



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

2
Ejes
REGISTRADO

EL METODO PSEUDO - ESPECTRAL EN LA
SIMULACION NUMERICA DE LA PROPAGACION
DE ONDAS SISMICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO GEOFISICO

P R E S E N T A:

RAFAEL AVILA CARRERA



MEXICO, D. F.

1984

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-I-0011

SR. RAFAEL AVILA CARRERA
Presente.

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Dr. Francisco Sánchez-Sesma, y que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de ingeniero geofísico:

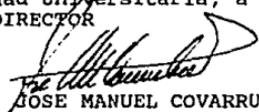
**EL MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL EN LA SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA
PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS**

- I INTRODUCCIÓN
- II ONDAS SÍSMICAS
- III MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL
- IV RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES
- V CONCLUSIONES
RECONOCIMIENTOS
REFERENCIAS

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Ciudad Universitaria, a 17 de enero de 1994.
EL DIRECTOR


ING. JOSÉ MANUEL COVARRUBIAS SOLÍS

JMCS*EGLM*gggt*

JMS

A mis padres:

***María Luisa Carrera
Rafael Avila***

por su apoyo incondicional

A mis hermanos:

***Toño
Lupita
Nahiely
Marlene***

por su cariño y estímulo

A Alexandra con AMOR

***Y he aquí, el velo del templo se rompió en dos,
de alto a bajo; la tierra tembló y las piedras
se hendieron;***

MAT: 27-51

INDICE

RESUMEN.....	i
ABSTRACT.....	iii
I. INTRODUCCIÓN.....	1
II. ONDAS SÍSMICAS.....	4
II.1. Teoría de la elasticidad.....	5
-Esfuerzos.....	5
-Deformaciones.....	7
-Ley de Hooke.....	9
-Ec. de Navier.....	11
II.2. Ecuación de onda.....	14
II.3. Tipos de ondas sísmicas.....	16
-Ondas P.....	16
-Ondas S.....	17
-Ondas Superficiales.....	18
III. MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL.....	20
III.1. Bases del método.....	21
-Método de diferencias finitas.....	21
-Análisis de Fourier.....	23

III.2. ¿Que es el método pseudo-espectral?.....	25
-Algunos tipos de derivación discreta.....	27
III.3. Formulación velocidad-esfuerzo.....	31
III.4. Formulación modal.....	33
III.5. Estabilidad y dispersión.....	35
IV. RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES.....	37
IV.1. Simulaciones bajo formulación velocidad-esfuerzo.....	37
-Caso unidimensional.....	37
-Fronteras absorbentes.....	43
-Caso bidimensional SH.....	45
-Medio heterogéneo.....	49
-Caso P y SV.....	54
IV.2. Respuesta sísmica de depósitos de suelo blando con geometría irregular.....	56
-Valle triangular.....	56
-Valle trapezoidal.....	58
-Valle parabólico.....	60
IV.3. Aplicación sísmológica del método pseudo-espectral.....	64
-Respuesta pseudo-espectral ante una señal real.....	65
V. CONCLUSIONES.....	73
RECONOCIMIENTOS.....	76
REFERENCIAS.....	77

RESUMEN

Se presenta un método para simular numéricamente la propagación de ondas que se basa en la discretización de la ecuación de onda. Esta ecuación de segundo orden en derivadas parciales, incluye derivadas temporales y espaciales. Las primeras se aproximan con diferencias finitas centrales y las segundas se calculan empleando el algoritmo de transformada rápida de Fourier. Esto implica el cálculo de las derivadas parciales con todos los puntos de la discretización espacial por lo que la aproximación es global, en contraste con las diferencias finitas donde la aproximación es de carácter local. Debido a esta característica el método pseudo-espectral presenta ventajas de cómputo; requiere, en general, menos memoria y tiempos de cálculo.

Es de interés mostrar la versatilidad numérica del método para fines de su aplicación de acuerdo con las dos formulaciones que aquí se presentan; la formulación velocidad-esfuerzo que se basa en un esquema de malla alternada para las velocidades y esfuerzos y emplea óptimamente los operadores de derivación espacial del método. Con esta formulación se presentan ejemplos de aplicación a problemas escalares y vectoriales en una y dos dimensiones que se comparan con resultados de soluciones exactas. Se incluyen casos de material heterogéneo y se discuten los problemas de fronteras absorbentes.

R AVILA CARRERA

Por otro lado la formulación modal, simula la propagación de ondas sísmicas en configuraciones irregulares con variación lateral suave. Se adopta para la solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales (ecuación de onda) una expansión multimodal "local" analítica para la variación vertical.

Las funciones de onda horizontales son aproximadamente gobernadas por una ecuación de onda modificada que se resuelve mediante el método pseudo-espectral. En esta aplicación se desprecia la interacción entre el depósito y el medio exterior. Por ello la excitación consiste en un campo de desplazamientos prescrito en la interfaz depósito-semiespacio. La técnica se aplica para calcular sismogramas sintéticos en modelos de depósitos aluviales ante incidencia de ondas SH. Los resultados se comparan con soluciones publicadas y se encontró excelente congruencia.

ABSTRACT

A method for numerical simulation of wave propagation is presented. It is based upon the discretization of wave equation. This partial differential second order equation has derivatives in time and space. The former are approximated by means of centered finite differences whereas spatial derivatives are computed by means of the Fast Fourier Transform algorithm. This implies that spatial derivatives are computed using all grid points; hence, the approximation is global. In contrast, finite differences provide local approximation. This features makes the pseudospectral method an advantageous alternative. In general, it requires less memory and computation.

To show the numerical versatility of the method, we present here two formulations: first, the velocity-stress formulation uses in optimum way the discrete derivation operators in a staggered grid. Some examples of application to one- and two-dimensional scalar and vector problems are given. Results are compared with exact solutions. Some cases of heterogeneous material are presented. The problem of absorbing boundaries is discussed.

On the other hand a modal-pseudospectral approach is used to simulate the propagation of seismic waves in irregular configurations with smooth lateral variations. The solution of the scalar wave equation is built in terms of a multi-modal local expansion that gives analytical vertical variation of displacement field.

R AVILA CARRERA

The horizontal wave functions must fulfill a modified wave equation, for each mode. This equation is solved approximately using the pseudospectral method. In this method, use is made of finite differences in time whereas the spatial derivatives are computed by means of Fourier transform.

The interaction between the soft inclusion and the half-space is neglected. Therefore, the excitation is given by a prescribed displacement field at the interface. This method is applied here, to compute synthetic seismograms for models of alluvial basins under incident SH waves. Results are compared with published solutions. We found excellent agreement. This method is fast and accurate and requires small computational resources.

INTRODUCCIÓN

Los terremotos constituyen una de las catástrofes naturales más devastadoras y aterradoras que existen. La Tierra como fuente de lo inconstante, cambiante y perecedero, es súbita y continuamente resquebrajada y rota, atemorizando al hombre que encara el fenómeno con su condición de mortal y con impotencia ante las enormes fuerzas de la naturaleza.

En la evaluación del riesgo sísmico es de interés conocer los efectos de la geología y topografía locales en la respuesta de un sitio (Aki y Richards, 1980). En particular, el estudio de los efectos de las condiciones locales en el movimiento superficial de depósitos de suelo blando es de enorme importancia en zonas urbanas. Un caso bien conocido es el de la ciudad de México, dadas las características de las estructuras geológicas y topográficas sobre las cuales está asentada.

Para estos fines las simulaciones numéricas en ingeniería sísmica tienen como objetivos fundamentales estimar las influencias de diferentes factores que controlan los movimientos del terreno y sus efectos en las construcciones. Esos factores incluyen la fuente, los medios en que se propagan las ondas, la topografía, las irregularidades de estructuras geológicas, etc. Una manera racional de comprender la física del problema consiste en el empleo de simulaciones numéricas. Mediante la comparación con las observaciones pueden establecerse los alcances y limitaciones de estas técnicas. Para tal efecto en los últimos años se han desarrollado numerosos métodos de simulación avanzada (ver p ej la reciente compilación de Kelley y Marfurt, 1990).

R AVILA CARRERA

Entre estos se cuentan los que han logrado representar correctamente el comportamiento viscoelástico de los materiales (Emmerich y Korn, 1987). Los enfoques para resolver estos problemas han sido variados. Se han utilizado los métodos de elementos finitos (Lysmer y Drake, 1972), expansiones del número de onda que se han extendido a medios inhomogéneos (Bard y Gariel, 1986), métodos de ecuaciones integrales de frontera (Sánchez-Sesma et al., 1993) y diferencias finitas con discretización irregular. Con estas técnicas es posible hacer, para estructuras geológicas complejas, un modelado numérico bastante aceptable y permiten tratar la ecuación de onda elástica. Su principal desventaja ha sido la baja resolución en altas frecuencias. Por ejemplo, en el modelado con diferencias finitas o elementos finitos se requieren al menos 10 elementos o nodos para resolver una longitud de onda (Alford et al., 1974). Si bien eso es costoso, en muchas aplicaciones se requiere un número muy grande de ellos, especialmente para problemas tridimensionales. De esta manera, estas técnicas requieren una cantidad enorme de tiempo y recursos de cómputo.

En este trabajo se examinan simulaciones con un método de Fourier (Kosloff y Bay-sal, 1982) o como es comúnmente llamado, método pseudo-espectral (Kreis y Oligier 1972; Fornberg, 1975; 1977; Orzag, 1980; Gazdag, 1981). Este método solo difiere de la técnica de diferencias finitas, en que se usa transformada de Fourier para calcular derivadas espaciales de las variables de campo asociadas a la ecuación de onda. Los operadores de derivación que se proponen se basan en el uso de una malla alternada en los dominios espacial y temporal para los parámetros de velocidad y esfuerzo. Ello permite obtener resultados de alta resolución. En este método sólo se requieren de 2 a 3 puntos de muestreo por longitud de onda espacial. De esta manera, el método pseudo-espectral requiere 25 veces menos puntos de muestreo en 2-D. Este factor alcanza 125 en 3-D. Por esto, es factible que el método pueda ser utilizado como alternativa en las simulaciones numéricas de la propagación de ondas.

Con la finalidad de ofrecer una introducción en el campo de la propagación de ondas, en el segundo capítulo se proporciona una parte de la teoría que trata esta disciplina. Se expone de una manera secuencial y resumida para facilitar su comprensión.

En el tercer capítulo se muestra el algoritmo usado, para resolver la ecuación de onda escalar en una y dos dimensiones; además, se muestra una formulación en la que se expresa el campo de desplazamientos usando una expansión multi-modal analítica que controla la variación vertical localmente. Esta formulación sólo difiere del método pseudo-espectral en que se usa una aproximación analítica en "modos locales", para describir las variaciones verticales del campo asociado a la ecuación de onda.

INTRODUCCIÓN

Este acoplamiento de soluciones permite estimar la respuesta de depósitos aluviales con geometría irregular suave y optimar el cálculo de las derivadas.

Así también, en el capítulo cuatro se muestran algunos resultados de simulaciones de casos homogéneo y heterogéneo para SH y los obtenidos para P y SV. Se ilustran algunos resultados de la respuesta sísmica de depósitos de suelo blando con geometría irregular mediante sismogramas sintéticos, diagramas $f-x$ (frecuencia-espacio) y $f-k$ (frecuencia-número de onda) que permiten un análisis de la distribución de la energía cinemática del movimiento.

ONDAS SÍSMICAS

Estar presente en un sitio cuando en éste ocurre un terremoto, por lo general produce un sentimiento de inseguridad e impotencia. Esto ha orillado al hombre a preocuparse y continuar con el estudio, aplicación y desarrollo de los conocimientos con que cuente en su tiempo. En la actualidad, los estudios más recientes coinciden en que un sismo puede ser producido por varios orígenes, siendo, para algunos casos como el de la Cd. de México, de los más importantes, los de origen tectónico. Para este caso el movimiento se produce cuando los esfuerzos existentes entre las rocas crecen y se acumulan tanto durante un intervalo de tiempo, que éstas no soportan más, se deforman y súbitamente se rompen. Durante este proceso ocurre una gran acumulación de energía, la cual se transforma principalmente en calor, esfuerzos residuales y en movimiento al momento de la ruptura. Este movimiento es transferido en forma de ondas sísmicas las cuales se propagan a través de distintos medios y formaciones geológicas que se encuentran caracterizados por sus propiedades mecánicas. En este trabajo se tratan casos escalares y vectoriales para medios elásticos lineales homogéneos e isótropos, en una y dos dimensiones. También se muestran resultados para medios heterogéneos.

ONDAS SÍSMICAS

II.1. Teoría de la elasticidad

Generalmente cuando se realiza un estudio de ondas sísmicas se supone que el medio de propagación es elástico, esta suposición nos ayuda a comprender ciertos fenómenos del evento sísmico. Cuando un medio continuo es sometido a la acción de fuerzas externas estas producen como resultado cambios en la forma, volumen y tamaño, así como también fuerzas de tipo interno dentro del medio, la relación entre las fuerzas internas que produce el medio cuando a este se aplican fuerzas externas, es en general parte del estudio de la teoría de la elasticidad. Es decir, la teoría de la elasticidad nos permite conocer principalmente las relaciones esfuerzo-deformación en un medio continuo, elástico.

-Esfuerzos

Considérese un cuerpo sometido a fuerzas externas como se muestra en la fig (2.1.1). Supóngase que hipotéticamente se hace un corte como lo muestra la misma figura. La acción de la parte 2 sobre la parte 1 puede considerarse una distribución *continua* de fuerzas.

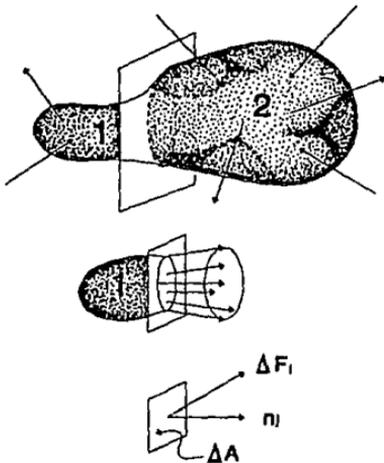


Fig (2.1.1) Cuerpo sometido a la acción de fuerzas externas, las cuales producen fuerzas internas en el mismo.

Defínase el vector de tracción en el punto P como

$$t_i^{(n)} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A} \quad (2.1.1)$$

donde ΔA = elemento de área con un vector dado por n_i , ΔF_i es el vector de fuerza resultante que actúa sobre el elemento ΔA .

Claramente se ve que $t_i^{(n)}$ depende de la orientación normal y de la posición del elemento de área.

Supóngase que n_i coincide con la dirección del eje x_1 , así el vector $t_i(\hat{e}_1)$ tendrá, en general, componentes en las direcciones x_1 , x_2 y x_3 .

R AVILA CARRERA

que serán normal y tangenciales a la superficie en estudio usualmente se denotan mediante

$$t_1^{(\sigma)} = \sigma_{11} \quad ; \quad t_2^{(\sigma)} = \sigma_{12} \quad ; \quad t_3^{(\sigma)} = \sigma_{13} \quad (2.1.2)$$

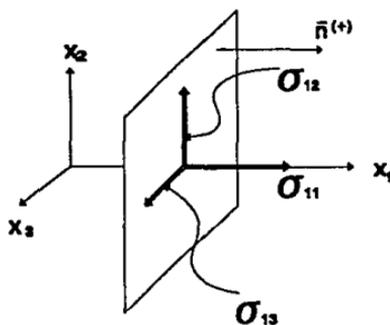


Fig (2.1.2) Convención del tensor de esfuerzos

El primer índice de σ indica la dirección del vector normal y el segundo indica la dirección en la que actúa el componente del vector de tracción. Se dice que estos componentes son *esfuerzos* normales y tangenciales ó cortantes respectivamente.

En este trabajo, hablaremos de esfuerzos positivos de acuerdo con la correspondencia positiva a cada uno de los ejes coordenados, como se muestra en la fig (2.1.2). Si la cara del volumen en la que se encuentre actuando definida por su vector normal $\vec{n}^{(\sigma)}$, es negativa, los esfuerzos positivos tendrán sentidos contrarios a los mostrados.

Existen en la literatura diversas maneras de representación y de notación del tensor de esfuerzos, para este trabajo, en este apartado se usará la notación sugerida por Fung (1965), la cual se apoya en una notación del tipo indicial, también llamada convención suma de Einstein.

En la fig (2.1.3) se muestran componentes positivas de los esfuerzos. En las caras opuestas, esfuerzos positivos tienen sentidos contrarios a los mostrados. Las nueve cantidades introducidas, son componentes del *tensor de esfuerzos*. Puede demostrarse mediante una construcción geométrica sencilla que el vector de tracciones adopta la forma

$$t_1^{(\sigma)} = \sigma_{1k} n_k \quad (2.1.3)$$

ONDAS SÍSMICAS

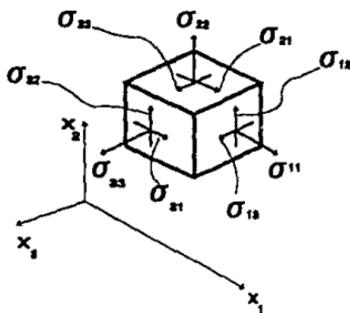


Fig (2.1.3) Elemento diferencial sometido a la acción de esfuerzos.

que es conocida como *fórmula de Cauchy*, en honor a Augustin L Cauchy (1789-1857) quien trabajó en varios campos de la física, las matemáticas y particularmente en elasticidad, donde desarrolló el concepto de esfuerzo y deformación, y formuló una relación lineal esfuerzo-deformación que actualmente se conoce como *Ley de Hooke*, tridimensional.

-Deformaciones

El movimiento puramente unidimensional de un elemento se muestra en la fig (2.1.4). Como una consecuencia de que el movimiento no es uniforme en todo el elemento, este sufre una deformación. Para el caso unidimensional la medida más simple de la deformación, es simplemente la extensión dividida por la longitud original de un elemento comprimido del mismo material.

Esta medida de deformación puede ser expresada como

$$E_{11} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (2.1.4)$$

R AVILA CARRERA

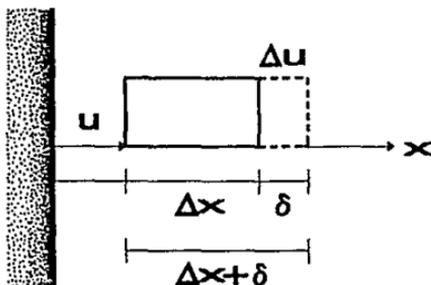


Fig (2.1.4) Movimiento y deformación unidimensional de un elemento.

Si ahora llamamos u, v y w a las componentes del desplazamiento de un cuerpo en las direcciones x, y y z respectivamente sus deformaciones longitudinales se definen como

$$E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad E_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad E_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.1.5)$$

Ahora bien, si el campo se somete a deformaciones angulares, es decir a distorsión, estas se expresan como

$$\begin{aligned} E_{xy} = E_{yx} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ E_{xz} = E_{zx} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ E_{yz} = E_{zy} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

ONDAS SÍSMICAS

Además si existe rotación simple del cuerpo respecto a los tres ejes coordenados ésta será descrita por

$$\begin{aligned}\theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \theta_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.1.7}$$

de esta manera, dichas expresiones pueden describir la deformación y el movimiento de un cuerpo con respecto de un sistema rectangular coordenado.

-Ley de Hooke

Históricamente las primeras nociones de elasticidad surgieron por la necesidad de medir el tiempo en altamar. En 1676, Robert Hooke (1635-1703) publicó estas ideas en forma de anagrama

ceiinossttuv

Hooke lo explicó en 1678 como *Ut tensio sic vis*, ó "la fuerza de cualquier cuerpo muellante está en la misma proporción con la extensión"; (Edmeo Mariotte enunció la misma ley de manera independiente en 1680).

Actualmente se ha observado con mucha exactitud que casi todos los sólidos presentan proporcionalidades lineales entre las deformaciones que sufren debido a esfuerzos aplicados. De manera general, la linealidad puede introducirse como una relación entre los tensores de esfuerzo y de deformación utilizando la convención suma de Einstein como

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}\tag{2.1.8}$$

Debido a la simetría de σ_{ij} y de ϵ_{kl} se puede expresar la relación lineal mediante 36 constantes. Un análisis energético muestra que son 21 las constantes independientes. Si se acepta que el sólido es isótropo, esto es, con propiedades independientes de la dirección, la ec (2.1.8) será invariable con respecto al cambio de coordenadas,

R. AVILA CARRERA

$$\dot{\sigma}_{mn} = c_{mnpq} \dot{e}_{pq} \quad (2.1.9)$$

esto implica

$$c_{mnpq} = \beta_{mi} \beta_{nj} \beta_{ql} c_{ijkl} \quad (2.1.10)$$

que es evidentemente la definición de un tensor isótropo. Se puede demostrar que tal tensor es de la forma

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.1.11)$$

con sólo dos constantes independientes, λ y μ , que son llamadas *constantes de Lamé*. En honor al físico francés Gabriel Lamé (1852).

La ley de Hooke, expresada en la ec (2.1.8) entonces adquiere la forma

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.1.12)$$

si $i = j$

$$\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu) e_{ii} \quad (2.1.13)$$

entonces

$$e_{ij} = -\frac{\lambda}{2\mu} e_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (2.1.14)$$

$$e_{ij} = \frac{\lambda \sigma_{kk}}{2\mu (3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}$$

o bien

$$e_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} \quad (2.1.15)$$

donde E = módulo de Young y ν = módulo de Poisson, (en honor a Thomas Young (1807) y Simeon D Poisson (1829), quienes desarrollaron una teoría molecular de la elasticidad), que en términos de las *constantes de Lamé* están dadas por

ONDAS SÍSMICAS

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (2.1.16)$$
$$v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

respectivamente. Las relaciones inversas son

$$\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \quad (2.1.17)$$
$$\mu = \frac{E}{2(1+v)}$$

La constante μ suele llamarse, módulo de elasticidad en cortante y se representa también con la letra G, en las aplicaciones de mecánica de suelos.

-Ec. de Navier

La ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.1.18)$$

para expresarla en términos del campo de desplazamientos, considerese la *Ley de Hooke*, ec (2.1.12)

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.1.19)$$

con

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1.20)$$

R AVILA CARRERA

de donde

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1.21)$$

o bien

$$\sigma_{ii} = \lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{ii} + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (2.1.22)$$

que sustituida en la ecuación de movimiento, ec (2.1.18) conduce a

$$\lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_k} \delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_i} \right) + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.1.23)$$

que puede escribirse como

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_k} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.1.24)$$

Esta ecuación fué propuesta en 1821 y se conoce como ecuación de Navier, en honor a Louis M H Navier (1785-1836). Es la ecuación de equilibrio en un sólido, elástico lineal, homogéneo e isótropo en términos de los desplazamientos. Esta ecuación tiene su equivalente vectorial de la siguiente forma

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \rho \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.1.25)$$

El problema de la elastodinámica consiste en encontrar el campo de desplazamientos en un cuerpo una vez que son prescritas las condiciones de frontera, las singularidades, (si las hay), y las condiciones iniciales.

ONDAS SÍSMICAS

Las condiciones de frontera más comunes son aquellas en que

- a) se prescribe u_i en la frontera, o
- b) se prescribe t_i en la frontera, o
- c) se prescriben u_i en parte de la frontera y t_i en la parte restante
- d) se prescriben u_i y t_i en la misma frontera

Las condiciones iniciales se expresan mediante la especificación de los campos de desplazamientos y velocidades en $t=0$, como se ilustra en la ec (2.1.26).

$$\begin{aligned}u_i(\vec{x}, 0) &= f_i(\vec{x}) \\ u_{i,t}(\vec{x}, 0) &= g_i(\vec{x})\end{aligned}\tag{2.1.26}$$

R AVILA CARRERA

II.2. Ecuación de onda

Si se pretende describir como se propagan las ondas elásticas en un medio elástico homogéneo e isotrópico considere la ecuación de Navier, ec (2.1.24), sólo que excluyendo las fuerzas de cuerpo

$$\mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (2.2.1)$$

o en su forma vectorial

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.2.2)$$

Es posible demostrar mediante el teorema de Helmholtz que para un campo vectorial \vec{v} cualquiera, se cumple la identidad

$$\nabla^2 \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (2.2.3)$$

sustituyendo en la ec (2.2.1)

$$\mu [\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \times (\nabla \times \vec{u})] + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.2.4)$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

Ahora supongase que \vec{u} es un cierto movimiento que se verifica sin cambio de volúmen, es decir $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ en este caso la ec (2.2.1) queda

ONDAS SÍSMICAS

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.2.5)$$

donde

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.2.6)$$

La ec (2.2.5) gobierna la propagación de ondas equivolúmetricas, hecho garantizado por $\nabla \times \vec{u} = 0$.

Si se supone que \vec{u} es un movimiento que ocurre en un continuo sin rotación de las partículas, es decir $\nabla \times \vec{u} = 0$, la ec (2.2.1) puede escribirse (tomando en cuenta la identidad de la ec (2.2.3)) como

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.2.7)$$

donde

$$\alpha = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} \quad (2.2.8)$$

Esta ecuación describe la propagación de movimiento irrotacional, pues $\nabla \times \vec{u} = 0$. Con base en lo anterior, la forma general de la ecuación de onda será

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.2.9)$$

donde ψ es la función que designa el tipo de onda que se propaga y V es una constante que representa la velocidad de la onda.

R AVILA CARRERA

II.3. Tipos de ondas sísmicas

Una onda sísmica, es una perturbación mecánica que viaja a través de un medio. Si esta perturbación no produce cambio de volumen entonces $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y si no produce cambio de forma, es decir, cambios en las relaciones angulares del medio, entonces $\nabla \times \mathbf{u} = 0$.

Una solución particular de la ecuación de onda, ec (2.2.9) es

$$\psi = f(x-vt) + g(x+vt) \quad (2.3.1)$$

que representa dos ondas viajando con velocidad v en sentidos opuestos. El primer término avanza en la dirección positiva del eje x y el segundo en dirección negativa. Como ψ es independiente de y y z se le denomina onda plana. Por otra parte, los términos $(x-vt)$ ó $(x+vt)$ representan las fases; cuando la fase es la misma se genera una superficie que llamamos *frente de onda*, es decir, el conjunto de todos los puntos en el espacio que son alcanzados simultáneamente por la misma forma de perturbación. La línea que denota la dirección de propagación se le denomina *rayo*. Los rayos y los frentes de onda son ortogonales.

Se ha establecido que las ecs (2.2.5) y (2.2.7) son los dos casos particulares de la ecuación general de onda (2.2.9), en que debe satisfacerse la función u correspondiente a las dilataciones y rotaciones; es decir, en un medio elástico, homogéneo, isótropo y de extensión infinita, sólo se pueden transmitir estos dos tipos de ondas. Sin embargo, durante un evento sísmico se producen, además, ondas superficiales generadas en presencia de una superficie libre.

-Ondas P

Este tipo de ondas son las más rápidas, es decir son las primeras en llegar al receptor. Su movimiento típicamente se caracteriza por el desplazamiento de las partículas del medio en la dirección de propagación de la onda, produciendo en este dilataciones y compresiones pero sin cambio de forma de las partículas; por lo que, también se les denomina dilatacionales, compresionales, longitudinales ó irrotacionales (ver fig (2.3.3, a)). La ec (2.2.8) define la velocidad de propagación α que en las rocas graníticas y en el interior de la tierra es mayor a los 5 km/s y 11 km/s respectivamente, (Nava, 1987). Las ondas P son capaces de viajar en sólidos, líquidos y ser transmitidas en el aire como ondas sonoras, audibles si sus frecuencias son mayores de 15 Hz (Bolt, 1978).

ONDAS SÍSMICAS

-Ondas S

Son aquellas en que las partículas del medio típicamente se desplazan de manera perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Son las segundas en llegar al receptor, de ahí, su denominación de S (el término utilizado en inglés es *Shear*), también se les conoce como transversales o de cortante (ver fig (2.3.3, b)). No pueden viajar a través de los líquidos debido a que el esfuerzo cortante en estos es nulo. Su velocidad de propagación está definida por β en la ec (2.2.6).

Las ondas P, aunque viajan a mayor velocidad, tienen frecuencias más altas y amplitudes menores que las S, por ello a estas últimas se les asocia la ocurrencia de daños durante temblores. En una gran gama de rocas $\nu = 0.25$ y por lo tanto $\beta = \alpha/\sqrt{3}$.

Es convención en el análisis de las ondas de cortante, hacerlo polarizándolas en ondas SH (horizontales) y SV (verticales) convenientemente, como se muestra en la fig (2.3.1).

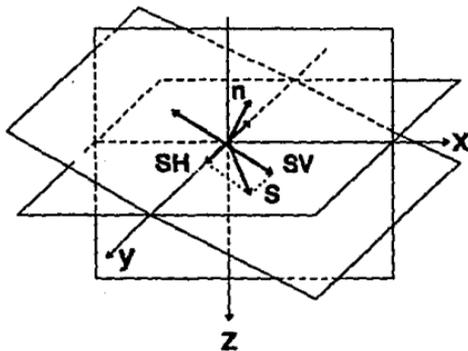


Fig (2.3.1) Polarización de las ondas de cortante (S).

En este trabajo se emplea el método pseudo-espectral para resolver la ecuación de onda en los casos SH, P y SV. Sin embargo, los resultados obtenidos en los respectivos casos hasta ahora varían en precisión, como se discutirá en el capítulo cuatro.

-Ondas Superficiales

Este tipo de ondas se deben a la interferencia de las ondas de cuerpo con la superficie libre. El sistema de ondas formado se propaga a menor velocidad que la de aquellas. Las ondas superficiales suelen presentar amplitudes máximas en la superficie que se reducen con la profundidad. En algunos telesismos se logra apreciar su dispersión, es decir, las ondas de diferentes frecuencias viajan a diferentes velocidades. Los dos tipos principales son las ondas de Love y de Rayleigh.

a) Ondas de Love

Puede demostrarse que la propagación de ondas superficiales (que se atenúan con la profundidad) del tipo SH es imposible en un semiespacio homogéneo. No obstante las ondas superficiales SH se observan sobre la faz de la tierra. Love demostró que una teoría suficiente para explicar las ondas SH superficiales puede desarrollarse si se tiene un estrato homogéneo de espesor uniforme H con propiedades μ_1 y β_1 sobre un semiespacio de propiedades μ_2 y β_2 como se muestra en la fig (2.3.2)

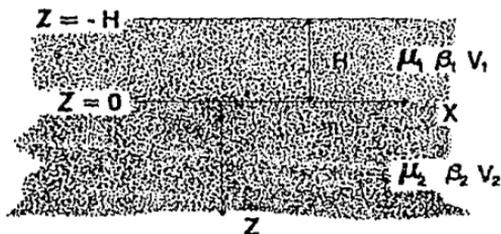


Fig (2.3.2) Notación para un estrato sobre un semiespacio elástico.

Las ondas de Love tienen un movimiento transversal paralelo a la superficie y se presume que se deben a que las propiedades elásticas y la densidad de las capas superficiales difieren de las del interior. Estas ondas pueden propagarse a través de la capa superficial sin penetrar. Son más lentas que las ondas de cuerpo pero se pueden desplazar a mayor velocidad que las de Rayleigh (1 a 4.5 km/s), (ver fig (2.3.3, c)).

ONDAS SÍSMICAS

b) Ondas de Rayleigh

Algunos autores semejan este tipo de ondas a las superficiales de gravedad en los líquidos (olas). Lord Rayleigh mostró que sus efectos decrecen rápidamente con la profundidad y que su velocidad, menor a las ondas de cuerpo es del orden de 0.92β (2 a 4 km/s). Sin embargo, al propagarse en dos dimensiones se ha observado que su decrecimiento es más lento que el de las ondas de cuerpo. El movimiento de las partículas en el terreno se efectúa en forma de una elipse retrógrada con el eje mayor en posición vertical (ver fig (2.3.3, d)).

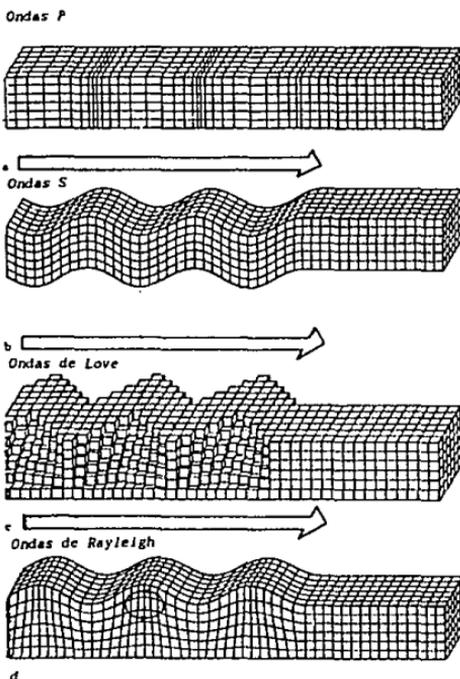


Fig (2.3.3) Cuando ocurre un sismo se producen principalmente: a) ondas compresionales (P), b) ondas de cortante (S); así como ondas superficiales: c) ondas de Love y d) ondas de Rayleigh.

MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL

Se presenta un algoritmo pseudo-espectral o de Fourier para resolver la ecuación de onda. En el método se utiliza una malla numérica espacial para calcular las derivadas espaciales por medio de la transformada rápida de Fourier. Las derivadas temporales que aparecen en la ecuación de onda se calculan con una diferenciación de segundo orden. El esquema requiere mucho menos puntos de discretización que en los métodos de diferencias finitas, para lograr la misma exactitud. Sin embargo, se cree que el método pseudo-espectral será más eficiente que los métodos de diferencias finitas, especialmente cuando se tratan modelos tridimensionales.

El método pseudo-espectral se prueba en este trabajo ante dos distintas formas de aplicación. En la primera se utiliza una formulación velocidad-esfuerzo y mallas alternadas para el caso escalar y vectorial de la ecuación de onda elástica en una y dos dimensiones. En la segunda, se obtiene la respuesta sísmica de depósitos de suelo blando para el caso SH, utilizando una formulación semianalítica que emplea modos locales para la variación vertical del modelo.

Los resultados numéricos se comparan con soluciones exactas y con los obtenidos con otros métodos para cada caso de aplicación. En general se observó que la congruencia es bastante buena.

MÉTODO PSEUDOESPECTRAL

III.1. Bases del método

Para lograr una mejor comprensión de lo que aquí se pretende, es necesario conocer las principales formas de solución asociadas a éste método. Estas son; diferencias finitas y análisis de Fourier, que a continuación se describen.

-Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas ofrece un camino directo para calcular los movimientos a partir del problema formulado en términos de ecuaciones básicas, condiciones iniciales y de frontera. Implíca un mínimo de esfuerzo analítico mediante el empleo intensivo de computadoras digitales. El método es en general flexible, y puede ser empleado para estudiar cualquier cuerpo inhomogéneo y de forma virtualmente arbitraria. El método es esencialmente parecido a una simulación de laboratorio usando un modelo a escala, tiene mayores ventajas sobre otros métodos en particular en la exactitud, en la facilidad de preparar un modelo y una fuente sísmica y en la reducción del efecto de fronteras artificiales impuestas con un carácter finito en los modelos. Todo esto sin ninguna otra habilidad que un programa de computadora.

El tamaño y la complejidad de un problema que puede ser resuelto con el método de diferencias finitas está limitado por la capacidad de cómputo disponible. Por ello es de gran importancia contar con algoritmos que minimicen la cantidad de memoria requerida y el tiempo de cómputo. En un algoritmo eficiente se debe buscar la máxima explotación de la simetría de un problema, la simplificación de las ecuaciones básicas, las condiciones de frontera que se alojan para la exactitud deseada y las opciones óptimas de configuraciones para rejillas, fórmulas de diferencias finitas y condiciones en las fronteras artificiales.

El caso más simple de la ecuación de onda unidimensional permite ilustrar los elementos del método de diferencias finitas y cómo se aplican en sismología.

Considérese un medio en el cual las constantes elásticas varían sólo en una dirección, x . La ecuación de movimiento para el desplazamiento asociado con el plano de propagación de ondas en la misma dirección es

R AVILA CARRERA

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (3.1.1)$$

donde

$$E(x) = \lambda(x) + 2\mu(x) \quad \text{para ondas P} \quad \text{y} \quad E(x) = \mu(x) \quad \text{para ondas S.}$$

Para evitar tomar las derivadas espaciales de $E(x)$, usaremos la velocidad de partícula $\dot{u} = \partial u / \partial t$ y el esfuerzo $\tau = E(x) \partial u / \partial x$ como variables. Entonces la ec (3.1.1) se reemplaza por las siguientes ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} &= \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial \tau}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= E(x) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Hay muchas maneras de aproximar las ecs (3.1.2), por fórmulas de diferencias finitas. Para mostrar la importancia de escoger un esquema apropiado, podremos dar un ejemplo que resulta ser muy bueno por su estabilidad. Este es el esquema que se aplica en este trabajo para calcular las derivadas en la parte temporal de la ecuación de onda. El esquema puede construirse con el uso de rejillas alternadas en las cuales la rejilla para \dot{u} es corrida de la rejilla τ por la mitad de una longitud de rejilla par x y t como se muestra en la fig (3.1.1). Entonces usamos la siguiente aproximación en diferencias finitas a la ec (3.1.2)

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{i+1/2} - u_m^{i-1/2}}{\Delta t} &= \frac{1}{\rho_m} \frac{\tau_{m+1/2}^i - \tau_{m-1/2}^i}{\Delta x} \\ \frac{\tau_{m+1/2}^{i+1} - \tau_{m+1/2}^i}{\Delta t} &= E_{m+1/2} \frac{u_{m+1}^{i+1/2} - u_m^{i+1/2}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Este esquema nos permite conocer los valores de las velocidades \dot{u} para el tiempo $i+1$ en todos los puntos de la malla conocidos los esfuerzos τ en $i/2$ de la rejilla espacial en ambos lados del punto de velocidad.

MÉTODO PSEUDOESPECTRAL

Para este caso el término de error es muy pequeño, por que resulta ser proporcional al cuadrado del intervalo de muestreo, aquí el intervalo fue acortado por un medio, (Aki y Richards, 1980, pp. 773-795).

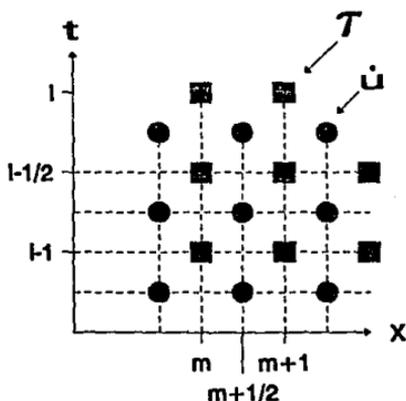


Fig. (3.1.1) Distribución de las mallas de espacio y tiempo para las velocidades u y los esfuerzos τ .

-Análisis de Fourier

En el estudio de la respuesta sísmica de estructuras geológicas se analizan los efectos producidos por una señal transitoria, que puede ser una onda elemental, o bien, un registro sísmico. Para calcular la respuesta se emplea el análisis de Fourier. Esta disciplina matemática ofrece recursos que simplifican el proceso del cálculo al trasladar el problema del dominio del tiempo al de la frecuencia donde el estudio es más sencillo. Posteriormente haciendo uso de la síntesis de Fourier se obtiene la respuesta del depósito en el dominio del tiempo.

Al emplear la transformada de Fourier se identifican las diferentes frecuencias y amplitudes de las ondas que combinadas generan la onda arbitraria. Un par de transformación se define como (e.g. Newland, 1980)

R AVILA CARRERA

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.1.4)$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, $i = \sqrt{-1}$ y ω es la frecuencia angular $2\pi f$. Un estudio más detallado de las expresiones de la ec (3.1.4) lo realiza Brigham, (1974).

Un concepto físico de suma importancia en sismología es el de la convolución de dos funciones, la cual se define de la siguiente manera

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau = h(t) * f(t) = H(\omega) \cdot F(\omega) \quad (3.1.5)$$

El teorema de convolución de la ec (3.1.5) y su transformada de Fourier en el extremo derecho de la misma ecuación, constituyen en sí un recurso poderoso de análisis. El teorema establece que si $F(\omega)$ y $H(\omega)$, son las transformadas de Fourier de $f(t)$ y $h(t)$ respectivamente, entonces la convolución de las funciones $f(t) * h(t)$ tiene como transformada de Fourier $F(\omega)H(\omega)$. Es decir, la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo se transforma en una multiplicación punto a punto en el dominio de la frecuencia. Este resultado es de gran utilidad al analizar la respuesta de sistemas lineales.

MÉTODO PSEUDOESPECTRAL

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER Y FFT

Debido a que los cálculos numéricos se hacen mediante el auxilio de computadoras, es necesario discretizar las expresiones de la ec (3.1.4). Así la transformada discreta y la transformada inversa discreta serán respectivamente (e.g. Newland, 1980).

$$X_k = \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i\left(\frac{2\pi k r}{N}\right)} \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.1.6)$$
$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X_r e^{i\left(\frac{2\pi k r}{N}\right)}$$

Si el muestreo de las funciones se hace con un intervalo Δ se estimará un espectro hasta $1/2\Delta$, que es la llamada *frecuencia de Nyquist*. En la práctica se consideran confiables frecuencias menores, pues cerca de la de Nyquist se presenta una distorsión denominada *aliasing*.

Haciendo uso directamente la transformada discreta de Fourier con N muestras se requiere un tiempo de computo proporcional a N^2 , lo que implica un excesivo tiempo de proceso sobre todo cuando N es grande.

Afortunadamente se ha desarrollado un algoritmo de extraordinaria eficiencia denominado Transformada Rapida de Fourier, FFT (Fast Fourier Transform) que reduce el tiempo de cálculo siendo este proporcional a $N \log_2 N$ (e.g. Newland, 1980). La FFT se emplea en este trabajo para efectuar los cálculos y en general todas las operaciones espectrales del método que aquí se propone.

III.2. ¿Que es el método pseudo-espectral?

El método pseudo-espectral fue introducido a principios de los años setentas por Kreiss y Olinger (1972) y por Fornberg (1975). Desde entonces ha sido ampliamente utilizado en estudios de predicción meteorológica. Sólo diez años más tarde fué aplicado a la propagación de ondas sísmicas (Kosloff y Baysal, 1982), y ahora forma parte de los llamados métodos directos como los de diferencias finitas o elementos finitos. Para la ecuación de propagación de ondas sísmicas, la idea del método es efectuar la derivación temporal por un método de diferencias finitas centradas y la derivación espacial utilizando transformada de Fourier.

R AVILA CARRERA

Para ilustrar las ideas fundamentales considérese la ecuación de onda, ec (3.2.1)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (3.2.1)$$

la discretización se hace en tiempo y espacio por medio de una malla de dimensiones finitas equiespaciada, con Δx , el tiempo se divide en intervalos Δt . Estos parámetros no son independientes entre sí y deben ser escogidos cuidadosamente para evitar efectos de dispersión numérica. La derivación en el dominio del tiempo se efectúa con diferencias finitas (centrales) para la cual, con aproximación de segundo orden, podemos escribir.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \approx \frac{U^{j+1} - 2U^j + U^{j-1}}{\Delta t^2} \quad (3.2.2)$$

donde U^{j+1} es el valor calculado de la función U al tiempo $j+1$.

Para la obtención de las derivadas en el dominio espacial se hace uso de la transformadas de Fourier directa e inversa, que pasan la información del dominio espacial (x) al dominio del número de onda (k) y viceversa. Estas transformadas suelen escribirse como

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (3.2.3)$$

Una importante propiedad de la transformada de Fourier es que la derivada n -ésima de la función $f(x)$, $f^{(n)}(x)$ tiene como transformada $(ik)^n F(k)$, donde $i^2 = -1$.

Así, para efectuar la segunda derivada de una función f , $d^2 f/dx^2$ se obtiene primero la transformada directa de Fourier de la función $f(x)$ y el resultado en el dominio del número de onda $f(k)$ se multiplica por $(ik)^2$. Posteriormente el nuevo resultado se le toma la transformada inversa ($-k^2 F(k)$), para así obtener la segunda derivada de la función, en el dominio espacial.

MÉTODO PSEUDOESPECTRAL

$$f(x) \rightarrow F(k)(ik)^2 = (-k)^2 F(k) \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (3.2.4)$$

El tratamiento numérico de esta derivación espacial requiere cuidado especial en la discretización de la señal. Con el uso de un marco adecuado de discretización y con el poder de cómputo suficiente, este método puede emplearse de manera satisfactoria en el modelado de la propagación de ondas sísmicas. Así, a partir de las ecs (3.2.1) y (3.2.2) se tiene un esquema explícito de cálculo. En este método sólo se requieren de 2 a 3 puntos de muestreo por longitud de onda espacial, esto es, cinco veces menos puntos que en esquemas tradicionales de diferencias finitas. En el caso 2D se requieren 25 veces menos puntos de muestreo. Este factor alcanza 125 en 3D. Por ello el método es una alternativa interesante en las simulaciones de la propagación de ondas y el campo de la modelación numérica.

-Algunos tipos de derivación discreta

Esta sección pretende mostrar, de manera breve, algunas formas numéricas de calcular derivadas para alguna función dada y observar las características de cada algoritmo y sus costos computacionales. Todo esto con el objeto de conocer las ventajas y desventajas de algunos tipos de derivadores numéricos que pudieran ser adoptados en este trabajo. A continuación se muestran en la fig (3.1.2) los resultados gráficos de cuatro algoritmos numéricos diferentes, los cuales se tomaron para derivar una función pulso de Ricker centrado en 4.0 s y de período característico 2.0 s, para un distinto número de puntos de muestreo. Las distintas formas de derivación que se estudiaron son: Transformada Rápida de Fourier ó FFT (Clearbout, 1976), Polinómios de Legendre (Leg), Spline bicúbico (SPL) y Matriz espectral de Fourier (MAT). Cada uno de estos algoritmos requiere de un esquema distinto de aplicación. (ver p ej Press et al, 1986).

Comparación de derivadas

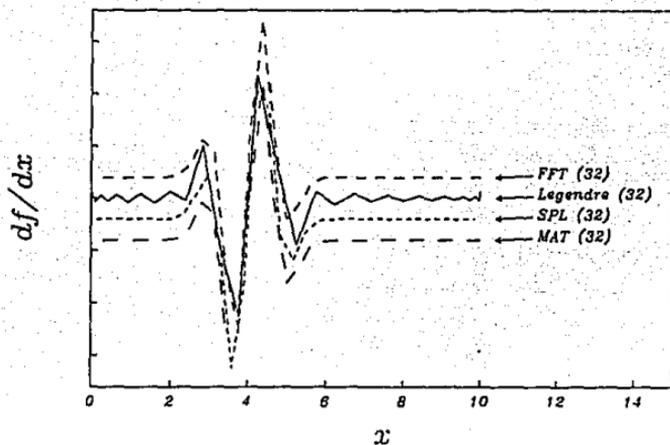


Fig (3.1.2) Comparación de cuatro diferentes maneras de obtener la derivada numérica de una función discreta con 32 puntos de muestreo.

En la fig (3.1.2) se observan los cálculos de las derivadas desplazadas en una escala vertical arbitraria, esto con fines de comparación, además se nota que cuando no se cuenta con una suficiente densidad de puntos de muestreo, principalmente la derivada con polinómios de Legendre presenta algunos problemas de precisión, aunque las derivadas con matriz espectral (MAT) y spline bicúbico que parecen tener mejores aproximaciones resultan ser muy lentas para su cálculo. Sin embargo la derivada calculada con FFT no requiere de un número grande de puntos de muestreo y es extremadamente rápida. La fig (3.1.2, continuación) muestra los resultados obtenidos con las derivadas para cada caso con 128 puntos de muestreo de la función. Se observa una excelente correspondencia entre cada una de ellas. En este caso es notorio que a excepción del algoritmo FFT, los demás requieren, para los propósitos de este trabajo, grandes tiempos de cómputo.

MÉTODO PSEUDOESPECTRAL

Comparación de derivadas

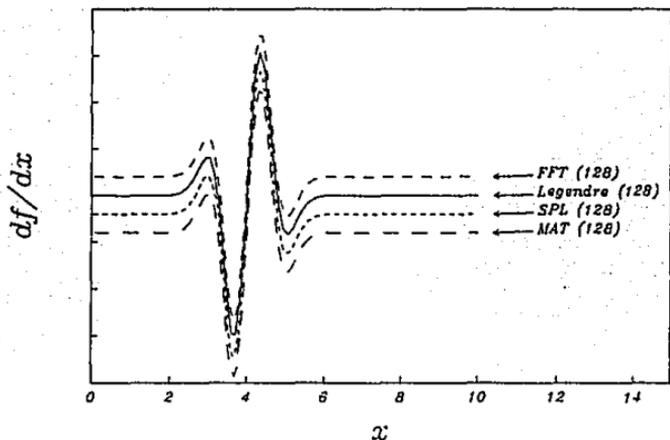


Fig (3.1.2) Continuación

Con base en lo anterior se realizó una prueba para comparar las soluciones de la ecuación de onda escalar con la formulación velocidad-esfuerzo, haciendo uso de las técnicas de derivación ya discutidas. Los resultados de esta prueba, se muestran en la fig (3.1.3). Se indican las historias de tiempo para un medio unidimensional con fronteras rígida en el borde izquierdo y libre en el derecho, al cual se le excita con una fuerza de variación temporal gaussiana. En este ejemplo se puede observar que existe, en general, una buena respuesta para las simulaciones realizadas con derivación espacial FFT y matriz espectral de Fourier (MAT), ya que ambas son prácticamente iguales, aunque el costo de cálculo es muy diferente. Esto se debe a que la derivada con matriz espectral de Fourier requiere, por mucho, más tiempo de cómputo que la FFT. Por otro lado se puede también observar que la simulación realizada con la derivación espacial que se obtiene con SPL resulta el más inestable de los casos y de la misma manera el derivador espacial con polinómios de Legendre aunque se comporta dentro de rangos aceptables de estabilidad también presenta algo de ruido.

R AVILA CARRERA

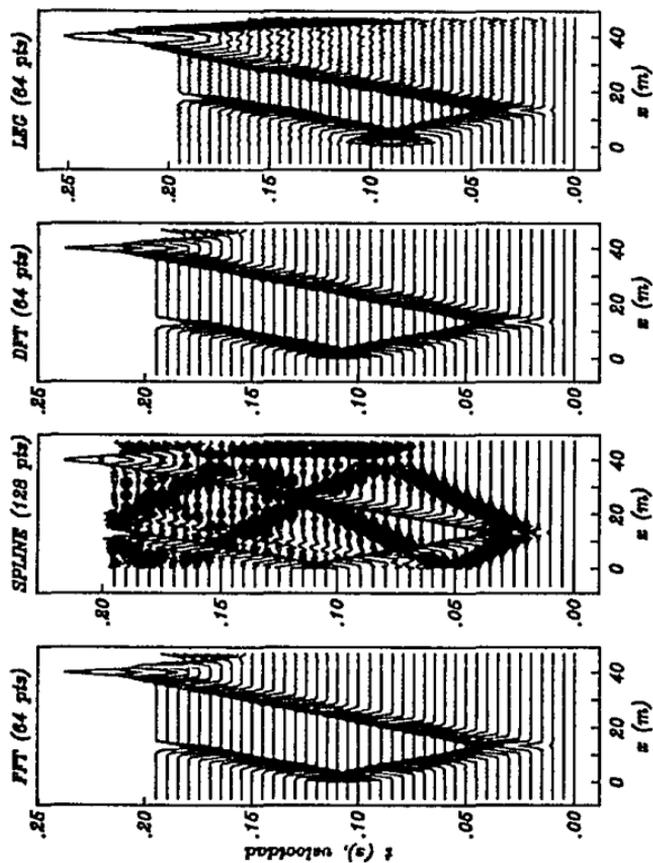


Fig (3.1.3) Historias de tiempo y propagación de una onda sobre un medio unidimensional con bordes rígido (izq) y libre (der), calculadas con distintos criterios de derivación espacial.

MÉTODO PSEUDOESPECTRAL

Como se vera más adelante, para todas las formas de derivación mencionadas, se adoptó el mismo criterio de estabilidad que el obtenido para el método pseudo-espectral, esto podría resultar un tanto rigorista para las formas de derivación no espectrales, como el algoritmo spline bicúbico por ejemplo, de aquí que no sea extraña la respuesta que se observa.

III.3. Formulación velocidad-esfuerzo

La ecuación de movimiento para ondas SH se puede escribir como:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.3.1)$$

donde

$$\sigma_{xx} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} \quad \sigma_{xy} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.3.2)$$

Si $\frac{\partial w}{\partial t} = \dot{w}$ se puede escribir que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} f_z \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

que es un sistema de primer orden en las variables de velocidades y esfuerzos. Para resolverlo usaremos diferencias finitas centradas (o centrales) en tiempo y una malla alternada (staggered grid).

Esto quiere decir que las velocidades a cada punto de la malla espacial $m\Delta x$, $n\Delta y$ se tendrán para los tiempos $j\Delta t$. Las derivadas temporales se calcularán para los tiempos $(j+1/2)\Delta t$ debido a que se están usando diferencias finitas centrales. Esto es implícito, pues se almacenan en la posición temporal j . Lo mismo ocurre para los esfuerzos, que estarán definidos para los tiempos $(j+1/2)\Delta t$ en posiciones espaciales alternadas. Para σ_{xx} estas serán $(m+1/2)\Delta x$, $n\Delta y$ respectivamente.

R AVILA CARRERA

En todos los casos el almacenamiento se hará en la posición m, n, j . Las derivadas espaciales que se requieren pueden calcularse también con diferencias finitas centrales. Sin embargo ello requiere un muestreo espacial muy fino (8 a 10 puntos por longitud de onda) comparado con el muestreo que requiere la transformada de Fourier (2 a 3 puntos por longitud de onda). En este trabajo usaremos la transformada de Fourier para calcular derivadas espaciales de manera alternada haciendo uso de las propiedades del algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT).

Sea la transformada de Fourier discreta de la serie de valores $f_l = f(x_l)$ (con $x_l = l\Delta x$ y $l=0, n-1$) dada por.

$$F_m = \sum_{l=0}^{n-1} f_l \exp\left[-i 2\pi \frac{l \Delta x m}{n \Delta x}\right], m=0, n-1 \quad (3.3.5)$$

con su inversa

$$f_l = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} F_m \exp\left[i 2\pi \frac{lm}{n}\right], l=0, n-1 \quad (3.3.6)$$

cosa que puede verificarse por sustitución directa.

Las expresiones discretas son la analogía del caso continuo que se presentaron con anterioridad. En este caso es claro que la transformada de Fourier de $\partial f(x)/\partial x$ es $ikF(k)$. Esto daría en forma discreta la expresión

$$f_l = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} i \frac{2\pi}{n \Delta x} m F_m \exp\left[i k_m x_l\right] \quad (3.3.7)$$

Sin embargo esta no cumple con algunas propiedades de la transformada discreta de Fourier. En particular la transformada de Fourier debe ser real en el número de onda de Nyquist es decir en $m=n/2$. Una manera natural de lograr esto es usar una malla alternada y calcular para la posición $(l+1/2)\Delta x$ en lugar de $l\Delta x$. Así se tiene que

$$f_{(l+1/2)} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} i k m e^{i k m \frac{\Delta x}{2}} F_m \exp\left[i k_m x_l\right] \quad (3.3.8)$$

MÉTODO PSEUDOESPECTRAL

Con ello la transformada de la derivada es calculada correctamente. Para calcular la segunda derivada no es necesario usar malla alternada pues (ikm) es real, pero si se requieren dos derivadas sucesivas para obtener por ejemplo f'' . Se calcula $f'_{(i+1/2)}$ y después $f'_{(i-1/2)}$ con lo que se tiene

$$\left(ikm e^{im \frac{\Delta x}{2}} \right) \left(ikm e^{-im \frac{\Delta x}{2}} \right) = (ikm)^2 = -km^2 \quad (3.3.9)$$

la expresión anterior es el resultado correcto.

III.4. Formulación modal

Considérese un depósito aluvial que sobreyace un semiespacio elástico, como el que se muestra en la fig (3.4.1). El campo de desplazamientos en la superficie del semiespacio, ante incidencia de ondas *SH* planas, puede expresarse como $f(t-x \text{ sen} \gamma / \beta E)$ donde, γ =ángulo de incidencia y βE =velocidad de propagación de las ondas *S* en el semiespacio.

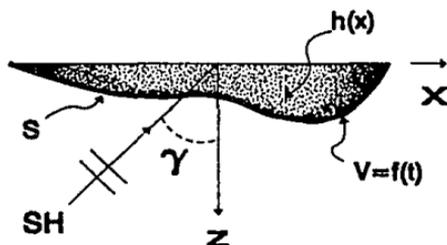


Fig (3.4.1) Depósito aluvial que sobreyace a un semiespacio elástico ante incidencia de ondas *SH*.

Si se supone un espesor pequeño del depósito con respecto a la longitud de onda y se desprecia la interacción entre los medios, esta expresión representa el movimiento de la base. En el depósito la ecuación que gobierna el movimiento es la ecuación de onda escalar

R AVILA CARRERA

$$\nabla^2 v = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.4.1)$$

Donde v es el campo de desplazamiento y β es la velocidad de propagación de las ondas SH. Si se supone que v es de la forma $v=f(t-x/c)+V(x,z,t)$, se obtiene

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2} \right) f''(t-x/c) \quad (3.4.2)$$

donde $c=\beta E/\text{sen } \gamma$, $f(\cdot)$ es la función de movimiento sólo para la base y $V(x,z,t)$ es el movimiento relativo a la base móvil. En esta ecuación $f''(\cdot)$ representa la excitación. Si se adopta para V una expresión de la forma

$$V(x,z,t) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(x,t) \cos \lambda_m z \quad (3.4.3)$$

donde $\lambda_m = (2m+1)\pi/2h(x)$, se observa que V es nula cuando $z=h(x)$. Sustituyendo la expresión (3.4.3) en la ec (3.4.2), considerando que $1=4/\pi \sum (-1)^m/(2m+1) \cos \lambda_m z$, la cual es una expresión exacta para la unidad, y despreciando términos de orden superior que resultan de las derivadas de $h(x)$ se obtiene, para cada m , que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \lambda_m^2 U = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2} \right) f''(t-x/c) \frac{4}{c} \frac{(-1)^m}{\pi 2m+1} \quad (3.4.4)$$

donde $U=U_m$. Para considerar aproximadamente la atenuación en el semiespacio reemplazamos el operador $\partial^2/\partial t^2$ por $\partial^2/\partial t^2 + 2\gamma\partial/\partial t + \gamma^2$, donde $\gamma = \rho\beta^2/\rho_x\beta_x h$. Esta aproximación se basa en un tipo de atenuación cuasi-elástica, como la que proponen Emmerich y Korn (1987), que pretende representar los comportamientos observados en los materiales con modelos reológicos de Maxwell generalizados.

MÉTODO PSEUDOESPECTRAL

Efectuando una construcción en diferencias finitas centradas y con base en las consideraciones anteriores se puede escribir finalmente

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^j - \frac{\lambda_m^2}{2}(U^{j+1} + U^{j-1}) = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{U^{j+1} - 2U^j + U^{j-1}}{\Delta t^2} + \gamma \frac{U^{j+1} - U^{j-1}}{\Delta t} + \gamma^2 \frac{U^{j+1} + U^{j-1}}{2} \right] + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2}\right) U^{j+1} \left(t - \frac{x}{c}\right) \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^m}{2m+1} \quad (3.4.5)$$

Que es un esquema explícito el cual puede ser resuelto mediante el método pseudo-espectral observando que los superíndices j se refieren al tiempo. Nótese que sólo el primer término es el que implica derivación espacial.

III.5. Estabilidad y dispersión

Las derivadas espaciales construidas por el método pseudo-espectral son exactas para los desplazamientos con frecuencias espaciales en la banda de la malla. Para un problema en una región homogénea e infinita, las componentes de Fourier son vectores característicos de la ecuación de onda y la frecuencia temporal de la solución exacta será igual a la banda de frecuencia del término de fuente $S(x, y, t)$.

En tal caso si la banda de frecuencia de la fuente es escogida apropiadamente, los errores en la solución numérica vienen sólo de la inexactitud de las aproximaciones de las diferencias finitas en las derivadas temporales.

Estos errores se manifiestan como una dispersión numérica y decrecen rápidamente cuando disminuye el tamaño del intervalo de tiempo. La fig (3.5.1) es una gráfica de la relación de dispersión para el método pseudo-espectral con una ecuación de onda acústica unidimensional (1-D) homogénea; en ésta figura C es la velocidad de fase y V es la velocidad de la onda acústica. Observando ésta gráfica, se muestra que el límite de estabilidad cuando $\alpha = C\Delta t/\Delta x = 2/\pi$ la dispersión numérica es grande. Sin embargo para intervalos de tiempo para los cuales $\alpha < 0.2$ la dispersión se reduce.

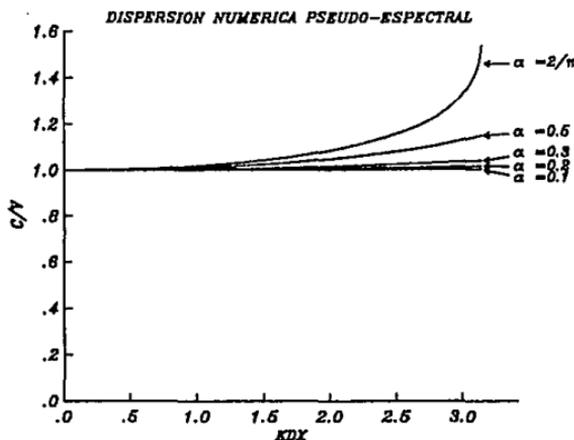


Fig (3.5.1) Relaciones de dispersión para el método pseudo-espectral y el caso unidimensional homogéneo de la ecuación de onda para distintos rangos de α .

Cuando la densidad o la velocidad varían espacialmente, la banda de frecuencia de la solución de la ecuación de onda es igual a la banda de frecuencia de la fuente. Esto es por que una multiplicación por la velocidad en el dominio espacial corresponde a una convolución en el dominio de la frecuencia espacial (número de onda). Así pues no todos los errores en esta situación pueden ser atribuidos a la dispersión numérica.

En cierta manera, la experiencia nos indica que por el uso de intervalos para los cuales $\alpha < 0.2$ en todos los puntos de la rejilla y limitando el contenido de frecuencia de la fuente al de la banda resultante por la rejilla, uno obtiene fuertes y claros eventos en las secciones de tiempo.

En la fig (3.5.2) se muestra una comparación de la relación de dispersión para un esquema de diferencias finitas 1-D usado por Alford et al (1974). Esta figura muestra que la dispersión en altas frecuencias es siempre grande excepto en el límite de estabilidad $\alpha = 1$.

MÉTODO PSEUDOESPECTRAL

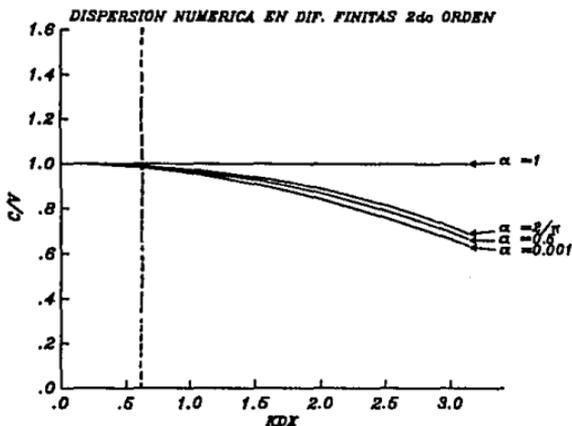


Fig (3.5.2) Relaciones de dispersión numérica para el método de diferencias finitas y las mismas condiciones de onda que para la fig. (3.5.1).

La línea punteada corresponde a una longitud de onda de 10 puntos de rejilla, la cual, se considera comúnmente como el número de onda más corto, que puede ser resuelto. En este número de onda la velocidad de fase es cerca del 2% menor que la rapidez de onda acústica.

Una ventaja adicional del método pseudo-espectral sobre el método de diferencias finitas es que para un medio en 2-D ó 3-D homogéneo, la dispersión es isotrópica. De este modo una componente pseudo-espectral de una frecuencia dada viajará a una misma velocidad de fase en todos los ángulos con respecto a la rejilla. Este generalmente no es el caso en diferencias finitas para el cual la dispersión es anisotrópica para las altas frecuencias. (Kosloff y Baysal, 1982)

RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

En este capítulo, se propone mostrar en dos partes los resultados obtenidos con el método estudiado. Para este propósito utilizaremos varios tipos de representaciones gráficas, las cuales facilitan la comprensión del evento simulado.

Algunas de estas maneras de representación son entre otras, simulaciones dinámicas del medio en cuestión, sismogramas sintéticos, mapas de contornos en tiempos reales, animaciones para casos de propagación bidimensional, diagramas frecuencia-espacio ($f-x$) y diagramas frecuencia-número de onda ($f-k$).

IV.1. Simulaciones bajo formulación velocidad-esfuerzo

-Caso unidimensional

En esta sección se presentan resultados para problemas unidimensionales, para un esquema que adopta la formulación velocidad-esfuerzo propuesta con anterioridad. Así como también para el caso bidimensional se estudia la propagación de ondas en medios homogéneos y heterogéneos cuando se tiene un gradiente constante de la velocidad de propagación. La formulación velocidad-esfuerzo permite evaluar diferentes condiciones de frontera; como rígidas, libres y absorbentes. Aunque el método permite una gran versatilidad en combinaciones de las condiciones de los problemas, los resultados que se muestran, pertenecen sólo a casos bien definidos.

R AVILA CARRERA

La fig (4.1.1) muestra los perfiles espaciales, para distintos tiempos, de un medio sometido a una fuerza puntual situada en la parte central del medio. Los bordes del medio son rígidos para el caso de los dos perfiles en (a), es decir se impone ahí desplazamiento nulo (esto se hace también para unos pocos puntos ficticios en los extremos, usualmente 4 o 5 son suficientes), en cambio para los dos perfiles mostrados en (b), el borde del lado derecho representa una frontera libre, la cual proporciona una respuesta de dos veces el valor del desplazamiento en esos puntos, como se muestra en los sismogramas sintéticos obtenidos para los mismos casos en la *continuación* de la misma figura. El modelo que es utilizado se ilustra a la derecha de cada caso. Aquí es donde se observan más claramente los efectos de la heterogeneidad en cuanto a los cambios de velocidad y de amplitud de la onda, así como también los de los bordes.

Puede apreciarse que a medida que las ondas se propagan hacia zonas de menor velocidad, las amplitudes de las velocidades de las partículas aumentan y las formas de onda se modifican. Ello es evidencia de dispersión de ondas y es más claro cuando se observa la información representada mediante sismogramas sintéticos. Para este caso, estos se muestran en la fig (4.1.1, *continuación*). Este tipo de formulación permite obtener soluciones de distintos tipos de fronteras y variaciones más complicadas en el gradiente de la velocidad o la inhomogeneidad del medio, esto es necesario para lograr representaciones más aproximadas en un medio físico de interés.

Más adelante se muestra la fig (4.1.2) en la cual se presentan algunas simulaciones con los mismos casos, de variación en tipo de fronteras y de velocidades de propagación del medio. Ahora se observa que cambia notoriamente la manera de propagación de la onda por la posición de la aplicación en la fuente puntual. También se muestran los sismogramas sintéticos obtenidos para este caso.

R AVILA CARRERA

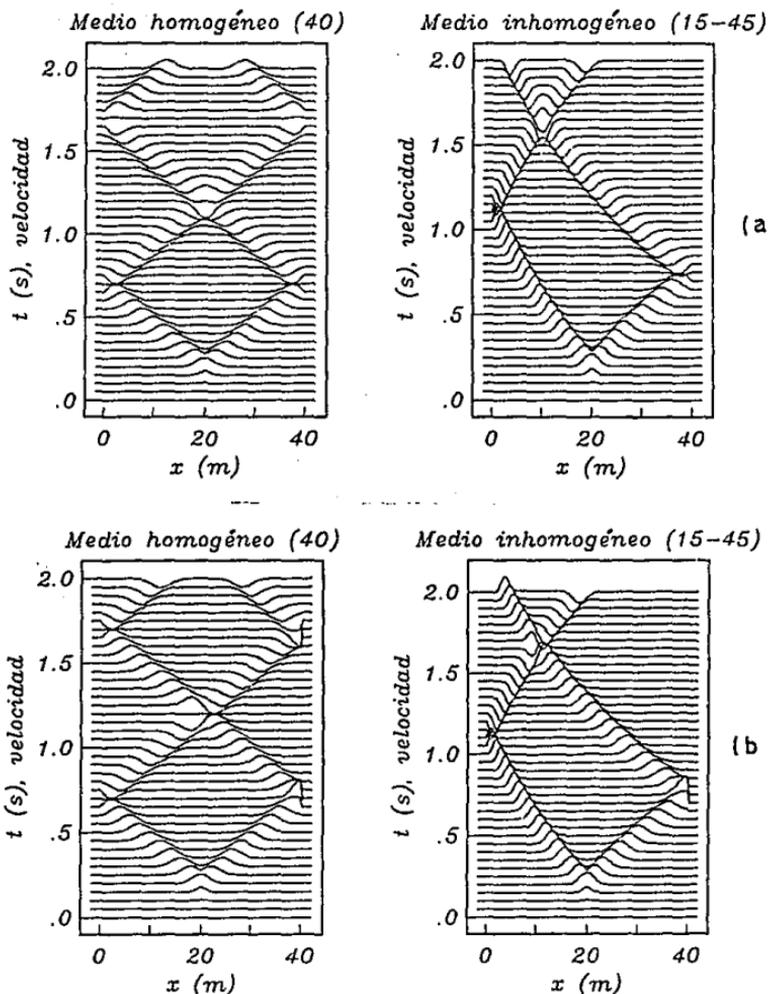


Fig (4.1.1) Simulación dinámica de la propagación de una onda en un medio, homogéneo y heterogéneo, sometido a una carga puntual centrada, con fronteras (a) rígido-rígida y (b) rígido-libre.

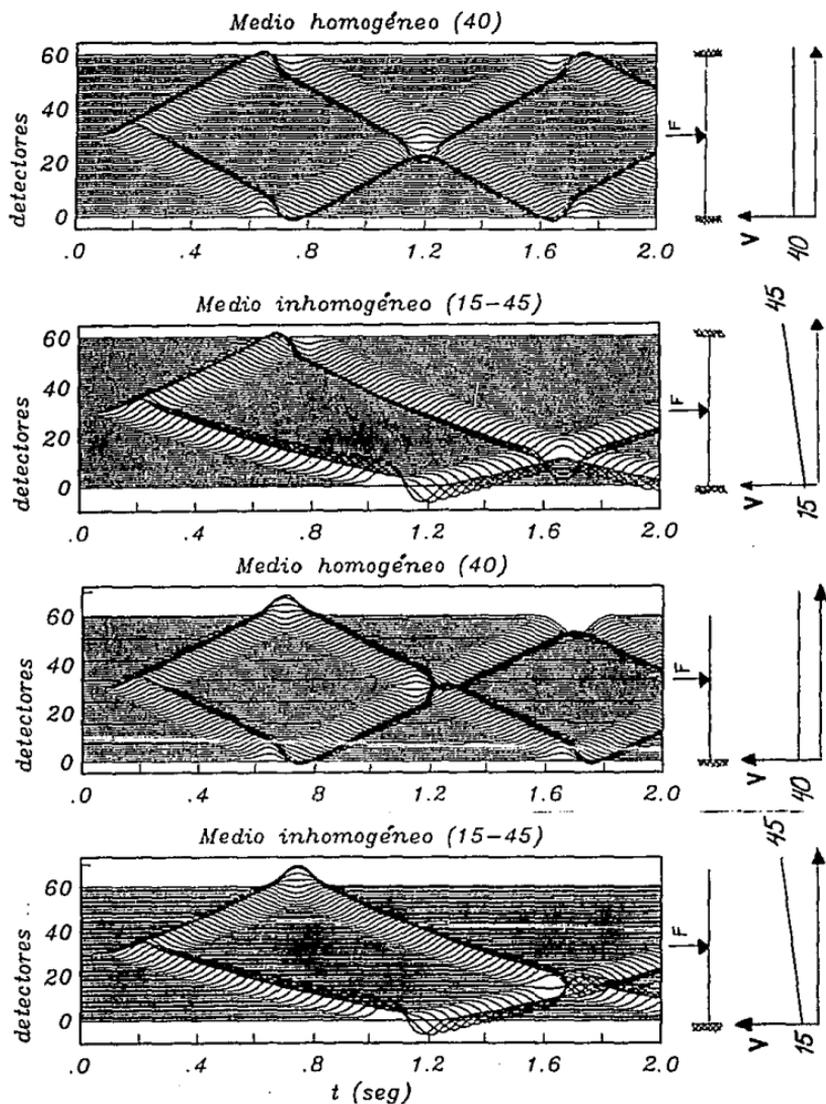


Fig (4.1.1) continuación

R AVILA CARRERA

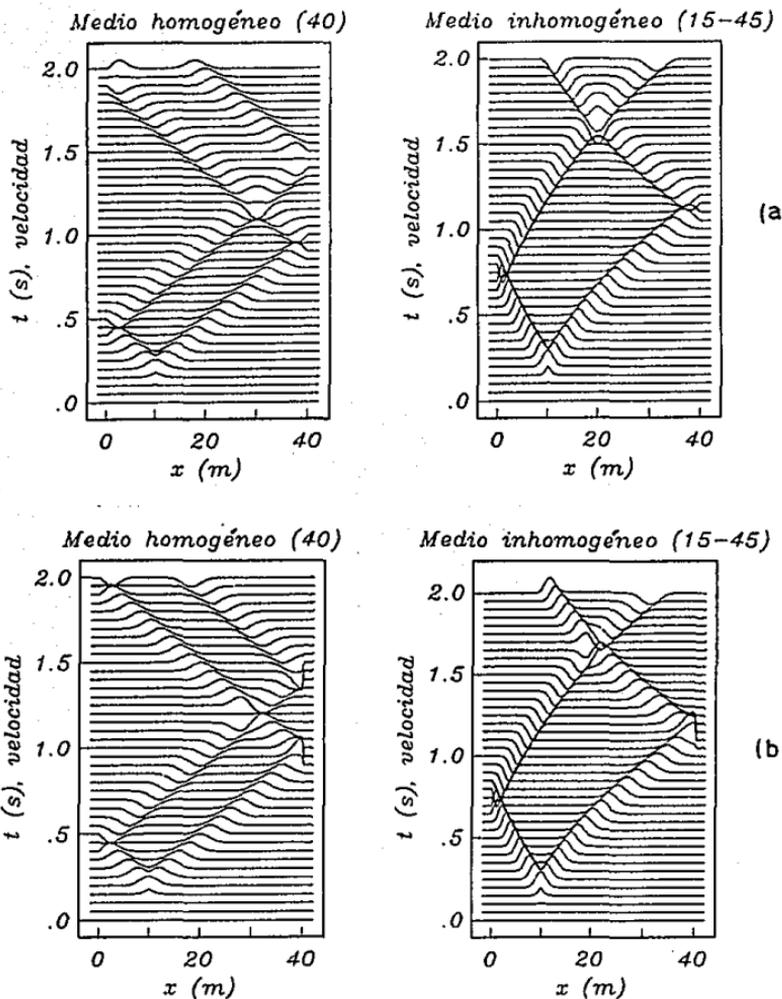


Fig (4.1.2) Simulación dinámica de la propagación de una onda en un medio, homogéneo y heterogéneo, sometido a una carga puntual descentrada a la izquierda, con fronteras (a) rígida-rígida y (b) rígida-libre.

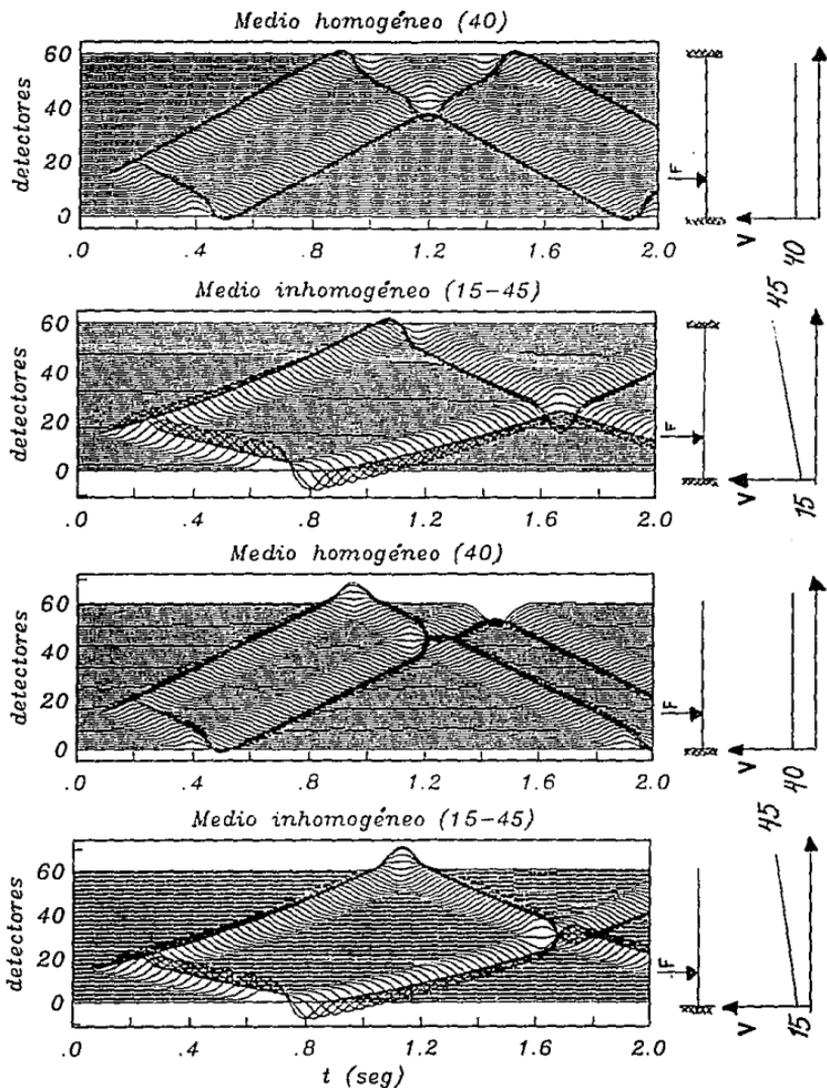


Fig (4.1.2) continuación

RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

-Fronteras absorbentes

Se obtienen condiciones de frontera absorbente en la simulación numérica de ondas para minimizar las reflexiones provenientes de los bordes del dominio de cálculo. De esta manera se puede efectuar eficientemente la propagación de ondas acústicas y elásticas en un medio limitado. La condición de frontera absorbente que se utiliza en este trabajo se basa en una aproximación de tipo paraxial de la ecuación de onda escalar (R Clayton y B Engquist, 1977) que resulta computacionalmente económica, simple de aplicar y reduce las reflexiones sobre un amplio rango de incidencias.

Uno de los problemas más persistentes en las simulaciones numéricas del fenómeno de onda son las reflexiones artificiales que se introducen en las orillas de la malla de cálculo. Estas reflexiones son las cuales eventualmente propagadas hacia adentro enmascaran la solución verdadera del problema de un medio infinito. Así pues es de interés el desarrollo de condiciones de frontera que hagan al perímetro de la malla transparente y al movimiento de las ondas continuo, de otra manera el número de puntos de las mallas de cálculo tendría que ser mucho mayor.

La manera de integrar este tipo de aproximación en la ecuación de onda escalar, es efectuar la sustitución de la parte temporal de la ecuación de onda, por un operador diferencial aproximado que incluye un factor Q y relacionado con el factor de amortiguamiento Q , como se formuló anteriormente, (ver cap 3), este operador diferencial o también llamado fórmula del telegrafista proporciona el amortiguamiento artificial que requiere el medio y que se controla sobre la malla por medio del factor Q que provee una variación cúbica en un intervalo previamente definido que representará la frontera absorbente.

Aquí se presenta un tipo de solución de condiciones de frontera que está basado en un tipo de aproximación paraxial de la ecuación modificada de onda que se resuelve con el esquema de malla alternada y diferencias finitas anteriormente propuesto. Se puede encontrar una discusión de varios tipos de operadores pseudo-diferenciales, para una clase general de ecuaciones diferenciales, en Engquist y Majda (1977). La característica principal de la aproximación paraxial que se explota aquí, es que la propagación hacia afuera del campo de ondas puede ser separada del movimiento hacia adentro. A lo largo de la frontera entonces la formulación que adopta la inclusión de aproximaciones paraxiales por medio de factores que intervienen en la solución de la ecuación de onda, pueden usarse para modelar sólo la energía que se mueve hacia afuera y con esto reducir las reflexiones. La condición de frontera absorbente que se adopta en la formulación velocidad-esfuerzo es muy estable y com-

putacionalmente eficiente en eso ella requiere la misma cantidad de trabajo por cada punto evaluado en la malla para la aplicación de diferencias finitas, como lo hace toda la ecuación de onda.

Generalmente 4 o 5 puntos son suficientes para lograr absorber la energía de una onda incidente. La fig (4.1.3) muestra una historia de tiempo para un ejemplo como los vistos anteriormente. Aquí se muestra la aplicación de una fuerza puntual con variación gaussiana, sobre un medio homogéneo y heterogéneo lineal, con fronteras rígida a la izquierda del medio y otra absorbente en la parte derecha. Puede observarse la manera de como se propaga la onda en ambos la dos del medio y sus respectivas respuestas al llegar a los bordes. Usando este tipo de frontera absorbente se logra una excelente eliminación de reflexiones, por el hecho de que se evaluaron 6 puntos en el borde de absorbencia, en este caso.

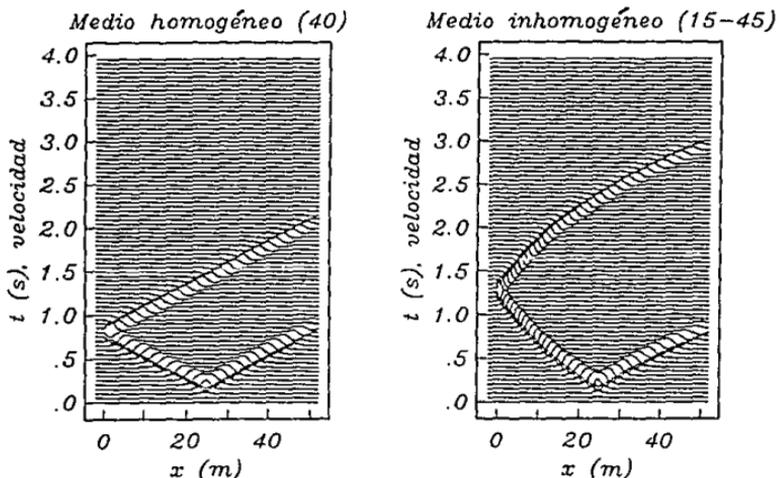


Fig (4.1.3) Simulación dinámica de la propagación de una onda en un medio, homogéneo y heterogéneo, sometido a una carga puntual centrada, con fronteras rígida a la izquierda y absorbente a la derecha.

RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

-Caso bidimensional SH

Se estudió también la respuesta de un modelo bidimensional escalar en el que se supusieron bordes rígidos ante una carga puntual con una posición definida dentro de un medio homogéneo como se muestra en la fig (4.1.4)

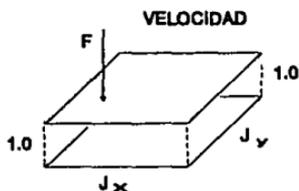


Fig (4.1.4) Distribución de las velocidades para un medio homogéneo bidimensional.

La fig (4.1.5) muestra la distribución bidimensional de las velocidades de las partículas para seis tiempos diferentes de visualización. Se observan claramente los efectos de la distorsión y las formas caprichosas que adoptan los contornos al momento de la interacción con las fronteras rígidas propuestas para este caso. Nótese que en este ejemplo los frentes de onda no son irregulares y se conservan debido a la homogeneidad del medio de propagación.

En particular este medio de velocidades homogéneas se excita con una fuente puntual con variación temporal gaussiana similar a la de los casos unidimensionales, sólo que para dos direcciones. La rejilla es cuadrada de 32 puntos por lado y puede observarse que aunque la densidad de puntos de la malla no es muy grande, el método proporciona una muy buena resolución en los mapas de contornos y se puede observar muy claramente la distribución de la energía y las formas que por las reflexiones adquieren las ondas, aparte de una buena rapidez de cálculo y tiempo de cómputo.

Con mallas de mayor resolución y con un ajuste de propiedades físicas en zonas de interés para la malla se podrían obtener resultados que acercaran más las aproximaciones numéricas a las respuestas reales mediante esta técnica pseudo-espectral.

R AVILA CARRERA

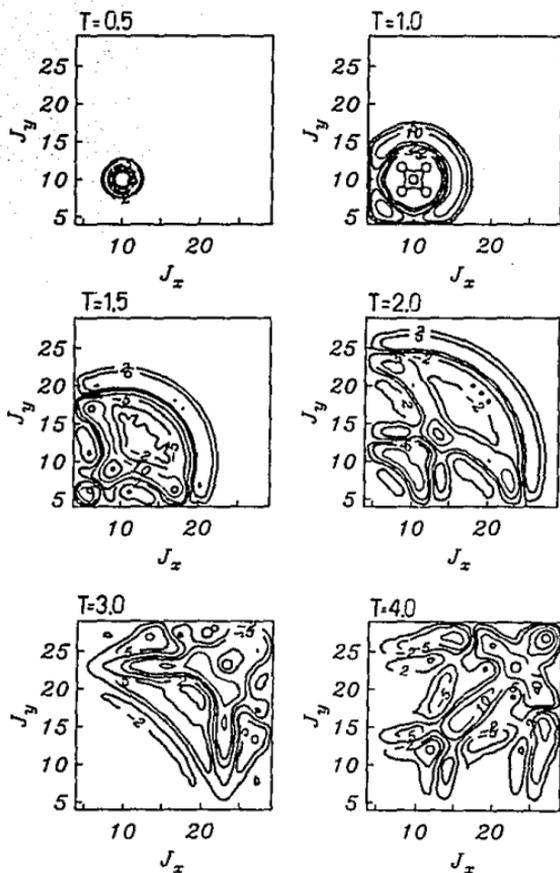


Fig (4.1.5) Distribución bidimensional de las velocidades de las partículas en un medio homogéneo para un intervalo de tiempo de 0 a 4 segundos para seis tiempos de visualización.

RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

En seguida se muestra la respuesta temporal de un modelo bidimensional escalar similar al anterior, sólo que en este caso el medio presenta un gradiente de velocidad en una sola dirección, como se muestra en la fig (4.1.6), en esta también se suponen fronteras rígidas, ante una carga puntual con una posición definida.

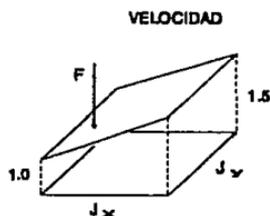


Fig (4.1.6) Distribución de las velocidades para un medio bidimensional con gradiente.

En la fig (4.1.7) se proporciona una secuencia temporal en contornos, en la que se representa la distribución de velocidades de las partículas en una secuencia de cuatro intervalos de tiempo. Aquí se denotan claramente los efectos de la interacción del movimiento con las fronteras y los frentes de onda presentan irregularidades y antisimetría debido a la heterogeneidad lineal del medio. Realizando un análisis más detallado de este resultado, podemos notar que en las direcciones donde la velocidad disminuye, las amplitudes de las ondas aumentan, esto se refleja en la forma y valor de los contornos en esa dirección. Por otra parte para la dirección en la cual la velocidad del medio es mayor, se puede observar que la propagación es más rápida y que los contornos reflejan menores valores de amplitud, todo esto es por efectos dispersivos de la energía de las ondas. Esta figura se propone ejemplificar los efectos de la heterogeneidad lineal del medio, de acuerdo con los distintos grados de variación de la velocidad en la dirección de J_x . Para esto se muestran cuatro tiempos de visualización con un intervalo de 0.5 seg entre cada uno de ellos, a distintos gradientes, el primer bloque corresponde a un gradiente como el ilustrado en la fig (4.1.6), el segundo bloque corresponde a un gradiente en el extremo derecho de J_x de dos, y el tercero a uno de tres veces la velocidad del extremo izquierdo. Se logra observar aquí que los contornos se tornan más difusos cuanto mayor es el valor del gradiente de velocidad.

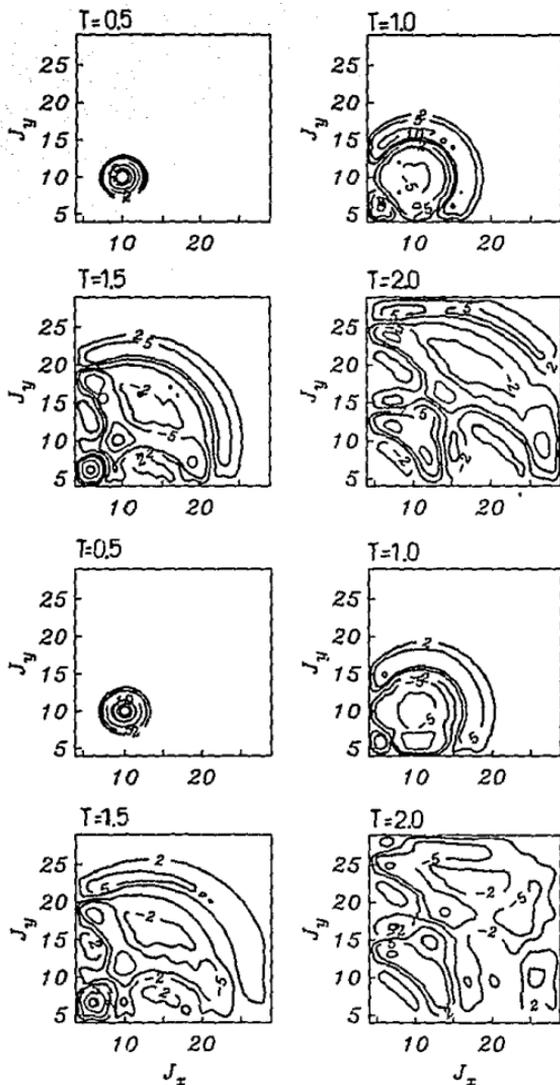


Fig (4.1.7) Distribución bidimensional de las velocidades de las partículas en un medio con gradiente lineal en la dirección J_x , para cuatro tiempos de visualización en 1-1.5, 1-2.0 y 1-3.0, para un intervalo de tiempo de 0 a 2 segundos.

RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

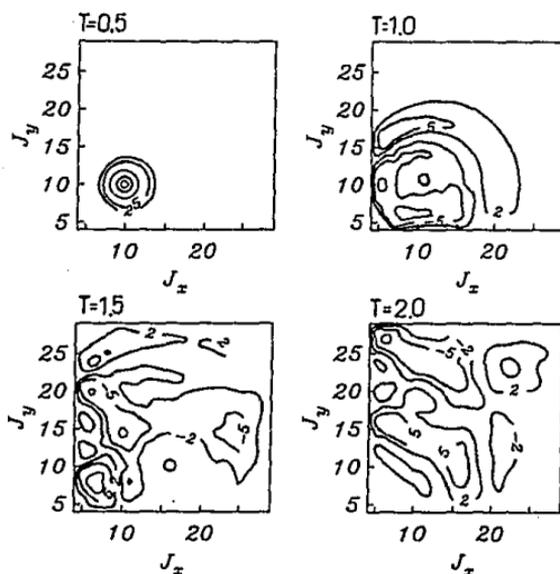


Fig (4.1.7) continuación.

-Medio heterogéneo

Se realizaron algunas pruebas de precisión a la respuesta de un medio con gradiente lineal de la velocidad con el método pseudo-espectral y un algoritmo analítico que utiliza funciones de Green (Sánchez-Sesma et al, 1992), con fines comparativos. La solución analítica propone un medio con gradiente de velocidad constante en donde los rayos y frentes de onda para una fuente lineal SH resultan ser circunferencias, las cuales definen coordenadas bipolares que tienen reglas de transformación definidas y correspondientes con coordenadas rectangulares, ver fig (4.1.10). Utilizando la teoría de rayos, se puede obtener una expresión sencilla para la función de Green en el dominio del tiempo, que resulta ser fácilmente programable y calculable en una computadora personal.

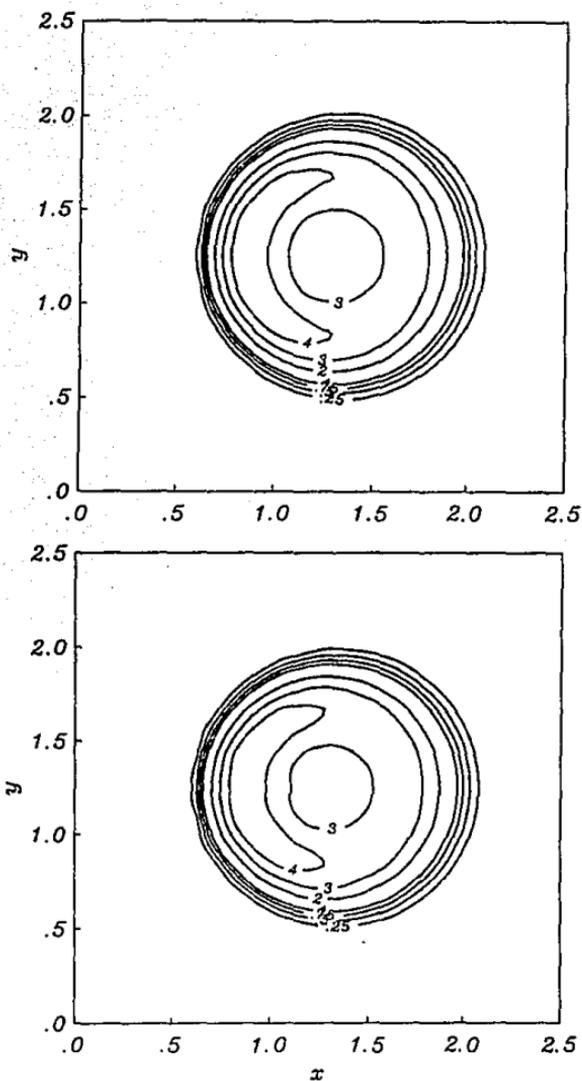


Fig (4.1.8) Distribución de las velocidades para un tiempo de visualización de $t=0.5$ seg obtenidos por el método pseudo-espectral arriba, y por una solución con funciones de Green abajo, para un medio con gradiente de 1-3.

RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

En la fig (4.1.8) se proporcionan dos mapas de distribución de velocidades obtenidos con el método pseudo-espectral arriba y con la fórmula de Green abajo, tomados en un tiempo $t=0.5$ para un medio con gradiente de velocidad constante de 1-3, como en el caso de la fig (4.1.7, *continuación*); para este ejemplo se utilizaron las mismas consideraciones en el medio para lograr representar la respuesta con los distintos algoritmos mencionados. Se puede observar en esta figura la excelente sensibilidad de ambos algoritmos al cambio de los valores de la velocidad en la malla y por esto su buen acuerdo.

A continuación se muestra la fig (4.1.9), donde se describe la propagación de una onda sujeta a un medio de características similares al anterior sólo que aquí se proveen cuatro tiempos diferentes de visualización dentro de una misma gráfica, para observar la respuesta numérica del método pseudo-espectral y la analítica de la función de Green. También aquí se puede determinar la similar respuesta que ofrecen ambas formas de cálculo, que en este caso se apoyan en los cuatro tiempos de visualización de la propagación.

Como una forma de verificación en la comparación de los cálculos anteriormente mencionados, se procedió a obtener simogramas sintéticos en una línea de detectores paralela a un eje de referencia z y mostrar en mapas de iso-amplitudes en contornos, el tiempo de arribo de los niveles de referencia esperados para la propagación de la onda como se muestra en la fig (4.1.10), en la parte superior se muestra la rejilla con el eje z de referencia y la distribución de los detectores para un intervalo normalizado de -6 a $.6$ a una distancia de 0.4 del eje z , y en la parte inferior se muestran los simogramas sintéticos ó mapas de distancia contra tiempo para distintos niveles de referencia en las amplitudes detectadas para un par coordenado de tiempo y espacio.

Las figuras anteriormente mencionadas se denotan como soluciones numéricas para las calculadas con el método pseudo-espectral y analíticas para las calculadas con la función de Green en tiempo como ya se ha mencionado, con el objeto de hacer resaltar la eficiencia del algoritmo numérico que se presenta en este trabajo, ya que la rapidez en los cálculos y reducción de los tiempos de cómputo resultaron ser muy similares en ambos casos para las mismas simulaciones.

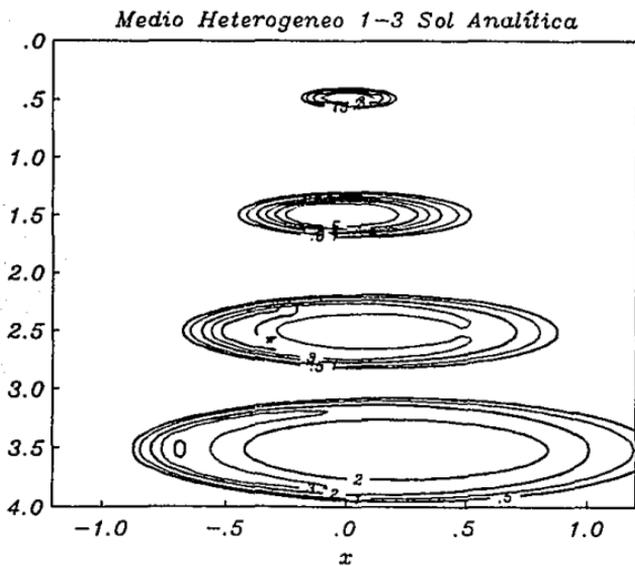
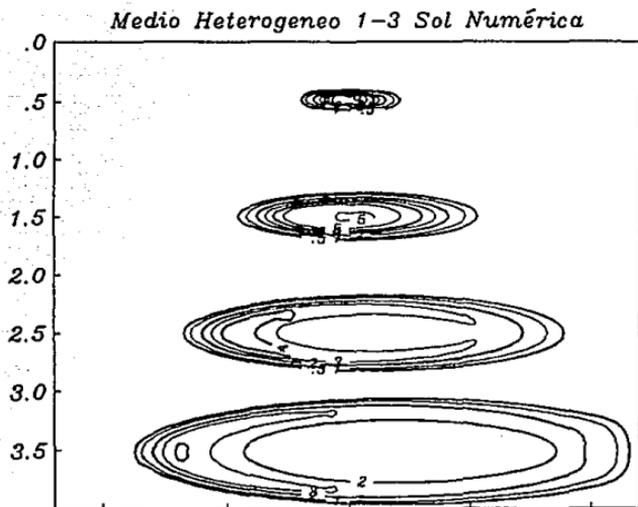
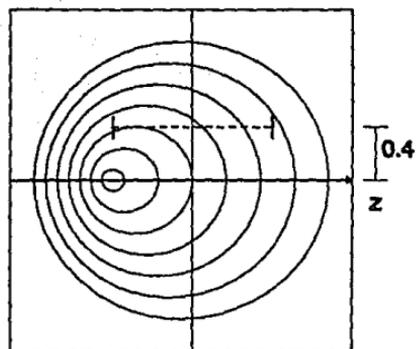


Fig (4.1.9) Mapas de espacio-tiempo para la propagación de una onda en un medio con gradiente de velocidad 1-3 en la dirección x , para cuatro tiempos de visualización. Obtenidos con el método pseudo-espectral en la parte superior y con una fórmula de Green en la parte inferior.



-1.2

1.2

Sol Numerica

Sol Analitica

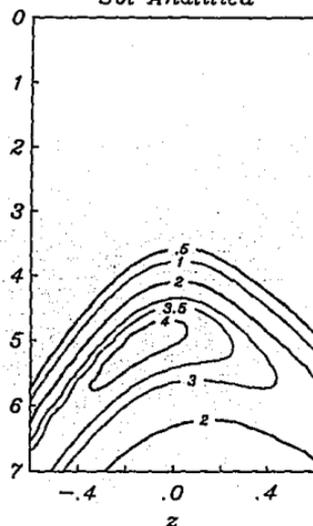
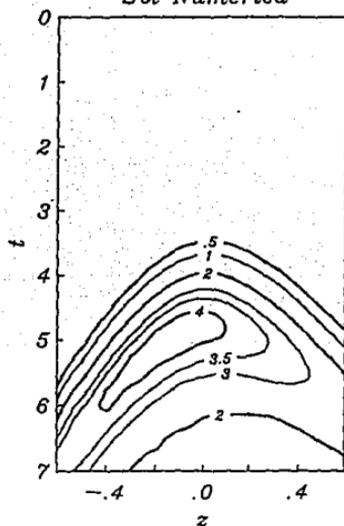


Fig (4.1.10) Sismogramas sintéticos para niveles de referencia definidos en las amplitudes de la onda, para un arreglo de detectores paralelo a un eje z de referencia como se muestra en la parte superior.

R AVILA CARRERA

-Caso P y SV

Hasta ahora se han realizado algunos experimentos numéricos con el fin de calcular una solución para el problema elástico y la superficie libre. Para este caso se compara el método pseudo-espectral y la solución de Garvin (1956) como referencia. Los ejemplos que se presentan aquí corresponden a casos bidimensionales homogéneos como los de la fig (4.1.5). Se muestran los simogramas sintéticos para un receptor con una posición definida y sus dos componentes de movimiento U horizontal y W vertical.

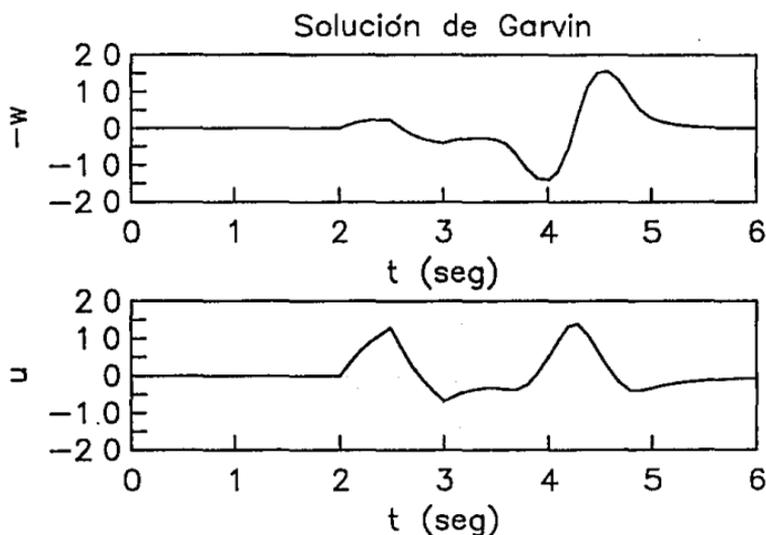


Fig (4.1.11) Simograma sintético obtenido con la solución exacta (Garvin), para dos componentes de desplazamiento, horizontal u y vertical $-w$.

Los cálculos presentan amplitudes dentro del rango correcto. Además, el componente vertical se acerca mucho a la solución exacta pero el horizontal es algo distinto; estas diferencias se deben a la dispersión numérica, pues estamos en el límite de

RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

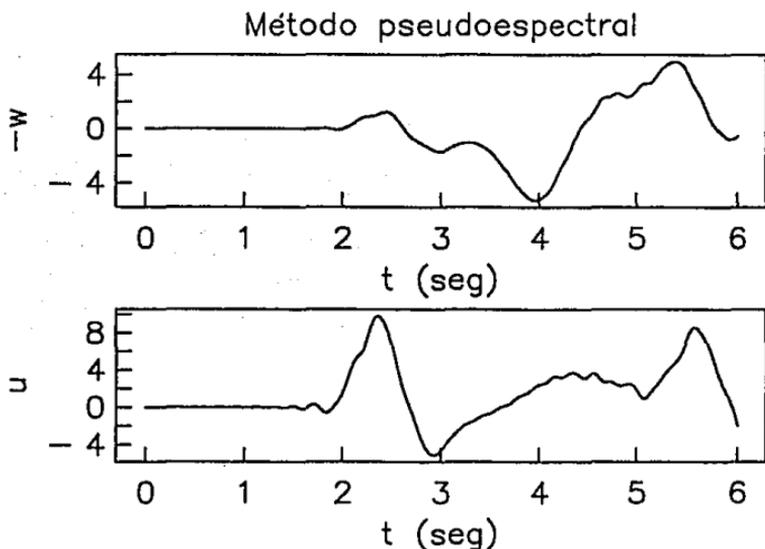


Fig (4.1.12) Sismograma sintético obtenido con el método pseudoespectral en dos componentes de desplazamiento, horizontal u y vertical $-w$.

estabilidad y a las reflexiones de las fronteras laterales e inferior que contaminan la solución.

La condición de superficie libre para el método pseudo-espectral se cumple con el solo hecho de considerar $\sigma_{yy}=0$ y $\sigma_{xy}=0$, a partir de la superficie. El método es muy sensible a la manera de usar el corrimiento en las mallas de velocidad y esfuerzo cuando se calculan las derivadas. Estos deben de ser consistentes con la definición de la malla alternada (staggered). Si se usa $\exp(+i\omega/2)$ la derivada centrada $j+1/2$ (entre j y $j+1$) se almacena vectorialmente en la posición j . Si en cambio se usa $\exp(-i\omega/2)$ la derivada centrada $j+1/2$ (entre j y $j+1$) se almacena en la posición $j+1$ (Si se realiza la transformada de Fourier con [-] y se antitransforma con [+] en la FFT).

R AVILA CARRERA

Todo esto debe tomarse en cuenta en los cálculos pues de otra manera se cometen serios errores, sobre todo al tratar la superficie libre. Los cálculos presentados en las figs (4.1.11) y (4.1.12) se realizarán en una computadora del tipo PC con un procesador 80386 y una velocidad de procesamiento de 33 Mhz donde este ejemplo se calculó en casi 1.5 horas. Lo que significa que cálculos más complicados en 2D y 3D, podrían trabajarse sin problemas en una *Work-Station* e inclusive en una supercomputadora del tipo CRAY.

IV.2. Respuesta sísmica de depósitos de suelo blando con geometría irregular.

En esta sección se presentan resultados numéricos para problemas en los cuales se consideran diferentes geometrías, combinaciones de velocidades del semiespacio y del depósito y ángulos de incidencia. Se comparan los resultados con soluciones publicadas calculadas con otros métodos.

-Valle triangular

La fig (4.2.1) muestra el modelo de depósito aluvial de forma triangular sometido a incidencia vertical de ondas SH. Como señal incidente se utilizó un pulso de Ricker con período característico $t_p=1$ s. Los resultados fueron comparados con los obtenidos por soluciones construidas con funciones de Green escalares (Paolucci et al, 1992).

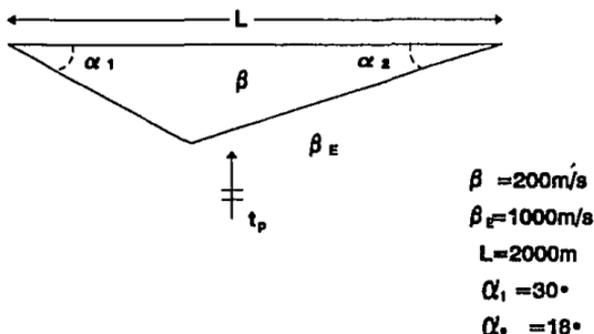


Fig (4.2.1) Valle aluvial triangular sometido a una incidencia normal de ondas SH con un pulso de Ricker de período característico $t_p=1$ s.

R AVILA CARRERA

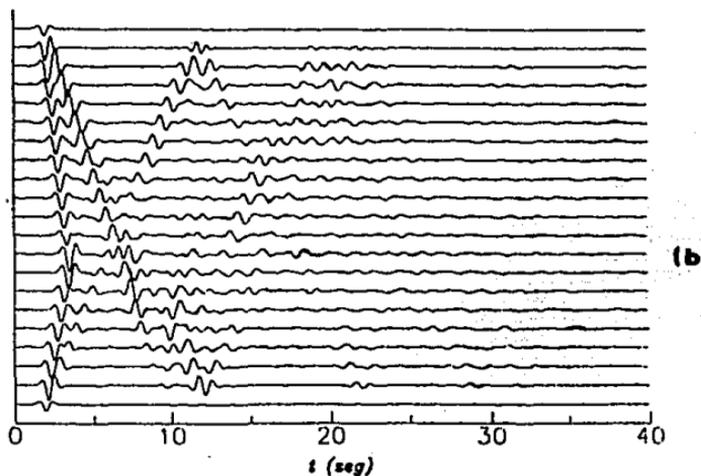
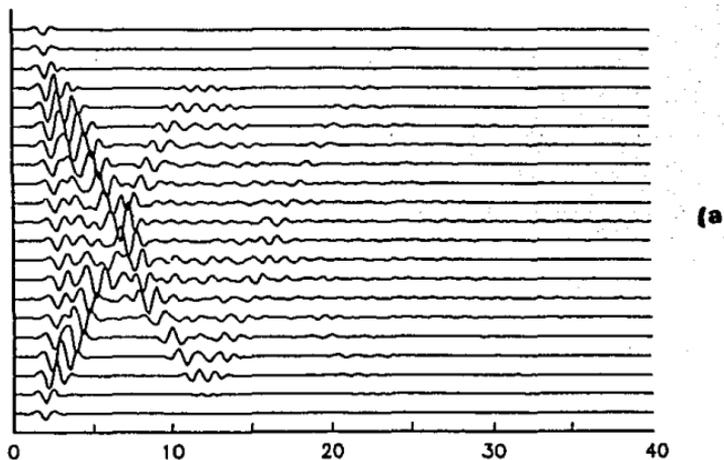


Fig (4.2.2). Comparación de los sismogramas sintéticos para el modelo de la Figura (4.2.1). Los puntos de observación están igualmente espaciados sobre la superficie con una separación $\Delta x = 100m$. (a) método propuesto, (b) método de las funciones de Green.

R AVILA CARRERA

En la fig (4.2.2) se presentan los sismogramas sintéticos obtenidos con ambos métodos. Se aprecian algunas diferencias de amplitud en la señal en los receptores de los extremos, pero en general, el acuerdo es satisfactorio. El tiempo de cálculo requerido por esta técnica para 5 modos en una PC486 a 40 MHz, fue de 1 min. En contraste con la formulación con funciones de Green escalares (Paolucci *et al*, 1992) requirió de una hora.

-Valle trapezoidal

Se realizó otra comparación con un método de análisis bidimensional utilizando funciones de Green (Kawase y Aki, 1989) para un valle de forma trapezoidal con 1 km de profundidad y 10 km de largo en la superficie, que se muestra en la fig (4.2.3), bajo la incidencia vertical de un frente de ondas SH planas.

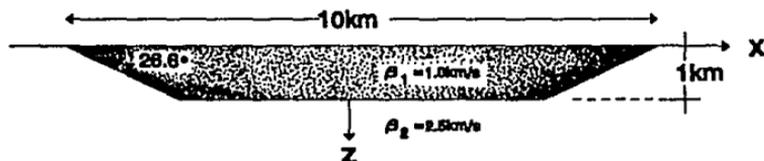


Fig (4.2.3) Depósito de geometría trapezoidal con 10 km de ancho y 1 km de profundidad. Las velocidades de las ondas S para el depósito y el semiespacio son 1 km/s y 2.5 km/s respectivamente.

Los resultados obtenidos con ambos métodos se presentan en la fig (4.2.4). Las historias de tiempo obtenidas con ambos métodos son muy similares. El método de análisis bidimensional mediante el uso de funciones de Green resulta ser más costoso en recursos y tiempo de cómputo que el método pseudo-espectral. La diferencia es más notoria para análisis en alta frecuencia.

RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

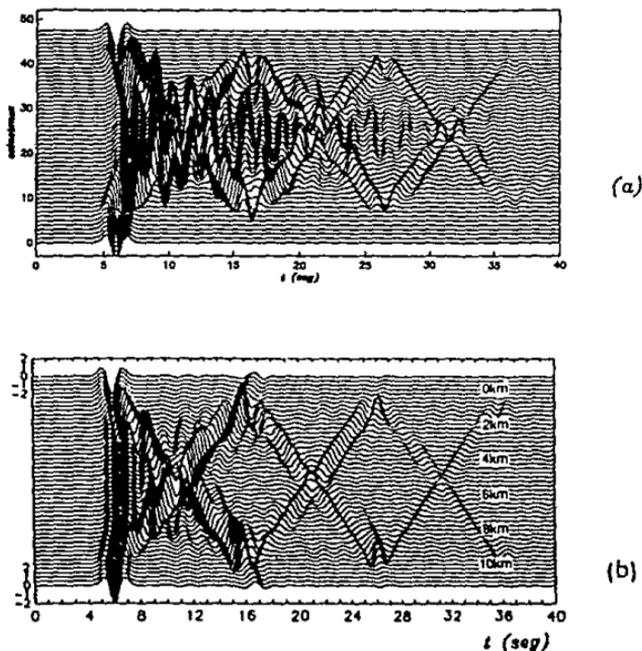


Fig (4.2.4) (a) Sismograma sintético a lo largo de la superficie de depósito de la fig (4.2.3) para una incidencia vertical de ondas SH. La frecuencia característica del pulso de Ricker es de 0.5 Hz (2 s).

(b) El mismo caso que (a) sólo que obtenido por un método de análisis bidimensional empleando funciones de Green utilizado por Kawase y Aki (1989).

Con el propósito de identificar la velocidad de fase y las características modales de la propagación se calcularon diagramas en el plano $f-x$ (frecuencia-espacio) y $f-k$ (frecuencia-número de onda). Estos diagramas se obtuvieron al aplicar la transformada rápida de Fourier en el espacio y el tiempo a la respuesta del modelo. La dependencia en la frecuencia se normalizó con respecto al espectro de Fourier de la señal incidente. La fig (4.2.5) muestra diagramas de este tipo, en un rango de frecuencias

R AVILA CARRERA

de 0 a 1.2 Hz, cuando inciden verticalmente ondas *SH* en el valle ilustrado en la fig (4.2.3). En ellos pueden identificarse la respuesta unidimensional, el modo fundamental y el primer modo superior al unir puntos de máxima amplitud en el diagrama. Se observa que las amplificaciones máximas ocurren en los bordes y dentro de una porción que crece con la frecuencia. Este límite local corresponde a la resonancia "local" de un modelo 1D. Así, cuando la propagación de las ondas es estimulada hacia las zonas más profundas, las amplificaciones son también controladas por las ondas superficiales, preferencialmente hacia las zonas más profundas. Las ondas superficiales pueden generarse virtualmente en cualquier sitio del depósito.

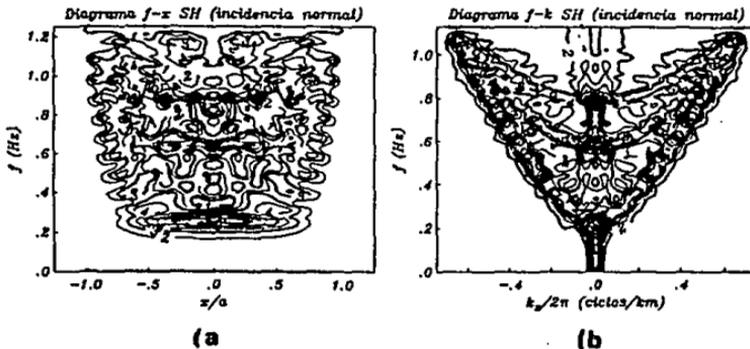


Fig (4.2.5) (a) Mapa de contornos de la función de transferencia en el dominio frecuencia-espacio (f - z) ante incidencia vertical de ondas *SH*, para el modelo de la figura (4.2.3). (b) Mapa de contornos de la función de transferencia en el dominio frecuencia-número de onda (f - k), para el mismo modelo de la figura (4.2.3).

-Valle parabólico

Se calculó también la respuesta sísmica de un modelo de valle parabólico (Sánchez-Sesma et al, 1993) ante incidencia de ondas *SH*. La velocidad de propagación de ondas de corte para el semiespacio y el depósito se consideró de 2.5 km/s y 1 m/s respectivamente (fig (4.2.6)).

RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

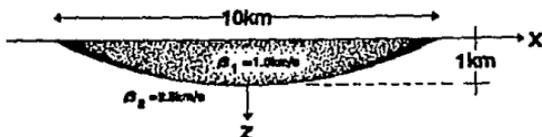


Fig (4.2.6). Depósito aluvial de sección parabólica con velocidades de las ondas S para el semiespacio y el depósito de 2.5 km/s y 1 km/s respectivamente. Se muestra una incidencia de un frente de ondas SH planas con un ángulo $\gamma = 60^\circ$.

La fig (4.2.7) muestra las historias de tiempo para el caso de incidencia vertical e incidencia oblicua ($\gamma = 60^\circ$) respectivamente para el modelo de la fig (4.2.6).

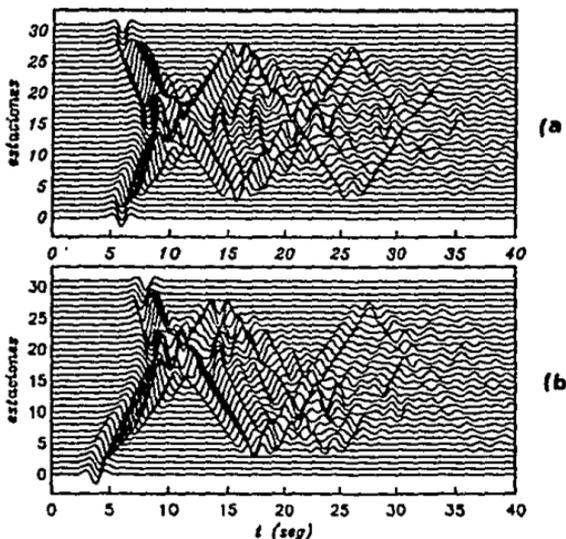


Fig (4.2.7). (a) Sismogramas sintéticos a lo largo de la superficie del depósito de la fig (4.2.6) para una incidencia vertical ($\gamma = 0^\circ$) de ondas SH. El periodo característico del pulso de Ricker $t_p = 2 \text{ s}$. (b) Se muestra el mismo caso que (a) sólo que para una incidencia oblicua ($\gamma = 60^\circ$).

R AVILA CARRERA

El efecto que el ángulo de incidencia de ondas *SH* produce en la respuesta sísmica del valle es el de disminuir su amplitud en el lado donde inciden, e incrementarla en la zona opuesta. Los resultados para un ángulo de incidencia $\gamma = 60^\circ$ se presentan en la fig (4.2.8). En este caso, aparecen dos frecuencias (0.4 y 0.52 Hz) para las cuales se tienen amplitudes importantes (de 45 y 30 veces la amplitud de la señal de entrada, respectivamente). En los diagramas *f-x* y *f-k* correspondientes a este ejemplo (fig (4.2.8)) se pueden identificar los modos de propagación y las velocidades de fase. En particular, los diagramas *f-k* describen la distribución de energía en este espacio. En el caso de un ángulo de incidencia de ondas *SH* de 60° los diagramas *f-x* y *f-k* permiten identificar el modo fundamental y los tres primeros modos superiores de propagación de ondas de Love. Este resultado denota la importancia del ángulo de incidencia en la conversión de ondas de cuerpo a modos superiores de propagación de ondas superficiales.

RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

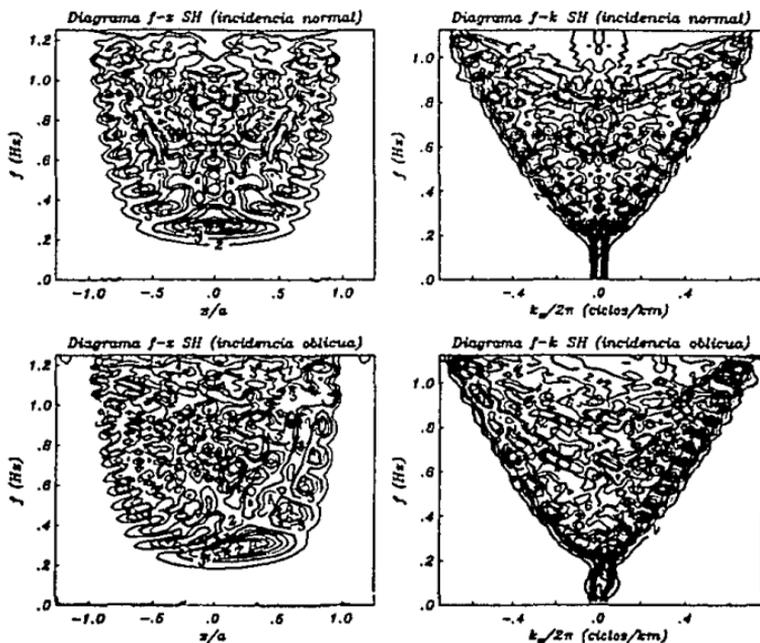


Fig (4.2.8) (a) Mapas de contornos de la función de transferencia en el dominio (f - x) a la izquierda y (f - k) a la derecha, para una incidencia de ondas SH normal ($\gamma = 0^\circ$). (b) Mapas de contornos de la función de transferencia en el dominio (f - x) a la izquierda y (f - k) a la derecha, para una incidencia de ondas SH oblicua ($\gamma = 60^\circ$).

IV.3. Aplicación simológica del método Pseudo-espectral.

Uno de los principales retos de las simulaciones numéricas, como ya se ha señalado, es lograr una representación lo más cercana posible al fenómeno sísmico, tal y como sucede en nuestro entorno. Como sabemos, esto no ha resultado una tarea fácil de resolver, sin embargo hasta ahora se cuentan con modelos y métodos numéricos que han logrado representar correctamente algunos modelos de la tierra. En los últimos diez años la solución de la propagación en medios heterogéneos ha logrado captar la atención de los sismólogos. El análisis de los efectos de la topografía y las interfaces internas concentran un amplio rango de herramientas analíticas y numéricas. Estos problemas han sido atacados de distintas formas como los de discretización directa en tiempo y espacio para las diferencias finitas (Alterman and Karal, 1968, Boore, 1972, Alford et al, 1974) y métodos de elementos finitos (Smith, 1975), la descomposición espectral que permite a diferentes métodos depender sobre como sea manejada la dependencia del espacio. Transformar al dominio del número de onda horizontal, discretizando y truncando, como en el método de Aki-Larner (Aki and Larner, 1970), en el cual el campo dispersivo se describe como una combinación lineal de ondas planas que tienen números de onda horizontales discretos. Por una ecuación integral de frontera aproximada en el dominio del espacio, puede obtenerse una representación completa del campo dispersor a lo largo de las fronteras. Los coeficientes se determinan por un método de mínimos cuadrados después de discretizar las fronteras (Sánchez-Sesma y Esquivel, 1979).

Una alternativa para los métodos directos ó de onda-completa descritos hasta aquí, son las técnicas asintóticas conocidas generalmente como *teoría de rayos* (Cerveny et al, 1977). Algunos métodos lateralmente heterogéneos que revolucionaron la óptica, fueron propuestos sísmicamente por Hong y Helmberger (1978) quienes tomaron en cuenta la curvatura de los frentes de onda en las interfaces de un medio 2-D, mientras que Lee y Langston (1983) manejaron el caso 3-D introduciendo dos curvaturas llamadas, curvaturas principales.

Como una aplicación más realista del problema de las simulaciones numéricas que se han presentado hasta ahora, a continuación se muestran algunos resultados obtenidos con la formulación modal del método de Fourier (pseudo-espectral), ante la incidencia de una señal real a diferentes tipos de valles aluviales. Estos ejemplos se muestran con el objeto de verificar la sensibilidad del método a las altas frecuencias y de manera muy general y a gran escala, la predicción en la respuesta sísmica de un valle de estas características, como podría ser el Valle de México.

RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

-Respuesta pseudo-espectral ante una señal real.

En los resultados del apartado IV.2 se mostraron algunos casos específicos de distintas geometrías y propiedades de valles aluviales, ante la incidencia de una onda plana proveniente del semiespacio con una variación preescrita y por un pulso de Ricker de cierta amplitud y frecuencia. Con el afán de proponer el método aquí presentado como una excelente opción de solución del problema de modelación y simulación numérica de terremotos, a continuación se presenta la respuesta de los mismo tipos de valles de la sección IV.2, sólo que con una señal real incidente representada por un acelerograma, el cual se muestra en la fig (4.3.1). Este acelerograma fue registrado en la estación Tacubaya durante el sismo del 25 de Abril de 1989.

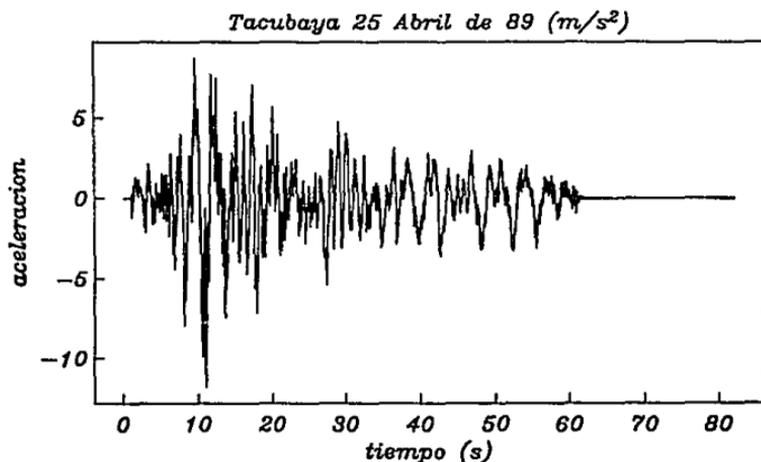


Fig (4.3.1) Señal real incidente en el Valle de México, registrada en la estación Tacubaya el 25 de Abril de 1989. $\Delta t=0.06$ y $n=4096$.

R. AVILA CARRERA

-Valle triangular

En la fig (4.2.1) se muestra un modelo de depósito aluvial triangular que se sometió a incidencia vertical de ondas SH. Ahora se muestra la respuesta en cuatro detectores a lo largo del valle en la fig (4.3.2) donde se utiliza como señal incidente el acelerograma que se muestra en la fig (4.1.3) sólo que con un número de muestras de $n=1024$ y $\Delta t=0.08$.

Tomando en cuenta que la señal de entrada se muestra en la parte inferior de esta figura y que la respuesta del primer detector ubicado en la base, que es rígida, es prácticamente la misma que la excitación como se esperaba, se puede observar que las trazas ubicadas dentro del depósito sufren un efecto de filtrado de altas frecuencias, debido a que se conservan las formas envolventes principales de la señal, y algunas frecuencias desaparecen, esto nos indica que el depósito funciona, como se denomina en sistemas digitales, como un filtro pasa bajas de la señal de entrada. Si se analiza este resultado desde el punto de vista sísmico, podemos tomar en cuenta que el depósito es sumamente sensible a los grandes períodos, es decir a las bajas frecuencias de las ondas incidentes y es donde el interés del riesgo sísmico debe centrarse.

Debido al contraste de velocidades en el depósito y el semiespacio, no es difícil observar la amplificación que sufren las aceleraciones dentro del depósito, ya que estas van desde 4 a 5 veces en sus partes más profundas. La asimetría del modelo nos sugiere una relación entre la amplificación de las ondas y la profundidad del medio, ya que se trata del caso de incidencia vertical. Podemos notar también algunas formas amplificadas que podrían asociarse con la onda superficial de Love en las trazas dentro del depósito alrededor de los 12 seg de registro.

-Valle trapezoidal

Se realizó otra prueba para un valle de forma trapezoidal con 1 km de profundidad y 10 km de largo en la superficie, que se muestra en la fig (4.2.3), bajo la incidencia vertical de un acelerograma como el que se ilustra en la fig (4.3.1).

RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

Los resultados obtenidos se presentan en la fig (4.3.3). Las historias de tiempo son muy similares a las del caso anterior, debido a que se presentan los mismos efectos como se esperaba. Para lograr observar los diversos efectos provocados por la geometría del medio, es necesario colocar un número mayor de trazas que nos proporcionen mayor continuidad del movimiento, pero debido a la complejidad de la forma de la onda incidente, esto resultó impráctico, por el acomodo y traslape de las trazas.

Resaltando que el medio es simétrico, y por tratarse de una incidencia vertical de ondas, se puede observar que las respuestas de las trazas obtenidas en los extremos del depósito, son idénticas y presentan menores valores de amplificación que la traza del acelerómetro en el centro.

Es prudente mencionar aquí la facilidad con la que se logran obtener estos resultados en cuanto a tiempo de cálculo y recusos de computo, debido a que estamos tratando un problema de frecuencias mayores a las que se pueden manejar con otros métodos. Esto hace ventajoso al método pseudo-espectral en las diferencias más notorias para el análisis en alta frecuencia.

-Valle parabólico

Como en el caso anterior, se calculó también la respuesta sísmica de un modelo parabólico de valle como el ilustrado en la fig (4.2.6), ante la incidencia de un acelerograma como el que se ilustra en la fig (4.3.1). La velocidad de propagación de las ondas para el semiespacio y el depósito se consideró de 2.5 km/s y 1 km/s respectivamente.

La fig (4.3.4) muestra las historias de tiempo para el caso de incidencia vertical e incidencia oblicua ($\gamma = 60^\circ$) respectivamente para el modelo de la fig (4.2.6). De la misma forma que para el caso anterior, se pueden observar los efectos de la simetría del depósito por la igualdad en la respuesta de las trazas ubicadas a los extremos del modelo, cuando se trata de una incidencia vertical de ondas. También se pueden identificar algunas formas, que se amplifican hacia el centro, que podrían asociarse a la onda superficial de Love en los 10 y 12 segs de registro.

R AVILA CARRERA

Se observa que el efecto del ángulo con el que las ondas inciden, produce una disminución de las amplitudes del lado donde incide primero el frente de la onda y un incremento en la zona opuesta. Los resultados para un ángulo de incidencia $\gamma = 60^\circ$ se presentan en la fig (4.3.4, *continuación*).

De la misma forma que como se realizó anteriormente para los ejemplos donde la incidencia era un pulso de Ricker, se pueden realizar los procesos para obtener los diagramas $f-x$ y $f-k$ correspondientes a este ejemplo e identificar los modos de propagación y las velocidades de fase, así como la distribución de energía en este espacio, pero estos resultan ser un caso no trivial para su análisis, debido a la complejidad del fenómeno real.

Estos últimos resultados que utilizan datos de registros reales, proveen ejemplos sencillos de las simulaciones numéricas de la propagación de ondas, causadas por temblores, que podrían lograrse para modelos más realistas. De esta forma se pueden simular las características del movimiento que adquiere un modelo aproximado a un medio real, cuando se ve afectado por un terremoto, antes de que uno similar ocurra.

RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

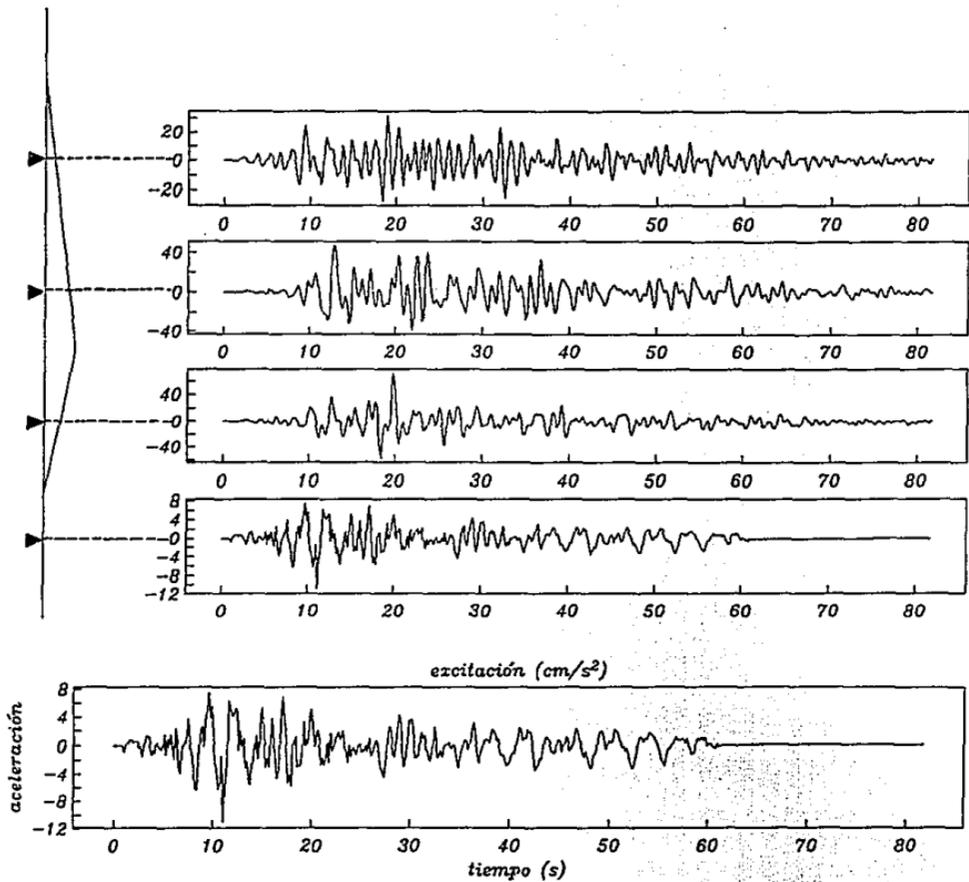


Fig (4.3.2) Siemogramas para el modelo de la figura (4.2.1). Los puntos de observación están igualmente espaciados sobre la superficie con una separación $\Delta x = 500\text{m}$. En la parte inferior se muestra la forma de onda excitadora que corresponde al acelerograma de la fig (4.3.1).

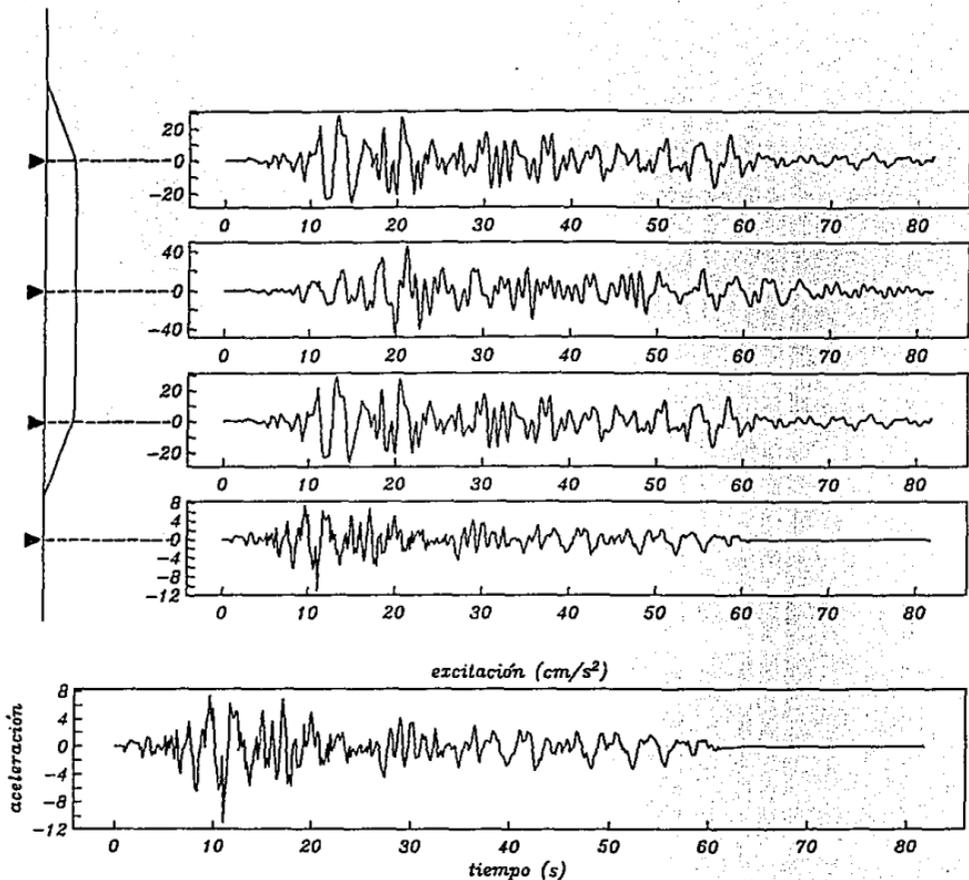


Fig (4.3.3) Sismograma a lo largo de la superficie de depósito de la fig (4.2.3) para una incidencia vertical de una acelerograma como el de la fig (4.3.1).

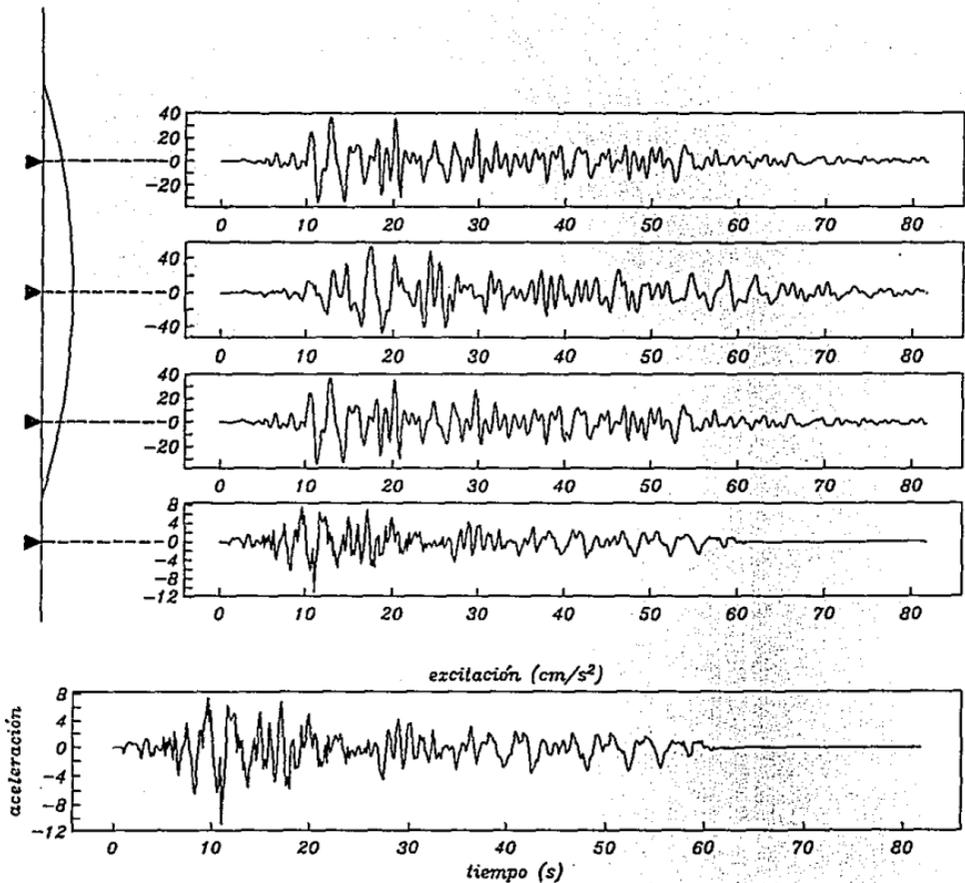
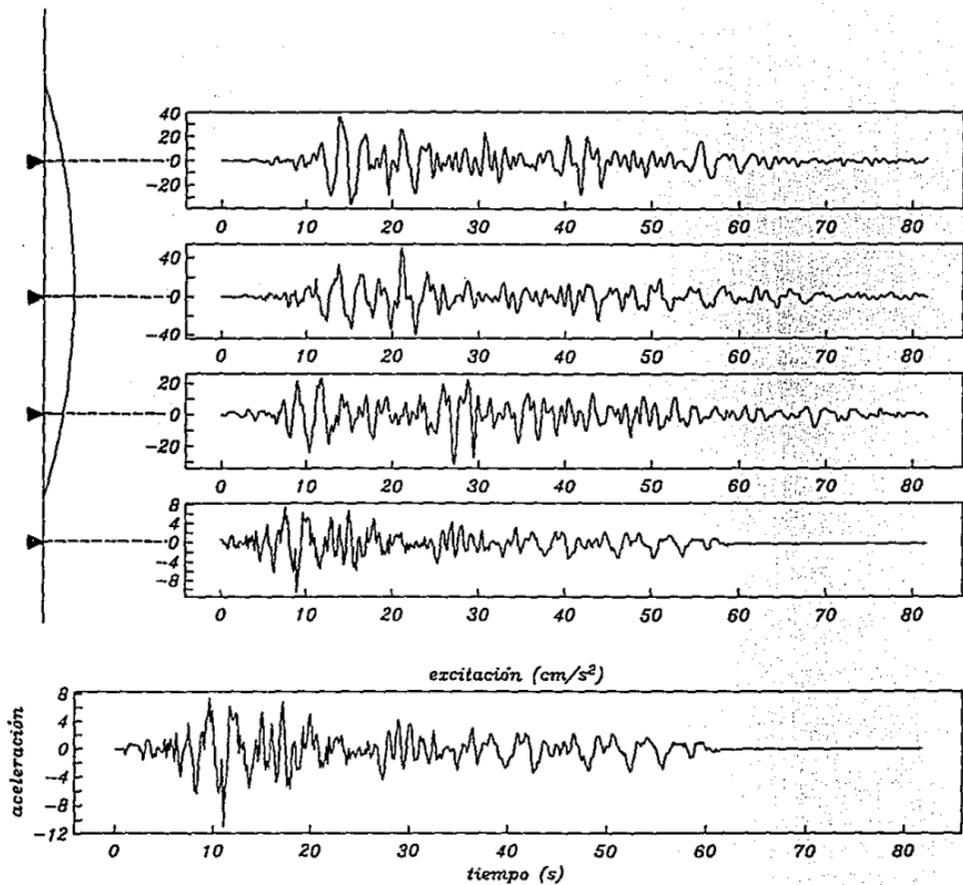


Fig (4.3.4) Sismograma a lo largo de la superficie del depósito de la fig (4.2.6) para una incidencia vertical ($\gamma = 0^\circ$) de un acelerograma como el mostrado en la fig (4.3.1).

Fig (4.3.4) continuación



R AVILA CARRERA

CONCLUSIONES

Se ha presentado al *método pseudo-espectral* como una opción en la modelación numérica del problema de propagación de ondas sísmicas y el estudio de los efectos de las condiciones locales en el movimiento superficial de depósitos de suelo blando en zonas urbanas. Como el caso de la ciudad de México. Para estos fines las simulaciones numéricas que se presentaron en este trabajo, estimaron las influencias de algunos de los factores que controlan los movimientos del terreno.

En este trabajo se han examinado simulaciones numéricas con un método el cual usa transformada de Fourier para calcular las derivadas espaciales de las variables de campo asociadas a la ecuación de onda, y diferencias finitas centrales para las derivadas en la parte temporal. Los operadores de derivación que se proponen, se han basado en el uso de una malla alternada en los dominios espacial y temporal para los parámetros de velocidad y esfuerzo. Esto permitió obtener resultados de alta resolución.

Con la técnica aquí presentada es posible hacer, para estructuras geológicas complejas, un modelado numérico muy aceptable y que permite tratar la ecuación de onda elástica, así como diversas condiciones de frontera. Su principal ventaja ha sido la buena resolución en altas frecuencias, ya que esta técnica requiere de una cantidad muy baja de tiempo y recursos de cómputo. Esto se debe a que el método sólo requiere de 2 a 3 puntos de muestreo por longitud de onda espacial, en contraste con otros métodos como el de diferencias finitas que requieren de un mínimo de 8. De esta

R AVILA CARRERA

manera, el método pseudo-espectral requiere 25 veces menos puntos de muestreo en 2-D y hasta 125 en 3-D. Por esto el método podría ser utilizado como alternativa en las simulaciones numéricas de la propagación de ondas.

La buena resolución que ofrece el método a las altas frecuencias constituye una de sus mayores ventajas, ya que puede ser utilizado en estudios de predicción sísmológica a través del análisis de la respuesta en modelos tridimensionales que resultarían muy interesantes para estudios de riesgo sísmico.

En este trabajo se han presentado principalmente dos tipos de formulaciones, una completamente numérica (velocidad-esfuerzo), la cual apoyada en un esquema de malla alternada (staggered) posee un gran potencial de solución en diversos tipos de medios y problemas en la frontera. Esta forma de solución discreta de la ecuación de onda provee de buenas aproximaciones tanto a lo que puede obtenerse con otros métodos como a soluciones exactas. La eficiencia del cálculo es bastante aceptable. Las precauciones que deben tenerse con respecto a la finura de la discretización son importantes, pero menos restrictivas que en otras técnicas.

Una limitante para este tipo de formulación ha sido la solución de la *superficie libre*, ya que el uso de una malla alternada no garantiza, hasta ahora, que las condiciones de la frontera se cumplan justamente en la posición correspondiente.

Por otro lado, se mostró una formulación en la que se expresa el campo de desplazamientos usando una expansión multi-modal analítica que controla la variación vertical localmente. Esta formulación usa una aproximación analítica en "modos locales", para describir las variaciones verticales del campo asociado a la ecuación de onda. Este acoplamiento de soluciones permitió estimar la respuesta de depósitos aluviales con geometría irregular suave y optimó el cálculo de las derivadas. Aquí se aplicó el método pseudo-espectral a las funciones de onda horizontales gobernadas por una ecuación de onda modificada y se verificó su estabilidad y extraordinaria eficiencia para problemas de valles aluviales.

En esta formulación se reflejan algunas hipótesis fuertes, como la de las geometrías, que deben ser suaves respecto de la longitud de onda. Se presentan resultados con base rígida y se desprecia la interacción entre el depósito y el semi-espacio, lo que restringe la aplicación del método pseudo-espectral a ciertos modelos y reduce su definición en la respuesta.

Así también, se mostraron algunos resultados de simulaciones de casos homogéneos y heterogéneos para SH, P y SV. Se ilustraron algunos resultados de la respuesta sísmica de depósitos de suelo blando mediante sismogramas sintéticos, diagramas $f-x$ (frecuencia-espacio) y $f-k$ (frecuencia-número de onda) que permitieron un análisis de la distribución de la energía durante el movimiento.

El método puede aplicarse para predecir el movimiento ocasionado por temblores en modelos que se aproximen a la realidad, bajo ciertas consideraciones. Esta técnica híbrida tiene un gran potencial que podría dar soluciones a los problemas del fenómeno sísmico y parcialmente a la prevención de desastres, aunque todavía se sigue explorando.

RECONOCIMIENTOS

Quisiera ofrecer un sincero agradecimiento al Dr Francisco José Sánchez Sesma por haberme hecho partcipe de sus conocimientos con apoyo, estímulo y gran amistad, así como sus comentarios, sugerencias y anotaciones para el desarrollo de este trabajo, que sin su ayuda no hubiese sido posible.

Debo extender mí agradecimiento a L E Pérez Rocha, J L Rodríguez Zúñiga, F J Chávez García y E Nava Alatríste, por sus valiosos comentarios y sugerencias para la finalización de este trabajo.

Agradezco el apoyo incondicional de mis compañeros y amigos J García, D A Alvarez Cuevas, J M Castillo Covarrubias, J Ramos Martínez, F Luzón Martínez y R Paolucci.

Agradezco al Instituto de Ingeniería de la UNAM por todas las facilidades otorgadas durante la elaboración de este trabajo.

Parte de este estudio fué realizado bajo el auspicio parcial de la Secretaría General de Obras del Departamento del Distrito Federal (DDF) y el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), (Proy 0523-T9109).

REFERENCIAS

Achebach, J.D., 1973. *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland and Am. Elsevier, Publ. Co. Great Britain.

Achebach, J.D., Gautesen, A.K., y McMaken, H., 1982. *Ray Methods for waves in elastic solids*. Pitman Advanced Publishing Program. Boston

Alford, R.M., Kelly, K.R., y Boore, D.M., 1974. *Accuracy of finite difference modeling of acoustic wave equations*: Geophysics, Vol. 39, pp 834-841.

Alterman, Z., y Karal, F.C., 1968. *Propagation of elastic waves in layered media by finite-difference methods*: Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 58, pp. 367-398.

Aki, K., y Larner, K.L., 1970. *Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves*; J. geophys., Res., Vol. 75, pp. 933-954.

Aki, K. y Richards, P.G., 1980. *Quantitative seismology*, W.H. Freeman, San Francisco.

Bard, P.Y. e Gariel, J.C., 1986. *The seismic response of two-dimensional sedimentary deposits with large vertical velocity gradients*. Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 76 pp. 346-366.

R AVILA CARRERA

- Bolt,A.B., 1978. *Earthquakes a primer*. W.H. Freeman and Co. U.S.A.
- Boore,D.M., 1972. *Finite-difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials*, in *Methods of computational physics* Vol. 12, pp 1-37, eds B. Alder, S. Fernbach, M. Rotenberg, Academic Press, London.
- Briham,E.O., 1974. *The Fast Fourier Transform*, Prentice Hall, Inc Englewood Cliffs, New Jersey.
- Bullen,K.E., 1963. *An itroduction to the theory of Seismology*. Third ed. Cambridge Univ. Press, N.Y.
- Cerveny,V., Molotkov,I.A. y PsenciK,I., 1977. *Ray method in Seismology*: Univ, Karlova, Praha.
- Clearbout,F.J., 1992. *Earth soundings analysis, Processing versus Inversion*. Blackwell Scientific Publ., Boston.
- Clayton,R. y Engquist,B., 1977. *Absorbing boundary conditions for acustic and elastic wave equations*. Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 67, pp. 1520-1540.
- Emmerich,H. y Korn,M., 1987. *Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields*. Geophysics, Vol. 52 1252-1264.
- Fornberg,B., 1975. *On a Fourier method for the integration of hyperbolic equations*, SIAM J. Num. Anal., Vol. 12, 509-528.
- Fung,Y.C., 1965. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- Fung,Y.C., 1977. *A first course in continuum mechanics*. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- Garvin,W.W., 1956. *Exact transient solution of the buried line source problem*, California Research Corporation, La Habra, Calif.
- Gazdag,J., 1981. *Modeling of the acoustic wave equation with transform methods*, Geophysics, Vol. 46, pp.- 854-859.

REFERENCIAS

- Hong, T.L., y Helemlberger, D.V., 1978. *Glorified optics and wave propagation in non planar structure*: Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 68., pp. 2013-2032.
- Kawase, H. y Aki, K., 1989. *A study on the response of a soft basin for incident S, P and Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in Mexico City*, Bull. Seism. Soc. Am. Vol. 79, 1361-1382.
- Kelley, K.R. y Marfurt, K.J., 1990. *Numerical Modeling of Seismic Wave Propagation*. Geophysics Reprint Series, No. 13 Soc. of Exploration Geophysiscs Tulsa.
- Kolmogorov, A.N., Aleksandrov, A.D., Lavrent'ev, M.A., 1963. *Mathematics its content, Methods, and Meaning*. Vol. 2. The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.
- Kosloff, D. y Baysal, E., 1982. *Forward modeling by a Fourier method*. Geophysics Res. Vol. 47, 1402-1412.
- Kreiss, H.O. y Olinger, J., 1972. *Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations*, Tellus, Vol. 24, pp.199-215.
- Lee, J.J., y Langston, C.A., 1983. *Tree dimensional ray tracing and the method of principal curvature for geometric spreading*: Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 73, pp. 765-780.
- Lysmer, J. y Drake, L.A., 1972. *A finite element method for seismology*, Ch. 6 en *Methods in Computational Physics 11, Seismology*, B Alder, S Frebach and B A Bolt, Editors, Academic Press, New York.
- Nava, A., 1987. *Terremotos, La Ciencia desde México*, Vol. 34, Fondo de Cultura Económica, México.
- Newland, D.E., 1980. *An introduction to random vibrations and spectral analysis*, Longman, London.
- Paolucci, R., Suarez, M. y Sánchez-Sesma, F.J., 1992. *Fast computation of SH seismic response for a class of alluvial valleys*, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 82, 2075-2086.
- Papoulis, A., 1962. *The Fourier integral an its applications*, Mac Grow Hill, New York.
- Press, et al, 1986. *Numerical Recipes*. Cambridge Press. London.

R AVILA CARRERA

Ramos-Martínez J y F J Sánchez-Sesma (1992). *Resonance characteristics in the seismic response of shallow alluvial valleys*, Proc. Int. Symp. Seismic Disaster Prevention, Centro Nacional de Prevención de Desastres, México, en prensa.

Sánchez-Sesma, F.J., 1987. *Site effects on strong ground motion*, Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dyn. Vol. 6, 124-132.

Sánchez-Sesma, F.J., y Esquivel, I.A., 1979. *Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves*: Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 69, pp. 1107-1120.

Sánchez-Sesma, F.J., Ramos-Martínez, J. y Campillo, M., 1992. *Seismic response of alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves: a boundary integral formulation*, Proc. 10th World Conf. Earthq. Engrg., 2, Madrid, España.

Sánchez-Sesma, F.J., Rodríguez-Zúñiga, J.L., Pérez-Rocha, L.E., Alvarez-Cuevas, D.A. y Suarez, M., 1992. *The seismic response of shallow alluvial valleys using a simplified model*, Proc. Int. Symp. Seismic Disaster Prevention, Centro Nacional de Prevención de Desastres, México, en prensa.

Sánchez-Sesma, F.J., Ramos, J. y Campillo, M., 1993. *An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves*, Earthq. Engrg. and Structl. Dyn.,

Smith, W.D., 1975. *The application of finite-element analysis to body wave propagation problems*. Geophys. J. Roy. Astr. Soc., Vol. 42, pp. 747-768.

Virieux, J., 1984. *SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite difference method*. Geophysics, Vol. 49, pp. 1933-1957.