00384
6
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ESTABILIDAD DE SISTEMAS DINAMICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A:

M. en C. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. SANTIAGO LOPEZ DE MEDRANO SANCHEZ

MEXICO, D. F. 1994

Resumen de la tesis: Estabilidad de Sistemas Dinámicos

Stability of dynamical systems

Our work is based on a paper by Zeeman, in which he poses a new definition of stability for vector fields, different from structural stability. The idea is to try to associate a probability measure u_ε to every vector field v and to define the stability of v as the stability of the function u_ε. In his paper, Zeeman uses a partial differential equation of parabolic type (the Fokker-Planck) and the steady-state of that equation as the measure associated to the field, showing that this association can be done in the case of compact manifold without boundary.

In our thesis, we show that under certain growth conditions when $x \to \infty$, we also can associate to every field v in $\mathbb{R}^n$ such measure u_ε and that measure is asymptotically stable. We use the fundamental solution, maximum principle and least-bound function techniques.

Oscar Alfredo Palmas Velasco

Resumen de la Tesis
Estabilidad de Sistemas Dinámicos

Oscar Alfredo Palmas Velasco

September 15, 1994

La tesis se basa en un artículo de Zeeman, donde él plantea una nueva definición de estabilidad para campos vectoriales alternativa a la estabilidad estructural. La idea es tratar de asociar una medida de probabilidad u_ϵ a cada campo v y definir la estabilidad del campo como la estabilidad de la función u_ϵ. En su artículo, Zeeman utiliza una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico (la ecuación de Fokker-Planck) y la solución estacionaria de dicha ecuación como la medida asociada al campo, demostrando que esta asociación se puede hacer para el caso de variedades compactas sin frontera.

En nuestra tesis, demostramos que bajo ciertas condiciones de crecimiento cuando $x \to \infty$, también podemos asociar a cada campo v en R^n dicha medida u_ϵ dada como la solución estacionaria de Fokker-Planck y que dicha medida es asintóticamente estable, en el sentido de que si consideramos una condición inicial integrable de nuestra ecuación dada en la forma $u(t,x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} u(t,x) = u_\epsilon(x)$. Las técnicas que utilizamos incluyen la solución fundamental, el principio del máximo y la técnica de la función "cota inferior", ésta última desarrollada por Lasota y Mackey.

A ti.

A Santiago

A Sebastián

A Santiago

En muy pocas ocasiones de la vida puede uno escribir dedicatorias y agradecimientos en una tesis doctoral; por ello, quisiera abarcar y agradecer, aunque sea de manera genérica, a todos los que, de alguna manera u otra, fueron contribuyendo a la transformación de mis ideas y condiciones concretas, hasta llegar a mi situación y punto de vista actuales acerca de la concepción del trabajo académico en general y de esta tesis en particular.

INDICE

1 Introducción

La idea de estabilidad en matemáticas tiene utilidad teórica y práctica. Desde el punto de vista de la práctica, los fenómenos que observamos en el mundo real son generalmente *estables*, es decir, fenómenos que varían poco si variamos también poco los diversos parámetros que los definen. En matemáticas, los objetos estables forman por lo general categorías "grandes" dentro de nuestro universo en cuestión y que merecen atención especial. En nuestro caso particular, analizaremos los campos vectoriales v definidos sobre una variedad X. Nos interesa entonces desarrollar un concepto de estabilidad de campos vectoriales. Por supuesto, existe ya el concepto de estabilidad estructural, que definimos a continuación.

Definición.

i) Un *flujo* en X es una aplicación diferenciable $\varphi : R \times X \longrightarrow X$ tal que $t \longrightarrow \varphi_t$ es una acción de grupo de R sobre X; es decir, $\varphi_0 = id_X$ y $\varphi_{s+t} = \varphi_s \varphi_t$.

ii) Dado un flujo φ, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ es el *campo vectorial asociado a* φ. La topología C^∞ en el espacio de los campos vectoriales en X induce una topología en el conjunto de flujos.

iii) Dos flujos φ_1, φ_2 son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo $h : X \longrightarrow X$ que lleva las órbitas de φ_1 en las órbitas de φ_2.

iv) Un flujo φ es *estructuralmente estable* si y sólo si φ tiene una vecindad de flujos topológicamente equivalentes en el espacio de los flujos.

v) un campo vectorial v es *estructuralmente estable* si y sólo si φ es *estructuralmente estable*.

Esta definición de estabilidad tiene ciertos problemas, uno de los cuales reside en el hecho de que pedimos que h sea un homeomorfismo y no un difeomorfismo; es decir, la propia definición nos saca del ámbito de las funciones diferenciables para poder obtener algunos resultados; sin embargo, una vez en dimensión 3, surgen problemas como el hecho de que los campos estructuralmente estables ya no sean densos.

Zeeman [12] propone una nueva definición de estabilidad de campos vectoriales, con la que pretende permanecer dentro del ámbito diferenciable. Para esto, necesitamos unas cuantas definiciones:

Definición. Sean X, Y variedades diferenciables. Decimos que dos transformaciones $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ son *equivalentes* si y sólo si existen difeomorfismos $\varphi : X \longrightarrow X, \psi : Y \longrightarrow Y$ tales que $f_1 \circ \varphi = \psi \circ f_2$. Una función

$f : X \longrightarrow Y$ es *estable* si tiene una vecindad U en la topología C^∞ tal que todas las funciones en U son equivalentes a f.

La idea es fijarse en el comportamiento asintótico del flujo de un campo vectorial v, el cual está descrito por los atractores de v, o bien, por una medida sobre los atractores. Dada $\epsilon > 0$, Zeeman construye una medida "ϵ-suavizada", con máximos y mínimos cerca de los puntos de concentración del flujo.

Para hacer esta construcción, considera la llamada *ecuación de Fokker-Planck para v* con difusión ϵ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \Delta u - \nabla \cdot (uv)$$

donde queremos que $u : R^+ \times X \longrightarrow R^+$. Podemos interpretar la solución de esta ecuación como la densidad de una población en X, y ver que su variación con respecto del tiempo está sujeta a dos procesos: uno de difusión (como en el caso de la ecuación usual del calor, cuando $v = 0$) y otro de concentración hacia adonde apunta el campo v. Si u satisface una condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$; entonces $u_t(x) = u(t,x)$ se puede interpretar como la posición de u_0 después del tiempo t, sujeta a ambos procesos.

Definición. u_ϵ es la solución de la ecuación de Fokker-Planck que satisface las siguientes condiciones:

i) $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = 0$; es decir, u_ϵ es una solución *estacionaria*.

ii) $\int_X u_\epsilon = 1$.

Podemos pensar en u_ϵ como aquella solución en la que los procesos de difusión y concentración se equilibran.

Ejemplo. Si $v(x) = -x$, entonces

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp(-\frac{|x^2|}{\epsilon})$$

que corresponde a una distribución normal con media 0 y varianza ϵ.

En el artículo ya citado, Zeeman demuestra los siguientes resultados para el caso en que X es compacta sin frontera:

i) Para cada $\epsilon > 0$, u_ϵ existe y es única. Este es esencialmente un teorema de punto fijo.

ii) u_ϵ es asintóticamente estable, en el siguiente sentido: dada cualquier solución de la ecuación de Fokker-Planck $u(t,x)$ (de integral finita e igual a

1), se cumple que

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = u_\epsilon(x)$$

Una vez construida u_ϵ:

Definición.

i) Dos campos vectoriales v_1 y v_2 son *ϵ-equivalentes* si y sólo si las soluciones estacionarias (integrables) u_1^ϵ y u_2^ϵ son equivalentes (en el sentido diferenciable).

ii) v es *ϵ-estable* si y sólo si existe una vecindad U de v tal que todo campo en U es equivalente a v.

iii) v es *estable* si y sólo si para toda $\epsilon_1 > 0$ existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $\epsilon_2 < \epsilon_1$ y v es ϵ_2-estable.

Zeeman muestra también que esta definición mejora a la de estabilidad estructural, ya que los campos ϵ-estables forman un conjunto abierto y denso, por lo que los campos estables forman un residual.

Nuestro trabajo pretende extender dar respuesta a las siguientes preguntas, en el caso de un campo vectorial sobre una variedad no compacta (de hecho, un campo vectorial v en R^n):

I. ¿Bajo qué condiciones sobre v existe u_ϵ integrable?

II. ¿Bajo qué condiciones sobre v se cumple la estabilidad asintótica?

Observemos que, en el caso de los campos gradientes, la cuestión de la existencia de la solución estacionaria tiene una respuesta afirmativa. Más precisamente, sea v un campo gradiente; es decir, existe $f : R^n \to R$ diferenciable tal que $v = -\nabla f$; entonces $u_\epsilon = \exp(-\frac{f}{\epsilon})$ es una solución estacionaria. Podemos ver que aquí comienzan a surgir problemas, porque:

i) no sabemos si ésta es la única solución estacionaria;

ii) no sabemos si es integrable.

Para la cuestión (ii), tenemos el siguiente criterio (ver también [12]):

Proposición. Si $v = -\nabla f$ y para toda $C, \alpha > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$f(x) \geq C \ln |x|^\alpha$$

para $|x| > R$. Entonces $u_\epsilon = \exp(-\frac{f}{\epsilon})$ es integrable.

Demostración. Dadas $\epsilon, \alpha > 0$, sea $C = \frac{2n\epsilon}{\alpha}$, entonces

$$u_\epsilon = \exp(-\frac{f}{\epsilon}) \leq \exp(-\frac{C \ln |x|^\alpha}{\epsilon}) = |x|^{-\frac{\alpha C}{\epsilon}}$$

que es integrable en R^n, pues $\frac{C\alpha}{\epsilon} > n$.

Esto nos indica que la situación será diferente a la del caso compacto, pues no necesariamente todos los campos vectoriales tendrán una solución estacionaria integrable, sino que deberemos pedir ciertas condiciones. En la proposición anterior, f debe crecer cuando $|x| \to \infty$, lo cual se puede interpretar como el hecho de que v apunte "hacia adentro" y que tenga cierta velocidad. Recuperaremos esta idea intuitiva de los campos adecuados posteriormente.

Por el momento, pasaremos al marco de referencia general que nos permitirá resolver las preguntas planteadas. Para responder a la primera pregunta (existencia de una solución estacionaria integrable), Zeeman utiliza un método de Perron-Frobenius. Nosotros podríamos utilizar también este método, pero preferimos utilizar la técnica de la solución fundamental para la existencia de la solución y el principio del máximo para la unicidad, ya que de esta manera recuperaremos las condiciones intuitivas que pedimos para v. Para la estabilidad asintótica, Zeeman usa nuevamente el hecho de que un cierto punto fijo (que resulta ser la solución estacionaria) es un atractor global de las diferentes soluciones. Nosotros usaremos un método equivalente al de las funciones de Liapunov, el método de la función cota inferior de Dlotko y Lasota [?], que por ser menos conocido, desarrollaremos con detalle.

El marco en que trabajaremos es el de las ecuaciones diferenciales parciales, o los operadores diferenciales, de tipo parabólico, que definimos a continuación:

Definición. Sea L un operador diferencial definido mediante la siguiente fórmula

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(t,x)u - \frac{\partial u}{\partial t}$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_j y c son funciones diferenciables de $(t,x) \in \Omega = [t_0, t_1] \times R^n$. Decimos que L (o la ecuación diferencial parcial correspondiente $Lu \equiv 0$) es *uniformemente parabólico (a)* si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \delta\,|\xi|^2$$

para todo $(t,x) \in \Omega, \xi \in R^n$.

Abreviaremos los términos "operador diferencial uniformemente parabólico" o "ecuación diferencial parcial uniformemente parabólica" diciendo simplemente "operador parabólico" y "ecuación parabólica", ya que en este trabajo sólo hablaremos de este tipo de operadores y ecuaciones.

Ejemplos. La ecuación del calor y la ecuación de Fokker-Planck son ejemplos de ecuaciones parabólicas.

Definición. El *problema de Cauchy* correspondiente a la ecuación (2), con condición inicial u_0, consiste en determinar una función $u = u(t,x)$ tal que $Lu \equiv 0$ y

$$\lim_{t \to t_0^+, y \to x} u(t,y) = u_0(x)$$

El problema de la solución al problema de Cauchy se puede separar en dos aspectos principales: la *existencia* y la *unicidad* de la solución. El problema de la existencia de la solución al problema de Cauchy se ha enfrentado de varias maneras; nosotros utilizaremos el concepto de solución fundamental, desarrollado por Gevrey [6], Rothe [11] y otros. Para construir dicha solución existen métodos como la transformada inversa de Fourier, que se desarrolla en el libro de Eidelman [4], ayudándose del método iterativo de Levi [8].Esto fue desarrollado para el caso en que los coeficientes del operador L son acotados; aparece un buen recuento de esto en los libros de Eidelman y Friedman [5]. El caso de los coeficientes no acotados es analizado por Zhitomirskiy [14] bajo las condiciones

$$\begin{aligned} |a_{ij}| &\leq K \\ |b_j| &\leq K(1+|x|) \\ |c| &\leq K(1+|x|)^2 \end{aligned}$$

Eidelman utiliza estas condiciones para resolver el problema de Cauchy para los sistemas que llama *disipativos*. Posteriormente surgen una serie de resultados de matemáticos principalmente polacos (Aronson y Besala [1], Besala [2], Bodanko [3] y otros; véase la bibliografía) que mejoran las condiciones de Zhitomirskiy para el caso de coeficientes con las siguientes condiciones de crecimiento:

$$\begin{aligned} |a_{ij}| &\leq K(1+|x|^2)^{1-a} \\ |b_j| &\leq K(1+|x|^2)^{1/2} \\ |c| &\leq K(1+|x|^2)^{a} \end{aligned}$$

para $a \in [0, \infty)$. El artículo de Besala [2] es central para nuestros resultados, ya que la condición impuesta en ese caso nos dió la clave para todo lo demás.

Para demostrar la unicidad de la solución al problema de Cauchy, utilizamos el concepto de principio del máximo, nuestra principal referencia es Protter y Weinberger [10], aunque este método fue desarrollado por Levi, Nirenberg, Friedman y otros, para el caso de coeficientes acotados. El caso de los coeficientes crecientes ha sido estudiado por los matemáticos polacos ya mencionados. En nuestro caso, modificamos los resultados para asegurar que obtendríamos soluciones integrables y/o un mayor crecimiento de los coeficientes.

En la sección 4 mencionaremos con cierto detalle algunos de los teoremas relativos a la unicidad de la solución al problema de Cauchy para diferentes clases de funciones. Por el momento, en las secciones 2 y 3 nos dedicaremos a resolver el problema de Cauchy para las ecuaciones parabólicas con coeficientes crecientes; en la sección 5 analizaremos el problema de la estabilidad asintótica y en la sección 6 haremos un resumen de resultados y perspectivas de investigación.

2 Principio del máximo

En esta sección utilizaremos un resultado usual conocido generalmente como el principio del máximo; el esquema que seguiremos es el de Protter y Weinberger [10].

El marco es nuevamente el de las ecuaciones parabólicas. Consideremos el operador (o ecuación) parabólico

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

donde u, a_{ij}, b_j, c son funciones de $(t, x) \in \Omega$.

La idea del principio del máximo se puede establecer fácilmente para el siguiente caso particular: si $Lu > 0$ y $c \leq 0$, entonces la función u no puede alcanzar un máximo positivo en un punto interior de su dominio, ya que si suponemos que u alcanza tal máximo positivo en $(t_0, x_0) \in \Omega^0$, por resultados de cálculo sabemos que $\frac{\partial u}{\partial x_j}(t_0, x_0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_0) = 0$, mientras que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t_0, x_0) \leq 0$, lo que contradice nuestras hipótesis. Este principio del máximo también vale para $Lu \geq 0$, para el caso de coeficientes (a_{ij}, b_j, c) acotados. Podemos utilizar este resultado para mostrar la unicidad de las soluciones de nuestra ecuación, dentro de la clase de funciones acotadas. Todo esto lo desarrollamos a continuación.

Recordemos que, para el caso de la ecuación de Fokker-Planck, nos interesa estudiar el comportamiento de las soluciones para la mayor clase de campos vectoriales posibles. En ese sentido, no sólo queremos saber lo que ocurre para el caso de coeficientes acotados, sino también para el caso de coeficientes crecientes. Un primer resultado acerca de la posibilidad de extensión del principio del máximo al caso de coeficientes crecientes aparece en Friedman [5], para cuando los coeficientes satisfacen la condición

$$\begin{gathered}|a_{ij}| \leq K \\ |b_j| \leq K(1 + |x|) \\ |c| \leq K(1 + |x|)^2\end{gathered}$$

En este caso, obtenemos el siguiente resultado (ver [10]):

Teorema. Sea u una función en $\overline{\Omega} = [0, T] \times R^n$ tal que $Lu \geq 0$, $c \leq 0$ con la condición de que

$$\lim_{R\to\infty} \inf \exp(-cR^2) \left[\max_{|x|=R, 0\leq t\leq T} u(t,x)\right] \leq 0$$

para alguna constante c. Si $u(0, x) \leq 0$, entonces $u(t, x) \leq 0$ para toda $(t, x) \in \overline{\Omega}$.

La idea de la demostración es hacer el cambio de variable

$$u = hw$$

con

$$h(t,x) = \exp\left[-\frac{c\gamma\,|x|^2}{(\gamma - ct)} - \beta t\right]$$

y observar que, con ese cambio de variable, obtenemos una ecuación de la forma

$$L_1 w \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \overline{b}_j \frac{\partial w}{\partial x_j} + \overline{c} w - \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

donde

$$\overline{c} = \frac{Lh}{h}$$

Utilizando el hecho de que los coeficientes satisfacen las condiciones anteriores de crecimiento, se puede controlar el signo de $\bar{c}$. Si $\bar{c} < 0$, usamos el principio del máximo estándar. Esta idea nos sugirió la siguiente generalización:

Teorema. Si existe una función h con las siguientes condiciones:

i) $h \in C^\infty(R^n, R)$,

ii) $h \longrightarrow 0$ cuando $|x| \longrightarrow \infty$,

iii) $Lh \leq 0$,

iv) (la condición de crecimiento)

$$\liminf_{R\to\infty} h^{-c}\left[\max_{|x|=R, 0\leq t\leq T} u(t,x)\right] \leq 0,$$

para $c > 1$. Si u satisface $Lu \geq 0$, $u(0,x) \leq 0$, entonces $u(t,x) \leq 0$ para toda $(t,x) \in \overline{\Omega}$.

Demostración. Consideremos nuevamente el cambio de función

$$u = hw$$

donde h es la función de la hipótesis. Entonces la ecuación diferencial para w es tal que $\bar{c} < 0$. Por lo tanto, por el principio del máximo para w, esta función no puede tener un máximo positivo en el interior de Ω. Supongamos entonces que existe un máximo positivo en la frontera. Por otro lado, la condición de crecimiento implica que existe una $R_0 > 0$ tal que

$$h^{-c}\left[\max_{|x|=R, 0\leq t\leq T} u(t,x)\right] < \epsilon$$

para toda $R > R_0$. Esto a su vez dice que $h^{-c}hw < \epsilon$; pero como $h \longrightarrow 0$ (condición ii), podemos suponer que para $R > R_0, h < 1$, por lo que entonces $h^{-c}h > 1$ y $w < \epsilon$ para $|x| = R, 0 \leq t \leq T$. Usamos entonces el principio del máximo para mostrar que $w < \epsilon$ para $|x| \leq R, 0 \leq t \leq T$. Si $R \longrightarrow \infty$ y $\epsilon \longrightarrow 0$, tenemos que $w \leq 0$ para todo $(t,x) \in \overline{\Omega}$, por lo que $u \leq 0$ para todo $(t,x) \in \overline{\Omega}$.

Esta extensión del principio del máximo parecería adecuada, pero el problema (o lo que queremos resolver en esta formulación) es que nos interesa abarcar un conjunto amplio de soluciones (funciones rápidamente crecientes); pero para esto, debemos abandonar el crecimiento de los coeficientes. Nuestra formulación (ver adelante) es un poco más adecuada, pues pedimos que la clase de funciones sea la de las funciones rápidamente decrecientes (y, por lo tanto, posiblemente integrables), lo cual nos permite trabajar con un conjunto más amplio de coeficientes.

Teorema. Sea u tal que $Lu \geq 0$,donde los coeficientes de L satisfacen la siguiente condición de crecimiento: Para toda $A > 0$,

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{-A\sum x_j b_j + c}{|x|^2} = -\infty$$

Supongamos además que

$$\lim_{R\to\infty} \exp(CR^2) \max_{|x|=R, 0\leq t\leq T} u \leq 0$$

para alguna C positiva. Si $u(0,x) \leq 0$, entonces $u(t,x) \leq 0$ para todo (t,x) en Ω.

Demostración. Sea

$$u = \exp\left(-\frac{C\gamma\,|x|^2}{\gamma - ct} + \beta t\right) w$$

con C como en el enunciado del teorema, γ, β por determinar, $t \in [0, \frac{\gamma}{2C}]$. Entonces para la ecuación transformada $Lw \geq 0$, tenemos que el coeficiente $\overline{c}$ de w es

$$\overline{c} = \sum a_{ij}\left(-\frac{2C\gamma\delta_{ij}}{\gamma - Ct} + \frac{4C^2\gamma^2 x_i x_j}{(\gamma - Ct)^2}\right) + \sum b_j \left(-\frac{2C\gamma x_j}{\gamma - Ct}\right) + c + \frac{C^2\gamma\,|x|^2}{(\gamma - Ct)^2} - \beta$$

Como $t \in \left[0, \frac{\gamma}{2C}\right]$, las cantidades $\frac{C\gamma}{\gamma - Ct}$ y $\frac{C^2\gamma^2}{(\gamma - Ct)^2}$ están acotadas y los términos que (en valor absoluto) pueden dominar (cuando $|x| \to \infty$) son

$$\sum b_j \left(-\frac{2C\gamma x_j}{\gamma - Ct}\right) + c$$

y

$$\frac{C^2\gamma\,|x|^2}{(\gamma - Ct)^2}$$

pero por la hipótesis relativa a los coeficientes, el primero domina al segundo cuando $|x| \to \infty$. Por lo tanto, $\exists R > 0$ tal que $\overline{c}$ (sin β) es negativa para toda $(t,x) \in [0, \frac{\gamma}{2C}] \times B_R(0)^c$. Si $\bar{c}$ (sin β) es negativa, hacemos $\beta = 0$; en caso contrario, elegimos

$$\beta = 2 \max_{[0,\frac{\gamma}{2C}]\times B_R(0)} \sum a_{ij}\left(-\frac{2C\gamma\delta_{ij}}{\gamma - Ct} + \frac{4C^2\gamma^2 x_i x_j}{(\gamma - Ct)^2}\right) + \sum b_j \left(-\frac{2C\gamma x_j}{\gamma - Ct}\right) + c + \frac{C^2\gamma\,|x|^2}{(\gamma - Ct)^2}$$

con lo que la expresión completa es negativa. Por el principio del máximo usual, w no puede alcanzar un máximo positivo en el interior de $[0, \frac{\gamma}{2C}] \times B_R(0)$. Por otro lado, por la condición de la hipótesis,

$$\exp(CR^2) \max_{|x|=R, 0\le t\le \frac{\gamma}{2C}} u < \epsilon$$

para $R > R_0$. Pero esto implica que $w < \epsilon$ en $|x| = R, 0 \le t \le \frac{\gamma}{2C}$ y por la observación anterior, $w < \epsilon$ en $|x| \le R, 0 \le t \le \frac{\gamma}{2C}$. Si hacemos $R \longrightarrow \infty$ y $\epsilon \longrightarrow 0$, $w \le 0$ en $[0, \frac{\gamma}{2C}] \times R^n$. Podemos repetir este argumento para la región $[\frac{\gamma}{2C}, \frac{\gamma}{C}] \times R^n$, etcétera, hasta demostrar que $w \le 0$ en $[0,T] \times R^n$, por lo que $u \le 0$ en $[0,T] \times R^n$.

El resultado anterior trae consigo el siguiente teorema de unicidad de la solución al problema de Cauchy.

Teorema. Sean u_1, u_2 dos soluciones de la ecuación $Lu = f$ tales que satisfacen la condición de crecimiento

$$\lim_{R\to\infty} \exp(CR^2) \max_{|x|=R, 0\le t\le T} u \le 0$$

Si $u_1(0,x) = u_2(o,x)$, entonces $u_1 \equiv u_2$ en $[0,T] \times R^n$.

Demostración. La función $w_1 = u_1 - u_2$ satisface las condiciones del teorema anterior, por lo que $w_1 \le 0$ en $[0,T] \times R^n$. En forma análoga, la función $w_2 = u_2 - u_1$ es tal que $w_2 \le 0$ en $[0,T] \times R^n$. Por lo tanto, $u_1 \equiv u_2$.

El teorema anterior define entonces una *clase de unicidad*; es decir, una clase de funciones en las que puede existir a lo más una solución del problema de Cauchy correspondiente. En la siguiente sección veremos cómo determinar la existencia de dicha solución.

3 Existencia de la solución fundamental

Ahora queremos resolver el problema de Cauchy por medio de la llamada solución fundamental, que definimos a continuación. Nuestro interés en este método se debe a que podemos obtener algunas estimaciones de la solución al problema de Cauchy, lo que nos puede servir para el problema de estabilización de las soluciones hacia la solución estacionaria. Aunque en el capítulo 4 utilizaremos otra técnica (la función *cota inferior*) para analizar el problema de la estabilización, podríamos usar las estimaciones de la misma forma que Zeeman [12].

Definición 2.1. Sean $T \in (0,\infty), \Omega = [0,T) \times R^n, \overline{\Omega} = [0,T] \times R^n$. Una *solución fundamental* de la ecuación $Lu \equiv 0$ es una función $\Gamma(t,x,\tau,\xi), \tau < t$, con $(t,x) \in \overline{\Omega}, \xi \in R^n, 0 \le \tau < t$, con las siguientes propiedades:

i) Para (τ,ξ) fija, $L\Gamma \equiv 0$.

ii) Para toda $\varphi : R^n \to R$ con soporte compacto,

$$\lim_{(t,x)\to(\tau^+,x_0)} \int \Gamma(t,x,\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi = \varphi(x_0)$$

Antes de continuar, recordemos que el interés principal en este trabajo se centra en el caso en que los coeficientes de nuestro operador (o ecuación) son diferenciables. En ese sentido, los resultados que utilizaremos serán más que suficientes. En esta sección supondremos que se cumple la siguiente hipótesis:

H1. Existe una función $h : \overline{\Omega} \to R^+$ diferenciable con la propiedad de que

$$Lh + \lambda h\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \overline{b}_j}{\partial x_j}\Big) \le 0$$

para todo $(t,x) \in (0,T] \times R^n, \lambda = 0,1$ y

$$\overline{b}_j = \frac{2}{h}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i} + b_j$$

Besala [2] demuestra entonces el siguiente:

Teorema. Bajo las condiciones anteriores, existe $\Gamma(t,x,\tau,\xi)$ solución fundamental de $Lu \equiv 0$; además, Γ satisface las siguientes condiciones:

i) $0 \le \Gamma(t,x,\tau,\xi) \le \frac{C}{(t-\tau)^{n/2}}\frac{h(t,x)}{h(\tau,\xi)}$

ii) $\int_{R^n} \Gamma(t,x,\tau,\xi)h(\tau,\xi)d\xi \le h(t,x)$ para $(t,x) \in (\tau,T] \times R^n$

iii) $\int_{R^n} \frac{\Gamma(t,x,\tau,\xi)}{h(t,x)}dx \le \frac{1}{h(\tau,\xi)}$ para $(\tau,\xi) \in [0,t) \times R^n$

La idea de la demostración es hacer el siguiente cambio de función:

$$u(t,x) = v(t,x)h(t,x)$$

con lo que obtenemos

$0 = h(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}) + \sum_{j=1}^n (2\sum_{i=1}^n a_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i} + hb_j)\frac{\partial v}{\partial x_j}$
$+(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j\frac{\partial h}{\partial x_i} + \overline{c}h - \frac{\partial h}{\partial t})v - h\frac{\partial v}{\partial t}$
$= h(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}) + \sum_{j=1}^n (2\sum_{i=1}^n a_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i} + hb_j)\frac{\partial v}{\partial x_j} + Lh \cdot v - h\frac{\partial v}{\partial t}$

Al dividir entre h,

$$\overline{L}v = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n \overline{b}_j \frac{\partial v}{\partial x_j} + \overline{c}v - \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

donde $\overline{b}_j$ es como antes y $\overline{c} = \frac{Lh}{h}(\leq 0)$. Obtendremos la solución fundamental de esta última ecuación a continuación:

Teorema. Con las mismas hipótesis anteriores, existe $\gamma(t, x, \tau, \xi)$ solución fundamental de la ecuación $\overline{L}u \equiv 0$ con las siguientes propiedades:

i) $0 \leq \gamma(t, x, \tau, \xi) \leq \frac{C}{(t-\tau)^{n/2}}$

ii) $\int_{R^n} \gamma(t, x, \tau, \xi)d\xi \leq 1$ para $(t, x) \in (\tau, T] \times R^n$

iii) $\int_{R^n} \gamma(t, x, \tau, \xi)dx \leq 1$ para $(\tau, \xi) \in [0, t) \times R^n$.

Aplicaremos el teorema 2.2 para el caso de nuestra ecuación de Fokker-Planck:

$$L_{FP}(u) = \epsilon\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} - \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j}u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Caso 1.Sea n=1. En este caso, sabemos que nuestro campo vectorial v se puede expresar como la derivada de una función $f : R \to R$; más precisamente, $v = -f'$ (el signo es sólo por convención). En este caso, sabemos que la función $h = \exp(-f/\epsilon)$ es una solución estacionaria de la ecuación $L_{FP}(h) = 0$ y además $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$. Utilizamos esta función en el teorema 2.2; tenemos entonces:

$$L_{FP}(h) + \lambda h(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \overline{b}_j}{\partial x_j}) = \lambda h(-\overline{b}')$$

donde

$$\overline{b} = \frac{2}{h}\epsilon h' + f' = 2\exp\left(\frac{f}{\epsilon}\right)\epsilon\exp\left(-\frac{f}{\epsilon}\right)\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)(f') + f' = -f'.$$

Así, si $-\overline{b}' \leq 0$, o bien, $f'' \leq 0$,existe la solución fundamental.

Caso 2. En realidad, este caso es la generalización del caso 1. Si el campo v es un campo gradiente $v = -\nabla f$, donde ahora $f : R^n \longrightarrow R$, entonces utilizamos la misma h que en el caso 1; ahora,

$$L_{FP}h + \lambda h(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \overline{b}_j}{\partial x_j}) = \lambda h(-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \overline{b}_j}{\partial x_j}),$$

donde

$$\overline{b}_j = \frac{2}{h}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_j} = 2\exp\left(\frac{f}{\epsilon}\right)\left(\frac{f}{\epsilon}\right)\epsilon\exp\left(-\frac{f}{\epsilon}\right)\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{\partial f}{\partial x_j},$$

por lo que si $(-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \overline{b}_j}{\partial x_j}) \leq 0$, o bien $\Delta f \leq 0$, entonces existe la solución fundamental.

Caso 3. De nuevo, n=1. Ahora utilizaremos otro tipo de criterio. Queremos saber para cuáles campos v podemos utilizar cierta función para sustituirla por h en el teorema; en particular, usaremos la función $h = \exp(-\frac{x^2}{\epsilon})$. En este caso,

$$L_{FP}h + \lambda h(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \overline{b}_j}{\partial x_j}) = \epsilon h'' - vh' - v'h - \lambda h(\frac{2}{h}\epsilon h' - v)'.$$

Entonces, desarrollando, tenemos que pedir que

$$-2h + \frac{4x^2}{\epsilon}h + \frac{2hxv}{\epsilon} - v'h - \lambda h(-4x - v)' \leq 0$$

lo que es equivalente a

$$-2 + \frac{4x^2}{\epsilon} + \frac{2xv}{\epsilon} - v' - \lambda(-4 - v') \leq 0$$

(pues $h > 0$). Para $\lambda = 0$, tenemos la condición

$$-2 + \frac{4x^2}{\epsilon} + \frac{2xv}{\epsilon} - v' \leq 0.$$

Supongamos por el momento que se cumple esta condición. Para $\lambda = 1$, tenemos

$$-2 + \frac{4x^2}{\epsilon} + \frac{2xv}{\epsilon} - v' - (-4 - v') = 2 + \frac{4x^2}{\epsilon} + \frac{2xv}{\epsilon}$$

por lo que basta pedir para ambas λ las siguientes condiciones:

i) $2x^2 + xv \leq 0$ (Basta pedir que esta desigualdad se cumpla en $|x| > M$ para alguna $M > 0$; esto lo explicaremos con detalle en el siguiente caso.); y

ii) $-v' \leq 0$. (De nuevo, como estamos en el caso $n = 1$, esto es equivalente a f'', donde $v = f'$.)

Caso 4. Nuevamente, en este caso generalizamos lo obtenido en el caso anterior. Hacemos

$$h = \exp(-\frac{|x|^2}{\epsilon} + \beta t),$$

donde β es una constante que determinaremos más adelante. Obtenemos la expresión

$$F(v) = -2n + \frac{4\,|x|^2}{\epsilon} + \frac{2x \cdot v}{\epsilon} - \nabla \cdot v - \beta - \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(-4x_j - v_j)$$

la cual será no positiva si se cumplen, por ejemplo, las siguientes condiciones:

i) $2\,|x|^2 + x \cdot v \leq 0$ fuera de un compacto. (Dentro del compacto, la expresión anterior está acotada superiormente, digamos, por $M > 0$; podemos hacer $\beta = -2M$ para que la expresión sea negativa o cero dentro del compacto.); y

ii) $-\nabla \cdot v \leq 0$.

También es claro de la última ecuación que si un campo v satisface la condición $F(v) \leq 0$, entonces también $F(w) \leq 0$ para un campo w tal que, fuera de un compacto,

i) $x \cdot w \leq x \cdot v$; y

ii) $\nabla \cdot w \geq \nabla \cdot v$.

4 Comentarios acerca de la unicidad

De las dos secciones anteriores, podemos establecer que si los coeficientes de nuestra ecuación parabólica satisfacen cierta condición de crecimiento, entonces existe la solución al problema de Cauchy y es única en la clase de funciones "rápidamente crecientes" o "rápidamente decrecientes", dependiendo del crecimiento de los coeficientes.

Ahora analizaremos algunas clases de funciones en las que se da la existencia y unicidad de la solución al problema de Cauchy; un problema interesante es el de los resultados que hablan de la *no unicidad* de las soluciones. Uno de los teoremas más importantes para nosotros en ese sentido es el siguiente (ver [9]; ver también[13]):

Teorema. Dada la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left[(-1)^n \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} + qu\right]$$

donde q es una función que satisface

i) $q'(x), q''(x)$ no cambian de signo para x grande;

ii)$q'(x) = O(|q(x)|^\alpha)$, para alguna $\alpha, 0 < \alpha < \frac{1}{2n}$;

iii) $\lim_{x\to\infty} q(x) = -\infty$;

iv) las integrales $\int^\infty |q|^{-1+\frac{1}{2n}}\, dx$, $\int_{-\infty} |q|^{-1+\frac{1}{2n}}$ convergen;

Entonces el operador simétrico cerrado generado por la expresión

$$(-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} + q$$

tiene el índice de defecto $(2,2)$ en $(-\infty,\infty)$, por lo que el problema de Cauchy correspondiente no tiene una única solución en el espacio $L^2(R)$.

Tratemos de aplicar este resultado a nuestra ecuación de Fokker-Planck en R:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\epsilon u'' - vu' - v'u = L_* u$$

donde el campo $v = -f'$. Hacemos el cambio de variable

$$u = \exp\left(-\frac{f}{2\epsilon}\right) w$$

con lo que obtenemos la siguiente ecuación para w:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \epsilon w'' + \left(-\frac{v'}{2} - \frac{v^2}{4\epsilon}\right) w$$

por lo que debemos analizar la expresión

$$q(x) = \frac{v'}{2} + \frac{v^2}{4\epsilon}$$

Lema. q no satisface la condición iii) del teorema anterior; es decir, $q(x)$ no tiende a $-\infty$ cuando x tiende a ∞.

Demostración. Supongamos que

$$\lim_{|x|\to\infty} q(x) = -\infty$$

entonces existe una $M > 0$ tal que si $x > M$, $q(x) < 0$; es decir,

$$\frac{v'}{2} + \frac{v^2}{4\epsilon} < 0$$

de donde

$$\frac{v'}{2} < -\frac{v^2}{4\epsilon}$$

y

$$\frac{v'}{v^2} < -\frac{2}{4\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon}$$

Si integramos en el intervalo $[M, x]$, obtenemos

$$\frac{1}{v(M)} - \frac{1}{v(x)} < \frac{M-x}{2\epsilon}$$

o

$$\frac{1}{v(x)} > \frac{x-M}{2\epsilon} - \frac{1}{v(M)}$$

Como el lado derecho tiende a ∞ cuando $x \to \infty$, $\frac{1}{v(x)} \to \infty$ y

$$v(x) \to 0^+$$

Esto implica que v' no tiende a $-\infty$; de hecho, cuando el lado derecho es positivo, tenemos que

$$v(x) < \frac{2\epsilon v(M)}{v(M)(x-M) - 2\epsilon} = \frac{a}{bx+c}$$

y q no puede tender a $-\infty$.

Lo anterior nos dice que nuestra ecuación es un fuerte candidato para la unicidad, pues entonces sólo puede satisfacer alguna de las siguientes condiciones:

i) $q \geq -C, C > 0$;

ii) q es oscilante, con alguna sucesión $x_n \to \pm\infty$ que tiende a $-\infty$.

Analizaremos solamente el primer caso. Entonces

$$-C \leq q = \frac{v'}{2} + \frac{v^2}{4\epsilon}$$

Para que esto se cumpla, es suficiente pedir que $v' \geq -C$; o bien, en términos de f (recordemos que $v = -f'$), pedimos que $f'' \leq C$. Efectivamente, esta condición nos permite resolver el problema de Cauchy para la ecuación de Fokker-Planck por medio de la llamada *solución generalizada* (ver [14]).

Teorema ([14]). Si $\Delta f < C$ para alguna constante $C > 0$, entonces, para toda g tal que $\int_0^T g^2 \exp\left(-\frac{f}{\epsilon}\right) < +\infty$, existe la solución generalizada del problema de Cauchy.

En dicho artículo también se define una clase de unicidad dada por la completación de la clase de funciones u tales que

$$\{u, u\} = \int_0^T (L_* u, u) dt < \infty$$

donde L_* es el operador definido más arriba. Nosotros no utilizamos este teorema en el hilo de nuestro trabajo, pero es importante observar que se obtiene una condición análoga ($\Delta f < C$) a la utilizada en la sección 3.

5 APLICACION DE LA TEORIA DE SEMIGRUPOS A LA ECUACION DE FOKKER-PLANCK

Teoría general.

Definiciones. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un *espacio de medida* si y sólo si X es un conjunto, $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X y $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{R}^{+}$ es una medida.

$L^1 = L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ denota al espacio de las funciones medibles con integral finita y cuya norma es

$$\|f\| = \int_X |f(x)|\, d\mu < \infty$$

Un *operador de Markov* es una transformación $P:L^1\to L^1$ que cumple las siguientes condiciones:

i) P es lineal

ii) Si $f \geq 0$ y $f \in L^1$, entonces $Pf \geq 0$.

iii) $\|Pf\| = \|f\|$ para $f \geq 0$.

Proposición. Si P es un operador de Markov, entonces

i) P es monótono: si $f, g \in L^1$ y $f \geq g$, entonces $Pf \geq Pg$.

ii) $(Pf)^+ \leq P(f)^+$ para $f \in L^1$ arbitraria.[1]

iii) $(Pf)^- \leq P(f)^-$ para $f \in L^1$ arbitraria.

iv) $\|Pf\| \leq P\left(|f|\right)$

v) P es una *contracción*: $\|Pf\| \leq \|f\|$

vi) $\left\|P^n f_1 - P^n f_2\right\| \leq \left\|P^{n-1} f_1 - P^{n-1} f_2\right\|$

1 Recordemos que f^+ denota la *parte positiva* de f; es decir,

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

f^- se define de manera análoga.

Definición.

$$D(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \; : \; f \geq 0 \text{ y } \|f\| = 1 \right\}$$

es la clase de las ***densidades.*** Si dado un operador de Markov P existe $f \in D$ tal que $P(f) = f$, decimos que f es una ***densidad estacionaria*** para P.

En lo sucesivo, sólo diremos que f es una densidad estacionaria cuando sea claro el operador P al que hacemos referencia. En la siguiente definición utilizamos la notación P^n para la n-ésima iteración del operador de Markov P: $P^n f = P(P(\cdots P(f)\cdots))$.

Definición. $\left\{ P_n \right\}$ es ***asintóticamente estable*** si y sólo si existe una única densidad estacionaria f_* tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| P^n f - f_* \right\| = 0 \qquad \text{para toda } f \in D.$$

Para determinar una condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica de P, usaremos el criterio de la función cota inferior [L-M]:

Definición. $h \in L_1$ es una ***cota inferior*** de P si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (P^n f - h)^- \right\| = 0 \qquad \text{para toda } f \in D.$$

h es ***no trivial*** si $h \geq 0$, $\|h\| > 0$.

Observación 1. El criterio de la definición de cota inferior es equivalente a lo siguiente: $\forall\varepsilon$ $\exists n_0$ tal que

$$(P^n f - h)^- < \varepsilon \text{ para toda } n > n_0$$

Esto quiere decir que, si $(P^n f - h) < 0$, entonces

$$-(P^n f - h) < \varepsilon$$

podemos concluir con la siguiente equivalencia: $h\in L_1$ es una cota inferior de P si y sólo si $\forall\varepsilon$ $\exists n_0$ tal que

$$P^n f > h - \varepsilon$$

para toda $f \in D$, $n \geq n_0$ y toda $x \in X$.

Observación 2. Si h_1, h_2 son cotas inferiores de P, entonces $h = \text{máx}\left\{h_1, h_2\right\}$ también es una cota inferior de P. Esto se sigue del hecho de que dada $\varepsilon > 0$, existen n_0^1 y n_0^2 tales que

$$P^n f > h_1 - \varepsilon \qquad \text{para toda } n \geq n_0^1$$

$$P^n f > h_2 - \varepsilon \qquad \text{para toda } n \geq n_0^2$$

Así, si $n_0 = \text{máx}\left\{n_0^1, n_0^2\right\}$ y $n \geq n_0$, entonces

$$P^n f > \text{máx}\left\{h_1 - \varepsilon, h_2 - \varepsilon\right\} = h - \varepsilon \qquad \text{para toda } n \geq n_0$$

y h es una cota inferior.

Observación 3. Sea $\left\{h_j\right\}$ una sucesión creciente de cotas inferiores de P, tales que $\left\| h_j \right\| \to \rho$ y sea $h = \lim_{j\to\infty} h_j$. Entonces h también es cota inferior.

Demostraremos primero que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\int (P^n f - h)^- \leq \int (P^n f - h_j)^- + \int \left| h_j - h \right|$$

Sean

$$A_1 = \left\{ x : (P^n f - h) < 0 \right\}$$

$$A_2 = \left\{ x : (P^n f - h) \geq 0 \right\}$$

En A_2, la integral del lado izquierdo de la desigualdad que queremos demostrar se anula. Separamos A_1 en dos partes:

$$A_{11} = \left\{ x : (P^n f - h_j) < 0 \right\}$$

$$A_{12} = \left\{ x : (P^n f - h_j) < 0 \right\}$$

En A_{11}:

$$\int_{A_{11}} (P^n f - h)^- = \int_{A_{11}} (h - P^n f)$$

$$= \int_{A_{11}} (h_j - P^n f) + \int_{A_{11}} (h - h_j)$$

$$= \int_{A_{11}} (P^n f - h_j)^- + \int_{A_{11}} \left| h - h_j \right|$$

En A_{12}:

$$\int_{A_{12}} (P^n f - h)^- = \int_{A_{12}} (h - P^n f)$$

$$\le \int_{A_{12}} (h - h_j)$$

$$\le \int_{A_{12}} \left| h - h_j \right|$$

$$= \int_{A_{12}} \left| h - h_j \right| + \int_{A_{12}} (P^n f - h_j)^-$$

Por lo tanto, se cumple la desigualdad. De ella obtenemos

$$\left\| (P^n f - h)^- \right\| \le \left\| (P^n f - h_j)^- \right\| + \left\| h_j - h \right\|$$

Por el teorema de convergencia acotada,

$$\left\| h_j - h \right\| = \int \left| h_j - h \right| \to \int h - \int h_j = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (P^n f - h)^- \right\| = 0$$

y h es cota inferior, como afirmamos.

Observación 4. La condición

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (P^n f - h)^- \right\| = 0$$

implica que $\|h\| \le 1$. Con la notación de la observación anterior, tenemos:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \left\| (P^n f - h)^- \right\| = \lim_{n\to\infty} \int_{A_1} (h - P^n f) = \int_{A_1} h - \int_{A_1} \lim_{n\to\infty} P^n f$$

de donde

$$\int_{A_1} h = \lim_{n\to\infty} \int_{A_1} P^n f \le \lim_{n\to\infty} \int_{A_1} \left| P^n f \right|$$

Además, en A_2, $P^n f \le h$, por lo que

$$\int_{A_2} h \le \lim_{n\to\infty} \int_{A_2} \left| P^n f \right|$$

Juntando las últimas dos desigualdades, tenemos

$$\int_X h \le \lim_{n\to\infty} \int_{A_1} \left| P^n f \right| + \lim_{n\to\infty} \int_{A_1} \left| P^n f \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X \left| P^n f \right| = \lim_{n\to\infty} \left\| P^n f \right\| = \|f\| = 1.$$

Relación de la cota inferior con la estabilidad.

Ahora estamos listos para demostrar el siguiente

Teorema. $\left\{P_n\right\}$ es asintóticamente estable si y sólo si existe h cota inferior no trivial de P.

Demostración. Si $\left\{P_n\right\}$ es asintóticamente estable, entonces podemos elegir h como la f_* de la definición. Supongamos entonces que existe h cota inferior no trivial de P.

Por la propiedad vi) de la proposición anterior,

$\left\|P^{n+m} f_1 - P^n f_2\right\| \leq \left\|P^n f_1 - P^n f_2\right\|$ para toda f_1, $f_2 \in D$.

LLamamos g a la diferencia $f_1 - f_2$; observemos que $\int g = 0$.

Descomponemos a g en su parte positiva y negativa, $g = g^+ - g^-$; tenemos que

$$\int g^+ = \int g^- = \frac{1}{2}\|g\| = c.$$

Supongamos que $c > 0$. Entonces

$$\left\|P^n g\right\| = c\left\|\left(P^n\left(\frac{g^+}{c}\right) - h\right) - \left(P^n\left(\frac{g^-}{c}\right) - h\right)\right\|$$

Pero $\frac{g^+}{c}$ y $\frac{g^-}{c}$ pertenecen a D; por la hipótesis sobre h, existe n_0

tal que si $n > n_0$, entonces

$$\left\| \left[P^n\left(\frac{g^+}{c}\right) - h \right]^- \right\| \le \frac{1}{4}\|h\|$$

$$\left\| \left[P^n\left(\frac{g^-}{c}\right) - h \right]^- \right\| \le \frac{1}{4}\|h\|$$

De donde

$$\left\| \left[P^n\left(\frac{g^+}{c}\right) - h \right] \right\| = \int_X \left| \left[P^n\left(\frac{g^+}{c}\right) - h \right] \right|$$

$$= \int_X \left(P^n\left(\frac{g^+}{c}\right) - h(x) + 2\left[P^n\left(\frac{g^+}{c}\right) - h \right]^- \right)$$

$$= \left\| P^n\left(\frac{g^+}{c}\right) \right\| - \| h(x) \| + 2 \left\| \left[P^n\left(\frac{g^+}{c}\right) - h \right]^- \right\|$$

$$\le \left\| \frac{g^+}{c} \right\| - \| h(x) \| + 2\,\frac{1}{4}\|h\| = 1 - \frac{1}{2}\|h\|$$

Análogamente,

$$\left\| \left(P^n\left(\frac{g^+}{c}\right) - h \right) \right\| \leq 1 - \frac{1}{2}\|h\|$$

Finalmente,

$$\left\|P^n g\right\| \leq c \left\| \left(P^n\left(\frac{g^+}{c}\right) - h \right) \right\| + c \left\| \left(P^n\left(\frac{g^-}{c}\right) - h \right) \right\|$$

$$\leq 2c\left(1 - \frac{1}{2}\|h\|\right) = \|g\| \left(1 - \frac{1}{2}\|h\|\right)$$

Es decir,

$$\left\|P^n(f_1 - f_2)\right\| \leq \left\|f_1 - f_2\right\| \left(1 - \frac{1}{2}\|h\|\right)$$

para $n > n_0$. Repitiendo el proceso, podemos encontrar n_0, n_1, ..., n_{k-1}, tales que

$$\left\|P^{n_0+n_1+\cdots n_{k-1}}(f_1 - f_2)\right\| \leq \left\|f_1 - f_2\right\| \left(1 - \frac{1}{2}\|h\|\right)^k$$

De aquí tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left\|P^n(f_1 - f_2)\right\| = 0.$$

Usamos lo anterior para construir una cota inferior maximal. Sea

$$\rho = \sup\left\{ \|h\| : h \text{ es cota inferior de } P \right\}$$

Por la observación 4 anterior, $\rho \leq 1$. Por la hipótesis de la existencia de una cota no trivial, $\rho > 0$. Construimos una sucesión de cotas inferiores h_j tales que $\|h_j\| \to \rho$. Por la observación 3 anterior, la función

$$h_* = \lim_{j\to\infty} h_j$$

es una cota inferior. Afirmamos que es una cota maximal, puesto que si h es otra cota inferior, $\max(h, h_*)$ es cota inferior y

$$\|\max(h, h_*)\| \le \rho \le \|h_*\|$$

de donde es fácil mostrar que $h \le h_*$.

Como $(Pf)^- \le Pf^-$, tenemos para $n > m$

$$\begin{aligned}\left\|\left[P^{n+m}f - P^m h_*\right]^-\right\| &= \left\|\left[P^m(P^n f - h_*)\right]^-\right\| \\ &\le \left\|P^m(P^n f - h_*)^-\right\| \\ &\le \left\|(P^n f - h_*)^-\right\|\end{aligned}$$

La última desigualdad implica que para toda m, $P^m h_*$ también es cota inferior; por lo tanto, $P^m h_* \le h_*$; como $\|P^m h_*\| = \|h_*\|$, esto implica que $P^m h_* = h_*$. Así, la densidad f_* que satisface $Pf_* = f_*$ está dada por

$$f_* = \frac{h_*}{\|h_*\|}$$

Por último, debemos mostrar que

$$\left\| P^n f - f_* \right\| = \left\| P^n f - P^n f_* \right\|$$

tiende a cero cuando $n \to \infty$. Para esto usamos la primera parte de la demostración, pues como f, $f_* \in D$,

$$\left\| P^n f - P^n f_* \right\| \to 0.$$

Con esto terminamos la demostración.

Núcleos estocásticos.

Definición. Un *núcleo estocástico* es una función medible $K:X\times X\to\mathbb{R}$ tal que

i) $K(x,y) \geq 0$

ii) $\int_X K(x,y)\, dx = 1$

Cuando contamos con un núcleo estocástico, podemos definir un operador P como sigue:

$$Pf(x) = \int_X K(x,y)\, f(y)\, dy \qquad \text{para } f \in L^1.$$

Como

$$\begin{aligned}\int_X Pf(x)\, dx &= \int_X \int_X K(x,y)\, f(y)\, dy\, dx \\ &= \int_X \left(\int_X K(x,y)\, dx \right) f(y)\, dy \\ &= \int_X f(y)\, dy\end{aligned}$$

tenemos que P es un operador de Markov como en la sección anterior.

Consideremos dos operadores de Markov P_1, P_2 definidos por los núcleos K_1, K_2. Entonces $P = P_1\, P_2$ es un operador de Markov que está definido por el siguiente núcleo:

$$K(x,y) = \int_X K(x,z)\ K(z,y)\ dz$$

que denotamos como

$$= K_1 \cdot K_2$$

$\cdot$ es asociativo, pero no conmutativo.

Teorema. Sea P un operador de Markov definido por el núcleo estocástico K y K_n el núcleo correspondiente a P_n.

Si para alguna n_o,

$$\int_X \inf_y K(x,y)\ dx > 0$$

entonces $\left\{P^n\right\}$ es asintóticamente estable.

Demostración. Sea $f \in D$. Entonces

$$P^{n+m}f(x) = \int_X K_{n+m}(x,y)\ f(y)\ dy$$

$$= \int_X \left[\int_X K_m(x,z)\ K_n(z,y)\ dz\right] f(y)\ dy$$

Para $m = n_o$,

$$\geq \int_X \left[\int_X \inf_y K_m(x,y)\ K_n(z,y)\ dz\right] f(y)\ dy$$

$$= h(x) \int_X \left[\int_X K_n(z,y)\ dz\right] f(y)\ dy$$

$$= h(x) \int_X f(y)\, dy$$

$$= h(x)$$

Por lo tanto, $\left(P^n f(x) - h \right)^- = 0$ para toda $n \geq n_0 + 1$.

Por el teorema de la sección anterior, $\left\{ P^n \right\}$ es asintóticamente estable.

Semigrupos estocásticos.

Definición. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Una familia de operadores $\left\{ P_t : L^1 \to L^1 \right\}$, $t \geq 0$, es un *semigrupo estocástico* si satisface las siguientes condiciones:

i) Para cada t, P_t es un operador de Markov.

ii) $P_{t+s} f = P_t (P_s f)$ para toda $f \in L^1$, $t, s \geq 0$.

iii) $P_0 f = f$

El semigrupo es *continuo* si para todo $t_0 \geq 0$,

$$\lim_{t \to t_0} \left\| P_t f - P_{t_0} f \right\| = 0$$

El semigrupo es *asintóticamente estable* si existe una única $f^* \in D$ tal que

i) $P_t f^* = f^*$ para $t \geq 0$

ii) $\lim_{t \to \infty} \left\| P_t f - f^* \right\| = 0$ para toda $f \in D$.

Una función $h : X \to \mathbb{R}$ es una *cota inferior de* $\left\{ P_t \right\}$ si y sólo si

$$\lim_{t \to \infty} \left\| \left(P_t f - h \right)^- \right\| = 0 \text{ para toda } f \in D.$$

h es *no trivial* si $h \geq 0$, $\|h\| > 0$.

Teorema. Si existe una cota inferior no trivial de $\{P_t\}$, entonces el semigrupo es asintóticamente estable.

Demostración. Consideremos t_o fija y llamemos P a P_{t_o}. Entonces, $P^n = P_{nt_o}$. Por hipótesis,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left(P^n f - h \right)^- \right\| = 0 \text{ para toda } f \in D.$$

Por el teorema de la sección 2, existe una única $f^* \in D$ tal que $Pf^* = f^*$ y

$$\lim_{n\to\infty} \left\| P^n f - f^* \right\| = 0 \qquad \text{para toda } f \in D.$$

Ahora mostraremos que $P_t f^* = f^*$ para toda t:

$$\left\| P_{nt_o} f^* - f^* \right\| = \left\| P^n \left(P_{t_o} f^* \right) - f^* \right\|$$

lo cual tiende a cero cuando $n \to \infty$, pues $P_{t_o} f^* \in D$.

Observemos ahora que si $t_1 > t_2$, entonces

$$\left\| P_{t_1} f - P_{t_1} g \right\| = \left\| P_{t_1 - t_2} \left(P_{t_2} f - P_{t_2} g \right) \right\|$$

$$\leq \left\| P_{t_2} f - P_{t_2} g \right\|$$

Es decir, la sucesión $\left\| P_t f - f^* \right\| = \left\| P_t f - P_t f^* \right\|$ no es creciente; como hemos encontrado una subsucesión, la correspondiente a $\left\{ nt_o \right\}$, que tiende a cero, toda la sucesión tiende a cero:

$$\lim_{t \to \infty} \left\| P_t f - f^* \right\| = 0.$$

Aplicación a las ecuaciones de tipo Fokker-Planck.

Aplicaremos lo anterior a cierto tipo particular de ecuaciones, que llamaremos en conjunto *ecuaciones de Fokker-Planck*:

Definición. Una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico es *de tipo Fokker-Planck* si y sólo si tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \left[u a_{ij} \right]}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \left[b_i u \right]}{\partial x_i}$$

donde a_{ij} y b_i son funciones de x.

Supondremos de aquí en adelante que la ecuación anterior satisface las condiciones para la existencia y unicidad de su solución fundamental Γ obtenidas en los capítulos anteriores. Sabemos además que bajo esas condiciones se cumple la siguiente desigualdad (ver la sección 9 del capítulo de existencia):

$$0 < \Gamma(t,x,\tau) \le \frac{C}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} \exp\left(- \frac{\delta |x|^2}{(t-\tau)} \right)$$

En este capítulo denotaremos $\Gamma(t,x,0)$ como $\Gamma(t,x)$.
Los resultados de los capítulos nos permiten defniir una familia de operadores $P_t : L_1 \to L_1$ como

$P_0 f = f$

$$P_t f = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, x-y) \; f(y) \; dy$$

para $f \in L_1$.

Teorema. $\left\{ P_t \right\}$ es un semigrupo estocástico.

Demostración. Recordemos que debemos demostrar lo siguiente:

i) P_t es lineal

ii) Si $f \geq 0$ $(f \in L^1)$, entonces $P_t f \geq 0$.

iii) $\left\| P_t f \right\| = \| f \|$ para $f \geq 0$.

iv) $P_{t+s} f = P_t (P_s f)$ para toda $f \in L^1$, t, $s \geq 0$.

v) $P_0 f = f$

Es claro que se cumplen las condiciones i), ii) y v). Para demostrar v), primero lo haremos en el conjunto formado por las funciones continuas positivas con soporte compacto; a este conjunto lo denotamos por L_1^*.

Sea entonces $f \in L_1^*$ y u la solución de la ecuación de tipo Fokker-Planck con condición inicial f; además, sea h una función C^2 acotada. Tenemos entonces que

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^n} h \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \left[u a_{ij} \right]}{\partial x_i \; \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \left[b_i u \right]}{\partial x_i} \right)$$

Analicemos cada miembro del lado izquierdo, integrando por partes:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \frac{\partial^2 \left[u a_{ij} \right]}{\partial x_i \; \partial x_j} = h \frac{\partial \left[u a_{ij} \right]}{\partial x_j} - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial \left[u a_{ij} \right]}{\partial x_j}$$

$$= h \frac{\partial \left[u a_{ij} \right]}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial h}{\partial x_i} u a_{ij} \right] + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \; \partial x_j} u a_{ij}$$

Debido al orden de crecimiento de u, los dos primeros términos se anulan

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \; \partial x_j} u a_{ij}$$

Análogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \frac{\partial \left[b_i u \right]}{\partial x_i} = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h}{\partial x_i} b_i u$$

con lo que tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \; \partial x_j} a_{ij} - \frac{\partial h}{\partial x_i} \right] u$$

Si hacemos $u = 1$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} u = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Como $u \geq 0$, podemos escribir lo anterior como

$$\frac{d}{dt}\|u\| = 0$$

por lo que $\left\|P_t f\right\| = \|u(t,x)\|$ es constante (para toda $t > 0$).

Para $t = 0$,

$$\lim_{t\to 0}\left\|P_t f\right\| = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} u = \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{t\to 0} u = \int_{\mathbb{R}^n} f = \|f\| = \left\|P_0 f\right\|$$

Esto demuestra v) para una función en $L_1^{\bullet}$. Ahora bien, si tenemos una función positiva en L_1 arbitraria, sea $\left\{f_k\right\}$ una sucesión de funciones en $L_1^{\bullet}$ que converge a f: $\lim_{k\to\infty}\left\|f_k - f\right\| = 0$. Entonces:

$$\left|\left\|P_t f\right\| - \|f\|\right| \leq \left|\left\|P_t f\right\| - \left\|P_t f_k\right\|\right| + \left|\left\|P_t f_k\right\| - \left\|f_k\right\|\right| + \left\|f_k - f\right\|$$

El segundo término del lado izquierdo es cero, por lo que demostramos en el caso anterior. El tercer término tiende a cero cuando $k \to \infty$. Para el primer término:

$$\left|\left\|P_t f\right\| - \left\|P_t f_k\right\|\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,x-y)\left(f(y) - f_k(y)\right)dy\,dx\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, x-y) \left| f(y) - f_k(y) \right| dy\, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} M_t \left| f(y) - f_k(y) \right| dy$$

$$\leq M_t \left\| f_k - f \right\|$$

Puesto que los miembros del lado derecho de ( ) tienden a cero cuando $k \to \infty$ y el lado izquierdo no depende de k, este lado es igual a cero; es decir,

$$\left\| P_t f \right\| = \| f \|$$

y $\left\{ P_t \right\}$ es una familia continua de operadores.

La propiedad iv) ($P_{t+s} f = P_t (P_s f)$) se obtiene de la unicidad de las soluciones de la ecuación de tipo Fokker-Planck. Primero consideramos una función $f \in L_1^*$ y u la solución de la ecuación correspondiente. Sea $s > 0$; definimos $\bar{u}(t,x) = u(t+s,x)$. Es claro que la función $\bar{u}$ satisface la ecuación diferencial y que

$$\lim_{t\to 0} \bar{u}(t,x) = u(s,x)$$

Por lo tanto,

$$\bar{u}(t,x) = P_t\, u(s,x)$$

de donde

$$\begin{aligned} P_{t+s} f(x) &= P_{t+s}\, u(0,x) \\ &= u(t+s,x) \\ &= \bar{u}(t,x) \qquad \text{(Por unicidad)} \\ &= P_t\, u(s,x) \\ &= P_t \left[P_s\, u(0,x) \right] \\ &= P_t \left[P_s\, f(x) \right] \end{aligned}$$

Para una f arbitraria en L_1, primero separamos esta función en su parte positiva y su parte negativa; para cada una de estas partes volvemos a utilizar una sucesión f_k de funciones en L_1^* que converja, digamos, a f^+. Entonces:

$$P_{t+s} f_k = P_t\, P_s f_k$$

y tomando el límite cuando $k\to\infty$, obtenemos

$$P_{t+s} f^{+} = P_t \, P_s f^{+}$$

hacemos algo análogo para la parte negativa f^{-} y después usamos el hecho de que los operadores son lineales.

Estabilidad asintótica mediante funciones de Liapunov. Utilizaremos ahora las funciones de Liapunov para demostrar la estabilidad asintótica de este semigrupo.

Definición. Una *función de Liapunov* en $\mathbb{R}^n$ es una función $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

i) $V(x) \geq 0$

ii) $\lim_{|x| \to \infty} V(x) = \infty$

iii) $V \in C^2$

iv) $|V(x)|, \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| \leq \rho\, e^{\delta|x|}$

El siguiente resultado es crucial.

Teorema. Consideremos una ecuación diferencial que satisface las condiciones de los capítulos anteriores para la existencia y unicidad de su solución fundamental. Si existe una función de Liapunov que satisfaga la desigualdad

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \, \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \leq -\alpha V + \beta$$

donde α y β son constantes positivas, entonces el semigrupo $\{P_t\}$ es asintóticamente estable.

Demostración. Para mostrar que $\left\{ P_t \right\}$ es asintóticamente estable, usaremos el criterio ya establecido de la función cota inferior para un subconjunto de L_1^{*} (L_1^{*} ya fue definido en la sección anterior); es decir, mostraremos que existe una función h tal que para todo $f \in D \cap L_1^{*}$,

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \left(P_t f - h \right)^- \right\| = 0$$

Sea entonces $f \in D \cap L_1^{*}$ y u la solución de la ecuación diferencial con condición inicial f. Analizaremos la función

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} V(x)\ u(t,x)\ dx$$

Derivando,

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} V(x)\ \frac{\partial u}{\partial t}\ dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} V(x) \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \left(u a_{ij} \right)}{\partial x_i\ \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \left(b_i u \right)}{\partial x_i} \right) dx$$

Analizamos cada término del lado derecho como en la sección anterior:

$$\int_{\mathbb{R}^n} V \frac{\partial^2 \left[u a_{ij}\right]}{\partial x_i \ \partial x_j} = V \frac{\partial \left[u a_{ij}\right]}{\partial x_j} - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial \left[u a_{ij}\right]}{\partial x_j}$$

$$= V \frac{\partial \left[u a_{ij}\right]}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial V}{\partial x_i} u a_{ij} \right] + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \ \partial x_j} u a_{ij}$$

Com antes, los dos primeros términos se anulan

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \ \partial x_j} u a_{ij}$$

Análogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} V \frac{\partial \left[b_i u \right]}{\partial x_i} = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial V}{\partial x_i} b_i u$$

con lo que tenemos

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \ \partial x_j} a_{ij} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \right] u$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} (-\alpha V + \beta) \ u$$

$$= -\alpha \ F(t) + \beta \int_{\mathbb{R}^n} u \ dx$$

$$= -\alpha F(t) + \beta$$

El último paso vale pues $f \in D$ y $\int f = 1$. Por lo tanto,

$$F'(t) \le -\alpha F(t) + \beta$$

De aquí podemos obtener una desigualdad para $F(t)$ como sigue: multiplicamos por $e^{\alpha t}$:

$$F'(t)\ e^{\alpha t} \le -\alpha F(t)\ e^{\alpha t} + \beta\ e^{\alpha t}$$

por lo que

$$\frac{d}{dt}\left[F(t)\ e^{\alpha t} \right] \le \beta\ e^{\alpha t}$$

integramos lo anterior en $[0,t]$ para obtener

$$F(t)\ e^{\alpha t} - F(0) \le \frac{\beta}{\alpha}\left[e^{\alpha t} - 1 \right]$$

$$F(t) \le F(0)\ e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}\left[e^{\alpha t} - 1 \right]$$

Como $F(0) = \int_{\mathbb{R}^n} V(x)\ u(0,x) = \int_{\mathbb{R}^n} V(x)\ f(x)$, $F(0)$ está acotado; por lo tanto, el lado derecho de la ecuación anterior tiende a $\frac{\beta}{\alpha}$ cuando $t \to \infty$. Así, podemos encontrar t_o tal que

$$F(t) \le \frac{\beta}{\alpha} + 1$$

para toda $t \ge t_o$.

Consideremos ahora el conjunto

$A_q = \left\{ V(x) < q \right\}$

Usaremos la *desigualdad de Chebyshev*[1]

$$\int_{A_q} g(x) \geq 1 - \frac{1}{q}\left(\int_{A_q} V(x)\ g(x) \right)$$

que se cumple para $g \in D$ y $V \geq 0$. Si hacemos $g(x) = u(t,x)$, entonces la desigualdad queda

$$\int_{A_q} u(t,x) \geq 1 - \frac{1}{q} F(t)$$

Ahora, si $t \geq t_0$,

$$\int_{A_q} u(t,x) \geq 1 - \frac{1}{q}\left(\frac{\beta}{\alpha} + 1\right)$$

La idea es utilizar q de forma que el lado derecho de esta última desigualdad sea positiva y a partir de ella encontrar la cota inferior para u. Como $\lim_{|x| \to \infty} V(x) = \infty$, existe $r>0$ tal que si $|x| > r$, $V(x) \geq q$; en otras palabras, el conjunto A_q está contenido en $B_r = \left\{ |x| \leq r \right\}$. A continuación determinamos la cota inferior para u:

[1] La demostración de esta desigualdad es sencilla:

$$\int V(x)\ g(x) \geq \int_{\mathbb{R}^n - A_q} V(x)\ g(x) \geq q \int_{\mathbb{R}^n - A_q} g(x) \geq q\left[1 - \int_{A_q} g(x)\right].$$

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(1,x-y)\; u(t-1,y)\; dy$$

(Observemos que podemos dar a u porque el lado derecho satisface la ecuación de tipo Fokker-Planck y la misma condición inicial que $u(t,x)$.)

$$\geq \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(1,x-y)\; u(t-1,y)\; dy$$

$$\geq \int_{B_r} \Gamma(1,x-y)\; u(t-1,y)\; dy$$

$$\geq \inf_{y\in B_r} \Gamma(1,x-y) \int_{B_r} u(t-1,y)\; dy$$

$$\geq \inf_{y\in B_r} \Gamma(1,x-y) \int_{A_q} u(t-1,y)\; dy$$

y si $t \geq t_o + 1$,

$$\geq \inf_{y\in B_r} \Gamma(1,x-y) \left[1 - \frac{1}{q}\left(\frac{\beta}{\alpha} + 1\right)\right]$$

$$= C \inf_{y\in B_r} \Gamma(1,x-y) = h(x) \qquad \text{(observemos que } h > 0\text{)}$$

Por lo tanto,

$$P_t f = u(t,x) \geq h(x)$$

para toda $t \geq t_o + 1$, de donde

$$\left[P_t f - h \right]^- = 0$$

para toda $t \geq t_0 + 1$ y h resulta ser una cota inferior no trivial. Esto demuestra el teorema.

Aplicación a nuestra ecuación de Fokker-Planck particular.

Consideremos ahora un campo vectorial $\boldsymbol{v}$ en $\mathbb{R}^n$ su ecuación asociada:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\left(v_i u \right)}{\partial x_i}$$

Supondremos de nuevo que se satisfacen las condiciones para la existencia, unicidad y positividad de la solución fundamental. Mostraremos que si las trayectorias de $\boldsymbol{v}$ tienden "hacia adentro" con cierta rapidez, entonces hay estabilidad asintótica. Más precisamente,

Teorema. Sea $\boldsymbol{v}$ un campo vectorial que, además de las condiciones ya mencionadas, cumpla lo siguiente: existen c, $R > 0$ tales que

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \leq -c$$

para $|\boldsymbol{x}| > R$. Entonces el semigrupo $\left\{ P_t \right\}$ generado por Γ es asintóticamente estable.

Demostración. Mostraremos que $V(\boldsymbol{x}) = e^{b|x|}$ es una función de Liapunov para $\left\{ P_t \right\}$, donde b es una constante por determinar. Es fácil ver que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = b\, e^{b|x|} \left[\varepsilon \left(\frac{n-1}{|x|} + b \right) + v(x) \cdot \frac{x}{|x|} \right]$$

Tomamos ahora $R' > R$ tal que $\frac{n-1}{R'} < \frac{c}{\varepsilon}$. Si $|x| > R'$, entonces lo anterior está acotado como sigue:

$$\leq b\, e^{b|x|} \left[\varepsilon \left(\frac{n-1}{R'} + b \right) - c \right]$$

Afirmamos que podemos encontrar $b > 0$ tal que la expresión entre paréntesis es negativa:

$$\varepsilon \left(\frac{n-1}{R'} + b \right) - c < 0 \quad \Leftrightarrow \quad b < \frac{c}{\varepsilon} - \frac{n-1}{R'}$$

Por nuestra hipótesis sobre R', el lado derecho es positivo y podemos encontrar b. Llamamos entonces $-\alpha$ a la expresión

$$\left[\varepsilon \left(\frac{n-1}{R'} + b \right) - c \right] = -\alpha$$

con lo que hemos mostrado que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \leq -\alpha V$$

para $|x| > R'$. Si $|x| \leq R'$, la función

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \alpha V$$

es continua, por lo que podemos acotarla por arriba con un valor positivo β. Con los valores α y β que hemos encontrado, el teorema queda demostrado.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Aronson, Besala, *Parabolic equations with unbounded coefficients*, Journal of Differential Equations, **3**(1967), 1-14.

[2] Besala, *On the existence of a fundamental solution for a parabolic differential equation with unbounded coefficientes*, Annales Polonici Mathematici, **XXIX** (1975), 403-409.

[3] Bodanko, *Sur le problème de Cauchy et les problèmes de Fourier pour les équations paraboliques dans un domaine non borné,* Ann. Polonici Mathematici **18** (1966), 79-94.

[4] Eidelman, *Parabolic systems,* North/Holland.

[5] Friedman, *Differential Equations of Parabolic Type,* Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, 1964.

[6] Gevrey, *Sur le équations aux dérivées partielles du type prabolique*, J. de Math., (6) **10** (1913), 105-148.

[7] Lasota, Mackey, *Probabilistic properties of deterministic systems,* Cambridge University Press, 1985.

[8] Levi, *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali,* Rend. del Circ. Mat. Palermo, **24** (1907), 275-317.

[9] Linear Differential Operators, North-Holland.

[10] Protter, Weinberger, *Maximum Principle in Differential Equations,*

[11] Rothe, *Über die Grundlösung bei parabolischen Gelichungen* Math. Zeit., **33** (1931), 488-504.

[12] Zeeman, *Stability of dynamical systems,* Nonlinearity **1**(1988).

[13] Zhitomirskiy, *El problema de Cauchy para sistemas o ecuaciones parabólicas lineales en derivadas parciales con coeficientes crecientes* (en ruso), Izvestiya Vusov, Mat **1**(8), 1959, 55-74.

[14] Zhitomirskiy, *El problema de Cauchy para ecuaciones parabólicas de segundo orden con coeficientes crecientes* (en ruso), Doklady Acad. Nauka, URSS, 116(6), 1957, 913-916.