 \\ 0.000 & 0.308 & 2.901 & 0.000 & 0.000 & 0.571 & 0.000 & 0.490 \\ 0.571 & 0.000 & 0.000 & 1.714 & 0.286 & 0.000 & -0.490 & 0.490 \\ 0.000 & 0.571 & 0.000 & 0.286 & 2.329 & 0.308 & -0.490 & 0.490 \\ 0.000 & 0.000 & 0.571 & 0.000 & 0.308 & 1.758 & -0.490 & 0.490 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.490 & -0.490 & -0.490 & 1.679 & -0.840 \\ 0.490 & 0.490 & 0.490 & 0.490 & 0.490 & 0.490 & -0.840 & -0.840 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$(EI) \begin{bmatrix} 2.857 & 0.286 & 0.0 & 0.571 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.49 \\ & 3.472 & 0.308 & 0.0 & 0.571 & 0.0 & 0.0 & 0.49 \\ & & 2.901 & 0.0 & 0.0 & 0.571 & 0.0 & 0.49 \\ & & & 1.714 & 0.286 & 0.0 & -0.49 & 0.49 \\ & & & & 2.329 & 0.308 & -0.49 & 0.49 \\ & & & & & 1.758 & -0.49 & 0.49 \\ & & & & & & 1.679 & -0.84 \\ & & & & & & & 0.84 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -25.17 \\ 2.56 \\ 22.61 \\ -18.99 \\ 1.93 \\ 17.06 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} -V.A$$

SIMETRICA

los valores del vector {d} son:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.3211 \\ 0.4768 \\ 6.0307 \\ -9.0673 \\ 0.6188 \\ 7.3215 \\ 0.4752 \\ 1.6071 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{EI}$$

Los valores del vector {c} de deformaciones angulares (ecuaciones IV.39, IV.44 y IV.47) para las barras 1, 2, 5, y 8 son:

BARRA [1]

$$\theta_A = \frac{D_1}{L} = \frac{0.136}{EI}$$

$$\theta_B = \varphi_1 + \frac{D_1}{L} = -\frac{7.185}{EI}$$

BARRA [2]

$$\theta_A = \frac{0.136}{EI}$$

$$\theta_B = \varphi_2 + \frac{D_1}{L} = \frac{0.613}{EI}$$

BARRA [5]

$$\theta_A = \varphi_2 + \frac{(D_2 - D_1)}{L} = \frac{0.800}{EI}$$

$$\theta_B = \varphi_3 + \frac{(D_2 - D_1)}{L} = \frac{0.942}{EI}$$

BARRA [8]

$$\theta_A = \varphi_2 = \frac{0.477}{EI}$$

$$\theta_B = \varphi_3 = \frac{6.031}{EI}$$

Para obtener los valores del vector  $\{P\}_{II}$  de los elementos mecánicos del Estado II, nos apoyamos en las ecuaciones IV.41 y IV.44 que nos dicen:

$$\{p\}_i = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = [k]_i \{e\}_i \quad \text{----- IV.44}$$

Previo al cálculo de los valores de  $\{p\}_{II}$ , obtendremos los valores de  $[k]_i$  con la ecuación IV.43:

$$[k]_i = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{----- IV.43}$$

BARRA [1]

$$[k]_1 = \begin{bmatrix} 1.143 & 0.571 \\ 0.571 & 1.143 \end{bmatrix} \times EI$$

$$M_{AII} = -3.95 \text{ Ton-m} \\ M_{BII} = -8.13 \text{ Ton-m}$$

BARRA [2]

$$[k]_2 = [k]_{11}$$

$$M_{AII} = 0.51 \text{ Ton-m} \\ M_{BII} = 0.78 \text{ Ton-m}$$

## BARRA 5

$$[k]_5 = [k]_{II}$$

$$M_{AI} = 1.45 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BI} = 1.53 \text{ Ton-m}$$

## BARRA [8]

$$[k]_8 = \begin{bmatrix} 0.615 & 0.308 \\ 0.308 & 0.615 \end{bmatrix} \times EI$$

$$M_{AI} = 2.15 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BI} = 3.86 \text{ Ton-m}$$

Los valores del vector  $\{p\}$  de los elementos mecánicos del marco, los encontramos con la ecuación IV.52, que nos dice:

$$\{p\} = \{p\}_I + \{p\}_{II} \quad \text{-----} \quad \text{IV.52}$$

Por lo tanto tenemos:

## BARRA [1]

$$M_A = -3.95 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = -8.31 \text{ Ton-m}$$

## BARRA [3]

$$M_A = 3.68 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = 7.13 \text{ Ton-m}$$

## BARRA [5]

$$M_A = 1.45 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = 1.53 \text{ Ton-m}$$

## BARRA [7]

$$M_A = 21.13 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = -26.99 \text{ Ton-m}$$

## BARRA [9]

$$M_A = 13.99 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = -21.23 \text{ Ton-m}$$

## BARRA [2]

$$M_A = 0.51 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = 0.78 \text{ Ton-m}$$

## BARRA [4]

$$M_A = -12.99 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = -13.99 \text{ Ton-m}$$

## BARRA [6]

$$M_A = 11.63 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = 12.37 \text{ Ton-m}$$

## BARRA [8]

$$M_A = 24.76 \text{ Ton-m}$$

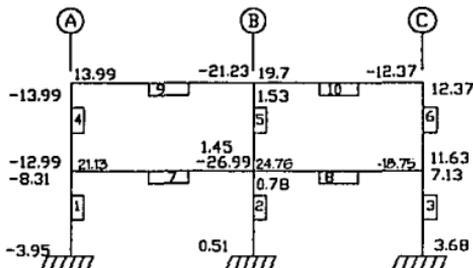
$$M_B = -18.75 \text{ Ton-m}$$

## BARRA [10]

$$M_A = 19.7 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = -12.37 \text{ Ton-m}$$

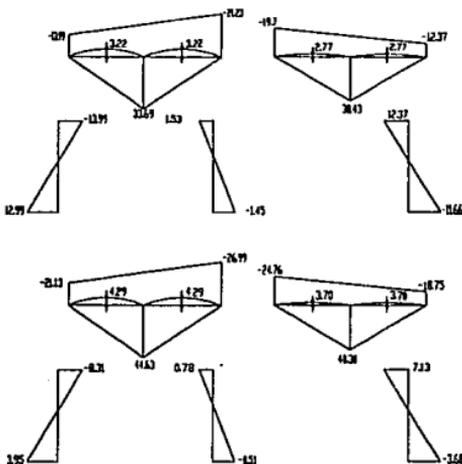
La comprobación la efectuaremos chequeando el equilibrio de los nudos con los valores de  $\{p\}$ , como se muestra:



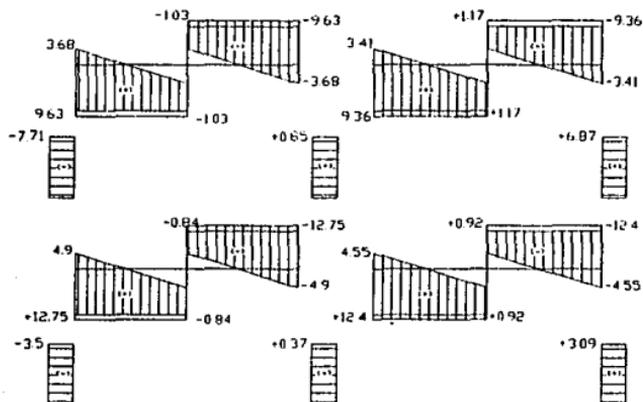
La suma de los momentos en cada nudo es igual a cero, por lo tanto, los resultados son correctos.

Para trazar el diagrama de momentos flexionantes a partir de los valores del vector  $\{p\}$ , nos apoyaremos en la regla dada en la sección IV.3.2.2.

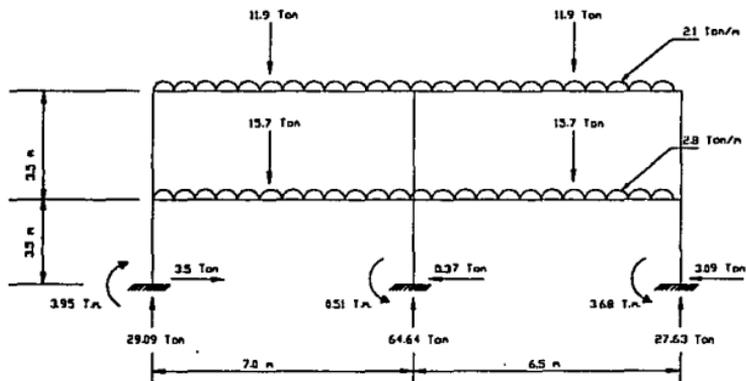
De acuerdo con ello tenemos (DMF):



y el diagrama de fuerza cortante es (DFC):



Finalmente, las reacciones en los apoyos son:



### V.1.1.b Análisis del marco ante cargas verticales y laterales.

Las combinaciones que incluyen acciones permanentes (cargas muertas), acciones variables (cargas vivas instantáneas) y acciones accidentales (sismo), clasificadas en la fracción II del artículo 188, se muestran en las figuras 2b y 2c. Antes de efectuar el análisis, multiplicaremos las cargas nominales de las figuras 2b y 2c por el factor de cargas correspondiente ( $F_c=1.1$ ), obteniendo las cargas factorizadas que se muestran en la figura 15.

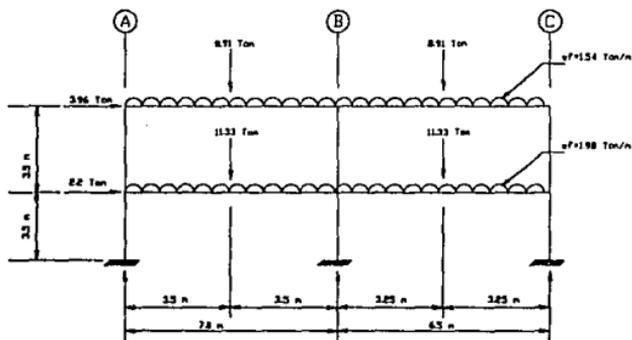
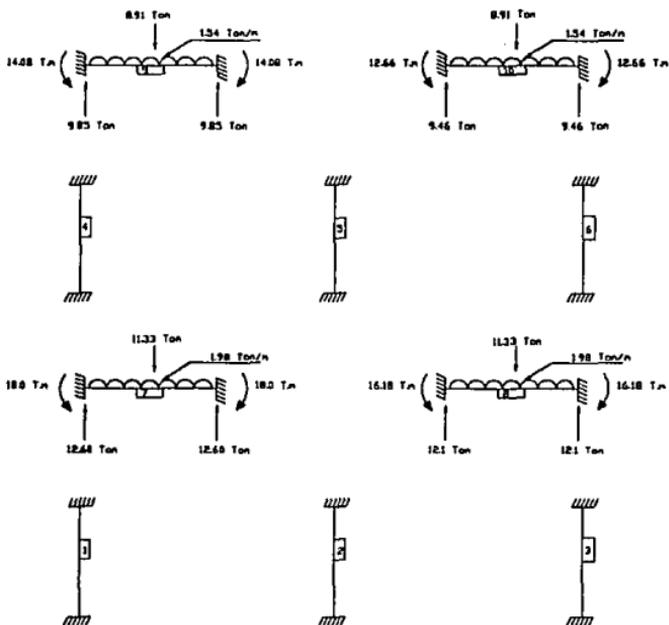


Figura 15. Cargas factorizadas

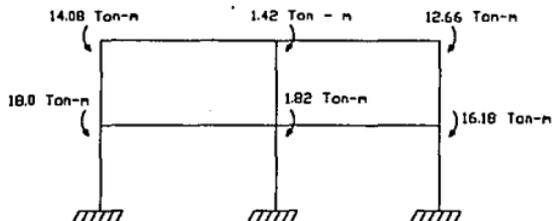
Método de Rigideces.

Estado I

Los momentos de empotramiento de las barras son:



y las fuerzas de fijación totales de los nudos son:





Estado II

El vector de fuerzas efectivas es:

$$\{F_{ef}\} = -\{F\} = \begin{Bmatrix} -18.0 \\ 1.82 \\ 16.18 \\ -14.08 \\ 1.42 \\ 12.66 \\ 2.2 \\ 3.96 \end{Bmatrix} \quad \text{V.6}$$

Necesitamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones para obtener los valores del vector  $\{d\}$ :

$EI \times$	2.857	0.286	0.0	0.571	0.0	0.0	0.0	0.49	$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} =$	$\begin{Bmatrix} -18.0 \\ 1.82 \\ 16.18 \\ -14.08 \\ 1.42 \\ 12.66 \\ 2.2 \\ 3.96 \end{Bmatrix}$
		3.472	0.308	0.0	0.571	0.0	0.0	0.49		
			2.901	0.0	0.0	0.571	0.0	0.49		
				1.714	0.286	0.0	-0.49	0.49		
		SIMETRICA			2.329	0.308	-0.49	0.49		
						1.758	-0.49	0.49		
							1.679	-0.84		
								0.84		

el resultado es:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9.4269 \\ -2.8678 \\ 0.0835 \\ -9.5936 \\ -1.3719 \\ 2.7851 \\ 14.4737 \\ 31.0831 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{EI}$$

Los valores del vector  $\{e\}$  de deformaciones angulares para las barras 3, 4, 6 y 9 son:

BARRA [3]

$$\theta_A = 4.135/EI$$

$$\theta_B = 4.219/EI$$

BARRA [4]

$$\theta_A = \varphi_1 + \frac{(D_2 - D_1)}{L} = -4.681/EI$$

$$\theta_B = \varphi_4 + \frac{(D_2 - D_1)}{L} = -4.848/EI$$

BARRA [6]

$$\theta_A = \varphi_3 + \frac{(D_2 - D_1)}{L} = 4.829/EI$$

$$\theta_B = \varphi_6 + \frac{(D_2 - D_1)}{L} = 7.531/EI$$

BARRA [9]

$$\theta_A = \varphi_4 = -9.594/EI$$

$$\theta_B = \varphi_5 = -1.372/EI$$

Los valores del vector  $\{p\}_{II}$  de elementos mecánicos del Estado II y del vector  $\{p\}$  de elementos mecánicos del marco los calcularemos simultáneamente y en forma similar al realizado en el análisis ante carga vertical del marco. Por lo tanto tenemos:

BARRA [1]

$$M_{AII} = 1.70 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BII} = -3.69 \text{ Ton-m}$$

$$M_A = M_{AI} + M_{AII} = 1.70 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = M_{BI} + M_{BII} = -3.69 \text{ Ton-m}$$

**BARRA [2]**

$$M_{AII} = 5.45 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BII} = 3.81 \text{ Ton-m}$$

$$M_A = 5.45 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = 3.81 \text{ Ton-m}$$

**BARRA [3]**

$$M_{AII} = 7.14 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BII} = 7.18 \text{ Ton-m}$$

$$M_A = 7.14 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = 7.18 \text{ Ton-m}$$

**BARRA [4]**

$$M_{AII} = -8.12 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BII} = -8.21 \text{ Ton-m}$$

$$M_A = -8.12 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = -8.21 \text{ Ton-m}$$

**BARRA [5]**

$$M_{AII} = 4.07 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BII} = 4.93 \text{ Ton-m}$$

$$M_A = 4.07 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = 4.93 \text{ Ton-m}$$

**BARRA [6]**

$$M_{AII} = 9.82 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BII} = 11.37 \text{ Ton-m}$$

$$M_A = 9.82 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = 11.37 \text{ Ton-m}$$

**BARRA [7]**

$$M_{AII} = -6.20 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BII} = -4.33 \text{ Ton-m}$$

$$M_A = 11.8 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = -22.33 \text{ Ton-m}$$

**BARRA [8]**

$$M_{AII} = -1.74 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BII} = -0.83 \text{ Ton-m}$$

$$M_A = 14.44 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = -17.01 \text{ Ton-m}$$

**BARRA [9]**

$$M_{AII} = -5.87 \text{ Ton-m}$$

$$M_{BII} = -3.53 \text{ Ton-m}$$

$$M_A = 8.21 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = -17.61 \text{ Ton-m}$$

**BARRA [10]**

$$M_{AII} = 0.01 \text{ Ton-m}$$

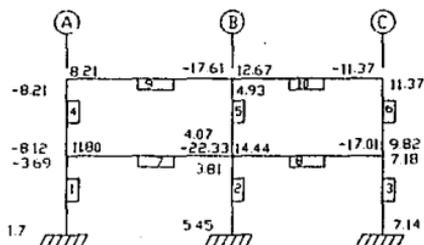
$$M_{BII} = 1.29 \text{ Ton-m}$$

$$M_A = 12.67 \text{ Ton-m}$$

$$M_B = -11.37 \text{ Ton-m}$$

La comprobación la efectuaremos chequeando el equilibrio de los nudos y los cortantes de entepiso con los valores del vector {p}.

Equilibrio de nudos:



La suma de los momentos en cada nudo es igual a cero. Diremos que los resultados son correctos, hasta que comprobemos los cortantes de entrepiso.

Trazaremos el diagrama de momentos flexionantes, igual que en el caso anterior, a partir de los valores del vector (p) y la regla dada en la sección IV.3.2.2.

Diagrama de momentos flexionantes (DMF).

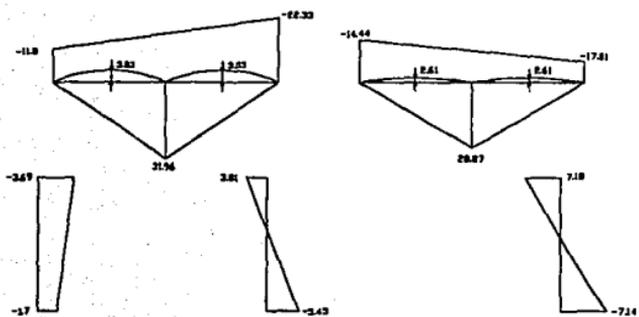
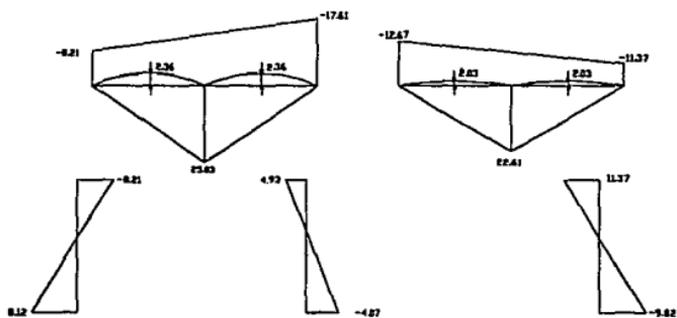
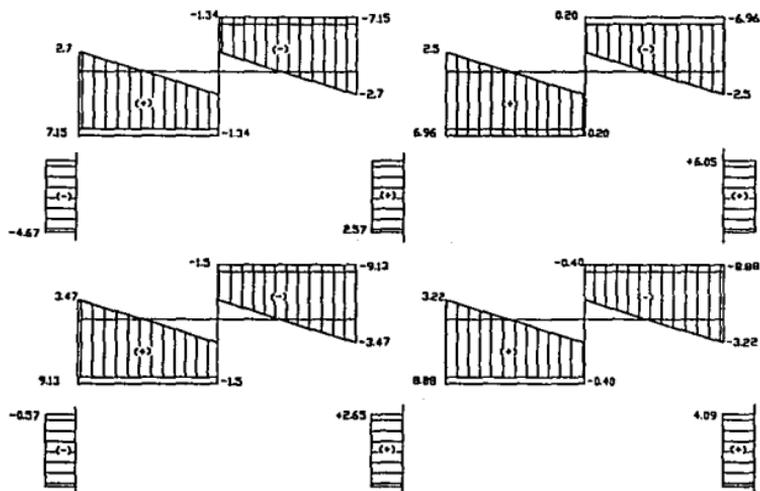
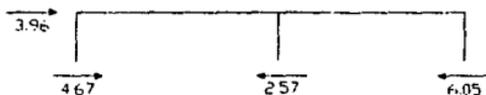


Diagrama de fuerza cortante (DFC).

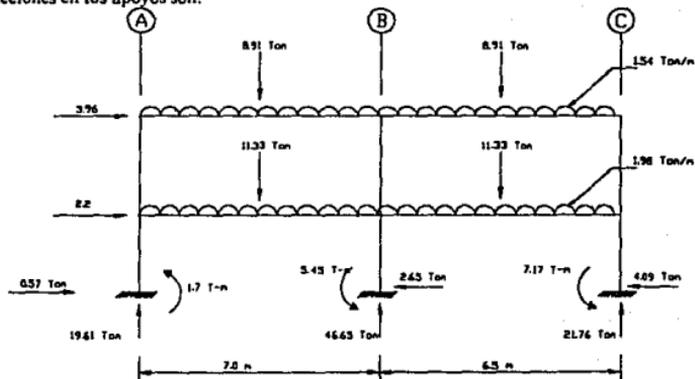


Equilibrio nivel superior:



La suma de cortantes es igual a cero, por lo tanto, los resultados son correctos.

Las reacciones en los apoyos son:



## V.1.2 DIMENSIONAMIENTO DE LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES.

En el proceso de diseño de una estructura debe tenerse muy en cuenta la estabilidad de los diversos elementos que la componen como son vigas, columnas, contraventeos cuando los haya y conexiones. Además, ha de investigarse la estabilidad de la estructura en conjunto. En un diseño correcto debe obtenerse seguridad adecuada contra la falla por inestabilidad de cada uno de los elementos, y contra el colapso ocasionado por ese fenómeno, del sistema completo.

La falla de un marco rígido puede ser parcial o de conjunto.

Las fallas parciales se presentan cuando se agota la resistencia de alguno o algunos de los elementos que forman el marco, sea por inestabilidad, por formación de un mecanismo con articulaciones plásticas, por fracturas o deformaciones locales excesivas, o por cortante.

Una falla parcial, sobre todo si es de una columna, puede tener consecuencias graves; sin embargo, no suele ocasionar el colapso total de la estructura, pues en los marcos rígidos de alto grado de hiperestaticidad hay varias trayectorias posibles de transmisión de las cargas, de manera que si un miembro deja de trabajar se produce un reacondo que lleva a los elementos cercanos las cargas que le correspondían.

El diseño de marcos rígidos siguiendo métodos convencionales se basa en evitar fallas parciales, bajo la suposición de que se obtiene una estructura con una seguridad adecuada si cada uno de los elementos que la componen, considerado individualmente, tiene esa seguridad. Después de hacer el análisis del sistema completo, o dividido en subsistemas, con el que se obtienen los elementos mecánicos en los miembros, estos se dimensionan uno por uno, prestando poca atención al trabajo de conjunto.

### V.1.2.1 Requisitos de seguridad.

Como sabemos, la revisión de los estados límite de falla consiste en comprobar que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$(F_R)(R) \geq (F_C)(\sum S_n)$$

Es decir, que para cada elemento de una estructura, debe verificarse que las fuerzas internas de diseño sean menores o iguales que las resistencias de diseño.

El factor de seguridad de una estructura depende tanto de los factores de carga como de los de resistencia que para ella se estipulan. Los factores de carga toman en cuenta la incertidumbre relativa a las cargas en la estructura y a la exactitud de los métodos de análisis. Los factores de reducción de resistencia toman en cuenta la variabilidad de la resistencia de los materiales, posibles variaciones en las dimensiones geométricas de los miembros y, el tipo de falla de la estructura y sus consecuencias.

En las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Acero se proporcionan los valores del factor de reducción de resistencia  $F_R$ , y se dan métodos y fórmulas para evaluar las resistencias nominales de las estructuras.

Para fines de diseño, el RCDF clasifica las secciones estructurales en cuatro tipos (sección 2.3.1 de las Normas Técnicas Complementarias), en función de las relaciones ancho/gnieso máximas de sus elementos planos que trabajan en compresión:

- |                    |   |
|--------------------|---|
| Secciones tipo 1.- | Capaces de alcanzar el momento plástico y conservarlo durante las rotaciones necesarias para la redistribución de momentos en la estructura (secciones para diseño plástico). |
| Secciones tipo 2.- | Pueden alcanzar el momento plástico pero no tienen capacidad de rotación bajo momento constante de esa magnitud (secciones compactas).  |

**Secciones tipo 3.-** Pueden alcanzar el momento correspondiente a la iniciación del flujo plástico (secciones no compactas).

**Secciones tipo 4.-** Tienen como estado límite de resistencia el pandeo local de algunos de los elementos planos que las componen (secciones esbeltas).

En secciones tipo 1, pueden desarrollarse articulaciones plásticas hasta que se forme el mecanismo de falla. En secciones tipo 2, cuando se presenta una articulación plástica, el elemento deja de ser eficiente por no poder absorber más rotación.

• Para nuestro ejemplo, en la figura 3 se muestran los elementos estructurales del marco para los que revisaremos los estados límites de falla.

Los elementos mecánicos de diseño se obtuvieron en la sección V.1.1.

Los elementos estructurales serán de Acero Estructural B-254 (ASTM A-36).

#### **V.1.2.1a Diseño de la trabe T-2.**

Las solicitaciones principales para este elemento son por flexión y cortante, por lo que el diseño se hará para ambos.

Los diagramas de momentos flexionante y fuerza cortante más desfavorables para este elemento se obtienen del análisis ante cargas verticales (secc. V.1.1a), en donde encontramos que al momento y el cortante máximos se presentan en el extremo B y son:  $M_B = -27.0 \text{ T}\cdot\text{m}$ ,  $V_B = 18.49 \text{ T}$ .

Consideraremos que existe restricción lateral en el centro del claro, proporcionada por las vigas secundarias indicadas en la fig. 1, por lo tanto, la longitud no soportada lateralmente es  $L=3.50 \text{ m}$ .

### Flexión

El perfil supuesto en el análisis fue un IR 356x79.0, con  $Z_{Xc}=1427.0 \text{ cm}^3$ .

Suponiendo que se trata de una sección tipo I ó 2 y que  $L \leq L_u$ , la resistencia de diseño es:

$M_R = F_R Z F_Y = 0.9(1427)(2530)(10^{-3}) = 32.5 \text{ T} \cdot \text{m} > 27.00 \text{ T} \cdot \text{m}$ ; el perfil está sobrado

Proponemos ahora un IR 356x71.4 (w14x48), con  $Z_{Xc}=1285.0 \text{ cm}^3$

$M_R = 0.9(1285)(2530)(10^{-3}) = 29.3 \text{ T} \cdot \text{m} > 27.0 \text{ T} \cdot \text{m}$ , el perfil es adecuado.

Clasificación de la sección

Patines 
$$\frac{b_f}{2t_f} = \frac{204}{2(15.1)} = 6.8 < 9.1$$

Alma 
$$\frac{h}{t_w} = \frac{350 - 2(35.0)}{8.6} = 32.6 < 69.6$$

En la tabla se indican los valores máximos de las relaciones ancho/grueso de patines y almas de secciones I sometidas a flexión alrededor de su eje de mayor momento de inercia, para acero con  $F_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$ , correspondientes a los diferentes tipos de sección que se especifican en las normas.

SECCION	TIPO 1	TIPO 2	TIPO 3
PATINES	9.1	10.7	16.5
ALMA	69.6	105.4	159.0

De acuerdo con los valores calculados, la sección es tipo I.

La longitud máxima no soportada lateralmente  $L_u$ , para la que el miembro puede desarrollar el momento plástico  $M_p$ , se calcula con la siguiente expresión.

$$L_u = \frac{6.55}{x_w} \frac{d r_y}{t} \sqrt{1 + \sqrt{1 + x_w^2}}$$

donde:

$$x_w = 7.7C \left( \frac{d}{t} \right)^2 \frac{F_y}{E}; \text{ } d \text{ es el peralte de la sección y } t \text{ el grueso del patín comprimido.}$$

$$C = 0.6 - 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4; \text{ flexión en curvatura doble.}$$

$$= 0.6 - 0.4 \left( \frac{20.57}{27.00} \right) = 0.3 \Rightarrow C = 0.4$$

### REFERENCIAS A LAS N.T.C. DEL RCDF

Ec. 3.3.1

Secc. 2.3.2

Inciso 2.3.3.1c

Inciso 2.3.3.2d

TABLA 2.3.1

Ec. 3.3.15

Secc. 3.3.2.2

$$x_u = 7.7(0.4) \left( \frac{35}{1.51} \right)^2 \left( \frac{2530}{2,040,000} \right) = 2.052$$

$$L_u = \frac{6.55}{2.052} \left( \frac{35}{1.51} \right) (4.9) \sqrt{1 + \sqrt{1 + (2.052)^2}} = 657.00 \text{ cm}$$

$L_u = 6.57 \text{ m} > L = 3.5 \text{ m}$ ; el pandeo lateral no es crítico.

La sección es capaz de alcanzar el momento plástico, por lo tanto, el perfil propuesto es correcto y el momento resistente es el calculado.

El estado límite se alcanza cuando se agota la resistencia a la flexión en la sección crítica (no se considera redistribución de momentos).

#### Cortante

La resistencia de diseño al cortante,  $V_R$ , de una viga o trabe de eje recto y sección transversal constante, de sección I es.

$$V_R = V_N F_R$$

Ec. 3.3.21

Para calcular la resistencia nominal al corte,  $V_N$ , del alma,

$$\frac{h}{t} = \frac{d - 2t_f}{t_s} = \frac{35.0 - 2(1.51)}{0.86} = 37.2$$

inicialmente consideraremos que no colocaremos atiesadores y,

$$k = 5.0 + \frac{5.0}{\left( \frac{a}{h} \right)^2} = 5.0$$

Ec. 3.3.28

luego,

$$1400 \sqrt{\frac{k}{F_y}} = 1400 \sqrt{\frac{5}{2530}} = 62.2$$

como

$$\frac{h}{t} = 37.2 < 1400 \sqrt{\frac{k}{F_y}} = 62.2$$

entonces

$$V_N = 0.66 F_y A_a = 0.66(2530)[(35.0)(0.86)] = 50,261.0 \text{ Kg}$$

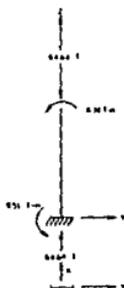
y la resistencia de diseño es

$$V_R = 0.9(50.26) = 45.2 \text{ T} > V_{md} = 18.49 \text{ T}$$

### V.1.2.1b Diseño de la columna C-2B.

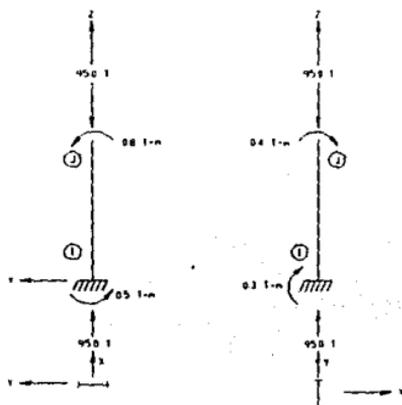
De las columnas seleccionadas para revisar los estados límite de falla, la más solicitada es la C-2B según los resultados del análisis ante cargas verticales (sección V.1.1a).

Las solicitaciones de la columna obtenidas del análisis son:



Para ejemplificar la revisión de los estados límite de un elemento en flexocompresión biaxial, consideraremos que la carga axial se incrementa en un 47% correspondiente al marco en la dirección "x" y que los momentos en la dirección "x" son el 50% de los obtenidos en la dirección "y".

Luego, las solicitaciones de diseño de la columna son:



El perfil supuesto durante el análisis fue un IR 356x79.0, para la revisión de los estados límite consideraremos un perfil IR 356x71.4 igual que en traveses.

### Miembros flexocomprimidos

Dimensionamiento de columnas que forman parte de estructuras regulares.

#### Revisión de las secciones extremas.

En cada uno de los extremos de la columna debe satisfacerse la condición:

$$\left(\frac{M_{pxl}}{M_{px}}\right)^2 + \left(\frac{M_{poy}}{M_{py}}\right)^2 \leq 1.0$$

Para evaluar esta ecuación, calcularemos los valores de los momentos de diseño  $M_{oux}$  y  $M_{ouy}$  considerando que el diseño del entrepiso está regido por cargas verticales únicamente y que el pandeo de conjunto es crítico, por lo tanto:

$$M_{uo} = M_d$$
$$M_{uo}^* = B_2 M_d$$

Revisión de la sección extrema (D)

Dirección eje "y"

$$M_{oux} = M_{uix} = 0.5 \text{ T}\cdot\text{m}$$

El momento resistente de diseño de la sección flexionada alrededor del eje "x" es:

$$M_{px} = 1.18 F_R M_{px} \left(1 - \frac{P_u}{F_R P_y}\right) \leq F_R M_{px}$$

en donde

$$M_{px} = Z_x F_y = 1285(2530)(10^{-3}) = 32.51 \text{ T}\cdot\text{m}$$

$$P_y = A_x F_y = 91.0(2530)(10^{-3}) = 230.2 \text{ T}$$

$$P_u = 95.0 \text{ T}$$

$$F_R M_{px} = 0.9(32.51) = 29.26 \text{ T}\cdot\text{m}$$

Secc. 3.4

Secc. 3.4.3

Inciso 3.4.3.1a

Ec. 3.4.1

Inciso 3.4.3.3a

Ec. 3.4.11

Ec. 3.4.12

Ec. 3.4.2

y.

$$M_{pcc} = 1.18(0.9)(32.51) \left( 1 - \frac{95.0}{0.9(230.2)} \right) = 18.69 \text{ T-m}$$

$$M_{pcc} = 18.69 \text{ T-m} < 29.26 \text{ T-m}$$

Dirección eje "x"

$$M_{uoy} = M_{iij} = 0.3 \text{ T-m}$$

y el momento resistente de diseño de la sección flexionada alrededor del eje "y" es:

$$M_{pcy} = 1.67 F_R M_{py} \left( 1 - \frac{P_u}{F_R P_y} \right) \leq F_R M_{py}$$

Ec. 3.4.3

en donde

$$M_{py} = Z_y F_y = 321(2530)(10^{-3}) = 8.12 \text{ T-m}$$

$$F_R M_{py} = 0.9(8.12) = 7.31 \text{ T-m}$$

entonces

$$M_{pcy} = 1.67(0.9)(8.12) \left( 1 - \frac{95.0}{0.9(230.2)} \right)$$

$$= 6.61 \text{ T-m} < 7.31 \text{ T-m}$$

El valor del exponente  $\alpha$  es:

$$\alpha = 1.60 - \frac{p}{Z L_N p}$$

donde

$$p = \frac{P_u}{F_R P_y} = \frac{95.0}{0.9(230.2)} = 0.459$$

por tanto,

$$\alpha = 1.60 - \frac{0.459}{2 L_N (0.459)} = 1.895$$

y finalmente tenemos

$$\left(\frac{0.5}{18.69}\right)^{1.895} + \left(\frac{0.3}{6.61}\right)^{1.895} = 0.001 + 0.003 \\ = 0.004 < 1.0$$

Revisión de la sección extrema J

Dirección eje "y"

$$M_{ux} = M_{lx} = 0.8 \text{ T-m}$$

$$M_{px} = 18.69 \text{ T-m}$$

Dirección eje "x"

$$M_{uy} = 0.4 \text{ T-m}$$

$$M_{py} = 6.61 \text{ T-m}$$

entonces,

$$\left(\frac{0.8}{18.69}\right)^{1.895} + \left(\frac{0.4}{6.61}\right)^{1.895} = 0.003 + 0.005 \\ = 0.01 < 1.0$$

De acuerdo con lo anterior, la resistencia de las dos secciones extremas de la columna están muy poco solicitadas.

Revisión de la columna completa.

Sec. 3.4.3.2

Debe satisfacerse la condición:

$$\left(\frac{M_{mx}^*}{M_{mx}}\right)^{\beta} + \left(\frac{M_{my}^*}{M_{my}}\right)^{\beta} \leq 1.0$$

Ec. 3.4.6

donde

$$M_{mx}^* = B_2 M_{lx}$$

Ec. 3.4.12

siendo  $B_2$  el factor de amplificación de momentos, igual a:

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_U}{F_R(\sum P_E)}}$$

la carga crítica de pandeo elástico  $P_{Ex}$  es:

$$P_{Ex} = \frac{A_1 \pi^2 E}{\left(K_x \frac{l}{r_x}\right)^2}$$

el factor de longitud efectiva  $K_x$ , lo evaluaremos considerando que los movimientos laterales del marco no están impedidos:

$G_1 = 1.0$ , valor recomendable

$$G_2 = \frac{\sum(I/L)_c}{\sum(I/L)_r} = \frac{2(20187) / 350}{\frac{20187}{700} + \frac{20187}{650}} = 1.93$$

con ellos, obtenemos,  $K_x = 1.42$

y consecuentemente,

$$P_E = \frac{91.0 \pi^2 (2'040,000)}{\left(\frac{1.42(350)}{14.9}\right)^2} = 1646,763.0 \text{ Kg}$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{95.0}{0.9(1646.8)}} = 1.07$$

$$M_{max}^* = 1.07(0.8) = 0.86 \text{ T - m}$$

En forma similar, obtendremos

$$M_{max}^* = B_2 M_{2y}$$

Ec. 3.4.12

Ec. 3.4.14

en este caso,  $K_y = K_x = 1.42$ , por tanto,

$$P_{Ey} = \frac{91.0\pi^2(2'040,000)}{\left(\frac{1.42(350)}{4.9}\right)^2} = 178,095.0 \text{ Kg}$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{95.0}{0.9(178.1)}} = 2.4$$

entonces,

$$M_{my}^* = 2.4(0.4) = 0.96 \text{ T} \cdot \text{m}$$

Los momentos resistentes de diseño de la columna flexionada en cada uno de sus planos de simetría, reducidos por la presencia de la fuerza de compresión y por posible pandeo lateral, se calcula con las ecuaciones:

$$M_{ux} = M_u \left(1 - \frac{P_u}{R_c}\right)$$

Ec. 3.4.7

$$M_{uy} = F_R M_{py} \left(1 - \frac{P_u}{R_c}\right)$$

Ec. 3.4.8

donde  $M_u$  es el momento resistente de diseño, para flexión alrededor del eje x, o sea que:

$$M_u = M_R = F_R Z_x F_y = 29.3 \text{ T} \cdot \text{m}, \text{ calculado anteriormente.}$$

Ec. 3.3.1

la resistencia de diseño en compresión,  $R_c$ , se determina a continuación:

$$R_c = \frac{F_y}{\left[1 + \lambda^{2n} - 0.15\lambda^{2n}\right]^{1/n}} A, F_R \leq F_y A, F_R$$

donde

Ec. 3.2.1

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{KL}{r} \sqrt{\frac{F_y}{\pi^2 E}} \\ &= \frac{1.42(350)}{4.9} \sqrt{\frac{2530}{\pi^2(2040,000)}} \\ \lambda &= 1.137 \end{aligned}$$

por tanto

$$R_c = \frac{2530}{\left[1 + (1.137)^{2(1.4)} - 0.15^{2(1.4)}\right]^{1/4}} (91.0)(0.9)(10^{-3})$$

$$R_c = 110.0 \text{ Ton}$$

Podemos ahora obtener los valores de los momentos resistentes de diseño reducidos:

$$M_{sx} = 29.3 \left(1 - \frac{95.0}{110.0}\right) = 4.00 \text{ T-m}$$

$$M_{sy} = 0.9(321)(2530) \left(1 - \frac{95.0}{110.0}\right) (10^{-3})$$

$$M_{sy} = 1.00 \text{ T-m}$$

Para calcular el valor del exponente  $\beta$ , calculemos la relación, ancho de los patines (B) y peralte total de la sección D,

$$\frac{B}{D} = \frac{20.4}{35.0} = 0.58 > 0.3, \text{ entonces}$$

$$\beta = 0.4 + p + \frac{B}{D} \geq 1.0$$

$$\beta = 0.4 + 0.459 + 0.58 = 1.44$$

finalmente,

$$\left(\frac{0.86}{4.0}\right)^{1.44} + \left(\frac{0.96}{1.00}\right)^{1.44} = 0.109 + 0.943 \\ = 1.05 \cong 1.0$$

Aunque el perfil está ligeramente escaso, consideraremos en este caso que es adecuado.

### V.1.2.1c Diseño de la conexión X-2B.

El diseño de las conexiones debe hacerse de manera que su comportamiento sea lo más cercano posible al correspondiente al tipo de construcción que se esté utilizando.

Las estructuras continuas o marcos rígidos (construcción tipo I) se analizan y diseñan suponiendo que al deformarse la estructura no se alteran los ángulos que forman los ejes de las barras que concurren en cada conexión.

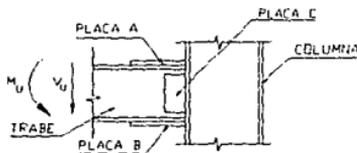
Las conexiones entre los elementos estructurales de un marco rígido se denominan "conexiones rígidas", y suelen aceptarse como tales, aquellas que puedan resistir un momento de cuando menos el 90% del momento de empotramiento perfecto de una viga conectada a un apoyo completamente rígido.

El diseño de las conexiones implica realizar una junta que sea segura, económica y que se pueda construir (ha de ser práctica). En general, las conexiones más prácticas son las más económicas, ya que los costos de fabricación y montaje son generalmente muy altos.

Para interconectar a los elementos estructurales emplearemos conexiones soldadas, cuya ventaja principal es el ahorro en tiempo de fabricación y montaje de la estructura.

#### Conexión rígida de trabe a patín de columna.

Los elementos mecánicos de diseño de la conexión, momento flexionante y cortante, son los siguientes (secc. V.1.2.1.a):  $M_u = 27.0 \text{ T-m}$ ;  $V_u = 18.0 \text{ T}$



La estructuración de la conexión la efectuaremos mediante tres placas básicamente, dos placas horizontales A y B que tomarán el momento mediante fuerzas axiales de tensión y compresión y una placa vertical C que tomará el cortante o reacción vertical.

La placa superior A se suelda en un extremo al patín de la columna con soldadura de penetración completa y sobre el patín superior de la trabe con soldadura de filete en los tres bordes restantes de la placa. Ambas soldaduras de campo.

La placa inferior B se suelda en un extremo al patín de la columna con soldadura de penetración completa en taller y al patín inferior de la trabe con soldadura de filete en campo.

La placa vertical C se suelda en taller al patín de la columna y en campo al alma de la trabe, ambas soldaduras de filete.

**Diseño de la conexión rígida.**

- A) Determinación de la fuerza horizontal  $T = \frac{1.25M_U}{d}$ , donde:

$M_U$  = Momento de diseño de la conexión en Ton-m  
 $d$  = Peralte de la viga en m

$$T = \frac{1.25(27)}{0.35} = 96.43 \text{ Ton.}$$

- B) Dimensionamiento de las placas A y B.

- B.1) Estado límite de flujo plástico en la sección total. La resistencia de diseño,  $R_t$ , es:

$$R_t = A_t F_y F_r$$
$$R_t = A_t (2530)(0.9) \geq 96430.0 \text{ Kg}$$

$$A_t \geq \frac{96430}{2530(0.9)} \geq 42.3 \text{ cm}^2$$

El ancho del patín de la trabe es  $b_p = 20.4$  cm. Entonces, se propone placa de 1/8" (2.86 cm) de espesor y 15 cm. de ancho, con

$$A_t = 2.858(15) = 42.86 \text{ cm}^2 > 42.3 \text{ cm}^2$$

- B.2) Estado límite de fractura en la sección neta:

La resistencia de diseño,  $R_t$ , se calcula con

$$R_t = A_n F_u F_R$$
$$= 42.86(4080)(0.75) = 131,152.0 \text{ Kg}$$
$$R_t = 131.2 \text{ Ton} > 96.43 \text{ Ton}$$

- B.3) Longitud de la soldadura de filete (Ls)

El dimensionamiento de un cordón de soldadura de filete se basa en la capacidad al cortante del mismo en su sección más reducida (garganta).

Resistencia de diseño

La resistencia de diseño de la soldadura, considerando electrodos E70 (4920 Kg/cm<sup>2</sup> = resistencia última a tensión del metal de soldadura) es.

$$R_s = F_R F_S A_{cs}$$

donde  $A_{cs}$  = área efectiva de la soldadura

$F_R = 0.6 F_{EXX}$  = resistencia nominal del metal del electrodo, luego entonces,

$$R_s = 0.75(0.6)(4920)(Acs) \geq 96430 \text{ Kg}$$

$$2214 \text{ Acs} \geq 96430$$

Secc. 5.8.3a

Ec. 3.1.1

Ec. 3.1.2

Secc. 5.2.5

$$A_{es} \geq 43.6 \text{ cm}^2$$

Los tamaños mínimo ( $D_{\min}$ ) y máximo ( $D_{\max}$ ) de la soldadura de filete para la placa de 2.86 cm de espesor son:

$$D_{\min} = 5/16" (0.79 \text{ cm})$$

$$D_{\max} = 15/16" (0.94 \text{ cm})$$

Secc. 5.2.8a

Secc. 5.2.8b

Considerando soldadura de  $1/2"$  (1.27 cm), la longitud necesaria de soldadura es:

$$A_{es} = T L_s \geq 43.6 \text{ cm}^2, \text{ donde}$$

$$T = D(\cos 45^\circ) = 0.7071D = \text{dimensión en la garganta}$$

y,

$$A_{es} = 0.7071(D)(L_s) \geq 43.6 \text{ cm}^2$$

$$= 0.7071(1.27)(L_s) \geq 43.6 \text{ cm}^2$$

$$L_s \geq \frac{43.6}{0.898} = 48.55 \text{ cm}$$

Usar 15.0 cm de soldadura en el extremo y 18.0 cm. en cada lado. E70xx.

Si se considera una holgura de 2.0 cm para dar espacio a la placa de respaldo, tenemos:

placas A y B: PL 28.6 mm x 150 mm x 200 mm

C) Diseño de la conexión al alma

La resistencia de diseño de la soldadura es:

$$\begin{aligned} R_s &= F_R F_S A_{es} = 0.75(0.6 F_{EXX})(T L_s) \\ &= 0.75(0.6)(4920)(D \cos 45^\circ) L_s \\ &= 1565.5 D L_s \end{aligned}$$

Si  $L_s = 1 \text{ cm}$  entonces, la resistencia por unidad de longitud es:

$$R_s = 1565.5 D$$

C.1) Para evitar sobreesfuerzos por cortante en el alma de la viga, consideraremos la resistencia de diseño al cortante del alma de la viga, mayor o igual a la de la soldadura:

$$V_R = V_N F_R \geq R_s = 1565.5 D_C$$

donde

$$V_R = 0.9(0.66)(2530)(A_w)$$

como

$A_w = t_w (d)$ , si  $d=1$  entonces

$$V_R = 1502.82 t_w \geq 1565.5 D_C$$

luego, el tamaño  $D_C$  de la soldadura al alma debe ser

$$D_C \leq \frac{1502.82 t_w}{1565.5} = 0.96 (t_w)$$

$$D_C \leq 0.96(0.86) = 0.83 \text{ cm}$$

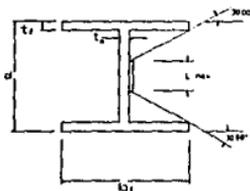
Consideraremos  $D_C = 0.6 \text{ cm}$  (1/4")

La longitud de la soldadura ( $L_s$ ), la calcularemos con:

$$R_s = 1565.5 D_C L_s \geq 1.25(18,490) = 23113 \text{ Kg}$$

$$L_s \geq 24.6 \text{ cm}$$

Por otro lado, sabemos que la longitud máxima de una placa de conexión soldada al alma de una trabe IR, se limita por la inclinación mínima de  $30^\circ$  recomendable del electrodo al soldar los cordones paralelos a los patines del perfil como se muestra:



$$\tan 30^\circ = \frac{(d - L_{máx} - 2t_f) / 2}{(b_f - t_w) / 2}$$

$$L_{máx} = d - 2t_f - (b_f - t_w) \tan 30^\circ$$

$$L_{máx} = 35.0 - 2(1.51) - (20.4 - 0.86) \tan 30^\circ$$

$$L_{máx} = 20.7 \text{ cm}$$

C.2) Para evitar sobreesfuerzos en la placa C, el espesor de la placa C debe cumplir con:

$$1502.82 t_c \geq 1565.5 D_c$$

$$t_c \geq \frac{1565.5}{1502.82} (0.6) = 0.625 \text{ cm}$$

Probaremos con  $t_c = 1.27 \text{ cm}$  (1/2")

C.3) El tamaño máximo de la soldadura ( $D_D$ ) de la placa C con el patín de la columna es:

$$D_D \leq \frac{1502.82}{2(1565.5)} t_c = \frac{1502.82}{2(1565.5)} (1.27) = 0.61 \text{ cm}$$

Además, la dimensión mínima de la soldadura para el patín de la columna ( $t_w = 0.86 \text{ cm}$ ) es de 0.48 cm, por lo tanto, asumiremos que: Secc. 5.2.8b

$$D_D = 0.6 \text{ cm} (1/4")$$

La longitud de la soldadura ( $L_s$ ) necesaria es:

$$1565.5 D_D L_s \geq \frac{23113}{2}$$

$$L_s \geq \frac{11557}{939.3} = 12.3 \text{ cm}$$

C.4) Resumiendo, en el inciso C.1) encontramos que la longitud máxima de la placa de conexión (C) es de 20.7 cm. Tomaremos una longitud de 18 cm. La longitud de la soldadura necesaria es de  $L_s \geq 24.6 \text{ cm}$ , consideraremos un ancho de 8.0 cm

Placa C: PL 12.7 mm x 80 mm x 180 mm, acero A36

Soldadura C(placa C con alma de la viga): soldadura de filete de 6mm a lo largo del borde de la placa C, con remates de 40mm mínimo. E70xx.

Soldadura D(placa C con patín de columna): soldadura de filete de 6mm en ambos lados de la placa. E70xx.

D) Diseño de atiesadores Secc. 5.8.3

D.1) El área de la sección transversal total  $A_w$  de un par de atiesadores del alma de una columna se diseña para la fuerza incrementada transmitida al alma de una columna menos la fuerza de resistencia del alma de la columna, así:

$$A_{at} = \frac{P_{FV} - F_{yc} t_c (t_v + 5k)}{F_{ym}}$$

donde  $P_{FV} = 96,430 \text{ Kg}$  (cargas muertas y vivas)

$$F_{yc} = F_{ym} = 2530 \text{ Kg / cm}^2$$

$$k = 3.5 \text{ cm}$$

$$t_c = 0.86 \text{ cm}$$

$$t_v = 2.86 \text{ cm}$$

luego,

$$A_{at} = \frac{96430 - 2530(0.86)[2.86 + 5(3.5)]}{2530} = \frac{96430 - 44299.3}{2530} = 20.61 \text{ cm}^2$$

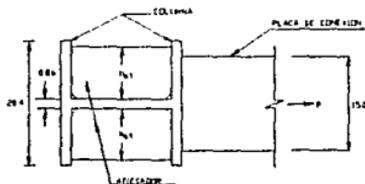
Ademas, los atiesadores deben cumplir los requisitos siguientes:

1.- Los atiesadores que trabajan en compresión no deben fallar por pandeo local.

Para ello, la relación ancho grueso máximo no debe exceder el valor dado por,

$$\frac{b_{at}}{t_{at}} \leq \frac{800}{\sqrt{F_y}} = \frac{800}{\sqrt{2530}} = 15.9$$

2.- La suma del ancho de cada atiesador ( $b_a$ ), mas la mitad del grueso del alma del miembro sobre el que actúa la carga concentrada no será menor que un tercio del ancho del patín o de la placa de conexión a través de la que se aplica la carga.



$$b_{at} + \frac{0.86}{2} \geq \frac{15}{3} = 5$$

$$b_{at} \geq 4.57 \text{ cm.}$$

3.- El grueso de los atiesadores  $t_a$ , no será menor que la mitad del grueso del patín del elemento atiesado.

$$t_{at} \geq \frac{t_p}{2} = \frac{1.51}{2} = 0.76 \text{ cm}$$

Ec. 5.8.1

Secc. 5.8.3a

Secc. 3.7.8

TABLA 2.3.1

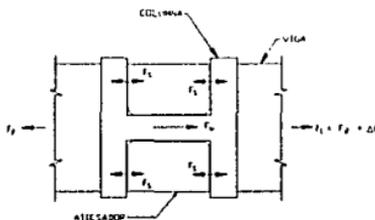
4.- Cuando la carga concentrada actúa en un solo patín del elemento que la recibe, basta con que los atiesadores lleguen a la mitad del peralte del alma.

En nuestro caso, se colocarán en todo el peralte del alma y consideraremos  $b_w = 9.0 \text{ cm}$  y  $t_w = 1.588 \text{ cm}$  (5/8").

5.- La soldadura que une los atiesadores con el alma del elemento sobre el que actúan cargas concentradas debe dimensionarse para que transmita la fuerza en los atiesadores ocasionada por los momentos diferentes que obran en los lados opuestos del elemento atiesado.

En una conexión de viga a columna, la transmisión básica de una fuerza aplicada transversal o perpendicular a un miembro se transmite casi totalmente a las porciones de ese miembro que se encuentran paralelas a dicha fuerza.

Cualquier momento no balanceado ( $M = M_1 - M_2$ ) actuando en la columna, debe ser transmitido a los patines de esta como una transmisión de cortante. Supóngase  $M_1 > M_2$ , como se presenta en nuestro ejemplo, entonces  $F_1 > F_2$ .



La fuerza de tensión  $F_1$  del patín de la viga de la izquierda se transmite directamente como tensión a través de ambos atiesadores y el alma de la columna al patín de la viga de la derecha, entonces

$$F_2 = 2F_1 + F_w$$

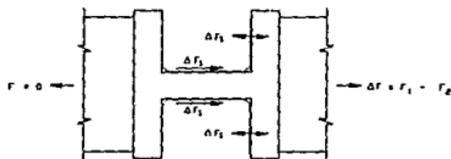
donde  $F_1$  = Fuerza en las soldaduras transversales entre los patines de la columna y los atiesadores.

$F_w$  = Fuerza máxima de tensión que es capaz de resistir el alma de la columna.

En este caso, las soldaduras paralelas entre los atiesadores y el alma de la columna no transmiten fuerza.

ESTOS NO DEBE  
 SALIR DE LA BIBLIOTECA

El diferencial de la fuerza de tensión ( $\Delta F$ ) del patín de la viga de la derecha se transmite directamente como tensión a los atiesadores de la columna, ya que supusimos que el alma ha agotado tal capacidad. La fuerza de tensión en los atiesadores se transmite después como cortante a través de las soldaduras paralelas al alma de la columna, teniendo:



de donde obtenemos,  $\Delta F = 2\Delta F_x$

Por lo tanto, las soldaduras transversales entre los patines de la columna y los atiesadores deben diseñarse para la fuerza  $F_{st}$  dada por

$$F_{st} = 2F_x + 2\Delta F_x$$

siendo,  $F_x = \frac{1}{2}(F_2 - F_w)$

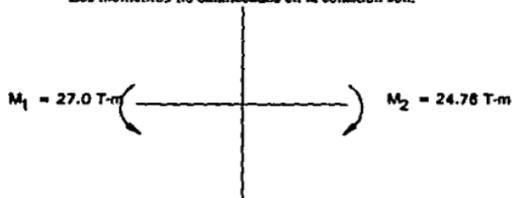
$$\Delta F_x = \frac{1}{2}(F_1 - F_2)$$

Y, las soldaduras paralelas entre los atiesadores y el alma de la columna deben diseñarse para la fuerza

$$\Delta F = F_1 - F_2$$

D.2) Tamaños de soldaduras.

Los momentos no balanceados en la conexión son:



y las fuerzas no balanceadas:

$$F_1 = 96.43 \text{ TON}$$

$$F_2 = 88.43 \text{ TON}$$

D.2.1) Soldaduras transversales entre los patines de la columna y los atiesadores ( $T_{st}$ )

$$F_s = \frac{1}{2}(F_2 - F_w)$$

donde;  $F_w = F_{rc} t_c (t_v + 5_s)$

$$= 2530(0.86)[2.86 + 5(3.5)]$$

$$= 44,299 \text{ Kg}$$

$$2F_s = 88.43 - 44.3 = 44.13 \text{ TON}$$

Por otro lado, el diferencial de fuerza de tensión ( $\Delta F$ ) es:

$$\Delta F = F_1 - F_2 = 96.43 - 88.43 = 8.0 \text{ TON}$$

$$\text{y, } 2\Delta F_s = \Delta F = 8.0 \text{ TON}$$

entonces, la fuerza de diseño de las soldaduras transversales es:

$$F_{st} = 2F_s + 2\Delta F_s = 52.13 \text{ TON}$$

El tamaño mínimo ( $D_{\min}$ ) de la soldadura de filete para el patín de la columna es:

$$D_{\min} = 3/16" \text{ (0.48 cm)}$$

3.7.3

La resistencia de disco de la soldadura es:

$$R_S = F_R F_S Aes = 0.75(0.6 F_{Ex})(TL_S) \\ = 1565.5 DL_S \geq 52.13 \text{ TON}$$

Si  $D = 3/8" (0.95 \text{ cm})$   
 $L_S = bat = 9.0 \text{ cm}$

tenemos que:

$$R_S = 1565.5(0.95)(9)(4) = 53,540.1 \text{ Kg}$$

$$R_S = 53.54 \text{ TON} > 52.13 \text{ TON} \quad \therefore \text{O.K.}$$

D.2.2) Soldaduras longitudinales entre el alma de la columna y los atiesadores ( $T_{SL}$ )

Estas soldaduras deben diseñarse para la fuerza

$$\Delta F = 2\Delta F_S = F_1 - F_2 = 8.0 \text{ TON}$$

La resistencia de disco de la soldadura es:

$$R_S = 1565.5 DL_S \geq 8.0 \text{ TON}$$

Si  $D = 1/4" (0.635 \text{ cm})$   
 $L_S = 25.0 \text{ cm}$

entonces,  $R_S = 24.9 \text{ TON} > 8.0 \text{ TON}$   
 $\therefore \text{O.K.}$

### V.1.2.1d Diseño de la placa base PB-C.

El esfuerzo de diseño por compresión en el área de apoyo de un cimiento de concreto o de mampostería, es mucho menor que el correspondiente a la placa base de acero de una columna. Cuando una columna de acero se apoya en la parte superior de un cimiento o de una zapata aislada, es necesario que la carga de la columna se distribuya en un área suficiente para evitar que se sobreestruere el concreto. Las cargas de las columnas de acero se transmiten a través de una placa base de acero a un área razonablemente grande del cimiento, que se localiza abajo de dicha placa.

Para el diseño de las placas base, las NTC para el Diseño y Construcción de Estructuras Metálicas del RCDF señalan en su sección 4.4 que deberán tomarse "...todas las medidas necesarias para lograr una transmisión correcta de las fuerzas y momentos que soporta una columna a los elementos sobre los que se apoya, mediante el empleo de placas base perfectamente asentadas sobre ellos y de anclas diseñadas para resistir todas las tensiones y fuerzas cortantes que puedan presentarse...".

El RCDF y sus NTC no proporcionan detalles para el diseño de las placas base, pero un procedimiento similar al llamado método "tradicional", puede ser satisfactorio, el cual está basado en el criterio de los esfuerzos permisibles especificados en el manual del AISC-ASD (allowable stress design).

#### Diseño de la placa base.

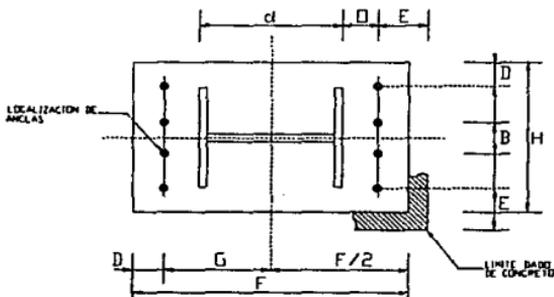


Figura 16. Placa Base.

Diseñar una placa base de acero A36 para la columna IR 356x71.4 sometida a las siguientes cargas (sección V.1.1.b Análisis del marco ante cargas verticales y laterales).

$P_u = 21.76 \text{ ton} \Rightarrow P = 19.78 \text{ ton}$  (afectados por el factor de carga  $P_c = 1.1$ )

$M_u = 7.17 \text{ ton-m} \Rightarrow M = 6.52 \text{ ton-m}$

$V_u = 4.09 \text{ ton} \Rightarrow V = 3.72 \text{ ton}$

Las variables de la figura 16 las calcularemos tomando como base la tabla 6.5.1a de la referencia 7:

Consideraremos 4 anclas de la referencia de  $3/4" \text{ } \emptyset$  sin cartabones.

$$G = \frac{d}{2} + 0 = \frac{35}{2} + 3.2 = 20.7 \text{ cm} = 21 \text{ cm}$$

$$F = 2G + 2D = 2(21) + 2(3.2) = 48.4 = 49 \text{ cm}$$

$$H = 3B + 2D = 3(6.7) + 2(3.2) = 26.5 = 27 \text{ cm}$$

$$A = FH = 49(27) = 1323 \text{ cm}^2$$

$$S = \frac{HF^2}{6} = \frac{27(49)^2}{6} = 10,804.5 \text{ cm}^3$$

Resistencia del concreto a la compresión:  $f_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$

$$f = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{S} = \frac{19780}{1323} \pm \frac{652000}{10804.5} = 14.95 \pm 60.34$$

$$f_1 = 72.30 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_2 = -45.4 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A_1 = \text{Area de aplastamiento} = A = 1323 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \text{Area de concreto} = (2G + 2E)(3B + 2E)$$

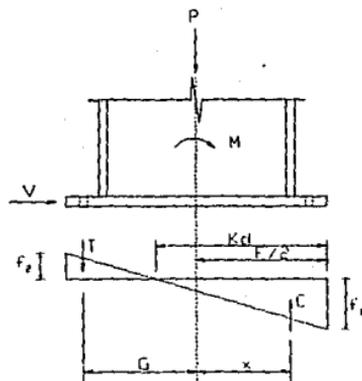
$$= [2(21) + 2(12.5)][3(6.7) + 2(12.5)]$$

$$A_2 = 3,021.7 \text{ cm}^2$$

$$F_p = 0.35 f_c \sqrt{A_2 / A_1} = 0.35(200) \sqrt{\frac{3,021.7}{1323}} = 105.8 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_1 = 72.3 \text{ Kg/cm}^2 < F_p = 105.8 \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{¡ok!}$$

### ANÁLISIS DE LA PLACA BASE



$$\sum F_v = 0$$

$$T + P - C = 0$$

$$T + 19780 - \frac{1}{2}(72.3)(27)(Kd) = 0$$

$$T + 19780 - 976.05 Kd = 0 \quad \text{----- (V.a)}$$

$$\sum M = 0$$

$$TG + Cx - M = 0$$

$$21T + 976.05 Kd \left[ 24.5 - \frac{Kd}{3} \right] - 652000 = 0$$

$$-T - 1138.72 Kd + 15.49 Kd^2 + 31047.62 = 0 \quad \text{----- (V.b)}$$

Sumando (V.a) y (V.b) se tiene:

$$15.49 Kd^2 - 2114.77 Kd + 50827.62 = 0$$

Resolviendo obtenemos:

$$Kd_1 = 105.4 \text{ cm} > F = 49.0$$

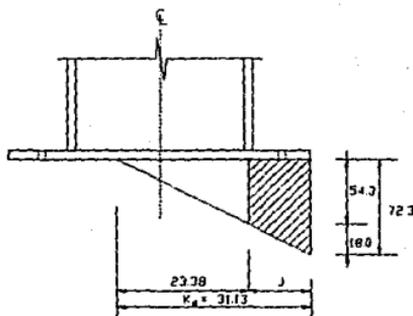
I NO!

$$Kd_2 = 31.13 < F = 49.0$$

¡SI!

Sustituyendo en (V.a)

$$T = 10,604.4 \text{ Kg}$$



$$J = F / 2 - d / 2 + t / 2$$

$$= 24.5 - 17.5 + 0.75 = 7.75 \text{ cm}$$

$$M_p = 54.3 \frac{(7.75)^2}{2} + \frac{1}{2}(18.0)(7.75) \frac{2}{3}(7.75) = 1991.07 \text{ Kg-cm/cm}$$

**DISEÑO.**

$$t = \sqrt{\frac{6M_p}{F_s}} = \sqrt{\frac{6(1991.07)}{0.66(2530)}} = 2.67 \text{ cm}$$

sea  $PL \ 1\frac{1}{8}'' = 2.85 \text{ cm} > 2.67 \text{ cm}$  ¡ok!

$$\text{No. de anclas de } \frac{3}{4}'' \varnothing = \frac{T}{AsF_r}$$

$$= \frac{10,604.4}{(2.15)(1518)} = 3.25; \text{ sean 4 anclas de } \frac{3}{4}'' \varnothing$$

REVISION A TENSION Y CORTANTE.

$$f_r = \frac{T}{A_{sr}} = \frac{10604.4}{4(2.15)} = 1233.07 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_c = \frac{V}{A_{sv}} = \frac{3720}{4(1.99)} = 467.3 \text{ Kg/cm}^2 < F_c = 10 \text{ KSI} = 703.08 \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{¡ok!}$$

$$F_r = 0.43 F_u - 1.8 f_c$$

$$= 0.43(4850) - 1.8(467.3) = 1244.4 \text{ Kg/cm}^2$$

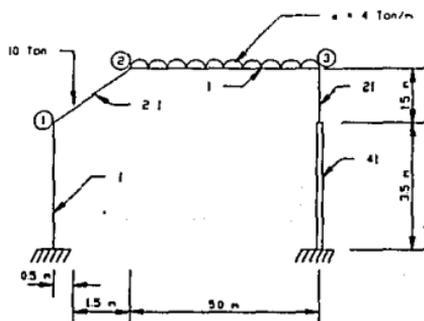
$$F_r = 1244.4 > f_r = 1233.07 \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{¡ok!}$$

## V.2 EJEMPLO No. 2

El presente ejemplo, fue incluido para mostrar la aplicación del método de flexibilidades desarrollado en el capítulo anterior. Nos plantaremos como objetivos en este ejemplo:

- Obtener las reacciones en los apoyos del marco.
- Efectuar la comprobación del método.
- Obtener los diagramas de momento flexionante (DMF) y fuerza cortante (DFC) para todos los elementos estructurales del marco.
- Calcular los desplazamientos  $dx_1$ ,  $dx_2$  y  $dy_2$ .

El marco a resolver, mostrado en la figura 4., es el siguiente:



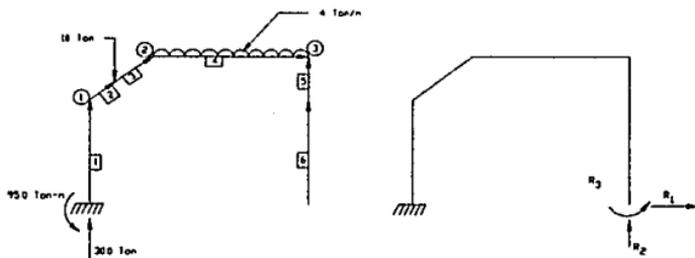
como dato adicional sabemos que  $E = \text{cte}$  (acero estructural).

### SOLUCIÓN

Para la aplicación del método de flexibilidades es necesario conocer en primer lugar el grado de indeterminación estática del marco. En nuestro ejemplo, el grado de indeterminación estática y por lo tanto, el número de liberaciones necesarias para hacer al marco estáticamente determinado es tres.

En la sección IV.2.3 definimos a una barra como todo elemento recto de sección constante que tenga momentos flexionantes y fuerzas cortantes sin discontinuidades.

De acuerdo con lo anterior, a continuación se muestra la estructura isostática elegida, con sus reacciones en el apoyo y la numeración de las barras. Se muestran también las redundantes  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .



El vector  $\{R\}$  de las redundantes es:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix}$$

Los valores del vector  $\{R\}$  de las redundantes los encontraremos con la ecuación:

$$[b_r]^T [f] [b_r] \{R\} = -[b_r]^T [f] \{p_o\} \quad \text{----- IV.21}$$

Las cargas sobre las barras del marco son concentradas o uniformemente repartidas, por lo tanto y según lo planteado anteriormente, el valor de la integral  $\int_L Mm ds/EI$  lo evaluaremos usando la fórmula de Simpson, ecuación (IV.26), y en este caso, el vector  $\{p\}_{[i]}$  de la ecuación IV.4A tiene la forma:

$$\{p\}_{[i]} = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{Bmatrix}_{[i]}$$

Sabemos, por la ecuación IV.17, que  $\{p_o\}$  representa a los elementos mecánicos (momentos flexionantes) en los miembros del marco, producidos por las cargas reales aplicadas en la estructura isostática, entonces:

$$\{p_o\} = \begin{Bmatrix} \{p_o\}_{[1]} \\ \{p_o\}_{[2]} \\ \{p_o\}_{[3]} \\ \{p_o\}_{[4]} \\ \{p_o\}_{[5]} \\ \{p_o\}_{[6]} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -95.0 \\ -95.0 \\ -95.0 \\ -87.5 \\ -80.0 \\ -80.0 \\ -65.0 \\ -50.0 \\ -50.0 \\ -12.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ (Ton-m)}$$

El cálculo de la matriz  $[f]$ , lo realizamos considerando la ecuación IV.28 que nos dice:

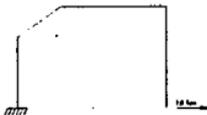
$$[f]_{ij} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$[f] = \begin{bmatrix} [f]_{11} \\ \text{---} \\ [f]_{21} \\ \text{---} \\ [f]_{31} \\ \text{---} \\ [f]_{41} \\ \text{---} \\ [f]_{51} \\ \text{---} \\ [f]_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 14.0 \\ 0.3125 \\ 1.25 \\ 0.3125 \\ 0.9375 \\ 3.75 \\ 5.0 \\ 20.0 \\ 5.0 \\ 0.75 \\ 3.0 \\ 0.75 \\ 0.875 \\ 3.5 \\ 0.875 \end{bmatrix} \times \frac{1}{6EI}$$

La ecuación IV.19 nos dice que las columnas de  $[b_R]$  son los valores de  $\{p\}_i$  en la estructura isostática, producidos por las redundantes  $R_i$  unitarias, entonces:

Primera columna de  $[b_R]$ ;  $R_1=1$



Segunda columna de  $[b_R]$ ;  $R_2=1$



Tercera columna de  $[b_R]$ ;  $R_3=1$



$$[b_R] = \begin{bmatrix} 0.0 & 7.0 & 1 \\ 1.75 & 7.0 & 1 \\ 3.5 & 7.0 & 1 \\ \hline 3.5 & 7.0 & 1 \\ 3.6875 & 6.75 & 1 \\ 3.875 & 6.5 & 1 \\ 3.875 & 6.5 & 1 \\ 4.4375 & 5.75 & 1 \\ \hline 5.0 & 5.0 & 1 \\ 5.0 & 5.0 & 1 \\ 5.0 & 2.5 & 1 \\ 5.0 & 0.0 & 1 \\ \hline -5.0 & 0.0 & -1 \\ -4.25 & 0.0 & -1 \\ -3.5 & 0.0 & -1 \\ -3.5 & 0.0 & -1 \\ -1.75 & 0.0 & -1 \\ 0.0 & 0.0 & -1 \end{bmatrix} \quad (Ton - m)$$

Efectuando el producto de las matrices del primer miembro de la ecuación (IV.21) obtenemos:

$$[b_R]^T [f] [b_R] = \begin{bmatrix} 1076.19 & 821.625 & 246.938 \\ 821.625 & 1551.50 & 267.0 \\ 246.938 & 267.0 & 68.25 \end{bmatrix}$$

y el segundo miembro es:

$$-[b_R]^T [f] \{p_n\} = \begin{Bmatrix} 8201.992 \\ 19072.031 \\ 3024.687 \end{Bmatrix}$$

se resuelve los valores del vector  $\{R\}$ :

$$\begin{bmatrix} 1076.19 & 821.625 & 246.938 \\ 821.625 & 1551.50 & 267.0 \\ 246.938 & 267.0 & 68.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8201.992 \\ 19072.031 \\ 3024.687 \end{Bmatrix}$$

y obtenemos los valores del vector  $\{R\}$ :

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.7993 \\ 12.9121 \\ 11.1691 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (Ton) \\ (Ton) \\ (Ton - m) \end{matrix}$$

En seguida, con la ecuación del equilibrio IV.20 calcularemos los valores del vector  $\{p\}$ :

$$\{p\} = \{p_o\} + [b_r]\{R\} = \begin{Bmatrix} 6.554 \\ -1.845 \\ -10.244 \\ -10.244 \\ -6.872 \\ -3.50 \\ -3.50 \\ -0.883 \\ 1.733 \\ 1.733 \\ 6.953 \\ -12.827 \\ 12.827 \\ 9.228 \\ 5.628 \\ 5.628 \\ -2.77 \\ -11.169 \end{Bmatrix} (Ton - m)$$

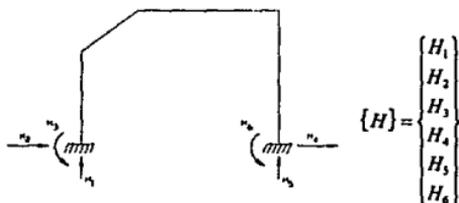
los valores del vector  $\{p\}$  son las ordenadas del diagrama de momentos flexionantes.

a) Obtención de las reacciones en los apoyos.

En el resumen del método (sección IV.2.4), establecimos que las reacciones las podemos calcular con la ecuación de superposición siguiente:

$$\{H\} = \{H_o\} + [h]\{R\} \quad \text{IV.32}$$

donde al vector  $\{H\}$  de reacciones lo definiremos como sigue:



Cálculo del vector  $\{H_o\}$ , de las reacciones en la estructura isostática producidas por las cargas externas:

$$\{H_o\} = \begin{Bmatrix} 30 & (T) \\ 0 \\ 95 & (T-m) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cálculo de la matriz  $[h]$ , cuyas columnas corresponden a las reacciones en la estructura isostática producidas por las redundantes  $R$  unitarias:

Primera columna de  $[h]$



Segunda columna de [h]



$$[h] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tercera columna de [h]



Por lo tanto, las reacciones en los apoyos del marco son:

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{Bmatrix} = \{H_0\} + [h]\{R\} = \begin{Bmatrix} 17.09 & \text{Ton} \\ 4.80 & \text{Ton} \\ -6.55 & \text{Ton-m} \\ -4.8 & \text{Ton} \\ 12.91 & \text{Ton} \\ 11.17 & \text{Ton-m} \end{Bmatrix}$$

Los valores de las reacciones  $H_4$ ,  $H_5$  y  $H_6$  coinciden con los valores de las redundantes  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  respectivamente, como era de esperarse.

b) Comprobación del método.

La comprobación la efectuaremos verificando que el vector  $\{u\}$  de los desplazamientos relativos ( $\Delta R$ ) de las redundantes sea igual a cero:

$$\{u\} = [b_r]^T [f]\{p\} = \{0\} \quad \text{-----} \quad \text{IV.12}$$

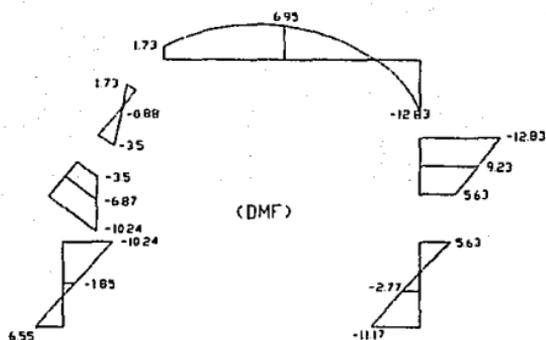
Efectuando operaciones obtenemos:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6EI} \begin{Bmatrix} -0.06 \\ 0.015 \\ 0.010 \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (E \text{ en } \text{Ton} / \text{m}^2; I \text{ en } \text{m}^4)$$

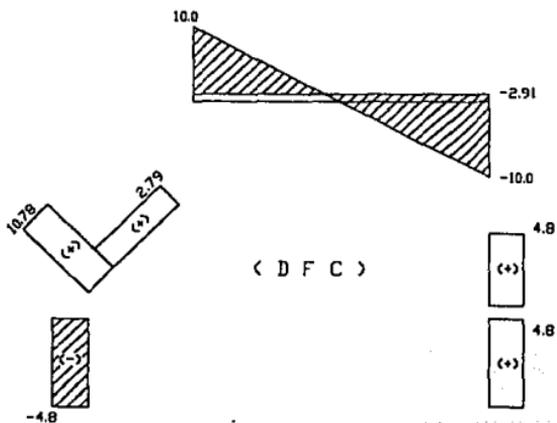
El vector  $\{u\}$  es igual a cero, por lo tanto, los cálculos son correctos.

c) Diagramas de momentos flexionantes (DMF) y fuerza cortante (DFC).

Las ordenadas del diagrama de momentos flexionantes corresponden con los valores del vector  $\{p\}$ , por lo tanto, graficando a  $\{p\}$  tenemos (en Ton-m):



El diagrama de fuerza cortante lo construimos apoyándonos en el diagrama de momentos flexionantes y en el sistema de cargas, obteniendo (en Ton).



d) Cálculo de los desplazamientos  $d_{11}$ ,  $d_{13}$  y  $d_{22}$ .

Los desplazamientos en la estructura hiperestática los calcularemos con la ecuación de la continuidad:

$$\{d\} = [bo]^T [f] \{p\} \quad \text{IV.11}$$

En la mayoría de los casos prácticos no es necesario conocer todos los valores del vector de desplazamientos  $\{d\}$  de la estructura (expuesto en la sección IV.2.2), y para evitar cálculos innecesarios, con este método se calculan solamente los desplazamientos de interés.

Los desplazamientos de interés en este caso son  $d_{x1}$ ,  $d_{x2}$  y  $d_{y2}$ , entonces, el vector  $\{d\}$  es:

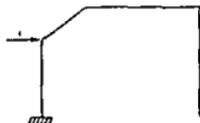
$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_{x1} \\ d_{x2} \\ d_{y2} \end{Bmatrix}$$

En la sección IV.2.3 establecimos que las columnas de la matriz  $[bo]$  corresponden a los valores del vector  $\{p\}$  producidos por fuerzas unitarias aplicadas en la estructura isostática, o sea que:

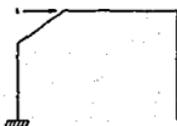
$$[bo] = [\{p_o\}_1, \{p_o\}_2, \dots] \quad \text{IV.18}$$

El número de columnas de la matriz  $[bo]$ , es igual al número de desplazamientos que deseamos conocer, teniendo:

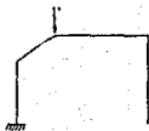
Primera columna de  $[bo]$ : ( $d_{x1}$ )



Segunda columna de  $[bo]$ : ( $d_{x2}$ )



Tercera columna de  $[b_o]$ :  $(d_{y2})$



	$d_{x1}$	$d_{x2}$	$d_{y2}$
	-3.5	-5.0	-2.0
	-1.75	-3.25	-2.0
	0	-1.5	-2.0
	0	-1.5	-2.0
	0	-1.3125	-1.75
	0	-1.125	-1.50
	0	-1.125	-1.50
	0	-0.5625	-0.75
$[b_o]$	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0

luego, los desplazamientos son:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_{x1} \\ d_{x2} \\ d_{y2} \end{Bmatrix} = [b_o]^T [f] \{p\} = \begin{Bmatrix} -35.08 \\ 45.89 \\ 107.97 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{6EI}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} -5.85 \\ 7.65 \\ 18.0 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{EI}; \quad (d \text{ en m si } E \text{ en } \text{Ton} / \text{m}^2 \text{ e } I \text{ en } \text{m}^4)$$

## CAPITULO V

### COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos presentado en forma genérica y detallada en algunos aspectos, el proceso de diseño mediante el cual se determinan las características principales de un sistema estructural denominado marco rígido, para que cumpla en forma óptima sus objetivos de transmitir las cargas verticales y laterales a su cimentación.

En esencia hemos considerado los tres aspectos fundamentales del proceso de diseño: la estructuración, el análisis y el dimensionamiento.

**Estructuración.** En esta parte del proceso elegimos al acero como el material estructural, la forma de la estructura, el arreglo de sus elementos constitutivos y sus dimensiones.

**Análisis.** Se desarrollaron las actividades necesarias para determinar el comportamiento de la estructura ante las diferentes acciones.

Durante esta etapa se repasaron dos métodos de análisis estructural alternativos para facilitar su uso: método de flexibilidades para uso manual y método de rigideces para su aplicación por computadoras.

El desarrollo detallado del método de análisis se ha presentado como una opción de consulta para aquellos compañeros que quieran contrarrestar algunos aspectos e influencias negativas que tienen el uso generalizado de las computadoras electrónicas en el proceso del diseño estructural.

**Dimensionamiento.** En esta etapa se definieron a detalle los elementos estructurales y se revisó que cumplieran con los requisitos de seguridad adoptados.

El diseño detallado de los elementos estructurales utilizando el RCDF se incluyó como un intento de ayudar a las futuras generaciones a interpretar y utilizar este código que con tan poca frecuencia se enseña y utiliza en las aulas escolares y en la actividad profesional.

## BIBLIOGRAFIA

- 1.- S. Timoshenko  
"Resistencia de Materiales", vol. I y II  
ESPASA-CALPE, S.A., Madrid, 1980 y 1982.
- 2.- Egor P. Popov  
"Introducción a la Mecánica de Sólidos"  
Editorial LIMUSA, México, 1981.
- 3.- Enzo Levi  
"Elementos de Mecánica del Medio Continuo"  
Editorial LIMUSA, México, 1980.
- 4.- O. de Buen L. de H.  
"Estructuras de Acero"  
Editorial LIMUSA, México, 1982.
- 5.- J. C. McCormac  
"Diseño de Estructuras de Acero, Método LRFD"  
Editorial ALFAOMEGA, México, 1991.
- 6.- J. E. Bowles  
"Diseño de Acero Estructural"  
Editorial LIMUSA, México, 1984.
- 7.- D. Rodríguez P.  
"Diseño práctico de Estructuras de Acero"  
Editorial LIMUSA, México, 1994.
- 8.- R. Meli P.  
"Diseño Estructural"  
Editorial LIMUSA, México, 1987.
- 9.- A. Ghali y A. Neville  
"Análisis Estructural; un enfoque unificado Clásico y por Matrices"  
Editorial DIANA, México, 1983.
- 10.- J. Sterling Kinney  
"Análisis de Estructuras Indeterminadas"  
Editorial CECSA, México, 1982.
- 11.- Departamento del Distrito Federal  
"Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal"  
México, D.F., 1993.

- 12.- Departamento del Distrito Federal  
"Normas Técnicas complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras Metálicas"  
México, D.F., 1987.
- 13.- AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION INC. (AISC)  
"Specification for Structural Steel Building-LRFD"  
Primera edición, 1988.
- 14.- AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION INC. (AISC)  
"Specification for Structural Steel Building-ASD"  
Novena edición, 1989.
- 15.- Julio E. Dany R.  
"Apuntes personales de la materia; Teoría General de las Estructuras I"  
D.E.P.F.I. de la U.N.A.M., México, 1988.