00365
5
2eje.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ESPACIOS SIMPLICIALES Y HOMOMORFISMO DE CHERN-WEIL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

ROMAN ALVAR SANCHEZ GARCIA

DIRECTOR DE TESIS: DR. MARCELO ALBERTO AGUILAR GONZALEZ

1994

INTRODUCCIÓN

En esta tesis se presenta una versión simplicial del homomorfismo de Chern-Weil.

Dado un grupo de Lie G, la construcción clásica asocia a cada G-haz principal C^∞, $\xi=(P,\pi,M)$, un homomorfismo

$$\overline{w}(\xi): I^* \to H^*_{DR}(M) \cong H^*(M)$$

del álgebra de polinomios invariantes sobre G a la cohomología de De Rham de M. La construcción se hace en términos de una conexión ω en ξ como sigue: si Ω es la curvatura de ω, para cada $k \geq 0$, Ω^k es una $2k$-forma en P con valores en $\mathcal{G}\otimes\cdots\otimes\mathcal{G}$ (k veces). Para cada polinomio invariante $f:\mathcal{G}\otimes\cdots\otimes\mathcal{G}\to \mathbf{R}$, $f(\Omega^k)$ es una $2k$-forma en P con valores reales, horizontal e invariante, por lo que determina una única $2k$-forma $w_f(\xi)$ en M tal que $\pi^* w_f(\xi)=f(\Omega^k)$. Esta forma es cerrada y su clase de cohomología de De Rham, $\overline{w}_f(\xi)$ no depende de la conexión usada, si no que depende sólo de la clase de equivalencia del haz.

Para llevar esta construcción al haz universal $EG \to BG$, el problema es que EG y BG *no* son variedades diferenciables. Sin embargo pueden construirse como la *realización geométrica* de *variedades simpliciales*.

A grandes rasgos, una variedad simplicial X es una colección $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de variedades diferenciables, junto con ciertas aplicaciones C^∞ entre ellas. Cada X_n parametriza *diferenciablemente*, una colección de n-simplejos canónicos Δ^n formando el producto $X_n \times \Delta^n$. Estos simplejos se pegan a lo largo de sus caras para obtener la realización geométrica de X:

$$\|X\| = {\coprod_{n\geq 0} X_n \times \Delta^n}\Big/\sim$$

Las reglas de pegado dependen de las aplicaciones entre las variedades X_n.

Aplicando el complejo de De Rham a cada nivel $X_n \times \Delta^n$ se obtiene entonces, una cohomología de De Rham *simplicial* para X que resulta ser isomorfa a la cohomología singular de $\|X\|$.

Asociada al grupo de Lie G se tiene una variedad simplicial NG, cuya realización geométrica es BG. La idea es entonces, aplicar la construcción clásica de Chern-Weil en cada nivel $NG_n \times \Delta^n$ y obtener un homomorfismo de Chern-Weil

$$I^{*}(G) \rightarrow H^{*}(BG)$$

La tesis consta de tres capítulos. En el primero se presenta el concepto de *objeto simplicial* sobre una categoría. Para ello se introduce la categoría Δ de ordinales finitos cuyos objetos son los conjuntos $[n] = \{0,\ldots,n\}$ $(n \in \mathrm{N})$ y cuyos morfismos son las funciones que preservan orden.

Un objeto simplicial sobre una categoría $\mathcal{C}$ se define entonces como un funtor contravariante $\Delta \rightarrow \mathcal{C}$. Particularmente se trabaja con objetos simpliciales sobre la categoría *Top* de espacios topológicos y aplicaciones continuas, esto es, *espacios simpliciales* y se presenta el concepto de *realización geométrica* de un espacio simplicial. Se finaliza el capítulo con una discusión sobre distintas homologías y cohomologías asociadas a los conjuntos y espacios simpliciales.

En el capítulo 2 se revisa la versión clásica del homomorfismo de Chern-Weil comenzando con un repaso de grupos de Lie y haces principale. En la secciión 2 se estudian las conexiones en haces principales y se establecen los resultados básicos para la construcción del homomorfismo clásico de Chern-Weil, mismo que se da en la sección 3.

En el tercer capítulo se presenta la versión simplicial del homomorfismo de Chern-Weil. En la primera parte se estudian los *haces simpliciales* y, en particualr, se construye el haz universal como realización geométrica de un haz simplicial. Para este haz simplicial se muestra la existencia de una conexión *simplicial*. A continuación se da la generalización de la construcción clásica estableciendo el homomorfismo del álgebra de polinomios invariantes a la cohomología de De Rham *simplicial* de la variedad base de un haz simplicial. La última parte del capítulo se dedica a probar que la cohomología de De Rham simplicial de una variedad simplicial, es isomorfa a la cohomología singular de su realización geométrica.

Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer a mis sinodales

M. en C. Ana Irene Ramírez Galarza

Dr. Eugenio Garnica Vigil

Dr. Hector Sánchez Morgado

Dr. Miguel Sokolovsky Vajovsky

Dr. Max Neumann Coto

Dr. Federico Sánchez Bringas

con una mención muy especial para la Maestra Ana Irene que me ha apoyado desde los inicios de mi carrera en infinidad de ocasiones y para el Dr. Socolovsky quien literalmente tuvo que alargar su tiempo para revisar mi trabajo durante varias jornadas.

Quiero también expresar mi agradecimiento al Instituto de Matemáticas de la UNAM que me ha apoyado en mi carrera desde mis estudios de Licenciatura. Particularmente le agradezco a los Drs. Luis Montejano Peimbert y Javier Bracho C. por su constante preocupación por mi desarrollo matemático, por su aliento y por que su forma de ver y sentir las Matemáticas inyecta a quienes les rodean el ansia de *saber* y *disfrutar* más este mundo de abstracción.

Desde luego, dejo constancia aquí del profundo agradecimiento que le tengo a mis amigos Heberto Del Río y Juan José Montellano, cuyo apoyo irrestricto se ha manifestado *continuamente* en todas las formas explícitas e implícitas que abarca una amistad *total*. Esta tesis se debe, en gran parte, a ellos.

Agradezco también, con un muy especial afecto, a mis padres, quienes no han dudado un sólo segundo de mi existencia en brindarme todo su respaldo y su cariño. Que me dieran la vida fué sólo un hecho fortuito; lo verdaderamente importante es su constante *presencia*.

A mis hermanos les agradezco también su afecto y, muy especialmente, su paciencia por la neurosis que suele atacarme cuando estoy terminando trabajos como éste.

Finalmente, agradezco muy fuertemente a mi Director de Tesis, Dr. Marcelo Aguilar González, quien me ha apoyado siempre y ha creído en mí a pesar de mis malos hábitos de estudio. Su asesoría en esta Tesis y la ayuda que, en general, me ha proporcionado, tanto académica como administrativamente ha sido invaluable. Pero, quizá lo más importante, es que me recibió cuando, después de una larga ausencia, decidí buscarlo hace un año. *Eso*, no lo olvido.

San Pedro de los Pinos, Septiembre de 1994

INDICE

Capítulo 1 Objetos simpliciales 1

Sección 1 La categoría Δ 2

Sección 2 Objetos simpliciales 5

Sección 3 Realización geométrica 10

Sección 4 Homología y cohomología simplicial 14

Capítulo 2 Homomorfismo de Chern-Weil (Versión clásica) 22

Sección 1 Haces principales 23

Sección 2 Conexiones en haces principales 26

Sección 3 Homomorfismo de Chern-Weil 31

Capítulo 3 Homomorfismo de Chern-Weil (Versión simplicial) 38

Sección 1 Haces simpliciales 39

Sección 2 Teoría simplicial de Chern-Weil 45

Sección 3 Cohomología de una variedad simplicial 47

Sección 4 Conclusiones 65

Bibliografía 67

Capítulo 1

Objetos Simpliciales

En este capítulo introducimos el concepto de objeto simplicial sobre una categoría. Primordialmente nos interesan los objetos simpliciales sobre la categoría de espacios topológicos (*espacios simpliciales*) y sobre la categoría de conjuntos (*conjuntos simpliciales)*. Estos últimos pueden considerarse espacios simpliciales con la topología discreta. En la sección 3 estudiamos con detalle el proceso de realización geométrica de espacios y conjuntos simpliciales. En la sección 4 analizamos las herramientas de topología algebraica para estudiar la realización geométrica de los espacios simpliciales.

1. La categoría Δ

La categoría Δ, o *categoría de ordinales finitos*, es la categoría que tiene por objetos a los conjuntos

$$[n]=\{0,\dots,n\} \quad (n\in \mathrm{N})$$

y cuyos morfismos, que llamaremos *operadores*, son las funciones que preservan orden, esto es,

$$\Delta([n],[m])=\{\alpha:[n]\to[m] \mid i\leq j \Rightarrow \alpha(i)\leq\alpha(j)\}$$

Geométricamente, podemos identificar a $[n]$ con el *n-simplejo afín canónico*, que nosotros definimos como la cerradura convexa de la base canónica $\{e_0,\dots,e_n\}$ de $\mathbf{R}^{n+1}$, esto es,

$$\Delta^n=\left\{(t_0,\dots,t_n)\in\mathbf{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{j=0}^{n} t_j=1,\ t_j\geq 0\right\}$$

Un operador $\alpha\in\Delta([n],[m])$ se interpreta entonces como la aplicación afín $\alpha:\Delta^n\to\Delta^m$ determinada por: $e_i\mapsto e_{\alpha(i)}$. En este contexto, los *operadores básicos*,

$$d_i:[n-1]\to[n],\quad s_j:[n+1]\to[n]\quad (0\leq i,j\leq n)$$

definidos por

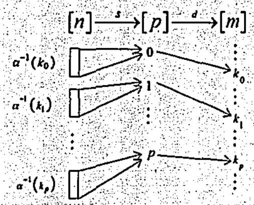
$$d_i(r)=\begin{cases} r, & r<i \\ r+1, & r\geq i\end{cases} \qquad s_j(r)=\begin{cases} r, & r\leq j \\ r-1, & r>j\end{cases}$$

se identifican con las inclusiones naturales de Δ^{n-1} en las caras de Δ^n y con las proyecciones de Δ^{n+1} en Δ^n respectivamente.

Los siguientes resultados muestran que los operadores básicos generan la categoría Δ en el sentido de que todo operador en Δ puede factorizarse como una composición de ellos.

Proposición 1.1 Todo operador $\alpha:[n]\to[m]$ se descompone, de manera única, como $\alpha=ds$ donde d es inyectivo y s es suprayectivo.

Demostración Sea $p=|\mathrm{Im}\,\alpha|$. Los requerimientos de que d sea inyectivo y s suprayectivo, implican inmediatamente que $|\mathrm{Im}s|=|\mathrm{Dom}d|=p$. El siguiente diagrama



donde $\mathrm{Im}\,\alpha=\{k_0,\ldots,k_p\}$, $(k_0<\cdots<k_p)$ muestra claramente la existencia y unicidad.

□

Proposición 1.2 *Todo operador inyectivo* $d:[p]\to[m]$ *se descompone, de manera única, como*

$$d=d_{i_1}\cdots d_{i_k}\quad (i_1>\cdots>i_k)$$

Demostración

UNICIDAD Supongamos que $d=d_{i_1}\cdots d_{i_k}$ con $i_1>\cdots>i_k$. Entonces $k=m-p$ y, como d es inyectiva, $|\mathrm{Im}d|=p+1$.

Supongamos que $r\in[p]$ es tal que $d(r)=i_a$ para algún a $(1\le a\le k)$. Como $i_a>i_{a-1}>\cdots>i_1$ se tiene

$$d_{i_1}\cdots d_{i_{a-1}}(i_a)=i_a=d_{i_1}\cdots d_{i_{a-1}}d_{i_a}\cdots d_{i_k}(r)$$

Como los d_i son inyectivos tenemos $d_{i_a}\cdots d_{i_k}(r)=i_a$ que no es posible pues $i_a\notin\mathrm{Im}d_i$. Por tanto, $\{i_1,\ldots,i_k\}\subset[m]-\mathrm{Im}d$. Pero $|[m]-\mathrm{Im}d|=k$, de manera que $\{i_1,\ldots,i_k\}=[m]-\mathrm{Im}d$. Esto muestra la unicidad.

EXISTENCIA Escribamos $[m]-\mathrm{Im}d=\{i_1,\ldots,i_k\}$ $(i_1>\cdots>i_k)$ y sea $d'=d_{i_1}\cdots d_{i_k}$. Por lo anterior

$$[m]-\mathrm{Im}d'=\{i_1,\ldots,i_k\}=[m]-\mathrm{Im}d$$

Por tanto $\mathrm{Im}d=\mathrm{Im}d'$. Pero es claro que dos operadores inyectivos con el mismo dominio y la misma imagen deben ser iguales. Por tanto $d=d'$.

□

Dado un operador $\alpha:[n]\to[m]$ definimos su *coimagen* como

$$\mathrm{CoIm}\,\alpha=\{j\in[n]\,|\,\alpha(j)\neq\alpha(k)\ \forall k>j\}$$

Obsérvese que la restricción de α a $\mathrm{CoIm}\,\alpha$ es inyectiva. Por tanto, si α es suprayectiva entonces $|\mathrm{CoIm}\,\alpha| = |[m]|$. En semejanza con los operadores inyectivos, es fácil ver que dos operadores suprayectivos con el mismo codominio y la misma coimagen, son iguales.

Proposición 1.3 *Todo operador suprayectivo* $s:[n] \to [p]$ *se escribe, de manera única, como*

$$s = s_{j_1} \cdots s_{j_l} \quad (j_1 < \cdots < j_l)$$

Demostración

UNICIDAD Supongamos que $s = s_{j_1} \cdots s_{j_l}$ con $j_1 < \cdots < j_l$. Entonces $l = n - p$ y, como s es suprayectiva, $|\mathrm{CoIm}\,s| = p+1$. Ahora, como $j_a < j_{a+1} < \cdots < j_l$ $(1 \le a \le l)$ entonces

$$s_{j_a} s_{j_{a+1}} \cdots s_{j_l} \cdot (j_a + 1) = s_{j_a}(j_a + 1) = j_a = s_{j_a} \cdots s_{j_l}(j_a)$$

Por tanto, aplicando $s_{j_1} \cdots s_{j_{a-1}}$ de ambos lados, obtenemos $s(j_a + 1) = s(j_a)$, de manera que $j_a \notin \mathrm{CoIm}\,s$. Por tanto $\{j_1, \ldots, j_l\} \subset [n] - \mathrm{CoIm}\,s$. Pero $|[n] - \mathrm{CoIm}\,s| = l$, de manera que $\{j_1, \ldots, j_l\} = [n] - \mathrm{CoIm}\,s$.

EXISTENCIA Escribamos $[n] - \mathrm{CoIm}\,s = \{j_1, \ldots, j_l\}$ $(j_1 < \cdots < j_l)$ y sea $s' = s_{j_1} \cdots s_{j_l}$. Por lo anterior

$$[n] - \mathrm{CoIm}\,s' = \{j_1, \ldots, j_l\} = [n] - \mathrm{CoIm}\,s$$

Por tanto, $\mathrm{CoIm}\,s = \mathrm{CoIm}\,s'$. Así, según lo observado, $s = s'$.

□

De esta forma vemos que los operadores d_i generan a los operadores inyectivos mientras que los s_j generan a los operadores suprayectivos. Como consecuencia tenemos,

Corolario 1.4 *Todo operador* $\alpha:[n] \to [m]$ *se descompone, de manera única, como*

$$\alpha = d_{i_1} \cdots d_{i_k} s_{j_1} \cdots s_{j_l} \quad (i_1 > \cdots > i_k,\, j_1 < \cdots < j_l)$$

De hecho,

$$\{i_1, \ldots, i_k\} = [m] - \mathrm{Im}\,\alpha \ \text{ y } \ \{j_1, \ldots, j_l\} = [n] - \mathrm{CoIm}\,\alpha$$

Demostración La existencia y unicidad son inmediatas de las proposiciones anteriores. Para el resto basta observar que si $\alpha = ds$ con d inyectivo y s suprayectivo, entonces $\mathrm{Im}\,\alpha = \mathrm{Im}\,d$ y $\mathrm{CoIm}\,\alpha = \mathrm{CoIm}\,s$.

□

Notemos que esta descomposición no es única sin la condición de orden en los subíndices. De hecho, los operadores básicos conmutan según el siguiente resultado.

Proposición 1.5 *Relaciones simpliciales*

a) $d_j d_i = d_i d_{j-1} \quad (i < j)$

b) $s_j s_i = s_i s_{j+1} \quad (i \leq j)$

c) $s_j d_i = d_i s_{j-1} \quad (i < j)$

$s_j d_j = 1 = s_j d_{j+1}$

$s_j d_i = d_{i-1} s_j \quad (i > j+1)$

Demostración Todas las identidades son un cálculo directo caso por caso.

□

2. Objetos simpliciales

Definición 2.1 Un *objeto simplicial* sobre una categoría $\mathcal{C}$ es un funtor contravariante $\mathrm{F}: \Delta \to \mathcal{C}$.

Si F es un objeto simplicial escribiremos

$$F_n = \mathrm{F}[n], \quad (n \in \mathrm{N})$$
$$\alpha^* = \mathrm{F}(\alpha), \quad (\alpha \in \Delta)$$

En el caso particular de los operadores básicos omitiremos el asterisco y escribiremos

$$d^i = \mathrm{F}(d_i), \quad s^j = \mathrm{F}(s_j)$$

Si α es un operador suprayectivo (resp. inyectivo), diremos que α^* es un morfismo *degenerado* (resp. *no degenerado*). Un elemento $x \in F_n$ se llamará *n-simplejo* de F o, simplemente, *simplejo*, y diremos que tiene *dimensión n*: $\dim x = \mathrm{n}$. Si no necesitamos especificar la dimensión escribiremos sólamente $x \in \mathrm{F}$.

Puesto que los operadores básicos d_i, s_j generan a los operadores de Δ, lo mismo es cierto para los morfismos α^*.

Proposición 2.2 *Si α es un operador, $\alpha^{\bullet}$ se puede descomponer en la forma*

$$\alpha^{\bullet} = s^{j_l} \cdots s^{j_1} d^{i_k} \cdots d^{i_1}$$

Demostración Sólo aplíquese contravarianza a la correspondiente descomposición de α.

□

Obsérvese, sin embargo, que ahora no podemos garantizar unicidad en la factorización pues **F** podría no ser un funtor inyectivo.

Las relaciones simpliciales 1.5 en la categoría Δ se heredan por contravarianza a un objeto simplicial.

Proposición 2.3 *Relaciones simpliciales (Para objetos simpliciales)*

a) $d^i d^j = d^{j-1} d^i \qquad (i < j)$

b) $s^i s^j = s^{j+1} s^i \qquad (i \le j)$

c) $d^i s^j = s^{j-1} d^i \qquad (i < j)$

$d^j s^j = 1 = d^{j+1} s^j$

$d^i s^j = s^j d^{i-1} \qquad (i > j+1)$

□

A pesar de que la factorización de los morfismos de un objeto simplicial **F**, en términos de los morfismos d^i, s^j, no necesariamente es única, éstos, junto con las relaciones simpliciales, determinan a todo el objeto simplicial. Especificamente, se tiene la siguiente forma alterna de definir un objeto simplicial.

Proposición 2.4 Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea $\mathbf{F} = \{F_n\}$ un objeto graduado en $\mathcal{C}$. Supóngase que para cada $n \in \mathrm{N}$ se tienen morfismos

$$d^i : F_n \to F_{n-1}, \quad s^j : F_n \to F_{n+1}, \quad (0 \le i, j \le n)$$

que satisfacen las relaciones simpliciales. Entonces, hay un único objeto simplicial $\Delta \to \mathcal{C}$, que denotaremos igualmente por **F**, tal que

$$F_n = \mathbf{F}([n]), \quad d^i = \mathbf{F}(d_i), \quad s^i = \mathbf{F}(s_i)$$

Demostración Defínase **F** en los objetos como indica el enunciado. Dado $\alpha \in \Delta$ descompongámoslo en la forma

$$\alpha = d_{i_1} \cdots d_{i_k} s_{j_1} \cdots s_{j_l}, \quad i_1 > \cdots > i_k, j_1 < \cdots < j_l$$

y definamos $\mathbf{F}(\alpha)=s^{j_t}\cdots s^{j_1}d^{i_r}\cdots d^{i_1}$. Como tal descomposición es única, **F** queda bien definido y lo que debemos probar es que preserva composiciones.

Sean α y β operadores y escribámoslos en la forma

$$\alpha=d_{i_1}\cdots d_{i_r}s_{j_1}\cdots s_{j_t}\quad i_1>\cdots>i_r, j_1<\cdots<j_t$$
$$\beta=d_{k_1}\cdots d_{k_p}s_{l_1}\cdots s_{l_q}\quad k_1>\cdots>k_p, l_1<\cdots<l_q$$

Entonces

$$\alpha\beta=d_{i_1}\cdots d_{i_r}s_{j_1}\cdots s_{j_t}d_{k_1}\cdots d_{k_p}s_{l_1}\cdots s_{l_q}$$

y

$$\mathbf{F}(\beta)\mathbf{F}(\alpha)=s^{l_q}\cdots s^{l_1}d^{k_p}\cdots d^{k_1}s^{j_t}\cdots s^{j_1}d^{i_r}\cdots d^{i_1}$$

Obsérvese que la expresión de $\mathbf{F}(\beta)\mathbf{F}(\alpha)$ se puede obtener formalmente de la expresión de $\alpha\beta$ subiendo los índices e invirtiendo el orden.

Para aplicar **F** a $\alpha\beta$ debemos primero ordenar la expresión. Esto puede hacerse aplicando reitera-das veces las relaciones simpliciales en Δ. Ahora bien, por cada conmutatividad que se haga en la expresión de $\alpha\beta$ hagamos la correspondiente conmutatividad en la expresión de $\mathbf{F}(\beta)\mathbf{F}(\alpha)$ (*ie*: la obtenida por contravarianza). Esto no altera el valor de las expresiones y, lo que es más, las nuevas expresiones siguen obteniéndose, una de la otra, mediante la operación formal de subir los índices e invertir el orden puesto que así se obtienen las relaciones simpliciales de **F** a partir de las de Δ.

Al final de este proceso obtendremos una expresión ordenada para $\alpha\beta$

$$\alpha\beta=d_{u_1}\cdots d_{u_x}s_{v_1}\cdots s_{v_y},\quad u_1>\cdots>u_x, v_1<\cdots<v_y$$

y, como la expresión final de $\mathbf{F}(\beta)\mathbf{F}(\alpha)$ se obtiene de ésta por el mismo proceso formal, tenemos

$$\mathbf{F}(\beta)\mathbf{F}(\alpha)=s^{v_y}\cdots s^{v_1}d^{u_x}\cdots d^{u_1}=\mathbf{F}(\alpha\beta)$$

□

Definición 2.5 Una *aplicación simplicial* $\mathbf{F}\to\mathbf{G}$ entre dos objetos simpliciales $\mathbf{F},\mathbf{G}:\Delta\to\mathcal{C}$ sobre una categoría $\mathcal{C}$, es una transformación natural $\lambda:\mathbf{F}\to\mathbf{G}$.

En otras palabras, una aplicación simplicial $\lambda:\mathbf{F}\to\mathbf{G}$, consiste de una familia $\{\lambda_n\}$ de morfismos

$$\lambda_n:F_n\to G_n$$

con la propiedad de que si $\alpha:[n]\to[m]$ es un operador, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F_n & \xrightarrow{\lambda_n} & G_n \\ {\scriptstyle \alpha^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \alpha^*} \\ F_m & \xrightarrow[\lambda_m]{} & G_m \end{array}$$

Claramente, para verificar que $\{\lambda_n\}$ es simplicial, basta ver que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} F_{n-1} & \xrightarrow{\lambda_{n-1}} & G_{n-1} \\ {\scriptstyle d^i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle d^i} \\ F_n & \xrightarrow[\lambda_n]{} & G_n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F_{n+1} & \xrightarrow{\lambda_{n+1}} & G_{n+1} \\ {\scriptstyle s^j}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle s^j} \\ F_n & \xrightarrow[\lambda_n]{} & G_n \end{array}$$

conmutan; así, puede definirse una aplicación simplicial como una aplicación entre conjuntos graduados que hace conmutar a los diagramas anteriores.

La clase de aplicaciones simpliciales $\mathbf{F} \to \mathbf{G}$ es un conjunto (*ie*: una clase pequeña) pues se puede ver como un subconjunto de

$$\prod_{n \in N} \mathcal{C}(F_n, G_n)$$

Esto nos permite definir la *categoría de objetos simpliciales* sobre $\mathcal{C}$, que denotaremos por $\mathcal{S}\mathcal{C}$, como la categoría cuyos objetos son los objetos simpliciales sobre $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos son las aplicaciones simpliciales entre ellos. La composición es la composición de transformaciones naturales.

Si los objetos de una categoría $\mathcal{C}$ tienen un nombre específico, convendremos en llamar a los objetos de $\mathcal{S}\mathcal{C}$ con ese nombre seguido del "apellido" simplicial. Así por ejemplo, hablamos de conjuntos simpliciales, espacios (topológicos) simpliciales, variedades simpliciales, etc.

Concluiremos esta sección con algunos ejemplos.

Ejemplo 2.6 Un *complejo simplicial* K, es una familia de conjuntos finitos cerrada bajo subconjuntos, esto es, si $x \in K$ y $y \subset x$ es no vacío, entonces $y \in K$ (*eg*: la familia de vértices de un poliedro en $\mathbf{R}^n$).

Si K es un complejo simplicial, podemos definir un conjunto simplicial $\tilde{K}: \Delta \to Set$ como sigue

$$\tilde{K}_n = \{(x_0, \ldots, x_n) \mid x_i \text{ son vértices de algún simplejo de } K\}$$
$$d^i(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)$$
$$s^j(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_j, x_j, \ldots, x_n)$$

Una variante de este ejemplo se obtiene si los vértices de K están ordenados y pedimos que un n-simplejo satisfaga, además, $x_0 \leq \cdots \leq x_n$.

Ejemplo 2.7 Sea X un conjunto cualquiera y definamos

$$X_n = X^{n+1} = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n+1}$$

Para cada operador $\alpha:[n] \to [m]$ defínase $\alpha^*: X_m \to X_n$ por

$$\left(\alpha^* x\right)_i = x_{\alpha(i)} \quad (0 \le i \le n, x \in X_m)$$

Trivialmente se verifica que $X:\Delta \to Set$ es un conjunto simplicial. En particular, si X es el conjunto de vértices de un complejo simplicial K, entonces $\bar{K}_n \subset X_n$ y los morfismos α^* preservan estos conjuntos; incluso si consideramos un orden en X. Si α es un operador básico obtenemos los morfismos definidos en 2.6.

Ejemplo 2.8 Sea X un espacio topológico. El *complejo singular total* de X, $S(X)$, se define como sigue:

Para cada $n \in \mathrm{N}$ $S_n(X)$ es el conjunto de n-simplejos singulares de X. Si $\alpha:[n] \to [m]$ es un operador, $\alpha^*: S_m(X) \to S_n(X)$ está dado por

$$\alpha^*(\sigma) = \sigma \circ \alpha \quad \sigma \in S_m(X)$$

donde, del lado derecho, $\alpha: \Delta^n \to \Delta^m$ es la aplicación afín como se definió en la sección 1.

Obsérvese que los morfismos $d^i: S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ son los operadores *cara* usuales, de manera que $S(X)$ determina la homología y cohomología de X.

Ahora, si $f: X \to Y$ es una aplicación continua, se tiene una aplicación simplicial

$$f_\#: S(X) \to S(Y)$$

dada por

$$f_\#(\sigma) = f \circ \sigma$$

Claramente, si $g: Y \to Z$ es otra aplicación continua, entonces $(gf)_\# = g_\# f_\#$. Así, S define un funtor covariante $Top \to \mathcal{S}Set$.

3. Realización geométrica

Definición 3.1 Sea X un espacio simplicial. Consideremos la unión disjunta

$$\overline{\mathrm{X}} = \coprod_{j \geq 0} X_j \times \Delta^j$$

y sea $\sim$ la relación de equivalencia en $\overline{\mathrm{X}}$ generada por las relaciones

$$(\alpha^* x, t) \sim (x, \alpha t) \quad (x \in \mathrm{X}, \alpha \in \Delta,\ \alpha \text{ inyectivo})$$

Denotemos por $[x,t]$ a la clase de equivalencia de $(x,t) \in \overline{\mathrm{X}}$ y sea $p: \overline{\mathrm{X}} \to \overline{\mathrm{X}}/\sim$ la proyección natural. Para cada $n \geq 0$ sea

$$\|\mathrm{X}\|^n = p\left(\coprod_{0 \leq j \leq n} X_j \times \Delta^j \right)$$

y sea $p_n: \coprod_{j \geq 0} X_j \times \Delta^j \to \|\mathrm{X}\|^n$ la correspondiente restricción de p. Demos a cada $\|\mathrm{X}\|^n$ la topología de identificación inducida por p_n. La *realización geométrica* de X es el espacio $\|\mathrm{X}\| = \overline{\mathrm{X}}/\sim$ con la topología coherente con los $\|\mathrm{X}\|^n$.

Observación 3.2 Fácilmente se ve que $p: \overline{\mathrm{X}} \to \|\mathrm{X}\|$ es identificación de manera que $\|\mathrm{X}\|$ tiene la topología cociente.

Lema 3.3 *Para cada $n \in \mathrm{N}$ la aplicación*

$$\varphi_n : X_{n+1} \times \partial\Delta^{n+1} \to \|\mathrm{X}\|^n$$

dada por $\varphi_n(x,t) = p_{n+1}(x,t)$ es continua.

Observación La función φ_n es obviamente continua si $\|\mathrm{X}\|^n$ tiene la topología relativa inducida por $\|\mathrm{X}\|^{n+1}$, pero esto aún no lo sabemos, de manera que sí hay algo que demostrar.

Demostración $X_{n+1} \times \partial\Delta^{n+1}$ es la unión de los subconjuntos cerrados $X_{n+1} \times d_j\Delta^n$ $(0 \leq j \leq n+1)$. Un cálculo directo muestra que en cada $X_{n+1} \times d_j\Delta^n$, $\varphi_n = \alpha_j p_n$, donde $\alpha_j : X_{n+1} \times \Delta^{n+1} \to X_n \times \Delta^n$ es la aplicación continua

$$\alpha_j(x,t) = \begin{cases} (d^j x, s_j t), & 0 \leq j \leq n \\ (d^j x, s_{j-1} t), & j = n+1 \end{cases}$$

Como $p_n: X_n \times \Delta^n \to \|X\|^n$ sí es continua, entonces φ_n es continua.

□

Proposición 3.4 $\|X\|^n$ *es un subespacio cerrado de* $\|X\|^{n+1}$.

Demostración Considérese el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j=0}^{n} X_n \times \Delta^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_n"'] & \coprod_{j=0}^{n+1} X_{n+1} \times \Delta^{n+1} \arrow[d, "p_{n+1}"] \\ \|X\|^n \arrow[r, hook, "i"'] & \|X\|^{n+1} \end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son inclusiones. Como p_n es identificación, i es continua. Ahora, $p_{n+1}^{-1}(C) = p_n^{-1}(C) \cup \varphi_n^{-1}(C)$ para cualquier subconjunto $C \subset \|X\|^n$. Por tanto, si C es cerrado en $\|X\|^n$ entonces $p_{n+1}^{-1}(C)$ es cerrado. De aquí que C es cerrado en $\|X\|^{n+1}$ pues p_{n+1} es identificación. Esto muestra que i es cerrada de donde se concluye fácilmente el resultado.

□

Diremos que un punto $(x,t) \in \overline{X}$ es *no degenerado* si $t \in Int\,\Delta^n$. El siguiente lema es geométricamente evidente.

Lema 3.5 *Todo punto* $t \in \Delta^n$ *se escribe, de manera única, como* $t = \alpha t'$, *donde* $\alpha \in \Delta$ es inyectivo *y* t' *es interior.*

□

Lema 3.6 *Todo punto* $(x,t) \in \overline{X}$ *es equivalente a un único punto no degenerado.*

Demostración Sea $\rho: \overline{X} \to \overline{X}$ la función $\rho(x,t) = \left(\alpha^* x, t'\right)$ donde $t = \alpha t'$ es como en el lema anterior. Claramente $\rho(x,t)$ es un punto no degenerado equivalente a (x,t). Es inmediato ver que $\rho\left(\alpha^* x, t\right) = \rho(x, \alpha t)$ y, como las relaciones $\left(\alpha^* x, t\right) \sim (x, \alpha t)$ son generatrices, se sigue que $\rho(x,t) = \rho(y,s)$ siempre que $(x,t) \sim (y,s)$. La unicidad se sigue ahora del hecho de que $\rho(x,t) = (x,t)$ si (x,t) es no degenerado.

□

Obsérvese que si (y,s) es el equivalente no degenerado de (x,t) entonces $\dim x \geq \dim y$. Dicho de otra forma, un punto no degenerado no puede tener equivalentes de dimensión menor.

Proposición 3.7 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene:*

$$\|X\|^{n+1} = \|X\|^n \cup_{\varphi_n} \left(X_n \times \Delta^n\right)$$

Demostración Sea

$$h: \|X\|^n \amalg \left(X_{n+1} \times \Delta^{n+1}\right) \to \|X\|^{n+1}$$

la aplicación

$$\begin{cases} h = \text{inclusión en } \|X\|^n \\ h = p_{n+1} \text{ en } \left(X_{n+1} \times \Delta^{n+1}\right) \end{cases}$$

Si $(x,t) \in X_{n+1} \times \partial\Delta^{n+1}$ entonces $h(x,t) = p_{n+1}(x,t) = h([x,t]) = h\varphi_n(x,t)$. Por tanto, h induce una aplicación continua

$$\overline{h}: \|X\|^n \cup_{\varphi_n} \left(X_{n+1} \times \Delta^{n+1}\right) \to \|X\|^{n+1}$$

que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
\|X\|^n \amalg \left(X_{n+1} \times \Delta^{n+1}\right) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"'] & \|X\|^{n+1} \\
\|X\|^n \cup_{\varphi_n} \left(X_{n+1} \times \Delta^{n+1}\right) \arrow[ur, "\overline{h}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde q es la proyección al espacio de adjunción. Claramente h es suprayectiva y, por tanto, también $\overline{h}$. Para ver que $\overline{h}$ es inyectiva considérese el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\|X\|^n \amalg \left(X_{n+1} \times Int\Delta^{n+1}\right) \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "q'"'] & \|X\|^{n+1} \\
\|X\|^n \cup_{\varphi_n} \left(X_{n+1} \times \Delta^{n+1}\right) \arrow[ur, "\overline{h}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde q' y h' son las correspondientes restricciones de q y h. Claramente q' sigue siendo suprayectiva por lo que basta ver que h' es inyectiva. Ciertamente lo es en $\|X\|^n$ y la unicidad de los puntos no degenerados implica que también lo es en $X_{n+1} \times Int\,\Delta^{n+1}$. Más aún, ningún punto de $X_{n+1} \times Int\,\Delta^{n+1}$ puede ser representante de un punto en $\|X\|^n$ por lo que si $\xi \in \|X\|^n$ y $(x,t) \in X_{n+1} \times Int\,\Delta^{n+1}$ entonces $h(\xi) \neq h(x,t)$.

En resumen, $\bar{h}$ es continua y biyectiva. Para ver que $\bar{h}$ es homeomorfismo bastará ver que h es identificación. Para ello considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{j=0}^{n+1} X_j \times \Delta^j \arrow[d, "g"'] \arrow[drr, "p_{n+1}"] & & \\
\|X\|^n \amalg \left(X_{n+1} \times \Delta^{n+1}\right) \arrow[rr, "h"'] & & \|X\|^{n+1}
\end{tikzcd}$$

donde g es la aplicación continua

$$\begin{cases} g = p_n \text{ en } \coprod_{j=0}^{n} X_j \times \Delta^j \\ g = \text{identidad en } X_{n+1} \times \Delta^{n+1} \end{cases}$$

Claramente el diagrama conmuta y como p_{n+1} es identificación, entonces h es identificación.

□

Todo conjunto simplicial X se puede considerar como un espacio simplicial *discreto* (*ie*: cada X_n es discreto). En este caso, la proposición precedente nos da el siguiente resultado.

Corolario 3.6 *Si* X *es un conjunto simplicial,* $\|X\|$ *es un complejo CW con una n-celda por cada simplejo de* X *de dimensión n.*

Demostración Claramente $\|X\|^0 \cong X_0 \times \Delta^0$ es discreto, y dado que $\|X\|$ tiene la topología coherente con los $\|X\|^n$, se sigue de la proposición que $\{\|X\|^n | n \geq 0\}$ es una estructura de complejo CW en $\|X\|$.

□

Definición 3.9 Si $\lambda: X \to Y$ es una aplicación simplicial entre espacios simpliciales, la aplicación

$$\|\lambda\|: \|X\| \to \|Y\|$$

definida por

$$\|\lambda\|([x,t]) = [\lambda x, t]$$

es la *realización geométrica* de λ.

Como λ conmuta con los morfismos inducidos por los operadores de la categoría Δ, es claro que $\|\lambda\|$ está bien definida. Además, en cada $\|X\|^n$, $\|\lambda\|$ está inducida por la aplicación $(x,t) \mapsto (\lambda x, t)$ y así, es continua en cada $\|X\|^n$. Como $\|X\|$ tiene la topología coherente con los $\|X\|^n$, entonces $\|\lambda\|$ es continua. Por otra parte es obvio que si $\mu: Y \to Z$ es otra aplicación simplicial continua, entonces $\|\mu\lambda\| = \|\mu\|\|\lambda\|$. Por tanto, la realización geométrica determina un funtor $\mathcal{S}Top \to Top$.

Observación Otro tipo de realización geométrica se obtiene si en las identificaciones utilizamos también los operadores suprayectivos. El espacio resultante $|X|$, se relaciona con $\|X\|$ según el siguiente teorema probado por Segal en [12].

Teorema 3.10 *Si los pares topológicos $(X_n, s^j X_{n-1})$ son cofibraciones cerradas, entonces la aplicación natural $\|X\| \to |X|$ es una equivalencia homotópica débil.*

□

4. Homología y cohomología simplicial

Queremos ahora describir la homología y cohomología de la realización geométrica de un espacio simplicial. Las definiciones son válidas en general para cualquier anillo de coeficientes aunque nosotros presupondremos siempre que los coeficientes se toman en un campo, particularmente **R**.

Comenzaremos estudiando el caso de conjuntos simpliciales.

Definición 4.1 Sea **X** un conjunto simplicial. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $C_n^{sim}(X)$ el módulo libre generado por X_n y defínase un operador

$$\partial\colon C_n^{sim}(X) \to C_{n-1}^{sim}(X)$$

por

$$\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n d^i$$

donde cada d^i se extiende por linealidad a $C_n^{sim}(X)$. Es inmediato verificar, usando las relaciones simpliciales, que $\partial^2 = 0$. Así, $\{C_\bullet^{sim}(X), \partial\}$ es un complejo de cadenas. Su homología, $H_\bullet^{sim}(X)$, es la *homología simplicial* de X.

Dualizando $\{C_\bullet^{sim}(X), \partial\}$ obtenemos un complejo de cocadenas $\{C_{sim}^\bullet(X), \delta\}$, cuya cohomología es la *cohomología simplicial* de X que denotaremos por $H_{sim}^\bullet(X)$.

Obsérvese que toda aplicación simplicial conmuta con los d^i por lo que induce morfismos en homología y cohomología. Así $H_\bullet^{sim}$ y $H_{sim}^\bullet$ determinan funtores $\mathcal{S}Set \to Mod$.

$H_\bullet^{sim}(X)$ y $H_{sim}^\bullet(X)$ son, de hecho, isomorfos a la homología y cohomología singular de la realización geométrica de X. Esto puede verse como sigue.

Según vimos en 3.8, si X es un conjunto simplicial, $\|X\|$ es un complejo CW con una n-celda por cada simplejo de X de dimensión n.

Ahora, la homología y cohomología singular de un complejo CW se pueden calcular en términos de la *homología celular*. Recordemos que si K es un complejo CW, su homología celular $H_\bullet^{cel}(K)$ es la homología del complejo de cadenas $\{C_\bullet^{cel}(K), \partial\}$ donde $C_n^{cel}(K) = H_n(K^n, K^{n-1})$ y ∂ es la composición

$$H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\bar{\partial}} H_{n-1}(K^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$$

donde $\bar{\partial}$ es el morfismo de conexión.

Análogamente se tiene la *cohomología celular* $H_{cel}^\bullet(K)$ de K tomando el correspondiente complejo de cocadenas $\{C_{cel}^\bullet(K), \delta\}$, en la cohomología relativa de los pares (K^n, K^{n-1}).

El siguiente resultado es bien conocido.

Proposición 4.2 ([1], Cap. 5, proposición 1.3)[1] $H_*^{cel}(K) \cong H_*(K)$ y $H_{cel}^*(K) \cong H^*(K)$. □

Además, dado que estamos tomando coeficientes en un campo, es fácil ver que $H_{cel}^*(K)$ puede calcularse dualizando el complejo $\{C_*^{cel}(K), \partial\}$.

Teorema 4.3 *Si* X *es un conjunto simplicial* $H_*(\|X\|) \cong H_*^{sim}(X)$ *y* $H^*(\|X\|) \cong H_{sim}^*(X)$.

Demostración Para cada $x \in X_n$ sea $\sigma_x : \Delta^n \to \|X\|^n$ la aplicación $\sigma_x(t) = [x,t]$. Entonces σ_x es un n-simplejo singular en $\|X\|^n$. Además

$$\partial\sigma_x = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_x \circ d_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{d^i x}$$

Como cada $\sigma_{d^i x}$ toma valores en $\|X\|^{n-1}$, σ_x es un n-ciclo en $\|X\|^n$ relativo a $\|X\|^{n-1}$. Esto nos da un morfismo

$$C_n^{sim}(X) \xrightarrow{\beta} C_n^{cel}(\|X\|)$$
$$\Sigma a_x x \mapsto \Sigma a_x \overline{\sigma}_x$$

La aplicación natural $(X_n \times \Delta^n, X_n \times \partial\Delta^n) \to (\|X\|^n, \|X\|^{n-1})$ induce isomorfismos en homología de donde es fácil ver que $\{\overline{\sigma}_x | x \in X_n\}$ es una base de $H_n^{cel}(\|X\|)$ de manera que β es un isomorfismo. Por otra parte, los cuadrados

$$\begin{array}{ccc} C_n^{sim}(X) & \xrightarrow{\beta} & C_n^{cel}(\|X\|) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ C_{n-1}^{sim}(X) & \xrightarrow[\beta]{} & C_{n-1}^{cel}(\|X\|) \end{array}$$

son conmutativos pues

$$\partial\beta x = \partial\overline{\sigma}_x = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \overline{\sigma}_{d^i x} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta d^i x = \beta \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d^i x = \beta\partial x$$

---

[1]La prueba que se da aquí es para homología, pero con muy pequeñas modificaciones, también sirve para cohomología.

Por tanto β es un isomorfismo de cadenas $C_{\bullet}^{sim}(\mathrm{X}) \to C_{\bullet}^{cel}(\|\mathrm{X}\|)$ e induce isomorfismos en homología. Dualizando, obtenemos un isomorfismo de cocadenas $C_{sim}^{\bullet}(\|\mathrm{X}\|) \to C_{sim}^{\bullet}(\mathrm{X})$ de donde se sigue el resultado para cohomología.

□

Si $\mathrm{X} = S(Y)$ es el complejo singular total de un espacio topológico Y, como se definió en 2.8, $C_n^{sim}(\mathrm{X})$ y $C_{sim}^n(\mathrm{X})$ son, por supuesto, los módulos de cadenas y cocadenas singulares de Y, de manera que $H_{\bullet}^{sim}(S(Y)) = H_{\bullet}(Y)$ y $H_{sim}^{\bullet}(S(Y)) = H^{\bullet}(Y)$. Así 4.3 muestra que $H_{\bullet}(\|S(Y)\|) \cong H_{\bullet}(Y)$ y $H^{\bullet}(\|S(Y)\|) \cong H^{\bullet}(Y)$.

Ahora, estos isomorfismos se construyeron tomando como punto intermedio la homología celular. Pero podemos describir isomorfismos explícitos. Para ello consideremos la aplicación $j:\|S(Y)\| \to Y$ dada por $j[\sigma, t] = \sigma(t)$. Es inmediato ver que está bien definida y que es continua.

Proposición 4.4 $j:\|S(Y)\| \to Y$ *induce isomorfismos en homología.*

Demostración Para un conjunto simplicial X considérese la aplicación simplicial $\kappa:\mathrm{X} \to S(\|\mathrm{X}\|)$ dada por $\kappa(x) = \overline{\sigma}_x$ donde σ_x es como en la demostración de 4.3. Es sencillo ver que el morfismo

$$\kappa_{\bullet}: H_{\bullet}^{sim}(\mathrm{X}) \to H_{\bullet}^{sim}(S(\|\mathrm{X}\|)) = H_{\bullet}(\|\mathrm{X}\|)$$

inducido por κ, coincide con la composición

$$H_{\bullet}^{sim}(\mathrm{X}) \xrightarrow{\cong} H_{\bullet}^{cel}(\|\mathrm{X}\|) \xrightarrow{\cong} H_{\bullet}(\|\mathrm{X}\|)$$

y es, por tanto, un isomorfismo.

En particular, tomando $\mathrm{X} = S(Y)$ obtenemos un isomorfismo

$$\kappa_{\bullet}: H_{\bullet}(Y) = H_{\bullet}^{sim}(S(Y)) \to H_{\bullet}(\|S(Y)\|)$$

Ahora, es trivial verificar que $j_{\bullet}\kappa_{\bullet} = 1$, de manera que $j_{\bullet}$ es un isomorfismo.

□

Podemos dar un análogo a 4.3 para un espacio simplicial X en general, pero en este caso debemos reemplazar $H_{\bullet}^{sim}(\mathrm{X})$ y $H_{sim}^{\bullet}(\mathrm{X})$ por la homología y cohomología de un conjunto *bisimplicial*.

Definición 4.5 Sea $\mathbf{B}=\{B_{k,l}\}$ un conjunto bigraduado tal que $\mathbf{B}_{\bullet,l}$ y $\mathbf{B}_{k,\bullet}$ son conjuntos simpliciales para cada l y cada k respectivamente. Denotemos por $\alpha_0^\bullet$ y $\alpha_1^\bullet$ los morfismos inducidos por Δ en $\mathbf{B}_{\bullet,l}$ y $\mathbf{B}_{k,\bullet}$ respectivamente. $\mathbf{B}$ es un conjunto *bisimplicial* si dados operadores $\alpha:[p]\to[k]$ y $\beta:[q]\to[l]$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
B_{k,l} & \xrightarrow{\alpha_0^\bullet} & B_{p,l} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \beta_1^\bullet} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta_1^\bullet} \\
B_{k,q} & \xrightarrow[\alpha_0^\bullet]{} & B_{p,q}
\end{array}$$

Se tiene también realización geométrica para conjuntos bisimpliciales.

Definición 4.6 Sea $\mathbf{B}$ un conjunto bisimplicial y considérese la unión disjunta

$$\overline{\mathbf{B}}=\coprod_{k,l\geq 0} B_{k,l}\times\Delta^k\times\Delta^l$$

Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $\overline{\mathbf{B}}$ generada por las relaciones

$$\left(\alpha_0^\bullet b,t,s\right)\sim(b,\alpha t,s) \qquad \left(\alpha_1^\bullet b,t,s\right)\sim(b,t,\alpha s)$$

donde α es un operador inyectivo.

El espacio cociente $\|\mathbf{B}\|=\overline{\mathbf{B}}/\sim$ es la *realización geométrica* de $\mathbf{B}$.

Igual que en conjuntos simpliciales, tenemos también aquí una estructura esquelética, donde el n-esqueleto $\|\mathbf{B}\|^n$ de $\|\mathbf{B}\|$ es la imagen en el cociente de

$$\coprod_{k+l=n} B_{k,l}\times\Delta^k\times\Delta^l$$

En forma totalmente análoga se prueba que

$$\|\mathbf{B}\|^n=\|\mathbf{B}\|^{n-1}\cup_\varphi \coprod_{k+l=n} B_{k,l}\times\Delta^k\times\Delta^l$$

donde

$$\varphi:\coprod_{k+l=n} B_{k,l}\times\left(\left(\partial\Delta^k\times\Delta^l\right)\cup\left(\Delta^k\times\partial\Delta^l\right)\right)\longrightarrow\|\mathbf{B}\|^{n-1}$$

es proyección al cociente.

Obsérvese que podemos dar un homeomorfismo de parejas

$$\left(\Delta^k \times \Delta^l, \left(\partial\Delta^k \times \Delta^l\right) \cup \left(\Delta^k \times \partial\Delta^l\right)\right) \to \left(\Delta^n, \partial\Delta^n\right)$$

de manera que $\|\mathbf{B}\|^n$ se obtiene de $\|\mathbf{B}\|^{n-1}$ adjuntando una n-celda por cada simplejo en la unión disjunta $\coprod_{k+l=n} B_{k,l}$.

Definamos ahora la homología simplicial de un conjunto bisimplicial.

Definición 4.7 Sea $\mathbf{B}$ un conjunto bisimplicial. Para cada par de índices $k,l \in \mathbf{N}$ sea $C_{k,l}^{sim}(\mathbf{B})$ el módulo libre generado por $B_{k,l}$. La *homología simplicial* $H_\bullet^{sim}(\mathbf{B})$ de $\mathbf{B}$ se define ahora como la homología del complejo total del bicomplejo $\left\{C_{k,l}^{sim}(\mathbf{B}), \partial_0, \partial_1\right\}$, donde los operadores ∂_0 y ∂_1 se definen en cada índice igual que en el caso de conjuntos simpliciales. (Ver la sección 4 del capítulo 3 para una definición de bicomplejos) De manera semejante se define, dualizando, la *cohomología simplicial* $H_{sim}^\bullet(\mathbf{B})$ de $\mathbf{B}$.

Análogamente a 4.3 se tiene:

Proposición 4.8 *Si* $\mathbf{B}$ *es un conjunto bisimplicial,* $H_\bullet^{sim}(\mathbf{B}) \cong H_\bullet(\|\mathbf{B}\|)$ *y* $H_{sim}^\bullet(\mathbf{B}) \cong H^\bullet(\|\mathbf{B}\|)$. □

Si $\mathbf{X}$ es un espacio simplicial, podemos asociarle un conjunto bisimplicial $S(\mathbf{X})$ tomando el complejo singular total de cada X_l, esto es, $S(\mathbf{X}) = \{S_k(X_l)\}$. (Los morfismos en $S_k(X_\bullet)$ son los inducidos por los de $\mathbf{X}$ por el funtor S) Es inmediato verificar que $S(\mathbf{X})$ es, en efecto, bisimplicial.

Aplicando la proposición anterior obtenemos:

Proposición 4.9 *Si* $\mathbf{X}$ *es un espacio simplicial, entonces*

$$H_\bullet(\|S(\mathbf{X})\|) \cong H_\bullet^{sim}(S(\mathbf{X})) \quad \text{y} \quad H^\bullet(\|S(\mathbf{X})\|) \cong H_{sim}^\bullet(S(\mathbf{X}))$$

□

Para identificar la homología y cohomología de $\|S(X)\|$ con la de $\|X\|$ necesitaremos "escindir" el proceso de realización geométrica de un conjunto bisimplicial.

Si B es un conjunto bisimplicial y $\beta:[q]\to[l]$ es un operador, los morfismos $\beta_1^{\bullet}:B_{k,l}\to B_{k,q}$ determinan, por bisimplicialidad, una aplicación simplicial $\beta_1^{\bullet}:\mathrm{B}_{\bullet,l}\to\mathrm{B}_{\bullet,q}$. Tomando realización geométrica obtenemos una aplicación continua $\|\beta_1^{\bullet}\|:\|\mathrm{B}_{\bullet,l}\|\to\|\mathrm{B}_{\bullet,q}\|$. Como $^{\bullet}$ es un funtor contravariante y $\|\ \|$ es un funtor covariante, las correspondencias

$$[l]\mapsto\|B_{\bullet,l}\|$$
$$\beta\mapsto\|\beta_1^{\bullet}\|$$

determinan un funtor contravariante $\mathrm{T}:\Delta\to Top$, esto es, un espacio simplicial.
Tenemos aplicaciones naturales

$$\|\mathrm{T}\|\xrightarrow{f}\|\mathrm{B}\|,\qquad \|\mathrm{B}\|\xrightarrow{g}\|\mathrm{T}\|$$

dadas por

$$f([[b,t],s])=[b,t,s],\qquad g([b,t,s])=[[b,t],s]$$

Fácilmente se ve que están bien definidas y son continuas. Como $g=f^{-1}$ tenemos entonces,

Proposición 4.10 *Si* B *es un conjunto bisimplicial,* $\|\mathrm{B}\|$ *es homeomorfo a la realización geométrica del espacio simplicial* $\mathrm{T}=\{\|\mathrm{B}_{\bullet,l}\|\}$.

□

Finalmente tenemos,

Teorema 4.11 *Si* X *es un espacio simplicial, entonces*

$$H_{\bullet}(\|\mathrm{X}\|)\cong H_{\bullet}^{sim}(S(\mathrm{X}))\ \text{y}\ H^{\bullet}(\|\mathrm{X}\|)\cong H_{sim}^{\bullet}(S(\mathrm{X}))$$

Demostración Por 4.9 y 4.10 tenemos que $H_{\bullet}^{sim}(S(\mathrm{X}))\cong H_{\bullet}(\mathrm{T})$ donde **T** es el espacio simplicial

$$\mathrm{T}_l=\{\|S(X_l)\|\}$$

La aplicación natural $j:\|S(X_l)\|\to X_l$ de la proposición 4.4 es simplicial pues si β es un operador, entonces

$$j\|\beta_1^*\|([\sigma,t]) = j([\beta_1^*(\sigma),t]) = j([\beta_1^* \circ \sigma, t]) = (\beta_1^* \circ \sigma)(t)$$
$$= \beta_1^*(\sigma(t)) = \beta_1^*(j([\sigma,t])) = (\beta_1^* \circ j)([\sigma,t])$$

Por 4.4, j induce isomorfismos en homología. El resultado se sigue entonces del siguiente lema.

□

Lema 4.12 *Si* $f:\mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ *es una aplicación simplicial entre espacios simpliciales tal que* $f_n: X_n \to X'_n$ *induce isomorfismos en homología para toda* n*, entonces* $\|f\|:\|\mathbf{X}\| \to \|\mathbf{X}'\|$ *induce isomorfismos en homología y cohomología.*

Demostración De 3.7 se tiene que la aplicación natural

$$\left(X_n \times \Delta^n, X_n \times \partial\Delta^n\right) \to \left(\|\mathbf{X}\|^n, \|\mathbf{X}\|^{n-1}\right)$$

induce isomorfismos en homología. Considérese el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_*\left(X_n \times \Delta^n, X_n \times \partial\Delta^n\right) & \xrightarrow{\cong} & H_*\left(\|\mathbf{X}\|^n, \|\mathbf{X}\|^{n-1}\right) \\ {\scriptstyle (f_n \times 1)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \|f\|_*} \\ H_*\left(X'_n \times \Delta^n, X'_n \times \partial\Delta^n\right) & \xrightarrow[\cong]{} & H_*\left(\|\mathbf{X}'\|^n, \|\mathbf{X}'\|^{n-1}\right) \end{array}$$

Por hipótesis, $(f_n)_*: H_*(X_n) \to H_*(X'_n)$ es un isomorfismo. Usando la fórmula de Künneth, se sigue que

$$(f_n \times 1)_*: H_*\left(X_n \times \Delta^n\right) \to H_*\left(X'_n \times \Delta^n\right) \quad \text{y} \quad (f_n \times 1)_*: H_*\left(X_n \times \partial\Delta^n\right) \to H_*\left(X'_n \times \partial\Delta^n\right)$$

son isomorfismos. Aplicando Lema del cinco a las sucesiones de homología de $\left(X_n \times \Delta^n, X_n \times \partial\Delta^n\right)$ y $\left(X'_n \times \Delta^n, X'_n \times \partial\Delta^n\right)$ si sigue que la flecha izquierda en el diagrama de arriba es también un isomorfismo. Por tanto $\|f\|_*: H_*\left(\|\mathbf{X}\|^n, \|\mathbf{X}\|^{n-1}\right) \to H_*\left(\|\mathbf{X}'\|^n, \|\mathbf{X}'\|^{n-1}\right)$ es un isomorfismo. Haciendo ahora inducción sobre n y aplicando entonces reiteradas veces Lema del cinco a las sucesiones de homología de las parejas $\left(\|\mathbf{X}\|^n, \|\mathbf{X}\|^{n-1}\right)$ y $\left(\|\mathbf{X}'\|^n, \|\mathbf{X}'\|^{n-1}\right)$, se prueba que $\|f\|_*: H_*\left(\|\mathbf{X}\|^n\right) \to H_*\left(\|\mathbf{X}'\|^n\right)$ es un isomorfismo para toda n. Finalmente, tomando límites, se tiene que $\|f\|:\|\mathbf{X}\| \to \|\mathbf{X}'\|$ induce isomorfismos en homología. Como estamos tomando coeficientes en un campo, entonces $\|f\|:\|\mathbf{X}\| \to \|\mathbf{X}'\|$ también induce isomorfismos en cohomología.

□

Capítulo 2

HOMOMORFISMO DE CHERN-WEIL (VERSIÓN CLÁSICA)

En este capítulo presentamos la versión clásica del homomorfismo de Chern-Weil. La sección 1 es más que nada un recordatorio de algunos hechos básicos sobre grupos de Lie y haces principales con la intención de establecer la notación y definiciones que usaremos. En la sección 2 analizamos con cierto detalle el concepto de conexión en un haz principal y establecemos los resultados necesarios para la construcción del homomorfismo de Chern-Weil que abordaremos en la sección 3.

1. Haces principales

Dado un grupo de Lie G y $a \in G$, denotaremos por R_a y L_a las traslaciones derecha e izquierda: $R_a(x) = xa$, $L_a(x) = ax$. También, por c_a denotaremos la conjugación: $c_a = R_{a^{-1}} L_a = L_a R_{a^{-1}}$.

Un campo vectorial X en G es *invariante por la izquierda* si

$$X_a = dL_a(X_e) \quad \forall a \in G$$

donde $e \in G$ es la identidad y d es el operador diferencial. Así, un campo invariante está determinado por su valor en T_eG y cualquier vector $X \in T_eG$ se puede extender a un único campo vectorial $\tilde{X}$, invariante por la izquierda. esto permite definir un producto en $\mathcal{G} = T_eG$ mediante

$$[X,Y] = \left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]_e \quad X,Y \in T_eG$$

donde el corchete de la derecha es el corchete de Lie. Este producto satisface la *identidad de Jacobi*:

$$[[X,Y],Z]+[[Z,X],Y]+[[Y,Z],X]=0$$

de manera que $\mathcal{G}$ es un álgebra de Lie.

Dado $a \in G$ sea $Ad(a):\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ la función $Ad(a) = d(c_a)_e$. Claramente $Ad(a) \in Aut(\mathcal{G})$, de hecho, $Ad(a)^{-1} = Ad\left(a^{-1}\right)$. Más aún, para $a,b \in \mathcal{G}$ se tiene $Ad(ab) = Ad(a)Ad(b)$ por lo que $Ad: G \to Aut(\mathcal{G})$ es un homomorfismo de grupos. A este homomorfismo se le llama *representación adjunta* de G.

Supóngase que el grupo de Lie G actúa por la derecha en una variedad C^∞, P. Para cada $u \in P$ sea $\sigma_u : G \to P$ la aplicación $\sigma_u(a) = u \cdot a$. Para $X \in \mathcal{G}$ defínase $\sigma(X)_u = d\sigma_u(X) \in T_uP$. Se tiene así un campo vectorial $\sigma(X)$ en P llamado *campo fundamental asociado a X*. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \longrightarrow & Vect(P) \\ X & \mapsto & \sigma(X) \end{array}$$

donde *Vect* (P) denota al espacio de campos vectoriales en P, es lineal y es sencillo ver que satisface $\sigma[X,Y]=[\sigma(X),\sigma(Y)]$, de manera que es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Dado $a\in G$ sea $R_a:P\to P$ la traslación derecha $R_a(u)=u\cdot a$. El homomorfismo σ se relaciona con la representación adjunta de G según la siguiente fórmula que se prueba con un cálculo directo:

$$(R_a)_*(\sigma(X))=\sigma\left(Ad\left(a^{-1}\right)X\right)\quad a\in G, X\in\mathcal{G}$$

Aquí $(R_a)_*(\sigma(X))$ denota el campo

$$(R_a)_*(\sigma(X))_u=(dR_a)_{u\cdot a^{-1}}\left(\sigma(X)_{u\cdot a^{-1}}\right)$$

Obsérvese que el flujo del campo fundamental $\sigma(X)$ está dado por $\varphi_t(u)=u\cdot exp(tX)$. Usando este hecho y la unicidad de las trayectorias de un campo es inmediato probar que si la acción de G es libre (*ie*: $R_a(u)=u$ para alguna u$\Rightarrow a=e$), entonces $\sigma(X)$ no se anula en ningún punto. En consecuencia, si G actúa libremente, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \longrightarrow & T_uP \\ X & \mapsto & \sigma(X)_u \end{array}$$

es inyectiva para toda $u\in P$.

Particularmente, nos interesan las campos fundamentales cuando P es el espacio total de un haz principal.

Un *G-haz principal* es una terna $\xi=(P,\pi,M)$, donde $\pi: P\to M$ es una aplicación diferenciable y suprayectiva, que satisface lo siguiente:

1) G actúa por la derecha en P y π es *G-invariante*, esto es

$$\pi(u\cdot a)=\pi(u),\quad u\in P, a\in G$$

2) Para todo $x\in M$ existe una vecindad $U\subset M$ de x, y un difeomorfismo

$$\varphi:\pi^{-1}(U)\to U\times G$$

tal que

a) φ preserva fibras, esto es, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U\times G \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

conmuta.

b) φ es *equivariante*, esto es,

$$\varphi(u\cdot a)=\varphi(u)\cdot a,\quad u\in P, a\in G$$

donde G actúa en $U\times G$ por traslaciones derechas: $(x,a)\cdot b=(x,ab)$.

A P se le llama *espacio total* del haz, M es la *base* del haz, π es la *proyección*, las aplicaciones φ son las *trivializaciones locales* y a G se le llama *grupo estructural*.

Es claro, debido a la equivarianza de las trivializaciones locales que, de hecho, G actúa libremente en P. La aplicación $\sigma_u:G\to P$ definida arriba, toma valores en $\pi^{-1}(\pi(u))$ y es sencillo ver que define un difeomorfismo $G\to\pi^{-1}(\pi(u))$. De aquí que cada *fibra* $\pi^{-1}(p)$ $(p\in M)$ es una G-órbita, por lo que π induce una aplicación continua y biyectiva $P/G\to M$. En términos de trivializaciones locales es inmediato ver que la proyección π es abierta, de manera que $P/G\cong M$.

Si $\xi=(P,\pi,M)$ y $\zeta=(Q,\rho,N)$ son dos G-haces principales, una *aplicación de haces* $\zeta\to\xi$ es una pareja de aplicaciones diferenciables

$$\varphi:Q\to P \text{ y } \varphi_0:N\to M$$

tales que φ es equivariante y el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\varphi} & P \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ N & \xrightarrow[\varphi_0]{} & M \end{array}$$

(De hecho, la equivarianza de φ implica inmediatamente la existencia de una única función $\varphi_0:N\to M$ tal que $\pi\varphi=\varphi_0\rho$ y usando trivializaciones locales, es sencillo ver que φ_0 es C^∞. La definición que usamos aquí es sólo para enfatizar las dos funciones involucradas). Denotaremos por $(\varphi,\varphi_0):\zeta\to\xi$ a la aplicación de haces.

Por otra parte, si $y\in N$ y $x=\varphi_0(y)$, $\varphi:\rho^{-1}(y)\to\pi^{-1}(x)$ es un difeomorfismo puesto que, claramente, $\varphi=\sigma_{\varphi(v)}\sigma_v^{-1}$ en $\rho^{-1}(y)$ para cualquier $v\in Q$. En particular, si $M=N$ y $\varphi_0=1$, es posible ver que φ es invertible y que $(\varphi^{-1},1):\xi\to\zeta$ es también una aplicación de haces. En virtud de esto, tiene sentido definir que dos haces ξ y ζ con la misma base, son *equivalentes*, si existe una aplicación de haces $(\varphi,\varphi_0):\zeta\to\xi$ con $\varphi_0=1$.

Otra construcción importante de haces es la del *haz inducido*. Si $\xi=(P,\pi,M)$ es un G-haz principal y $\varphi_0{:}N\to M$ es una aplicación diferenciable, el *haz inducido por* φ_0 es el haz $\varphi_0^*\xi=(Q,\rho,N)$ donde $Q=\{(y,u)\in N\times P|\varphi_0(y)=\pi(u)\}$ y la proyección ρ es la proyección al factor N. La acción de G en Q está dada por $(y,u)\cdot a=(y,u\cdot a)$. Más aún, si $\varphi{:}Q\to P$ es la proyección al factor P, entonces $(\varphi,\varphi_0){:}\varphi_0^*\xi\to\xi$ es una aplicación de haces.

Es importante notar que si $(\varphi,\varphi_0){:}\zeta\to\xi$ es una aplicación de haces, entonces ζ es equivalente a $\varphi_0^*\xi$.

2. Conexiones en haces principales

Sea $\xi=(P,\pi,M)$ un G-haz principal. Para cada $u\in P$ se tiene un subespacio distinguido de T_uP, llamado *subespacio vertical*:

$$V_u=\ker(d\pi_u)$$

Este subespacio contiene a los vectores de la forma $\sigma(A)_u$ $(A\in\mathcal{G})$ donde $\sigma(A)$ es el campo fundamental asociado a A. Como la acción de G es libre, tenemos, de hecho,

$$V_u=\{\sigma(A)_u|A\in\mathcal{G}\}$$

puesto que ambos subespacios tienen dimensión $\dim G$. Entonces, si $\{A_1,\dots,A_r\}$ es una base de $\mathcal{G}$, los campos $\sigma(A_1),\dots,\sigma(A_r)$ generan a V_u para todo $u\in P$, de manera que la correspondencia $u\mapsto V_u$ es una distribución C^∞ en TP que llamaremos *distribución vertical*. Obsérvese que esta distribucion es *G-invariante*: $dR_a(V_u)=V_{u\cdot a}$ $(a\in G)$.

Definición 2.1 Una *conexión* en ξ es una 1-forma $\omega\in\Lambda^1(P,\mathcal{G})$ que satisface:

1) $\omega(\sigma(A))=A\quad\forall A\in\mathcal{G}$

2) $R_a^*\omega=Ad\left(a^{-1}\right)\omega\quad\forall a\in G$

Toda conexión ω en ξ determina una distribución G-invariante complementaria de V, esto es,

Proposición 2.2 Si ω es una conexión en un G-haz principal $\xi=(P,\pi,M)$, $H=\ker\omega$ es una distribución C^∞ en TP que satisface:

1) $T_uP=V_u\oplus H_u\quad\forall u\in P$

2) $dR_a(H_u) = H_{u\cdot a}$ $\forall u \in P$ y $\forall a \in G$

Demostración 2.1.1 implica que $\omega_u : T_u P \to \mathcal{G}$ es suprayectiva, de donde $\dim H_u = \dim M$. Por tanto $\dim(T_u P) = \dim V_u + \dim H_u$. También 2.1.1 implica que $V_u \cap H_u = 0$, y se concluye que $T_u P = V_u \oplus H_u$.

Ahora, si $Y_u \in H_u$ y $a \in G$ tenemos, por 2.1.2 que $\omega(dR_a(Y_u)) = Ad(a^{-1})\omega(Y_u) = 0$. Por tanto $dR_a(H_u) \subset H_{u\cdot a}$; pero como dR_a es inyectiva y $\dim H_u = \dim H_{u\cdot a}$ entonces $dR_a(H_u) = H_{u\cdot a}$.

Finalmente, si $\{Y_1, \ldots, Y_{n+r}\}$ es una marco local de TP ($n = \dim M$) los campos C^∞

$$\overline{Y_i} = Y_i - \sigma(\omega(Y_i)), \quad (1 \le i \le n+r)$$

pertenecen a H y fácilmente se verifica que generan (localmente) a H. Por tanto H es C^∞.

□

La distribución H de la proposición es la *distribución horizontal*. Un vector $Y_u \in T_u P$ es *horizontal* (resp. *vertical*) si $Y_u \in H_u$ (resp. $Y_u \in V_u$).

En términos de la descomposición $T_u P = V_u \oplus H_u$, tenemos dos proyecciones

$$h : T_u P \to H_u \quad \text{y} \quad v : T_u P \to V_u$$

que llamaremos *operadores horizontal* y *vertical*. La invarianza de V y H implican inmediatamente que estos operadores conmutan con dR_a ($a \in G$):

$$hdR_a(Y_u) = dR_a(hY_u), \qquad vdR_a(Y_u) = dR_a(vY_u)$$

Obsérvese que si Y es un campo C^∞ en P entonces $v(Y)$ y $h(Y)$ también son C^∞ puesto que V y H lo son.

Otra consecuencia de esta descomposición es que, para cada $u \in P$,

$$d\pi_u : H_u \to T_{\pi(u)} M$$

es un isomorfismo. En consecuencia, todo vector $X_p \in T_p M$ ($p = \pi(u)$) puede escribirse como

$$X_p = d\pi_u(Y_u)$$

para un único vector $Y_u \in H_u$. Claramente, para $a \in G$, el vector correspondiente $Y_{u\cdot a} \in H_{u\cdot a}$ está dado por $Y_{u\cdot a} = dR_a(Y_u)$.

Definición 2.3 Sea $\xi=(P,\pi,M)$ un G-haz principal con una conexión ω y sea E un espacio vectorial.

a) Una k-forma $\eta\in\Lambda^k(P,\mathcal{G})$ es *equivariante* si $R_a^*\eta=Ad(a^{-1})\eta\ \forall a\in G$.

b) Una k-forma $\eta\in\Lambda^k(P,E)$ es *invariante* si $R_a^*\eta=\eta\ \forall a\in G$.

c) Una k-forma $\eta\in\Lambda^k(P,E)$ es *horizontal* si $\eta(Y_1,\ldots,Y_k)=0$ si por lo menos un Y_j es vertical.

d) Si $\eta\in\Lambda^k(P,E)$, la *derivada covariante* de η es la $(k+1)$-forma $D^\omega\eta\in\Lambda^{k+1}(P,E)$ definida por: $D^\omega\eta(Y_1,\ldots,Y_{k+1})=d\eta(hY_1,\ldots,hY_{k+1})$.

En estos términos, una conexión es equivariante.

Definición 2.4 Sea $\xi=(P,\pi,M)$ un G-haz principal y sea ω una conexión en ξ. La *curvatura* de ω es la 2-forma $\Omega=D^\omega\omega\in\Lambda^2(P,\mathcal{G})$.

Proposición 2.5 *Ω es horizontal y equivariante.*

Demostración Lo primero es claro pues toda derivada covariante es horizontal. Ahora, para $a\in G$ y $Y_1,Y_2\in P$ tenemos:

$$\begin{aligned}
R_a^*\Omega(Y_1,Y_2)&=\Omega(dR_a(Y_1),dR_a(Y_2))\\
&=d\omega(hdR_a(Y_1),hdR_a(Y_2))\\
&=d\omega(dR_a(hY_1),dR_a(hY_2))\\
&=R_a^*(d\omega)(hY_1,hY_2)\\
&=d(R_a^*\omega)(hY_1,hY_2)\\
&=d(Ad(a^{-1})\omega)(hY_1,hY_2)\\
&=Ad(a^{-1})d\omega(hY_1,hY_2)\\
&=Ad(a^{-1})\Omega(Y_1,Y_2)
\end{aligned}$$

□

Recordemos que si θ y η son formas con valores en $\mathcal{G}$, $[\theta,\eta]$ es la imagen de $\theta\wedge\eta$ bajo la aplicación $[\_,\_]:\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ inducida por el corchete de Lie.

Proposición 2.6

1) $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]$ (ecuación estructural)

2) $d\Omega = [\Omega,\omega]$ (identidad de Bianchi)

Demostración

1) Sea $u \in P$ y sean $Y_u, Z_u \in T_u P$. Debemos mostrar que

$$\Omega(Y_u, Z_u) = d\omega(Y_u, Z_u) + [\omega(Y_u), \omega(Z_u)]$$

El resultado es trivial si Y_u y Z_u son horizontales. Si ambos son verticales es un cálculo directo usando la fórmula

$$d\omega(Y,Z) = Y(\omega(Z)) - Z(\omega(Y)) - \omega([Y,Z])$$

Si $Y_u \in V_u$ y $Z_u \in H_u$ la misma fórmula nos da

$$d\omega(Y_u, Z_u) = -\omega([\sigma(A), Z]_u)$$

donde Z es un campo horizontal que (localmente) extiende a Z_u y $Y_u = \sigma(A)_u$ $(A \in \mathcal{G})$.

Ahora, el flujo de $\sigma(A)$ está dado por $\varphi_t(u) = u \cdot exp(tA) = R_{exp(tA)}(u)$, mientras que

$$[\sigma(A), Z]_u = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(Z_u - ((\varphi_t)_* Z)_u\right)$$

Para toda t se tiene:

$$((\varphi_t)_* Z)_u = (d\varphi_t)_{\varphi_{-t}(u)}\left(Z_{\varphi_{-t}(u)}\right) = \left(dR_{exp(tA)}\right)_{\varphi_{-t}(u)}\left(Z_{\varphi_{-t}(u)}\right)$$

de manera que $Y_u - ((\varphi_t)_* Y)_u$ es horizontal para toda t y, por tanto $[\sigma(A), Z]_u$ es horizontal.

2) Diferenciando (1) obtenemos

$$d\Omega = \tfrac{1}{2}[d\omega,\omega] - \tfrac{1}{2}[\omega, d\omega] = [d\omega,\omega] = [\Omega,\omega] - \tfrac{1}{2}[[\omega,\omega],\omega]$$

Pero $[[\omega,\omega],\omega] = 0$ por la identidad de Jacobi.

□

Corolario 2.7 $D\Omega = 0$ □

Proposición 2.8 *Sea W un espacio vectorial y sea $\eta \in \Lambda^k(P,W)$. Si η es horizontal e invariante, existe una única k-forma $\theta \in \Lambda^k(M,W)$ tal que $\pi^* \theta = \eta$.*

Demostración Sea $x \in M$ y sean $X_1,...,X_k \in T_x M$.

Dado $u \in \pi^{-1}(x)$ sean $Y_1,...,Y_k \in H_u$ los vectores que satisfacen $d\pi(Y_j) = X_j$. Si θ existe debemos tener

$$\theta(X_1,...,X_k) = \eta(Y_1,...Y_k)$$

y, por tanto, debe ser única. Definamos θ por esta igualdad. Para ver que está bien definida sea $v = u \cdot a$ cualquier otro punto en $\pi^{-1}(x)$. Claramente los vectores $Z_j \in H_{u \cdot a}$ que satisfacen $d\pi(Z_j) = X_j$ deben ser $Z_j = dR_a(Y_j)$. Entonces

$$\eta(Z_1,...,Z_k) = \eta(dR_a(Y_1),...,dR_a(Y_k)) = R_a^* \eta(Y_1,...,Y_k) = \eta(Y_1,...,Y_k)$$

pues η es invariante.

Veamos ahora que $\pi^* \theta = \eta$. Sea $u \in P$ y sean $Y_1,...,Y_k \in T_u P$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\pi^* \theta(Y_1,...,Y_k) &= \theta(d\pi(Y_1),...,d\pi(Y_k)) \\
&= \theta(d\pi(hY_1),...,d\pi(hY_k)) \\
&= \eta(hY_1,...,hY_k) \\
&= \eta(Y_1,...,Y_k) \text{ pues } \eta \text{ es horizontal}
\end{aligned}$$

□

La siguiente proposición es inmediata de verificar.

Proposición 2.9 *Sean $\xi = (P,\pi,M)$ y $\zeta = (Q,\rho,N)$ dos G-haces principales y sea $(\varphi,\varphi_0): \zeta \to \xi$ una transformación de haces. Si ω una conexión en ξ, entonces $\varphi^* \omega$ es una conexión en ζ. Con estas conexiones, los operadores horizontal y vertical conmutan con $d\varphi$. Además, si Ω es la curvatura de ω entonces $\varphi^* \Omega$ es la curvatura de $\varphi^* \omega$.*

□

3. Homomorfismo de Chern-Weil

Definición 3.1 Sea G un grupo de Lie y sea $\mathcal{G}$ su álgebra de Lie. Denotemos por $S^k(\mathcal{G})$ al espacio de funciones k-lineales y simétricas en $\mathcal{G}$. Definamos un producto

$$S^k(\mathcal{G}) \times S^l(\mathcal{G}) \to S^{k+l}(\mathcal{G})$$

por

$$(fg)(v_1,\ldots,v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}} f\left(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)}\right)g\left(v_{\sigma(k+1)},\ldots,v_{\sigma(k+l)}\right)$$

donde S_n denota al grupo de permutaciones de n elementos. Al igual que con el producto exterior para funciones k-lineales antisimétricas, este producto da una estructura de álgebra a

$$S^\bullet(\mathcal{G}) = \bigoplus_{k\geq 0} S^k(\mathcal{G})$$

(Para $k=0$ se tiene $S^0(\mathcal{G}) = \mathbf{R}$).

La representación adjunta $Ad: G \to Aut(\mathcal{G})$ induce una acción izquierda de G en $S^k(\mathcal{G})$:

$$(a\cdot f)(v_1,\ldots,v_k) = f\left(Ad\left(a^{-1}\right)v_1,\ldots,Ad\left(a^{-1}\right)v_k\right)$$

Sea $I^k(\mathcal{G})$ la parte G-invariante de $S^k(\mathcal{G})$, esto es,

$$I^k(\mathcal{G}) = \left\{f \in S^k(\mathcal{G}) \middle| a\cdot f = f \ \forall a \in G\right\}$$

Claramente el producto definido en $S^\bullet(\mathcal{G})$ induce un producto

$$I^k(\mathcal{G}) \times I^l(\mathcal{G}) \to I^{k+l}(\mathcal{G})$$

A $I^\bullet(\mathcal{G})$ se le llama *álgebra de polinomios invariantes* de $\mathcal{G}$.[1]

---

[1] c La nomenclau ra se debe a q e medianue na base $\{A_1,\ldots,A_r\}$ de $\mathcal{G}$ podemos idenuificar $S^k(\mathcal{G})$ con el espacio $\mathbf{R}\left[x^1,\ldots,x^r\right]^k$ de polinomios homogéneos de grado k en r variables asociando a cada $f \in S^k(\mathcal{G})$ el polinomio $\tilde{f}\left(x^1,\ldots,x^r\right) = f\left(\underbrace{A,\ldots,A}_{k}\right)$ donde $A = \Sigma_i x^i A_i$.

Sea $\xi=(P,\pi,M)$ un G-haz principal, sea ω una conexión en ξ y sea Ω su curvatura. Como Ω es una 2-forma en P con valores en $\mathcal{G}$, para $k\geq 1$, $\Omega^k=\Omega\wedge\cdots\wedge\Omega$ es una $2k$-forma en P con valores en $\mathcal{G}^{\otimes k}$. Si $f\in I^k(\mathcal{G})$ y denotamos igualmente por f a la aplicación lineal inducida $f:\mathcal{G}\otimes\cdots\otimes\mathcal{G}\to\mathbf{R}$, tenemos una $2k$-forma $f(\Omega^k)\in\Lambda^{2k}(P)$ con valores reales.

Proposición 3.2 $f(\Omega^k)$ *es horizontal e invariante.*

Demostración

$$f(\Omega^k)(Y_1,\ldots,Y_{2k})=\frac{1}{2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}sgn\sigma f\left(\Omega\left(Y_{\sigma(1)},Y_{\sigma(2)}\right),\ldots,\Omega\left(Y_{\sigma(2k-1)},Y_{\sigma(2k)}\right)\right)$$

Si por lo menos un Y_j es vertical, por lo menos un $\Omega\left(Y_{\sigma(i)},Y_{\sigma(i+1)}\right)=0$ pues Ω es horizontal. Entonces $f=0$ pues f es k-lineal. Por tanto $f(\Omega^k)(Y_1,\ldots,Y_{2k})=0$ si al menos un Y_j es horizontal.

Ahora, si $a\in G$,

$$R_a^*f(\Omega^k)=f(R_a^*\Omega^k)=f\left((R_a^*\Omega)^k\right)=f\left(\left(Ad(a^{-1})\Omega\right)^k\right)$$

De aquí, usando la invarianza de f, es fácil ver que $R_a^*f(\Omega^k)=f(\Omega^k)$.

□

Entonces, por 2.8, existe una única $2k$-forma $w_f(\xi)\in\Lambda^{2k}(M)$ tal que $\pi^*w_f(\xi)=f(\Omega^k)$.

Lema 3.3 *Si* $Y_1,\ldots,Y_{2k+1}$ *son vectores horizontales, entonces* $d\Omega^k(Y_1,\ldots,Y_{2k+1})=0$

Demostración Esto es cierto para $k=1$ pues $D\Omega=0$.

Supóngase cierto para $k-1$. Se tiene

$$d\Omega^k=d\left(\Omega\wedge\Omega^{k-1}\right)=d\Omega\wedge\Omega^{k-1}+\Omega\wedge d\Omega^{k-1}$$

Ahora,

$$\left(d\Omega\wedge\Omega^{k-1}\right)(Y_1,\ldots,Y_{2k+1})=\frac{1}{3!(2(k-1))!}\sum_{\sigma\in S_{2k+1}}sgn\sigma d\Omega\left(Y_{\sigma(1)},Y_{\sigma(2)},Y_{\sigma(3)}\right)\otimes\Omega^{k-1}\left(Y_{\sigma(4)},\ldots,Y_{\sigma(2k+1)}\right)=0$$

pues $d\Omega=0$ en vectores horizontales.

Por otra parte

$$\left(\Omega \wedge d\Omega^{k-1}\right)(Y_1,\ldots,Y_{2k+1}) = \frac{1}{2(2k-1)!}\sum_{\sigma\in S_{2k+1}} sgn\sigma\Omega\left(Y_{\sigma(1)},Y_{\sigma(2)}\right)\otimes d\Omega^{k-1}\left(Y_{\sigma(3)},\ldots,Y_{2k+1}\right) = 0$$

por hipótesis de inducción.

□

Proposición 3.4 *$w_f(\xi)$ es cerrada.*

Demostración Sea $x \in M$ y sean $X_1,\ldots,X_{2k+1} \in T_xM$. Sea $u \in \pi^{-1}(x)$ y sean $Y_1,\ldots,Y_{2k+1} \in H_u$ tales que $d\pi(Y_j) = X_j$. Tenemos

$$\begin{aligned} dw_f(\xi)(X_1,\ldots,X_{2k+1}) &= dw_f(\xi)(d\pi(Y_1),\ldots,d\pi(Y_{2k+1})) \\ &= \pi^* dw_f(\xi)(Y_1,\ldots,Y_{2k+1}) \\ &= d\left(\pi^* w_f(\xi)\right)(Y_1,\ldots,Y_{2k+1}) \\ &= df\left(\Omega^k\right)(Y_1,\ldots,Y_{2k+1}) \\ &= f\left(d\Omega^k\right)(Y_1,\ldots,Y_{2k+1}) \\ &= f(0) \quad \text{por el lema} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Proposición 3.5 *Si $f \in I^k(\mathcal{G})$ y $g \in I^l(\mathcal{G})$ entonces $w_{fg}(\xi) = w_f(\xi) \wedge w_g(\xi)$.*

Demostración Como π es una submersión entonces π^* es inyectiva , por lo que es suficiente probar que $(fg)\left(\Omega^{k+l}\right) = f\left(\Omega^k\right)\wedge g\left(\Omega^l\right)$.

Sea $\{v_1,\ldots,v_r\}$ una base de $\mathcal{G}$. Entonces Ω puede escribirse como

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r} \Omega^i A^i$$

donde las Ω^i son 2-formas en P con valores reales. Así,

$$f\left(\Omega^k\right) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} f\left(v_{i_1},\ldots,v_{i_k}\right)\Omega^{i_1}\wedge\cdots\Omega^{i_k}$$

donde cada índice corre libremente entre 1 y r.

Entonces

$$f(\Omega^k)\wedge g(\Omega^l)=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\\ j_1,\dots,j_l}} f(v_{i_1},\dots,v_{i_k})g(v_{j_1},\dots,v_{j_l})\Omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{i_k}\wedge\Omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{j_l}$$

$$=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\\ j_1,\dots,j_l}}(f\otimes g)(v_{i_1},\dots,v_{i_k},v_{j_1},\dots,v_{j_l})\Omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{i_k}\wedge\Omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{j_l}$$

Como todos los índices corren libremente tenemos,

$$f(\Omega^k)\wedge g(\Omega^l)=\sum_{i_1,\dots,i_{k+l}}(f\otimes g)(v_{i_1},\dots,v_{i_{k+l}})\Omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{i_k}\wedge\Omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{j_{k+l}}$$

Por otra parte,

$$(fg)(\Omega^{k+l})=\sum_{i_1,\dots,i_{k+l}}(fg)(v_{i_1},\dots,v_{i_{k+l}})\Omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{i_{k+l}}$$

$$=\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\sum_{i_1,\dots,i_{k+l}}(f\otimes g)(v_{i_{\sigma(1)}},\dots,v_{i_{\sigma(k+l)}})\Omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{i_{k+l}}$$

Ahora, para cada $\sigma\in S_{k+l}$, como los índices $i_1,\dots,i_{k+l}$ corren libremente entre 1 y r, $i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(k+l)}$ también corren libremente entre 1 y r (son los mismos índices pero permutados). Por tanto, cada argumento $v_{i_{\sigma(j)}}$ de $f\otimes g$ corre libremente entre v_1 y v_r. De aquí que

$$(fg)(\Omega^{k+l})=\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\sum_{i_1,\dots,i_{k+l}}(f\otimes g)(v_{i_1},\dots,v_{i_{k+l}})\Omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{i_{k+l}}$$

Así, todos los $\sigma-$ sumandos son iguales y hay $(k+l)!$ de ellos. Por tanto,

$$(fg)(\Omega^{k+l})=\sum_{i_1,\dots,i_{k+l}}(f\otimes g)(v_{i_1},\dots,v_{i_{k+l}})\Omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{i_{k+l}}$$

□

Como $w_f(\xi)$ es cerrada, podemos tomar su clase de cohomología de De Rham $\overline{w}_f(\xi)\in H^{2k}_{DR}(M)$. La proposición anterior nos dice que la correspondencia

$$I^*(\mathcal{G})\to H^*_{DR}(M)$$
$$f\mapsto\overline{w}_f(\xi)$$

es un homomorfismo de álgebras. Este homomorfismo se construye en términos de una conexión en ξ. Sin embargo, la clase de cohomología de De Rham de $w_f(\xi)$ no depende de la conexión escogida como muestra el siguiente resultado.

Teorema 3.6 Sea $\xi=(P,\pi,M)$ un G-haz principal. Sean ω_0 y ω_1 conexiones en ξ, Ω_0 y Ω_1 sus curvaturas, y sean $w_f^0(\xi)$ y $w_f^1(\xi)$ las correspondientes $2k$-formas M:

$$\pi^* w_f^0(\xi)=f\left(\Omega_0^k\right) \qquad \pi^* w_f^1(\xi)=f\left(\Omega_1^k\right)$$

Entonces $w_f^0(\xi)-w_f^1(\xi)$ *es exacta.*

Demostración Considérese el G-haz principal $\tilde{\xi}=(P\times I,\pi\times 1,M\times I)$ donde $I=[0,1]$ y la acción de G en $P\times I$ es $(u,t)\cdot a=(u\cdot a,t)$ y considérese el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P\times I & \xrightarrow{\pi_P} & P \\ \pi\times 1\downarrow & & \downarrow\pi \\ M\times I & \xrightarrow[\pi_M]{} & M \end{array}$$

donde π_P y π_M son proyecciones al primer factor. Claramente $\pi_P:\tilde{\xi}\to\xi$ es una aplicación de haces. Por 2.9, $\pi_P^*\omega_0$ y $\pi_P^*\omega_1$ son conexiones en $\tilde{\xi}$ con curvaturas $\pi_P^*\Omega_0$ y $\pi_P^*\Omega_1$ respectivamente. Es inmediato probar que la 1-forma

$$\tilde{\omega}=(1-t)\pi_P^*\omega_0+t\pi_P^*\omega_1\in\Lambda^1(P\times I,\mathcal{G})$$

es una conexión en $\tilde{\xi}$. Obsérvese que

$$\tilde{\omega}_{(u,0)}=\left(\pi_P^*\omega_0\right)_{(u,0)} \quad \text{y} \quad \tilde{\omega}_{(u,1)}=\left(\pi_P^*\omega_1\right)_{(u,1)}$$

Sea $\tilde{\Omega}$ la curvatura de $\tilde{\omega}$ y sea $w_f\left(\tilde{\xi}\right)\in\Lambda^{2k}(M\times I)$ la correspondiente forma tal que

$$(\pi\times 1)^* w_f\left(\tilde{\xi}\right)=f\left(\tilde{\Omega}^k\right)$$

Finalmente, sean

$$i_0,i_1:P\to P\times I, \qquad j_0,j_1:M\to M\times I$$

las inclusiones a nivel 0 y 1 respectivamente. Obsérvese que i_0 e i_1 son aplicaciones de haces.

Vamos a probar que

$$j_0^* w_f\left(\tilde{\xi}\right)=w_f^0(\xi) \text{ y } j_1^* w_f\left(\tilde{\xi}\right)=w_f^1(\xi)$$

Como j_0 y j_1 son homotópicas, es bien sabido que existe un operador

$$\rho:\Lambda^{m+1}(M\times I)\to\Lambda^m(M)\ (m\in\mathrm{N})$$

tal que $j_0^*-j_1^*=\rho d+d\rho$ (ver, *eg*: [14], Vol. I, p. 304, Teorema 17)

De aquí, como $w_f(\tilde{\xi})$ es cerrada, tendremos $w_f^0(\xi)-w_f^1(\xi)=d\rho(w_f(\tilde{\xi}))$ lo que finalizará la demostración.

Haremos la prueba en varios pasos sencillos.

PASO 1 $i_0^\bullet\tilde{\omega}=\omega_0$ e $i_1^\bullet\tilde{\omega}=\omega_1$

$$\begin{aligned}(i_0^\bullet\tilde{\omega})_u(Y_u)&=\tilde{\omega}_{(u,0)}(di_0(Y_u))=(\pi_P^\bullet\omega_0)_{(u,0)}(di_0(Y_u))=(\omega_0)_u(d(\pi_P i_0)(Y_u))\\&=(\omega_0)_u(Y_u)\text{ pues }\pi_P i_0=1\end{aligned}$$

La otra igualdad es análoga.

PASO 2 $i_0^\bullet\tilde{\Omega}=\Omega_0$ y $i_1^\bullet\tilde{\Omega}=\Omega_1$

$$\begin{aligned}(i_0^\bullet\tilde{\Omega})(Y_1,Y_2)&=\tilde{\Omega}(di_0(Y_1),di_0(Y_2))=d\tilde{\omega}(hdi_0(Y_1),hdi_0(Y_2))\\&=d\tilde{\omega}(di_0(hY_1),di_0(hY_2))\text{ pues } i_0 \text{ es equivariante}\\&=(i_0^\bullet d\tilde{\omega})(hY_1,hY_2)=d(i_0^\bullet\tilde{\omega})(hY_1,hY_2)\\&=d\omega_0(hY_1,hY_2)\text{ por el paso 1}\\&=\Omega_0(Y_1,Y_2)\end{aligned}$$

Y, análogamente, $i_1^\bullet\tilde{\Omega}=\Omega_1$.

PASO 3 $i_0^\bullet f(\tilde{\Omega}^k)=f(\Omega_0^k)$ y $i_1^\bullet f(\tilde{\Omega}^k)=f(\Omega_1^k)$

$$i_0^\bullet f(\tilde{\Omega}^k)=f(i_0^\bullet\tilde{\Omega}^k)=f((i_0^\bullet\tilde{\Omega})^k)=f(\Omega_0^k)$$

por el paso 2. De la misma forma $i_1^\bullet f(\tilde{\Omega}^k)=f(\Omega_1^k)$.

PASO 4 $j_0^\bullet w_f(\tilde{\xi})=w_f^0(\xi)$ y $j_1^\bullet w_f(\tilde{\xi})=w_f^1(\xi)$

$$\begin{aligned}\pi^\bullet(j_0^\bullet w_f(\tilde{\xi}))&=(j_0\pi)^\bullet w_f(\tilde{\xi})=((\pi\times 1)i_0)^\bullet w_f(\tilde{\xi})\\&=i_0^\bullet(\pi\times 1)^\bullet w_f(\tilde{\xi})=i_0^\bullet f(\tilde{\Omega}^k)\\&=f(\Omega_0^k)\text{ por el paso 3}\end{aligned}$$

Como también $\pi^\bullet w_f^0(\xi)=f(\Omega_0^k)$, por unicidad se tiene $j_0^\bullet w_f(\tilde{\xi})=w_f^0(\xi)$. Igualmente se tiene $j_1^\bullet w_f(\tilde{\xi})=w_f^1(\xi)$.

□

Definición 3.7 El homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} I^{\bullet}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\overline{w}(\xi)} & H^{\bullet}_{DR}(M) \\ f & \mapsto & \overline{w}_f(\xi) \end{array}$$

es el *homomorfismo de Chern-Weil.*

Como vimos, este homomorfismo no depende de la conexión escogida si no sólo del haz ξ. Más aún, se tiene:

Proposición 3.8 *El homomorfismo de Chern-Weil depende sólo de la clase de equivalencia del haz principal.*

Demostración Sean $\xi=(P,\pi,M)$ y $\eta=(Q,\rho,M)$ dos G-haces principales con la misma base. Sea $\varphi:\xi\to\eta$ una equivalencia y sea ω una conexión en η. Para construir el homomorfismo de Chern-Weil correspondiente a ξ podemos tomar la conexión $\varphi^{\bullet}\omega$. Si Ω es la curvatura de ω, entonces $\varphi^{\bullet}\Omega$ es la curvatura de $\varphi^{\bullet}\omega$.

Sea $f\in I^k(\mathcal{G})$ y sean Λ y $\Lambda^{\bullet}$ las correspondientes formas en M:

$$\pi^{\bullet}\Lambda^{\bullet}=f\left(\left(\varphi^{\bullet}\Omega\right)^k\right) \quad y \quad \rho^{\bullet}\Lambda=f\left(\Omega^k\right)$$

Ahora,

$$\pi^{\bullet}\Lambda=(\rho\varphi)^{\bullet}\Lambda=\varphi^{\bullet}\rho^{\bullet}\Lambda=\varphi^{\bullet}f\left(\Omega^k\right)=f\left(\varphi^{\bullet}\Omega^k\right)=f\left(\left(\varphi^{\bullet}\Omega\right)^k\right)$$

Por unicidad de $\Lambda^{\bullet}$ se tiene entonces $\Lambda=\Lambda^{\bullet}$ y, por tanto, $\overline{\Lambda}=\overline{\Lambda}^{\bullet}$.

□

El homomorfismo de Chern-Weil es natural, esto es,

Proposición 3.9 Si $\xi=(P,\pi,M)$ un G-haz principal y $\varphi_0:N\to M$ una aplicación C^{∞}, entonces

$$w\left(\varphi_0^{\bullet}\xi\right)=\varphi_0^{\bullet}w(\xi)$$

Demostración Similar a la anterior.

□

CAPÍTULO 3

HOMOMORFISMO DE CHERN-WEIL (VERSIÓN SIMPLICIAL)

1. Haces simpliciales

En esta sección trabajaremos con variedades simpliciales, esto es, con objetos simpliciales sobre la categoría de variedades diferenciables y aplicaciones C^∞. Así, una variedad simplicial no es más que un espacio simplicial X, donde cada X_n es una variedad diferenciable y los morfismos $\alpha^*: X_m \to X_n$, inducidos por la categoría Δ, son diferenciables.

Definición 1.1 Sea X una variedad simplicial. Una *k-forma* (simplicial) en X, con valores en un espacio vectorial V, es una colección $\omega = \{\omega_n\}$, con $\omega_n \in \Lambda^k\left(X_n \times \Delta^n, V\right)$, que satisface:

$$\left(\alpha^* \times 1\right)^* \omega_n = (1 \times \alpha)^* \omega_m$$

para cualquier operador inyectivo $\alpha: [n] \to [m]$.

Al conjunto de k-formas en X con valores en V lo denotaremos por $\Lambda^k(\mathrm{X}, V)$. Este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones

$$\omega + \eta = \{\omega_n + \eta_n\}$$
$$a\omega = \{a\omega_n\} \quad a \in \mathbf{R}$$

Muchas de las operaciones entre formas en una variedad diferenciable se traducen a formas en una variedad simplicial operando término a término.

Dada una k-forma simplicial ω en X, podemos diferenciar ω:

$$d\omega = \{d\omega_n\}$$

y es inmediato verificar que $d\omega$ también es simplicial. Obviamente $d: \Lambda^k(\mathrm{X}, V) \to \Lambda^{k+1}(\mathrm{X}, V)$ es lineal y satisface $d^2 = 0$. Por consiguiente se tiene un complejo de cocadenas

$$0 \to \Lambda^0(\mathrm{X}, V) \to \Lambda^1(\mathrm{X}, V) \to \Lambda^2(\mathrm{X}, V) \to \cdots$$

que denotaremos por $\Lambda^*(\mathrm{X}, V)$. Si $V = \mathbf{R}$ escribiremos simplemente $\Lambda^*(\mathrm{X})$. La *cohomología de De Rham* de X es entonces:

$$H^*_{DR}(\mathrm{X}) = H_*\left(\Lambda^*(\mathrm{X}), d\right)$$

En la sección 4 probaremos que esta cohomología coincide con la cohomología singular de la realización geométrica de X.

Observación Podríamos haber definido la cohomología de De Rham de una variedad *graduada*, deshechando la condición de simplicialidad en la definición de forma simplicial. Pero en tal caso tendríamos

$$H^{\bullet}_{DR}(\mathbf{X}) \cong \bigoplus_{k\geq 0} H^{\bullet}_{DR}(\mathbf{X}_k)$$

y no es esto lo que queremos puesto que nosotros buscamos relacionar $H^{\bullet}_{DR}(\mathbf{X})$ con $H^{\bullet}(\|\mathbf{X}\|)$.

Definición 1.2 Sea G un grupo de Lie. Un *G-haz simplicial* (principal) es una terna $\xi = (\mathbf{P}, \pi, \mathbf{M})$ donde **P** y **M** son variedades simpliciales, π es una aplicación simplicial y se satisfacen las siguientes condiciones:

1) Para cada $n \in \mathbf{N}$, $P_n \xrightarrow{\pi} M_n$ es un G-haz principal.
2) Los aplicaciones $\alpha^{\bullet}$, inducidas por Δ, son equivariantes.

De hecho, un haz simplicial es un objeto simplicial sobre la categoría de haces principales y transformaciones de haces. La condición (2) afirma simplemente que $\alpha^{\bullet}: P_m \to P_n$ es una transformación de haces.

Para definir una conección en un haz simplicial observemos que si $P \xrightarrow{\pi} M$ es un haz principal, entonces $P \times \Delta^n \xrightarrow{\pi \times 1} M \times \Delta^n$ también es un haz principal donde la acción de G es $(u,t)\cdot a = (u\cdot a, t)$.

Definición 1.3 Una *conexión* en un G-haz simplicial $\xi = (\mathbf{P}, \pi, \mathbf{M})$ es una 1-forma simplicial $\omega \in \Lambda^1(\mathbf{P}, \mathcal{G})$, con valores en el álgebra de Lie de G tal que para cada $n \in \mathbf{N}$, ω_n es una conexión en el haz principal $P_n \times \Delta^n \xrightarrow{\pi_n \times 1} M_n \times \Delta^n$.

No sabemos, *a priori*, si existen conexiones en un haz simplicial arbitrario. Desde luego, usando particiones de la unidad, podemos construir una conexión en cada nivel. Sin embargo no podemos asegurar que tal conexión sea simplicial.

No obstante, vamos ahora a construir un haz simplicial $\gamma: N\overline{G} \to NG$, en el cual existe una conección canónica. Este haz es *universal*, en el sentido de que su realización geométrica $\|N\overline{G}\| \to \|NG\|$, puede verse como un G-haz universal.

Definición 1.4 Definimos NG como sigue. Para $n \geq 1$, $NG_n = G^n$ y para $n=0$, $NG_0 = \{pto.\}$. Los morfismos básicos $d^i: NG_n \to NG_{n-1}$ y $s^j: NG_n \to NG_{n+1}$ están dados por:

$$d^i(g_1,\dots,g_n) = \begin{cases} (g_2,\dots,g_n) & i=0 \\ (g_1,\dots,g_i g_{i+1},\dots,g_n) & 1 \leq i \leq n-1 \\ (g_1,\dots,g_{n-1}) & i=n \end{cases}$$

$$s^j(g_1,\dots,g_n) = (g_1,\dots,g_{j-1},e,g_j,\dots,g_n)$$

con los casos especiales

$$NG_1 \xrightarrow{d^0,d^1} NG_0 \qquad\qquad NG_0 \xrightarrow{s^0} NG_1$$

$$d^0 = d^1 = pto. \qquad\qquad s^0(pto.) = (e)$$

Para $N\overline{G}$ se define $N\overline{G}_n = G^{n+1}$ $(n \geq 0)$. En este caso $d^i: N\overline{G}_n \to N\overline{G}_{n-1}$ y $s^j: N\overline{G}_n \to N\overline{G}_{n+1}$ son

$$d^i(g_0,\dots,g_n) = (g_0,\dots,\hat{g}_i,\dots,g_n)$$
$$s^j(g_0,\dots,g_n) = (g_0,\dots,g_{i-1},g_i,g_i\dots,g_n)$$

En ambos casos es directo verificar que los morfismos d^i, s^j satisfacen las relaciones simpliciales. Además es evidente que son aplicaciones diferenciables por lo que NG y $N\overline{G}$ son variedades simpliciales.

Observación En el caso de $N\overline{G}$ es fácil describir en general los morfismos $\alpha^*: N\overline{G}_m \to N\overline{G}_n$ inducidos por un operador $\alpha: [n] \to [m]$. De hecho, como conjunto simplicial, $N\overline{G}$ coincide con el ejemplo 1.2.7 donde aquí $X = G$. Así, en este caso, α^* está dado por $\alpha^*(g) = g_{\alpha(i)}$.

La aplicación $\gamma: N\overline{G} \to NG$ está definida por

$$\gamma_n(g_0,\dots,g_n) = \left(g_0 g_1^{-1},\dots,g_{n-1} g_n^{-1}\right)$$

(γ_0 es la aplicación constante). Fácilmente se ve que es simplicial.

Finalmente, G la acción de G en $N\overline{G}_n$ por traslaciones derechas: $(g_0,\dots,g_n)\cdot a = (g_0 a,\dots,g_n a)$.

Proposición 1.5 *$\gamma: N\overline{G} \to NG$ es un haz simplicial.*

Demostración En cada nivel, $\gamma_n: N\overline{G}_n \to NG_n$ es de hecho equivalente al haz trivial $NG_n \times G$. Una trivialización global $\varphi_n: N\overline{G}_n \to NG_n \times G$ está dada por

$$\varphi_n(g) = (\gamma_n(g), g_0)$$

que es claramente diferenciable y con inversa

$$\varphi_n^{-1}(h,a) = \left(e, h_1^{-1}, (h_1 h_2)^{-1}, \ldots, (h_1 \cdots h_n)^{-1}\right) \cdot a$$

también diferenciable. Para ver que los morfismos inducidos por Δ son equivariantes es suficiente probar que los d^i, s^j lo son, pero esto es directo de verificar.

□

Podemos construir una conexión en el haz $\gamma: N\overline{G} \to NG$ como sigue.

Definición 1.6 Sea $\theta \in \Lambda^1(G, \mathcal{G})$ la 1-forma definida por $\theta_a = \left(dL_{a^{-1}}\right)_a$. Es inmediato verificar que

1) $\theta(\sigma(X)) = X \quad \forall X \in \mathcal{G}$

2) $R_a^* \theta = Ad\left(a^{-1}\right)\theta \quad \forall a \in G$

Por tanto θ puede considerarse como una conexión en el haz "hipertrivial" $G \to pto$. A θ se le llama *conexión de Maurer-Cartan*.

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $q_i: N\overline{G}_n \times \Delta^n \to G$ proyectando al i-ésimo factor de $N\overline{G}_n = G^{n+1}$. Defínase también $\omega_n^i \in \Lambda^1\left(N\overline{G}_n \times \Delta^n, \mathcal{G}\right)$ por $\omega_n^i = q_i^* \theta \ (0 \le i \le n)$. Finalmente definamos $\omega_n \in \Lambda^1\left(N\overline{G}_n \times \Delta^n, \mathcal{G}\right)$ por

$$\omega_n = \sum_{i=0}^{n} t_i \omega_n^i$$

donde las t_i son las coordenadas usuales en Δ^n. Como $\sum t_i = 1$, es inmediato probar que ω_n es una conexión en $N\overline{G}_n \times \Delta^n \to NG_n \times \Delta^n$.

Proposición 1.7 $\omega=\{\omega_n\}$ *es una forma simplicial en el haz* $\gamma: N\overline{G}\to NG$.

Demostración Sea $\alpha:[n]\to[m]$ un operador. Tenemos

$$\begin{aligned}(\alpha^{\bullet}\times 1)^{*}\omega^{n} &= \sum_{i=0}^{n}(\alpha^{\bullet}\times 1)^{*}t_i\omega_n^{i} = \sum_{i=0}^{n}\left(t_i\circ(\alpha^{\bullet}\times 1)\right)(\alpha^{\bullet}\times 1)^{*}\omega_n^{i}\\ &= \sum_{i=0}^{n}t_i(\alpha^{\bullet}\times 1)^{*}q_i^{*}\theta = \sum_{i=0}^{n}t_i\left(q_i\circ(\alpha^{\bullet}\times 1)\right)^{*}\theta\\ &= \sum_{i=0}^{n}t_i q_{\alpha(i)}^{*}\theta\end{aligned}$$

(En la última suma las q's están definidas en $N\overline{G}_m\times\Delta^n$). Un cálculo análogo muestra que:

$$(1\times\alpha)^{*}\omega_m=\sum_{j=0}^{m}\left(t_j\circ(1\times\alpha)\right)q_j^{*}\theta$$

Ahora, se ve fácilmente que

$$\left(t_j\circ(1\times\alpha)\right)=\sum_{i\in\alpha^{-1}(j)}t_i$$

Por tanto,

$$(1\times\alpha)^{*}\omega_m=\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i\in\alpha^{-1}(j)}t_iq_j^{*}\theta\right)=\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i\in\alpha^{-1}(j)}t_iq_{\alpha(i)}^{*}\theta\right)$$

Como $[n]=\alpha^{-1}(0)\cup\cdots\cup\alpha^{-1}(m)$ esta suma es igual a

$$\sum_{i=0}^{n}t_iq_{\alpha(i)}^{*}\theta$$

Por lo tanto $(\alpha^{\bullet}\times 1)^{*}\omega_n=(1\times\alpha)^{*}\omega_m$.

□

Así pues, tenemos una conexión en el haz simplicial $\gamma: N\overline{G}\to NG$. Ella nos permitirá definir el homomorfismo de Chern-Weil correspondiente a este haz simplicial según se describe en la siguiente sección.

El resto de esta sección lo dedicaremos a probar que el funtor de realización geométrica aplicado a este haz simplicial, nos da un G-haz principal (topológico) en el sentido usual.

Denotemos por BG y EG a las realizaciones geométricas de NG y $N\overline{G}$ respectivamente. La aplicación continua $\|\gamma\|: EG \to BG$ es claramente suprayectiva y se tiene una acción derecha de G en EG definida por $[g,t]\cdot a = [g\cdot a, t]$. La equivarianza de los morfismos α^{*} implica imediatamente que esta definición no depende de los representantes.

Proposición 1.8 *La acción $EG \times G \to EG$ es continua.*

Demostración Obsérvese que en cada "esqueleto" $\|N\overline{G}\|^{n}$ está inducida por la acción

$$\left(\coprod_{i=0}^{n} N\overline{G}_i \times \Delta^i\right) \times G \to \left(\coprod_{i=0}^{n} N\overline{G}_i \times \Delta^i\right)$$

dada por $(g,t)\cdot a = (g\cdot a, t)$ y considérese el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\left(\coprod_{i=0}^{n} N\overline{G}_i \times \Delta^i\right) \times G & \longrightarrow & \left(\coprod_{i=0}^{n} N\overline{G}_i \times \Delta^i\right) \\
p_n \times 1 \downarrow & & \downarrow p_n \\
\|N\overline{G}\|^{n} \times G & \longrightarrow & \|N\overline{G}\|^{n}
\end{array}$$

donde p_n es la proyección al cociente. Como G es variedad diferenciable, es localmente compacto, de manera que $p_n \times 1$ es identificación. Esto muestra que la acción es continua en cada "esqueleto". Como es fácil verificar que $EG \times G$ tiene la topología coherente con los $\|N\overline{G}\| \times G$ esto concluye la prueba.

□

Ahora, como cada $\gamma_n : N\overline{G}_n \to NG_n$ es G-invariante, es claro que $\|\gamma\|$ también lo es. Así, lo único que falta para verificar que $\|\gamma\|: EG \to BG$ es un G-haz principal, es construir trivializaciones locales.

Proposición 1.9 ([2], p.72, Proposición 5.3) *Existen secciones locales del haz $\|\gamma\|: EG \to BG$.* □

Observación 1.11 Al espacio BG se le llama *espacio clasificante* de G. BG es clasificante en el sentido usual según el siguiente teorema probado por Segal en [13].

Teorema 1.10 ([13]) *El haz $\|\gamma\|: EG \to BG$ es universal.*

2. Teoría simplicial de Chern-Weil

En esta sección generalizamos la teoría de Chern-Weil clásica para asociar a un G-haz simplicial $\xi=(\mathrm{P},\pi,\mathrm{M})$, un homomorfismo multiplicativo $I^{\bullet}(\mathcal{G})\to H^{\bullet}_{DR}(\mathrm{M})$ del álgebra de polinomios invariantes de un grupo de Lie G a la cohomología de De Rham de M como se definió en la sección 2.

En primer lugar obsérvese que el producto exterior de formas en una variedad puede llevarse a una variedad simplicial definiendo

$$\omega\wedge\eta=\{\omega_n\wedge\eta_n\}$$

Como el "pull-back" conmuta con el producto exterior, es claro que $\omega\wedge\eta$ es simplicial si ω y η lo son. Se tiene así el álgebra de formas simpliciales $\Lambda^{\bullet}(\mathrm{M})=\oplus_k\Lambda^k(\mathrm{M})$. Claramente, este producto induce un producto en las clases de cohomología con el cual $H^{\bullet}_{DR}(\mathrm{M})$ es también un álgebra.

Dada una conexión ω en un G-haz simplicial $\xi=(\mathrm{P},\pi,\mathrm{M})$, su *curvatura*, es, por supuesto, la 2-forma $\Omega\in\Lambda^2(\mathrm{P},\mathcal{G})$ definida por $\Omega=\{\Omega_n\}$ donde cada Ω_n es la curvatura de ω_n.

Si $\alpha:[n]\to[m]$ es un operador, claramente las aplicaciones

$$(\alpha^{\bullet}\times 1):P_m\times\Delta^n\to P_n\times\Delta^n \qquad (1\times\alpha):P_m\times\Delta^n\to P_m\times\Delta^m$$

son equivariantes, por lo que $d(\alpha^{\bullet}\times 1)$ y $d(1\times\alpha)$ conmutan con el operador horizontal (aquí consideramos las conexiones $(\alpha^{\bullet}\times 1)^{*}\omega_n$ y $(1\times\alpha)^{*}\omega_m$ en el haz $P_m\times\Delta^n\to M_m$). De aquí se sigue inmediatamente que Ω es, en efecto, una forma simplicial.

Por supuesto, si $f\in I^k(\mathcal{G})$, se tiene la $2k$-forma

$$f(\Omega^k)=\{f(\Omega_n^k)\}$$

y un cálculo directo muestra que $f(\Omega^k)$ es simplicial.

Podemos ahora aplicar la teoría de Chern-Weil en cada nivel $P_n\times\Delta^n\to M_n\times\Delta^n$, y obtener una única $2k$-forma $w_f(\xi)_n\in\Lambda^{2k}(M_n)$ tal que

$$(\pi_n\times 1)^{*}w_f(\xi)_n=f(\Omega^k)$$

Proposición 2.1 *La 2k-forma* $w_f(\xi)=\{w_f(\xi)_n\}$ *es simplicial.*

Demostración Para no perdernos considérense los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} P_n\times\Delta^n & \xrightarrow{\pi_n\times 1} & M_n\times\Delta^n \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^*\times 1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^*\times 1} \\ P_m\times\Delta^n & \xrightarrow[\pi_m\times 1]{} & M_m\times\Delta^n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P_m\times\Delta^m & \xrightarrow{\pi_m\times 1} & M_m\times\Delta^m \\ \downarrow{\scriptstyle 1\times\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle 1\times\alpha} \\ P_m\times\Delta^n & \xrightarrow[\pi_m\times 1]{} & M_m\times\Delta^n \end{array}$$

donde $\alpha:[n]\to[m]$ es un operador. Ahora,

$$\begin{aligned}
(\pi_m\times 1)^*(\alpha^*\times 1)^* w_f(\xi)_n &= [(\alpha^*\times 1)(\pi_m\times 1)]^* w_f(\xi)_n \\
&= [(\pi_n\times 1)(\alpha^*\times 1)]^* w_f(\xi)_n \\
&= (\alpha^*\times 1)^*(\pi_n\times 1)^* w_f(\xi)_n \\
&= (\alpha^*\times 1)^* f(\Omega_n^k) \\
&= (1\times\alpha)^* f(\Omega_m^k) \\
&= (1\times\alpha)^*(\pi_m\times 1)^* w_f(\xi)_m \\
&= [(\pi_m\times 1)(1\times\alpha)]^* w_f(\xi)_m \\
&= [(1\times\alpha)(\pi_m\times 1)]^* w_f(\xi)_m \\
&= (\pi_m\times 1)^*(1\times\alpha)^* w_f(\xi)_m
\end{aligned}$$

Por tanto $(\pi_m\times 1)^*(\alpha^*\times 1)^* w_f(\xi)_n=(\pi_m\times 1)^*(1\times\alpha)^* w_f(\xi)_m$. Ahora, $\pi_m\times 1$ es una submersión, de manera que $(\pi_m\times 1)^*$ es inyectivo. Por tanto, $(\alpha^*\times 1)^* w_f(\xi)_n=(1\times\alpha)^* w_f(\xi)_m$.

□

Ahora, como cada $w_f(\xi)_n$ es cerrada, entonces $w_f(\xi)\in\Lambda^{2k}(\mathrm{M})$ es cerrada y así, podemos tomar su clase de cohomología de De Rham (simplicial). Finalmente tenemos

$$w_{fg}(\xi)=w_f(\xi)\wedge w_g(\xi)\quad f,g\in I^*(\mathcal{G})$$

puesto que esto sucede en cada nivel.

Observación La única dificultad en la generalización del homomorfismo de Chern-Weil a G-haces simpliciales radica en la verificación de la condición de simplicialidad de las formas involucradas. Acorde con lo observado en la sección 1, podríamos deshechar esta condición y obtener un homomorfismo de Chern-Weil en variedades graduadas. La condición de simplicialidad es, no obstante, esencial para establecer el isomorfismo entre la cohomología de De Rham de la variedad simplicial M y la cohomología singular de su realización geométrica.

3. Cohomología de una variedad simplicial

En sección vamos a establecer el isomorfismo $H^{\bullet}_{DR}(\mathrm{X}) \cong H^{\bullet}(\|\mathrm{X}\|)$ para una variedad simplicial **X**. Esto lo haremos en tres etapas. La primera consiste en relacionar la cohomología de De Rham de **X** con la cohomología de De Rham de cada X_n. Después usaremos el teorema de De Rham para pasar a la cohomología singular C^{∞} de los X_n y de ahí a la cohomología singular continua. La última parte consistirá en relacionar ésta con la cohomología singular de la realización geométrica de **X**.

Todas las homologías y cohomologías que tratemos se supondrán con coeficientes reales.

Necesitaremos del siguiente concepto.

Definición 3.1 Un *bicomplejo* (de cocadenas) es una familia bigraduada $C^{\bullet,\bullet} = \{C^{k,l}\}_{k,l\geq 0}$ de espacios vectoriales (reales) junto con "diferenciales"

$$d':C^{k,l} \to C^{k+1,l} \qquad d'':C^{k,l} \to C^{k,l+1}$$

que satisfacen $d'd' = 0$, $d'd'' + d''d' = 0$, $d''d'' = 0$.

Así, un bicomplejo es un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
C^{0,2} & \longrightarrow & C^{1,2} & \longrightarrow & C^{2,2} & \longrightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
C^{0,1} & \longrightarrow & C^{1,1} & \longrightarrow & C^{2,1} & \longrightarrow & \cdots \\
{\scriptstyle d''}\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
C^{0,0} & \xrightarrow[d']{} & C^{1,0} & \longrightarrow & C^{2,0} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

donde cada renglón y cada columna es un complejo de cocadenas.

El *complejo total* de $C^{\bullet,\bullet}$ es el complejo de cocadenas $\{C^{\bullet},d\}$ donde

$$C^n = \bigoplus_{k+l=n} C^{k,l} \qquad d = d' + d''$$

La condición $d'd''+d''d'=0$ garantiza que $d^2=0$. La *cohomología* del bicomplejo $C^{\bullet,\bullet}$ es la cohomología de su complejo total.

Un *morfismo de bicomplejos* $f:C^{\bullet,\bullet} \to D^{\bullet,\bullet}$ es una aplicación bigraduada que conmuta con las "diferenciales" (podemos pensarla como una retícula cúbica en la que todos los cubos conmutan. Cada "piso" y cada "pared" consiste de un morfismo de cocadenas). Claramente f induce morfismos en las cohomologías de cada renglón, de cada columna y del complejo total.

El siguiente resultado es puramente algebraico y omitiremos su demostración. Una prueba puede hallarse en [2], p.13, Lema 1.19.

Lema 3.2 *Si $f:C^{\bullet,\bullet} \to D^{\bullet,\bullet}$ es un morfismo de bicomplejos que induce isomorfismos en las cohomologías de cada renglón (o de cada columna), entonces también induce isomorfismos en las cohomologías de los complejos totales.*

□

- **Etapa 1**

Sea X una variedad simplicial. Una $(k,0)$-*forma* en X es una k-forma en X que se anula cada vez que alguno de sus argumentos está en el kernel de la diferencial de la proyección $X_n \times \Delta^n \to X_n$. Análogamente, una $(0,l)$-*forma* en X es una l-*forma* en X que se anula cada vez que uno de sus argumentos está en el kernel de la diferencial de la proyección $X_n \times \Delta^n \to \Delta_n$.

El espacio de (k,l)-*formas* en X se define entonces como el subespacio de $\Lambda^{k+l}(\mathrm{X})$ generado por las formas del tipo $\omega \wedge \eta$ donde ω es una $(k,0)$-forma y η es una $(0,l)$-forma.

Es sencillo ver que las (k,l)-formas son precisamente aquellas que, en coordenadas locales, son suma de términos de la forma $f(x,t)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\wedge dt^{j_1}\wedge\cdots\wedge dt^{j_l}$. Además, el espacio de n-formas simpliciales en X se puede descomponer en la suma directa

$$\Lambda^n(\mathrm{X}) = \bigoplus_{k+l=n} \Lambda^{k,l}(\mathrm{X})$$

Si $\omega \in \Lambda^{k,l}(\mathbf{X})$, su diferencial es entonces una $(k+l+1)$-forma en $\Lambda^{k+1,l}(\mathbf{X}) \oplus \Lambda^{k,l+1}(\mathbf{X})$. Esto nos da una descomposición $d = d_X + d_\Delta$ del operador diferencial, proyectando a cada sumando. Ahora,

$$0 = d^2 = (d_X + d_\Delta)^2 = d_X^2 + d_X d_\Delta + d_\Delta d_X + d_\Delta^2$$

y cada sumando del lado derecho proyecta a un sumando distinto en la suma directa, de manera que tenemos $d_X^2 = 0$, $d_X d_\Delta + d_\Delta d_X = 0$, $d_\Delta^2 = 0$. Por tanto, $\{\Lambda^{k,l}(\mathbf{X}), d_X, d_\Delta\}$ es un bicomplejo cuyo complejo total es $\{\Lambda^\bullet(\mathbf{X}), d\}$.

Por otro lado considérese el espacio $\Lambda^k(X_l)$ de k-formas en X_l y defínanse

$$d' : \Lambda^k(X_l) \to \Lambda^{k+1}(X_l), \qquad d'' : \Lambda^k(X_l) \to \Lambda^k(X_{l+1})$$

por

$$d' = (-1)^l d, \qquad d'' = \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i (d^i)^*$$

donde, igual que antes, d es el operador diferencial.

Fácilmente se prueba, usando las relaciones simpliciales que $\{\Lambda^k(X_l), d', d''\}$ es un bicomplejo.

Usaremos el lema 3.2 para probar que

$$H_{DR}^\bullet(\mathbf{X}) = H_\bullet\left(\Lambda^{k,l}(\mathbf{X}), d_X, d_\Delta\right) \cong H_\bullet\left(\Lambda^k(X_l), d', d''\right).$$

Específicamente, construiremos aplicaciones de bicomplejos

$$J : \Lambda^{k,l}(\mathbf{X}) \to \Lambda^k(X_l), \quad E : \Lambda^k(X_l) \to \Lambda^{k,l}(\mathbf{X})$$

tales que $JE = 1$, y una homotopía de cocadenas

$$S : \Lambda^{k,l}(\mathbf{X}) \to \Lambda^{k,l-1}(\mathbf{X})$$

tal que $EJ - 1 = Sd_\Delta + d_\Delta S$.

Esto mostrará que J induce isomorfismos en la cohomología de cada columna y, por tanto, en la de los complejos totales.

Si M es una variedad diferenciable cualquiera y ω es una m-forma en $M\times[0,1]$ definamos una (m-1)-forma $I\omega$ en M como sigue:

$$(I\omega)_p(v_1,\ldots,v_{m-1})=\int_0^1 \omega_{(p,s)}\left(\frac{d}{ds},di_s(v_1),\ldots,di_s(v_{m-1})\right)ds$$

donde $i_s:Y\to Y\times[0,1]$ es la inclusión a nivel s.

Este operador es bien conocido de la demostración clásica del Lema de Poincaré (ver *eg:* 14, p.306) y satisface

$$dI\omega+Id\omega=i_1^*\omega-i_0^*\omega$$

Sea ahora X una variedad simplicial y tomemos $M=X_n\times\Delta^n$. Considérense las homotopías

$$H_j:X_n\times\Delta^n\times[0,1]\to X_n\times\Delta^n$$

dadas por

$$H_j(x,t,s)=(x,se_j+(1-s)t)\qquad(0\le j\le n)$$

Componiendo con el operador I tenemos $n+1$ operadores

$$h_j:\Lambda^m(X_n\times\Delta^n)\to\Lambda^{m-1}(X_n\times\Delta^n),\qquad h_j=IH_j^*$$

que satisfacen

$$h_jd\omega+dh_j\omega=(1\times e_j)^*\omega-\omega \tag{3.3}$$

El operador $J:\Lambda^{k,l}(\mathrm{X})\to\Lambda^k(X_l)$ se define entonces por

$$\boxed{J\omega=(-1)^l i_l^* h_{l-1}\circ\cdots\circ h_0\omega_l}$$

donde $i_l:X_l\to X_l\times\Delta^l$ es la inclusión $x\mapsto(x,e_l)$. Obsérvese que J actúa sólamente en la l-ésima forma ω_l de ω.

Es importante observar que los operadores h_j decrecen sólo el segundo índice. Esto, junto con 3.3 nos da

$$\begin{aligned}&h_jd_X\omega+d_Xh_j\omega=0\\ &h_jd_\Delta\omega+d_\Delta h_j\omega=(1\times e_j)^*\omega-\omega\end{aligned} \tag{3.4}$$

Como queremos que J sea un morfismo de bicomplejos debemos saber como conmuta con d_X y d_Δ. 3.4 es el primer paso y podemos aplicar inducción para obtener una fórmula general. Para simplificar un poco la notación defínase, para un operador $\tau:[s]\to[n]$, el operador

$$h_\tau:\Lambda^m\left(X_n\times\Delta^n\right)\to\Lambda^{m-s-1}\left(X_n\times\Delta^n\right)$$

por $h_\tau=h_{\tau(s)}\circ\cdots\circ h_{\tau(0)}$. Tenemos ahora

3.5) $h_\tau d_X=(-1)^{s+1}d_X h_\tau$

3.6) $h_\tau d_\Delta=-\sum_{l=0}^{s}(-1)^l h_{\tau d_l}+(-1)^{s+1}d_\Delta h_\tau+(-1)^s\left(1\times e_{\tau(s)}\right)^* h_{\tau d_s}$

Estas fórmulas pueden simplificarse un poco si observamos que $h_j\omega=0$ si ω es una forma de tipo $(k,0)$. Además, no es difícil ver que si ω es una forma de tipo (k,l) con $l>0$, entonces $(1\times cte)^*\omega=0$. Con esto en mente tenemos

$$(3.7)\qquad h_\tau d_\Delta\omega=\begin{cases}-\sum_{l=0}^{s}(-1)^l h_{\tau d_l}\omega+(-1)^{s+1}d_\Delta h_\tau\omega, & s<l\\ -\sum_{l=0}^{s}(-1)^l h_{\tau d_l}\omega+(-1)^s\left(1\times e_{\tau(s)}\right)^* h_{\tau d_s}\omega, & s=l\\ 0, & s>l\end{cases}$$

para $\tau:[s]\to[n]$.

Por otra parte, para verificar ciertas "simplicialidades" es importante saber como conmutan estas iteraciones de los h_j con los "pull-back" $(1\times\alpha)^*$ y $\left(\alpha^*\times 1\right)^*$. Esto lo resumimos en los siguientes diagramas conmutativos.

$$(3.8)\qquad \begin{array}{ccc}\Lambda^m\left(X_n\times\Delta^n\right) & \xrightarrow{(1\times\alpha)^*} & \Lambda^m\left(X_n\times\Delta^q\right)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_{\alpha\tau}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_\tau}\\ \Lambda^{m-s-1}\left(X_n\times\Delta^n\right) & \xrightarrow[(1\times\alpha)^*]{} & \Lambda^{m-s-1}\left(X_n\times\Delta^q\right)\end{array}$$

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda^m\left(X_q \times \Delta^n\right) \arrow[r, "(\alpha^* \times 1)^*"] \arrow[d, "h_\tau"'] & \Lambda^m\left(X_n \times \Delta^n\right) \arrow[d, "h_\tau"] \\
\Lambda^{m-s-1}\left(X_q \times \Delta^n\right) \arrow[r, "(\alpha^* \times 1)^*"'] & \Lambda^{m-s-1}\left(X_n \times \Delta^n\right)
\end{tikzcd} \tag{3.9}
$$

para $\alpha:[q]\to[n]$ y $\tau:[s]\to[q]$. La conmutatividad se prueba primero para h_j directamente de la definición (*ie*: integrando) y luego por inducción.

La definición del operador inverso $E:\Lambda^k(X_l)\to\Lambda^{k,l}(X)$ es un poco más complicada puesto que debemos construir formas en cada $X_n \times \Delta^n$ a partir de sólo una forma en X_l.

Para cada operador inyectivo $\tau:[l]\to[n]$ considérese la l-forma $\theta_\tau \in \Lambda^l\left(\Delta^n\right)$ dada por

$$\theta_\tau = \sum_{l=0}^{l} (-1)^i t^{\tau(0)} dt_{\tau(0)} \wedge \cdots \wedge \widehat{dt}^{\tau(l)} \wedge \cdots \wedge dt^{\tau(l)}$$

Listaremos algunas propiedades útiles de estas formas.

3.10) *Si* $\tau:[l]\to[n]$ *y* $\alpha:[n]\to[m]$ *son operadores inyectivos, entonces* $(\alpha)^*\theta_{\alpha\tau} = \theta_\tau$

3.11) *Si* $\alpha:[n]\to[m]$ *y* $\sigma:[l]\to[m]$ *son operadores inyectivos, entonces*

a) *Si* $\operatorname{Im}\sigma \not\subset \operatorname{Im}\alpha$ *entonces* $(\alpha)^*\theta_\sigma = 0$

b) *Si* $\operatorname{Im}\sigma \subset \operatorname{Im}\alpha$ *entonces existe un único operador inyectivo* $\tau:[l]\to[n]$ *tal que* $\sigma = \alpha\tau$

3.12) *Si* $\tau:[l]\to[n]$ *es un operador inyectivo, entonces* $d\theta_\tau = (l+1)dt^{\tau(0)} \wedge \cdots \wedge dt^{\tau(l)}$

3.13) *Si* $\tau:[l]\to[n]$ *es un operador inyectivo, entonces*

$$\sum_{\sigma d_l = \tau} (-1)^l \theta_\sigma = \frac{1}{l+1} d\theta_\tau$$

Definamos ahora el operador $E:\Lambda^k(X_l)\to\Lambda^{k,l}(\mathrm{X})$ por

$$\boxed{E(\eta)_n=\begin{cases} l!\sum\limits_{\tau[l]\to[n]}\pi_\Delta^*\theta_\tau\wedge\pi_X^*\eta_\tau, & n\geq l\\ 0 & , n<l\end{cases}}$$

donde π_Δ y π_X son proyecciones, $\eta_\tau=(\tau^*)^*\eta$ y τ corre sobre los operadores inyectivos.

Definimos también los operadores $S:\Lambda^{k,l}(\mathrm{X})\to\Lambda^{k,l-1}(\mathrm{X})$ por

$$\boxed{S(\omega)_n=\sum_{\substack{\alpha[p]\to[n]\\ 0\leq p<l}}p!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha\wedge h_\alpha\omega_n}$$

Con estos preliminares estamos en posición de dar demostraciones. Debemos verificar que $E(\eta)$ y $S(\omega)$ son simpliciales, que J y E son morfismos de bicomplejos, que $JE=1$ y que S es una homotopía de cadenas.

Proposición 3.14 *Para $\eta\in\Lambda^k(X_l)$, $E(\eta)$ es simplicial.*

Demostración Sea $\alpha:[n]\to[m]$ un operador inyectivo. Debemos probar que

$$(\alpha^*\times 1)^*E(\eta)_n=(1\times\alpha)^*E(\eta)_m$$

Hay tres casos que considerar:

CASO 1 $l>n, l>m$

CASO 2 $l>n, l\leq m$

CASO 3 $l\leq n, l\leq m$

No podemos tener $l\leq n$ y $l>m$ pues siendo α inyectivo se tiene $n\leq m$

CASO 1 Es evidente pues $E(\eta)_n=E(\eta)_m=0$

CASO 2 Aquí $E(\eta)_n = 0$ y, por otro lado

$$(1\times\alpha)^* E(\eta)_m = l! \sum_{\sigma:[l]\to[m]} (1\times\alpha)^* \pi_\Delta^* \theta_\sigma \wedge (1\times\alpha)^* \pi_X^* \eta_\sigma$$

Ahora,

$$(1\times\alpha)^* \pi_\Delta^* \theta_\sigma = (\pi_\Delta(1\times\alpha))^* \theta_\sigma = (\alpha\pi_\Delta)^* \theta_\sigma = \pi_\Delta^* (\alpha)^* \theta_\sigma$$

No podemos tener $\operatorname{Im}\sigma \subset \operatorname{Im}\alpha$ pues se tendría $l = |\operatorname{Im}\sigma| \le |\operatorname{Im}\alpha| = n$ pero estamos suponiendo $l > n$.

Entonces se sigue de (3.11.a) que $(\alpha)^* \theta_\sigma = 0$ de donde $(1\times\alpha)^* E(\eta)_m = 0$.

CASO 3 Un cálculo directo muestra que

$$(\alpha^* \times 1)^* E(\eta)_n = l! \sum_{\tau:[l]\to[n]} \pi_\Delta^* \theta_\tau \wedge \pi_X^* \eta_{\alpha\tau} \quad \text{y} \quad (1\times\alpha)^* E(\eta)_m = l! \sum_{\sigma:[l]\to[n]} \pi_\Delta^* (\alpha)^* \theta_\sigma \wedge \pi_X^* \eta_\sigma$$

Nuevamente por (3.11.a), en la segunda suma basta considerar las σ tales que $\operatorname{Im}\sigma \subset \operatorname{Im}\alpha$ y, en tal caso, por (3.11..b), podemos expresar σ, de manera única, como $\sigma = \alpha\tau$ para algún operador inyectivo $T:[l]\to[n]$. Así

$$\begin{aligned}
(1\times\alpha)^* E(\eta)_m &= l! \sum_{\tau:[l]\to[n]} \pi_\Delta^* (\alpha)^* \theta_{\alpha\tau} \wedge \pi_X^* \eta_{\alpha\tau} \\
&= l! \sum_{\tau:[l]\to[n]} \pi_\Delta^* \theta_\tau \wedge \pi_X^* \eta_{\alpha\tau} \quad \text{por (3.10)} \\
&= (\alpha\times 1)^* E(\eta)_n
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.15 *El operador* $J:\Lambda^{k,l}(\mathrm{X}) \to \Lambda^k(X_l)$ *es un morfismo de bicomplejos.*

Demostración Debemos ver que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{k,l}(\mathrm{X}) \arrow[r, "J"] \arrow[d, "d_X"'] \arrow[dr, phantom, "A"] & \Lambda^k(X_l) \arrow[d, "d'"] \\
\Lambda^{k+1,l}(\mathrm{X}) \arrow[r, "J"'] & \Lambda^{k+1}(X_l)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda^{k,l}(\mathrm{X}) \arrow[r, "J"] \arrow[d, "d_\Delta"'] \arrow[dr, phantom, "B"] & \Lambda^k(X_l) \arrow[d, "d''"] \\
\Lambda^{k,l+1}(\mathrm{X}) \arrow[r, "J"'] & \Lambda^k(X_{l+1})
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMA A Este es un cálculo directo usando (3.5)

DIAGRAMA B Para $\omega \in \Lambda^{k,l}(\mathbf{X})$ tenemos

$$d''J\omega = (-1)^l \sum_{s=0}^{l+1} (-1)^s \left(i_l d^s\right)^* h_{l-1} \circ \cdots \circ h_0 \omega_l$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\pi_X^* d''J\omega &= (-1)^l \sum_{s=0}^{l+1} (-1)^s \left(i_l d^s \pi_X\right)^* h_{l-1} \circ \cdots \circ h_0 \omega_l \\
&= (-1)^l \sum_{s=0}^{l+1} (-1)^s \left(\left(d^s \times 1\right)\left(1 \times e_l\right)\right)^* h_{l-1} \circ \cdots \circ h_0 \omega_l \\
&= (-1)^l \sum_{s=0}^{l+1} (-1)^s \left(1 \times e_l\right)^* \left(d^s \times 1\right)^* h_{l-1} \circ \cdots \circ h_0 \omega_l \\
&= (-1)^l \sum_{s=0}^{l+1} (-1)^s \left(1 \times e_l\right)^* h_{l-1} \circ \cdots \circ h_0 \left(d^s \times 1\right)^* \omega_l \quad \text{por 3.9} \\
&= (-1)^l \sum_{s=0}^{l+1} (-1)^s \left(1 \times e_l\right)^* h_{l-1} \circ \cdots \circ h_0 \left(1 \times d_s\right)^* \omega_{l+1} \quad \text{por simplicialidad de } \omega \\
&= (-1)^l \sum_{s=0}^{l+1} (-1)^s \left(1 \times e_l\right)^* \left(1 \times d_s\right)^* h_{d_s(l-1)} \circ \cdots \circ h_{d_s(0)} \omega_{l+1} \quad \text{por 3.8} \\
&= (-1)^l \sum_{s=0}^{l+1} (-1)^s \left(1 \times e_{d_s(l)}\right)^* h_{d_s(l-1)} \circ \cdots \circ h_{d_s(0)} \omega_{l+1} \\
&= (-1)^l \sum_{s=0}^{l} (-1)^s \left(1 \times e_{l+1}\right)^* h_l \circ \cdots \circ \hat{h}_s \circ \cdots \circ h_0 \omega_{l+1} \\
&\quad - \left(1 \times e_l\right)^* h_{l-1} \circ \cdots \circ h_0 \omega_{l+1}
\end{aligned}$$

Por otro lado, $Jd_\Delta \omega = (-1)^{l+1} i_{l+1}^* h_l \circ \cdots \circ h_0 d_\Delta \omega_{l+1}$. Usando 3.7 tenemos

$$h_l \circ \cdots \circ h_0 d_\Delta \omega_{l+1} = -\sum_{s=0}^{l} (-1)^s h_l \circ \cdots \circ \hat{h}_s \circ \cdots \circ h_0 \omega_{l+1} + (-1)^l \left(1 \times e_l\right)^* h_{l-1} \circ \cdots \circ h_0 \omega_{l+1}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\pi_X^* Jd_\Delta \omega = (-1)^l \sum_{s=0}^{l} (-1)^s \left(1 \times e_{l+1}\right)^* h_l \circ \cdots \circ \hat{h}_s \circ \cdots \circ h_0 \omega_{l+1} \\
-\left(1 \times e_l\right)^* h_{l-1} \circ \cdots \circ h_0 \omega_{l+1}
\end{aligned}$$

Por tanto $\pi_X^* Jd_\Delta \omega = \pi_X^* d''J\omega$ y como π_X es submersión, π_X^* es inyectiva y hemos terminado.

□

Proposición 3.16 *El operador* $E:\Lambda^k(X_l)\to\Lambda^{k,l}(\mathbf{X})$ *es un morfismo de bicomplejos.*

Demostración Debemos probar que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^k(X_l) \arrow[r, "E"] \arrow[d, "d'"'] \arrow[dr, phantom, "A"] & \Lambda^{k,l}(\mathbf{X}) \arrow[d, "d_X"] \\
\Lambda^{k+1}(X_l) \arrow[r, "E"'] & \Lambda^{k+1,l}(\mathbf{X})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda^k(X_l) \arrow[r, "E"] \arrow[d, "d''"'] \arrow[dr, phantom, "B"] & \Lambda^{k,l}(\mathbf{X}) \arrow[d, "d_\Delta"] \\
\Lambda^{k}(X_{l+1}) \arrow[r, "E"'] & \Lambda^{k,l+1}(\mathbf{X})
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMA *A* Sea $\eta\in\Delta^k(X_l)$. Debemos probar que $d_X E(\eta)_n = E(d'\eta)_n$ para toda n.

Si $l>n$ ambos lados se anulan, por definición de E por lo que podemos suponer $l\le n$.

Por propiedades básicas del operador diferencial se tiene:

$$dE(\eta)_n = l!\sum_{\tau:[l]\to[n]}\pi_\Delta^* d\theta_\tau\wedge\pi_X^*\eta_\tau + l!\sum_{\tau:[l]\to[n]}(-1)^l\,\pi_\Delta^*\theta_\tau\wedge\pi_X^* d\eta_\tau$$

La primera suma es de tipo $(k,l+1)$ y la segunda es de tipo $(k+1,l)$. Por tanto

$$d_X E(\eta)_n = l!\sum_{\tau:[l]\to[n]}(-1)^l\,\pi_\Delta^*\theta_\tau\wedge\pi_X^* d\eta_\tau$$

De aquí el cálculo es directo.

DIAGRAMA *B* Sea $\eta\in\Lambda^k(X_l)$. Debemos ver que $d_\Delta E(\eta)_n = E(d''\eta)_n$ para toda n.

Si $l>n$ ambos lados se anulan. Si $l=n$, $E(d''\eta)_l=0$ mientras que $d_\Delta E(\eta)_l = l!\,\pi_\Delta^* d\theta_{id}\wedge\pi_X^*\eta$. Pero $d\theta_{id}=0$ pues θ_{id} es una l-forma en Δ^l.

Supongamos entoces que $l<n$. Igual que antes vemos ahora que

$$d_\Delta E(\eta)_n = l!\sum_{\tau:[l]\to[n]}\pi_\Delta^* d\theta_\tau\wedge\pi_X^*\eta_\tau$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
E(d''\eta)_n &= (l+1)! \sum_{\sigma:[l+1]\to[n]} \pi_\Delta^\bullet \theta_\sigma \wedge \pi_X^\bullet (d''\eta)_\sigma \\
&= (l+1)! \sum_{\sigma:[l+1]\to[n]} \pi_\Delta^\bullet \theta_\sigma \wedge \pi_X^\bullet \left(\sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i \left(d^i\right)^\bullet \eta \right)_\sigma \\
&= (l+1)! \sum_{\sigma:[l+1]\to[n]} \pi_\Delta^\bullet \theta_\sigma \wedge \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i \pi_X^\bullet \left(d^i\right)^\bullet \eta_{\sigma d_i} \\
&= (l+1)! \sum_{\sigma,i} (-1)^i \pi_\Delta^\bullet \theta_\sigma \wedge \pi_X^\bullet \eta_{\sigma d_i}
\end{aligned}
$$

Ahora, todo operador $\tau:[l]\to[n]$ se puede escribir, no de manera única, como $\tau=\sigma d_i$ para algún operador inyectivo $\sigma:[l+1]\to[n]$ y alguna $i\in[l+1]$. Por tanto

$$
\begin{aligned}
E(d''\eta)_n &= (l+1)! \sum_{\tau:[l]\to[n]} \sum_{\sigma d_i=\tau} (-1)^i \pi_\Delta^\bullet \theta_\sigma \wedge \pi_X^\bullet \eta_\tau \\
&= (l+1)! \sum_{\tau:[l]\to[n]} \pi_\Delta^\bullet \left(\sum_{\sigma d_i=\tau} (-1)^i \theta_\sigma \right) \wedge \pi_X^\bullet \eta_\tau \\
&= (l+1)! \sum_{\tau:[l]\to[n]} \pi_\Delta^\bullet \left(\frac{1}{l+1} d\theta_\tau \right) \wedge \pi_X^\bullet \eta_\tau \text{ por (7.4)} \\
&= l! \sum_{\tau:[l]\to[n]} \pi_\Delta^\bullet d\theta_\tau \wedge \pi_X^\bullet \eta_\tau
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $E(d''\eta)_n = d_\Delta E(\eta)_n$.

□

Para $\theta\in\Lambda^k\left(\Delta^l\right)$ defínase $T(\theta)=J\left(\pi_\Delta^\bullet\theta\right)$. Usando 3.7 y 3.8 no es difícil probar que

$$
T(d\theta)=\sum_{i=0}^{l}(-1)^i\left(d_i^\bullet\theta\right)
$$

Esta ecuación se parece al Teorema de Stokes lo cual no es muy sorprendente si consideramos que J se definió como una iteración de varias integrales. De hecho usando Teorema de Stokes, es sencillo probar que

(3.17) $$T(\theta)=\int_{\Delta^l}\theta$$

Proposición 3.18 $JE = 1$

Demostración Sea $\eta \in \Lambda^k_\cdot(X_l)$. Tenemos:

$$JE(\eta) = (-1)^l l! i_l^\bullet h_{l-1} \circ \cdots \circ h_0 \left(\pi_\Delta^\bullet \theta_{ld} \wedge \pi_X^\bullet \eta\right)$$

Un cálculo directo mustra que, para cualquier $(0,m)$-forma $\theta \in \Lambda_\cdot^{0,m}\left(X_l \times \Delta^l\right)$ se tiene

$$h_j\left(\theta \wedge \pi_X^\bullet \eta\right) = h_j(\theta) \wedge \pi_X^\bullet \eta$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} JE(\eta) &= (-1)^l l! i_l^\bullet \left(\left(h_{l-1} \circ \cdots \circ h_0 \pi_\Delta^\bullet \theta_{ld}\right) \wedge \pi_X^\bullet \eta\right) \\ &= (-1)^l l! \left(i_l^\bullet h_{l-1} \circ \cdots \circ h_0 \pi_\Delta^\bullet \theta_{ld}\right) \wedge \eta \\ &= l! J\left(\pi_\Delta^\bullet \theta_{ld}\right) \wedge \eta = l! T\left(\theta_{ld}\right) \wedge \eta \\ &= l! \left(\int_{\Delta^l} \theta_{ld}\right) \eta \text{ por 3.17} \end{aligned}$$

Usando el hecho de que $\sum t_i = 1$ en Δ^l, se tiene $\theta_{ld} = dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^l$ de manera que

$$\int_{\Delta^l} \theta = \int_{\Delta^l} dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^l = Vol\ \Delta^l = \frac{1}{l!}$$

□

Proposición 3.19 Si $\omega \in \Lambda^{k,l}(X)$ es simplicial, entonces $S(\omega)$ es simplicial.

Demostración Para un operador básico d_i se tiene

$$
\begin{aligned}
(d^i \times 1)^* S(\omega)_n &= \sum_{\substack{\alpha:[p]\to[n] \\ 0\le p<l}} p!(d^i \times 1)^* \pi_\Delta^* \theta_\alpha \wedge (d^i \times 1)^* h_\alpha \omega_n \\
&= \sum_{\substack{\alpha:[p]\to[n] \\ 0\le p<l}} p!\, \pi_\Delta^* \theta_\alpha \wedge h_\alpha (d^i \times 1)^* \omega_n \quad \text{por 3.9} \\
&= \sum_{\substack{\alpha:[p]\to[n] \\ 0\le p<l}} p!\, \pi_\Delta^* \theta_\alpha \wedge h_\alpha (d^i \times 1)^* \omega_n \\
&= \sum_{\substack{\alpha:[p]\to[n] \\ 0\le p<l}} p!\, \pi_\Delta^* \theta_\alpha \wedge h_\alpha (1 \times d_i)^* \omega_{n+1} \quad \text{por simplicialidad de } \omega \\
&= \sum_{\substack{\alpha:[p]\to[n] \\ 0\le p<l}} p!\, \pi_\Delta^* \theta_\alpha \wedge (1 \times d_i)^* h_{d_i\alpha} \omega_{n+1} \quad \text{por 3.8} \\
&= \sum_{\substack{\alpha:[p]\to[n] \\ 0\le p<l}} p!\, \pi_\Delta^* d_i^* \theta_{d_i\alpha} \wedge (1 \times d_i)^* h_{d_i\alpha} \omega_{n+1} \quad \text{por 3.10} \\
&= \sum_{\substack{\alpha:[p]\to[n] \\ 0\le p<l}} p!(1 \times d_i)^* \pi_\Delta^* \theta_{d_i\alpha} \wedge (1 \times d_i)^* h_{d_i\alpha} \omega_{n+1} \\
&= (1 \times d_i)^* \sum_{\substack{\alpha:[p]\to[n] \\ 0\le p<l}} p!\, \pi_\Delta^* \theta_{d_i\alpha} \wedge h_{d_i\alpha} \omega_{n+1}
\end{aligned}
$$

Ahora, todo operador $\beta:[p]\to[n+1]$ tal que $i \notin \mathrm{Im}\beta$ se puede escribir, de manera única, como $\beta = d_i\alpha$ para algún operador inyectivo $\alpha:[p]\to[n]$. Por tanto

$$
(d^i \times 1)^* S(\omega)_n = (1 \times d_i)^* \sum_{\substack{\beta[p]\to[n+1] \\ 0\le p<l \\ i\notin \mathrm{Im}\beta}} p!\, \pi_\Delta^* \theta_\beta \wedge h_\beta \omega
$$

Pero si $i \in \mathrm{Im}\beta$ entonces $d_i^* \theta_\beta = 0$ por 3.11.a y la última suma se puede tomar sin esta restricción y obtenemos:

$$
(d^i \times 1)^* S(\omega)_n = (1 \times d_i)^* \sum_{\substack{\beta[p]\to[n+1] \\ 0\le p<l}} p!\, \pi_\Delta^* \theta_\beta \wedge h_\beta \omega_{n+1} = (1 \times d_i)^* S(\omega_{n+1})
$$

□

Finalmente probemos que S es una homotopía de cadenas.

Proposición 3.20 $d_\Delta S\omega + Sd_\Delta\omega = EJ\omega - \omega, \qquad \omega \in \Lambda^{k,l}(\mathbf{X})$

Demostración Debemos mostrar que para cada $n \geq 0$ se tiene $d_\Delta S\omega_n + Sd_\Delta\omega_n = E(J\omega)_n - \omega_n$.

Podemos suponer que $l \leq n$, de lo contrario ω_n se anula (no puede haber (k,l)-formas en $X_n \times \Delta_n$ si $l > n$) y, por definición, E se anula por arriba de l.

Calculemos.

$$d_\Delta S\omega_n = \sum_{\substack{\alpha[p]\to[n] \\ 0\leq p<l}} p!\,\pi_\Delta^* d\theta_\alpha \wedge h_\alpha\omega_n + \underbrace{\sum_{\substack{\alpha[p]\to[n] \\ 0\leq p<l}} (-1)^p p!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge d_\Delta h_\alpha\omega_n}_{\#}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
Sd_\Delta\omega_n &= \sum_{\substack{\alpha[p]\to[n] \\ 0\leq p\leq l}} p!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge h_\alpha d_\Delta\omega_n \\
&= \sum_{\substack{\alpha[p]\to[n] \\ 0\leq p<l}} p!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge h_\alpha d_\Delta\omega_n + \sum_{\alpha[l]\to[n]} l!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge h_\alpha d_\Delta\omega_n \\
&= \sum_{\substack{\alpha[p]\to[n] \\ 0\leq p<l}} p!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \left(-\sum_{i=0}^{p}(-1)^i h_{\alpha d_i}\omega_n + (-1)^{p+1} d_\Delta h_\alpha\omega_n\right) \\
&\quad + \sum_{\alpha[l]\to[n]} l!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \left(-\sum_{i=0}^{l}(-1)^i h_{\alpha d_i}\omega_n + (-1)^l \left(1\times e_{\alpha(l)}\right)^* h_{\alpha d_l}\omega_n\right) \text{ por 3.7} \\
&= -\sum_{\substack{\alpha[p]\to[n] \\ 0\leq p<l}} p!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \sum_{i=0}^{p}(-1)^i h_{\alpha d_i}\omega_n + \sum_{\substack{\alpha[p]\to[n] \\ 0\leq p<l}} (-1)^{p+1} p!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge d_\Delta h_\alpha\omega_n \\
&\quad - \sum_{\alpha[l]\to[n]} l!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \sum_{i=0}^{l}(-1)^i h_{\alpha d_i}\omega_n + \sum_{\alpha[l]\to[n]} (-1)^l l!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \left(1\times e_{\alpha(l)}\right)^* h_{\alpha d_l}\omega_n \\
&= -\sum_{\substack{\alpha[p]\to[n] \\ 0\leq p\leq l}} p!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \sum_{i=0}^{p}(-1)^i h_{\alpha d_i}\omega_n - \underbrace{\sum_{\substack{\alpha[p]\to[n] \\ 0\leq p<l}} (-1)^p p!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge d_\Delta h_\alpha\omega_n}_{\#} \\
&\quad + \sum_{\alpha[l]\to[n]} (-1)^l l!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \left(1\times e_{\alpha(l)}\right)^* h_{\alpha d_l}\omega_n
\end{aligned}$$

Los términos (#) en las expresiones de $d_\Delta S\omega_n$ y $Sd_\Delta\omega_n$ se cancelan al hacer la suma:

$$\begin{aligned} d_\Delta S\omega_n + Sd_\Delta\omega_n = & \sum_{\substack{\alpha:[p]\to[n] \\ 0\le p<l}} p!\,\pi_\Delta^* d\theta_\alpha \wedge h_\alpha \omega_n \\ & - \sum_{\substack{\alpha:[p]\to[n] \\ 0\le p\le l}} p!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \sum_{i=0}^{p} (-1)^i h_{\alpha d_i}\omega_n \quad \#\# \\ & + \sum_{\alpha:[l]\to[n]} (-1)^l l!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \left(1\times e_{\alpha(l)}\right)^* h_{\alpha d_l}\omega_n \end{aligned}$$

Considérese el término de (##) correspondiente a $p=0$:

$$-\sum_{\alpha:[0]\to[n]} 0!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge (-1)^0 h_{\alpha d_0}\omega_n = -\sum_{\alpha:[0]\to[n]} \pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge h_{\alpha d_0}\omega_n$$

Aquí $h_{\alpha d_0}$ es una composición vacía, de manera que $h_{\alpha d_0} = id$. Entonces este término es igual a

$$-\sum_{\alpha:[0]\to[n]} \pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \omega_n = -\sum_{j=0}^{n} t^j \omega_n = -\omega_n$$

Por tanto

$$\begin{aligned} d_\Delta S\omega_n + Sd_\Delta\omega_n + \omega_n = & \sum_{\substack{\alpha:[p]\to[n] \\ 0\le p<l}} p!\,\pi_\Delta^* d\theta_\alpha \wedge h_\alpha \omega_n \\ & - \sum_{\substack{\alpha:[p]\to[n] \\ 0< p\le l}} p!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \sum_{i=0}^{p} (-1)^i h_{\alpha d_i}\omega_n \\ & + \sum_{\alpha:[l]\to[n]} (-1)^l l!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \left(1\times e_{\alpha(l)}\right)^* h_{\alpha d_l}\omega_n \end{aligned}$$

En la segunda suma cambiemos de índices reemplazando p por $p+1$. Obtenemos:

$$\begin{aligned} d_\Delta S\omega_n + Sd_\Delta\omega_n + \omega_n = & \sum_{\substack{\alpha:[p]\to[n] \\ 0\le p<l}} p!\,\pi_\Delta^* d\theta_\alpha \wedge h_\alpha \omega_n \\ & - \sum_{\substack{\alpha:[p+1]\to[n] \\ 0\le p<l}} (p+1)!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i h_{\alpha d_i}\omega_n \\ & + \sum_{\alpha:[l]\to[n]} (-1)^l l!\,\pi_\Delta^*\theta_\alpha \wedge \left(1\times e_{\alpha(l)}\right)^* h_{\alpha d_l}\omega_n \end{aligned}$$

Ahora bien, todo operador $\beta:[p]\to[n]$ puede escribirse, aunque no de manera única, como $\beta=\alpha d_i$ con $\alpha:[p+1]\to[n]$ inyectivo y $0\le i\le p+1$. Entonces, la segunda suma da arriba puede escribirse como:

$$-\sum_{0\le p<l}\sum_{\beta[p]\to[n]}\sum_{\substack{\alpha[p+1]\to[n]\\ 0\le i\le p+1\\ \alpha d_i=\beta}}(-1)^i(p+1)!\,\pi_\Delta^{\bullet}\theta_\alpha\wedge h_\beta\omega_n$$

$$=-\sum_{\substack{\beta[p]\to[n]\\ 0\le p<l}}\left[\sum_{\alpha d_i=\beta}(-1)^i(p+1)!\,\pi_\Delta^{\bullet}\theta_\alpha\right]\wedge h_\beta\omega_n$$

$$=-\sum_{\substack{\beta[p]\to[n]\\ 0\le p<l}}(p+1)!\,\pi_\Delta^{\bullet}\left[\sum_{\alpha d_i=\beta}(-1)^i\theta_\alpha\right]\wedge h_\beta\omega_n$$

$$=-\sum_{\substack{\beta[p]\to[n]\\ 0\le p<l}}(p+1)!\,\pi_\Delta^{\bullet}\left[\frac{1}{p+1}d\theta_\beta\right]\wedge h_\beta\omega_n \quad \text{por 3.13}$$

$$=-\sum_{\substack{\beta[p]\to[n]\\ 0\le p<l}}p!\,\pi_\Delta^{\bullet}d\theta_\beta\wedge h_\beta\omega_n$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
d_\Delta S\omega_n S d_\Delta \omega_n + \omega_n &= \sum_{\alpha[l]\to[n]} (-1)^l l!\,\pi_\Delta^\bullet \theta_\alpha \wedge \left(1\times e_{\alpha(l)}\right)^\bullet h_{\alpha d_l}\omega_n \\
&= \sum_{\alpha[l]\to[n]} (-1)^l l!\,\pi_\Delta^\bullet \theta_\alpha \wedge (1\times e_l)^\bullet (1\times\alpha)^\bullet h_{\alpha d_l}\omega_n \\
&= \sum_{\alpha[l]\to[n]} (-1)^l l!\,\pi_\Delta^\bullet \theta_\alpha \wedge (1\times e_l)^\bullet h_{d_l}(1\times\alpha)^\bullet \omega_n \text{ por 3.8} \\
&= \sum_{\alpha[l]\to[n]} (-1)^l l!\,\pi_\Delta^\bullet \theta_\alpha \wedge (1\times e_l)^\bullet h_{d_l}\left(\alpha^\bullet\times 1\right)^\bullet \omega_l \text{ por simplicialidad de } \omega \\
&= \sum_{\alpha[l]\to[n]} (-1)^l l!\,\pi_\Delta^\bullet \theta_\alpha \wedge (1\times e_l)^\bullet \left(\alpha^\bullet\times 1\right)^\bullet h_{d_l}\omega_l \text{ por 3.9} \\
&= \sum_{\alpha[l]\to[n]} (-1)^l l!\,\pi_\Delta^\bullet \theta_\alpha \wedge \pi_X^\bullet\left(\alpha^\bullet\right)^\bullet i_l^\bullet h_{d_l}\omega_l \\
&= \sum_{\alpha[l]\to[n]} l!\,\pi_\Delta^\bullet \theta_\alpha \wedge \pi_X^\bullet\left(\alpha^\bullet\right)^\bullet \left((-1)^l i_l^\bullet h_{d_l}\omega_l\right) \\
&= \sum_{\alpha[l]\to[n]} l!\,\pi_\Delta^\bullet \theta_\alpha \wedge \pi_X^\bullet\left(\alpha^\bullet\right)^\bullet \left((-1)^l i_l^\bullet h_{l-1}\circ\cdots\circ h_0\omega_l\right) \\
&= \sum_{\alpha[l]\to[n]} l!\,\pi_\Delta^\bullet \theta_\alpha \wedge \pi_X^\bullet\left(\alpha^\bullet\right)^\bullet J(\omega) \\
&= \sum_{\alpha[l]\to[n]} l!\,\pi_\Delta^\bullet \theta_\alpha \wedge \pi_X^\bullet J(\omega)_\alpha \\
&= EJ(\omega)_n
\end{aligned}
$$

□

- **Etapa 2**

Consideremos ahora los espacios $C_\infty^k(X_l)$ de k-cocadenas C^∞ en X_l y defínanse operadores

$$\delta' : C_\infty^k(X_l) \to C_\infty^{k+1}(X_l) \quad \text{y} \quad \delta'' : C_\infty^k(X_l) \to C_\infty^k(X_{l+1})$$

por

$$\delta' = (-1)^l \delta, \qquad \delta'' = \sum_{l=o}^{l+1} (-1)^i \left(d^i\right)^\#$$

donde δ es el operador cofrontera usual y $\left(d^i\right)^\#$ es el operador inducido por d^i en cocadenas.

Claramente $\delta'\delta' = 0$ y usando el hecho de que δ conmuta con $(d^l)^{\#}$ se prueba inmediatamente que $\delta'\delta'' + \delta''\delta' = 0$. Finalmente, usando las reglas de conmutatividad se prueba que $\delta''\delta'' = 0$. Así, $\{C_\infty^k(X_l), \delta', \delta''\}$ es un bicomplejo.

Considérese ahora el operador $D_R : \Lambda^k(X_l) \to C_\infty^k(X_l)$ dado por

$$(D_R\omega)(c) = \int_c \omega, \qquad c \in C_k^\infty(X_l)$$

donde $C_k^\infty(X_l)$ es el espacio de k-cadenas C^∞ en X_l. Este es el operador usual del Teorema de De Rham. Usando propiedades básicas de integración en cadenas y Teorema de Stokes es trivial probar que D_R es un morfismo de bicomplejos. Ahora, el Teorema de De Rham afirma que, precisamente, D_R induce isomorfismos

$$H^\bullet(\Lambda^\bullet(X_l), d') \xrightarrow{\cong} H^\bullet(C_\infty^\bullet(X_l), \delta')$$

para cada l, y así, por el Lema 3.2, D_R también induce isomorfismos en las cohomologías de los complejos totales.

Finalmente, considérense los espacios $C^k(X_l)$ de k-cocadenas continuas en X_l y defínanse operadores δ' y δ'' exactamente igual que para $C_\infty^k(X_l)$.

La inclusión $C_k^\infty(X_l) \to C_k(X_l)$ induce morfismos $C^k(X_l) \xrightarrow{i} C_\infty^k(X_l)$. Claramente i es un morfismo de bicomplejos y es bien sabido que i induce isomorfismos en cohomología para cada l de manera que también induce isomorfismos en la homología de los complejos totales.

Juntando los dos isomorfismos de esta etapa tenemos que

$$H_{DR}^\bullet(\mathrm{X}) \cong H^\bullet(C^k(X_l), \delta', \delta'')$$

- **Etapa 3**

En el capítulo 1 (proposición 4.11) vimos que $H^\bullet(\|\mathrm{X}\|) \cong H_{sim}^\bullet(S(\mathrm{X}))$ pero las "derivaciones" en $S(\mathrm{X})$ y $\{C^k(X_l)\}$ son las mismas, por lo que $H_{sim}^\bullet(S(\mathrm{X})) = H^\bullet(C^k(X_l))$.

En conclusión tenemos el siguiente:

Teorema 3.21 *Si* X *es un espacio simplicial, entonces* $H^{\bullet}_{DR}(\mathrm{X}) \cong H^{\bullet}(\|\mathrm{X}\|)$.

Más aún, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.22 ([3], Teorema 2.14) *El isomorfismo* $H^{\bullet}_{DR}(\mathrm{X}) \to H^{\bullet}(\|\mathrm{X}\|)$ es multiplicativo donde del lado izquierdo se tiene el producto exterior y del lado derecho el producto "cup".

4. Conclusiones

Hemos visto en 1.7 que si G es un grupo de Lie, el haz simplicial $N\overline{G} \xrightarrow{\gamma} NG$ admite una conexión simplicial. Los resultados de la sección 2 nos dan entonces un homomorfismo multiplicativo de Chern-Weil simplicial

$$I^{\bullet}(G) \to H^{\bullet}_{DR}(NG)$$

Entonces, 3.21 y 3.22 nos da un homomorfismo multiplicativo

$$I^{\bullet}(G) \xrightarrow{w} H^{\bullet}(BG)$$

del álgebra de polinomios invariantes en G a la cohomología singular del espacio clasificante BG de G, que podemos llamar *homomorfismo universal de Chern-Weil.*

La relación entre el homomorfismo clásico de Chern-Weil y el simplicial es la siguiente:

Teorema 4.1 ([3], Proposición 3.7) Si $\xi = (P, \pi, M)$ un G-haz principal con aplicación clasificante $f : M \to BG$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} I^{\bullet}(G) \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, "w(\xi)"] & \\ H^{\bullet}(BG) \arrow[r, "f^{\bullet}"'] & H^{\bullet}(M) \end{tikzcd}$$

□

Un resultado importante, debido a Cartan, permite usar la teoría de Chern-Weil para calcular la cohomología del espacio clasificante BG.

Teorema 4.2 ([2], Teorema 8.1) *Si G es un grupo de Lie compacto, entonces*

$$I^{\bullet}(G) \xrightarrow{w} H^{\bullet}(BG)$$

es un isomorfismo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] A.Dold, *Lectures in algebraic topology*, Springer-Verlag, 2° Ed., 1980
[2] J.L. Dupont, *Curvature and characteristic classes*, Lecture notes in mathematics, 640, Springer-Verlag, 1978
[3] J.L. Dupont, Simplicial De Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles, *Topology*, Vol. 15, pp. 233-245
[4] R. Fritsch and R.A. Piccinini, *Cellular structures in topology*, Cambridge studies in advanced mathematics, 19, 1990
[5] A.T. Lundell and S. Weigram, *The topology of CW complexes*, Van Nostrand, 1969
[6] C.R.F. Maunder, *Algebraic Topology*, Van Nostrand, 1970
[7] J.P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Lectures notes in mathematics, 271, Springer-Verlag, 1972
[8] J.P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand, 1967
[9] J. Milnor, The geometric realization of a semi-simplicial complex, *Annals of mathematics*, Vol. 65, No. 2, March 1957, pp. 357-362
[10] R.A. Piccinini, *Lectures on homotopy theory*, North-Holland, Mathematics studies, 171, 1992
[11] G. Salicrup, *Introducción a la topología*, Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 1993
[12] G. Segal, Categories and cohomology theories, *Topology*, Vol. 13, pp. 293-312, 1974
[13] G. Segal, Classifying spaces and spectral sequences, *Pub. I.H.E.S.*, 34, 1968, pp. 105-112
[14] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol. 1, 2, 5, Publish or Perish, 1979