UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN MECANISMO MICROECONOMICO PARA EL CRECIMIENTO ECONOMICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

HUGO ZARCO JASSO

MEXICO, D. F., 1994

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el **pasante(s)** Hugo Zarco Jasso

con número de cuenta 8637951-1 con el Título:

"Un mecanismo microeconómico para el crecimiento económico"

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Actuario

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
Dr.	Gabriel	Vera Ferrer	
Director de Tesis			
M. en C.	Sergio	Hernández Castañeda	
M. en C.	Paloma	Zapata Lillo	Paloma Zapata
Mat.	Agustín	Cano Garcés	
Suplente			
M. en C.	Jorge	Ruiz Moreno	Jorge Ruiz M
Suplente			

A mis Padres

Indice

Introducción 1

Capítulo 1: *I.Planteamiento Principal* 5

II.Equilibrio Económico y Decisiones Individuales 8

Capítulo 2: *Interpretación Personal* 58

Conclusiones 63

Bibliografía 65

INTRODUCCION

El objetivo primordial de la teoría del crecimiento consiste en explicar los determinantes de las tasas de crecimiento de un país y las razones de las diferencias entre el ingreso per cápita de los distintos países.

Específicamente definimos el crecimiento económico como la expansión de la producción nacional potencial (o PNB potencial).

Existen dos aproximaciones básicas para explicar el crecimiento económico. La primera aproximación, realizada por Solow y Swan en 1956, presenta un cambio técnico exógeno como fuente de crecimiento. La segunda aproximación, la cual ha recibido mayor atención recientemente, permite a las fuentes de crecimiento económico ser endógenamente determinadas, y en este sentido, formaliza la relación existente entre la asignación o distribución de las fuentes de producción de bienes , la producción de conocimiento y la inversión en medios de producción. Consecuentemente existen algunos estudios que caracterizan la estructura y funcionamiento de los factores que generan el crecimiento económico. Por ejemplo, en los trabajos publicados por Paul Romer en 1986 y 1989, se considera al conocimiento como un insumo de la producción con productividad marginal creciente tomando en cuenta cambios tecnológicos endógenos. Además, ofrece evidencias empíricas a largo plazo que muestran un crecimiento mas rápido en países con economías *grandes* que aquellos con economías *pequeñas*.

En 1988 Robert Lucas considera y compara tres modelos: un modelo enfatiza la acumulación de capital físico y el cambio tecnológico, otro caracteriza la acumulación de capital humano a través de un sistema *escolarizado* y otro modelo enfatiza la acumulación de capital humano, especializado por medio del aprendizaje originado por la experiencia.

En 1990 Aghion y Howitt encontraron que la tasa de crecimiento depende tanto de la acumulación endógena de capital humano especializado como de la tecnología desarrollada en la producción de bienes.

Estos estudios han iniciado un análisis formal en base a las proposiciones de Adam Smith en 1776, y Allyn Young en 1928, en las cuales un incremento en la división del trabajo originado por el progreso tecnológico creará crecimiento económico. Sin embargo, de acuerdo a los trabajos publicados recientemente, **la división del trabajo no sólo está basada sobre una expansión y mejoramiento de los factores de producción a través de un cambio técnico, sino también sobre el nivel de especialización de los individuos.**

En el presente trabajo, basándonos principalmente en las investigaciones realizadas por Jeff Borland y Xiaokai Yang estudiaremos estos dos aspectos de la división del trabajo y analizaremos su relación con el crecimiento económico.

En el modelo a considerar, cada persona es un consumidor-productor, y en consecuencia, el crecimiento en la división del trabajo está representado como un incremento en la proporción de la producción de cada individuo que es vendida a otra gente, y simultáneamente como un incremento en la proporción del consumo de cada individuo que es comprado a otra gente.

Asumimos que cada individuo tiene una función de producción Cobb-Douglas la cual no es transferible y exhibe rendimientos crecientes con respecto a la especialización o experiencia adquiridas. Por otra parte, el consumo de bienes de cada persona puede efectuarse mediante su propia producción o comprando a otros individuos, pero si éstos son comprados, se incurre en un costo de transacción.

La decisión más importante para cada individuo dentro del modelo es elegir su nivel de especialización. El conjunto de tales decisiones individuales es endógenamente determinado por la división del trabajo en la economía.

Con la estructura de mercado y el nivel de especialización endógeno, el número de productores de cada bien varía a través del tiempo. En éste modelo la economía evoluciona desde una situación de autosuficiencia por parte de cada individuo hasta un estado en el cual existe un alto grado de división del trabajo.

Durante este proceso, los efectos de la especialización y la experiencia originada por la práctica, incrementan el intercambio comercial individual, y consecuentemente, tal evolución amplía la extensión del mercado y aumenta la dependencia comercial. De la misma manera, dependiendo del grado de evolución de la división del trabajo, la tasa de crecimiento del ingreso per cápita crece conforme transcurre el tiempo.

A medida que la división del trabajo evoluciona, existen mayores posibilidades de crear en el mercado situaciones que podrían caracterizar a un monopolio como consecuencia del aprendizaje y especialización en la producción de un determinado bien en el mercado, sin embargo, estas situaciones no surgirán debido al supuesto de operar en $t = 0$ la totalidad del comercio en un mercado *futuro*, es decir, se establecen contratos que no pueden ser renegociados posteriormente.

Dado que todas las decisiones son efectuadas al tiempo $t = 0$, todos los individuos son inicialmente *idénticos*, y en el momento en el cual los precios de equilibrio de los bienes son determinados no existen factores que propicien la aparición de un monopolio.

Con base en las investigaciones publicadas anteriormente, el presente trabajo trata de explicar y facilitar la comprensión de la teoría del crecimiento económico en términos de la división del trabajo, considerando que frecuentemente existe dificultad en analizar o comprender dichos conceptos cuando se consultan estudios en un nivel de investigación.

Por otra parte, el estudio de la división del trabajo ha sido tratado previamente en diferentes contextos. En 1988 James Baumgardner y Sunwoong Kim respectivamente, desarrollaron diferentes explicaciones sobre el grado de división del trabajo en distintos mercados. A partir de dos diferentes formas de organización de los trabajadores, *cooperación y no cooperación*, se producen resultados divergentes. Por ejemplo, el nivel de especialización se incrementa junto con el número de productores bajo cooperación o bien cuendo existe un comportamiento maximizador del ingreso per cápita por parte de los individuos en conjunto, o en caso contrario puede decrecer bajo condiciones de no cooperación, es decir, cuando se asume que cada trabajador intenta maximizar su ingreso individual independientemente de las decisiones de producción de los demás individuos.

Adicionalmente sus trabajos presentan modelos analíticos sobre la especialización en el trabajo, en los cuales, dados los requerimientos por diversos empleos de las empresas, los trabajadores deciden invertir más en su especialización y menos en la extensión o tamaño de su mercado de trabajo.

Los anteriores estudios han endogeneizado el nivel de especialización en una economía en equilibrio estático, sin embargo, el nivel de especialización dentro de un modelo dinámico de equilibrio general no ha sido considerado.

Por lo tanto, el objetivo central de este trabajo es presentar un modelo dinámico de equilibrio general en el cual el crecimiento económico es explicado por la evolución de la división del trabajo considerando un nivel de especialización endógeno.

Para lograr este objetivo, el trabajo está dividido de la siguiente forma: En el capítulo 1 se presenta el modelo, se estudian las decisiones de los individuos con respecto a su nivel óptimo de especialización, y se analizan las características del equilibrio dinámico. En el capítulo 2, de acuerdo a un punto de vista personal, interpreto algunas de las propiedades e implicaciones que el modelo proporciona, y de la misma manera, hago notar algunas de las limitaciones del mismo. Finalmente, se sintetizan las principales conclusiones del trabajo y se describe brevemente su relación con algunos trabajos previos.

CAPITULO 1

I. Planteamiento principal

Consideremos una economía con m consumidores y, con la finalidad de simplificar el análisis, supongamos m bienes de consumo. Definimos x_{it} como la cantidad del bien i con que se provee cada individuo al tiempo t; análogamente con x^s_{it} y x^d_{it} representamos las cantidades vendidas y compradas para cada tiempo t.

De acuerdo a lo anterior, asumimos que la fracción $1-K_t$ representa un costo de transacción el cual depende de el número de socios comerciales, es decir $n_t - 1$, considerando que cada individuo vende un bien, compra $n_t - 1$ bienes y n_t representa el número de bienes comercializados. La cantidad del bien i para consumo está determinado por $x_{it} + K_t x^d_{it}$. En base a esto, la función de utilidad al tiempo t para cada individuo es la siguiente

$$U_t = \prod_{i=1}^{m} \left(x_{it} + K_t x^d_{it}\right) \tag{1}$$

la cual caracteriza una función de utilidad Cobb-Douglas con parámetros $\alpha_i = 1$, para $i = 1 \dots m$.

Es preciso notar que si el nivel de consumo de un determinado bien i es nulo, tambien lo será el nivel de utilidad de dicha persona, originando la necesidad de poseer una determinada cantidad de cada bien. Por otra parte, como consecuencia de la igualdad en los parámetros α_i, cada bien tiene la misma participación en la utilidad de cada individuo. Con respecto a la posible transferencia de la función de utilidad de una persona a otra, es factible asignar a cada individuo una función específica debido a que la decisión mas importante para cada individuo dentro del modelo es elegir su nivel de especialización.

Con la finalidad de analizar el nivel de eficiencia de las transacciones supongamos que la distancia media entre cada persona y sus socios comerciales será una función creciente de el número de sus socios comerciales y de la distancia entre sus vecinos. Si el costo de transacción $1 - K_t$ se incrementa conforme aumenta la distancia media entre una persona y sus socios comerciales entonces K_t es una función decreciente del número de bienes a comercializar n_t. Específicamente definimos

$$K_t = \frac{k}{n_t} \qquad \text{con} \qquad 0 < k < 1,$$

en donde k caracteriza la eficiencia de las transacciones, esto es, la fracción disponible en cualquier compra decrece en menor proporción que con la que crece el número de bienes n_t.

Además, es necesario especificar que todas las transacciones en ésta economía se establecen a través de contratos firmados en éste momento (t=0) para futuras negociaciones. Asumimos también que dichos contratos no pueden ser renegociados en periodos posteriores y que tanto el horizonte del mercado como el horizonte de posibles decisiones de cada individuo son infinitos.

Considerando lo anterior, especificamos la función objetivo para el problema de decisión correspondiente a cada individuo como:

$$U = \int_0^\infty U_t \, e^{-rt} dt \tag{2}$$

donde r representa una tasa de descuento subjetiva. Esta función caracteriza la preferencia por diversas opciones de consumo en el futuro.

La producción correspondiente a cada individuo implica un aprendizaje originado por la práctica el cual se incrementa conforme transcurre el tiempo:

$$x_{it} + x_{it}^s = (L_{it})^a \qquad a > 1, \tag{3}$$

donde

$$L_{it} = \int_0^t l_{i\tau} d\tau. \tag{4}$$

además

$$\sum_{i=1}^{m} l_{it} = 1 \qquad \text{con} \qquad 0 \leq l_{it} \leq 1 \qquad i = 1 \ldots m. \tag{5}$$

La cantidad $x_{it} + x^{s}_{it}$ representa el nivel de producción del bien i al tiempo t; si l_{it} representa el trabajo invertido en producir el bien i al tiempo t entonces L_{it} es el trabajo acumulado en la actividad i hasta el tiempo t. De aquí que L_{it} represente el nivel de experiencia, conocimiento, o capital humano acumulado en producir el bien i hasta el tiempo t.

Considerando la primera igualdad, y como consecuencia de la condición $a > 1$, obtenemos un nivel de producción creciente conforme se incrementa el nivel de experiencia o conocimiento, es decir, en el largo plazo el nivel de experiencia origina un mayor incremento en el nivel de producción en comparación con el nivel de experiencia acumulado en un corto plazo.

Es preciso observar que la constante a no depende del tiempo t ya que de lo contrario no existiría un único parametro de referencia que nos permita apreciar el incremento en el aprendizaje originado por la práctica a lo largo del tiempo.

Por otra parte, la restricción (5) especifíca que proporción dentro del trabajo total invertido es destinada a la producción de cada bien, además es igual a uno en cualquier tiempo t como consecuencia de la imposibilidad de transferir parte del trabajo invertido a la producción que corresponde a otro individuo.

II. Decisiones individuales y equilibrio económico

En esta sección comenzaremos a argumentar el supuesto referente a que la totalidad del comercio está determinado en un mercado (*futuro*) que opera al tiempo $t = 0$, suficiente para asegurar el comportamiento de toma de precios por parte de cada individuo. De aquí, el equilibrio dinámico será caracterizado por un conjunto de condiciones para establecer que todos los productos del mercado son vendidos, y por otra parte, la existencia de restricciones para igualar la utilidad obtenida por cada individuo.

Inicialmente el Lema 1 establece una estructura óptima de consumo, producción y comercio para cada individuo. Este resultado permite maximizar la función de utilidad correspondiente a cada individuo. El lema 2 caracteriza la estructura óptima del comercio para la economía, en la cual, los problemas de decisión de todos los individuos son simétricos. Considerando los resultados anteriores, el Lema 3 implica que el número de bienes comercializados por cada individuo es el mismo bajo un estado de equilibrio.

Al tiempo $t = 0$, todos los individuos se encuentran en situación semejante en cuanto a sus expectativas para producir cada bien, esto es, en $t = 0$ ningún individuo tiene experiencia en actividades de producción, así, se establece una competencia por los derechos para producir un bien en el futuro, y a su vez propicia una diferenciación entre *expertos y novatos*. Como la totalidad del comercio está completamente determinada dentro de un mercado futuro que opera en $t = 0$, es posible que a través del tiempo determinados productores obtengan fuerza monopólica como consecuencia del conocimiento acumulado o experiencia, es decir, ser los únicos poseedores de algún factor productivo, pero en el momento en el que los contratos son firmados, dicho poder para establecer un monopolio no existe.

Específicamente, en una economía de este tipo existe un constante intercambio de productos bajo un sistema de precios dado, en el cual cada individuo busca maximizar sus utilidades sujeto a una restricción presupuestaria que mantiene la oferta igual a la demanda como condición necesaria para establecer el equilibrio.

Dentro del modelo descrito en la sección anterior, existe un número definido de productores para cada bien comercializado de aquí que la estructura del mercado sea internamente determinada. Dado que las condiciones de competencia se establecen en gran medida por la estructura del mercado, asumimos que en dicha estructura existe tanto homogeneidad en los productos como independencia en las decisiones tomadas por cada individuo.

Por otra parte, dado que podemos diferenciar entre las cantidades de bienes a comercializar x_{it}, x^s_{it}, y x^d_{it} para cada uno de los m individuos, existen 2^{3m} posibles combinaciones para las cuales dichas variables toman el valor cero o un valor positivo. Un posible método de solución queda determinado mediante la aplicación del Teorema de Kuhn-Tucker en el cual el objetivo es maximizar una función auxiliar o de Lagrange sujeta a determinadas restricciones. Debido a que la aplicación de este teorema implica la utilización o desarrollo de programas computacionales, no nos ocuparemos de este aspecto ya que no representa el objetivo del presente trabajo. Sin embargo, mediante el siguiente lema podemos caracterizar el comportamiento de estas variables, es decir, describir el patrón óptimo de consumo, producción e intercambio para cualquier individuo:

LEMA 1. Un individuo no compra ni produce el mismo bien. El mismo se provee de un bien, y lo vende, pero no vende mas de un bien.

Demostración. Supongamos que tanto la cantidad comprada del bien i como la cantidad vendida del mismo son positivas en cualquier tiempo t. Entonces podemos reemplazar las cantidades positivas x^d_{it} y x^s_{it} en la restricción de presupuesto $\sum_i p_{it}x^d_{it}=\sum_i p_{it}x^s_{it}$, con $i = 1,\ldots,m$, la cual especifíca que la cantidad obtenida por la venta de los bienes debe ser igual a la cantidad invertida en la compra de otros dado un vector de precios $P_t = (p_{1t},\ldots,p_{mt}) > \bar{0}$ y un nivel producción determinado $(L_t)^a = ((L_{1t})^a,\ldots,(L_{mt})^a) > \bar{0}$ para cada bien i.

En base a lo anterior, y considerando los vectores $X_t = (x_{1t},\ldots,x_{mt})$, $X^s_t = (x^s_{1t},\ldots,x^s_{mt})$ y $X^d_t = (x^d_{1t},\ldots,x^d_{mt})$ planteamos el siguiente problema de optimización:

$$max \qquad U_t = \prod_{i=1}^{m} \left(x_{it} + K_t x_{it}^d\right)$$

sujeto a:

$$x_{it} + x_{it}^s = \left(L_{it}\right)^a \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_{it} x_{it}^d = \sum_{i=1}^{m} p_{it} x_{it}^s \tag{7}$$

$$X_t, X_t^s, X_t^d \geq \bar{0}$$

Para probar que la función de utilidad U_t alcanza su máximo sobre la región definida por (6) y (7) veamos que los conjuntos

$$A = \left\{ \left(x_{it}, x_{it}^s\right) \mid x_{it} + x_{it}^s = \left(L_{it}\right)^a \right\}$$

y

$$B = \left\{ \left(x_{it}^d, x_{it}^s\right) \mid \sum_i p_{it} x_{it}^d - \sum_i p_{it} x_{it}^s = 0 \right\}$$

son compactos, es decir son cerrados y acotados en $R^m \times R^m = R^{2m}$.

A partir de la igualdad $x_{it} + x_{it}^s - \left(L_{it}\right)\right)^a = 0$ podemos afirmar que A es cerrado por ser la imagen inversa del conjunto cerrado $\{0\}$ bajo una función continua. También A es acotado ya que para cualquier bien i y t fijo, el nivel de producción $\left(L_{it}\right)^a = x_{it} + x_{it}^s$ es acotado.

Análogamente, B es cerrado por ser la imagen inversa del conjunto cerrado $\{0\}$ bajo la función continua $\sum_i p_{it} x_{it}^d - \sum_i p_{it} x_{it}^s$. Para mostrar que B es acotado, probaremos la existencia de $M > 0$ tal que $\left\| \left(x_{it}^d, x_{it}^s\right) \right\| \leq M$.

Como la cantidad de los bienes x_{it}^s es acotada en el conjunto A, ${x_{it}^s}^2 \leq {a_i}^2$ $\forall i \quad i = 1, \cdots, m$, de aquí que $\|X_t^s\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(x_{it}^s\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{m} {a_i}^2 = N$. Por otra parte, denotamos $x_{it}^{s*} = sup\{x_{it}^s\}$ para cualquier t, de esta manera obtenemos que $\sum_i p_{it} x_{it}^d = \sum_i p_{it} x_{it}^s \leq \sum_i p_{it} x_{it}^{s*}$. Considerando el i-ésimo término de la primera suma y dado que cada precio es mayor que cero obtenemos

$$x_{it} \leq \frac{x_{it}^{*s} \sum_i p_{it}}{p_{it}}$$

o bien

$$\|X_t^d\| \leq \sqrt{n} M' K,$$

donde $K = max\left\{\frac{\sum_i p_{it}}{p_{it}}\right\}$ y $M' = max\left\{x_{it}^{s*}\right\}$

es decir, la norma del vector $\left(x_{it}^d, x_{it}^s\right)$ es acotada.

Por consiguiente, representamos a los vectores óptimos del planteamiento anterior como sigue

$$\begin{aligned} \hat{X}_t &= (\hat{x}_{1t}, \hat{x}_{2t}, \ldots, \hat{x}_m) \\ \hat{X}_t^s &= (\hat{x}_{1t}^s, \hat{x}_{2t}^s, \ldots, \hat{x}_{mt}^s) \\ \hat{X}_t^d &= (\hat{x}_{1t}^d, \hat{x}_{2t}^d, \ldots, \hat{x}_{mt}^d) \end{aligned} \tag{8}$$

Ahora supongamos que existe un bien i_o tal que $\hat{x}_{i_0 t}^s > 0$ y $\hat{x}_{i_0 t}^d > 0$, entonces elegimos un número positivo ε tal que $0 < \varepsilon < min(\hat{x}_{i_0 t}^s, \hat{x}_{i_0 t}^d)$. A continuación probaremos que el punto

$$(\hat{\hat{X}}_t, \hat{\hat{X}}_t^s, \hat{\hat{X}}_t^d) \tag{9}$$

donde $\hat{\hat{X}}_t = \hat{X}_t + \varepsilon e_{i_0}, \hat{\hat{X}}_t^s = \hat{X}_t^s - \varepsilon e_{i_0}, \hat{\hat{X}}_t^d = \hat{X}_t^d - \varepsilon e_{i_0}$ y e_{i_0} el vector estandar en R^m, representa una mejor solución en comparación con la anterior, lo cual nos lleva a una contradicción.

Inicialmente es necesario comprobar que la solución $(\hat{\hat{X}}_t, \hat{\hat{X}}_t^s, \hat{\hat{X}}_t^d)$ pertenece al conjunto definido por las restricciones (6) y (7)

$$\hat{\hat{X}}_t + \hat{\hat{X}}_t^s = \hat{X}_t + \varepsilon e_{i_o} + \hat{X}_t^s - \varepsilon e_{i_o} = \hat{X}_t + \hat{X}_t^s = (L_{it})^a$$

$$p_t\hat{\hat{X}}_t^d = \sum_{i=1}^{m} p_{it}\hat{\hat{x}}_{it}^d = p_{i_o t}(\hat{x}_{i_o t}^d - \varepsilon) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_o}}^{m} p_{it}\hat{x}_{it}^d = P_t\hat{X}_t^d - p_{i_o t}\varepsilon$$

$$p_t\hat{\hat{X}}_t^s = \sum_{i=1}^{m} p_{it}\hat{\hat{x}}_{it}^s = p_{i_o t}(x_{i_o t}^s - \varepsilon) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_o}}^{m} p_{it}\hat{x}_{it}^s = p_t\hat{X}_t^s - p_{i_o t}\varepsilon.$$

Análogamente, evaluando la función U_t en el punto $(\hat{\hat{X}}_t, \hat{\hat{X}}_t^s, \hat{\hat{X}}_t^d)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
U_t(\hat{\hat{X}}_t, \hat{\hat{X}}_{it}^d) &= (\hat{\hat{x}}_{i_o t} + K_t\hat{\hat{x}}_{i_o t}^d) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_o}}^{m} (\hat{x}_{it} + K_t\hat{x}_{it}^d) \\
&= (\hat{x}_{i_o t} + \varepsilon + K_t(\hat{x}_{i_o t}^d - \varepsilon)) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_o}}^{m} (\hat{x}_{it} + K_t\hat{x}_{it}^d) \\
&= \left((\hat{x}_{i_o t} + K_t\hat{x}_{i_o t}^d) + \varepsilon(1 - K_t)\right) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_o}}^{m} (\hat{x}_{it} + K_t\hat{x}_{it}^d)
\end{aligned}$$

Como $K_t = k/n_t < 1$ para $0 < k < 1$, entonces $\varepsilon(1 - K_t) > 0$, de aquí

$$[(\hat{x}_{i_o t}+K_t\hat{x}_{i_o t}^d)+\varepsilon(1-K_t)] \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_o}}^{m} (\hat{x}_{it}+K_t\hat{x}_{it}^d) > \prod_{i=1}^{m}(\hat{x}_{it}+K_t\hat{x}_{it}^d) = U_t(\hat{X}_t, \hat{X}_t^d)$$

Por tanto, la cantidad comprada y vendida de un mismo bien no pueden ser simultáneamente positivas en el punto óptimo, es decir:

$$x_{it}^s = 0 \qquad si \qquad x_{it}^d > 0, \tag{10}$$

o bien

$$x_{it}^d = 0 \qquad si \qquad x_{it}^s > 0,\ \forall i \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{11}$$

Considerando que $x_{it}^s > 0$ implica $x_{it}^d = 0\ \forall i$ y dada la restriccón de utilidad positiva $U_t = \prod_{i=1}^{m}(x_{it} + K_t x_{it}^d) > 0$ ($U_t = 0 \iff x_{it} = x_{it}^d = 0$) entonces $x_{it} > 0$. de aquí

$$x_{it} > 0 \qquad x_{it}^d = 0 \qquad \text{si} \qquad x_{it}^s > 0. \tag{12}$$

Ahora, sin pérdida de generalidad supongamos $x_{1t}^s, x_{2t}^s > 0$ y $x_{it}^s = 0\ \forall i$ ($i \neq 1, 2$), es decir podemos vender dos bienes distintos al mismo tiempo. Debemos mostrar que este supuesto no cumple con la condición de segundo orden para un máximo en U_t (es decir, $\max_{x_{1t}^s, x_{2t}^s} U_t(x_{1t}^s, x_{2t}^s)$). De acuerdo con (11) y (12), $x_{1t}^d = x_{2t}^d = 0$ si $x_{1t}^s, x_{2t}^s > 0$. Usando esta información y sustituyendo la cantidad del bien i x_{it} por la expresión $(L_{it})^a - x_{it}^s$ en (3), para $i = 1, 2$ obtenemos

$$\begin{aligned} U_t &= \prod_{i=1}^{m}(x_{it} + K_t x_{it}^d) \\ &= \prod_{i=1}^{m}((L_{it})^a - x_{it}^s + K_t x_{it}^d) \\ &= \prod_{i=1}^{2}((L_{it})^a - x_{it}^s) \quad \prod_{i=3}^{m}((L_{it})^a + K_t x_{it}^d) \end{aligned}$$

Derivando

$$\frac{\partial U_t}{\partial x_{1t}^s} = -((L_{2t})^a - x_{2t}^s) \quad \prod_{i=3}^{m}((L_{it})^a + K_t x_{it}^d)$$

de aquí,

$$\frac{\partial U_t}{\partial x_{1t}^s} = 0 \qquad \text{si} \qquad x_{2t}^s = (L_{2t})^a,\ \forall t$$

análogamente

$$\frac{\partial U_t}{\partial x^s_{2t}} = 0 \qquad si \qquad x^s_{1t} = (L_{1t})^a \ \forall t$$

considerando que el producto $\prod_{i=3}^{m}\left((L_{it})^a + K_t x^d_{it}\right) = \prod_{i=3}^{m}\left(x_{it} + K_t x^d_{it}\right)$ no se anula debido a la restrición de utilidad positiva.

De esta forma el punto crítico $x^* = \left((L_{1t})^a, (L_{2t})^a\right)$ cumple con las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial U_t(x^*)}{\partial x^s_{1t}} = 0 \qquad \frac{\partial U_t(x^*)}{\partial x^s_{2t}} = 0$$

Por otra parte, las condiciones de segundo orden necesarias para un máximo local son las siguientes

$$\frac{\partial^2 U_t(x^*)}{\partial (x^s_{1t})^2} \leq 0,$$

$$DET(\mathbf{H}(U_t)) \geq 0,$$

donde $\mathbf{H}(U_t)$ es la matriz Hessiana de U_t. Derivando nuevamente obtenemos

$$\frac{\partial^2 U_t(x^*)}{\partial (x^s_{it})^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 U_t(x^*)}{\partial (x^s_{2t})^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U_t(x^*)}{\partial x^s_{1t}\partial x^s_{2t}} = \prod_{i=3}^{m}\left((L_{it})^a + K_t x^d_{it}\right) > 0 \qquad \forall t$$

$$\frac{\partial^2 U_t(x^*)}{\partial x^s_{2t}\partial x^s_{1t}} = \prod_{i=3}^{m}\left((L_{it})^a + K_t x^d_{it}\right) > 0 \qquad \forall t$$

Por tanto

$$DET(\mathbf{H}(U_t)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U_t(x^*)}{\partial (x^s_{1t})^2} & \frac{\partial^2 U_t(x^*)}{\partial x^s_{1t}\partial x^s_{2t}} \\ \frac{\partial^2 U_t(x^*)}{\partial x^s_{2t}\partial x^s_{1t}} & \frac{\partial^2 U_t(x^*)}{\partial (x^s_{2t})^2} \end{vmatrix} \leq 0$$

De aquí, las condiciones de segundo orden no se cumplen, es decir, la cantidad a comprar del bien uno, x^s_{1t}, y del bien dos, x^s_{2t}, no pueden ser positivas simultáneamente en el punto óptimo.

Similarmente podemos probar lo anterior para cualesquiera dos variables x^s_{it} y x^s_{rt} para $i, r = 1, \ldots, m$ con $i \neq r$. (13)

De esta manera, las expresiones (10), (11) y (12) constituyen el lema 1.

∎

El anterior lema implica que para un individuo quien vende el bien i y comercia con n_t bienes al tiempo t ($n_t \leq m$),

$$x_{it}, x^s_{it}, l_{it} > 0, \qquad x^d_{it} = 0, \tag{14}$$

$$x_{rt} = x^s_{rt} = l_{tr} = 0, \qquad x^d_{rt} > 0, \text{para los } n_t - 1 \text{ bienes comercializados,}$$

$$x_{jt}, l_{jt} > 0, \qquad x^s_{jt} = x^d_{jt} = 0, \text{ para los } m - n_t \text{ bienes no comercializados,}$$

donde $r \in R$, representa el conjunto de todos los bienes comprados, y $j \in J$ el conjunto de los bienes no comercializados. El conjunto R consiste de $n_t - 1$ elementos, mientras que el conjunto J consiste de $m - n_t$ bienes o elementos.

En el caso particular $n_t = 1$ ó $n_t - 1 = 0$, el número de bienes comprados es cero, es decir, cada individuo se provee de los bienes que él quiere originando que cada individuo sea autosuficiente.

Intuitivamente en el Lema 1, las variables x_{it}, x^s_{it}, y x^d_{rt} son cantidades del mismo bien, pero la cantidad comprada x^d_{rt} implica un costo de transacción. De aquí que $x^s_{it} > 0$ implica $x_{it} > 0$ y $x^d_{it} = 0$ ya que si una persona vende un bien, entonces ésta tiene que producirlo; además no es factible comprar el bien por que la adquisición involucra un costo de transacción.

Si en el punto óptimo la cantidad comprada es positiva, $x_{it}^d > 0$, entonces $x_{rt} = x_{rt}^s = 0$ porque el consumidor-productor puede concentrar su trabajo en producir el bien que él vende y así obtener mayores ingresos que le permitan adquirir mayores cantidades del bien x_{rt}^d. Por otra parte, como consecuencia de éste lema no es factible vender dos bienes.

El conjunto de condiciones en la expresión (14) significa que ésta persona produce y vende un bien i, compra otros $n_t - 1$ bienes, y se provee (o posee una dotación inicial) de los $m - n_t$ bienes no comercializados.

Considerando lo anterior, obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} U_{it} &= \prod_{i=1}^{m} \left(x_{it} + K_t x_{it}^d\right) \qquad (15) \\ &= \left(x_{it} + K_t x_{it}^d\right) \prod_{r \in R} \left(x_{rt} + K_t x_{rt}^d\right) \prod_{j \in J} \left(x_{jt} + K_t x_{jt}^d\right) \\ &= x_{it} \prod_{r \in R} \left(K_t x_{rt}^d\right) \prod_{j \in J} x_{jt} \end{aligned}$$

$$x_{it} + x_{it}^s = \left(L_{it}\right)^a, \qquad x_{jt} = \left(L_{jt}\right)^a, \text{para } j \in J \tag{16}$$

además

$$l_{it} + \sum_{r \in R} l_{rt} + \sum_{j \in J} l_{jt} = 1 \tag{17}$$

$$p_{it} x_{it}^s = \sum_{r \in R} p_{rt} x_{rt}^d \tag{18}$$

donde p_{yt} es el precio del bien y al tiempo t ($y = i, r, \text{con } r \in R$)

Sean u_{it} y U_i, la utilidad de una persona quien vende el bien i y su función objetivo respectivamente. Entonces el problema de decisión para dicho individuo es

$$max \qquad U_i = \int_0^{\infty} u_{it} e^{-rt} dt \tag{19}$$

sujeto a:

$$u_{it} = x_{it} \prod_{r \in R} (K_t x_{rt}^d) \prod_{j \in J} x_{jt} \qquad \text{(Función de utilidad al tiempo t)},$$

$$x_{it} + x_{it}^s = (L_{it})^a, x_{jt} = (L_{it})^a, j \in J \qquad \text{(Función de producción)},$$

$$l_{it} + \sum_{j \in J} l_{jt} = 1 \qquad \text{(Restricción sobre la cantidad disponible de trabajo)},$$

$$K_t = \frac{k}{n_t} \qquad \text{(Coeficiente de transacción)},$$

$$p_{it} x_{it}^s = \sum_{r \in R} p_{rt} x_{rt}^d \qquad \text{(Restricción presupuestaria)},$$

$$n_t \mid_{t=0} = 1, \; L_{yt} \mid_{t=0} = 0, \; y = i, j, j \in J \qquad \text{(Condición de frontera)},$$

y

$$l_{yt} = \frac{dL_{yt}}{dt}, \qquad 0 \leq l_{yt} \leq 1 \qquad \text{(Ecuación de estado)}.$$

Implícitamente asumimos que cada individuo no presta dinero o ahorra, a pesar de que las decisiones para comerciar se realizan en el tiempo $t = 0$.

Con respecto al plantamiento anterior, éste reperesenta un problema de optimización dinámica, específicamente un problema de Teoría del Control, en el cual el objetivo es elegir trayectorias óptimas (sobre un intervalo de tiempo) para determinadas variables llamadas **variables de control.** Esta elección implica el plantamiento y resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales o **ecuaciones de movimiento** así como la definición de un conjunto de trayectorias para las variables que describen el sistema, llamadas **variables de estado.**

Las trayectorias de las variables de control son elegidas para maximizar una función objetivo, la cual depende tanto de las variables de control como de las variables de estado.

Con la finalidad de desarrollar formalmente un método general de solución para su posterior aplicación, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{x}_i(t) = f_i[x(t), u(t), t], \qquad i = 1, \ldots, n \tag{20}$$

donde $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$ y $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)]$ tienen dominio real. A su vez, las condiciones de frontera para (20) están dadas de la siguiente forma

$$x_i(t_o) = x_i^o, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{21}$$

Por otra parte, mediante el siguiente teorema podemos afirmar que existe (localmente), y es única la solución del sistema anterior, es decir asumiendo lo anterior podemos especificar completamente la trayectoria óptima para el problema de control.

TEOREMA (Cauchy-Peano). Sea $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$ un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, con f una función real sobre $X \times R^n \times I$ [X es un subconjunto de R^n e $I = (I_1, I_2) \subset R$]. Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:

(I-a) La función f es continua sobre $X \times R^n$.

(I-b) La derivada parcial $\partial f_i / \partial x_j$ existe y es continua sobre $X \times R^n \times I$ para toda i y $j = 1, \ldots, n$.

(I-c) La función $u(t)$ es *continua por partes*, esto es, continua sobre el intervalo I excepto en una cantidad finita de puntos en I.

(I-d) $(x^o, t^o) \in X \times I$.

Entonces existe una función $\phi(t)$ definida desde un intervalo (t^1, t^2) que contiene a t^o tal que

i)

La función $\phi(t)$ es continua sobre (t^1, t^2) y $\phi(t^o) \in X$.

ii)

$\phi(t^o) = x^o$.

iii)

$\phi(t) = f[\phi(t), u(t), t]$ (esto es, $\phi(t)$ es una solución del sistema).

iv)

Si $\psi(t)$ satisface los incisos $(i), (ii)$ y (iii) anteriores sobre un intervalo (s^1, s^2), entonces $\psi(t) = \phi(t)$ sobre $(t^1, t^2) \cap (s^1, s^2)$ (esto es, la solución que satisface las condiciones iniciales es única).

Observación. No se asume tanto la existencia como la continuidad de las derivadas parciales $\partial f_i / \partial u_k$.

Observación. En el sistema lineal $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t)$ (donde $A(t) = [a_{ij}]$ pueden ser constantes) los supuestos (I-a) y (I-b) son satisfechos claramente. Si $u(t)$ es continua y (x^o, t^o) es un punto en $X \times I$ podemos demostrar que la única solución que satisface las condiciones iniciales es tal que (t^1, t^2) (del anterior teorema) puede ser sustituido por todo el dominio de t, es decir, I. En otras palabras, para el caso lineal, el teorema de existencia garantiza un resultado *global*.

En la Teoría del Control, no especificamos las variables $u(t)$ *apriori*, éstas son elegidas de un conjunto de funciones U tales que maximicen una determinada función objetivo. En este sentido, el vector de funciones $u(t)$ es llamado un **control**, y consecuentemente las variables $u_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, r$, son llamadas variables de control.

El rango de las variables $u(t)$ en U es denotado por $\bar{U}$. La región $\bar{U}$ es llamada **región de control** y U es llamado **conjunto de variables admisibles de control**. En este caso asumimos que la región de control $\bar{U}$ es independiente de las variables de estado $x(t)$ y del tiempo t, de igual manera suponemos que U es restringido al conjunto donde $u(t)$ es *continua por partes.*

Por otra parte, asumimos que las funciones $f_i's$ son continuas en cada x_i, u_k, y t, y posee derivadas parciales continuas con respecto a cada x_i y t. El rango de $x(t)$ es denotado por X, el cual suponemos que es un subconjunto abierto y conexo de R^n. El punto frontera (x^o, t_o) debe ser tal que $x^o \in X$ y $t_o \in (t_1, t_2)$. Análogamente se requiere que las variables $x(t)$ sean continuas y tengan derivadas continuas.

En seguida definimos la función objetivo como:

$$S = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(T), \tag{22}$$

donde $T \in (t_1, t_2)$ es una constante fija. De aquí, consideramos el problema de elegir las variables $u(t) \in U$ como sigue

Maximizar: S

Sujeto a:

$$\dot{x}_i(t) = f_i[x(t), u(t), t],$$

$$x_i(0) = x_i^0, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Una vez que las funciones de control denotadas por $\hat{u}(t)$ son encontradas, es posible determinar las funciones correspondientes $\hat{x}(t)$ como una solución del sistema de ecuaciones diferenciales (20). Las variables $x_i(t), i = 1, \ldots, n$, las cuales suponemos continuas sobre el tiempo t son llamadas las **variables de estado.** Es importante notar que la derivada de cada variable de estado se encuentra en las restricciones pero ninguna de las derivadas de las variables de control están involucradas tanto en la función objetivo como en las restricciones. Esto algunas veces es utilizado para distinguir las variables de estado de las variables de control.

De acuerdo al problema anterior establecemos el siguiente teorema.

TEOREMA. Bajo las especificaciones del problema anterior, si $\hat{u}(t)$ representa una solución del problema anterior con la correspondiente variable de estado $\hat{x}(t)$, es necesario que exista un vector de funciones continuas $p(t) = [p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)]$ tal que

(*i*) $p(t)$ junto con $\hat{u}(t)$ y $\hat{x}(t)$ resuelven el siguiente Sistema **Hamiltoniano:**

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{23}$$

donde H esta definida por

$$H[x(t), u(t), t, p(t)] = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_i[x(t), u(t), t] \tag{24}$$

(el cual es llamado **Hamiltoniano**), y $\hat{H} = H[\hat{x}(t), \hat{u}(t), t]$

(*ii*) $H[\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, p(t)] \geq H[\hat{x}(t), u(t), t, p(t)]$ para toda $u(t) \in U$, esto es, la función hamiltoniana H se maximiza con respecto a las variables $u(t)$.

(*iii*) $p_i(T) = c_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Observación. En la expresión $\dot{p}_i = -\partial \hat{H} / \partial x_i$, con $\hat{H} = [\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, p(t)]$ significa que la derivada parcial $\partial H / \partial x_i$ está evaluada en $[\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, p(t)]$. Esto es, $\partial \hat{H} / \partial x_i$ no es la derivada parcial de $\hat{H}$ con respecto a x_i.

Observación. Es importante notar que en la anterior formulación del problema, la constante T es conocida inicialmente mientras que los valores $x(T)$ son desconocidos. Podemos determinar las variables $\hat{x}(t)$ mediante la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$, una vez que las variables de control han sido especificadas, y de esta manera obtenemos $\hat{x}(T)$ a partir de $\hat{x}(t)$. Por otra parte, existe una similitud entre el problema anterior y la teoría referente a Programación no lineal, las variables p_i corresponden a los multiplicadores de Lagrange, y H corresponde a la función Lagrangiana. La maximización de dicha función es equivalente a la del Hamiltoniano. Las variables auxiliares $p_i(t)$ son también llamadas **multiplicadores** o **variables de costo.**

Observación. Cada una de las igualdades $\dot{\hat{x}}_i = \partial\hat{H}/\partial p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, es reducida a las restricciones de la ecuación (20), esto es, $\dot{\hat{x}}_i = f_i[\hat{x}(t), \hat{u}(t), t]$, $i = 1, 2, \ldots, n$,. Las ecuaciones $\dot{p}_i = -\partial\hat{H}/\partial x_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, explícitamente se expresan como:

$$\dot{p}_i = -\sum_{i=1}^{n} p_j \frac{\partial \hat{f}_j}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

donde $\hat{f}_j$ denota $f_j[\hat{x}(t), \hat{u}(t), t]$. En otras palabras, el anterior teorema origina $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden con $2n$ condiciones de frontera $x_i(t^o) = x^o$ y $p_i(T) = c_i, i = 1, \ldots, n$; por tanto la solución del problema anterior se reduce a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. Claramente este sistema no puede ser resuelto a menos que las variables $u(t)$ sean especificadas. La elección de las variables de control $u(t)$ depende de la condición (ii) (esto es, la maximización de H).

Observación. Note que la función objetivo descrita en (22) es mas general de lo que esta aparenta ya que incluye la siguiente función objetivo:

$$I = \int_0^T f_o[x(t), u(t), t]dt$$

Para apreciar esto, definimos $x_o(t)$ por $\dot{x}_o(t) = f_o[x(t), u(t), t]$ con $x_o(0) = 0$. Entonces $I = x_o(T)$, el cual es claramente un caso especial de (22). De aquí que el problema de maximizar I sujeto a (20) y (21) puede ser convertido a un problema simple de $x_o(T)$ sujeto a las condiciones (20) y (21), adicionando las igualdades $\dot{x}_o = f_o[x(t), u(t), t]$ y $x_o(0) = 0$.

Observación. En la formulación anterior definimos la función objetivo como $S = \sum_{i=1} c_i x_i(T)$. En la observación anterior consideramos una integral de la forma

$$\int_0^T f_o[x(t), u(t), t]dt$$

la cual puede ser convertida a la forma de la función S. El inverso también es cierto. En otras palabras, la función objetivo S puede ser convertida a una integral de la forma anterior. Para ver esto, basta notar que

$$S = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(T) = \int_0^T \sum_{i=1}^{n} c_i \ \dot{x}_i(t)dt + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(0)$$

De aquí, si las $x_i(0)'s$ son fijas, la maximización de S es equivalente a la maximización de la integral

$$J = \int_0^T \sum_{i=1}^{n} c_i \dot{x}_i(t) \ dt$$

De esta manera la maximización de S sujeta a

$$x_i(0) = x_i^o, \ \dot{x}_i = f_i[x(t), u(t), t], \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

es reformulada de la siguiente manera:

$$\underset{u(t)}{\text{Maximizar:}} \int_0^T f_o[x(t), u(t), t] \ dt$$

Sujeto a:

$$\dot{x}_i = f_i[x(t), u(t), t]$$

$$x_i(0) = x_i^o, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$f_o[x(t), u(t), t] = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i[x(t), u(t), t]$$

Observación. Si $\hat{u}(t)$ se encuentra en el interior de la región de control $\bar{U}$ y si cada función f_i es continuamente diferenciable en $\bar{U}$ (H continuamente diferenciable en $\bar{U}$), entonces la condición (ii) implica

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, r$$

y $\hat{u}(t)$ permanece en el interior de $\bar{U}(t)$ si $\bar{U}(t)$ es un conjunto abierto. Inversamente, si H es una función concava en las variables de control $u(t)$, entonces las ecuaciones $\partial \hat{H}/\partial u_k = 0$ para toda k implican la condición (ii). Es importante notar, sin embargo, que la condición (ii) no restringe al conjunto $\bar{U}$ para ser abierto, en efecto, $\bar{U}$ puede ser cerrado. Por ejemplo, si $u_k(t)$ es restringido por $0 \leq u_k(t) \leq 1$ para toda k, entonces $\bar{U}$ es un intervalo cerrado el cual es un conjunto cerrado. Como $u_k(t)$ puede ser una función con una cantidad finita de discontinuidades, $\hat{u}_k(t)$ puede ser tal que para cada k

$$\begin{aligned} \hat{u}_k(t) &= 0 \qquad \text{para } t_o \leq t < \bar{t} \\ \hat{u}_k(t) &= 1 \qquad \text{para } \bar{t} \leq t \leq t_1 \end{aligned}$$

Tal solución, es llamada **solución** *bang–bang* y es obtenida frecuentemente en aplicaciones prácticas.

Observación. Si definimos M por

$$M[\hat{x}(t), t, p(t)] = \sup_{u(t) \in U} H[\hat{x}(t), u(t), p(t)]$$

entonces la condición (ii) puede ser escrita como

$$H[\hat{x}(t), \hat{u}(t), t, p(t)] = M[\hat{x}(t), t, p(t)]$$

Demostración. Dado que la demostración para el caso general es muy complicada probaremos solo un caso especial. En particular, consideramos el caso en el cual las funciones f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, toman la siguiente forma especial:

$$f_i[x(t), u(t), t] = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + \phi[u(t), t], i = 1, 2, \ldots, n \qquad (25)$$

En otras palabras, las funciones f_i son lineales en las variables de estado, y las variables de control son separables de las variables de estado. Por tanto, se simplifica significativamente la resolución del siguiente problema:

$$\underset{u(t)}{\text{Maximizar:}}\, S = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(T),$$

donde T es fijo

Sujeto a:

$$\dot{x}_i = f_i[x(t), u(t), t], \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (26)$$

$$x_i(0) = x_i^o(fijo), i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (27)$$

y

$$u(t) \in U \qquad (28)$$

donde $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$ y $u(t) = [u_1(t), \ldots, u_r(t)]$.

Primero definimos las *variables auxiliares* $p_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$ por

$$\dot{p}_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\frac{\partial \hat{f}_j}{\partial x_i},\ p_i(T) = c_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (29)$$

Aquí $\partial f_j/\partial x_i$ denota $\partial f/\partial x_i$ evaluada en $[\hat{x}(t), \hat{u}(t), t]$. Definimos la función H por

$$H[x(t), u(t), t, p(t)] = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_i[x(t), u(t), t] \qquad (30)$$

donde $p(t) = [p_1(t), \ldots, p_n(t)]$; es claro por la definición de $p_i(t)$ que

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i}, \qquad \text{donde } \hat{H} = H[\hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t)] \tag{31}$$

Si suponemos que el vector óptimo de control $\hat{u}(t)$ ha sido encontrado, denotamos por $\hat{x}(t)$ el correspondiente vector de estado óptimo. De acuerdo a lo anterior nos interesa caracterizar al vector óptimo $[\hat{x}(t), \hat{u}(t)]$. Consideremos la variación $\Delta u(t)$ en el vector de control óptimo $\hat{u}(t)$ tal que $\hat{u}(t) + \Delta u(t) \in U$, y sea $\Delta x(t)$ el resultado total en el correspondiente vector de estado $\hat{u}(t)$. Entonces por (26), tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \; [f_i(\hat{x} + \Delta x, \hat{u} + \Delta u, t) \; - \; f_i(\hat{x}, \hat{u}, t)] \tag{32}$$

De aquí obtenemos

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{n} p_i \; \Delta \dot{x}_i \; dt = \int_0^T \sum_{i=1}^{n} p_i \; [f_i(\hat{x} + \Delta x, \hat{u} + \Delta u, t) \; - \; f(\hat{x}, \hat{u}, t)] \; dt \tag{33}$$

Integrando por partes llegamos a la siguiente ecuación

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta \dot{x}_i \; dt = \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta x_i \Big|_0^T \; - \; \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \Delta x_i \; dt \tag{34}$$

Entonces, reescribiendo el segundo término de la ecuación anterior y utilizando las expresiones (29), (32) y (33), obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta x_i \Big|_0^T = - \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i(t) \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_j} \Delta x_j \; dt \tag{35}$$

$$+ \int_0^T \sum_{i=1}^{n} p_i[f_i(\hat{x}+\Delta x, \hat{u}+\Delta u, t) \ - \ f_i(\hat{x}, \hat{u}, t)]\, dt$$

Como el vector de estado inicial $x(0)$ se supone que es fijo, entonces $\Delta x(0) = 0$. Por otra parte, en la expresión (29) hemos elegido las variables $p_i(t)$ de tal menera que $p_i(T) = c_i$. De aquí tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta x_i \Big|_0^T = \sum_{i=1}^{n} c_i \Delta x_i(T) = \Delta S \tag{36}$$

donde ΔS representa la variación total de la función objetivo S.

Considerando el último término de la expresión (35), expendemos cada función f_i en Serie de Taylor alrededor del punto $(\hat{x}, \hat{u} + \Delta u, t)$. De esta manera obtenemos

$$f_i(\hat{x}+\Delta x, \hat{u}+\Delta u, t) \ - \ f_i(\hat{x}, \hat{u}, t) \ = \ f_i(\hat{x}, \hat{u}+\Delta u, t) \ - \ f_i(\hat{x}, \hat{u}, t) \tag{37}$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\hat{x}, \hat{u}+\Delta u, t)}{\partial x_j} \Delta x_j \ + \ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(\hat{x}+\xi\Delta x, \hat{u}+\Delta u, t)}{\partial x_j \partial x_k} \Delta x_j \Delta x_k$$

donde $0 \leq \xi \leq 1$. Aquí asumimos que tanto la primera como la segunda derivadas parciales de f existen. De las expresiones (35), (36), y (37) tenemos

$$\Delta S = \int_0^T \sum_{i=1}^{n} p_i[f_i(\hat{x}, \hat{u}+\Delta u, t) \ - \ f_i(\hat{x}, \hat{u}, t)]\, dt \tag{38}$$

$$+ \ \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i(t) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\hat{x}, \hat{u}+\Delta u, t) - \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{f}_i(\hat{x}, \hat{u}, t) \right\} \Delta x_j \, dt$$

$$+ \ \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_i \frac{\partial^2 f_i(\hat{x}+\xi\Delta x, \hat{u}+\Delta u, t)}{\partial x_j \partial x_k} \Delta x_j \Delta x_k \, dt$$

Considerando que las funciones f_i tienen específicamente la forma de la expresión (25), los ultimos dos términos de (38) se anulan, de aquí, la variación ΔS se convierte en

$$\Delta S = \int_0^T [H(\hat{x}, \hat{u} + \Delta u, t) \; - \; H(\hat{x}, \hat{u}, t)]dt \tag{39}$$

Una condición suficiente para un máximo de la función S en $(\hat{x}, \hat{u}, t)$ es claramente $\Delta S < 0$, y una condición suficiente para $\Delta S < 0$ es obtenida de (39) como

$$H(\hat{x}, \hat{u} + \Delta u, t) \; - \; H(\hat{x}, \hat{u}, t) \; < \; 0 \tag{40}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Para obtener una condición necesaria para un máximo de S, definimos una condición especial sobre el vector de control de la siguiente manera

$$\Delta u = (0, \ldots, 0, \Delta u_i, 0, \ldots, 0) \tag{41}$$

y $\Delta u_i = 0$ excepto en el intervalo (t_1, t_2), donde $t_1 < t_2$. Si $\hat{u}(t)$ es solución del problema, entonces para cualquier variación Δu tal que $\hat{u} + \Delta u \in U$ tenemos $\Delta S \leq 0$.

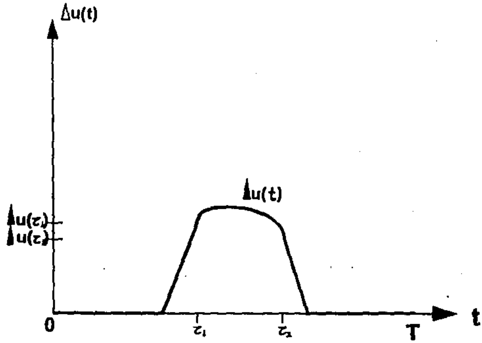
Ahora, supongamos la siguiente desigualdad

$$H(\hat{x}, \hat{u} + \Delta u, t) \; - \; H(\hat{x}, \hat{u}, t) > 0 \tag{42}$$

para algún intervalo $(\tau_1, \tau_2) \subset [0, T]$. En particular consideremos las variaciones $h^k(t)$ definidas como

$$h^k(t) = \begin{cases} \bar{0} & \text{si } 0 \leq t \leq \tau_1 - 1/k \\ (0, 0, \ldots, \Delta u_1(t), \ldots, 0, 0) & \text{si } \tau_1 - 1/k \leq t \leq \tau_1 \\ \Delta u(t) & \text{si } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ (0, 0, \ldots, \Delta u_2(t), \ldots, 0, 0) & \text{si } \tau_2 \leq t \leq \tau_2 + 1/k \\ \bar{0} & \text{si } \tau_2 + 1/k \leq t \leq T \end{cases}$$

donde $\Delta u_1(t) = \Delta u(\tau_1)k[t - \tau_1] + 1/k$ es la recta que une los puntos $(\tau_1 - 1/k, 0)$, $(\tau_1, \Delta u(\tau_1))$, y $\Delta u_2(t) = \Delta u(\tau_2)k[\tau_2 - t] + \Delta u(\tau_2)$ es la recta que va de $(\tau_2, \Delta u_2(\tau_2))$ a $(\tau_2 + 1/k, 0)$ de acuerdo a la siguiente gráfica.



De aquí, las siguientes desigualdades nos llevan a una contradicción

$$
\begin{aligned}
0 \geq \Delta^k S &= \int_{\tau_1 - \frac{1}{k}}^{\tau_1 + \frac{1}{k}} [H(\hat{x}, \hat{u} + h^k, t) - H(\hat{x}, \hat{u}, t)]dt \\
&= \int_{\tau_1 - \frac{1}{k}}^{\tau_1} [H(\hat{x}, \hat{u} + h^k, t) - H(\hat{x}, \hat{u}, t)]dt \\
&+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} [H(\hat{x}, \hat{u} + h^k, t) - H(\hat{x}, \hat{u}, t)]dt \\
&+ \int_{\tau_2}^{\tau_2 + \frac{1}{k}} [H(\hat{x}, \hat{u} + h^k, t) - H(\hat{x}, \hat{u}, t)]dt
\end{aligned}
$$

por otra parte, tomando el limite, obtenemos

$$\lim_{k\to\infty}\Delta^k S = \int_{\tau_1}^{\tau_2}[H(\hat{x},\hat{u}+h^k,t) - H(\hat{x},\hat{u},t)]dt > 0$$

Por tanto, a partir de la negación de la ecuación (40) obtenemos la siguiente condición necesaria

$$H(\hat{x},\hat{u}+\Delta u,t) - H(\hat{x},\hat{u},t) \leq 0 \tag{43}$$

En otras palabras, el máximo de la función S en $(\hat{x},\hat{u},t)$ implica que H alcanza su máximo en $(\hat{x},\hat{u},t)$ con respecto al vector de control $\boldsymbol{u}$. De esta manera, la condición (ii) del teorema es probada. Las condiciones (i) y (ii) son claras de acuerdo a la elección de las variables p_i en la ecuación (29). ■

Regresando al planteamiento hecho en (19) y considerando sus restricciones, reemplazamos las cantidades x_{it} y x_{jt} en la función objetivo U_i con sus equivalentes en la función de producción, y la cantidad comprada del bien r, x^d_{rt} $(r \in R)$, con su equivalente en la restricción presupuestaria

$$\begin{aligned} max \qquad U_i &= \int_0^\infty u_{it}e^{-rt}dt \qquad (44) \\ &= \int_0^\infty [(L_{it})^a - x^s_{it}] \prod_{r\in R}(\frac{k}{n_t}x^d_{rt}) \prod_{j\in J}(L_{it})^a e^{-rt}dt \end{aligned}$$

sujeto a:

$$l_{it} + \sum_{j\in J} l_{jt} = 1, \qquad 0 \leq l_{yt} \leq 1$$

$$l_{yt} = \frac{dL_{yt}}{dt}, \qquad y = i, j$$

$$n_t\,|_{t=0} = 1, \qquad L_{yt}\,|_{t=0} = 0, y = i, j$$

donde

$$x^d_{rt} = \frac{1}{p_{rt}}[p_{it}x^s_{it} - \sum_{\substack{r' \in R \\ r' \neq r}} p_{r't}x^d_{r't}]$$

De aquí, a partir de las restricciones, podemos identificar al nivel de experiencia L_{yt} ($y = i, j$, donde $j \in J$). y a las cantidades x^s_{it} y x^d_{rt} ($r \in R$) como variables de estado, y al trabajo invertido en la producción del bien y, l_{yt}, como variables de control.

Por otra parte, el valor óptimo del número de bienes comercializados, n_t, así como el nivel de experiencia L_{yt} y las cantidades vendidas y compradas x^s_{it}, x^d_{rt}, dependen de los precios de los bienes (p_{it} , p_{rt}) a través del tiempo, es decir, sustituyendo los valores óptimos para x^s_{it} y x^d_{it} en la función de utilidad U_i podemos expresar la utilidad total en términos de los precios relativos a los bienes, constituyendo así una función de utilidad indirecta.

Por tanto, antes de calcular las cantidades óptimas x^s_{it}, x^d_{it} y L_{yt} es necesario determinar los precios de equilibrio. El equilibrio en el mercado está caracterizado por un conjunto de condiciones éste, y otro conjunto de condiciones que establecen una igualdad con respecto a las utilidades obtenidas por cada individuo. Las condiciones sobre el mercado están basadas en las ofertas y demandas (dinámicas) derivadas de los problemas de decisión correspondientes a cada individuo, y las condiciones acerca de la igualdad de utilidades estan basadas en las funciones de utilidad indirecta.

Si definimos a M_i como el número de personas quienes venden el bien i, entonces podemos describir la estructura del mercado en terminos de cada grupo de personas M_i considerando que el tamaño de la población $m = \sum_i M_i$ está dado.

Suponiendo que todos los bienes son vendidos en cada tiempo t, es decir, si no existe almacenamiento de bienes, las condiciones sobre el mercado al tiempo t son las siguientes

$$M_r x^s_{rt} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} M_i x^d_{irt}, \qquad r = 1, \ldots, m \tag{45}$$

donde $M_r x^s_{rt}$ representa la oferta agregada del bien r, y x^d_{irt} es la demanda de una persona que vende el bien i y compra el bien r al tiempo t.

Por consiguiente, la expresión $\sum_i M_i x^d_{irt}$ es la demanda agregada del bien r. Posteriormente, probaremos que la cantidad x^d_{irt} es idéntica para toda i, $i = 1, 2, \ldots, m$, excepto para el bien r. Por tanto, la demanda x^d_{irt} es la misma que la cantidad comprada del bien r, x^d_{rt}.

El comportamiento para maximizar la utilidad por parte de cada individuo asegurará que la función de utilidad indirecta sea *aproximadamente* igual entre cada persona a través del tiempo, esto es

$$U_1 = U_2 = \ldots = U_m \tag{46}$$

Esta ecuación consiste de $m - 1$ ecuaciones, la cual conjuntamente con la condición (45) determinan los precios relativos p_{it}, además, como veremos posteriormente, tanto los $m - 1$ grupos (M_i) de personas que venden los diferentes bienes como la estructura del mercado permiten un equilibrio dinámico en el sentido de conservar la igualdad entre la oferta y la demanda a través del tiempo.

Antes de calcular específicamente los valores de los precios y el número de personas que integra cada grupo de personas, discutiremos algunos aspectos acerca de la estrucrura óptima de comercio en el mercado.

En un posible equilibrio, cada persona intercambia pocos bienes en los primeros periodos, pero progresivamente, el número de bienes a comercializar aumenta conforme transcurre el tiempo. Por otra parte, en tales periodos existe una gran variedad de posibles estructuras de mercado. Una de ellas, la cual identificamos por **A**, es tal que toda la gente comercia con el mismo paquete de bienes. Como el número de bienes comercializados por cada persona se incrementa sobre el tiempo, el número de vendedores (exclusivos) de cada bien previamente involucrados en el comercio decrece, y algunas personas cambian su *profesión* para producir los nuevos bienes a comercializar.

Otra estructura de mercado, representada por **P**, es tal que existe un solo vendedor por cada bien. Los individuos comercian con diferentes paquetes de bienes, pero con el mismo número de bienes por cada persona. Como el número de bienes comercializados por cada persona aumenta a lo largo del tiempo, cada persona compra mas bienes y vende mas de un bien a un grupo mas grande de personas, pero ésta persona no cambiará su profesión.

Para ilustrar esta situación, consideremos el ejemplo para $m = 4$ des crito en la figura 1. La estructura de mercado A es mostrada en la figura 1a y la estructura del mercado **P** en la figura 1b.

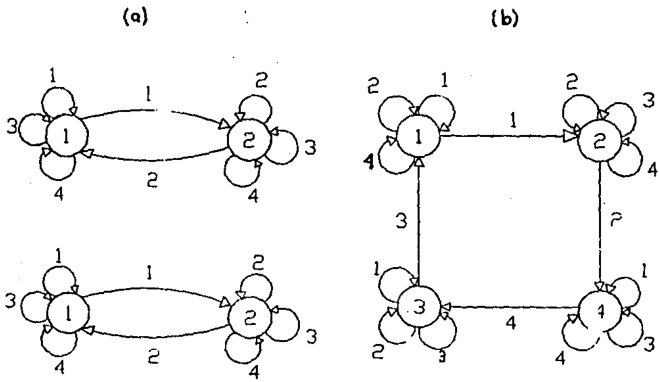


FIG.1. Diferentes estructuras del mercado. (a), mercado **A**: dos bienes comercializados, (b), mercado **P**: cuatro bienes comercializados.

Las lineas gruesas indican el flujo del comercio, y las lineas delgadas representan el flujo de los bienes con los que él mismo se provee o produce. Las flechas indican la dirección del flujo de los bienes. Los números junto a las lineas significan los bienes involucrados. Un círculo con el número i significa una persona vendiendo el bien i. En el mercado **A** cada persona comercia con los bienes 1 y 2 y cada una se provee de los bienes 3 y 4. El número de bienes comercializados por cada persona para la economía es también dos. En el mercado **P**, la persona 1 vende el bien 1 a la persona 2, quien vende el bien 2 a la persona 3, quien a su vez vende el bien 3 a la persona 4, así mismo, la persona 4 vende el bien 4 a la persona 1. Cada persona comercia con dos bienes, pero cuatro bienes son comercializados en la economía.

No es difícil ver que si todos los bienes son eventualmente comercializados en la economía, entonces el mercado P es superior en el sentido de Pareto con respecto al mercado A, es decir, cualquier redistribución o redireccionamiento en el flujo del comercio efectuado con la finalidad de beneficiar a una persona, necesariamente perjudica a otra. Además, podemos mencionar específicamente dos razones:

(1) Por la simetría del modelo, la organización del comercio no tiene efecto sobre el bienestar de las personas en los primeros periodos; solo el número de bienes con los que comercia cada persona importa. De esta manera, el bienestar individual en los primeros periodos es el mismo en ambas estructuras de mercado.

(2) El bienestar individual es mayor en periodos posteriores en el mercado **P** que en el **A** debido a que una mayor experiencia en producir los bienes 3 y 4 ha sido acumulada en el mercado **P** desde el principio. Adicionalmente, en el mercado **A** tal experiencia no es acumulada en los primeros periodos.

También es posible demostrar que el mercado **A** no tiene una estructura en equilibrio. La razón principal es la existencia de una ganancia inexplotada en el mercado, en la cual algunas personas siempre tendrán un incentivo para *desviarse* de esta estructura de mercado.

Supongamos que en el mercado **A** las condiciones de oferta igual a demanda son satisfechas. En los primeros periodos algunos individuos venden el bien 1 y otros venden el bien 2, y para periodos posteriores, todos los bienes son comercializados.

Consideremos la siguiente desviación en la estructura del mercado **A**:

Si en los primeros periodos algún individuo comienza a vender el bien 3 a un precio equivalente a los bienes 1 y 2 (esto es factible por las propiedades simétricas del modelo), y en situaciones o periodos posteriores vende el bien 3 a un precio marginalmente mas bajo que en el mercado A (es factible como consecuencia del aprendizaje o experiencia adquirida en la producción del bien 3). Con esta desviación, tanto el vendedor como los compradores del bien 3 obtendran una utilidad mayor que en el mercado **A**. Por consiguiente, cada individuo en el mercado A tendría un incentivo para producir el bien 3 en vez de producir el bien 1 ó 2 en los primeros periodos. Por éste argumento, el mercado **A** no puede constituir un mercado con una estructura dinámica en equilibrio.

En base a razonamientos similares podemos establecer que otras estructuras de mercado son menos eficientes que el mercado **P**, además de la inexistencia de dicho equilibrio dinámico para cualquier estructura aparte de esta. Por consiguiente establecemos el siguiente lema.

LEMA 2. Para $n_t \geq 2$, la estructura de mercado en equilibrio es **P**, en el cual existe un único vendedor por cada bien; m bienes son comercializados en la economía, aunque el número de bienes comprados por cualquier persona, $n_t - 1$, se incrementa desde cero hasta $m - 1$.

En la estructura de mercado descrita en el lema 2 los problemas de decisión individual son simétricos. Combinados con la restricción de oferta igual a demanda agregada (45) y la restricción presupuestaria para cada individuo, obtenemos

$$
\begin{array}{rclclcl}
p_{1t}x^s_{1t} & = & \sum_{r\neq 1}\frac{M_r}{M_1}p_{1t}x^d_{1t} & = & \frac{p_{1t}}{M_1}x^d_{1t}(m-M_1) & = & \sum_{r\neq 1}p_{rt}x^d_{rt}\\
p_{2t}x^s_{2t} & = & \sum_{r\neq 2}\frac{M_r}{M_2}p_{2t}x^d_{2t} & = & \frac{p_{2t}}{M_2}x^d_{2t}(m-M_2) & = & \sum_{r\neq 2}p_{rt}x^d_{rt}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
p^s_{mt}x^s_{mt} & = & \sum_{r\neq m}\frac{M_r}{M_m}p_{mt}x^d_{mt} & = & \frac{p_{mt}}{M_m}x^d_{mt}(m-M_m) & = & \sum_{r\neq m}p_{rt}x^d_{rt}
\end{array} \tag{47}
$$

suponiendo que el número de personas que vende el bien i, M_i, es mayor que cero, para $i = 1, 2, \ldots, m$.

Sumando las últimas 2 columnas del lado derecho en (47), obtenemos

$$\sum_r \frac{p_{rt}}{M_r}x^d_{rt}(m-M_r) = (m-1)\sum_r p_{rt}x^d_{rt}, \qquad r = 1, 2, \ldots, m.$$

De aquí

$$m\sum_r\left(\frac{1}{M_r}-1\right)p_{rt}x^d_{rt} = 0, \text{ para cada bien r, } r = 1, 2, \ldots, m$$

Dado que posteriormente probaremos que la cantidad comprada x^d_{rt} es la misma y mayor que cero para cualquier bien r, el factor $\left(\frac{1}{M_r}-1\right)$ es igual a cero para cualquier bien r, es decir

$$M_i = 1 \text{ para todo bien i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{48}$$

Considerando que existe un solo vendedor por cada bien i, en las últimas dos columnas de la expresión (47) obtenemos las siguientes igualdades

$$p_{1t}x^d_{1t}(m-1) = \sum_{r\neq 1}p_{rt}x^d_{rt}$$

$$\vdots$$

$$p_{mt}x^d_{mt}(m-1)=\sum_{r\neq m}p_{rt}x^d_{rt},$$

suponiendo hasta el momento que las cantidades a comprar óptimas, x^d_{rt}, son las mismas para cualquier bien $r\in R$ tenemos

$$(m-1)=\sum_{r\neq 1}\frac{p_{rt}}{p_{1t}}$$

$$\vdots$$

$$(m-1)=\sum_{r\neq m}\frac{p_{rt}}{p_{mt}},$$

igualando

$$\sum_{r\neq 1}\frac{p_{rt}}{p_{1t}}-\sum_{r\neq 2}\frac{p_{rt}}{p_{2t}}=0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r\neq 1}\frac{p_{rt}}{p_{1t}}-\sum_{r\neq m}\frac{p_{rt}}{p_{mt}}=0$$

o bien

$$\sum_{r\neq 1}p_{rt}\frac{p_{2t}}{p_{1t}}+p_{2t}=\sum_{r=1}^{m}p_{rt}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r\neq 1}p_{rt}\frac{p_{mt}}{p_{1t}}+p_{mt}=\sum_{r=1}^{m}p_{rt}$$

por tanto para el bien 2

$$p_{2t}[1+\sum_{r\neq 1}\frac{p_{rt}}{p_{1t}}]=p_{mt}[1+\sum_{r\neq 1}\frac{p_{rt}}{p_{1t}}],\text{con } p_{rt}>0\ \forall r$$

de aquí

$$p_{2t} = p_{mt}, \text{ análogamente } p_{it} = p_{mt} \qquad i = 3, \ldots, m-1.$$

Por tanto, la razón de precios entre cualesquiera dos bienes debe permanecer igual en cualquier periodo t.

Sustituyendo la expresión (49) en la restricción de presupuesto para cada individuo dada en (19), y suponiendo hasta el momento que la cantidad comprada al tiempo t, x^d_{rt}, es la misma para todo bien r en el conjunto de bienes R tenemos

$$x^s_{it} = (n_t - 1)x^d_{rt}, \qquad \text{para cualquier bien } r \in R. \tag{50}$$

Por otra parte, sustituyendo la cantidad a comprar, x^d_{rt}, dada en (50), en la función de utilidad para cada individuo, u_{it}, dada en (44), obtenemos

$$u_{it} = [(L_{it})^a - x^s_{it}](K_t)^{n_t-1}\left(\frac{x^s_{it}}{n_t - 1}\right)^{n_t-1} \prod_{j \in J} (L_{jt})^a.$$

De acuerdo a lo anterior, las condiciones de primer orden para maximizar la utilidad u_{it} con respecto a la cantidad vendida, x^s_{it}, implican

$$\frac{\partial u_{it}}{\partial x^s_{it}} = 0, \text{ si y solo si } (x^s_{it})^{n_t-1} = [(L_{it})^a - x^s_{it}](n_t - 1)(x^s_{it})^{n_t-2},$$

es decir

$$x^s_{it} = \frac{(n_t - 1)}{n_t}(L_{it})^a. \tag{51}$$

Utilizando nuevamente la restricción de presupuesto, para cada persona

$$x_{rt}^d = \frac{(L_{it})^a}{n_t} \text{ para todo bien } r \in R, \; i = 1, \ldots, m. \tag{52}$$

De esta manera, las variables que representan la compra y venta correspondientes a cada individuo, x_{it}^s y x_{rt}^d, respectivamente, están determinadas en función del número de bienes a comercializar, n_t, y el nivel de producción, $(L_{it})^a$, el cual se encuentra directamente relacionado con el nivel de experiencia o aprendizaje, L_{it}.

Cuando la cantidad vendida del bien i, x_{it}^s, en (51), y la cantidad comprada del bien r, x_{rt}^d, en (52), son sustituidas en la expresión (19), las condiciones de oferta igual a demanda agregada en el mercado, y la restricción de igualdad en las utilidades implican el siguiente lema.

LEMA 3. La cantidad comprada x_{rt}^d es la misma para cualquier bien r, $r = 1, 2, \ldots, m$; análogamente, el nivel de experiencia y trabajo invertido en producir el bien i. L_{it} y l_{it}, junto con el número de bienes comercializados, n_t, son idénticos para cualquier persona.

Consideremos nuevamente el planteamiento hecho en (44).
Sustituyendo en la función de utilidad, u_{it}, las expresiones desarrolladas en (51) y (52) para las cantidades x_{it}^s y x_{rt}^d, obtenemos

$$u_{it} = u_t = (k)^{n_t - 1}(n_t)^{1-2n_t}(L_{it})^{an_t} \prod_{j \in J} (L_{jt})^a, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{53}$$

Entonces, reescribimos el planteamiento (44) como

$$\begin{aligned} max \qquad U_i &= U_t \\ &= \int_0^\infty u_t e^{-rt} dt \end{aligned} \tag{54}$$

$$= \int_0^\infty (k)^{n_t - 1} (n_t)^{1-2n_t} (L_{it})^{an_t} \prod_{j \in J} (L_{jt})^a e^{-rt} dt$$

sujeto a:

$$l_{it} + \sum_{j \in J} l_{jt} = 1,$$

$$l_{yt} = \frac{dL_{yt}}{dt}, \qquad y = i, j,$$

$$0 \leq l_{yt} \leq 1$$

De acuerdo al procedimiento desarrollado anteriormente, es equivalente a maximizar la función hamiltoniana

$$\begin{aligned} H_i &= H(L_{yt}, l_{yt}, \gamma_{yt}, \lambda_t) \\ &= u_t + \lambda_t (1 - l_{it} - \sum_{j \in J} l_{jt}) + \sum_{j \in J} \gamma_{jt} l_{jt} + \gamma_{it} l_{it}, \ \forall i, \ i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{55}$$

en donde hemos adicionado al problema, $m - n_t + 1$ variables de costo γ_{yt}, $y = i, j$, y multiplicadores dinámicos λ_t para cada $t \in [0, \infty)$.

Por consiguiente, para conocer el nivel óptimo de experiencia o preparación en producir el bien $y (y = i, j)$, L_{yt}, así como el número de bienes comercializados al tiempo t, n_t, necesitamos resolver simultáneamente los siguientes planteamientos

$$\underset{l_{yt}}{\text{Maximizar:}} \, H(L_{yt}, l_{yt}, \gamma_{yt}, \lambda_t), \quad \text{para todo tiempo } t \in [0, \infty), \tag{56}$$

sujeto a:

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma_{yt}} = \frac{dL_{yt}}{dt}, \qquad y = i, j,\ j \in J,$$

$$\frac{\partial H}{\partial L_{yt}} = -\frac{d\gamma_{yt}}{dt}, \tag{57}$$

$$l_{it} + \sum_{j \in J} l_{jt} = 1, \qquad l_{yt} \in [0, 1]$$

y

$$\underset{n_t}{\text{Maximizar:}}\, H(L_{yt}, l_{yt}, \gamma_{yt}, \lambda_t), \tag{58}$$

dado

$$n_t \mid_{t=0} = 1,\ n_t \in \mathbf{N}$$

Inicialmente consideraremos el problema de maximizar la función hamiltoniana H con respecto al trabajo invertido en la producción del bien y, l_{yt}, $(y = i, j)$.

Reescribiendo la función hamiltoniana y el sistema de ecuaciones diferenciales, dados en (55) y (57) respectivamente, obtenemos

$$H(L_{yt}, l_{yt}, \gamma_{yt}, \lambda_t) = u_t + \lambda_t + l_{it}(\gamma_{it} - \lambda_t) + \sum_{j \in J} l_{jt}(\gamma_{jt} - \lambda_t),\ y = i, j,\ \ j \in J$$

$$l_{yt} = \frac{dL_{yt}}{dt}, \qquad y = i, j,\ j \in J, \tag{59}$$

$$\frac{a n_t u_t}{L_{it}} = -\dot{\gamma_{it}}, \qquad \frac{a u_t}{L_{jt}} = -\dot{\gamma_{jt}},$$

Como la función hamiltoniana a maximizar, H, es lineal con respecto a las variables que representan el trabajo en el bien y, l_{yt} (variables de control), podemos diferenciar tres casos para los cuales H alcanza su máximo:

$$l_{yt} = 1 \qquad \text{si} \qquad \gamma_{yt} > \lambda_t,$$

$$l_{yt} \in [0,1] \qquad \text{si} \qquad \gamma_{yt} = \lambda_t, \tag{60}$$

$$l_{yt} = 0 \qquad \text{si} \qquad \gamma_{yt} < \lambda_t, \ \text{para } y = i, j, \ j \in J,$$

Por otra parte, considerando los resultados del lema 1, para un individuo quien vende el bien i y comercia con n_t bienes al tiempo t ($n_t \leq m$), las cantidades x_{it} y x_{it}^s con las que él mismo se provee y vende respectivamente, son positivas, igualmente ocurre con la cantidad de trabajo invertido, l_{it}, siempre y cuando no se realicen compras del mismo bien i

$$x_{it}, x_{it}^s, l_{it} > 0, \qquad x_{it}^d = 0.$$

Análogamente, para el conjunto de los $m - n_t$ bienes no comercializados, J, por el lema 1

$$x_{jt}, l_{jt} > 0, \qquad x_{jt}^s, x_{jt}^d = 0,$$

De aquí, el nivel de trabajo invertido l_{yt}, para $y = i, j, j \in J$, siempre es mayor que cero. Combinado con la restricción

$$l_{it} + \sum_{j \in J} l_{jt} = 1$$

afirmamos que las cantidades que representan el trabajo invertido, l_{it} y l_{jt} (para $j \in J$), están entre cero y uno cuando $0 < n_t < m$, es decir, cuando el conjunto de los $m - n_t$ bienes no comercializados, J, no es vacio.

De acuerdo a lo anterior, y considerando los casos dados en (60) para los cuales se maximiza la utilidad, obtenemos

$$\gamma_{it} = \gamma_{jt} = \lambda_t, \qquad l_{yt} \in [0,1],\ y = i,j,\ j \in J, \tag{61}$$

es decir, en cada tiempo t, las $m - n_t + 1$ variables de costo γ_{yt} son equivalentes a los multiplicadores dinámicos,λ_t.

Como consecuencia de la dependencia existente entre el problema de control descrito en (56) y el problema de programación entera en (58), antes de deducir explícitamente el valor de las variables de estado, L_{yt}, daremos la siguiente aproximación para determinar la trayectoria óptima de la variable que representa el número de bienes a comercializar, n_t^*, suponiendo hasta el momento que la función hamiltoniana, H, es concava sobre un dominio continuo de las variables n_t y los demás parámetros son dados

$$\frac{\partial H}{\partial n_t} = 0, \text{ para cualquier tiempo } t, \text{con } t \in [0,\infty),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial n_t} &= \frac{\partial u_t}{\partial n_t} \\
&= [(k)^{n_t-1} ln(k)] n_t{}^{1-2n_t} (L_{it})^{an_t} \prod_{j\in J} (L_{jt})^a \\
&+ (n_t)^{1-2n_t}\ [-2(ln(n_t)+1) + \frac{1}{n_t}]\ (k)^{n_t-1} (L_{it})^{an_t} \prod_{j\in J} (L_{jt})^a \\
&+ [(L_{it})^{an_t} a\ ln(L_{it})]\ (k)^{n_t-1} (n_t)^{1-2n_t} \prod_{j\in J} (L_{jt})^a \\
&= u_t B_t \\
&= 0
\end{aligned}$$

donde

$$B_t = ln(k) - 2[ln(n_t{}^*)+1] + \frac{1}{n_t{}^*} + a\ ln(L_{it}),\ 0 < k < 1, a > 1,\ u_t > 0. \tag{62}$$

Aquí, n_t^* representa una aproximación para el número óptimo de bienes n_t.

En base a lo anterior, analizaremos el comportamiento de la expresión, B_t, en términos de la constante que caracteriza la eficiencia en las transacciones, k, y el exponente a relacionado con el nivel de experiencia o aprendizaje.

Para el caso en el que la constante de transacción, k, tienda a cero, y el exponente a converga a uno, es decir, para k y a tales que

$$ln(k) + a\ ln(L_{it}) < 2[ln(n_t) + 1] - \frac{1}{n_t}, \text{implica } B_t < 0\ n_t \leq m,$$

la expresión B_t, particularmente $ln(k)$, decrece indefinidamente conforme disminuye el valor de la constante de transacción k, considerando que el nivel de experiencia o aprendizaje, L_{it}, y las demás expresiones, siempre están acotadas en cada tiempo t

$$L_{it} = \int_0^t l_{i\tau}\ d\tau \leq t, \text{ ya que } \ 0 \leq l_{it} \leq 1\ \forall t,$$

$$\frac{1}{n_t} \leq 1, \qquad -2[ln(n_t) + 1] \leq -2, \qquad n_t \in \mathbf{N},$$

de aquí, $\partial H / \partial n_t$ es negativa para todo n_t. En base a la condición de frontera dada en (58)

$$n_t\ |_{t=0} = 1, \qquad n_t \in \mathbf{N} \tag{63}$$

y como consecuencia del decrecimiento de la función hamiltoniana, H, $n_t = 1$ representa la cantidad óptima de bienes a comercializar en cualquier tiempo t.

Análogamente, si el coeficiente de transacción, k, y el exponente a son suficientemente grandes, es decir si

$$ln(k) + a\ ln(L_{it}) > 2[ln(n_t) + 1] - \frac{1}{n_t}, \text{ entonces } B_t > 0,\ n_t \leq m,$$

por tanto, la razón de cambio da la utilidad H con respecto al número de bienes a comercializar, n_t, $\partial H/\partial n_t$, es positiva.

Nuevamente, combinando la condición de frontera (63) y la desigualdad $\partial H/\partial n_t > 0$, deducimos que $n_t = m$ representa el número de bienes óptimo en este caso.

Si las constantes k y a no son demasiado grandes ni muy pequeñas, es decir, si existe $\hat{t} \in [0, \infty)$ tal que

$$B_t < 0 \text{ para } 0 < t < \hat{t}, \text{ y } \qquad B_t > 0\ , \text{ para } \hat{t} < t,$$

podemos probar que a lo largo de la trayectoria óptima, el número de bienes a comercializar, n_t, se incrementará a través del tiempo.

A partir de la última igualdad en la expresión (62), sobre la trayectoria óptima tenemos

$$B_t = 0, \text{ o bien } 0 = ln(k) - 2ln(n_t) - 2 + \frac{1}{n_t} + aln(L_{it}), \tag{64}$$

derivando con respecto a t y considerando que la función logaritmo es monótona creciente, el signo de la derivada no cambia y la variable n_t se incrementa conforme transcurre el tiempo

$$0 = -2\frac{\dot{n}_t}{n_t} - \frac{\dot{n}_t}{{n_t}^2} + a\frac{l_{it}}{L_{it}},$$

$$\frac{d(ln(n_t))}{dt} = \frac{\dot{n}_t}{n_t} = a\rho_i(2 + \frac{1}{n_t}) > 0 \text{ para } m > n_t,$$

donde

$$\dot{n}_t = \frac{dn_t}{dt}, \ \rho_i = \frac{l_{it}}{L_{it}}.$$

Utilizando nuevamente la expresión (64) deducimos el valor óptimo de las variables de estado, L_{yt}

$$B_t = 0, \qquad \text{implica} \qquad 1 = kn_t{}^{-2}e^{[\frac{1}{n_t}-2]}\left(L_{it}\right)^a$$

esto es

$$L_{it} = k^{-\frac{1}{a}}n_t^{\frac{2}{a}}e^{[2-\frac{1}{n_t}]/a}, \tag{64a}$$

además, combinando las expresiones (59) y (61)

$$\frac{an_t u_t}{L_{it}} = -\dot{\gamma}_{it} = -\dot{\gamma}_{jt} = \frac{au_t}{L_{jt}},$$

o bien

$$L_{jt} = \frac{L_{it}}{n_t} \tag{64b}$$

Como es de esperarse, para cada individuo, la cantidad de trabajo invertido en producir los bienes que no compra ni vende, l_{jt}, tiende a cero conforme se incrementa el número de bienes a comercializar, n_t

$$\begin{aligned} l_{jt} &= \frac{dL_{jt}}{dt} \\ &= k^{\frac{-1}{a}}e^{[2-\frac{1}{n_t}]}\left(\frac{1}{n_t^{3-\frac{2}{a}}} + \frac{1}{n_t^{4-\frac{2}{a}}}\right), \end{aligned}$$

por consiguiente cada individuo deja de proveerse por sí mismo de estos bienes a través del tiempo y paulatinamente comienza a comprar otros bienes.

En base a lo anterior, si combinamos las restricciones del planteamiento hecho en (54), podemos expresar la razón de cambio o crecimiento del número de bienes, n_t, en términos del coeficiente de transacción, k

$$
\begin{aligned}
1 &= l_{it} + \sum_{j \in J} l_{jt} \\
&= \frac{d(L_{it})}{dt} + \sum_{j \in J} \frac{d(L_{jt})}{dt} \\
&= k^{\frac{-1}{a}} n_t^{\frac{2}{a}} e^{\frac{2}{a} - \frac{1}{an_t}} \dot{n}_t \left(\frac{1}{an_t^2} + \frac{2}{an_t} \right) + \\
&+ \sum_{j \in J} \left(k^{\frac{-1}{a}} n_t^{\frac{2}{a}} e^{\frac{2}{a} - \frac{1}{an_t}} \right) \frac{\dot{n}_t}{n_t^2} [\frac{2}{a} + \frac{1}{an_t} - 1],
\end{aligned}
\tag{64c}
$$

de aquí, la razón de cambio del número de bienes a comercializar se incrementa junto con la constante que representa la eficiencia en las transacciones

$$\frac{dn_t}{dt} = \dot{n}_t = \frac{an_t^{3-2/a} k^{1/a} e^{1/an_t - 2/a}}{m(2n_t + 1) - an_t(m - n_t)} > 0, \qquad \text{si } n_t < m.$$

De esta manera concluimos que al analizar el comportamiento de la variable que representa el número de bienes a comercializar, n_t, a partir de la eficiencia en las transacciones, k, y la constante que describe el beneficio por especialización o aprendizaje, a, diferenciamos tres posibles situaciones

$$\rho_n = \frac{\dot{n}_t}{n_t} = a\rho_i[2 + \frac{1}{n_t}] > 0 \text{ para } m > n_t \tag{65a}$$

si k y a no son demasiado grandes ni muy pequeños, y $\rho_i = \frac{l_{it}}{L_{it}}$

$$\frac{\partial H}{\partial n_t} < 0 \ \ \forall n_t \ \text{ si } k \text{ y } a \text{ son suficientemente pequeños,} \tag{65b}$$

$$\frac{\partial H}{\partial n_t} > 0 \ \ \forall n_t \ \text{ si } k \text{ y } a \text{ son suficientemente grandes,} \tag{65c}$$

$$\frac{dn_t}{dt} \ \text{ se incrementa junto con } k, \text{ si } n_t < m. \tag{66}$$

Las expresiones (65a) y (65b) implican que $n_t^* = 1$ representa la cantidad óptima de bienes a comercializar desde el tiempo $t = 0$ si k y a son *suficientemente pequeñas.* Bajo estas condiciones, existe un beneficio relativamente bajo por la especialización o aprendizaje, originando una falta de planificación o aprendizaje para producir otros bienes, además, como consecuencia de la baja efectividad en las transacciones, el equilibrio será caracterizado por la autosuficiencia de cada persona, es decir, cada individuo continuamente se provee de todos los bienes que él necesita.

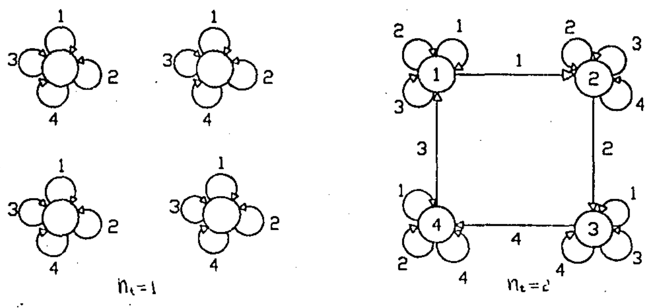
En el otro extremo, si suponemos un *alto* beneficio por especialización, a, y un nivel de eficiencia, k, cercano a uno, el número de bienes a comercializar n_t^* toma el valor m. Por consiguiente propicia una completa especialización por parte de cada individuo desde el tiempo $t = 0$, suponiendo así, una mayor productividad, la cual compensa el alto costo de transacción $(1 - K_t)$ en que incurre cada persona al comprar otros bienes de consumo necesarios.

Para valores intermedios de a y k, el valor presente de los beneficios por especialización disminuye debido a la pérdida de utilidad originada por el costo de transacción, es decir, los beneficios por especialización serán bajos. Sin embargo, conforme transcurre el tiempo, la experiencia o aprendizaje originados por la práctica en la producción contribuyen a incrementar el grado de especialización, y de la misma manera, el nivel de producción. En éste sentido, la experiencia o el aprendizaje representan un factor fundamental en el crecimiento ya que en situaciones donde el nivel de especialización permanece invariante a través del tiempo, se mantiene constante el nivel de producción, el cual a su vez, impide un beneficio económico y origina que la especialización nunca sea adecuada.

Algunos resultados derivados de las expresiones (65) y (66) son analizados en la siguiente proposición.

Proposición 1. El equilibrio dinámico es caracterizado inicialmente por una autosuficiencia si la eficiencia en las transacciones y los beneficios por la especialización son bajos, por otra parte, existe permanentemente una completa especialización con respecto a cada individuo si tanto la eficiencia en las transacciones como los beneficios que obtiene cada perona por su especialización son suficientemente grandes. La división del trabajo evolucionará gradualmente hasta que el número de bienes comercializados, n_t, sea igual al número total de bienes, m, si la eficiencia en las transacciones y el nivel de beneficios no son muy grandes ni demasiado pequeños.

Es necesario observar que la fuente de crecimiento económico no es el producto de un crecimiento en el tamaño de la población o un cambio en las condiciones de las transacciones o de producción. Mas bien, el crecimiento es generado por la evolución en la división del trabajo. Un ejemplo de tal evolución es descrito en la figura 2 para el caso en el cual tanto el número total de bienes como de individuos es 4 ($m = 4$)



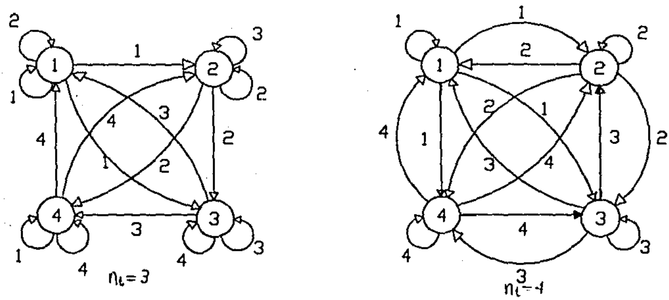


FIG.2. Evolución de la división del trabajo.

En la parte a, cada persona se provee de todos los bienes que ella necesita. En b, cada persona vende un bien, compra un bien, y produce tres bienes (el número de bienes a comercializar, n_t, es dos). En el inciso c, cada persona vende un bien, compra dos bienes, y se provee cada una de dos bienes ($n_t = 3$). En d, cada persona vende y produce un bien, compra tres bienes y comercia con cuatro bienes ($n_t = 4$).

Los círculos, lineas y números en la figura 2 tienen la misma interpretación que en la figura 1, consecuentemente, el equilibrio descrito en la figura 2 es también óptimo en el sentido de Pareto, y además, conserva la igualdad oferta-demanda que caracteriza el equilibrio económico.

En base a la diferenciación de la función de utilidad u_t es posible examinar el crecimiento económico en equilibrio, el cual se traduce, en un incremento en las utilidades obtenidas por cada individuo a través del tiempo:

$$
\begin{aligned}
\rho_u &= \frac{d\big(ln(n_t)\big)}{dt} \\
&= \dot{n}_t[ln(k) - 2ln(n_t) + \frac{1}{n_t} - 2 + aln(L_{it})] + an_t\frac{l_{it}}{L_{it}} \\
&+ a\sum_{j\in J}\frac{l_{jt}}{L_{it}},
\end{aligned}
$$

empleando las expresiones (64a), (64b) y (64c) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\rho_u &= an_t\frac{l_{it}}{L_{it}} + a\sum_{j\in J}\frac{l_{jt}}{L_{jt}}, \\
&= a\left(\frac{n_t}{L_{it}}\right)\left(l_{it} + \sum_{j\in J} l_{jt}\right), \\
&= an_t^{1-\frac{2}{a}}k^{\frac{1}{a}}e^{\frac{1}{an_t}-\frac{2}{a}} > 0,
\end{aligned} \tag{67}
$$

Para analizar el crecimiento de las utilidades en función del número de bienes existentes en la economía utilizamos nuevamente la expresión (67)

$$
\rho_u = a\left(n_t\frac{d\big(ln(L_{it})\big)}{dt} + \sum_{j\in J}\frac{d\big(ln(L_{jt})\big)}{dt}\right),
$$

Derivando

$$
\begin{aligned}
\rho_u &= a\left(\left(\frac{2\dot{n}_t}{an_t} + \frac{\dot{n}_t}{an_t^2}\right)m - (m - n_t)\frac{\dot{n}_t}{n_t}\right), \\
&= a\left(\frac{2mn_t + m - an_t(m - n_t)}{an_t^2}\right)\dot{n}_t > 0, \\
&= a\alpha n_t^{(1-2/a)}k^{1/a}e^{1/a[\frac{1}{n_t}-2]}
\end{aligned}
$$

donde

$$\alpha = \frac{2mn_t + m - an_t(m - n_t)}{an_t^2}$$

Por tanto, las utilidades se incrementan conforme transcurre el tiempo siempre y cuando el número total de bienes m sea suficientemente grande, y además, el número de bienes a comercializar n_t se encuentre suficientemente cerca de m, es decir

$$2mn_t + m > an_t(m - n_t), \qquad \text{en cualquier tiempo } t,$$

o bien

$$\lim_{n_t \to m} \rho_u = a(2m^2 + m)m^{1-\frac{2}{a}} k^{\frac{1}{a}} e^{\frac{1}{a}[\frac{1}{m} - 2]} > 0$$

De acuerdo a lo anterior, si el potencial para la evolución de la división del trabajo es significante (m *grande*) y la división del trabajo está suficientemente avanzada (n_t *cerca de* m), la tasa de crecimiento económico, ρ_u, crecerá sobre el tiempo. Posteriormente, la tasa de crecimiento se mantendrá constante a través del tiempo después de que el número de bienes a comercializar, n_t, alcance el número total de bienes, m

$$\frac{d\rho_u}{dt} = 0, \qquad \text{en } n_t = m.$$

Por otra parte, el conjunto de bienes sin comercializar, J, llega a ser vacío, y simultáneamente, la proporción que representa el trabajo invertido en producir el bien i, l_{it}, es uno, ocacionando que al concentrar su trabajo en el bien i, el nivel de experiencia L_{it} se incremente a través del tiempo.

Un caso especial de crecimiento económico se establece cuando el equilibrio es consecuencia de la autosuficiencia de cada individuo. En tal situación, permanentemente cada individuo distribuye su trabajo en las m diferentes actividades de producción. De esta manera $1/m$ representa el trabajo invertido en producir cada bien, es decir, el nivel de experiencia o aprendizaje acumulado durante la producción de un bien está dado por

$$L_t = \int_0^t \frac{1}{m}\, dt = \frac{t}{m},$$

de aquí, el nivel de producción al tiempo t, $(L_t)^a$, determina la función de utilidad en t

$$\begin{aligned} U_t &= \prod_{i=1}^{m} (L_t)^a \\ &= \left(\frac{t}{m}\right)^{am}. \end{aligned} \tag{68}$$

Consecuentemente, la tasa de crecimiento económico está determinada por

$$\rho_u = \frac{d\big(ln(U_t)\big)}{dt} = \frac{am}{t}. \tag{69}$$

Por consiguiente, la economía crecerá lentamente bajo condiciones de autosuficiencia a través del tiempo. Dicho crecimiento es originado principalmente por el aprendizaje o experiencia adquirida a pesar de la falta de división en el trabajo, sin embargo, la tasa de crecimiento correspondiente a los ingresos de cada persona decrece monótonamente.

A partir de las expresiones (68) y (69) establecemos la siguiente proposición.

Proposición 2. La evolución en la división del trabajo genera crecimiento en el ingreso percápita. La tasa de crecimiento de los ingresos se incrementa si el grado de evolución del trabajo es alto. Por otra parte, ésta tasa decrece monótonamente ya sea por la autosuficiencia de cada persona o por la finalización en la evolución de la división del trabajo.

De acuerdo a lo anterior, debemos considerar algunas implicaciones adicionales del equilibrio que involucra la división del trabajo.

Definimos a E como la extensión del mercado, específicamente como el volumen total de bienes comercializados por cada persona. Por tanto, a partir de las expresiones (51) (52) expresamos la extensión E en terminos de las cantidades totales compradas y vendidas x_{it}^{d} y x_{it}^{s}

$$\begin{aligned} E &= (n_t - 1)x_{rt}^{d} + x_{it}^{s} \\ &= \frac{2(n_t-1)}{n_t}(L_{it})^{a}, \end{aligned}$$

donde $(L_{it})^{a}$ representa el nivel de producción del bien i que vende cada individuo, y $\frac{(n_t-1)}{n_t}$ es la parte del bien que es vendida.

Diferenciando la extensión E con respecto a t obtenemos

$$\begin{aligned} \rho_E &= \frac{\dot{E}}{E} \\ &= \frac{d(lnE)}{dt} \\ &= \frac{\dot{n}_t}{n_t-1} + \frac{\dot{n}_t}{n_t} + a\frac{l_{it}}{L_{it}} \\ &= \frac{\rho_n}{n_t-1} + a\rho_i > 0. \end{aligned} \tag{70}$$

Aquí, $\rho_n/(n_t - 1)$ indica la contribución de la evolución en la división del trabajo, y $a\rho_i$ representa la contribución del aprendizaje o experiencia originadas por la práctica. Por consiguiente, el mercado tiende a extenderse conforme se incrementa tanto el número de bienes a comercializar como el nivel de experiencia adquirido. Si el potencial para la evolución del trabajo ha sido agotado ($n_t = m$), el primer término tiende a cero y por tanto, a partir de ese momento, la tasa de crecimiento de la extensión del mercado depende únicamente de la experiencia acumulada.

Por otra parte, asumimos que la dependencia comercial de cada individuo con respecto al mercado, R, está representada por la proporción entre el número de bienes comercializados y el número de bienes total

$$R = \frac{n_t}{m}, \qquad \text{para cualquier tiempo } t.$$

De esta manera la tasa de crecimiento de la dependencia comercial es

$$\rho_R = \frac{\dot{R}}{R} = \rho_n. \tag{71}$$

Al igual que la tasa para el número de bienes a comercializar ρ_n, esta tasa de crecimiento es positiva mientras no se alcance el número máximo de bienes a comercializar, es decir, para $n_t < m$ la dependencia comercial de cada individuo con respecto a las demás personas aumenta como consecuencia de un mayor intercambio comercial con un ~~número creciente~~ de socios.

La ventaja comparativa de un productor es caracterizada por la diferencia entre la producción percápita del vendedor de un bien y la producción percápita de cualquier otro comprador de ese bien. Denotando esta diferencia por D, obtenemos $D = [\frac{(L_{it})^a}{n_t}] - G$, donde G representa el nivel de producción de los $n_t - 1$ compradores de ese bien y es constante debido a que el proceso de acumulación de experiencia en cada comprador para producir ese bien se ha detenido. Si derivamos esta diferencia, apartir de la expresión (64a) es inmediato que

$$\begin{aligned} \rho_D &= \frac{d(lnD)}{dt} \\ &= \frac{\dot{D}}{D} \\ &= \dot{n}_t\left(\frac{1}{n_t} + \frac{1}{{n_t}^2}\right) > 0 \qquad \forall t \end{aligned} \tag{72}$$

Bajo estas circunstancias, la ventaja comparativa de un experto sobre un novato en la producción de un determinado bien se incrementa conforme evoluciona la división del trabajo, es decir, cuando aumenta el número de bienes a comercializar n_t.

La participación del costo de transacción dentro de los ingresos de cada persona, S, es representada por la proporción entre el costo de los bienes comprados que se pierden durante las transacciones y los ingresos totales. Puesto que el costo de los bienes comprados $p_{rt}x^d_{rt}$ es el mismo para cualquier bien r en el conjunto R, la cantidad $(1 - k_t)(n_t - 1)p_{rt}x^d_{rt}$ representa el costo de transacción en las negociaciones mientras que la cantidad $(n_t - 1)p_{rt}x^d_{rt} = p_{rt}x^s_{rt}$ caracteriza el ingreso percápita al tiempo t de acuerdo a la restricción de presupuesto. De aquí

$$S = \frac{(1 - K_t)(n_t - 1)p_{rt}x^d_{rt}}{(n_t - 1)p_{rt}x^d_{rt}} = 1 - \frac{k}{n_t} \qquad (73a)$$

mide el grado de participación que tiene el costo de transacción con respecto al ingreso de cada individuo. Es decir, podemos afirmar que mientras mas grande sea el costo de transacción en las negociaciones mayor será su afectación en los ingresos de cada persona. Por otra parte, para apreciar su comportamiento en relación a la evolución en la división del trabajo, derivamos la expresión anterior con respecto a la variable que representa el número de bienes a comercializar, n_t

$$\frac{\partial S}{\partial n_t} = 1 + \frac{k}{{n_t}^2} \qquad \text{si } n_t < m \qquad (73b)$$

Por consiguiente la participación de el costo de transacción en el ingreso se incrementa a medida que evoluciona la división del trabajo, específicamente cuando el número de bienes n_t se acerca al total m. Como el costo de transacción $(1 - K_t)$ puede ser visto como costos no productivos, la condición (20b) implica que el ingreso de cada individuo crece conforme la división del trabajo evoluciona.

Los resultados obtenidos en las expresiones (70)-(73) son sintetizadas en la siguiente proposición.

Proposición 3. La extensión del mercado, la dependencia comercial, la ventaja comparativa de un experto en relación a un novato, y la participación de el costo de transacción en el ingreso se incrementan conforme evoluciona la división del trabajo a través del tiempo.

Es evidente que la eficiencia en las transacciones tiene un importante efecto en la evolución de la división del trabajo y consecuentemente en el crecimiento económico, en la extensión del mercado, y la velocidad en la acumulación del capital humano. Dado que las políticas gubernamentales, los acuerdos institucionales, y la urbanización afectan la eficiencia en las transacciones de manera importante, sus efectos sobre la evolución en la división del trabajo y el crecimiento económico son determinantes.

CAPITULO 2

Interpretación Personal

A partir del planteamiento y desarrollo descrito en el capítulo anterior podemos caracterizar en primera instancia, las propiedades escenciales del modelo, y posteriormente, las implicaciones que el modelo proporciona.

Particularmente, el modelo desarrollado permite formalizar la relación existente entre la estructura del mercado, la división del trabajo y el nivel de especialización de cada persona, en este aspecto, una de las principales aportaciones de este trabajo es concluir que la tasa de ingreso per cápita, o bien, el crecimiento económico, dependen únicamente de dos factores o variables exógenas (k y a). La primera caracteriza la eficiencia en las transacciones incluyendo cambios tecnológicos o mejoramiento de los medios de producción, y la segunda representa los beneficios que obtiene cada persona por su nivel de especialización.

Es necesario aclarar que tales beneficios están determinados en relación al incremento de la productividad de cada individuo (la cual está caracterizada por la expresión $x_{it} + x_{it}^d = (L_{it})^a$) considerando que la *constante* $a > 1$ representa los rendimientos crecientes que obtiene cada persona por su especialización.

Aunque existen relativamente pocas variables dentro del modelo, es necesario asociar en una sola variable (m) tanto el número de bienes como el número de individuos ya que de lo contrario habrían individuos produciendo más de un bien, o en el otro caso, existirían bienes producidos por dos o más personas originando de esta manera distintos niveles de especialización o experiencia así como diferentes niveles de dependencia comercial de los individuos con respecto al mercado. En este sentido el modelo proporciona una estructura en equilibrio que propicia principalmente condiciones de igualdad en términos económicos, y al mismo tiempo, supone un mismo nivel de bienestar en cada individuo.

Como consecuencia de las propiedades simétricas del modelo, las decisiones de cada individuo proporcionan un mismo nivel de utilidad, el cual lo podemos asociar (dentro del modelo) con un mismo nivel de ingreso.

De esta manera podemos apreciar desde otro punto de vista la aparente relación que existe entre la distribución del ingreso y el crecimiento económico, es decir: *Si se tiene una mejor distribución del ingreso, se obtendrá un mayor crecimiento económico.*

Por otra parte, tanto el nivel de especialización que adquiere cada persona como el aprendizaje acumulado con la práctica son las principales fuentes de incremento en la producción ya que circunstancias en las que progresivamente cada persona concentra su trabajo en una actividad específica existe mayor efectividad no solo en la productividad total sino en la calidad de los bienes. En este contexto, los beneficios por la especialización que obtiene cada persona, crean a través del tiempo una ventaja comparativa al convertirse en los únicos prodúctores de un determinado bien, y por otro lado, originan una mayor dependencia comercial con respecto a los demás individuos ya que su consumo depende en mayor proporción de compras realizadas a otros productores.

De acuerdo a lo anterior, podría pensarse que no existe diferenciación en el grado de dificultad o proceso de producción de los bienes, y en éste caso, el modelo restringe a todos los individuos en adquirir al mismo ritmo el nivel de práctica o especialización necesarios para la producción. Bajo estas circunstancias en las que cada individuo es el único productor de un determinado bien, no existen posibilidades de propiciar la formación de monopolios partiendo del supuesto en el que la totalidad de las decisiones comerciales son efectuadas en el tiempo $t = 0$ y asumiendo de la misma manera que inicialmente todos los individuos presentan similares condiciones y expectativas económicas.

Con la estructura del mercado y el nivel de especialización endógeno, el número de productores de cada bien varía conforme transcurre el tiempo. Esta característica representa una ventaja sobre los demás modelos en los cuales el grado de división del trabajo está asociado con el número de bienes. En consecuencia, si hay permanentemente al menos un productor por cada bien, y consideramos que existen tantos bienes como individuos, entonces podemos esperar un nivel constante de empleo acompañado de un nivel de especialización y experiencia creciente en cada persona.

Dadas las condiciones iniciales, el modelo no considera en el largo plazo la entrada o salida de individuos ya que esto implica necesariamente el ingreso o salida del mismo número de bienes a producir, es decir, el ingreso de un nuevo consumidor-productor origina la aparición de un nuevo producto, o inversamente si un individuo desea salir del mercado. Todo esto con la finalidad de mantener el nivel de competencia por la producción de bienes, y de esta forma propiciar que cada persona concentre su trabajo en la producción de un solo bien.

Independientemente de las variaciones en el número de horas trabajadas por los individuos, es claro que una reducción o incremento en la jornada de trabajo origina variaciones en la producción final de bienes, sin embargo, dada la relación entre el nivel de producción, $(L_{it})^a$, y la proporción de trabajo invertido en la producción de cada bien, $l_{it} + \sum_j l_{jt} = 1$, la tasa de crecimiento ρ_u continuará siendo creciente a través del tiempo.

Durante el planteamiento de cualquier modelo de crecimiento económico es importante considerar su capacidad para predecir tasas de crecimiento a través del tiempo, y en este aspecto, el modelo en este trabajo predice éstas tasas de crecimiento dependiendo particularmente del país del que se trate y de sus respectivas variables que representan la eficiencia en las transacciones, k, y los beneficios que obtiene cada persona por su especialización, a, ya que estas variables determinan a partir de cual periodo comenzará la evolución en la división del trabajo.

Es importante observar que tiene un caracter subjetivo el tratar de determinar las variables exógenas a y k ya que estas dependen de multiples factores que van desde políticas gubernamentales y cambios tecnológicos hasta las condiciones de trabajo existentes que propicien e incentiven a cada individuo a incrementar su productividad. De ésta situación se desprende que dada la dificultad para estimar estos parámetros, no es posible obtener una aplicación práctica del modelo, mas bien, se presenta una serie de supuestos que nos permiten establecer concluciones acerca de algunos aspectos económicos acerca de la teoría del crecimiento independientemente de su posible aplicación.

Otro enfoque alternativo que nos permite examinar las fuentes de crecimiento es conocido como la contabilidad del crecimiento, el cual no consiste en un balance de la situaciación existente o de las cuentas nacionales, sino mas bien, en la contabilización exhaustiva de los factores que generan las tendencias observadas en el crecimiento.

Considerando lo anterior, la razón principal por la cual el modelo no relaciona o analiza directamente la influencia del dinero es debido a que se trata de una economía de intercambio, en la cual todos los individuos inicialmente son iguales y los precios relativos se mantienen constantes a través del tiempo.

Usualmente se diferencían tres principales factores o fuentes de crecimiento: el *crecimiento* del trabajo, el *crecimiento* del capital, y el perfeccionamiento de la eficiencia técnica, específicamente, en éste trabajo examinamos el crecimiento del trabajo en términos de los beneficios que obtiene cada persona por su especialización (a partir del parámetro a) y la división del trabajo, y por otra parte, el perfeccionamiento técnico en base a la eficiencia en las transacciones (desde un punto de vista tecnológico por medio del parámetro k).

Análogamente, el modelo no analiza el intercambio comercial con otros mercados externos o países, todo el proceso de crecimiento es determinado endógenamente.

Si tratáramos de establecer algunas medidas que *exógenamente* fomenten el crecimiento nos encontraríamos con objetivos tales como: elevar los gastos de investigación y desarrollo civil, elevar la tasa nacional de inversión y ahorro, reducir la tasa de desempleo, o bien, eliminar todas las huelgas, los cuales representan medidas extremadamente difíciles de llevar a la práctica. Por consiguiente el trabajo aquí desarrollado trata el crecimiento desde un punto de vista endógeno, es decir, incrementar continuamente la producción a partir de las decisiones de cada individuo.

Si consideramos la contribución de cada fuente de crecimiento a la producción encontramos que alrededor de un tercio de la producción se atribuye al crecimiento del trabajo y del capital. Los dos tercios restantes son un residuo que se puede atribuir a la educación, la innovación, los avances científicos y otros factores. De igual manera podemos destacar que uno de los factores que interviene en el crecimiento de la productividad proviene de una mejor asignación de recursos. A este respecto, podemos pensar el las personas que abandonan empleos mal remunerados o áreas de ingreso baja, y se trasladan a áreas mas prósperas o consiguen empleos mejores, contribuyendo de esta manera a incrementar el crecimiento de la producción o del ingreso. Un elemento importante son los traslados del campo a la ciudad.

Particularmente un menor crecimiento significa un aumento mas lento del nivel de bienestar. Existen casos el los cuales es difícil determinar la causa exacta de tal desaceleración del crecimiento, pero generalmente se atribuyen a un empeoramiento de la combinación edad-especialización de la población activa, una desaceleración del ritmo de innovaciones o un aumento de la regulación estatal.

En términos generales, podemos establecer que el desarrollo económico tiene lugar cuando el bienestar de la población de un país crece a lo largo de un periodo prolongado. Esto implica que el estado de desarrollo puede ser medido en función de varios indicadores económicos, incluyendo sobre todo el PNB per cápita, pero también otros como la salud, la educación y la longevidad.

CONCLUSIONES

Considerando las tres principales fuentes de crecimiento, analizamos el crecimiento del trabajo en función de la división del trabajo y el perfeccionamiento de la eficiencia técnica en términos de la eficiencia en las transacciones. El último factor referente al crecimiento del capital no es analizado debido a que no interviene directamente en la evolución de la división del trabajo.

Además de los cambios técnicos a través del tiempo, los incrementos de la eficiencia productiva son consecuencia de las variaciones en el conocimiento, incluyendo el aprendizaje en el puesto de trabajo, ya que los individuos aprenden, mediante la experiencia, a realizar mejor las tareas a las que se dedican habitualmente.

Este trabajo ha desarrollado formalmente un modelo que permite describir las interaccciones entre los efectos de la acumulación de experiencia y la especialización sobre la productividad y los efectos de el costo de transacción que pueden generar crecimiento económico en base a la evolución de la división del trabajo.

De acuerdo a la importancia que representa el apredizaje originado con la práctica en el nivel de especialización, el modelo desarrollado forma parte de la teoría ya existente que asocia crecimiento económico con acumulación endógena. Lo que diferencía éste modelo de los trabajos previos es su capacidad para determinar endógenamente el nivel de especialización de cada persona. Este hecho establece un análisis formal acerca de la proposición hecha por Adam Smith: *No solo la división del trabajo depende de la extensión de el mercado, sino también la extensión del mercado depende de la división del trabajo.*

En este sentido, la proposición 2 demuestra que conforme la división del trabajo evoluciona, la extensión del mercado (el volumen comercializado per cápita) se incrementa.

De acuerdo con la teoría neoclásica, el comercio puede basarse en la separación de productores *puros* y consumidores *puros*, y a este respecto, ésta teoría afirma que cada individuo obtiene ganancias aún si no existen ventajas comparativas entre los individuos o rendimientos crecientes en la economía.

BIBLIOGRAFIA

Baumgardner, James R. *The Division of Labor, Local Markets, and Worker Organization.* Journal of Political Economy. 96 (junio 1988):509-527

Borland, Jeff. Yang, Xiaokai. *A Microeconomic Mechanism for Economic Growth.* Journal of Political Economy. 99 (1991): 460-482.

Ferguson, C.E. Gould J.P. *Teoría Microeconómica.* Fondo de Cultura Económica. México (1975).

Kim, Sunwoong. *Labor Specialization and the Extent of the Market.* Journal of Political Economy. 97 (junio 1989): 692-705.

Lancaster, Kelvin. *Mathematical Economics.* Columbia University. Dover Publications Inc. New York (1968).

Lucas, Robert E., Jr. *On the Mecanics of Economic Development.* Journal of Monetary Economy. 22 (julio 1988): 3-42.

Morishima, Michio. *Walras' Economics. A Pure Theory of Capital and Money.* Cambridge University Press, Cambridge (1977).

Romer, Paul M. *Increasing Returns and Long-Run Growth.* Journal of Political Economy. 94 (octubre 1986): 1002-1037.

Smith, Adam. *Of the Origin and Use of Money.* General Equilibrium Models of Monetary Economies. Studies in the Static Foundations of Monetary Theory. Department of Economics, University of California (1989).

Takayama, Akira. *Mathematical Economics.* Purdue University. The Dryden Press, Hinsdale Illinois (1974).

Yang, Xiaokai. *Development, Structural Changes and Urbanization.* Journal of Development Economy. 34 (noviembre 1990): 199-222.