9
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTEGRACION EN GRUPOS TOPOLOGICOS LOCALMENTE COMPACTOS Y HAUSDORFF

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

P R E S E N T A:

EDGAR RENE HERNANDEZ MARTINEZ

MEXICO, D. F. 1994

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENºMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) Edgar René Hernández Martínez

con número de cuenta 8114988 - 1 con el Título:
" Integración en Grupos Topológicos Localmente Compactos y Hausdorff "

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Matemático

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
Dr.	Félix	Recillas Juárez	
Director de Tesis			
Dra.	Zenaida Elvira	Ramos Zuñiga	
Dra.	Silvia	De Neymet Urbina	
Dr.	Eugenio	Garnica Vigil	
Suplente			
M.C.	Rogelio	Jiménez Fragoso	
Suplente			

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene por objetivo, analizar la construcción de un tipo muy especifico de Integrales (Medidas), aquellas que se definen en Estructuras de Grupo, a las que se dotará de una topología especifica, analizando las propiedades que satisface, así como las caracterizaciones que se le pueden dar.

La idea de construir Integrales en Grupos, es basicamente, la de encontrar una forma de Integrar que sea invariante bajo la operación del Grupo, en el sentido de que la Integral no cambie bajo las Traslaciones Izquierda o Derecha, que induce la aplicación de la operación grupal.

No lo señala el titulo del presente trabajo, pero lo que se verá de Integración en Grupos Topológicos Localmente Compactos y Hausdorff, es solamente un bosquejo de toda la teoría que se puede desarrollar a partir de éstas ideas, y aun los temas que se incluyen pueden ser extendidos y complementarse con otras teorías más complicadas; se dará en la medida de lo posible, las referencias donde se puede localizar las extenciones de dichos temas, así como los libros donde se pueden encontrar las demostraciones de los teoremas, que debido a lo complicado y largo de los mismos, se omiten del trabajo, pero se consideran basicos en el desarrollo posterior de la Integración en Grupos Topológicos Localmente Compactos y Hausdorff.

La notación que se utilizará en el presente trabajo; aunque no se especifiquen las propiedades de dichos espacios, es la siguiente :

$$
\begin{aligned}
C(\mho) &= \{f : \mho \rightarrow \mathbb{C} \ : \ f \ \textit{es continua}\}. \\
C_c(\mho) &= \{f \in C(\mho) \ : \ Sop(f) \ \textit{es compacto}\}, \\
& \quad \textit{donde} \ \ Sop(f) = \overline{\{x \in \mho \ : \ f(x) \neq 0\}}. \\
C_c^+(\mho) &= \{f \in C_c(\mho) \ : \ f \geq 0\}.
\end{aligned}
$$

El objetivo principal es una expresión de la forma :

$$\int_{\mho} f d\mu \ \ \forall f \in C_c.$$

Cabe mencionar que éste trabajo se ha realizado gracias a los varios cursos impartidos por el Dr. Félix Recillas Juárez al cual debo agradecer su paciencia y gran confianza.

Capítulo 1

NOCIONES DE GRUPOS TOPOLÓGICOS

1.1 Grupos Topológicos

Definición 1.1.1 *Un grupo topológico* $\mho$ *es una pareja formada por un grupo* G *y un espacio topológico Hausdorff* X *:*

$$\mho = (\mathrm{G}, \mathrm{X})$$

tales que satisfacen las siguientes propiedades:

i) *El conjunto de puntos del espacio* X *es el mismo conjunto de elementos del grupo* G.

ii) *La aplicación*

$$\Psi : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$$

definida por la correspondencia

$$(x, y) \mapsto \Psi(x, y) = xy^{-1},$$

es un mapeo continuo.

Como consecuencia inmediata de está definición se tiene la siguiente proposición :

Proposición 1.1.1 *Sea* $\mho$=(G,X) *una pareja formada por un grupo* G *y un espacio topológico* X *tales que satisfacen la siguiente condición :*

a) *El conjunto de puntos del espacio topológico* $\mathbf{X}$*, es el mismo conjunto de elementos del grupo* $\mathbf{G}$.

Entonces $\mho$ *es un grupo topológico sí y sólo si las aplicaciones :*

i)
$$\Psi^* : \mho \times \mho \to \mho$$
definida por la correspondencia
$$(x, y) \mapsto \Psi^*(x, y) = xy.$$

ii)
$$\Phi : \mho \to \mho$$
definida por la correspondencia
$$x \mapsto \Phi(x) = x^{-1},$$

son mapeos continuos.

Demostración. Supongamos que $\mho$ es un grupo topológico. Sea x_0 un punto fijo pero arbitrario de $\mho$: $x_0 \in \mho$ y sea W una vecindad del punto $\Phi(x_0)$: $x_0^{-1} \in W$. Como $ex_0 = x_0$, donde e es el elemento identidad del grupo $\mho$. Las hipótesis implican que existen vecindades U y V de e y x_0 respectivamente : $e \in U$, $x_0 \in V$, tales que

$$\Psi(e, x_0) = ex_0^{-1} = x_0^{-1} \in \Psi(U, V) = UV^{-1},$$

es decir,
$$x_0^{-1} \in UV^{-1} \subset W.$$

En particular,
$$eV^{-1} \subset W,$$

entonces $V^{-1} \subset W$. En otras palabras, $\Phi(V) \subset W$. Esto significa que Φ es un mapeo continuo en el punto $x_0 \in \mho$. Como x_0 se eligió arbitrariamente en $\mho$, se tiene que Φ es un mapeo continuo en todo $\mho$. Así, está demostrada la propiedad ii).
Para demostrar la propiedad i), observemos que la aplicación Ψ^* es la composición de los mapeos continuos :

$$\Theta : \mho \times \mho \to \mho \times \mho$$

definida por la correspondencia

$$(x, y) \mapsto \Theta(x, y) = (x, y^{-1})$$

y
$$\Psi : \mho \times \mho \to \mho$$
definida por la correspondencia
$$(x,y) \mapsto \Psi(x,y) = xy^{-1}.$$
En efecto, calculando :
$$\Psi \circ \Theta(x,y) = \Psi(\Theta(x,y)) = \Psi(x,y^{-1}) = x(y^{-1})^{-1} = xy = \Psi^*(x,y).$$
Se obtiene,
$$\Psi \circ \Theta = \Psi^*.$$

Reciprocamente, supongamos que las condiciones i) y ii) se satisfacen. La hipótesis a) asegura i) de la definición 1.1.1, por tanto sólo basta probar que la aplicación Ψ es un mapeo continuo. Para éste propósito, observemos que dicha aplicación es la composición de los mapeos continuos Θ y Ψ^*. En efecto, calculando :
$$\Psi^* \circ \Theta(x,y) = \Psi^*(\Theta(x,y)) = \Psi^*(x,y^{-1}) = xy^{-1} = \Psi(x,y).$$

Se obtiene,
$$\Psi^* \circ \Theta = \Psi.$$
Por lo que precede $\mho$ deviene en un grupo topológico. Así, la proposición está demostrada.

Definición 1.1.2 *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio topológico. Sea* f *una aplicación del espacio* $\mathbf{X}$ *en sí mismo:*
$$f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$$
definida por la correspondencia
$$x \mapsto f(x)$$
Se dice que f *es un* HOMEOMORFISMO *si* f *satisface :*

i) f *es biyección.*

ii) f, f^{-1} *son mapeos continuos en el espacio topológico* $\mathbf{X}$.

Definición 1.1.3 *Sea* G *un grupo arbitrario. A todo elemento σ del grupo* G *se le asocian los siguientes aplicaciones:*

$$T_\sigma : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto T_\sigma(x) = \sigma x$$

y

$$T_\sigma^* : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto T_\sigma^*(x) = x\sigma.$$

A la aplicación $\mathbf{T}_\sigma$ *se le nombra la* TRASLACIÓN IZQUIERDA *del grupo* G *con respecto a σ y a la aplicación* $\mathbf{T}_\sigma^*$ *se le nombra* TRASLACIÓN DERECHA *del grupo* G *con respecto a σ.*

Lema 1.1.1 *La traslación izquierda y derecha de un grupo* G *satisfacen las propiedades:*

i) $$T_{\sigma_1\sigma_2} = T_{\sigma_1} \circ T_{\sigma_2}.$$

ii) $$T^*_{\sigma_1\sigma_2} = T^*_{\sigma_2} \circ T^*_{\sigma_1}.$$

Demostración. Sea $x \in G$ un punto fijo pero arbitrario. Calculando :

$$\begin{aligned} T_{\sigma_1\sigma_2}(x) &= (\sigma_1\sigma_2)x \\ &= \sigma_1(\sigma_2 x) \\ &= T_{\sigma_1}(\sigma_2 x) \\ &= T_{\sigma_1}(T_{\sigma_2}(x)) \\ &= T_{\sigma_1} \circ T_{\sigma_2}(x), \end{aligned}$$

se obtiene

$$T_{\sigma_1\sigma_2}(x) = T_{\sigma_1} \circ T_{\sigma_2}(x).$$

Como x se eligió arbitrariamente en G, se tiene demostrado para cada $x \in G$. Así, la propiedad i) está demostrada. Análogamente se demuestra la propiedad ii). Así el lema está demostrado.

Lema 1.1.2 *La traslación izquierda y derecha de un grupo* **G** *son biyecciones de* **G** *en sí mismo.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in G$ fijos pero arbitrarios tales que

$$T_\sigma(x_1) = T_\sigma(x_2) \implies \sigma x_1 = \sigma x_2.$$

Por las leyes de cancelación del grupo G se tiene que

$$x_1 = x_2.$$

Por tanto, T_σ es inyectiva.

Para probar que T_σ es suprayectiva, consideremos la ecuación $T_\sigma(x) = \tau$ para algun $\tau \in G$; entonces $\sigma x = \tau$, implica que $x = \sigma^{-1}\tau \in G$. Por lo tanto, para cada $\tau \in G$ existe $x \in G$ tal que

$$\begin{aligned} T_\sigma(x) &= T_\sigma(\sigma^{-1}\tau) \\ &= \sigma(\sigma^{-1}\tau) \\ &= (\sigma\sigma^{-1})\tau \\ &= e\tau \\ &= \tau, \end{aligned}$$

es decir,

$$T_\sigma(x) = \tau.$$

Esto significa que T_σ es suprayectiva. Por lo que precede T_σ deviene en una biyección. Análogamente, se demuestra la traslación derecha. Así, el lema está demostrado.

El Lema precedente asegura la existencia de las aplicaciones inversas de las traslaciones izquierda y derecha, a saber:

$$(T_\sigma)^{-1} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto (T_\sigma)^{-1}(x) = T_{\sigma^{-1}}(x) = \sigma^{-1}x.$$

En efecto, calculando:

$$T_\sigma \circ T_{\sigma^{-1}} = T_\sigma(T_{\sigma^{-1}}(x)) = T_\sigma(\sigma^{-1}x) = (\sigma\sigma^{-1})x = ex = x,$$

se obtiene,

$$(T_\sigma)^{-1} = T_{\sigma^{-1}}.$$

Análogamente, se define y se prueba la traslación derecha. Así, el lema está demostrado.

Advertencia: A partir de éste momento cuando se hable de grupos topológicos sólo se utilizará la notación $\mho$, refiriéndose al grupo ó al espacio topológico como el grupo subyacente ó el espacio subyacente del grupo topológico $\mho$ a menos que se mencione como pareja $\mho = (\mathbf{G}, \mathbf{X})$.

Teorema 1.1.1 *Sea $\mho$ un grupo topológico. Las traslaciones izquierda y derecha definidas sobre $\mho$ son* HOMEOMORFISMOS *de $\mho$ en sí mismo.*

Demostración. A la luz del lema 1.1.2 sólo es suficiente probar que tanto la traslación izquierda y derecha son mapeos continuos en el espacio topológico subyacente al grupo topológico $\mho$. En efecto, sea $x_0 \in \mho$ un punto fijo pero arbitrario y sea W una vecindad del punto $T_\sigma(x_0) : \sigma x_0 \in W$. Como $\mho$ es un grupo topológico, la aplicación Ψ^*, proposición 1.1.1 i), es un mapeo continuo. Por consiguiente, existen vecindades U y V de σ y x_0 respectivamente: $\sigma \in U$, $x_0 \in V$, tales que

$$\sigma x_0 \in \Psi^*(U,V) = UV \subset W,$$

es decir,

$$\sigma x_0 \in UV \subset W.$$

En particular,

$$\sigma V \subset W,$$

es decir,

$$T_\sigma(V) = \sigma V \subset W,$$

esto significa que T_σ es continua en el punto $x_0 \in \mho$. Como x_0 se eligió arbitrariamente en $\mho$, se tiene demostrado que la traslación izquierda es un mapeo continuo en $\mho$.

Sea $y_0 \in \mho$ un punto fijo pero arbitrario y sea W una vecindad del punto $T^*_\sigma(y_0) : y_0\sigma \in W$. Como $\mho$ es un grupo topológico, la aplicación Ψ^* es un mapeo continuo. Por consiguiente, existen vecindades U y V de y_0 y σ respectivamente : $y_0 \in U$, $\sigma \in V$ tales que

$$y_0\sigma \in \Psi^*(U,V) = UV \subset W$$

es decir,

$$y_0\sigma \in UV \subset W.$$

En particular,

$$U\sigma \subset W,$$

es decir,

$$T^*_\sigma(U) = U\sigma \subset W,$$

esto significa que T^*_σ es continua en el punto $y_0 \in \mho$. Como y_0 se eligió arbitrariamente en $\mho$, se tiene demostrado que la traslación derecha es un mapeo continuo en $\mho$. Así, se tiene demostrado que T_σ y T^*_σ son mapeos continuos. Es obvio que los mapeos inversos son tambien continuos, por tanto, T_σ y T^*_σ devienen en homeomorfismos de $\mho$ en sí mismo. Así, el teorema está demostrado.

Observación: Sea $\mho$ un grupo topológico. Sea $e \in \mho$ el elemento identidad del grupo subyacente al grupo topológico $\mho$ y sea $\sigma \in \mho$ un punto arbitrario. Como T_σ es un homeomorfismo, si V es una vecindad de $e \in \mho \; : \; e \in V$, entonces $T_\sigma(V) = \sigma V = \{\sigma x : x \in V\}$ es una vecindad de σ: $\sigma \in \sigma V$ $(\sigma = \sigma e)$.

En general, el hecho de que las traslaciones izquierda y derecha sean homeomorfismos, implica que si se conoce la familia completa $\mathcal{V}$ de vecindades del elemento identidad $e \in \mho$, se conocen la familia completa de vecindades de cualquier punto $\sigma \in \mho$. En efecto, se tiene el siguiente lema:

Lema 1.1.3 *Sea $\mho$ un grupo topológico y sea $\sigma \in \mho$ un punto arbitrario. Sea $\mathcal{V}$ la familia completa de vecindades del elemento identidad $e \in \mho$:*

$$\mathcal{V} = \{V \subset \mho : V \, es\, vecindad\, de\, e\}.$$

Entonces

$$\sigma\mathcal{V} = \{\sigma V : V \in \mathcal{V}\}$$

es la familia completa de vecindades del elemento $\sigma \in \mho$.

Demostración. Si $\sigma \in \mho$ y $\mathcal{V}$ es la familia completa de vecindades del elemento identidad $e \in \mho$, entonces

$$T_\sigma(\mathcal{V}) = \{\sigma V : V \in \mathcal{V}\},$$

es la familia completa de vecindades de $\sigma \in \mho$, pues T_σ es un homeomorfismo.

Supongamos ahora que $U \subset \mho$ es una vecindad de σ : $\sigma \in U$, entonces

$$T_{\sigma^{-1}}(\sigma) = \sigma^{-1}\sigma = e \in \sigma^{-1}U = T_\sigma^{-1}(U),$$

es decir,

$$e \in \sigma^{-1}U.$$

Sea $V = \sigma^{-1}U$, entonces $V \in \mathcal{V}$ y esto implica que,

$$T_\sigma(V) = T_\sigma(\sigma^{-1}U) = \sigma(\sigma^{-1}U) = (\sigma\sigma^{-1})U = eU = U,$$

es decir,

$$\sigma V = U,$$

esto implica que

$$U \in \sigma\mathcal{V}.$$

En otras palabras, cualquier subconjunto del grupo topológico $\mho$ que sea vecindad de σ, pertenece a la familia $\sigma\mathcal{V}$. Así, el lema está demostrado. Se puede demostrar un teorema análogo al anterior utilizando la traslación derecha.

Subrayando la afirmación del lema: Las traslaciones izquierda y derecha, implican que la totalidad de las vecindades del elemento identidad $e \in \mho$ determinan la totalidad de las vecindades de cualquier elemento $\sigma \in \mho$. Este hecho afirma que, si se conocen las vecindades del elemento identidad $e \in \mho$, entonces la topología subyascente al grupo topológico $\mho$ está completamente determinada por la familia $\mathcal{V}$ del lema.

Sin embargo, la familia $\mathcal{V}$ del lema precedente no puede ser dada arbitrariamente; está familia para que pueda determinar la estructura topológica de $\mho$ debe satisfacer ciertas condiciones las cuales estan expresadas en el siguiente teorema :

Teorema 1.1.2 *Sea G un grupo arbitrario. Sea $\mathcal{V}$ una familia de subconjuntos de G tales que cada miembro de la familia contiene al elemento identidad $e \in G$:*

$$\mathcal{V} = \{V \subset G : e \in V\}.$$

Entonces G es un grupo topológico $\mho$ si y sólo si la familia $\mathcal{V}$ satisface las condiciones siguientes :

I.) *Si V, $W \in \mathcal{V}$, entonces $V \cap W \in \mathcal{V}$.*

II.) $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \{e\}$.

III.) *Si $W \subset G$ tal que $V \subset W$ con $V \in \mathcal{V}$ implica que $W \in \mathcal{V}$.*

IV.) *Para cada $V \in \mathcal{V}$, implica que existe $V_1 \in \mathcal{V}$ tal que $V_1 V_1 \subset V$.*

V.) $\mathcal{V}^{-1} = \{V \subset G : V^{-1} \in \mathcal{V}\} = \mathcal{V}$.

VI.) *Sea $\sigma_0 \in G$ un elemento arbitrario, entonces*

$$\sigma_0 \mathcal{V} \sigma_0^{-1} = \{\sigma_0 V \sigma_0^{-1} : V \in \mathcal{V}\} = \mathcal{V}.$$

Demostración. Supongamos que el grupo G es un grupo topológico $\mho$ y sea la familia $\mathcal{V}$, la totalidad de las vecindades del elemento identidad $e \in \mho$.

Sean $V, W \in \mathcal{V}$. Por definición de vecindad existen conjuntos abiertos V', W' tales que

$$e \in V' \subset V, \; e \in W' \subset W,$$

esto implica que,

$$e \in V' \cap W' \subset V \cap W,$$

lo cual a su vez implica que $V \cap W$ es vecindad de $e \in \mho$: $V \cap W \in \mathcal{V}$. Así, I. está demostrado.

Supongamos que existe

$$x \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V,$$

tal que,

$$x \neq e.$$

Como la topología subyacente al grupo topológico $\mho$ satisface el axioma de Hausdorff, se tiene que existen vecindades V_1, V_2 de x,e respectivamente: $x \in V_1$, $e \in V_2$ con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Esto implica que existe una vecindad $V_2 \in \mathcal{V}$ tal que $x \notin V_2$. Esto contradice la elección de la x. Así, II. está demostrado.

Sea $W \subset G$ tal que existe $V \in \mathcal{V}$ con la propiedad de que $V \subset W$, es decir $e \in V \subset W$. Por definición de vecindad existe un conjunto abierto U tal que $e \in U \subset V \subset W$, esto implica que $e \in U \subset W$, esto significa que W es vecindad de e: $W \in \mathcal{V}$. Así, III. está demostrado.

Sea $V \in \mathcal{V}$, es decir $e \in V$ y tambien $ee \in V$. Como $\mathfrak{V}$ es un grupo toplológico, la aplicación Ψ^* es un mapeo continuo. Así, existen vecindades W_1, W_2 del elemento identidad $e \in \mathfrak{V}$: $W_1, W_2 \in \mathcal{V}$, tal que

$$\Psi^*(e,e) = ee \in W_1W_2 = \Psi^*(W_1, W_2) \subset V.$$

Si definimos $V_1 = W_1 \cap W_2$, entonces calculando

$$\Psi^*(V_1, V_1) = V_1V_1 \subset V,$$

es decir,

$$V_1V_1 \subset V.$$

Así, IV. está demostrado.

Sea $V \in \mathcal{V}^{-1}$. Por definición de la familia $\mathcal{V}^{-1}$, $V^{-1} \in \mathcal{V}$, esto implica que $e \in V^{-1}$. Como $\mathfrak{V}$ es un grupo topológico, la aplicación Φ es un mapeo continuo. Entonces, por un lado,

$$\Phi(e) = e^{-1} \in (V^{-1})^{-1} = \Phi(V^{-1}),$$

es decir, $e = e^{-1} \in V$; por otro lado, existe una vecindad V_0 del elemento identidad e : $V_0 \in \mathcal{V}$, tal que

$$e = e^{-1} \in \Phi(V_0) = V_0^{-1} \subset V^{-1},$$

es decir $V_0^{-1} \subset V^{-1}$, esto implica que $V_0 \subset V$. Por la propiedad III. se tiene que $V \in \mathcal{V}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{V}^{-1} \subset \mathcal{V}.$$

Reciprocamente, sea $V \in \mathcal{V}$. Por hipótesis, la aplicación Φ es un mapeo continuo, por tanto existe una vecindad V_0 del elemento identidad $e \in \mathfrak{V}$: $V_0 \in \mathcal{V}$, tal que

$$e^{-1} \in \Phi(V_0) = V_0^{-1} \subset V,$$

es decir,

$$e^{-1} \in V_0^{-1} \subset V,$$

esto implica que,

$$V_0 \subset V^{-1}.$$

Por la propiedad III. $V^{-1} \in \mathcal{V}$. Por definición de la familia $\mathcal{V}^{-1}$ se tiene que

$$V \in \mathcal{V}^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^{-1}.$$

Por lo que precede,

$$\mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V}.$$

Así, V. está demostrado.
Observemos primero que el lema 1.1.3 afirma que: Si $\sigma_0 \in \mho$, entonces podemos escribir :

$$\sigma_0\mathcal{V} = \{U \subset \mho \;:\; U \text{ es vecindad de } \sigma_0\} = \{\sigma_0 V \;:\; V \in \mathcal{V}\}.$$

Sea

$$V \in \sigma_0\mathcal{V}\sigma_0^{-1}.$$

Por definición, existe una vecindad $V_1 \in \mathcal{V}$, tal que

$$V = \sigma_0 V_1 \sigma_0^{-1} \implies V\sigma_0 = \sigma_0 V_1,$$

esto significa que, $V\sigma_0$ es una vecindad de σ_0 y por lo tanto $V \in \mathcal{V}$. Así,

$$\sigma_0\mathcal{V}\sigma_0^{-1} \subset \mathcal{V}.$$

Reciprocamente, sea $V \in \mathcal{V}$. Considerando el homeomorfismo derecho $T^*_{\sigma_0}$ y calculando :

$$T^*_{\sigma_0}(V) = V\sigma_0,$$

se obtiene que,

$$\sigma_0 \in V\sigma_0,$$

esto significa que $V\sigma_0$ es vecindad de σ_0 :

$$V\sigma_0 \in \sigma_0\mathcal{V}.$$

Por definición, existe una vecindad $V_1 \in \mathcal{V}$, tal que,

$$V\sigma_0 = \sigma_0 V_1 \implies V = \sigma_0 V_1 \sigma_0^{-1}.$$

Por consiguiente,

$$V \in \sigma_0 \mathcal{V} \sigma_0^{-1}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{V} \subset \sigma_0 \mathcal{V} \sigma_0^{-1}.$$

Por lo que precede,

$$\sigma_0 \mathcal{V} \sigma_0^{-1} = \mathcal{V}.$$

Así, VI. está demostrado.

Reciprocamente, sea G un grupo arbitrario y sea $\mathcal{V}$ una familia de subconjuntos de G la cual satisface las condiciones I, II ,..., VI. Consideremos la familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos U de G tales que para cada $\sigma \in U$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $\sigma V \subset U$:

$$\mathcal{U} = \{U \subset G \ : \forall \ \sigma \in U \ \exists \ V \in \mathcal{V} \ tal \ \ que \ \sigma V \subset U\}.$$

Se afirma que : La familia $\mathcal{U}$ define una topología sobre el grupo G, para la cual $\mathcal{V}$ es la familia de vecindades del elemento identidad $e \in G$.
En efecto, es obvio que $\emptyset \in \mathcal{U}$. Sea $\sigma \in G$ y sea $V \in \mathcal{V}$, como $V \subset G$, esto implica que $\sigma V \subset \sigma G = G$, es decir, $\sigma V \subset G$, esto significa que $G \in \mathcal{U}$.

Sean U_1, $U_2 \in \mathcal{U}$. Consideremos $\sigma \in U_1 \cap U_2$, esto implica que $\sigma \in U_i$ para $i = 1, 2$, esto implica que existen $V_i \in \mathcal{V}$, tal que $\sigma V_i \subset U_i$ para $i = 1, 2$, entonces,

$$\sigma V_1 \cap \sigma V_2 \subset U_1 \cap U_2,$$

pero

$$\sigma V_1 \cap \sigma V_2 = \sigma(V_1 \cap V_2),$$

significa que

$$\sigma(V_1 \cap V_2) \subset U_1 \cap U_2.$$

Como $V_i \in \mathcal{V}$ para $i = 1, 2$, entonces por la propiedad I. de la familia $\mathcal{V}$ se tiene que

$$V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}.$$

Por lo tanto, se tiene que $\sigma V \subset U_1 \cap U_2$ y esto significa que

$$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}.$$

Sea

$$\{U_i\}_{i \in I}$$

una familia arbitraria de elementos de la familia $\mathcal{U}$: $U_i \in \mathcal{U}$ para cada $i \in I$. Consideremos $\sigma \in \bigcup_{i \in I} U_i$ arbitrario, esto implica que

$$\sigma \in U_{i_0},$$

para algún $i_0 \in I$, esto implica que existe

$$V_{i_0} \in \mathcal{V},$$

tal que, $\sigma V_{i_0} \subset U_{i_0}$, pero,

$$U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

es decir,

$$\sigma V_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

esto significa que,

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}.$$

Así, la afirmación está demostrada.

De ésta manera tenemos definida una topología sobre el grupo G, para la cual $\mathcal{U}$ es la familia de los conjuntos abiertos. Ahora, se afirma que la estructura del grupo G y la del espacio topológico $\mathcal{U}$ son compatibles, es decir la aplicación:

$$\Psi : G \times G \to G$$

definida por la correspondencia

$$(x, y) \mapsto \Psi(x, y) = xy^{-1}$$

es un mapeo continuo.

En efecto, sea $(x_0, y_0) \in G \times G$ un punto fijo pero arbitrario. Sea W una vecindad del punto $\Psi(x_0 y_0)$: $x_0 y_0^{-1} \in W$. Por definición de vecindad existe un conjunto abierto U de G : $U \in \mathcal{U}$ tal que

$$x_0 y_0^{-1} \in U \subset W.$$

Por definición de la familia $\mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{V}$, tal que,

$$x_0 y_0^{-1} V \subset U \subset W.$$

La condición IV. de la familia $\mathcal{V}$, implica que existe $V_1 \in \mathcal{V}$ tal que $V_1 V_1 \subset V$. La propiedad VI. implica que existe $V_2 \in \mathcal{V}$ tal que $V_1 = y_0 V_2 y_0^{-1}$, esto implica que $y_0^{-1} V_1 = V_2 y_0^{-1}$. Calculando

$$\begin{aligned} \Psi(x_0 V_2, V_1^{-1} y_0) &= x_0 V_2 (V_1^{-1} y_0)^{-1} \\ &= x_0 V_2 (y_0^{-1} V_1) \\ &= x_0 (V_2 y_0^{-1}) V_1 \\ &= x_0 y_0^{-1} V_1 V_1; \end{aligned}$$

se obtiene,

$$x_0 y_0^{-1} V_1 V_1 \subset x_0 y_0^{-1} V \subset U \subset W.$$

Esto significa que la aplicación Ψ es continua en el punto $(x_0, y_0) \in G \times G$. Como (x_0, y_0) se eligió arbitrariamente en $G \times G$ se tiene demostrado que la aplicación Ψ es un mapeo continuo para todo punto $(x, y) \in G \times G$. Así, la afirmación está demostrada y con ella el teorema. Así, se tiene la pareja $\mathfrak{G} = (G, \mathcal{U})$ la cual por lo que precede, deviene en un grupo topológico.
Se afirma que la topología $\mathcal{U}$ definida sobre el grupo G satisface el axioma de Hausdorff, en efecto tiene la siguiente proposición :

Proposición 1.1.2 *La topología definida sobre el grupo G: $\mathcal{U}$, satisface el axioma de Hausdorff.*

Demostración. Consecuencia inmediata de los siguientes lemas:

Lema 1.1.4 *Sea $V \subset \mathfrak{G} = (G, \mathcal{U})$. Consideremos el conjunto*

$$U = \{\sigma \in \mathfrak{G} : \exists V_1 \in \mathcal{V} \, tal \, que \, \sigma V_1 \subset V\}.$$

Entonces U es un conjunto abierto de G: $U \in \mathcal{U}$.

Demostración. Sea $\sigma \in U$ fijo pero arbitrario. Por definición de U existe $V_1 \in \mathcal{V}$ tal que $\sigma V_1 \subset V$. La condición IV. de la familia V, implica que existe $V_2 \in \mathcal{V}$ tal que $V_2 V_2 \subset V_1$, por tanto para cada $\tau \in V_2$ se tiene que $\tau V_2 \subset V_1$, entonces $\sigma\tau V_2 \subset \sigma V_1 \subset V$, es decir $\sigma\tau V_2 \subset V$. Por definición de U se tiene que $\sigma\tau \in U$ para todo $\tau \in V_2$, por consiguiente $\sigma V_2 \subset U$. Esto significa que U es vecindad del punto $\sigma \in \mathfrak{G}$. Como σ se eligió arbitrariamente en U, se tiene demostrado que U es vecindad de cada uno de sus puntos y por tanto U es un conjunto abierto: $U \in \mathcal{U}$. Así, el lema está demostrado.

Lema 1.1.5 *Para cada $\sigma \in \mho = (G,\mathcal{U})$ se tiene que: $T_\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $T_\sigma(U) \in T_\sigma(\mathcal{U})$, por definición $T_\sigma(U) = \sigma U$. Sea $\tau \in \sigma U$, entonces $\sigma^{-1}\tau \in U$, esto implica que existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $\sigma^{-1}\tau V \subset U$, lo cual implica que $\tau V \subset \sigma U$, por definición $\sigma U \in \mathcal{U}$. Así, $T_\sigma(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$, para cada $\sigma \in \mho$. En particular, para $\sigma^{-1} \in \mho$, se tiene que $T_{\sigma^{-1}}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$, esto implica que $T_\sigma \circ T_{\sigma^{-1}}(\mathcal{U}) \subset T_\sigma(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$. Por consiguiente, $\mathcal{U} \subset T_\sigma(\mathcal{U})$. Por lo que precede, $T_\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Así, el lema está demostrado.

Lema 1.1.6 *Para cada $\sigma \in \mho = (G,\mathcal{U})$, los conjuntos de la forma σV para toda $V \in \mathcal{V}$, son vecindades de σ: $\sigma V \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $\sigma \in \mho$ un elemento fijo pero arbitrario y sea $V \in \mathcal{V}$ fijo pero arbitrario. Se desea probar que σV es un conjunto abierto: $\sigma V \in \mathcal{U}$. Para éste propósito, consideremos el conjunto:

$$U_0 = \{\sigma \in \mho : \exists\, V_1 \in \mathcal{V}\, tal\, que\, \sigma V_1 \subset V\}.$$

De acuerdo con el lema 1.1.4, U_0 es un conjunto abierto: $U_0 \in \mathcal{U}$. Por definición de U_0 y dado que $e \in V$, se tiene que $U_0 \subset V$. Por el lema 1.1.5, se tiene que $T_\sigma(U_0) = U$ con $U \in \mathcal{U}$. Como $T_\sigma(U_0) \subset T_\sigma(V)$, entonces $U \subset T_\sigma(V)$. Además, $e \in U_0$ (ésto se sigue de la definición de U_0); ahora, $T_\sigma(U_0) = \sigma U_0$, esto implica que $\sigma = \sigma e \in \sigma U_0$, por lo tanto $\sigma \in U \subset \sigma V$ con $U \in \mathcal{U}$, esto significa que σV es vecindad de σ. Como σ y V se eligieron arbitrariamente en $\mho$ y $\mathcal{V}$ respectivamente, se tiene demostrado que para cada $\sigma \in \mho$ y para cada $V \in \mathcal{V}$, el conjunto σV, es un conjunto abierto: $\sigma V \in \mathcal{U}$. Así, el lema está demostrado.

Demostración de la proposición 1.1.2. Sean $\sigma, \tau \in \mho$ dos elementos distintos fijos pero arbitrarios: $\sigma \neq \tau$, entonces $\sigma^{-1}\tau \neq e$. La propiedad II. de la familia $\mathcal{V}$, implica que existe $V_1 \in \mathcal{V}$ tal que $\sigma^{-1}\tau \notin V_1$. La propiedad IV. implica que existe $V_2 \in \mathcal{V}$ tal que $V_2V_2 \subset V_1$. La propiedad V implica que $V_2^{-1} \in \mathcal{V}$, y, la propiedad I. implica que $V_2 \cap V_2^{-1} \in \mathcal{V}$.
Sea

$$V = V_2 \cap V_2^{-1}.$$

Se afirma en primer lugar que la vecindad V es simétrica :

$$V = V^{-1}.$$

En efecto, sea

$$x \in V \implies x = y = z^{-1} \;\; con \;\; y \in V_2,\; z^{-1} \in V_2^{-1},$$

esto implica que,

$$x^{-1} = y^{-1} = z \ con \ y^{-1} \in V_2^{-1}, \ z \in V_2,$$

esto implica que,

$$x^{-1} \in V_2^{-1} \cap V_2,$$

es decir,

$$x^{-1} \in V, \implies x \in V^{-1},$$

por lo tanto

$$V \subset V^{-1}.$$

La contención recíproca es análoga, así, la afirmación está demostrada. Esto permite aplicar la propiedad IV. de la familia $\mathcal{V}$, y obtener $V \in \mathcal{V}$ tal que $VV \subset V_1$, por consiguiente

$$VV^{-1} \subset V_1.$$

En segundo lugar se afirma que :

$$V \cap \sigma^{-1}\tau V = \emptyset.$$

En efecto, supongamos por un instante lo contrario, es decir, que existe

$$x \in V \cap \sigma^{-1}\tau V,$$

esto implica que

$$x = y = \sigma^{-1}\tau z \ \ con \ \ y \in V, \ z \in V \implies yz^{-1} = \sigma^{-1}\tau \in VV^{-1} \subset V_1.$$

Esto contradice el hecho de que $\sigma^{-1}\tau \notin V_1$. Así, la segunda afirmación está demostrada.

En tercer lugar se afirma que:

$$\sigma V \cap \tau V = \emptyset.$$

En efecto, supongamos por un instante lo contrario, es decir, supongamos que existe un elemento

$$x \in \sigma V \cap \tau V,$$

entonces

$$x = \sigma y = \tau z \quad con \quad y \in V, \; z \in V,$$

esto implica que $y = \sigma^{-1}\tau z$. Por consiguiente,

$$y \in V \cap \sigma^{-1}\tau V.$$

Esto contradice la segunda afirmación.
De esta manera, se pueden elegir conjuntos abiertos U_0, U_1 : $U_0, U_1 \in \mathcal{U}$ tal que

$$\sigma \in U_0 \subset \sigma V, \quad \tau \in U_1 \subset \tau V \quad con \quad U_0 \cap U_1 = \emptyset.$$

Así, se tiene demostrada la proposición.

Definición 1.1.4 *Sea X un espacio topológico. Sea $x \in X$ un punto arbitrario. Se dirá que una subfamilia $\mathcal{V}'$ de la familia completa de vecindades $\mathcal{V}$ del punto x es un* SISTEMA FUNDAMENTAL DE VECINDADES *del punto x, si para cada vecindad U del punto x: $U \in \mathcal{V}$, existe un elemento $V' \in \mathcal{V}'$ tal que $x \in V' \subset U$.*

Corolario 1.1.1 *Sea $\mho$ un grupo topológico. A la familia completa de vecindades del elemento identidad: $\mathcal{V}$, que satisfacen las propiedades I, II,...,IV; le corresponden las propiedades siguientes, en cualquier sistema fundamental de vecindades $\mathcal{V}'$ del elemento identidad $e \in \mho$, la cual por definición es una subfamilia de la familia $\mathcal{V}$: $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ y satisface las siguientes condiciones:*

I' *Si $V_1' \in \mathcal{V}'$ y $V_2' \in \mathcal{V}'$. Entonces existe $V_3' \in \mathcal{V}'$ tal que $V_3' \subset V_1' \cap V_2'$.*

II' $\bigcap_{V' \in \mathcal{V}'} V' = \{e\}.$

IV' *Si $V' \in \mathcal{V}'$, entonces existe $V_1' \in \mathcal{V}'$ tal que $V_1'V_1' \subset V'$.*

V' *Si $V' \in \mathcal{V}'$, entonces existe $V_1 \in \mathcal{V}'$ tal que $V_1^{-1} \subset V'$.*

VI' *Si $\sigma \in \mho$ y $V' \in \mathcal{V}'$, entonces existe $V_1' \in \mathcal{V}'$ tal que $\sigma V_1' \sigma^{-1} \subset V'$.*

Demostración. Sean $V_1', V_2' \in \mathcal{V}'$. Por definición de vecindad, existen conjuntos abiertos U_1, U_2 tales que $e \in U_1 \subset V_1'$, $e \in U_2 \subset V_2'$, esto implica que,

$$e \in U_1 \cap U_2 \subset V_1' \cap V_2'.$$

Como $U_1 \cap U_2$ es un conjunto abierto y por lo tanto una vecindad de e; por definición existe

$$V_3' \in \mathcal{V}' \text{ tal que } e \in V_3' \subset U_1 \cap U_2 \subset V_1' \cap V_2',$$

por lo tanto

$$V_3' \subset V_1' \cap V_2'.$$

Así, I' está demostrado.

Por definición, para cada $V \in \mathcal{V}$, existe un elemento $V' \in \mathcal{V}'$ tal que $e \in V' \subset V$, esto implica que,

$$\bigcap_{V' \in \mathcal{V}'} V' \subset \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \{e\},$$

esto implica que

$$\bigcap_{V' \in \mathcal{V}'} V' = \{e\}.$$

Así, II' está demostrado.

Sea $V' \in \mathcal{V}'$. Por definición $e \in V'$ y tambien $ee \in V'$. Como $\mho$ es un grupo topológico, la aplicación Ψ^* es un mapeo continuo, esto implica que existen vecindades W_1, $W_2 \in \mathcal{V}$, tal que,

$$\Psi^*(W_1, W_2) = W_1 W_2 \subset V'.$$

Como W_1, $W_2 \in \mathcal{V}$, existen vecindades W_1', $W_2' \in \mathcal{V}'$, tales que $e \in W_1' \subset W_1$ y $e \in W_2' \subset W_2$, esto implica que

$$e \in W_1' W_2' \subset W_1 W_2 \subset V'.$$

Si definimos

$$V_1' = W_1' \cap W_2',$$

se tiene que

$$\Psi^*(V_1', V_1') = V_1' V_1' \subset V'.$$

Así, IV' está demostrado.

Sea $V' \in \mathcal{V}'$. Por definición $e \in V'$ y tambien $e^{-1} = e \in V'$. Como $\mho$ es un grupo topológico, la aplicación Φ es un mapeo continuo, esto implica que existe una vecindad $V \in \mathcal{V}$, la cual por la propiedad V de la familia $\mathcal{V}$ se puede elegir como $V^{-1} \in \mathcal{V}$, tal que,

$$\Phi(V^{-1}) \subset V',$$

es decir,

$$e^{-1} = e \in V \subset V'.$$

Como $V^{-1} \in \mathcal{V}$, por definición existe $V_1 \in \mathcal{V}'$, tal que,

$$e \in V_1 \subset V^{-1},$$

esto implica que,

$$e^{-1} = e \in V_1^{-1} \subset (V^{-1})^{-1},$$

es decir,

$$V_1^{-1} \subset V \subset V',$$

por consiguiente

$$V_1^{-1} \subset V'.$$

Así, V' está demostrado.

Sea $\sigma \in \mho$ y $V' \in \mathcal{V}'$. Como $e \in V'$, esto implica que

$$\sigma^{-1} = \sigma^{-1}e \in \sigma^{-1}V',$$

es decir,

$$\sigma^{-1} \in \sigma^{-1}V',$$

esto implica que,

$$e = \sigma^{-1}\sigma \in \sigma^{-1}V'\sigma,$$

es decir,

$$e \in \sigma^{-1}V'\sigma,$$

esto significa que,

$$\sigma^{-1}V'\sigma \in \mathcal{V}.$$

Por definición existe $V_1' \in \mathcal{V}'$, tal que,

$$V_1' \subset \sigma^{-1}V'\sigma,$$

esto implica que,

$$\sigma V_1'\sigma^{-1} \subset V'.$$

Así, VI' está demostrado y con ello el corolario.

1.2 El Espacio Homogéneo

Definición 1.2.1 *Sea X un espacio topológico y Hausdorff dotado de una relación binaria " $\sim$ " de equivalencia:*

i) $$x \sim x \; \forall x \in X.$$

ii) $$x \sim y \Rightarrow y \sim x \; \forall x, y \in X.$$

iii) $$x \sim y, \, y \sim z \Rightarrow x \sim z \; \forall x, y, z \in X.$$

Por tanto, el espacio X está dividido en clases de equivalencia ajenas. Si $x \in X$, se denotará con el símbolo $\varpi(x)$ a su clase de equivalencia y denotaremos con el símbolo $X/\sim$ al conjunto de todas las clases de equivalencia de X con respecto a la relación " $\sim$ ".

Consideremos la aplicación:

$$\varpi : X \to X/\sim$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto \varpi(x),$$

es decir, aquella aplicación que a todo elemento $x \in X$, le asingna $\varpi(x)$, su clase de equivalencia módulo " $\sim$ ". A esta aplicación ϖ se le llama MAPEO CANÓNICO, *o bien* MAPEO NATURAL. *Es fácil ver que este mapeo está bien definido.*

Dotaremos al conjunto $X/\sim$ de una topología en el siguiente lema:

Lema 1.2.1 *La familia $\mathcal{O}$ de subconjuntos U del conjunto $X/\sim$ tales que la imagen inversa de U bajo ϖ es un conjunto abierto del espacio X :*

$$\mathcal{O} = \{U \subset X/\sim \; : \; \varpi^{-1}(U) \, es \, un \, conjunto \, abierto \, del \, espacio \, X\}.$$

Define una topología $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{O})$ sobre el conjunto $X/\sim$ y, es la topología más fina con respecto a la cual el mapeo canónico ϖ es continuo.

Demostración. La primera parte del lema es consecuencia inmediata de las relaciones:

i)
$$\varpi^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} \varpi^{-1}(U_i).$$

Para toda familia arbitraria $\{U_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos $U_i \in \mathcal{T}$.

ii)
$$\varpi^{-1}(\bigcap_{i=1}^{m} U_i) = \bigcap_{i=1}^{m} \varpi^{-1}(U_i).$$

Para toda familia finita $\{U_i\}_{i=1}^{m}$ de subconjuntos $U_i \in \mathcal{T}$.

iii)
$$\varpi^{-1}(\emptyset) = \emptyset,\ \varpi^{-1}(X/\sim) = X.$$

La segunda parte del teorema se demuestra como sigue : supongamos que $\mathcal{T}'$ define otra topología sobre el espacio $X/\sim$ que hace del mapeo natural ϖ un mapeo continuo, entonces para todo conjunto abierto $U \subset X/\sim$ con respecto a la topología $\mathcal{T}'$: $U \in \mathcal{T}'$, el conjunto $\varpi^{-1}(U)$ es un conjunto abierto del espacio X, por definición de la familia $\mathcal{T}(\mathcal{O}) = \mathcal{T}$ se tiene que $U \in \mathcal{T}$. Es claro que la aplicación natural ϖ es continua cuando al espacio $X/\sim$ de le dota de la topología $\mathcal{T}$ Así, está demostrada la segunda parte y con ella el lema.

Al conjunto $X/\sim$ dotado con la topología $\mathcal{T}$ del lema se le llamará ESPACIO COCIENTE O ESPACIO DE IDENTIFICACIÓN y su topología $\mathcal{T}$, TOPOLOGÍA COCIENTE. De acuerdo con esta terminología el lema no nos dice más que el espacio cociente $X/\sim$ se obtiene dotando al conjunto de las clases de equivalencia módulo la relación "$\sim$", de la topología más fina, que hace del mapeo natural

$$\varpi : X \to X/\sim$$

un mapeo continuo.

El lema precedente permite establecer la siguiente proposición:

Proposición 1.2.1 *Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{F}$ un grupo de homeomorfismos de X en X. Entonces la relación binaria definida entre los elementos de X :*

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists f \in \mathcal{F} \text{ tal que } y = f(x),$$

es una relación de equivalencia y, si denotamos con $X/\mathcal{F}$ su correspondiente espacio cociente, el mapeo natural:

$$\varpi : X \to X/\mathcal{F}$$

es continuo y abierto. Si además, la grafica de la relación:

$$\Gamma = \{(x,y) \in X \times X \, : \, x \sim y\}$$

es un conjunto cerrado, entonces el espacio cociente o espacio de identificación $X/\mathcal{F}$ satisface el axioma de Hausdorff.

Demostración. Si denotamos con e el elemento identidad en el grupo $\mathcal{F}$, entonces $x = e(x)$, es decir, $x \sim x$.

Como $x \sim y$, implica que existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $y = f(x)$ y como $f \in \mathcal{F}$, implica que existe, $f^{-1} \in \mathcal{F}$ tal que $x = f^{-1}(y)$, esto implica que $y \sim x$. Es decir, $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

Como $x \sim y$, $y \sim z$ implica que existe f, $g \in \mathcal{F}$ tales que $y = f(x)$, $z = g(y)$ respectivamente; entonces existe

$$g \circ f \in \mathcal{F}$$

tal que

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x),$$

esto significa que $x \sim z$.

Por consiguiente, la relación "$\sim$" es una relación de equivalencia. Como hemos convenido en denotar con el símbolo $X/\mathcal{F}$ al espacio $X/\sim$, el lema 1.2.1 nos asegura que el mapeo natural

$$\varpi : X \to X/\mathcal{F}$$

es continuo. Para demostrar que ϖ es un mapeo abierto, consideremos un conjunto abierto U en X: $U \subset X$. Su imagen $\varpi(U)$ será un abierto, si se prueba que $\varpi^{-1}(\varpi(U))$ es un abierto en X. Para esto consideremos un punto fijo pero arbitrario

$$x_0 \in \varpi^{-1}(\varpi(U)),$$

por definición de imagen inversa,

$$\varpi(x_0) \in \varpi(U),$$

por tanto se puede escribir como

$$\varpi(x_0) = \varpi(y) \text{ con } y \in U,$$

lo que significa que $y \sim x_0$, por la definición de "$\sim$", existe un homeomorfismo

$$f \in \mathcal{F} \text{ tal que } x_0 = f(y),$$

esto implica que

$$x_0 \in f(U)$$

y como U es un abierto $f(U)$ también lo es. Se afirma que :

$$x_0 \in f(U) \subset \varpi^{-1}(\varpi(U)).$$

En efecto, si

$$p \in f(U), \ p = f(q)$$

con $q \in U$, es decir, $q \sim p$, lo cual implica que

$$\varpi(q) = \varpi(p)$$

y como

$$\varpi(q) \in \varpi(U)$$

esto a su vez implica que

$$p \in \varpi^{-1}(\varpi(U)).$$

Por tanto

$$\varpi^{-1}(\varpi(U))$$

es un conjunto abierto, por definición de la familia $\mathcal{O}$ del lema 1.2.1

$$\varpi(U)$$

es un conjunto abierto.

Para demostrar la última parte de la proposición se procede como sigue. Sean α, $\beta \in X/\mathcal{F}$ tal que $\alpha \neq \beta$. Si

$$\alpha = \varpi(p) \text{ y } \beta = \varpi(q)$$

con $p, q \in X$, entonces $p \not\sim q$ y habida cuenta de la definición del conjunto Γ, la pareja

$$(x, y) \notin \Gamma$$

y como por hipótesis este conjunto es cerrado, existen vecindades abiertas U_1, U_2 en X de p y q respectivamente, tales que

$$(U_1 \times U_2) \cap \Gamma = \emptyset.$$

Como ϖ es un mapeo abierto $\varpi(U_1)$ y $\varpi(U_2)$ son vecindades abiertas de α y β respectivamente. Se afirma que

$$\varpi(U_1) \cap \varpi(U_2) = \emptyset.$$

En efecto, supongamos por un instante que esto no sucede, entonces debe existir por lo menos un elemento

$$\gamma \in \varpi(U_1) \cap \varpi(U_2),$$

mismo que se puede escribir como

$$\gamma = \varpi(r) = \varpi(s),$$

por tanto $r \sim s$. Esto significa que

$$(r, s) \in (U_1 \times U_2) \cap \Gamma$$

lo cual contradice la elección de U_1 y U_2. Así, la proposición está demostrada.

Lema 1.2.2 *Sea $\mho$ un grupo topológico y sea $\mathcal{H}$ un subgrupo topológico cerrado de $\mho$:*

$$\mathcal{H} < \mho, \; \mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}.$$

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de las traslaciones derechas T^*_σ asociadas a todo elemento $\sigma \in \mathcal{H}$. Entonces $\mathcal{F}$ deviene en un grupo de automorfismos de $\mho$ en $\mho$.

Demostración. La asociatividad es una consecuencia inmediata del lema 1.1.1 i). Para $e \in \mathcal{H}$ consideremos el homeomorfismo:

$$T^*_e : \mho \to \mho$$

definido por la correspondencia

$$x \mapsto T^*_e(x) = xe = x.$$

Sea $T^*_\sigma \in \mathcal{F}$ un elemento fijo pero arbitrario. Calculando :

$$T^*_\sigma \circ T^*_e(x) = T^*_{e\sigma}(x) = x(e\sigma) = x\sigma = T^*_\sigma(x) = T^*_e \circ T^*_\sigma(x).$$

se obtiene,

$$T_\sigma^* \circ = T_e^* = T_\sigma^* = T_e^* \circ T_\sigma^*.$$

Como $T_\sigma \in \mathcal{F}$ se eligió arbitrariamente, se tiene que el homeomorfismo $T_e^* \in \mathcal{F}$ es el homeomorfismo identidad.

La existencia de los elementos inversos es una consecuencia inmediata del lema 1.1.2. Así, está demostrado el lema.

Proposición 1.2.2 *Sea $\mho$ un grupo topológico. Sea $\mathcal{H}$ un subgrupo topológico cerrado de $\mho$:*

$$\mathcal{H} < \mho, \ \ \mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}.$$

Sea $\mathcal{F}$ el grupo de los traslaciones derechas de $\mho$ en $\mho$ asociados a todo elemento $\eta \in \mathcal{H}$. La relación binaria " $\sim$ " definida entre los elementos de $\mho$:

$$\sigma \sim \tau \Longleftrightarrow \sigma\mathcal{H} = \tau\mathcal{H}.$$

Es una relación de equivalencia. La misma se puede expresar como:

$$\sigma \sim \tau \Longleftrightarrow \exists \, \eta \in \mathcal{H} \, tal \, que \, \tau = \sigma\eta$$

también como:

$$\sigma \sim \tau \Longleftrightarrow \exists \, T_\eta^* \in \mathcal{F} \, tal \, que \, \tau = T_\eta^*(\sigma)$$

Demostración. Es obvio que la relación " $\sim$ " es de equivalencia. Supongamos que la tercera relación se cumple :

$$\sigma \sim \tau \implies \exists \, T_\eta^* \in \mathcal{F} \text{ tal que } \tau = T_\eta^*(\sigma) = \sigma\eta,$$

esto implica,

$$\tau h = \sigma\eta h \ \ \forall \ h \in \mathcal{H},$$

como $\eta h \in \mathcal{H}$, entonces

$$h_1 = \eta h \in \mathcal{H}, \ \tau h = \sigma h_1, \ \ \forall \ h \in \mathcal{H}, .$$

es decir,

$$\tau\mathcal{H} \subset \sigma\mathcal{H}.$$

Como " $\sim$ " es de equivalencia existe

$$T_{\eta^{-1}}^* \in \mathcal{F},$$

tal que,

$$T^*_{\eta^{-1}}(\tau) = \sigma,$$

es decir,

$$\tau\eta^{-1} = \sigma,$$

esto implica que

$$\tau\eta^{-1}h = \sigma h$$

para todo $h \in \mathcal{H}$, como $\eta^{-1}h \in \mathcal{H}$, entonces

$$h_1 = \eta^{-1}h \in \mathcal{H} \text{ y } \tau h_1 = \sigma h$$

para todo $h \in \mathcal{H}$, es decir,

$$\sigma\mathcal{H} \subset \tau\mathcal{H}.$$

Por lo que precede

$$\tau\mathcal{H} = \sigma\mathcal{H}.$$

Reciprocamente, supongamos que la primera relación se cumple :

$$\sigma \sim \tau \Longrightarrow \sigma\mathcal{H} = \tau\mathcal{H},$$

por tanto existen h, $h_1 \in \mathcal{H}$ tal que

$$\sigma h_1 = \tau h \Longrightarrow \sigma h_1 h^{-1} = \tau.$$

Sea

$$\eta = h_1 h^{-1},$$

entonces existe

$$T^*_\eta \in \mathcal{F}$$

tal que

$$\tau = \sigma h_1 h^{-1} = \sigma\eta = T^*_\eta(\sigma),$$

es decir,

$$\tau = T^*_\eta(\sigma).$$

Así la primera y la tercera relación son equivalentes. Es obvio que la segunda es equivalente a la tercera. Así, la proposición está demostrada.

Denotaremos con el simbolo $\mho/\mathcal{H}$ al conjunto de todas las clases de equivalencia modulo la relación " $\sim$ " :

$$\mho/\mathcal{F} = \mho/\mathcal{H}.$$

De acuerdo con la proposición 1.2.1, el conjunto $\mho/\mathcal{H}$ de las clases de equivalencia módulo la relación de equivalencia " $\sim$ " dotado de la topología cociente deviene en un espacio topológico y el mapeo natural:

$$\varpi : \mho \to \mho/\mathcal{H}$$

que asigna a todo elemento $\sigma \in \mho$ su clase residual $\varpi(\sigma)$ módulo la relación " $\sim$ " :

$$\sigma \to \varpi(\sigma)$$

es un mapeo continuo y abierto. Como por hipótesis $\mathcal{H}$ es cerrado y el conjunto :

$$\Gamma = \{(\sigma,\tau) \in \mho \times \mho : \sigma \sim \tau\}$$

se puede expresar como

$$\Gamma = \{(\sigma,\tau) \in \mho \times \mho : \exists\, \eta \in \mathcal{H} \textit{ tal que } \sigma^{-1}\tau = \eta\}$$

y como la aplicación

$$\Psi_*(\sigma,\tau) = \sigma^{-1}\tau$$

es un mapeo continuo; Γ es la preimagen de $\mathcal{H}$ bajo Ψ_* :

$$\Gamma = \Psi_*^{-1}(\mathcal{H})$$

y por consiguiente Γ es cerrado. Por tanto, de acuerdo con la proposición 1.2.1 el espacio topológico $\mho/\mathcal{H}$ es de Hausdorff. Finalmente como $\sigma \sim \tau \Leftrightarrow \sigma\mathcal{H} = \tau\mathcal{H} \Leftrightarrow \exists\, \eta \in \mathcal{H}$ tal que $\eta = \sigma^{-1}\tau \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \sigma \equiv \tau\, m\acute{o}dulo \mathcal{H}$. Las clases de equivalencia módulo la relación " $\sim$ " no son otra cosa que las clases residuales izquierdas módulo $\mathcal{H}$:

$$\varpi(\sigma) = \sigma\mathcal{H}.$$

Por tanto, al conjunto de las clases residuales módulo $\mathcal{H}$: $\mho/\mathcal{H}$, el cual concebido como espacio topológico se le llama el ESPACIO COCIENTE DE $\mho$ MÓDULO $\mathcal{H}$ y a la aplicación de $\mho$ en $\mho/\mathcal{H}$ que asigna a todo elemento $\sigma \in \mho$ su clase residual módulo $\mathcal{H}$: $\varpi(\sigma) = \sigma\mathcal{H}$ se denotará :

$$\varpi : \mho \to \mho/\mathcal{H}$$

En resumen, se ha demostrado el siguiente corolario.

Corolario 1.2.1 *Si $\mho$ es un grupo topológico y $\mathcal{H}$ es un subgrupo topológico cerrado de $\mho$, entonces al conjunto $\mho/\mathcal{H}$ de las clases residuales de $\mho$ módulo $\mathcal{H}$, se le puede dotar de una estructura de espacio topológico de Hausdorff y el mapeo natural de $\mho$ en el espacio cociente de $\mho$ por $\mathcal{H}$ que asigna a todo elemento $\sigma \in \mho$ su clase residual módulo $\mathcal{H}$:*

$$\varpi : \mho \to \mho/\mathcal{H}$$

definida por la correspondencia

$$\sigma \mapsto \varpi(\sigma) = \sigma\mathcal{H}$$

es un mapeo continuo y abierto.

TODO ESPACIO $\mho/\mathcal{H}$, CONTRUIDO CON UN GRUPO TOPOLÓGICO $\mho$ Y UN SUBGRUPO TOPOLÓGICO CERRADO $\mathcal{H}$ SE LE LLAMA ESPACIO HOMOGÉNEO DE $\mho$ POR $\mathcal{H}$.

Proposición 1.2.3 *Sea $\mho$ un grupo topológico Hausdorff. Sea $\mathcal{H}$ un subgrupo topológico cerrado de $\mho$:*

$$\mathcal{H} < \mho, \; \mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}.$$

Sea $\mho/\mathcal{H}$ el correspondiente espacio homogéneo. Si a toda pareja ordenada

$$(\sigma, \tau\mathcal{H}) \in \mho \times \mho/\mathcal{H},$$

se le asigna la clase residual

$$\sigma\tau\mathcal{H},$$

entonces la aplicación :

$$\Delta : \mho \times \mho/\mathcal{H} \to \mho/\mathcal{H}$$

definida por la correspondencia

$$(\sigma, x) \mapsto \Delta(\sigma, x) = \sigma x$$

donde

$$\sigma x = \sigma\varpi(\tau) = \sigma(\tau\mathcal{H}) = (\sigma\tau)\mathcal{H} = \varpi(\sigma\tau).$$

Está bien definida y es un mapeo continuo. Además satisface las relaciones:

i) $(\sigma\tau)x = \sigma(\tau x)$ *para todo* $\sigma, \tau \in \mho$ *y para todo* $x \in \mho/\mathcal{H}$.

ii) $ex = xe = x$ *con* $e \in \mho$ *el elemento identidad y para todo* $x \in \mho/\mathcal{H}$.

Es claro que la aplicación Δ está bien definida.

Demostración. Sea U un conjunto abierto del espacio $\mho/\mathcal{H}$ fijo pero arbitrario: $U \subset \mho/\mathcal{H}$. Se habrá demostrado la continuidad de Δ si se verifica que el conjunto

$$\Delta^{-1}(U) = \{(\sigma, x) \in \mho \times \mho/\mathcal{H} : \Delta(\sigma, x) = \sigma x \in U\} = U_1,$$

es un conjunto abierto del espacio producto subyacente al grupo topólogico producto $\mho\times\mho/\mathcal{H}$. En efecto, sea $(\sigma_0, x_0) \in U_1$ un punto fijo pero arbitrario con $x_0 = \varpi(\tau_0)$, calculando :

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma_0, x_0) &= \sigma_0 x_0 \\ &= \sigma_0(\tau_0\mathcal{H}) \\ &= (\sigma_0\tau_0)\mathcal{H} \\ &= \varpi(\sigma_0\tau_0) \in U, \end{aligned}$$

se obtiene, $\varpi(\sigma_0\tau_0) \in U$, esto implica que

$$\sigma_0\tau_0 \in \varpi^{-1}(U) = V,$$

es decir, V es vecindad de $\sigma_0\tau_0$: $\sigma_0\tau_0 \in V \subset \mho$. Como $\mho$ es un grupo topológico, la aplicación Ψ^* es un mapeo continuo, definición 1.1.1 i), por tanto existen vecindades abiertas V_1, V_2 en $\mho$ de σ_0 y τ_0 respectivamente : $\sigma_0 \in V_1$, $\tau_0 \in V_2$, tales que

$$\Psi^*(V_1, V_2) = V_1V_2 \subset V$$

y como ϖ es un mapeo abierto, el conjunto $\varpi(V_2) = U_2$ es un abierto en $\mho/\mathcal{H}$ que contiene a x_0, es decir,

$$x_0 = \varpi(\tau_0) \in U_2.$$

Por consiguiente, el punto (σ_0, x_0) está contenido en el conjunto abierto $V_1 \times U_2$ del espacio $\mho \times \mho/\mathcal{H}$:

$$(\sigma_0, x_0) \in V_1 \times U_2 \subset \mho \times \mho/\mathcal{H}.$$

Se afirma que :

$$V_1 \times U_2 \subset U_1.$$

En efecto, sea $(\sigma, x) \in V_1 \times U_2$ fijo pero arbitrario, con $x \in U_2 = \varpi(V_2)$, por tanto, $x = \varpi(\tau)$ con $\tau \in V_2$, esto implica que la pareja

$$(\sigma, \tau) \in V_1 \times V_2,$$

lo cual implica que

$$\sigma\tau \in V_1 V_2 \subset V$$

y por tanto

$$\varpi(\sigma\tau) \in \varpi(V) \subset U$$

y como

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma, x) &= \sigma\tau\mathcal{H} \\ &= \sigma(\tau\mathcal{H}) \\ &= \sigma\varpi(\tau) \\ &= \sigma x \in U, \end{aligned}$$

esto implica que

$$(\sigma, x) \in \Delta^{-1}(U) = U_1$$

y como (σ, x) se eligió arbitrariamente en $V_1 \times U_2$ se tiene que

$$V_1 \times U_2 \subset U_1$$

y como $(\sigma_0, x_0) \in V_1 \times U_2$ con $V_1 \times U_2$ abiertos pues ambos lo son, por consiguiente U_1 es vecindad de (σ_0, x_0) y éste se eligió arbitrariamente en U_1, se obtiene que U_1 es vecindad de cada no de sus puntos y por tanto un conjunto abierto, así la aplicación Δ deviene en un mapeo continuo.

Para demostrar las relaciones i) y ii) sean $\sigma, \tau \in \mho$ y sea $x \in \mho/\mathcal{H}$. Calculando:

$$\begin{aligned} (\sigma\tau)x &= \sigma\tau\varpi(\gamma) \\ &= (\sigma\tau)\gamma\mathcal{H} \\ &= \sigma(\tau(\gamma\mathcal{H})) \\ &= \sigma(\tau\varpi(\gamma)) \\ &= \sigma(\tau x), \end{aligned}$$

se obtiene

$$(\sigma\tau)x = \sigma(\tau x)$$

y así, i) está demostrado. Calculando ahora,

$$ex = e\varpi(\gamma) = \varpi(e\gamma) = \varpi(\gamma) = x,$$

se obtiene $ex = xe = x$ y así, ii) está demostrada y con ella la proposición.

Con la terminología dada anteriormente; la proposición afirma que : $\mho$ OPERA SOBRE EL ESPACIO HOMOGÉNEO $\mho/\mathcal{H}$.

Corolario 1.2.2 *Sean x, $y \in \mho/\mathcal{H}$ dos puntos arbitrarios. Entonces existe un elemento $\tau \in \mho$ tal que $y = \tau x$ bajo Δ.*

Demostración. Sea $\sigma, \gamma \in \mho$ tales que $y = \varpi(\sigma)$ con $x = \varpi(\gamma)$. Se define $\tau = \sigma\gamma^{-1}$. Calculando

$$\tau x = \tau\varpi(\gamma) = \varpi(\tau\gamma) = \varpi(\sigma) = y,$$

se obtiene $y = \tau x$. Así, está demostrado el corolario.

Dicho en otras palabras, $\mho$ OPERA SOBRE $\mho/\mathcal{H}$ TRANSITIVAMENTE.

Corolario 1.2.3 *Para todo $\sigma \in \mho$, la aplicación*

$$\Phi_\sigma : \mho/\mathcal{H} \to \mho/\mathcal{H}$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto \Phi_\sigma(x) = \sigma x$$

es un homeomorfismo de $\mho/\mathcal{H}$ en sí mismo.

Demostración. Es facil ver que Φ_σ es biyección. Como

$$\Phi_\sigma(x) = \Delta(\sigma, x).$$

y como Δ es continua en σ y x, la misma es continua para σ-fija. Por consiguiente, la función Φ_σ es continua. Como la aplicación inversa

$$(\Phi_\sigma)^{-1} = \Phi_{\sigma^{-1}},$$

es continua para toda $\sigma \in \mho$, en particular para σ^{-1} y como

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma^{-1}} \circ \Phi_\sigma(x) &= \Phi_{\sigma^{-1}}(\Phi_\sigma(x)) \\ &= \Phi_{\sigma^{-1}}(\sigma x) \\ &= \sigma^{-1}\sigma x \\ &= ex \\ &= x, \end{aligned}$$

por consiguiente

$$\Phi_{\sigma^{-1}} \circ \Phi_\sigma = \Phi_\sigma \circ \Phi_{\sigma^{-1}} = Identidad.$$

Proposición 1.2.4 *Sea Sea $\mho$ un grupo topológico y Hausdorff. Sea $\mathcal{H}$ un subgrupo cerrado y normal de $\mho$:*

$$\mathcal{H} < \mho,\ \mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}\ \ y\ \ \sigma\mathcal{H} = \mathcal{H}\sigma.$$

Entonces el grupo cociente

$$\mho/\mathcal{H}$$

es un grupo topológico Hausdorff.

Demostración. Las hipótesis implican que el conjunto de clases de equivalencia de $\mho$: $\mho/\mathcal{H}$, es un grupo con respecto a la operación:

$$\Phi : \mho/\mathcal{H} \times \mho/\mathcal{H} \to \mho/\mathcal{H}$$

definida por la correspondencia

$$(x, y) \mapsto \Phi(x, y) = xy = \varpi(\sigma\tau),$$

donde $x = \varpi(\sigma)$, $y = \varpi(\tau)$.

Por consiguiente, el mapeo natural :

$$\varpi : \mho \to \mho/\mathcal{H}$$

definido por la correspondencia

$$\sigma \mapsto \varpi(\sigma) = \sigma\mathcal{H}$$

es un HOMOMORFISMO :

$$\varpi(\sigma\tau) = \varpi(\sigma)\varpi(\tau).$$

Establecidas estas consideraciones, se afirma que la estructura de espacio topológico y la de grupo son compatibles, es decir, la aplicación

$$\Psi : \mho/\mathcal{H} \times \mho/\mathcal{H} \to \mho/\mathcal{H}$$

definida por la correspondencia

$$(x, y) \mapsto \Psi(x, y) = xy^{-1}$$

es un mapeo continuo. En efecto, Sea (x_0, y_0) un punto fijo pero arbitrario del espacio producto cociente $\mho/\mathcal{H} \times \mho/\mathcal{H}$:

$$(x_0, y_0) \in \mho/\mathcal{H} \times \mho/\mathcal{H}.$$

Sea U una vecindad abierta de punto $\Psi(x_0, y_0)$: $x_0y_0^{-1} \in U$. Supongamos que $x_0 = \varpi(\sigma_0)$ y $y_0 = \varpi(\tau_0)$ con $\sigma_0, \tau_0 \in \mho$. Calculando

$$x_0y_0^{-1} = \varpi(\sigma_0)(\varpi(\tau_0))^{-1} = \varpi(\sigma_0)\varpi(\tau_0^{-1}) = \varpi(\sigma_0\tau_0^{-1}),$$

se obtiene, $x_0y_0^{-1} = \varpi(\sigma_0\tau_0^{-1}) \in U$, esto implica que

$$\sigma_0\tau_0^{-1} \in \varpi^{-1}(U) \subset \mho,$$

es decir, $\varpi^{-1}(U)$ es vecindad del punto $\sigma_0\tau_0^{-1}$. Como $\mho$ es grupo topológico, existen vecindades abiertas V_1, $V_2 \subset \mho$ de σ_0 y τ_0 respectivamente : $\sigma_0 \in V_1$, $\tau_0 \in V_2$, tales que

$$V_1V_2^{-1} \subset \varpi^{-1}(U) = V.$$

Como ϖ es un mapeo abierto, los conjuntos $\varpi(V_1) = U_1$, $\varpi(V_2) = U_2$ son conjuntos abiertos en el espacio $\mho/\mathcal{H}$, los cuales son vecindades de x_0 y y_0 respectivamente : $x_0 \in U_1$, $y_0 \in U_2$ y como

$$\varpi(V_1V_2^{-1}) \subset \varpi(V),$$

es decir,

$$\varpi(V_1)\varpi(V_2^{-1}) = U_1U_2^{-1} \subset U.$$

Por otro lado, el subconjunto $U_1 \times U_2 \subset \mho/\mathcal{H} \times \mho/\mathcal{H}$, es vecindad del punto $(x_0, y_0) \in \mho/\mathcal{H} \times \mho/\mathcal{H}$: $(x_0, y_0) \in U_1 \times U_2$ y con la propiedad de que

$$\Psi(x_0, y_0) \in \Psi(U_1, U_2) = U_1U_2^{-1} \subset U.$$

Esto significa que la aplicación Ψ es un mapeo continuo. Así, la afirmación está demostrada y con ella la proposición.

Teorema 1.2.1 *Sea $\mho$ un grupo topológico y Hausdorff. Sea $\mathcal{H}$ un subgrupo topológico cerrado y normal de $\mho$:*

$$\mathcal{H} < \mho, \quad \mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}} \quad y \quad \sigma\mathcal{H} = \mathcal{H}\sigma.$$

Entonces:

i) *Si $\mho$ es compacto $\Longrightarrow$ $\mho/\mathcal{H}$ es compacto.*

ii) *Si $\mho$ es localmente compacto $\Longrightarrow$ $\mho/\mathcal{H}$ es localmente compacto.*

Demostración. Como el mapeo conónico ϖ es continuo, sobreyectivo y, $\mho$ es compacto por hipótesis, entonces la

$$Imagen(\varpi) = \varpi(\mho) = \mho/\mathcal{H} \textit{ es compacto.}$$

Así, está demostrada la propiedad i).

La propiedad ii) es consecuencia inmediata del siguiente lema:

Lema 1.2.3 *Las mismas hipótesis del teorema. Sean U y V dos vecindades abiertas del elemento identidad $e \in \mho$ tales que*

$$VV^{-1} \subset U \Longrightarrow \overline{\varpi(V)} \subset \varpi(U).$$

Demostración Sea $x_0 \in \overline{\varpi(V)}$ fijo pero arbitrario y sea $\sigma_0 \in \mho$ tal que $x_0 = \varpi(\sigma_0)$. Como el conjunto $\sigma_0 V \subset \mho$ es una vecindad del punto σ_0 y como ϖ es un mapeo abierto, el conjunto

$$\varpi(\sigma_0 V) = \varpi(\sigma_0)\varpi(V) = x_0\varpi(V)$$

es vecindad abierta del punto $x_0 \in \mho/\mathcal{H}$: $x_0 \in x_0\varpi(V)$, lo cual implica que

$$x_0\varpi(V) \cap \varpi(V) \neq \emptyset.$$

Sea $z \in x_0\varpi(V) \cap \varpi(V)$

$$\begin{aligned} z = \varpi(\tau_2) &= x_0\varpi(\tau_1) \\ \Longrightarrow \quad \varpi(\tau_2) &= \varpi(\sigma_0)\varpi(\tau_1) \\ \Longrightarrow \quad \varpi(\sigma_0) &= \varpi(\tau_2)(\varpi(\tau_1))^{-1}. \end{aligned}$$

Como ϖ es un homomorfismo, entonces

$$\begin{aligned} x_0 &= \varpi(\sigma_0) \\ &= \varpi(\tau_2)\varpi(\tau_1^{-1}) \\ &= \varpi(\tau_2\tau_1^{-1}), \end{aligned}$$

es decir,

$$x_0 = \varpi(\tau_2\tau_1^{-1}) \in \varpi(VV^{-1}) \subset \varpi(U),$$

así $x_0 \in \varpi(U)$. Como x_0 se eligió arbirtariamente en $\overline{\varpi(V)}$, se obtiene que

$$\overline{\varpi(V)} \subset \varpi(U).$$

Así, está demostrado el lema.

Demostración ii) del teorema. La hipótesis implica que, existe una vecindad abierta U del elemento identidad $e \in \mho$ cuya cerradura $\overline{U}$ es compacta : $e \in U \subset \overline{U}$.

Como $\mho$ es un grupo topológico existe una vecindad V de $e \in \mho$, tal que $VV^{-1} \subset U$. A la luz del lema,

$$\overline{\varpi(V)} \subset \varpi(U) \subset \varpi(\overline{U})$$

y como el mapeo ϖ es continuo y $\overline{U}$ es compacto, esto implica que $\varpi(\overline{U})$ es un compacto, es decir,

$$\overline{\varpi(V)} \subset \varpi(\overline{U}) \subset \mho/\mathcal{H}.$$

esto implica que,

$$\overline{\varpi(V)}$$

es un conjunto compacto. En otras palabras: se ha exhibido una vecindad abierta

$$\varpi(V)$$

del elemento identidad

$$\{e\} = \mathcal{H} \in \mho/\mathcal{H}$$

cuya cerradura

$$\overline{\varpi(V)}$$

es compacta. Por traslación, se demuestra que todo punto $x \in \mho/\mathcal{H}$ admite una vecindad cuya cerradura es compacta. Es decir,

$$\mho/\mathcal{H}$$

es localmente compacto. Así, el teorema está demostrado.

Sea $\mho$ un grupo topológico localmente compacto. Sea $\mathcal{H}$ un subgrupo cerrado y normal de $\mho$:

$$\mathcal{H} < \mho, \ \ \mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}} \ \ y \ \ \sigma\mathcal{H} = \mathcal{H}\sigma.$$

Sea $\mho/\mathcal{H}$ el correspondiente espacio homogéneo y sea f una función con valores en un campo $K(= \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$ definida en el grupo topológico $\mho$:

$$f : \mho \to K$$

constante en todos los elementos de cada clase $\sigma\mathcal{H} \, mod \mathcal{H}$ de $\mho$. Con ésta función podemos definir otra función f_1 en el espacio homogéneo $\mho/\mathcal{H}$ y con valores en K:

$$f_1 : \mho/\mathcal{H} \to K$$

por medio de la correspondencia

$$x \mapsto f_1(x) = f(\sigma),$$

donde $x = \varpi(\sigma)$. La función así definida satisface la condición : En cualquier otro punto de la misma clase toma el mismo valor.

Proposición 1.2.5 *Sea Sea $\mho$ un grupo topológico y Hausdorff. Sea $\mathcal{H}$ un subgrupo topológico cerrado y normal de $\mho$:*

$$\mathcal{H} < \mho, \ \ \mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}} \ \ y \ \ \sigma\mathcal{H} = \mathcal{H}\sigma.$$

Sea $\mho/\mathcal{H}$ su correspondiente espacio homogéneo. Sea Y un espacio topológico arbitrario. Sea

$$f : \mho \to Y$$

una aplicación constante en los elementos de las clases $\sigma\mathcal{H} \, mod \mathcal{H}$ de $\mho$ y sea la aplicación :

$$f_1 : \mho/\mathcal{H} \to Y$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto f_1(x) = f(\sigma),$$

donde $x = \varpi(\sigma) = \sigma\mathcal{H}$. Entonces, se satisfacen las propiedades siguientes propiedades :

i) *Si f es un mapeo continuo $\Longrightarrow$ f_1 es un mapeo continuo.*

ii) *Si f es un mapeo abierto $\Longrightarrow$ f_1 es un mapeo abierto.*

Demostración. En primer lugar, observemos que el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd}
\mho \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varpi"'] & & Y \\
& \mho/\mathcal{H} \arrow[ur, "f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo :

$$f = f_1 \circ \varpi.$$

En efecto, sea $\sigma \in \mho$ fijo pero arbitrario. Calculando :

$$f_1 \circ \varpi(\sigma) = f_1(\varpi(\sigma)) = f_1(x) = f(\sigma),$$

se obtiene

$$f_1 \circ \varpi(\sigma) = f(\sigma).$$

Como σ se eligió arbitrariamente en $\mho$, se tiene que, $f_1 \circ \varpi(\sigma) = f(\sigma) \, \forall \sigma \in \mho$, es decir,

$$f_1 \circ \varpi = f.$$

Así, la afirmación está demostrada.

Ahora, se demostrará que la aplicación f_1 es un mapeo continuo. Para tal efecto, sea U un conjunto abierto en el espacio Y: $U \subset Y$. Calculando la imagen inversa de U bajo f y haciendo uso del diagrama :

$$f^{-1}(U) = (f_1 \circ \varpi)^{-1}(U) = \varpi^{-1} \circ f_1^{-1}(U).$$

Por hipótesis el conjunto $f^{-1}(U)$, es un abierto en $\mho$: $f^{-1}(U) \subset \mho$ y como el mapeo canónico ϖ es un mapeo abierto, el conjunto $\varpi(f^{-1}(U))$, es un conjunto abierto en el espacio homogéneo $\mho/\mathcal{H}$:

$$\varpi \circ f^{-1}(U) \subset \mho/\mathcal{H},$$

y como

$$\varpi \circ f^{-1}(U) = \varpi(f^{-1}(U)) = \varpi(\varpi^{-1}(f_1^{-1}(U))) = f_1^{-1}(U),$$

se obtiene que,

$$\varpi^{-1}(f(U)) = f_1^{-1}(U).$$

Por consiguiente, $f_1^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en el espacio $\mho/\mathcal{H}$. Como U se eligió arbitrariamente en la familia de los abiertos del espacio Y, se tiene que f_1 es un mapeo continuo en $\mho/\mathcal{H}$. Así, la propiedad i) está demostrada.

Ahora, consideremos un conjunto abierto U fijo pero arbitrario del espacio homogéneo $\mho/\mathcal{H}$: $U \subset \mho/\mathcal{H}$. Como el mapeo natural ϖ es continuo, entonces el conjunto $\varpi^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en $\mho$: $\varpi^{-1}(U) \subset \mho$. Como la aplicación f es abierta, esto implica que

$$f(\varpi^{-1}(U))$$

es un abierto en $\mho/\mathcal{H}$:

$$f(\varpi^{-1}(U)) \subset \mho/\mathcal{H}.$$

Pero,

$$f \circ \varpi^{-1}(U) = f_1 \circ \varpi \circ \varpi^{-1}(U) = f_1(\varpi(\varpi^{-1}(U))) = f_1(U),$$

es decir, $f_1(U)$ es un abierto en el espacio topológico Y: $f_1(U) \subset Y$. Como U se eligió arbitrariamente en $\mho/\mathcal{H}$ se tiene que f_1 es abierta. Así, está demostrada la propiedad ii) y con ella la proposición.

1.3 Continuidad Uniforme

Teorema 1.3.1 LEMA DE URYSOHN *Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Sea A un subespacio compacto de X: $A \subset X$, y sea U un conjunto abierto del espacio X tal que $A \subset U$. Entonces existe* *una función f definida y continua en el espacio X con valores en el conjunto $[0,1]$:*

$$f : X \to [0,1]$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \in U^c \end{cases}$$

Lema 1.3.1 *Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Sean*

$$U_1, U_2, ..., U_n$$

n subconjuntos abiertos del espacio X, tal que

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_i = X.$$

Entonces existen n subconjuntos cerrados:

$$\overline{A}_1 = A_1,\ \overline{A}_2 = A_2, ..., \overline{A}_n = A_n$$

del espacio X, los cuales satisfacen las siguientes condiciones

i) $A_i \subset U_i$, *para cada,* $i = 1, 2, ..., n$

ii) $$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Demostración. Por inducción sobre n. Para $n = 1$, se tiene que $X = U_1$ el cual es un conjunto abierto y el lema es trivialmente valido.

Para $n = 2$, se tiene que, $X = U_1 \cup U_2$, donde U_1, U_2 son conjuntos abiertos, además

$$\emptyset = U_1^c \cap U_2^c.$$

La hipótesis implica que existen vecindades abiertas V_1 y V_2 de U_1^c y U_2^c respectivamente :

$$U_1^c \subset V_1,\ \ U_2^c \subset V_2,$$

tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Sí definimos $A_1 = V_1^c$, $A_2 = V_2^c$, entonces se tiene que:

i) $A_1 \subset U_1$, $A_2 \subset U_2$ y son cerrados: $\overline{A}_1 = A_1$, $\overline{A}_2 = A_2$.

ii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 = V_1^c \cup V_2^c = \emptyset^c = X$.

Así, está demostrado el lema para $n = 2$.

Supongamos que el lema es valido para $n = k-1$. Sea $X = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Como

$$X = (\bigcup_{i=1}^{k-1} U_i) \cup U_k,$$

reduce el problema para el caso $n = 2$ ya probado; se tienen que existen dos subconjuntos cerrados del espacio X: $\overline{A} = A$, $\overline{A}_k = A_k$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

i) $A \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} U_i, \quad A_k \subset U_k$.

ii) $X = A \cup A_k$.

Si concebimos al conjunto A como un subespacio del espacio X, entonces, los conjuntos $V_i = U_i \cap A$ para toda $i = 1, 2, ..., k-1$ son abiertos relativos del espacio A, tales que:

$$A = \bigcup_{i=1}^{k-1} V_i.$$

Por ser A un subespacio cerrado de un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff X, A deviene en un subespacio localmente compacto y Hausdorff. La hipótesis de inducción aplicada al subespacio A implica la existencia de $k-1$ cerrados relativos: $A_1, A_2, ..., A_{k-1}$ del espacio A tales que satisfacen las condiciones:

i) $A_i \subset U_i \ \forall \ i = 1, 2, ..., k-1$; $A_k \subset U_k$

ii) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \cup A_k = A \cup A_k = X$.

Así, está demostrado el lema para $n = k$ y ésto completa la demostración por inducción.

Teorema 1.3.2 TEOREMA DE LA PARTICIÓN DE LA UNIDAD. DIEUDONNÉ. *Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Sea F un conjunto cerrado de X:*

$$\overline{F} = F \subset X.$$

Sean

$$U_1,\ U_2, ..., U_n,$$

n conjuntos abiertos del espacio X, cuya union satisface la condición :

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Entonces existen n funciones h_i definidas y continuas sobre X con valores en el intervalo cerrado $[0,1]$:

$$h_i : X \to [0,1]$$

definida por las correspondencia

$$x \mapsto h_i(x)\ \ (1 \leq i \leq n)$$

Con las siguientes propiedades:

I) $$\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = 1, \text{ para todo, } x \in F.$$

II) $$h_i(U_i^c) = 0, \text{ para toda, } i = 1, 2, ..., n.$$

Demostración. La demostración se hace por casos :

CASO I. El conjunto cerrado F concide con el total: $F = X$.
Sean

$$U_1,\ U_2,\ ..., U_n,$$

n conjuntos abiertos del espacio X tales que

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_i = X.$$

esto significa que, la familia

$$\{U_i\}_{i=1}^{n}$$

es una cubierta abierta finita, ésto implica que es una cubierta abierta localmente-finita del espacio X.

Sean A_1, A_2,..., A_n, n conjuntos cerrados cuya existencia asegura el lema 1.3.1 con las propiedades :

i) $$A_i = \overline{A}_i \subset U_i \ (1 \leq i \leq n).$$

ii) $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X.$$

La propiedad i) significa que la familia :

$$\{A_i\}_{i=1}^{n}$$

es un refinamiento cerrado finito de la cubierta y, por lo tanto, es un refinamiento cerrado localmente finito del espacio X. Como X es localmente compacto y Hausdorff, X es completamente regular, lo cual implica que, X es regular. De acuerdo con el **Teorema de Michael** (Teorema 2.3 Capítulo VIII [2]), X deviene en un espacio paracompacto. De acuerdo con el (Teorema 2.2 Capítulo VIII [2]), todo espacio X paracompacto, es normal. Por lo tanto, en el presente caso : X **deviene en un espacio normal.**

Ahora, como A_i *y* U_i^c son conjuntos cerrados tales que

$$A_i \bigcap U_i^c = \emptyset \ \ 1 \leq i \leq n.$$

Se tienen satisfechas las hipótesis del **Teorema de la Caracterizacíon de Espacios Normales-Urysohn** (Teorema 4.1 Capitulo VII [2]). Por lo tanto, existen n funciones f_i definidas y continuas en X con valores en el intervalo cerrado [0,1]:

$$f_1, f_2, ..., f_n : X \rightarrow [0,1]$$

definidas por la correspondencia

$$f_i(x) = 1 \ \forall \ x \in A_i$$
$$f_i(x) = 0 \ \forall \ x \in U_i^c.$$

Consideremos ahora las funciones:

$$h_i : X \to [0,1]$$

definidas por la correspondencia

$$x \mapsto h_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Observemos que para cada indice i, las funciones h_i son continuas pues cada f_i lo és, además la suma es continua y mayor o igual que uno:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \implies \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \geq 1,$$

para todo, $x \in X$. Calculando ahora:

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)} = 1 \quad \forall\ x \in A_i.$

ii) $f_i(x) = 0, \ \forall\ x \in U_i^c \implies h_i(U_i^c) = 0 \ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n.$

En éste caso el teorema está demostrado.

CASO II. El conjunto cerrado F está contenido propiamente en el espacio X: $F \subset X$.
Sean

$$U_1, U_2, \ldots, U_n,$$

n subconjuntos abiertos del espacio X tal que

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Si definimos a $U_0 = F^c$, se tiene que U_0 es un conjunto abierto de X y además

$$F \cup F^c = (\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cup (U_0) = X,$$

en otras palabras todo se ha reducido al caso I, por consiguiente, existen funciones

$$h_0, h_1, ..., h_n$$

definidas y continuas en el espacio X, con valores en el intervalo cerrado $[0,1]$ y con las propiedades:

i) $$\sum_{i=0}^{n} h_i(x) = 1, \text{ para toda } x \in F.$$

ii) $$h_i(U_i^c) = 0, \text{ para toda } i = 0, 1, 2, ..., n.$$

Desde que $h_0(U_0^c) = h_0(F) = 0$, se tiene que :

i) $$\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = 1, \text{ para toda } x \in F.$$

ii) $$h_i(U_i^c) = 0, \text{ para toda } i = 1, 2, ..., n.$$

Así, en éste presente y último caso el teorema está demostrado.

Sea $\mathbb{C}$ el espacio metrico de los números complejos. La familia de bolas abiertas con centro en $z \in \mathbb{C}$ y radio $\frac{1}{n}$:

$$\mathcal{V} = \{B_{\frac{1}{n}}(z)\}_{n \in N}$$

es un sistema fundamental de vecindades del punto z, esto significa que dada una vecindad U de z, existe $B_{\frac{1}{n_0}}(z)$ tal que $z \in B_{\frac{1}{n_0}}(z) \subset U$.

Se sabe que un mapeo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es **uniformemente continuo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que la relación $|z - w| < \delta$ implica que** $|f(z) - f(w)| < \epsilon$.
Dicho en otras palabras: un mapeo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es **uniformemente continuo si para toda $B_\epsilon(0) \in \mathcal{V}$, existe $B_\delta(0) \in \mathcal{V}$ tal que para cada pareja $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ con $z - w \in B_\delta(0)$ implica que $f(z) - f(w) \in B_\epsilon(0)$**, donde $\mathcal{V}$ es el sistema fundamental de vecindades del punto $0 \in \mathbb{C}$.

Ahora, consideremos para cada $B_\rho(0) \in \mathcal{V}$ el conjunto:

$$U_{B_\rho(0)} = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : z - w \in B_\rho(0)\}.$$

En seguida consideremos la familia:

$$\xi(\mathbb{C}) = \{U_{B_\rho(0)}\}_{B_\rho(0) \in \mathcal{V}}.$$

Se dice que el mapeo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es **uniformemente continuo, si para cada** $B_\epsilon(0) \in \mathcal{V}$ **existe una** $B_\delta(0) \in \mathcal{V}$ **tal que para todo punto** $(z, w) \in U_{B_\delta(0)}$ **implica que** $(f(z), f(w)) \in U_{B_\epsilon(0)}$.

A la familia $\xi(\mathbb{C})$ se le llama : ESTRUCTURA UNIFORME DEL GRUPO TOPOLÓGICO ADITIVO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Dentro del mismo contexto, consideremos las siguientes definiciones:

Definición 1.3.1 *Sean $\mho$ y $\overline{\mho}$ dos grupos topológicos. Sean $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mho)$ y $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\overline{\mho})$ sistemas fundamentales de vecindades del elemento identidad de $e \in \mho$ y $\overline{e} \in \overline{\mho}$ respectivamente. Para cada elemento $V \in \mathcal{V}$, consideremos los conjuntos de parejas:*

$$I_V = \{(\sigma, \tau) \in \mho \times \mho : \sigma^{-1}\tau \in V\}$$

y

$$D_V = \{(\sigma, \tau) \in \mho \times \mho : \tau^{-1}\sigma \in V\}.$$

A las familias de conjuntos de parejas:

$$\xi_I(\mho) = \{I_V\}_{V \in \mathcal{V}}$$

y

$$\xi_D(\mho) = \{D_V\}_{V \in \mathcal{V}},$$

se les llaman
ESTRUCTURA UNIFORME IZQUIERDA Y DERECHA DEL GRUPO $\mho$.

Análogamente, para cada elemento $W \in \mathcal{W}$, consideremos los conjuntos de parejas:

$$I_W = \{(z, w) \in \overline{\mho} \times \overline{\mho} : z^{-1}w \in W\}$$

y

$$D_W = \{(z, w) \in \overline{\mho} \times \overline{\mho} : wz^{-1} \in W\}.$$

A las familias de conjuntos de parejas:

$$\xi_I(\overline{\mho}) = \{I_W\}_{W \in \mathcal{W}}$$

y

$$\xi_D(\overline{\mho}) = \{D_W\}_{W \in \mathcal{W}}$$

se les llaman
ESTRUCTURA UNIFORME IZQUIERDA Y DERECHA DEL GRUPO $\overline{\mho}$.

Definición 1.3.2 *Sean* $\mho$ *y* $\overline{\mho}$ *dos grupos topológicos, sean* $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mho)$ *y* $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\overline{\mho})$, *sistemas fundamentales de vecindades del elemento identidad* $e \in \mho$, $\bar{e} \in \overline{\mho}$ *y sean* $\xi_I(\mho)$ *y* $\xi_I(\overline{\mho})$ *sus correspondientes estructuras uniformes izquierdas (derechas). Se dirá que un mapeo* Ψ *de* $\mho$ *en* $\overline{\mho}$:

$$\Psi : \mho \to \overline{\mho}$$

es UNIFORMEMENTE CONTINUO *si para toda* $W \in \mathcal{W}$ *existe un elemento* $V \in \mathcal{V}$ *tal que para toda pareja*

$$(x, y) \in I_V,$$

implica que

$$(\Psi(x), \Psi(y)) \in I_W,$$

con respecto a las estructuras uniformes:

$$(\xi_I(\mho), \xi_I(\overline{\mho})) \text{ ó } (\xi_D(\mho), \xi_D(\overline{\mho}))$$

Teorema 1.3.3 *Sean* $\mho$ *y* $\overline{\mho}$ *dos grupos topológicos. Sea* Ψ *un mapeo continuo de* $\mho$ *en* $\overline{\mho}$:

$$\Psi : \mho \to \overline{\mho}$$

definido por la correspondencia

$$x \mapsto \Psi(x).$$

Si para cada elemento $W \in \mathcal{W}$ *existe un subconjunto compacto* A_W *de* $\mho$:

$$A_W \subset \mho \text{ tal que } \Psi(A_W^c) \subset W.$$

Entonces Ψ *es un mapeo uniformemente continuo con respecto a las parejas de estructuras uniformes:*

i) $(\xi_I(\mho), \xi_I(\overline{\mho}))$.

ii) $(\xi_I(\mho), \xi_D(\overline{\mho}))$.

iii) $(\xi_D(\mho), \xi_D(\overline{\mho}))$.

iv) $(\xi_D(\mho), \xi_I(\overline{\mho}))$.

Demostración. En primer lugar, se afirma que :
Para todo punto $x \in \mho$, existen vecindades del elemento identidad $e \in \mho$: $V_x, U_x \in \mathcal{V}$, tales que :

i) $$V_x V_x \subset U_x$$

ii) $$\Psi(xU_x) \subset (\ \Psi(x)V_1 \cap V_1\Psi(x)\ ),\ \text{para algún}\ V_1 \in \mathcal{W}.$$

En efecto, sea $x \in \mho$ un punto fijo pero arbitrario y sea $\Psi(x) \in \overline{\mho}$ el correspondiente punto imagen. Sea $W \in \mathcal{W}$, por el teorema 1.1.2 IV., existe $V_1 \in \mathcal{W}$, tal que, $V_1 V_1 \subset W$. Sean

$$\Psi(x)V_1,\ V_1\Psi(x)\ \ y\ \ (\ \Psi(x)V_1 \cap V_1\Psi(x)\ ),$$

vecindades del punto $\Psi(x) \in \overline{\mho}$. Sea xU_x una vecindad de $x \in \mho$: $x \in xU_x$, con $U_x \in \mathcal{V}$. Como Ψ es un mapeo continuo, esto implica que

$$\Psi(xU_x) \subset (\ \Psi(x)V_1 \cap V_1\Psi(x)\ ).$$

Así, ii) está demostrado.

Como $U_x \in \mathcal{V}$, por el teorema 1.1.2 IV., existe $V_x \in \mathcal{V}$, tal que

$$V_x V_x \subset U_x.$$

Así, i) está demostardo y con ella la afirmación.

Dada $W \in \mathcal{W}$, existe $V_1 \in \mathcal{W}$, tal que, $V_1 V_1 \subset W$. Sin perdida de generalidad, supongamos que V_1 y W son simetricas :

$$V_1^{-1} = V_1,\ W = W^{-1}.$$

Por hipótesis, existe un subconjunto compacto

$$A_{V_1} \subset \mho\ \ tal\ que\ \ \Psi(A_{V_1}^c) \subset V_1.$$

Consideremos la familia de los conjuntos abiertos :

$$\{xV_x\}_{x \in A_{V_1}},$$

la cual es una cubierta abierta de A_{V_1}, como A_{V_1} es compacto, existe una subcubierta abierta finita de A_{V_1} :

$$\exists\ x_1, ..., x_m \in A_{V_1}\ \ tal\ que\ \ A_{V_1} = \bigcup_{i=1}^{m} x_i V_{x_i},$$

con $V_{x_i} \in \mathcal{V}$ para cada $i = 1, 2, ...n$.

Se define
$$V = \bigcap_{i=1}^{m} V_{x_i}.$$
Se afirma que : sí la pareja
$$(x,y) \in I_V = \{(x,y) \in \mho \times \mho \ : \ x^{-1}y \in V\},$$
entonces la pareja
$$(\Psi(x),\Psi(y)) \in I_W = \{(\Psi(x),\Psi(y)) \in \overline{\mho} \times \overline{\mho} \ : \ \Psi^{-1}(x)\Psi(y) \in W\}.$$
En efecto, sea $(x,y) \in I_V$. Consideremos los siguientes casos:

CASO I. Sí
$$x \in A_{V_1} = \bigcup_{i=1}^{m} x_i V_{x_i} \implies x \in x_k V_{x_k}, \ \textit{para algún } k, \ k = 1, ..., m.$$
Así,
$$x \in x_k V_{x_k} = x_k V_{x_k} e \subset x_k V_{x_k} V_{x_k} \subset x_k U_{x_k},$$
i.e.
$$x \in x_k U_{x_k},$$
a la luz de la afirmación,
$$\Psi(x) \in \Psi(x_k U_{x_k}) \subset (\ \Psi(x_k) V_1 \cap V_1 \Psi(x_k)\ ),$$
i.e.
$$\Psi(x) \in \Psi(x_k) V_1 \implies \Psi^{-1}(x_k)\Psi(x) \in V_1.$$
Como $V_1 = V_1^{-1}$, entonces
$$\Psi^{-1}(x)\Psi(x_k) \in V_1.$$

Por hipótesis, $(x,y) \in I_V$, por definición $x^{-1}y \in V$, entonces
$$y \in xV \subset x_k V_{x_k} V \subset x_k V_{x_k} V_{x_k} \subset x_k U_{x_k},$$
ésto implica que
$$y \in x_k V_{x_k} V_{x_k} \subset x_k U_{x_k},$$

i.e.
$$y \in x_k U_{x_k} \implies \Psi(y) \in \Psi(x_k U_{x_k}) \subset (\Psi(x_k)V_1 \cap V_1\Psi(x_k)),$$
lo cual implica que
$$\Psi(y) \in \Psi(x_k)V_1 \implies \Psi^{-1}(x_k)\Psi(y) \in V_1.$$
Por lo que precede,
$$\Psi^{-1}(x)\Psi(x_k)\Psi^{-1}(x_k)\Psi(y) \in V_1V_1,$$
i.e.
$$\Psi^{-1}(x)\bar{e}\Psi(y) \in V_1V_1 \subset W,$$
lo cual implica que
$$\Psi^{-1}(x)\Psi(y) \in W.$$
Por definición, $(\Psi^{-1}(x), \Psi(y)) \in I_W$. Así, en el presente caso la afirmación está demostrada y por la definición 1.3.2, Ψ deviene en un mapeo uniformemente continuo.

CASO II. Sí
$$y \in A_{V_1} = \bigcup_{i=1}^{m} x_i V_{x_i} \implies y \in x_k V_{x_k},\ \textit{para algún } k,\ k = 1, ..., m.$$
Así,
$$y \in x_k V_{x_k} = x_k V_{x_k} e \subset x_k V_{x_k} V_{x_k} \subset x_k U_{x_k},$$
i.e.
$$y \in x_k U_{x_k},$$
a la luz de la afirmación,
$$\Psi(y) \in \Psi(x_k U_{x_k}) \subset (\ \Psi(x_k)V_1 \cap V_1\Psi(x_k)\ ),$$
i.e.
$$\Psi(y) \in \Psi(x_k)V_1 \implies \Psi^{-1}(x_k)\Psi(y) \in V_1.$$
Como $V_1 = V_1^{-1}$, entonces
$$\Psi^{-1}(y)\Psi(x_k) \in V_1.$$

Sí

$$x \in V = \bigcap_{i=1}^{m} V_{x_i}, \implies x \in x_k V_{x_k} = x_k V_{x_k} e \subset x_k V_{x_k} V_{x_k} \subset x_k U_{x_k},$$

i.e.

$$x \in x_k U_{x_k},$$

a la luz de la afirmación,

$$\Psi(x) \in \Psi(x_k U_{x_k}) \subset (\ \Psi(x_k)V_1 \cap V_1 \Psi(x_k)\ ),$$

i.e.

$$\Psi(x) \in \Psi(x_k)V_1 \implies \Psi^{-1}(x_k)\Psi(x) \in V_1.$$

Por lo que precede,

$$\Psi^{-1}(y)\Psi(x_k)\Psi^{-1}(x_k)\Psi(x) \in V_1 V_1$$

i.e.

$$\Psi^{-1}(y)\Psi(x) \in V_1 V_1 \subset W \implies \Psi^{-1}(y)\Psi(x) \in W.$$

Como $W = W^{-1}$, entonces

$$\Psi^{-1}(x)\Psi(y) \in W,$$

Por definición, $(\Psi(x), \Psi(y)) \in I_W$. Así, en el presente caso la afirmación está demostrada y por la definición 1.3.2, Ψ deviene en un mapeo uniformemente continuo.

CASO III. Sí

$$x \notin A_{V_1},\ \ y \notin A_{V_1} \implies x \in A^c_{V_1},\ y \in A^c_{V_1}.$$

Esto implica que

$$\Psi(x) \in \Psi(A^c_{V_1}) \subset V_1, \quad \Psi(y) \in \Psi(A^c_{V_1}) \subset V_1,$$

i.e.

$$\Psi(x) \in V_1, \quad \Psi(y) \in V_1.$$

Sí

$$\Psi(x) \in V_1 \implies \Psi^{-1}(x) \in V_1,$$

por lo que precede
$$\Psi^{-1}(x)\Psi(y) \in V_1V_1 \subset W,$$
i.e.
$$\Psi^{-1}(x)\Psi(y) \in W.$$
Por definición, $(\Psi(x), \Psi(y)) \in I_W$. Así, en el presente y último caso, la afirmación está demostrada y con ella la propiedad i) del teorema.

CASO I. Supongamos que
$$x \in A_{V_1} = \bigcup_{i=1}^{m} x_iV_{x_i} \implies x \in x_kV_{x_k}, \ \textit{para algún} \ k = 1, 2, ..., m.$$
Así,
$$x \in x_kV_{x_k} = x_kV_{x_k}e \subset x_kV_{x_k}V_{x_k} \subset x_kU_{x_k},$$
i.e.
$$x \in x_kU_{x_k}, \implies \Psi(x) \in \Psi(x_kU_{x_k}) \subset (\Psi(x_k)V_1 \cap V_1\Psi(x_k)),$$
i.e.
$$\Psi(x) \in V_1\Psi(x_k) \implies \Psi(x)\Psi^{-1}(x_k) \in V_1.$$
Como $V_1 = V_1^{-1}$, entonces,
$$\Psi(x_k)\Psi(x)^{-1} \in V_1.$$

Por hipótesis, la pareja $(x, y) \in I_V$, por definición $x^{-1}y \in V$, entonces,
$$y \in xV \subset x_kV_{x_k} \subset x_kV_{x_k}e \subset x_kV_{x_k}V_{x_k} \subset x_kU_{x_k},$$
i.e.
$$y \in x_kU_{x_k} \implies \Psi(y) \in \Psi(x_kU_{x_k}) \subset (\ \Psi(x_k)V_1 \cap V_1\Psi(x_k)\ ),$$
i.e.
$$\Psi(y) \in V_1\Psi(x_k) \implies \Psi(y)\Psi^{-1}(x_k) \in V_1.$$
Por lo que precede,
$$\Psi(y)\Psi^{-1}(x_k)\Psi(x_k)\Psi^{-1}(x) \in V_1V_1,$$
i.e.
$$\Psi(y)\Psi^{-1}(x) \in V_1V_1 \subset W,$$
i.e.
$$\Psi(y)\Psi^{-1}(x) \in W.$$

Por definición, la pareja $(\Psi(x), \Psi(y)) \in D_W$. Así, en el presente caso la afirmación esta demostrada y por definición Ψ deviene en un mapeo uniformemente continuo.

CASO II. Sí

$$y \in A_{V_1} \implies y \in x_k V_{x_k}, \ \ para\ algún\ \ k = 1, 2, ..., m.$$

esto implica que,

$$y \in x_k V_{x_k} = x_k V_{x_k} e \subset x_k V_{x_k} V_{x_k} \subset x_k U_{x_k},$$

i.e.

$$y \in x_k U_{x_k} \implies \Psi(y) \in \Psi(x_k U_{x_k}) \subset (\ \Psi(x_k) V_1 \cap V_1 \Psi(x_k)\ ),$$

i.e.

$$\Psi(y) \in V_1 \Psi(x_k),$$

esto implica que

$$\Psi(y)\Psi^{-1}(x_k) \in V_1.$$

Como

$$x \in V \implies x \in x_k V_{x_k} = x_k V_{x_k} e \subset x_k V_{x_k} V_{x_k} \subset x_k U_{x_k}$$

i.e.

$$x \in x_k U_{x_k} \implies \Psi(x) \in \Psi(x_k U_{x_k}) \subset (\ \Psi(x_k) V_1 \cap V_1 \Psi(x_k)\ ),$$

i.e.

$$\Psi(x) \in V_1 \Psi(x_k) \implies \Psi(x)\Psi^{-1}(x_k) \in V_1.$$

Como

$$V_1 = V_1^{-1} \implies \Psi(x_k)\Psi^{-1}(x) \in V_1.$$

Por lo que precede,

$$\Psi(y)\Psi^{-1}(x_k)\Psi(x_k)\Psi^{-1}(x) \in V_1 V_1,$$

o bien

$$\Psi(y)\Psi^{-1}(x) \in V_1 V_1 \subset W,$$

Como

$$W = W^{-1} \implies \Psi(y)\Psi^{-1}(x) \in W.$$

Por definición, la pareja $(\Psi(x), \Psi(x)) \in D_W$. Así, en el presente caso la afirmación esta demostrada y por definición Ψ deviene en un mapeo uniformemente continuo.

CASO III. Supongamos que

$$x \notin A_{V_1}, \; y \notin A_{V_1} \implies x \in A^c_{V_1}, \; y \in A^c_{V_1}.$$

Por hipótesis,

$$\Psi(x) \in \Psi(A^c_{V_1}) \subset V_1, \;\; \Psi(y) \in A^c_{V_1} \subset V_1,$$

i.e.

$$\Psi(x) \in V_1, \;\; \Psi(y) \in V_1.$$

Como

$$V_1 = V_1^{-1} \implies \Psi^{-1}(x) \in V_1,$$

por lo tanto,

$$\Psi(y)\Psi^{-1}(x) \in V_1 V_1 \subset W,$$

i.e.

$$\Psi(y)\Psi^{-1}(x) \in W.$$

Por definición, la pareja $(\Psi(x), \Psi(y)) \in D_W$. Así, en el presente y último caso la afirmación esta demostrada y por definición Ψ deviene en un mapeo uniformemente continuo. Así, está demostrada la propiedad ii) del teorema.

Las demás propiedades se demuestran análogamente. Así, el teorema está demostrado.

Para terminar con éste primer capítulo, demostraremos el último teorema cuyas aplicaciones se verán en el proximo capítulo :

Teorema 1.3.4 *Sea $\mho$ un grupo topológico arbitrario, $\mathbb{C}$ el grupo topológico aditivo de los números complejos y f una función continua definida sobre $\mho$ con valores en $\mathbb{C}$ con soporte compacto :*

$$f : \mho \to \mathbb{C}$$

Entonces, f es una función uniformemente continua.

Demostración. Sea $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mho)$ un sistema fundamental de vecindades del elemento identidad $e \in \mho$. Consideremos el siguiente sistema fundamental de vecindades del elemento identidad $0 \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(C) = \{B_{1/n}(0)\}_{n \in N}.$$

Como, para cada vecindad $W = B_{1/n}(0) \in \mathcal{W}$, existe un conjunto compacto contenido en $\mho$, a saber :

$$A_W = Sop(f) = \overline{\{x \in \mho : f(x) \neq 0\}} \subset \mho$$

con la propiedad de que

$$f(A^c_W) = f((Sop(f))^c) = 0.$$

y como $0 \in W$, esto implica que, $f(A^c_W) \subset W$. Así, están satisfechas las hipótesis del teorema 1.3.2 y por lo tanto la función f deviene en un mapeo uniformemente continuo.

Capítulo 2

LA INTEGRAL DE HAAR

2.1 Existencia

Este segundo capítulo inicia con algunas definiciones :

Definición 2.1.1 *Sea G un grupo arbitrario. Sea E un conjunto arbitrario distinito del vacio : $E \neq \emptyset$ y sea f una aplicación con dominio en el grupo G y rango contenido en el conjunto E :*

$$f : G \to E$$

Consideremos un elemento $\sigma \in \mho$ fijo y la aplicación ${}_\sigma f$ definida en G y con rango en E :

$${}_\sigma f : G \to E$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto {}_\sigma f(x) = {}_\sigma f(x) = f(\sigma x).$$

A la aplicación ${}_\sigma f$ se le llama La Traslación Izquierda de f por σ. *Análogamente; la aplicación*

$$f_\sigma : G \to E$$

definida por la coprrespondencia

$$x \mapsto f_\sigma(x) = f(x\sigma)$$

se le llama La Traslación Derecha de f por σ.

Además, consideremos la aplicación $f^\star$ *definida en* G *y con rango contenido en* E *:*

$$f^\star : G \to E$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto f^\star(x) = f(x^{-1})$$

llamada LA APLICACION INVERSIÓN. *Es obvio que, la traslacion izquierda, derecha y la aplicación inversión :*

$${}_\sigma f, \quad f_\sigma \quad y \quad f^\star$$

están bien definidas, para cada, $\sigma \in \mho$ *fijo.*

Establecidas estas definiciones, ahora, enunciaremos el TEOREMA FUNDAMENTAL SOBRE FUNCIONALES INVARIANTES

Teorema 2.1.1 *Sea* $\mho$ *un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff. Entonces existe una funcional* I *definida sobre* $C_c^+(\mho)$ *:*

$$I : C_c^+(\mho) \to I\!R^+ = \{\alpha \in I\!R \ : \ \alpha \geq 0\}$$

satisfaciendo las siguientes condiciones :

$$\begin{aligned} I(f) &> 0 \ si \ f > 0, \ f \in C_c^+(\mho) &\quad (2.1)\\ I(f_1 + f_2) &= I(f_1) + I(f_2), \ \forall \ f_1, f_2 \in C_c^+(\mho) &\quad (2.2)\\ I(\alpha f) &= \alpha I(f), \ \forall \ \alpha \in I\!R^+, \ f \in C_c^+(\mho) &\quad (2.3)\\ I({}_\sigma f) &= I(f), \ \forall \ \sigma \in \mho, \ f \in C_c^+(\mho) &\quad (2.4) \end{aligned}$$

Además : Si existe otra funcional

$$J : C_c^+(\mho) \to I\!R^+$$

satisfaciendo i), ii), iii), iv); distinta de cero : $J \neq 0$ *; entonces existe un número real y positivo* $c > 0$ *tal que*

$$J = cI$$

Observese que con todo rigor I no es una funcional lineal, puesto que no está definida sobre un espacio vectorial, sin embargo, las propiedades nos colocan tan cerca como es posible de la linealidad deseada para I.

Demostración. Esta se inicia con dos familias de sucesiones finitas, a saber :

$$\Delta = \{\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \,:\, \sigma_i \in \mathfrak{U},\, 1 \leq i \leq m \;\forall\; m \in \mathbb{N}\}$$

$$\Lambda = \{\tilde{c} = (c_1, \ldots, c_m) \,:\, c_i \in \mathbb{R}^+,\; 1 \leq i \leq m \;\forall\; m \in \mathbb{N}\}$$

y para todo par de funciones positivas y continuas con soporte compacto definidas sobre $\mathfrak{U}$:

$$f,\; \varphi \in C_c^+(\mathfrak{U}) \; con \; \varphi > 0$$

se definen los siguientes conjuntos :

$$S_{f,\varphi} = \{(\tilde{\sigma}, \tilde{c}) \in \Delta \times \Lambda \,:\, f(x) \leq c_1 \,{}_{\sigma_1}\varphi(x) + \cdots + c_m \,{}_{\sigma_m}\varphi(x)\}$$

$$S_{f,\varphi}(\Lambda) = \{\tilde{c} \in \Lambda \,:\, (\tilde{\sigma}, \tilde{c}) \in S_{f,\varphi} \; para \;\; alguna \;\; \tilde{\sigma} \in \Delta\}$$

cuyas propiedades están expresadas en el siguiente lema :

Lema 2.1.1 *Las propiedades de los conjuntos* $S_{f,\varphi}(\Lambda)$ *y* $S_{f,\varphi}$ *son :*

$$\begin{aligned} S_{\sigma f,\varphi}(\Lambda) &= S_{f,\varphi}(\Lambda) \;\forall\; \sigma \in \mathfrak{U}, f \in C_c^+(\mathfrak{U}) & (2.5)\\ S_{\alpha f,\varphi}(\Lambda) &= S_{f,\varphi}(\Lambda) \;\forall\; \alpha \in \mathbb{R}^+, f \in C_c^+(\mathfrak{U}) & (2.6)\\ S_{f_2,\varphi}(\Lambda) &\subset S_{f_1,\varphi}(\Lambda) \;\; si \;\; f_1 \leq f_2; f_1, f_2 \in C_c^+(\mathfrak{U}) & (2.7)\\ S_{f,\varphi}(\Lambda) &\neq \emptyset & (2.8) \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\tilde{c} = (c_1, \ldots, c_m) \in S_{f,\varphi}(\Lambda)$, $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in \Delta$ tal que

$$(\tilde{\sigma}, \tilde{c}) \in S_{f,\varphi}(\Lambda),$$

es decir,

$$f(x) \leq c_1 \,{}_{\sigma_1}\varphi(x) + \cdots + c_m \,{}_{\sigma_m}\varphi(x), \;\; \forall\; x \in \mathfrak{U}$$

en particular, para $\sigma x \in \mathfrak{U}$, se tiene,

$$\begin{aligned} f(\sigma x) &\leq c_1 \,{}_{\sigma_1}\varphi(\sigma x) + \cdots + c_m \,{}_{\sigma_m}\varphi(\sigma x)\\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i \,{}_{\sigma\,\sigma_i}\varphi(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m} c_i \; {}_{\sigma\sigma_i}\varphi(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i \; {}_{\sigma_i'}\varphi(x).
\end{aligned}
$$

Es decir, si $\sigma_i' = \sigma\sigma_i$, entonces

$$
{}_\sigma f(x) \leq c_1 \; {}_{\sigma_i'}\varphi(x) + \cdots + c_m \; {}_{\sigma_m'}\varphi(x)
$$

para toda $x \in \mho$. En otras palabras,

$$
\tilde{c} = (c_1, \ldots, c_m) \in S_{{}_\sigma f, \varphi}(\Lambda)
$$

lo cual demuestra que

$$
S_{f,\varphi}(\Lambda) \subset S_{{}_\sigma f,\varphi}(\Lambda)
$$

Reciprocamente. Supongamos que

$$
\tilde{c} = (c_1, \ldots, c_m) \in S_{{}_\sigma f,\varphi}(\Lambda).
$$

Como antes,

$$
{}_\sigma f(x) \leq c_1 \; {}_{\sigma_1}\varphi(x) + \cdots + c_m \; {}_{\sigma_m}\varphi(x), \; x \in \mho
$$

en particular, para $\sigma^{-1}x \in \mho$, se tiene,

$$
{}_\sigma f(\sigma^{-1}x) \leq c_1 \; {}_{\sigma_1}\varphi(\sigma^{-1}x) + \cdots + c_m \; {}_{\sigma_m}\varphi(\sigma^{-1}x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \; {}_{\sigma_i'}\varphi(x),
$$

es decir, si $\sigma_i' = \sigma_m\sigma^{-1}$, entonces

$$
f(x) \leq c_1 \; {}_{\sigma_1'}\varphi(x) + \cdots + c_m \; {}_{\sigma_m'}\varphi(x), \; x \in \mho.
$$

En otras palabras,

$$
\tilde{c} = (c_1, \ldots, c_m) \in S_{f,\varphi}(\Lambda)
$$

lo cual demustra que

$$
S_{{}_\sigma f,\varphi}(\Lambda) \subset S_{f,\varphi}(\Lambda).
$$

Por lo que precede,

$$
S_{{}_\sigma f,\varphi}(\Lambda) = S_{f,\varphi}(\Lambda).
$$

Así, la propiedad 2.5 está demostrada.

Para demostrar la propiedad 2.6, consideremos un elemento $\tilde{c} \in S_{\alpha f,\varphi}(\Lambda)$, con $\alpha \in I\!R^+$ fijo pero arbitrario :

$$\tilde{c} = (c_1, \ldots, c_m) \in S_{\alpha f,\varphi}(\Lambda),$$

como por definición,

$$\alpha f(x) \leq c_1 \,{}_{\sigma_1}\varphi(x) + \cdots + c_m \,{}_{\sigma_m}\varphi(x), \ \forall\, x \in \mho$$

si y sólo si

$$f(x) \leq \alpha^{-1} c_1 \,{}_{\sigma_1}\varphi(x) + \cdots + \alpha^{-1} c_m \,{}_{\sigma_m}\varphi(x), \ \forall \ \ x \in \mho$$

si y sólo si

$$\alpha^{-1}\tilde{c} = (\alpha^{-1}c_1, \ldots, \alpha^{-1}c_m) \in S_{f,\varphi}(\Lambda)$$

Así, la propiedad 2.6 está demostrada.

Para demostrar la propiedad 2.7 se considera un elemento $\tilde{c}$ de $S_{f_2,\varphi}(\Lambda)$ fijo pero arbitrario :

$$\tilde{c} = (c_1, \ldots, c_m) \in S_{f_2,\varphi}(\Lambda)$$

donde,

$$f_1, \ f_2 \in C_c^+(\mho) \ \ y \ \ f_1 \leq f_2.$$

Por definición de $S_{f_2,\varphi}(\Lambda)$, existe, $\tilde{\sigma} \in \Delta$ tal que, $(\tilde{\sigma}, \tilde{c}) \in S_{f_2,\varphi}$ y con la propiedad

$$f_2(x) \leq c_1 \,{}_{\sigma_1}\varphi(x) + \cdots + c_m \,{}_{\sigma_m}\varphi(x) \ \ \forall \ \ x \in \mho$$

Como $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in \mho$, entonces

$$f_1(x) \leq c_1 \,{}_{\sigma_1}\varphi(x) + \cdots + c_m \,{}_{\sigma_m}\varphi(x) \ \ \forall \ \ x \in \mho,$$

por definición,

$$(\tilde{\sigma}, \tilde{c}) \in S_{f_1,\varphi},$$

es decir,

$$\exists\, \tilde{\sigma} \in \Delta \ \ tal\ que \ \ (\tilde{\sigma}, \tilde{c}) \in S_{f_1,\varphi}.$$

Por definición,

$$\tilde{c} \in S_{f_1,\varphi}(\Lambda).$$

Por lo tanto,

$$S_{f_2,\varphi}(\Lambda) \subset S_{f_1,\varphi}.$$

Así, la propiedad 2.7 está demostrada.

Para demostrar la propiedad 2.8, observemos en primer lugar que la hipótesis $\varphi > 0$ implica la existencia de por lo menos un punto $\sigma_0 \in \mho$, tal que

$$\varphi(\sigma_0) > 0.$$

Si ahora elegimos un número real $\epsilon > 0$, con la propiedad

$$0 < \epsilon < \varphi(\sigma_0),$$

y si tomamos en cuenta que $\varphi \in C_c^+(\mho)$, el conjunto

$$U = \{x \in \mho : \varphi(x) > \epsilon\} = \varphi^{-1}[(\epsilon, \infty)]$$

es un conjunto abierto de $\mho$, que contiene al elemento $\sigma_0 : \sigma_0 \in U$; por tanto el elemento identidad $e \in \mho$ está contenido en el abierto $\sigma_0^{-1}U$:

$$e \in \sigma_0^{-1}U.$$

Por otro lado, como $\mho$ es un grupo topólogico localmente compacto, existe una vecindad V del elemento identidad $e \in \mho$, cuya cerradura $\overline{V}$ está contenida en el abierto $\sigma_0^{-1}U$:

$$e \in V \subset \overline{V} \subset \sigma_0^{-1}U.$$

Además, como $\sigma_0 V \subset U$ se tiene que

$$0 < \epsilon < \varphi(\sigma_0 v) \ \forall\ v \in V,$$

por consiguiente, el ínfimo :

$$\mu = \inf_{v \in V}\{\ \varphi(\sigma_0 v)\ \}$$

tiene la propiedad de que

$$0 < \mu \leq \varphi(x),\ \forall\ x \in \sigma_0 V.$$

Como soporte de f : $Sop(f) = F$ es un conjunto compacto, existe una cubierta abierta finita, a saber,

$$F \subset \sigma_1 V \cup \sigma_2 V \cup \cdots \cup \sigma_m V,$$

con $\sigma_i \in F$, $(1 \leq i \leq m)$. Por definición, si $x \notin F$ entonces $f(x) = 0$ y si

$$x \in F \subset \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i V,$$

en este caso existe un indice $1 \leq i_0 \leq m$ tal que si

$$x \in \sigma_{i_0} V \implies \sigma_0 \sigma_{i_0}^{-1} x \in \sigma_0 V \subset U,$$

lo cual implica que se tenga,

$$\varphi(\sigma_0 \sigma_{i_0}^{-1} x) \geq \mu \ \forall \ \ \sigma_0 \sigma_{i_0}^{-1} x \in \sigma_0 V$$

y como $\varphi > 0$ se puede escribir,

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(\sigma_0 \sigma_{i_0}^{-1} x) \geq \mu$$

y también como,

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\| f \|}{\mu} \, {}_{\sigma_i}\varphi(x) \geq \| f \| \quad \forall \ x \in \mho,$$

donde, $\sigma_i = \sigma_0 \sigma_{i_0}^{-1}$, $(1 \leq i \leq m)$. Si en seguida se define

$$c_i = \frac{\| f \|}{\mu}, \ (1 \leq i \leq m)$$

y como $f(x) \leq \| f \|$ para toda $x \in \mho$, se obtiene

$$A) \qquad f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \, {}_{\sigma_i}\varphi(x), \ \forall \ \ x \in \mho.$$

Por consiguiente,

$$(\tilde{\sigma}, \tilde{c}) \in S_{f,\varphi},$$

es decir,

$$\tilde{c} \in S_{f,\varphi}(\Lambda),$$

y por lo tanto,

$$S_{f,\varphi}(\Lambda) \neq \emptyset.$$

Y así la propiedad 2.8 está demostrada, y con ésta se termina la demostración del lema.

El lema precedente permite definir para todo par de funciones

$$f,\ \varphi \in C_c^+(\mho)\ con\ \varphi > 0$$

el número real

$$(f:\varphi) = \inf_{\tilde{c}=(c_1,\ldots,c_m)\in S_{f,\varphi}(\Lambda)} \{ \sum_{i=1}^{m} c_i \}$$

cuyas propiedades estan expresadas en el siguiente lema :

Lema 2.1.2 *Para cada* $\sigma \in \mho$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $f,\ f_1,\ f_2,\ \varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2 \in C_c^+(\mho)$, *el número real* $(f:\varphi)$ *satiface las siguientes propiedades :*

$$\begin{aligned}
(f:\varphi) &> 0\ f \neq 0. && (2.9)\\
({}_\sigma f:\varphi) &= (f:\varphi). && (2.10)\\
(\alpha f:\varphi) &= \alpha(f:\varphi). && (2.11)\\
(f_1:\varphi) &\leq (f_2:\varphi),\ si\ f_1 \leq f_2. && (2.12)\\
(f_1+f_2:\varphi) &\leq (f_1:\varphi)+(f_2:\varphi). && (2.13)\\
(f:\varphi_2) &\leq (f:\varphi_1)(\varphi_1:\varphi_2)\ si\ \varphi_1 > 0\ y\ \varphi_2 > 0. && (2.14)
\end{aligned}$$

Demostración. Sea

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \in \{ \sum_{i=1}^{m} c_i : \tilde{c} = (c_1,\ldots,c_m) \in S_{f,\varphi}(\Lambda) \}$$

fijo pero arbitrario; por tanto

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\ {}_{\sigma_i}\varphi(x)\ \forall\ x \in \mho.$$

Como $f \in C_c^+(\mho)$ existe un punto $\sigma_0 \in \mho$ tal que $\| f \| = f(\sigma_0)$ y como en particular

$$f(\sigma_0) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\ {}_{\sigma_i}\varphi(\sigma_0)$$

lo cual permite escribir,

$$1) \qquad \| f \| \leq (\sum_{i=1}^{m} c_i) \| \varphi \|$$

La hipótesis $\varphi \neq 0$ implica $\| \varphi \| > 0$, y como en la demostración de la propiedad 2.8 del lema 2.1.1, la desigualdad A afirma que el número real $(f : \varphi)$ no exede al número $\frac{m\|f\|}{\mu}$:

$$2) \qquad (f : \varphi) \leq \frac{m \| f \|}{\mu}$$

1) y 2) implican

$$0 < \frac{\| f \|}{\| \varphi \|} \leq (f : \varphi) \leq \frac{m \| f \|}{\mu}.$$

Y así la propiedad 2.9 está demostrada.

La propiedad 2.10, es consecuencia inmediata de la propiedad 2.5. En efecto,

$$({}_{\sigma}f : \varphi) = \inf_{\bar{c} \in S_{\sigma f, \varphi}(\Lambda)} \{ \sum_{i=1}^{m} c_i \} = \inf_{\bar{c} \in S_{f, \varphi}(\Lambda)} \{ \sum_{i=1}^{m} c_i \} = (f : \varphi).$$

Y así la propiedad 2.10 está demostrada.

La propiedad 2.11, es consecuencia inmediata de la propiedad 2.6. En efecto,

$$(\alpha f : \varphi) = \inf_{\bar{c} \in S_{\alpha f, \varphi}(\Lambda)} \{ \sum_{i=1}^{m} c_i \} = \inf_{\bar{c} \in \alpha S_{f, \varphi}(\Lambda)} \{ \sum_{i=1}^{m} c_i \} = \alpha \inf_{\bar{c}' \in S_{f, \varphi}(\Lambda)} \{ \sum_{i=1}^{m} c_i' \} = \alpha (f : \varphi).$$

Si $\alpha = 0$ la propiedad 2.11 se verifica trivialmente.

La propiedad 2.12, es consecuencia inmediata de la propiedad 2.7. En efecto, si $f_1 \leq f_2$, se tiene que,

$$S_{f_2, \varphi} \subset S_{f_1, \varphi},$$

lo cual implica que el conjunto,

$$\{ \sum_{i=1}^{m} c_i \ : \ \bar{c} = (c_1, ... c_m) \in S_{f_2, \varphi}(\Lambda) \},$$

está contenido en el conjunto,

$$\{ \sum_{i=1}^{m} c_i' \ : \ \vec{c}' = (c_1', ...c_m') \in S_{f_1,\varphi}(\Lambda \ \},$$

es decir,

$$\{\sum_{\substack{i=1 \\ \vec{c}\in S_{f_2,\varphi}(\Lambda)}}^{m} c_i\} \subset \{\sum_{\substack{i=1 \\ \vec{c}'\in S_{f_1,\varphi}(\Lambda)}}^{m} c_i'\} \ .$$

Por consiguiente,

$$(f_1 : \varphi) = \inf \{ \sum_{\substack{i=1 \\ \vec{c}'\in S_{f_1,\varphi}(\Lambda)}}^{m} c_i' \} \leq \inf \{ \sum_{\substack{i=1 \\ \vec{c}\in S_{f_2,\varphi}(\Lambda)}}^{m} c_i \} = (f_2 : \varphi)$$

Y así la propiedad 2.12 está demostrada.

Para demostrar 2.13, se considera una $\epsilon > 0$ arbitraria y si se toma en cuenta la definición del número real

$$(f : \varphi)$$

entonces existen elementos,

$$\vec{c}^{(i)} = (c_1^{(i)}, ..., c_m^{(i)}) \in S_{f_i,\varphi}(\Lambda), \ (1 \leq i \leq 2)$$

tales que

$$\sum_{j=1}^{m_i} c_j^{(i)} < (f_i : \varphi) + \frac{\epsilon}{2}$$

de tal suerte que, para toda $x \in \mho$,

$$f_i(x) \leq \sum c_j^{(i)} \ {}_{\sigma_j}\varphi(x).$$

Si definimos

$$c_j = c_j^{(1)}, \quad \sigma_j = \sigma_j^{(1)}, \ 1 \leq j \leq m_1$$

$$c_{m_1+j} = c_j^{(2)}, \quad \sigma_{m_1+j} = \sigma_j^{(2)}, \ 1 \leq j \leq m_2$$

si $m = m_1 + m_2$, entonces podemos escribir para todo $x \in \mho$:

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)\le\sum_{j=1}^{m_1}c_j^{(1)}\;{}_{\sigma_j^{(1)}}\varphi(x)+\sum_{j=1}^{m_2}c_j^{(2)}\;{}_{\sigma_j^{(2)}}\varphi(x),$$

por lo tanto,

$$(f_1+f_2)(x)\le\sum_{j=1}^{m}c_j\;{}_{\sigma_j}\varphi(x),$$

lo cual implica,

$$(f_1+f_2:\varphi)\le\sum_{j=1}^{m}c_j=\sum_{j=1}^{m_1}c_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{m_2}c_j^{(2)},$$

esto último a su vez implica,

$$(f_1+f_2:\varphi)<(f_1:\varphi)+(f_2:\varphi)+\epsilon$$

y como $\epsilon>0$ se eligió arbitrariamente, se tiene que,

$$(f_1+f_2:\varphi)\le(f_1:\varphi)+(f_2:\varphi).$$

Y así la propiedad 2.13 está demostrada.

Para demostrar la propiedad 2.14, se consideran los elementos

$$\bar{c}=(c_1,\dots,c_m)\in S_{f,\varphi_1}(\Lambda),\;\; \bar{d}=(d_1,\dots,d_m)\in S_{\varphi_1,\varphi_2}(\Lambda),$$

y se tiene que,

$$f(x)\le\sum_{i=1}^{m}c_i\;{}_{\sigma_i}\varphi_1(x),\;\forall\,x\in\mho$$

y

$$\varphi_1(x)\le\sum_{j=1}^{n}d_j\;{}_{\tau_j}\varphi_2(x),\;\forall\,x\in\mho.$$

Si escribimos y calculamos,

$$f(x)\le\sum_{i=1}^{m}c_i\;{}_{\sigma_i}\Big(\sum_{j=1}^{m}d_j\;{}_{\tau_j}\varphi_2(x)\Big)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{m,n}c_id_j\;{}_{\sigma_i\tau_j}\varphi_2(x)$$

obtenemos,

$$(f:\varphi_2)\leq \sum_{i,j=1}^{m,n} c_i d_j = (\sum_{i=1}^{m} c_i)(\sum_{j=1}^{n} d_j),$$

lo cual implica que,

$$(f:\varphi_2)\leq (\inf_{\bar{c}\in S_{f,\varphi_1}(\Lambda)}\{\sum_{i=1}^{m} c_i\})(\inf_{\bar{d}\in S_{\varphi_1,\varphi_2}(\Lambda)}\{\sum_{j=1}^{n} d_j\}),$$

es decir,

$$(f:\varphi_2)\leq (f:\varphi_1)(\varphi_1:\varphi_2)$$

Y así la propiedad 2.14 está demostrada y con la misma se termina la demostración del lema.

Consideremos ahora una función

$$f_0\in C_c^+(\mho),\ f_0>0,$$

función que permanecerá fija hasta que no se mencione lo contrario. Con ésta se define, para cada función

$$\varphi\in C_c^+(\mho),\ \varphi>0$$

la aplicación

$$I_\varphi : C_c^+(\mho)\to I\!R$$

definida por la correspondencia

$$f\mapsto I_\varphi(f)=\frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)}.$$

Es facil ver que está aplicación está bien definida y las propiedades de está aplicación estan contenidas en el siguiente lema :

Lema 2.1.3

$$\begin{aligned}
I_\varphi(f) &> 0 \ si\ f>0. && (2.15)\\
I_\varphi(\sigma f) &= I_\varphi(f),\ \forall\ \sigma\in\mho. && (2.16)\\
I_\varphi(\alpha f) &= \alpha I_\varphi(f),\ \forall\ \alpha\in I\!R^+. && (2.17)\\
I_\varphi(f_1) &\leq I_\varphi(f_2)\ si\ f_1\leq f_2,\ f_1,f_2\in C_c^+(\mho). && (2.18)\\
I_\varphi(f_1+f_2) &\leq I_\varphi(f_1)+I_\varphi(f_2),\ f_1,f_2\in C_c^+(\mho) && (2.19)\\
\frac{1}{(f_0:f)} &\leq I_\varphi(f)\leq (f:f_0),\ f>0,\ f\in C_c^+(\mho). && (2.20)
\end{aligned}$$

Demostración. La propiedad 2.9 del lema 2.1.2 permite escribir

$$(f_0 : \varphi) > 0 \implies I_\varphi(f_0) = 1$$

y como,

$$(0 : \varphi) = 0 \implies I_\varphi(0) = 0$$

Las propiedades 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, y 2.19 son consecuencia inmediata del Lema 2.1.2. En cuanto a la propiedad 2.20, se demuestra como sigue: de acuerdo con la propiedad 2.14 se tiene,

$$(f : \varphi) \leq (f : f_0)(f_0 : \varphi)$$

y por lo tanto,

$$1) \qquad I_\varphi(f) = \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} \leq (f : f_0),$$

y como tambien se tiene,

$$(f_0 : \varphi) \leq (f_0 : f)(f : \varphi),$$

se obtiene,

$$2) \qquad \frac{1}{(f_0 : f)} \leq I_\varphi(f)$$

1) y 2) implican,

$$\frac{1}{(f_0 : f)} \leq I_\varphi(f) \leq (f : f_0).$$

Así la propiedad 2.20 está demostrada y con ella el Lema.

Lema 2.1.4 *Sean*

$$f_1, f_2, \ldots, f_m$$

m funciones con valores reales positivas continuas definidas sobre $\mho$ con soporte compacto:

$$f_1, \ldots, f_m \in C_c^+(\mho)\ f_i > 0\ (1 \leq i \leq m)$$

sean dos números reales positivos

$$\epsilon > 0,\ \delta > 0$$

y sean m números reales positivos y arbitrarios tales que

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \leq \delta.$$

Entonces existe una vecindad U del elemento identidad $e \in \mho$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i I_\varphi(f_i) - I_\varphi(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i) \right| < \epsilon$$

para toda función

$$\varphi \in C_c^+(\mho) \quad \varphi > 0 \quad con \quad \varphi(U^c) = 0$$

Demostración. Consideremos los conjuntos compactos $E_i = Sop(f_i)$ cuya union

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$$

poseé la propiedad

$$f_i(E^c) = 0 \ (1 \leq i \leq m).$$

Como $\mho$ es un grupo topológico localmente compacto, podemos elegir una vecindad V del elemento identidad $e \in \mho$ cuya cerradura $\overline{V}$ sea un subconjunto compacto de $\mho$:

$$e \in V \subset \overline{V} \subset \mho,$$

además el conjunto,

$$E\overline{V}$$

es un subconjunto compacto de $\mho$. Si U_0 es un conjunto abierto de $\mho$ que contiene al compacto $E\overline{V}$, se sabe que existe un subconjunto abierto W de $\mho$ con cerradura $\overline{W}$ compacta, tal que

$$E\overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset U_0.$$

El Lema de Urysohn, Teorema 1.3.1, asegura la existencia de una función continua

$$g : \mho \rightarrow [0,1]$$

tal que,

$$g(x) = 1 \quad si\ x \in E\overline{V}$$

$$g(x) = 0 \quad si\ x \in W^c$$

con soporte compacto : $g \in C_c^+(\mho)$

Por otro lado, como las funciones

$$g, f_1, ..., f_m$$

son continuas, las mismas son uniformemente continuas; por tanto dada,

$$0 < \epsilon < M = m\delta \max\{\| f_i \|\}, (1 \leq i \leq m)$$

existe una vecindad U del elemento identidad $e \in \mho$ con la propiedad siguiente : para toda $\sigma, x \in \mho$ tal que

$$\sigma^{-1}x \in U \implies | f_i(\sigma) - f_i(x) | < \frac{\epsilon^3}{4Mm\delta} \quad (1 \leq i \leq m)$$

y

$$\sigma^{-1}x \in U \implies | g(\sigma) - g(x) | < \frac{\epsilon^2}{4M}.$$

No se pierde generalidad si se supone que la vecindad U está contenida en la vecindad V : $U \subset V$. Consideremos ahora la siguiente función

$$\Phi : \mho \to \mathbb{R}^+$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto \Phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + g(x)\epsilon$$

cuyas propiedades estan expresadas en el siguiente corolario :

Corolario 2.1.1 *Las propiedades de la función Φ son :*

i) $\Phi \in C_c^+(\mho)$

ii) $\| \Phi \| \leq 2M$

iii) *Para toda pareja $\sigma, x \in \mho$ tales que*

$$\sigma^{-1}x \in U \implies | \Phi(\sigma) - \Phi(x) | < \frac{\epsilon^3}{2M}.$$

Demostración. Como $f_i \in C_c^+(\mho)$ y $g \in C_c^+(\mho)$ la propiedad i) es inmediata.
Para obtener la propiedad ii) se calcula

$$\begin{aligned}\| \Phi \| &\leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \| f_i \| + \epsilon \| g \| \\ &\leq m\delta \max\{\| f_i \|\} + \epsilon \\ &< M + M = 2M.\end{aligned}$$

Y así, ii) está demostrada.

En cuanto a la propiedad iii); calculando

$$| \Phi(\sigma) - \Phi(x) | \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i | f_i(\sigma) - f_i(x) | + \epsilon | g(\sigma) - g(x) |$$

$$< m\delta \frac{\epsilon^3}{4Mm\delta} + \epsilon \frac{\epsilon^2}{4M} = \frac{\epsilon^3}{2M}.$$

Y así, iii) está demostrada y con la misma el corolario.

En seguida, consideremos la siguiente función :

$$h_i : \mho \to I\!R^+$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto h_i(x) = \begin{cases} \frac{\lambda_i f_i(x)}{\Phi(x)} & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \in E^c \end{cases}$$

para toda $1 \leq i \leq m$; cuyas propiedades estan contenidas en el siguiente corolario :

Corolario 2.1.2 *Las funciones h_i satisfacen :*

i) $h_i \Phi = \lambda_i f_i, \; (1 \geq i \geq m).$

ii) $\sum_{i=1}^{m} h_i \leq 1.$

iii) *Para toda $\sigma, x \in \mho$ tales que*

$$\sigma^{-1} x \in U \implies | h_i(\sigma) - h_i(x) | < \frac{\epsilon}{m}.$$

Demostración. La propiedad i) es trivialmente válida.
La propiedad ii) es consecuencía de la siguiente observación:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \epsilon g(x) = \Phi(x)$$

En efecto, como

$$\sum_{i=1}^{m} h_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i f_i(x)}{\Phi(x)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)}{\Phi(x)} \leq \frac{\Phi(x)}{\Phi(x)} = 1$$

se obtiene,

$$\sum_{i=1}^{m} h_i(x) \leq 1.$$

Para verificar la propiedad iii) consideremos en primer lugar el

CASO I) $\sigma, x \in E\overline{V}$. En este caso calculando:

$$\begin{aligned}
\mid h_i(\sigma) - h_i(x) \mid &= \mid \frac{\lambda_i f_i(\sigma)}{\Phi(\sigma)} - \frac{\lambda_i f_i(x)}{\Phi(x)} \mid \\
&= \mid \frac{\lambda_i \Phi(x) f_i(\sigma) - \lambda_i \Phi(\sigma) f_i(x)}{\Phi(\sigma)\Phi(x)} \mid \\
&= \mid \frac{\lambda_i (f_i(\sigma)(\Phi(x) - \Phi(\sigma)) + \Phi(\sigma)(f_i(\sigma) - f_i(x)))}{\Phi(\sigma)\Phi(x)} \mid \\
&\leq \frac{\delta(\| f_i(\sigma) \| \| \Phi(x) - \Phi(\sigma) \mid + \| \Phi(\sigma) \| \| f_i(\sigma) - f_i(x) \mid)}{\mid \Phi(\sigma)\Phi(x) \mid} \\
&< \frac{\delta}{\mid \Phi(\sigma)\Phi(x) \mid} \left(\frac{M}{\delta m} \frac{\epsilon^3}{2M} + 2M \frac{\epsilon^3}{4Mm\delta} \right) \\
&< \frac{\epsilon^3}{m} \frac{1}{\mid \Phi(\sigma)\Phi(x) \mid}.
\end{aligned}$$

Como para toda $x \in \mho$

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i + \epsilon g(x) \geq \epsilon,$$

se obtiene,

$$\mid h_i(\sigma) - h_i(x) \mid \leq \frac{\epsilon}{m}.$$

Así, en el presente Caso I, la propiedad iii) del corolario está demostrada.

CASO II) $\sigma \notin E\overline{V}$ o $x \notin E\overline{V}$. En este caso si :

$$\sigma \notin E\overline{V} \implies x \notin E.$$

En efecto, supongamos por un instante que $x \in E$. Como la vecindad se puede elegir simétrica : $U = U^{-1}$, y para toda pareja σ, $x \in \mho$ tales que

$$\sigma^{-1}x \in \mho \implies x^{-1}\sigma \in U \implies \sigma \in xU.$$

Y como U se eligió contenida en V se obtiene $\sigma \in E\overline{V}$ lo cual contradice la hipótesis. Por consiguiente,

$$x \notin E.$$

Además, como por hipótesis,

$$\sigma \notin E\overline{V} = E \cup \bigcup_{v \in \overline{V}} Ev$$

en particular,

$$\sigma \notin E.$$

Análogamente, si

$$x \notin E\overline{V} \implies \sigma \notin E.$$

En efecto, supongamos por un instante que $\sigma \in E$, como para todo σ, $x \in \mho$ tales que,

$$\sigma^{-1}x \in U \implies x \in \sigma U \implies x \in E\overline{V}$$

lo cual contradice la hipótesis. Por consiguiente,

$$\sigma \notin E.$$

Además, como por hipótesis,

$$x \notin E\overline{V} = E \cup \bigcup_{v \in \overline{V}} Ev$$

en particular,

$$\sigma \notin E.$$

En otras palabras, el presente caso implica,

$$\sigma \in E^c \quad y \quad x \in E^c$$

lo cual a su vez implica,

$$| h_i(\sigma) - h_i(x) |= 0 < \frac{\epsilon}{m}.$$

Y así, la propiedad iii) está verificada para este segundo caso en consideración y de está manera la prepiedad iii) está demostrada y con ella el corolario.

Continuando con la demostración del lema 2.1.4. Consideremos ahora una función

$$\varphi \in C_c^+(\mho),\ \varphi \neq 0 \ \ tal\ que\ \ \varphi(U^c) = 0$$

y sea

$$\bar{c} = (c_1, \dots, c_m) \in S_{\Phi,\varphi}(\Lambda)$$

por tanto,

$$\Phi(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\ {}_{\sigma_i}\varphi(x)$$

para toda $x \in \mho$. Si en seguida elegimos un punto fijo $x \in \mho$ y escribimos

$$1) \qquad \Phi(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\ {}_{\sigma_i}\varphi(x)$$

donde la suma está restringida a los términos, donde,

$$x \in \sigma_i^{-1} U \ \ (1 \leq i \leq m).$$

De acuerdo con la propiedad iii) del corolario 2.1.2, podemos escribir,

$$2) \qquad h_j(x) \leq h_j(\sigma^{-1}) + \frac{\epsilon}{m}\ \ \forall\ \ \sigma^{-1}x \in U$$

multiplicando 1) y 2) se obtiene,

$$\Phi(x)h_j(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\ {}_{\sigma_i}\varphi(x)\{h_j(\sigma^{-1}) + \frac{\epsilon}{m}\},$$

la propiedad i) del corolario 2.1.2, permite escribir,

$$\lambda_j f_j(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\{h_j(\sigma^{-1}) + \frac{\epsilon}{m}\}\ {}_{\sigma_i}\varphi(x)\ \ \forall\ x \in \mho$$

lo cual implica que,

$$(\lambda_j f_j : \varphi) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\{h_j(\sigma^{-1}) + \frac{\epsilon}{m}\}$$

sumando sobre j y tomando en cuenta la propiedad ii) del corolario 2.1.2 obtenemos,

$$\frac{\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j f_j : \varphi)}{1 + \frac{\epsilon}{m}} \leq \sum_{i=1}^{m} c_i.$$

dividiendo por $(f_0 : \varphi)$ ésta última desigualdad, obtenemos :

$$\sum_{j=1}^{m} I_\varphi(\lambda_j f_j) < (1 + \frac{\epsilon}{m})I_\varphi(\Phi)$$

aplicando las propiedades 2.17, 2.19 y la definición de Φ a ésta última desigualdad :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} I_\varphi(\lambda_j f_j) &< (1 + \frac{\epsilon}{m})I_\varphi(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j + \epsilon g) \\
&\leq (1 + \frac{\epsilon}{m})I_\varphi(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j) + \epsilon(1 + \frac{\epsilon}{m})I_\varphi(g) \\
&= I_\varphi(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j) + \frac{\epsilon}{m}I_\varphi(\sum_{i=1}^{m} \lambda_j f_j) + \epsilon(1 + \frac{\epsilon}{m})I_\varphi(g).
\end{aligned}$$

La propiedad 2.20 permite escribir :

$$\sum_{j=1}^{m} I_\varphi(\lambda_j f_j) \leq I_\varphi(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j) + \epsilon\delta \sum_{j=1}^{m}(f_j : f_0) + (1 + \epsilon)\epsilon(g : f_0)$$

Si ahora eligimos el número real $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, obtenemos:

$$\mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i I_\varphi(f_i) - I_\varphi(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i) \mid \leq \epsilon$$

Así, está demostrado el lema 2.1.4.

Lema 2.1.5 *Sean*

$$f \in C_c^+(\mho),\ f \neq 0 \ y \ \epsilon > 0.$$

Sea U un elemento del sistema fundamental de vecindades del elemento identidad $e \in \mho$: $U \in \mathcal{V}$ tal que para toda σ, $x \in \mho$ con

$$\sigma^{-1}x \in \mho \implies |\, f(\sigma) - f(x) \,| < \epsilon$$

y sea

$$g \in C_c^+(\mho),\ g \neq 0 \ con \ g(U^c) = 0.$$

Entonces para toda $\eta > 0$, existen m elementos

$$\tau_1,\ \tau_2, \dots, \tau_m \in E^{-1},\ donde\ E = Sop(f)$$

así como m números positivos

$$c_1,\ c_2, \dots, c_m \in I\!R^+ \ cuya\ suma \sum_{i=1}^{m} c_i > 0$$

tales que

$$|\, f(x) - \sum_{i=1}^{m} c_i \ {}_{\tau_i}g(x) \,| < \delta$$

para toda $\delta > \epsilon$ y toda $x \in \mho$.

Demostración. La hipótesis permite escribir

$$f(x) - \epsilon < f(\sigma) < f(x) + \epsilon$$

y como $\sigma^{-1}x \notin U$ implica $g(\sigma^{-1}x) = 0$, podemos escribir

$$A) \qquad (f(x) - \epsilon)g(\sigma^{-1}x) < f(\sigma)g(\sigma^{-1}x) < (f(x) + \epsilon)g(\sigma^{-1}x).$$

Elijamos ahora un número positivo $\eta > 0$ suficientemente pequeño como para que se tenga

$$(f : g^*)\eta \ < \ \delta - \epsilon.$$

Como también por hipótesis $g \in C_c^+(\mho)$, la misma es uniformemente continua; por consiguiente dada $\eta > 0$ existe una vecindad abierta $V \in \mathcal{V}$ tal que para toda σ, $\tau \in \mho$ con

$$\sigma\tau^{-1} \in V \implies |\, g(\sigma) - g(\tau) \,| < \eta.$$

(Se esta utilizando la continuidad uniforme derecha de g.) Por otro lado, como $E = Sop(f)$ es un conjunto compacto, existe un número finito de elementos

$$\sigma_1, ..., \sigma_m \in E \ \ tales\ que \ \ E \subset \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i V$$

y si tomamos en cuenta el Teorema de la Partición de la Unidad 1.3.2, asociadas a esta cubierta finita, existen m-funciones

$$h_1, ..., h_m \in C_c^+(\mho)$$

con valores en el intervalo cerrado $[0,1]$ con las siguientes propiedades:

1) $\qquad h_j((\sigma_j V)^c) = 0 \ \ (1 \leq j \leq m)$

2) $\qquad \sum_{j=1}^{m} h_j(\sigma) = 1 \ \ \forall\ \sigma \in E$

Consideremos ahora un elemento fijo pero arbitrario $x \in \mho$ y un elemento $\sigma \in \sigma_j V$ lo cual nos permite escribir :

$$\sigma_j^{-1} x(\sigma^{-1}x)^{-1} \in V \implies |\, g(\sigma_j^{-1}x) - g(\sigma^{-1}x)\,| < \delta$$

desigualdad que podemos escribir como,

$$g(\sigma^{-1}x) - \eta < g(\sigma_j^{-1}x) < g(\sigma^{-1}x) + \eta.$$

Como $\sigma \notin \sigma_j V$, implica que $h_j(\sigma) = 0$ podemos escribir :

$$(g(\sigma^{-1}x) - \eta) f(\sigma) h_j(\sigma) \leq g(\sigma_j^{-1}x) f(\sigma) h_j(\sigma) \leq (g(\sigma^{-1}x) + \eta) f(\sigma) h_j(\sigma),$$

para toda $\sigma, x \in \mho$ y toda $1 \leq j \leq m$. Sumando con respecto a j obtenemos,

$$(g(\sigma^{-1}x) - \eta) f(\sigma) \leq \sum_{j=1}^{m} g(\sigma_j^{-1}) f(\sigma) h_j(\sigma) \leq (g(\sigma^{-1}x) + \eta) f(\sigma).$$

Si ahora utilizamos la desigualdad A) podemos obtener las siguientes desigualdades :

$$\begin{aligned} (f(x) - \epsilon) g(\sigma^{-1}x) - \eta f(\sigma) &\leq \sum_{j=1}^{m} g(\sigma_j^{-1}x) f(\sigma) h_j(\sigma) \\ &\leq (f(x) + \epsilon) g(\sigma^{-1}x) + \eta f(\sigma). \end{aligned}$$

Consideremos ahora una función $\varphi \in C_c^+(\mho)$, $\varphi \neq 0$. Si utilizamos las propiedades de la funcional I_φ expresadas en el lema 2.1.3., obtenemos,

$$
\begin{aligned}
B) \ (f(x)-\epsilon)I_\varphi(g^\star)-\eta I_\varphi(f) &\leq I_\varphi(\sum_{j=1}^{m} g(\sigma_j^{-1}x)f(\sigma)h_j(\sigma)) \\
&\leq (f(x)+\epsilon)I_\varphi(g^\star)+\eta I(f).
\end{aligned}
$$

La propiedad 2.1.4 y la definición de la funcional I_φ permiten calcular :

$$\frac{I_\varphi(f)}{I_\varphi(g^\star)}=\frac{(f:\varphi)}{(g^\star:\varphi)}\leq\frac{(f:g^\star)(g^\star:\varphi)}{(g^\star:\varphi)}$$

y obtener,

$$\frac{I_\varphi(f)}{I_\varphi(g^\star)}\leq(f:g^\star),$$

dividiendo la desigualdad B) por $I_\varphi(g^\star)$, ésta última desigualdad nos permite escribir :

$$
\begin{aligned}
f(x)-\epsilon-\eta(f:g^\star) &\leq I_\varphi(\frac{\sum_{j=1}^{m} g(\sigma_j^{-1}x)fh_j}{I_\varphi(g^\star)}) \\
&\leq f(x)+\epsilon+\eta(f:g^\star).
\end{aligned}
$$

Si determinamos el número positivo $\beta > 0$ tal que se tenga,

$$\eta(f:g^\star)=\beta-\epsilon$$

podemos escribir :

$$C) \qquad f(x)-\beta\leq I_\varphi(\sum_{j=1}^{m}\frac{g(\sigma_j^{-1}x)}{I_\varphi(g^\star)}fh_j)\leq f(x)+\beta$$

y como x se eligió arbitrariamente en $\mho$ se obtiene :

$$D) \qquad |\, f(x)-I_\varphi(\sum_{j=1}^{m}\frac{g(\sigma_j^{-1}x)fh_j}{I_\varphi(g^\star)})\,|\leq\beta,$$

para toda $x\in\mho$.

Definamos ahora las siguientes números positivos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho = \delta - \beta \\ 0 &\leq \Delta = \| g \| (f : g^\star) \\ 0 &\leq \lambda_j = \frac{g(\sigma_j^{-1} x)}{I_\varphi(g^\star)}, \ (1 \leq i \leq m) \end{aligned}$$

y utilizamos las propiedades del lema 2.1.2. para calcular

$$\begin{aligned} \lambda_j = \frac{g(\sigma_j^{-1} x)}{I_\varphi(g^\star)} &= \frac{g(\sigma_j^{-1} x)}{(g^\star : \varphi)}(f_0 : \varphi) \\ &\leq \frac{g(\sigma_j^{-1} x)(f_0 : g^\star)(g^\star : \varphi)}{(g^\star : \varphi)} \\ &\leq g(\sigma_j^{-1} x)(f_0 : g^\star) \\ &\leq \| g \| (f_0 : g^\star) = \Delta, \end{aligned}$$

y obtener :

$$0 \leq \lambda_j \leq \Delta, \ (1 \leq j \leq m).$$

Estas consideraciones nos permiten aplicar el lema 2.1.4., a las funciones $f_j = h_j f$ para toda $j = 1, 2, ..., m$, y para $\rho > 0$ y obtener la desigualdad :

$$E) \qquad \left| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j I_\varphi(f_j) - I_\varphi\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j\right) \right| < \rho$$

y como la desigualdad D) se puede expresar como,

$$\left| f(x) - I_\varphi\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j\right) \right| < \rho.$$

Combinando las desigualdades C) y E) obtenemos la desigualdad :

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j I_\varphi(f_j) \right| < \delta.$$

Como

$$f \neq 0, \ h_j \neq 0, \Longrightarrow \ f h_j \neq 0 \Longrightarrow \ I_\varphi(f_j) > 0,$$

lo que permite escribir :

$$0 < \lambda_j I_\varphi(f_j) = \frac{g(\sigma_j^{-1}x)}{I_\varphi(g^*)} I_\varphi(f_j).$$

Si ahora definimos los números reales positivos,

$$0 < c_j = \frac{I_\varphi(f_j)}{I_\varphi(g^*)}, \ (1 \leq j \leq m), \ \textit{cuya suma} \ \sum_{j=1}^{m} c_j > 0,$$

podemos escribir

$$\lambda_j I_\varphi(f_j) = c_j g(\sigma_j^{-1}x), \ (1 \leq j \leq m).$$

En seguida si definimos m elementos $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m \in \mho$ como sigue

$$\tau_1 = \sigma_1^{-1}, \tau_2 = \sigma_2^{-1}, ..., \tau_m = \sigma_m^{-1} \in E^{-1}.$$

Entonces podemos escribir,

$$| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j \ {}_{\tau_j}g(x) | < \delta \ \forall \ x \in \mho.$$

Así, está demostrado el lema 2.1.5.

Corolario 2.1.3 *Sea* $f \in C_c^+(\mho)$, $f \neq 0$. *Sea* $0 < \epsilon < 1$. *Entonces existe una función* $w \in C_c^+(\mho), w \neq 0$ *y una vecindad* U *del elemento identidad* $e \in \mho$ *tal que para toda* $g \in C_c^+(\mho)$, $g \neq 0$ *con* $g(U^c) = 0$ *existen* m *elementos* $\tau_1, \ldots, \tau_m \in E^{-1}$, *donde* $E = sop(f)$ *y* m *números positivos* $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}^+$, *cuya* $\sum_{j=1}^{m} c_j > 0$, *tales que*

$$| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j \ {}_{\tau_j}g(x) | < \delta w(x) \ \forall \ x \in \mho,$$

con

$$\delta = \frac{\epsilon}{2[1 + (w : f_0)][1 + (f : f_0)]}.$$

Demostración. Como $\mho$ es un espacio topológico localmente compacto, sea U_0 una vecindad del elemento identidad $e \in \mho$ cuya cerradura $\overline{U_0}$ es compacta. Consideremos el conjunto compacto $E = sop(f + f_0)$ y sea el conjunto

$$F = E\overline{U_0}.$$

Es claro que, F es compacto. Sea U una vecindad abierta del compacto F : $F \subset U$. De acuerdo con el Lema de Uryshon Teorema 1.3.1, existe una función $w \in C_c^+(\mho)$, $w \neq 0$

$$w : \mho \to [0,1]$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto w(x) = 1 \;\; si \;\; x \in F$$

$$x \mapsto w(x) = 0 \;\; si \;\; x \in U^c.$$

Sea $\delta > \epsilon$. Si $g \in C_c^+(\mho)$, $g \neq 0$ y $g(U^c) = 0$; así, quedan satisfechas las hipótesis del lema 2.1.5., por tanto, existen m elementos $\tau_1, \ldots, \tau_m \in E^{-1}$ y m números positivos $c_1, \ldots, c_m \in I\!R^+$ cuya $\sum_{j=1}^{m} c_j > 0$, tales que,

$$\mid f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j \; {}_{\tau_j}g(x) \mid < \delta \; \forall \; x \in \mho.$$

Consideremos las funciones

$$f, {}_{\tau_1}g, \ldots, {}_{\tau_m}g.$$

Se afirma que : Las funciones precedentes se anulan en $F^c = (E\overline{U_0})^c$. En efecto, como

$$E \subset F = E\overline{U_0} \implies F^c \subset E^c.$$

Por lo tanto, si

$$x \in F^c \implies x \in E^c \implies f(x) = 0.$$

Y como para cada

$$\tau_j \in E^{-1} \implies \tau_j^{-1} \in E,$$

lo cual a su vez implica que,

$$\tau_j^{-1} U_0 \subset EU_0 \subset E\overline{U_0} = F.$$

Si

$$x \in F^c \implies x \notin \tau_j^{-1} U_0 \implies \tau_j x \notin U_0 \implies g(\tau_j x) = 0,$$

es decir,

$${}_{\tau_j}g(x) = g(\tau_j x) = 0 \;\; \forall \;\; x \in F^c.$$

Así, está demostrada la afirmación. La misma, permite escribir,

$$| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j \; {}_{\tau_j}g(x) | \leq \delta w(x), \ \forall \ x \in \mho.$$

Así, el corolario 2.1.3. está demostrado.

Continuando con la demostración de la existencia de la Integral de Haar Izquierda consideremos:

Sea Sea $\mho$ un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff. Sea $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mho)$, un sistema fundamental de vecindades del elemento identidad $e \in \mho$:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mho) = \{V \subset \mho : e \in V\}.$$

Consideremos la siguiente relación binaria definida sobre $\mathcal{V}$: se dirá

$$U \succeq V \iff U \subset V.$$

Se afirma primero que : La relación " $\succeq$ " es un orden parcial sobre $\mathcal{V}$.
En efecto, sean U, V, y $W \in \mathcal{V}$. Como

$$U \succeq U \iff U \subset U,$$

esto implica que, " $\succeq$ " es reflexiva.
Sea

$$U \succeq V \ y \, V \succeq U \iff U \subset V \ y \, V \subset U,$$

esto implica que, $U = V$. Por lo tanto, " $\succeq$ " es anti-simetrica.
Sea

$$U \succ V \ y \ V \succ W \iff U \subset V \ y \ V \subset W,$$

esto implica que,

$$U \subset W \iff U \succeq W.$$

Por tanto, " $\succeq$ " es transitiva. Así, la afirmación está demostrada.

En segundo lugar se afirma que : La familia $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mho)$ deviene en un conjunto dirigido con respecto al orden parcial " $\succeq$ ".

En efecto, se desea probar que dados dos elementos U, $V \in \mathcal{V}$ existe un elemento $W \in \mathcal{V}$ tal que $W \succeq U$ y $W \succeq V$. Consideremos

$$U, V \in \mathcal{V} \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{V}$$

y como

$$U \cap V \subset U \Longleftrightarrow U \cap V \succeq U$$

y

$$U \cap V \subset V \Longleftrightarrow U \cap V \succeq V.$$

Como existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $W \subset U \cap V$, se tiene la probada la propiedad de la segunda afirmación.

Como $\mho$ es un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff, a cada vecindad $U \in \mathcal{V}$ se le puede asociar una función :

$$\varphi_U \in C_c^+(\mho), \varphi \neq 0 \;\; y \;\; \varphi_U(U^c) = 0.$$

En efecto, dado que $\mho$ es grupo topológico localmente compacto y Hausdorff, existe una vecindad V del elemento identidad $e \in \mho$ cuya cerradura $\overline{V}$ es compacta y está contenida en U :

$$e \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

De acuerdo con el Lema de Uryshon, Teorema 1.3.1, existe una función $\varphi_U \in C_c^+(\mho)$ con valores en el conjunto compacto $[0,1]$:

$$\varphi_U : \mho \to [0,1]$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto \varphi(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in \overline{V} \\ 0 & si \;\; x \in U^c \end{cases}$$

Dicho en otras palabras: dada una vecindad $U \in \mathcal{V}$ le hemos asociado una aplicación $\varphi_U \in C_c^+(\mho)$.

$$\{\varphi_U\}_{U \in \mathcal{V}}, \; \varphi_U \in C_c^+(\mho), \varphi_U \neq 0 \;\; y \;\; \varphi_U(U^c) = 0.$$

Ahora, consideremos una relación "$\succeq$" definida entre los elementos de la familia $\mathcal{D} = \{\varphi_U\}_{U \in \mathcal{V}}$ de la siguiente manera :

$$\varphi_U \succeq \varphi_V \Longleftrightarrow U \succeq V.$$

Se afirma primero que : La relación " $\succeq$ " es un orden parcial sobre la familia $\mathcal{D} = \{\varphi_U\}$.
En efecto, como

$$U \subset U \Longleftrightarrow U \succeq U \Longleftrightarrow \varphi_U \succeq \varphi_U.$$

Por tanto, " $\succeq$ " es reflexiva.

Sí

$$\varphi_U \succeq \varphi_V \;\; y \;\; \varphi_V \succeq \varphi_W \Longleftrightarrow U \subset V \;\; y \;\; V \subset W,$$

esto implica que,

$$U \subset W \Longleftrightarrow \varphi_U \succeq \varphi_W.$$

Por tanto, " $\succeq$ " es transitiva.

Sea

$$\varphi_U \succeq \varphi_V \;\; y \;\; \varphi_V \succeq \varphi_U \Longleftrightarrow U \subset V \; y \; V \subset U,$$

esto implica que,

$$U = V \Longleftrightarrow \varphi_U = \varphi_V.$$

Por tanto, " $\succeq$ " es anti-simstrica y por lo tanto " $\succeq$ " es una relación de orden parcial sobre la familia $\mathcal{D} = \{\varphi_U\}_{U \in \mathcal{V}}$.

Se afirma en segundo lugar que : La familia $\mathcal{D} = \{\varphi_U\}_{U \in \mathcal{V}}$, deviene en un conjunto dirigido con respecto al orden parcial inducido por " $\succeq$ ".
En efecto, sean $\varphi_U, \varphi_V \in \mathcal{D}$. Como para todo par $U, V \in \mathcal{V}$ existe

$$W \in \mathcal{V}\,, \;\; tal\,que \;\; W \succeq U \;\; y \;\; W \succeq V \Longleftrightarrow W \subset U \;\; y \;\; W \subset V.$$

Por definición, $\varphi_W \succeq \varphi_U$ y $\varphi_W \succeq \varphi_V$, es decir, para todo par

$$\varphi_U, \varphi_V \in \mathcal{D} \;\; \exists\, \varphi_W \in \mathcal{D}\,, \;\; tal\,que \;\; \varphi_W \succeq \varphi_U \;\; y \;\; \varphi_W \succeq \varphi_V.$$

Así, la familia $\mathcal{D}$ es un conjunto dirigido y por lo tanto la afirmación está demostrada.

En general, a toda función $\varphi \in C_c^+(\mho)$ se le asocia una función

$$I_\varphi : C_c^+(\mho) \to \mathbb{R}^+$$

definida por la correspondencia

$$f \mapsto I_\varphi(f) = \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)}.$$

Así, para cada $f \in C_c^+(\mho)$ se fabrica el conjunto de números reales positivos, a saber :

$$\{I_{\varphi_U}(f)\}_{\varphi_U \in \mathcal{D}}$$

El cual es una **red**, puesto que es un conjunto con indices en un conjunto dirigido.

El proposito es, demostrar la existencia del límite :

$$\lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} I_{\varphi_U}(f) = I_\varphi(f) \ \ en \ \ I\!R^+.$$

Lo que significa que : **Dado** $\epsilon > 0$, $\exists \ \varphi_{U_0} \in \mathcal{D}$, **tal que,**

$$\forall \ \varphi_U \succeq \varphi_{U_0} \Longrightarrow \mid I_{\varphi_U}(f) - I_\varphi(f) \mid < \epsilon.$$

Se dirá que la **red** :

$$\{I_{\varphi_U}(f)\}_{\varphi_U \in \mathcal{D}},$$

de números positivos es de Cauchy si y sólo si para toda $\epsilon > 0 \ \exists \ \ \varphi_{U_0}$ tal que para

$$\varphi_U, \ \varphi_V > \varphi_{U_0} \Longrightarrow \mid I_{\varphi_U}(f) - I_{\varphi_V}(f) \mid < \epsilon.$$

Proposición 2.1.1 *Para toda* $f \in C_c^+(\mho)$, $f \neq 0$. *La red*

$$\{I_{\varphi_U}(f)\}_{\varphi_U \in \mathcal{D}},$$

es de Cauchy.

Demostración. Dada $f \in C_c^+(\mho)$, $f \neq 0$ y $\epsilon > 0$, el corolario 2.1.2. asegura la existencia de una función $w \in C_c^+(\mho)$, de m elementos

$$\tau_1, \ \tau_2, \ldots, \tau_m \in \mho,$$

de m números reales

$$c_1 \geq 0, \ c_2 \geq 0, \ldots, c_m \geq 0 \ \ cuya \ suma \ \ \sum_{j=1}^{m} c_j > 0$$

y de una vecindad U del elemento identidad $e \in \mho$ para toda

$$g \in C_c^+(\mho),\ g \neq 0,\ g(U^c) = 0,$$

se tiene que :

$$A) \qquad \mid f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j \ {}_{\tau}g(x) \mid < \delta w(x),$$

donde,

$$\delta = \frac{\epsilon}{2(1+(w:f_0))(1+(f:f_0))} > \epsilon.$$

Recordemos que se definieron los números

$$0 \leq c_j = \frac{I_\varphi(f_j)}{I_\varphi(g^\star)}.$$

Como $f_j = h_j f \leq f,\ \ (1 \leq j \leq m)$, entonces

$$I_\varphi(f_j) \leq I_\varphi(f),$$

lo cual implica que,

$$\begin{aligned} \frac{I_\varphi(f_j)}{I_\varphi(g^\star)} &\leq \frac{I_\varphi(f)}{I_\varphi(g^\star)} \\ &= \frac{\frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)}}{\frac{(g^\star:\varphi)}{(f_0:\varphi)}} = \frac{(f:\varphi)}{(g^\star:\varphi)}. \end{aligned}$$

Dado que $(f:\varphi) \leq (f:g^\star)(g^\star:\varphi)$, entonces

$$\frac{I_\varphi(f_j)}{I_\varphi(g^\star)} \leq \frac{(f:g^\star)(g^\star:\varphi)}{(g^\star:\varphi)},$$

es decir,

$$\frac{I_\varphi(f_j)}{I_\varphi(g^\star)} \leq (f:g^\star).$$

Por lo tanto,

$$0 \leq c_j \leq (f:g^\star),\ \ (1 \leq j \leq m).$$

Esta situación permite aplicar el lema 2.1.4. a las funciones

$${}_{\tau_1}g,\ {}_{\tau_2}g, \ldots,\ {}_{\tau_m}g$$

y a los números

$$\delta > 0,\ \Delta = (f : g^*),\ \lambda_1 = c_1,\ \lambda_2 = c_2, \ldots, \lambda_m = c_m,\ \ 0 \le \lambda_j \le \Delta.$$

Y obtener, una vecindad $U \in \mathcal{V} = \mathcal{V}(\mho)$, tal que, para toda $\varphi \in C_c^+(\mho)$, $\varphi \not\equiv 0$, $\varphi(U^c) = 0$, se tiene que

$$| I_\varphi(\sum_{j=1}^m c_j\ {}_{\tau_j}g) - \sum_{j=1}^m c_j I_\varphi(\ {}_{\tau_j}g) | < \delta.$$

Por otro lado, para toda $\varphi \in C_c^+(\mho)$, $\varphi \not\equiv 0$, calculando el valor de I_φ en la desigualdad A) se obtiene :

$$| I_\varphi(f) - I_\varphi(\sum_{j=1}^m c_j\ {}_{\tau_j}g) | < I_\varphi(\delta w),$$

es decir,

$$| I_\varphi(f) - I_\varphi(\sum_{j=1}^m c_j\ {}_{\tau_j}g) | < \delta I_\varphi(w).$$

Ahora calculando :

$$\begin{aligned}
| I_\varphi(f) - \sum_{j=1}^m c_j I_\varphi({}_{\tau_j}g) | &= | I_\varphi(f) - I_\varphi(\sum_{j=1}^m c_j\ {}_{\tau_j}g) \\
&\quad + I_\varphi(\sum_{j=1}^m c_j\ {}_{\tau_j}g) - \sum_{j=1}^m c_j I_\varphi(\ {}_{\tau_j}g) | \\
&\le | I_\varphi(f) - I_\varphi(\sum_{j=1}^m c_j\ {}_{\tau_j}g) | \\
&\quad + | I_\varphi(\sum_{j=1}^m c_j\ {}_{\tau_j}g) - \sum_{j=1}^m c_j I_\varphi(\ {}_{\tau_j}g) | \\
&< \delta I_\varphi(w) + \delta = \delta(1 + I_\varphi(w))
\end{aligned}$$

se obtiene :

$$| I_\varphi(f) - \sum_{j=1}^m c_j I_\varphi(\ {}_{\tau_j}g) | < \delta(1 + I_\varphi(w))\ \forall\ \ \varphi \in C_c^+(\mho)$$

Como $I_\varphi(w) < (w : f_0)$ y $I_\varphi(\ {}_{\tau_j}g) = I_\varphi(g)$, $(1 \le j \le m)$, y haciendo $\sum_{j=1}^m c_j = c$, obtenemos :

$$| I_\varphi(f) - cI_\varphi(g) | < \delta(1 + (w : f_0)),$$

para toda $\varphi \in C_c^+(\mho)$, $\varphi \neq 0$ y $\varphi(U^c) = 0$. En particular, ésto es valido para $\varphi = \varphi_U$.

Repitiendo el mismo argumento a la función basica f_0 en lugar de la función f, obtenemos una vecindad V_0 del sistema fundamental de vecindades $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mho)$ y un número $c_0 > 0$ los cuales satisfacen :

$$| I_{\varphi_{V_0}}(f_0) - c_0 I_{\varphi_{V_0}}(g) | < \delta(1 + (w : f_0))$$

y como

$$I_\varphi(f_0) = \frac{(f_0 : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} = 1,$$

por tanto se obtiene que :

$$| 1 - c_0 I_{\varphi_{V_0}}(g) | < \delta(1 + (w : f_0))$$

$\forall \ \varphi \in C_c^+(\mho)\ \varphi \neq 0$ y $\varphi_{V_0}(V_0^c) = 0$.

1a. Observación Sean

$$\varphi_V,\ \varphi_W \in \mathcal{D},\ \varphi_V \neq 0,\ \varphi_W \neq 0 \ \ y \ \ \varphi_V(V^c) = 0,\ \varphi_W(W^c) = 0.$$

Si

$$\varphi_W \succeq \varphi_V \implies \varphi_W(V^c) = 0.$$

En efecto, como,

$$\varphi_W \succeq \varphi_V \iff W \subset V \iff V^c \subset W^c,$$

Lo cual implica que,

$$\varphi_W(V^c) \subset \varphi_W(W^c) = 0,$$

Por consiguiente,

$$\varphi_W(V^c) = 0.$$

Así, está demostrada la observación.

Ahora, consideremos una vecindad $W = U \cap V_0 \in \mathcal{V}$ y la función $\varphi_W \in \mathcal{D}$, es decir satisface, $\varphi_W \in C_c^+(\mho)$, $\varphi_W \neq 0$ y $\varphi_W(W^c) = 0$, calculando

$$\begin{aligned}
| I_{\varphi_W}(f) - \frac{c}{c_0} | &= | I_{\varphi_W}(f) - \frac{c_0 c}{c_0} I_{\varphi_W}(g) + \frac{c_0 c}{c_0} I_{\varphi_W}(g) - \frac{c}{c_0} | \\
&\leq | I_{\varphi_W}(f) - \frac{c_0 c}{c_0} I_{\varphi_W}(g) | + | \frac{c}{c_0} || c_0 I_{\varphi_W}(g) - 1 | \\
&< \delta(1 + (w : f_0)) + \frac{c}{c_0}\delta(1 + (w : f_0))
\end{aligned}$$

Puesto que $\varphi_U(U^c) = 0$ y $\varphi_{V_0}(V_0^c) = 0$ se tiene que,

$$I) \qquad | I_{\varphi W}(f) - \frac{c}{c_0} | < \delta(1 + (w : f_0))(1 + \frac{c}{c_0}),$$

lo cual implica que,

$$-\delta(1 + (w : f_0)) - \frac{c}{c_0}\delta(1 + (w : f_0)) < I_{\varphi W}(f) - \frac{c}{c_0},$$

por consiguiente,

$$\frac{c}{c_0}(1 - \delta(1 + (w : f_0)) < I_{\varphi W}(f) + \delta(1 + (w : f_0))$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{c}{c_0} < \frac{I_{\varphi W}(f) + \delta(1 + (w : f_0))}{1 - \delta(1 + (w : f_0))},$$

lo cual implica que,

$$\frac{c}{c_0} + 1 < \frac{I_{\varphi_w}(f) + \delta(1 + (w : f_0)) + 1 - \delta(1 + (w : f_0))}{1 - \delta(1 + (w : f_0))}$$

así se tiene que,

$$\frac{c}{c_0} + 1 < \frac{I_{\varphi W}(f) + 1}{1 - \delta(1 + (w : f_0))}$$

Como $I_{\varphi W}(f) \leq (f : f_0)$, entonces

$$\frac{c}{c_0} + 1 < \frac{(f : f_0) + 1}{1 - \delta(1 + (w : f_0))},$$

La elección de el número δ, permite escribir :

$$\begin{aligned}
\frac{c}{c_0} \quad &< \quad \frac{(f : f_0) + 1}{1 - \frac{\epsilon(1+(w:f_0))}{2(1+(w:f_0))(1+(f:f_0))}} \\
&= \quad \frac{(f : f_0) + 1}{\frac{(1+(f:f_0))-\epsilon/2}{1+(f:f_0))}} \\
&= \quad \frac{[(f : f_0) + 1]^2}{1 + (f : f_0) - \epsilon/2},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{c}{c_0} + 1 < \frac{[(f : f_0) + 1]^2}{1 + (f : f_0) - \epsilon/2} < 1 + (f : f_0),$$

así se tiene que,

$$\frac{c}{c_0} + 1 < 1 + (f : f_0).$$

Sustituyendo ésta última desigualdad en I), se tiene :

$$| I_{\varphi_W}(f) - \frac{c}{c_0} | < \delta(1 + (w : f_0))(1 + (f : f_0)),$$

la elección del número real

$$\delta = \frac{\epsilon}{2(1 + (w : f_0))(1 + (f : f_0))}$$

permite escribir la desigualdad :

$$| I_{\varphi_W}(f) - \frac{c}{c_0} | < \frac{\epsilon}{2}.$$

2a. Observación Para los elementos

$$\varphi_U,\ \varphi_{V_0},\ \varphi_W \in \mathcal{D} \ \ t.q.\ \ \varphi_U \succeq \varphi_W \ \ y \ \ \varphi_{V_0} \succeq \varphi_W$$

se tiene que :

$$\varphi_W(U^c) = 0 \ \ y \ \ \varphi_W(V_0^c) = 0$$

Consecuencia inmediata de la 1a. obsservación. Calculando para éstas últimas funciones :

$$\begin{aligned} | I_{\varphi_U}(f) - I_{\varphi_{V_0}}(f) | &= | I_{\varphi_U}(f) - \frac{c}{c_0} + \frac{c}{c_0} - I_{\varphi_{V_0}}(f) | \\ &\leq | I_{\varphi_U}(f) - \frac{c}{c_0} | + | \frac{c}{c_0} - I_{\varphi_{V_0}}(f) | \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

es decir,

$$| I_{\varphi_U}(f) - I_{\varphi_{V_0}}(f) | < \epsilon.$$

En resumen, se ha demostrado que :

$$\forall \ \ \epsilon > 0 \ \exists \ \ \varphi_W \in \mathcal{D} \ \ t.q. \forall \ \ \varphi_U \succeq \varphi_W \ \ y \ \ \varphi_V \succeq \varphi_W,$$

se tiene que,

$$| I_{\varphi_U}(f) - I_{\varphi_V}(f) | < \epsilon,$$

dicho en otras palabras : La red en $I\!R^+$:

$$\{I_{\varphi_U}(f)\}_{\varphi_U \in \mathcal{D}}$$

es de Cauchy, para toda $f \in C_c^+(\mho)$. Por consiguiente, **existe el límite** :

$$\lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} I_{\varphi_U}(f) = I(f) \;\; \forall \;\; f \in C_c^+(\mho).$$

A la función I se le llama la LA INTEGRAL DE HAAR.

Ahora sí, ya estamos en la posibilidad de efectuar la demostración del Teorema 2.1.1.

Demostración del Teorema 2.1.1.
i) Dado que $f \neq 0$ y $f \in C_c^+(\mho)$, entonces $f > 0$ y por lo tanto,

$$\forall \;\; \varphi_U \in \mathcal{D} = \{\varphi_U\}_{U \in \mathcal{V}} \;\; \varphi_U \neq 0 \;\; \varphi_U(U^c) = 0,$$

se tiene que,

$$I_{\varphi_U}(f) > 0 \;\; \forall \;\; \varphi_U \in \mathcal{D},$$

lo cual implica que,

$$\lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} I_{\varphi_U}(f) = I(f) > 0 \;\; \forall \;\; \varphi_U \in \mathcal{D}.$$

Así, la propiedad i) ésta demostrada.

ii) Si consideramos el Lema 2.1.4. para las funciones $f, g \in C_c^+(\mho)$, los números reales positivos :

$$\epsilon > 0, \; \Delta > 0, \; \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \leq \Delta = 1,$$

obtenemos una vecindad U del elemento identidad $e \in \mho$, tal que para cada función $\varphi_U \in C_c^+(\mho)$, $\varphi_U \neq 0$, y $\varphi_U(U^c) = 0$, se tiene que :

$$\mid I_{\varphi_U}(f+g) - (I_{\varphi_U}(f) + I_{\varphi_U}(g)) \mid < \;\epsilon,$$

tomando el límite corriendo $\varphi_U \in \mathcal{D}$:

$$\lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} \mid I_{\varphi_U}(f+g) - (I_{\varphi_U}(f) + I_{\varphi_U}(g)) \mid < \;\epsilon,$$

$$\Longrightarrow \; \mid \lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} [I_{\varphi_U}(f+g) - (I_{\varphi_U}(f) + I_{\varphi_U}(g))] \mid < \;\epsilon,$$

La última afirmación permite escribir :

$$| \lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} (I_{\varphi_U}(f+g)) - \lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} (I_{\varphi_U}(f) + I_{\varphi_U}(g)) | < \epsilon$$

i.e.

$$| \lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} (I_{\varphi_U}(f+g)) - (\lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} I_{\varphi_U}(f) + \lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} I_{\varphi_U}(g)) | < \epsilon$$

i.e

$$| I(f+g) - (I(f) + I(g)) | < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ se eligió arbitrariamente, la podemos hácer tan pequeña como queramos y obtener :

$$I(f+g) - (I(f) + I(g)) = 0,$$

por lo tanto,

$$I(f+g) = I(f) + I(g).$$

Así, la propiedad ii) está demostrada.

iii) Calculando para cada $\alpha \in I\!R^+$ y $f \in C_c^+(\mho)$:

$$\begin{aligned} I_{\varphi_U}(\alpha f) &= \lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} I_{\varphi_U}(\alpha f) = \lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} \alpha I_{\varphi_U}(f) \\ &= \alpha \lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} I_{\varphi_U}(f) = \alpha I(f), \end{aligned}$$

Se obtiene,

$$I(\alpha f) = \alpha I(f).$$

Así, la propiedad iii) está demostrada.

iv) Calculando para cada $\sigma \in \mho$ y $f \in C_c^+(\mho)$:

$$I({}_\sigma f) = \lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} I_{\varphi_U}({}_\sigma f) = \lim_{\varphi_U \in \mathcal{D}} I_{\varphi_U}(f) = I(f).$$

Se obtiene,

$$I({}_\sigma f) = I(f).$$

Así, la propiedad iv) está demostrada.

Con todo esto, de ha demostrado la primera parte del Teorema 2.1.1., es decir, se ha probado **La Existencia de la Integral Izquierda de Haar.** Análogamente, se prueba la existencia de la integral derecha de Haar, considerando en todo lo anterior las traslaciones derechas y desarrollando todos los lemas y corolarios de la misma manera que se ralizo aquí.

2.2 Unicidad

Para demostrar la unicidad de la Integral de Haar, consideremos el siguiente lema :

Lema 2.2.1 *Sea J una funcional con las mismas hipótesis del teorema 2.1.1. y con la misma notación, es decir, la funcional J satisface :*

$$J \ : C_c^+(\mho) \to \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} J(f) &> 0 \ \forall \ f \in C_c^+(\mho). \\ J(f_1+f_2) &= J(f_1)+J(f_2) \ \forall \ f_1, \ f_2 \in C_c^+(\mho). \\ J(\alpha f) &= \alpha J(f) \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}^+, \ f \in C_c^+(\mho). \\ J({}_\sigma f) &= J(f) \ \forall \ \sigma \in \mho, \ f \in C_c^+(\mho). \end{aligned}$$

Entonces, J satisface las siguientes condiciones :

i) *Existe una función fija $f_1 \in C_c^+(\mho)$, $f_1 \neq 0$. tal que,*

$$0 < J(f_1),$$

además para toda $h \in C_c^+(\mho)$, $h \neq 0$, se tiene que,

$$0 < J(h).$$

ii) *Para toda función $h \in C_c^+(\mho)$, $h \neq 0$, se tiene que*

$$(f_1 : h) \leq \frac{J(f_1)}{J(h)}.$$

iii) *Para toda función $h \in C_c^+(\mho)$, $h \neq 0$, se tiene que,*

$$(h : h) \leq 1.$$

Demostración. i) Por hipótesis $J \neq 0$, entonces existe una función $f_1 \in C_c^+(\mho)$, tal que $J(f_1) > 0$. En seguida, consideremos una función $h \in C_c^+(\mho)$, fija pero arbitraria. Sea

$$\tilde{c} = (c_1, \cdots, c_m) \in S_{f,h}(\Lambda).$$

Por definición, existe un elemento

$$\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \cdots, \sigma_m) \in \Delta \ \ tal\ que\ \ (\tilde{\sigma}, \tilde{c}) \in S_{f,h}$$

y con la propiedad

$$f_1(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\ {}_{\sigma_i}h(x) \ \ \forall\ x \in \mho.$$

Evaluando ésta desigualdad en la función J :

$$\begin{aligned} J(f_1) &\leq J(\sum_{i=1}^{m} c_i\ {}_{\sigma_i}h(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} J(c_i\ {}_{\sigma_i}h(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i J({}_{\sigma_i}h(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i J(h). \end{aligned}$$

Se obtiene,

$$J(f_1) \leq J(h) \sum_{i=1}^{m} c_i$$

y como

$$\sum_{i=1}^{m} c_i > 0 \implies J(h) > 0$$

Como la función h se eligió arbitrariamente en $C_c^+(\mho)$, se tiene que,

$$J(h) > 0, \ \forall\ h \in C_c^+(\mho).$$

Así, la propiedad i) está demostrada.

Como $J(f) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i J(h)$ y $J(h) > 0$, entonces

$$\frac{J(f_1)}{J(h)} \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \leq (f_1 : h) = \inf\{\sum_{i=1}^{m} c_i\}.$$

i.e.

$$\frac{J(f_1)}{J(h)} \leq (f_1 : h).$$

Como $\tilde{c}$ se eligió arbitrariamente en $S_{f_1,h}(\Lambda)$ y $h \in C_c^+(\mho)$, se tiene que,

$$\frac{J(f_1)}{J(h)} \leq (f_1 : h) \ \forall \ h \in C_c^+(\mho).$$

Así, la propiedad ii) está demostrada.

Para demostrar iii), observemos primero que : ${}_\sigma h(x) = 1\, {}_\sigma h(x)$. Por definición,

$$({}_\sigma h : h) \leq 1 \implies (h : h) \leq 1.$$

Así, la propiedad iii) está demostrada y con ella el lema.

Consideremos las funcionales lineales I y J con las propiedades precedentes y una función $f \in C_c^+(\mho)$, $f \neq 0$, fija pero arbitraria. Sea $\epsilon > 0$ un número real tan pequeño como se quiera. De acuerdo con el corolario 2.1.3., existe :

1) Una función fija $w \in C_c^+(\mho)$, $w \neq 0$

2) Una vecindad del elemento identidad $e \in \mho$: $U_0 \in \mathcal{V} = \mathcal{V}(\mho)$ de cerradura $\overline{U_0} = U_0$ compacta, para obtener una vecindad $U \in \mathcal{V}$ tal que $U \subset U_0$.

3) m números positivos : $c_1, \ldots, c_m \in I\!R^+$ cuya $\sum_{i=1}^{m} c_i > 0$ y m elementos $\tau_1, \ldots, \tau_m \in E^{-1}$ donde $E = sop(f)$, tal que para toda función $g \in C_c^+(\mho)$, $g \neq 0$ y $g(U^c) = 0$ se tiene que

$$A) \qquad | f(x) - \sum_{i=1}^{m} c_i \, {}_{\tau_i}g(x) | \leq \delta w(x) \ \forall \ x \in \mho.$$

Donde

$$\delta = \frac{\epsilon}{2(1 + (w : f_0))(1 + (f : f_0))} > \epsilon$$

La desigualdad A) implica que,

$$1) \qquad f(x) \leq \delta w(x) + \sum_{i=1}^{m} c_i \, {}_{\tau_i}g(x)$$

y además, para cada $x \in \mho$:

$$2) \qquad \sum_{i=1}^{m} c_i \ {}_{\tau_i}g(x) - \delta w(x) \leq f(x).$$

Evaluando el número real $(f:g)$ en la desigualdad 1) :

$$\begin{aligned}(f:g) &\leq \delta(w:g) - (\sum_{i=1}^{m} c_i \ {}_{\tau_i}g : g) \\ &= \delta(w:g) - (\sum_{i=1}^{m} c_i)({}_{\tau_i}g : g) \\ &= \delta(w:g) - (\sum_{i=1}^{m} c_i)(g:g) \\ &= \delta(w:g) - \sum_{i=1}^{m} c_i,\end{aligned}$$

se obtiene que :

$$3) \qquad (f:g) \leq \delta(w:g) + \sum_{i=1}^{m} c_i$$

Aplicando la función J a la desigualdad 2) :

$$J(\sum_{i=1}^{m} c_i \ {}_{\tau_i}g - \delta w) \leq J(f),$$

se obtiene,

$$\sum_{i=1}^{m} c_i J(g) - \delta J(w) \leq J(f).$$

por lo tanto,

$$J(f) + \delta J(w) \geq \sum_{i=1}^{m} c_i J(f).$$

Combinando la desigualdad 3) con ésta última tenemos,

$$J(f) + \delta J(w) \geq ((f:g) - \delta(w:g))J(g).$$

Así,

$$J(f) + \delta J(w) \geq [1 - \delta\frac{(w:g)}{(f:g)}](f:g)J(g)$$

i.e.

$$J(f)+\delta J(w)\geq[1-\delta(w:f)](f:g)J(g).$$

Como $J(f)>0$, esto implica que,

$$\frac{J(f)}{J(F_1)}+\frac{\delta J(w)}{J(f_1)}\geq[1-\delta(w:f)](f:g)\frac{J(g)}{J(f_1)}.$$

Como

$$(f_1:g)\leq\frac{J(f_1)}{J(g)}\Longrightarrow\quad\frac{J(g)}{J(f_1)}\leq\frac{1}{(f_1:g)},$$

lo cual implica que,

$$\begin{aligned}\frac{J(f)}{J(f_1)}+\delta\frac{J(w)}{J(f_1)}&\geq[1-\delta(w:f)]\frac{(f:g)}{(f_1:g)}\\&=[1-\delta(w:g)]\frac{(f:g)/(f_0:h)}{(f_1:g)/(f_0:h)}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{J(f)}{J(f_1)}+\delta\frac{J(w)}{J(f_1)}\geq[1-\delta(w:f)]\frac{I_g(f)}{I_g(f_1)}.$$

Como $\epsilon>0$ se eligió arbitrariamente se puede hacer tan pequeño como se quiera y obtener :

$$\frac{J(f)}{J(f_1)}\geq\frac{I_g(f)}{I_g(f_1)},$$

tomando el límite :

$$\lim_{g\in\mathcal{D}}\frac{J(f)}{J(f_1)}\geq\lim_{g\in\mathcal{D}}\frac{I_g(f)}{I_g(f_1)}$$

se obtiene,

$$\frac{J(f)}{J(f_1)}\geq\frac{I(f)}{I(f_1)}.$$

Así,

$$J(f)\geq\frac{J(f_1)}{I(f_1)}I(f).$$

Observemos que : La hipótesis en la demostración de lema 2.1.4.,

$$J\neq0\Longrightarrow\quad\exists\ f_1\in C_c^+(\mho),\ f_1\neq0\ y\ J(f_1)>0,$$

y dado que la función $f \in C_c^+(\mho)$, $f \neq 0$, se eligió arbitrariamente, entonces se pueden intercambiar los papeles de f y f_1 para obtener :

$$J(f) \leq \frac{I(f)}{I(f_1)} J(f_1).$$

Por lo tanto,

$$\frac{J(f)}{J(f_1)} = \frac{I(f)}{I(f_1)},$$

haciendo

$$c_0 = \frac{J(f_1)}{I(f_1)} > 0,$$

se obtiene que

$$J(f) = c_0 I(f).$$

Como la f se eligió arbitrariamente en $C_c^+(\mho)$, se tiene que,

$$J(f) = c_0 I(f), \ \forall \ f \in C_c^+(\mho), \ f \neq 0.$$

Así, se tiene probado que sólo existe un único número real $c_0 > 0$ tal que la funcional lineal I definida sobre la clase $C_c^+(\mho)$ con valores en $\mathbb{R}^+$, es única. Así, está demostrado el Teorema 2.1.1.

Capítulo 3

CONCLUSIONES

La funcional I del Teorema 2.1.1., definida sobre $C_c^+(\mho)$, puede extenderse de manera única al espacio vectorial complejo $C_c(\mho)$. (Esto es un caso especial del Teorema B.38 [3]). La extensión obtenida es necesariamente invariante por la izquierda. A dicha extensión se le denota con I, y se le llama LA INTEGRAL IZQUIERDA DE HAAR DEFINIDA SOBRE $C_c(\mho)$ O SOBRE $\mho$.

Utilizaremos la construcción hecha en la sección § 11, capítulo IV [3], para asociar una función de conjunto μ con la Integral Izquierda de Haar.

Definición 3.0.1 *Sea X un espacio topológico y sea f una función real extendida definida y positiva sobre X :*

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}^+} = [0, \infty]$$

Se dice que f es continua inferiormente en el punto x_0, si para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad V de x_0 tal que para todo $x \in V$ implica que

$$f(x_0) - \epsilon < f(x).$$

Si $f(x_0) = \infty$, entonces para todo número positivo $A > 0$ existe una vecindad U de x_0, tal que $f(x_0) > A$ para todo $x \in U$.
Se denotará como

$$\mathcal{M}^+(X) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}^+} \ : \ f \ es \ semi-continua \ inferiormente\}$$

Con ayuda de este espacio así definido tenemos la primera extensión de la funcional I, al espacio $\mathcal{M}^+(\mho)$:

Definición 3.0.2 *Sea $\mho$ un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff. Sea I la Integral de la Haar Izquierda definida sobre $C_c(\mho)$. Para $f \in \mathcal{M}^+(\mho)$, se define el número real positivo $\overline{I}(f)$:*

$$\overline{I}(f) = \sup\{I(g) \ : \ g \in C_c^+(\mho),\ g \leq f\}.$$

Ahora consideremos a la famimila de todas las funciones f con valores en la recta real extendida $\overline{I\!R} = \{-\infty\} \cup I\!R \cup \{+\infty\}$, definida sobre X :

$$\mathcal{F}(\mho) = \{f : \mho \to \overline{I\!R}\}.$$

Denotemos con el simbolo :

$$\mathcal{F}^+(\mho) = \{f \in \mathcal{F}(\mho) \ : \ f(x) \geq 0 \ \forall \ \ x \in \mho\}.$$

Con ayuda de estos conceptos así definidos tenemos la segunda extensión $\overline{\overline{I}}$ de la funcional I, al espacio $\mathcal{F}^+(\mho)$:

Definición 3.0.3 *Sea $\mho$ un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff. Sea I la Integral de Haar Izquierda definida sobre $C_c(\mho)$. Sea $\overline{I}$ la primera extensión de la funcional I definida sobre $\mathcal{M}^+(\mho)$. Para cada $f \in \mathcal{F}^+(\mho)$ de define el número real positivo extendido $\overline{\overline{I}}(f)$:*

$$\overline{\overline{I}}(f) = \inf\{\overline{I}(g) \ : \ g \in \mathcal{M}^+(\mho),\ f \leq g\}.$$

Se dice que $\overline{\overline{I}}$ es la segunda y última extensión de la funcional lineal positiva I.

Sea $\mathcal{P}(\mho) = \{A \subset \mho\}$, el conjunto potencia de $\mho$.

De acuerdo con el Teorema 11.21 del capítulo III [3], asegura que la función :

$$\bar{\mu} : \mathcal{P}(\mho) \to I\!R^+$$

definida por la correspondencia

$$A \mapsto \bar{\mu}(A) = \overline{\overline{I}}(\chi_A)$$

es una medida exterior, donde, I es la integral de Haar izquierda.

Además el Teorema 11.29 capítulo III [3], afirma que la familia :

$$\mathcal{L}(\mho) = \{E \subset \mho \ : \bar{\mu}(A) = \bar{\mu}(A \cap E) + \bar{\mu}(A \cap E^c)\ \forall \ \ A \in \mathcal{P}(\mho)\},$$

es una σ-álgebra de conjuntos. Además, la restricción :

$$\tilde{\mu}|_{\mathcal{L}(\mho)} = \mu : \mathcal{L}(\mho) \to I\!R^{+},$$

es una medida númerablemente aditiva sobre $\mathcal{L}(\mho)$.

Todo lo que precede, permite definir,LA INTEGRAL ABSTRACTA DE LEBESGUE de una función f positiva definida sobre $\mho$ de la siguiente manera :

$$\int_{\mho} f d\mu = \sup \{ \sum_{j=1}^{m} m(f, A_j)\mu(A_j) \}$$

donde

$$m(f, A_j) = \inf\{f(x)\}_{x \in A_j} \; (1 \leq j \leq m)$$

y

$$A_1, ..., A_m \in \Pi(\mho) \; : \; \bigcup_{j=1}^{m} A_j = \mho \;\; y \;\; A_j \cap A_i = \emptyset \; (1 \leq i, j \leq m).$$

La medida μ construida desde la integral izquierda de Haar sobre $C_c(\mho)$ es llamada la MEDIDA DE HAAR IZQUIERDA SOBRE $\mho$.

Consideremos el celebre Teorema (Teorema 12.36, Capítulo III, [4]), para obtener el objetivo principal de éste trabajo :

TEOREMA DE LA REPRESENTACIÓN DE RIESZ.

Teorema 3.0.1 *Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Sea I una funcional lineal no negativa sobre $C_c(X)$. Entonces existe un espacio medible :*

$$(X, \; \mathcal{L}_{\lambda}(X), \; \lambda),$$

donde, $\mathcal{L}_{\lambda}(X)$ contiene a los conjuntos de Borel :

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{L}_{\lambda}(X),$$

tal que :

$$I(f) = \int_{X} f(x) d\lambda(x),$$

para cada $f \in C_c$.

En éste presente caso :

Sea $\mho$ un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff.
Sea I la funcional lineal positiva (Integral de Haar) definida sobre $C_c(\mho)$.
A la luz del Teorema de la Representación de Riesz, existe un espacio medible :

$$(\mho,\ \mathcal{L}_\mu(\mho),\ \mu),$$

donde, $\mathcal{L}_\mu(\mho)$ contiene a los conjuntos de Borel :

$$\mathcal{B}(\mho) \subset \mathcal{L}_\mu(\mho),$$

tal que,

$$\star\star \qquad I(f) = \int_{\mho} f d\mu \qquad \star\star$$

para cada $f \in C_c$.

Siempre que la expresión $\star\star$ esté bien definida, recibe el nombre de :

LA INTEGRAL IZQUIERDA DE HAAR.

Bibliografía

[1] C. Chevaley. Theory of Lie Groups.

[2] J. Dugundji. Topology.

[3] E. Hewitt and K. A. Roos. Abstract Armonic Analysis I.

[4] E. Hewitt and K. Stromberg. Real and Abstract Analysis.

[5] Notas del Dr. Félix Recillas Juárez.