

36  
2ej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PRIMERAS APROXIMACIONES A UN TEOREMA CUANTICO DE BIRKHOFF

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE F I S I C O P R E S E N T A :

XOMALIN GUIALI PERALTA GRISH



MEXICO, D. F.



1994

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

**M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE**  
Jefe de la División de Estudios Profesionales  
Facultad de Ciencias  
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó) con LA pasante(s) XOMALIN GUAIULI PERALTA GRISH

con número de cuenta 9052311-6 con el Título: "PRIMERAS APROXIMACIONES A UN TEOREMA CUANTICO DE BIRKHOFF"

Otorgamos nuestro Voto Aprobatorio y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de FISICO

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
	DR. MICHAEL PATRICK RYAN ALLEN		
Director de Tesis	DR. MANUEL TORRES LABANSAT		
	DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER		
	DR. ANTONIO FERNANDO SARMIENTO GALAN		
Suplente	DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS		
Suplente			

# Agradecimientos

Quisiera agradecer al Dr. Michael P. Ryan Allen por haber aceptado dirigir éste trabajo y guiar mi mirada a lo que es el espíritu de la investigación. Por todo el tiempo y paciencia, experiencia y conocimientos compartidos, así como por su apoyo y confianza, MUCHAS GRACIAS!

A los sinodales:

- Dr. Hernando Quevedo Cubillos
- Dr. Antonio F. Sarmiento Galán
- Dr. Manuel Torres Labansat
- Dr. José David Vergara

agradezco sus sugerencias y comentarios en relación a éste trabajo. Especialmente al Dr. Quevedo por su amabilidad, apoyo e interés.

El Dr. Jemal Guven Seery contribuyo a éste trabajo aportando ideas y comentarios en sus pláticas con el Dr. Ryan, por ello, muchas gracias. Así mismo agradezco al Dr. Roberto Sussman por contribuir con algunos calculos en MAPLE.

También quisiera dar las gracias a los profesores con quién tome clases durante la carrera y me dieron las herramientas para poder realizar este trabajo. En particular al Dr. Matias Moreno por su accesibilidad y confianza así como por entenderme.

Un agradecimiento especial al Dr. Enrique Geffroy por tener un interés especial en mi y ayudarme a conseguir mis objetivos.

Al Maestro Jorge Quiza agradezco su interés y ayuda al proporcionarme algunas referencias.

Al Instituto de Ciencias Nucleares agradezco el apoyo y las facilidades brindadas para la elaboración de este trabajo. A la Fundación UNAM agradezco el apoyo económico brindado por medio del Programa de Iniciación Temprana a la Investigación y a la Docencia.

Hay tres personas muy especiales con quienes he compartido gran parte de mi vida y han alimentado mi formación como los arroyos alimentan el río:

Ta...muchas gracias por tu cariño, apoyo y comprensión, particularmente para la elaboración de ésta tesis.

Ma... "we can soar the skies far and high by just wanting to, so lets start flying".

Atziri, mi hermana y mejor amiga...¿qué quieres que te diga?... $E = mc^2$ ...Volvámonos brisa y espuma, y... a jugar.

A Fidel Santamaría Pérez: Por caminar a mi lado y creer que ya puedo volar, por enseñarme que no hay a que temer ni espada que cargar, que hay un tiempo para cada cosa y muchas cosas más, pero, sobre todo, por no perder la esperanza...gracias.

Agradezco a la Fam. Santamaría por su apoyo y consejos para avanzar a la siguiente etapa de mi vida.

Finalmente, pero no con menos cariño, agradezco a mis amigos y compañeros, con quienes compartí tanto el aula como parte de mi vida y pensamientos: gracias.

*Now, here, you see, it takes all the running you can do,  
to keep in the same place. If you want to get somewhere else,  
you must run twice as fast as that.*

La Reina Roja, en *Alicia en el País de las Maravillas*.

# Dedicatoria

Al hoy Dr.Luis Beltrán por su gran ejemplo.

A Shushu, Ozeinda y Kiyutsu por su amistad.

A todo aquel interesado en la vida y el Universo.

*Hace un instante me sentía una partícula  
que sin ritmo y vacilante espera la vida,  
Hoy sé que soy la espera, y que en  
rítmicos fragmentos palpita la vida en mí.*

Khalil Gibran

# Tabla de Contenido

Introducción	5
<b>1 La Teoría General de la Relatividad</b>	<b>10</b>
1.1 Principio de Equivalencia . . . . .	10
1.2 Geometría del espacio-tiempo . . . . .	12
1.2.1 El Tensor Métrico y los Intervalos . . . . .	12
1.2.2 Geodésicas, Símbolos de Christoffel y Curvatura . . . . .	13
1.3 Acción en la Relatividad General . . . . .	14
1.3.1 Principio de Mínima Acción . . . . .	15
1.3.2 Sistemas con constricciones . . . . .	16
1.3.3 Acción en Relatividad General y Ecuaciones de Einstein . . . . .	17
1.4 Formulación ADM . . . . .	20
1.4.1 Obtención de la acción ADM . . . . .	20
<b>2 Introducción a la Teoría Cuántica de Campos</b>	<b>24</b>
2.1 Mecánica Cuántica . . . . .	24
2.1.1 Relación de Dispersión o Principio de Indeterminación . . . . .	25
2.1.2 Funciones de onda y operadores cuánticos . . . . .	25
2.1.3 Ecuación de Schrödinger y distintas representaciones . . . . .	27
2.2 Teoría Clásica de Campos . . . . .	28
2.2.1 Formalismos de la Teoría Clásica de Campos . . . . .	29
2.2.2 El problema de la cuerda vibrante . . . . .	29
2.3 Teoría Cuántica de Campos . . . . .	32
2.3.1 Interpretación de lo que es cuantizar un campo . . . . .	32

2.3.2	Métodos para cuantizar un campo . . . . .	33
2.3.3	Cuantización de la cuerda vibrante . . . . .	35
2.3.4	Problemas que surgen al cuantizar un campo . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Simetría Esférica, Teorema de Birkhoff y Minisuperespacios</b>	<b>38</b>
3.1	Campos gravitacionales esféricamente simétricos . . . . .	38
3.1.1	Solución de Schwarzschild . . . . .	40
3.1.2	Teorema de Birkhoff . . . . .	42
3.2	Superespacios y minisuperespacios . . . . .	42
3.3	Cuantización del campo gravitacional . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Hacia la cuantización de dos minisuperespacios</b>	<b>46</b>
4.1	Minisuperespacio con métrica <b>A</b> . . . . .	46
4.1.1	Métrica <b>A</b> ; tensor métrico y los momentos conjugados . . . . .	46
4.1.2	Obtención de la acción ADM . . . . .	49
4.1.3	Análisis de las constricciones y cuantización . . . . .	50
4.2	Minisuperespacio con métrica <b>B</b> . . . . .	56
4.2.1	Métrica <b>B</b> ; tensor métrico y las momentos conjugados . . . . .	56
4.2.2	Obtención de la Acción ADM . . . . .	58
4.2.3	Análisis de la constricción hamiltoniana . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Cuantización del minisuperespacio con métrica B</b>	<b>63</b>
	<b>Conclusiones</b>	<b>69</b>
	<b>A Transformación de la métrica de Schwarzschild</b>	<b>72</b>
	<b>B Consistencia con las Ecuaciones de Einstein</b>	<b>74</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>



# Notación

Indices griegos corren de 0 a 3.

Indices latinos corren de 1 a 3.

Derivadas temporales se denotan por  $\frac{\partial f}{\partial t}$  o por  $\dot{f}$ .

Derivadas espaciales se denotan por  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ ,  $f_{,i}$ , o si solo hay una variable espacial por  $f'$ .

Signatura:  $(- + + +)$

Función de onda:  $\Psi, \Phi$

Operadores cuánticos: letra cursiva  $\mathcal{A}, \mathcal{H}$

A lo largo de la tesis, utilizamos unidades tales que  $c = \hbar = k = 1$  ( $k$  es la constante gravitacional), excepto en los puntos donde, por claridad, es necesario expresarlas explícitamente.

# Introducción

La idea básica de la Teoría General de la Relatividad es geometrizar la fuerza gravitacional, es decir, mapear todas las propiedades de la fuerza gravitacional, así como su influencia sobre procesos físicos, a propiedades (geométricas) de un espacio Riemanniano; el espacio-tiempo. El campo gravitacional se manifiesta como una curvatura del espacio-tiempo y, de acuerdo a las ecuaciones de Einstein, depende de la distribución espaciotemporal de la materia, donde materia es todo lo que puede producir un campo gravitacional, i. e. que contribuye al tensor energía-momento. En principio, es imposible primero especificar la distribución espaciotemporal de la materia (la materia y su movimiento) y de esto calcular la estructura espacial ya que el espacio ya no es el escenario para los eventos físicos, más bien es un aspecto de la interacción y movimiento de la materia, a su vez influyendo sobre ella. Así, la estructura espacial (curvatura) y distribución de la materia constituyen un sistema dinámico cuyos elementos están tan relacionados entre sí que solamente pueden resolverse simultáneamente. De esta manera el espacio-tiempo se vuelve un elemento activo sujeto a condiciones locales y a las leyes de la física.

El procedimiento a seguir para ver las características del espacio-tiempo en el futuro es: dar los campos que generan el tensor energía-momento y su razón de cambio temporal así como la 3-geometría del espacio y su razón de cambio temporal al mismo tiempo, y luego resolver el problema encontrando la 4-geometría del espacio-tiempo en el futuro. De lo anterior, se ve que se puede separar el espacio-tiempo en  $3 + 1$  dimensiones donde el espacio-tiempo puede verse como la evolución de 3-geometrías (conjunto de todas las 3-métricas equivalentes bajo transformaciones de coordenadas). Arnowitt, Deser y Misner desarrollaron una formulación hamiltoniana de la relatividad general basada en este concepto, conocida como formalismo ADM. Bajo este punto de vista, la variable dinámica del sistema es una 3-geometría. Al espacio en el que evolucionan las 3-geometrías se le

llama superespacio, y al ponerle restricciones de simetría obtenemos un minisuperespacio.

Los campos que generan la curvatura del espacio-tiempo transportan energía y, según la mecánica cuántica, la energía está cuantizada, entonces también la geometría del espacio-tiempo debe estar "cuantizada". Esta conjetura lleva a plantear la posibilidad de desarrollar una teoría cuántica de la gravitación cuyas manifestaciones deben ser observables en experimentos cuyas energías sean del orden de  $10^{28}$ eV. A causa de la presente imposibilidad de obtener esas energías experimentalmente, no ha sido posible corroborar esta hipótesis, pero se supone cierta ya que de otra manera habría inconsistencias en la actual descripción física del universo.

La idea de una teoría cuántica de la gravitación está relacionada con buscar una función de onda que nos permita obtener la probabilidad de encontrar el espacio-tiempo con una métrica específica a un tiempo dado debido a que dicha métrica es la cantidad dinámica de interés. A causa de la dualidad onda-partícula que plantea la mecánica cuántica, también debe tener relación directa con la posibilidad de observar gravitones; las partículas del campo gravitacional con características análogas a los fotones del campo electromagnético. Actualmente el desarrollar una teoría cuántica de la gravitación no ha sido totalmente satisfactorio debido, entre otras cosas, a la no linealidad de las ecuaciones de Einstein y a las propiedades intrínsecas de la Teoría General de la Relatividad como es el ser covariante. A partir del procedimiento planteado anteriormente, observamos que clásicamente hay que dar simultáneamente posiciones y sus razones de cambio temporales, pero la mecánica cuántica prohíbe esto debido a la Relación de Dispersión encontrada por Heisenberg, también conocida como Principio de Indeterminación, entonces hay que desarrollar una teoría que incorpore las ideas de la teoría cuántica. Una de las propuestas es que a partir de la formulación ADM se obtenga la acción de la relatividad general. Dicha acción nos permite obtener un operador que juega el papel del "hamiltoniano" del sistema una vez que reemplazamos las variables clásicas (posición y momento) por sus contrapartes cuánticas. Así, el operador "hamiltoniano" aplicado a una función de onda

debe satisfacer la ecuación de Wheeler-DeWitt;

$$\mathcal{H}\Psi = 0,$$

la cual, al resolverla, nos da la función de onda buscada.

En esta tesis intentamos cuantizar dos minisuperespacios bajo la suposición de que una vez hecho esto con un número suficiente de minisuperespacios, tal vez se obtenga suficiente información como para que sea posible deducir un procedimiento adecuado para hacer lo mismo con un superespacio. No se pretende dar una explicación exhaustiva de lo que es y de lo que implica el intentar cuantizar el campo gravitacional, solamente se trata de presentar un procedimiento a seguir al intentar cuantizar un minisuperespacio.

Se eligieron dos minisuperespacios, designados respectivamente por **A** y **B**, cuyas 3-métricas están dadas por:

$$\mathbf{A} : \quad ds^2 = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \left[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right],$$

$$\mathbf{B} : \quad ds^2 = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \left[dr^2 + a^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right],$$

donde  $m = m(r, t)$  y  $a = a(r, t)$ , la cual posteriormente igualamos a  $r$ . Ambos tienen simetría esférica ya que buscamos poder decir algo acerca del Teorema de Birkhoff en el contexto de la gravitación cuántica. En el contexto clásico, el Teorema de Birkhoff afirma que no puede haber una solución esféricamente simétrica a las ecuaciones de Einstein que no sea equivalente a la solución de Schwarzschild. En otras palabras, no hay emisión de ondas esféricamente simétricas. En un contexto cuántico, podría negar la posibilidad de que haya emisión de gravitones que formen ondas esféricamente simétricas, lo cual podría deducirse de la función de onda obtenida.

En el caso del minisuperespacio **A**, no fue posible encontrar una función de onda satisfactoria, pero en el caso **B** sí. La función obtenida es una solución de la ecuación de Wheeler-DeWitt, pero parece que se necesita de un estudio más detallado y profundo

de otros aspectos para poder responder a la pregunta: ¿hay emisión de gravitones que forman ondas esféricamente simétricas? Algunos de esos aspectos a estudiar se mencionan en las conclusiones. Entre ellos se encuentran el traducir a la formulación hamiltoniana el Teorema de Birkhoff y la necesidad de estudiar el "problema de tiempo" en la gravedad cuántica.

Para concluir esta introducción, voy a mencionar brevemente la estructura general de la tesis. Esta consiste de una introducción, cinco capítulos, las conclusiones y dos apéndices. Los primeros tres capítulos tienen como objetivo presentar brevemente las herramientas necesarias para introducir la idea y metodología de la cuantización de un minisuperespacio. Básicamente son una breve recopilación bibliográfica de diversos textos y artículos. Los otros dos capítulos contienen el estudio de los dos minisuperespacios seleccionados.

El primer capítulo es un breve recordatorio de la Teoría General de la Relatividad, incluyendo la forma que tiene la acción de la relatividad general y la deducción de las ecuaciones de Einstein a partir de ella. Finaliza con la formulación ADM, explicando, de manera breve, su construcción, su relación con el espacio-tiempo y las relaciones importantes que se pueden obtener a partir de ella (constricciones).

El segundo capítulo consiste en un recordatorio de la Mecánica Cuántica y de la Teoría Clásica de Campos, ejemplificando el método hamiltoniano con una cuerda vibrante. A continuación, combinamos ambos temas en una breve introducción a la Teoría Cuántica de Campos, nuevamente ejemplificando uno de sus métodos con la cuerda vibrante. Culmina con una breve mención de los problemas que surgen al intentar cuantizar un campo.

La discusión de las métricas esféricamente simétricas está reservada para el capítulo tercero. Así mismo, resalta la importancia y generalidad de la solución de Schwarzschild haciendo mención del Teorema de Birkhoff. Los superespacios y minisuperespacios constituyen la parte final de este capítulo, incluyendo el papel que tienen en el proceso de intentar cuantizar el campo gravitacional.

Una vez sentadas las bases, en el capítulo cuarto obtenemos la acción ADM para los

dos minisuperespacios seleccionados. En el quinto obtenemos la función de onda para el minisuperespacio **B** y, en las conclusiones, nos referimos a su relevancia en el contexto de poder plantear un posible Teorema Cuántico de Birkhoff. Así mismo, presentamos algunas ideas para investigaciones futuras. Incluimos tanto aquellas que están relacionadas directamente con el minisuperespacio **B**, como otras más importantes dentro del contexto de la gravitación cuántica.

El apéndice A contiene la transformación de la métrica de Schwarzschild a coordenadas isotrópicas y el apéndice B la demostración de la consistencia de la métrica **A** con las ecuaciones de Einstein.

# Capítulo 1

## La Teoría General de la Relatividad

### 1.1 Principio de Equivalencia

Recordemos el experimento pensado de la caja negra de Albert Einstein en el cual una persona dentro de una caja totalmente cerrada siente que tanto él, como todos los aparatos dentro de la caja, sufren una aceleración hacia abajo. No puede ver hacia el exterior de la caja y, consecuentemente, concluye que hay dos posibles interpretaciones: 1) Puede haber una gran masa externa fija a la base de la caja produciendo un campo gravitacional aproximadamente uniforme. En éste caso la aceleración experimentada es un resultado de la atracción entre los objetos dentro de la caja y la gran masa externa. 2) La caja puede estar acelerada hacia arriba debido a un cuerda que la esté jalando. En este caso la aceleración experimentada por el observador y los aparatos es solamente la resistencia que presenta la materia a cambiar su estado de movimiento (inercia) y la consideramos producida por una fuerza aparente [1]. Esta fuerza aparece por la elección de sistema de referencia y puede ser eliminada si se escoge un sistema de referencia fijo a la caja. Realmente no existe ningún fenómeno mecánico, o de otro tipo, que permita decidir cuál de las dos explicaciones es correcta. Debido a que la fuerza gravitacional que actúa en la alternativa 1 puede ser simulada por la fuerza aparente de la alternativa 2, es factible decir que la gravitación puede ser eliminada, al menos localmente, con una selección adecuada del sistema de referencia, es decir, con una transformación. Este experimento nos lleva directamente a enunciar el **Principio de Equivalencia** [31]:

**Principio 1** *Un observador sin contacto con el exterior, no tiene medios por los cuales distinguir si su laboratorio se encuentra en un campo gravitacional uniforme o en un sistema de referencia acelerado.*

El poder eliminar la fuerza gravitacional con una transformación adecuada, únicamente es posible cuando el campo gravitacional responsable de la fuerza no depende del tiempo y es espacialmente homogéneo. Si depende del tiempo o es inhomogéneo, la transformación mencionada existe si nos restringimos a una región suficientemente pequeña dentro de la cual el campo gravitacional cambie muy poco, i. e. permanezca casi constante dentro de la región considerada. Con esto llegamos al enunciado del **Principio General de la Relatividad** [29]:

**Principio 2** *Si se tiene un campo gravitacional arbitrario, entonces en todo punto del espacio-tiempo, es posible escoger un sistema de coordenadas local e inercial tal que, dentro de una región suficientemente pequeña alrededor del punto en cuestión, las leyes de la naturaleza tengan la misma forma que en un sistema de coordenadas inercial en ausencia de gravitación.*

Al decir que "las leyes de la naturaleza tengan la misma forma que en un sistema de coordenadas inercial en ausencia de gravitación" queremos decir que conservan su forma ante una transformación general de coordenadas, i. e. son covariantes y en la ausencia de campo gravitacional se reducen a las leyes de la relatividad especial [31]. El Principio General de la Relatividad permite varias predicciones cualitativas y cuantitativas y, de hecho, la mayoría de las verificaciones experimentales de la Teoría General de la Relatividad pueden ser derivadas al aplicarlo con destreza.

El Principio General de la Relatividad es, hasta cierto punto, la base de la Teoría General de la Relatividad ya que plantea la idea de poner las leyes de la naturaleza en una forma que sea independiente del sistema de referencia, siendo dicha forma la formulación tensorial. Así mismo, el plantearse ésta generalización del Principio de Equivalencia y debido a que generalmente las fuerzas inerciales son mejor entendidas haciendo consideraciones geométricas, llevó a sospechar que la gravitación tiene una conexión con la



geometría del espacio-tiempo. Tomando como cierta esa sospecha, se desarrolló la Teoría General de la Relatividad y al obtener verificaciones experimentales de lo que predecía, se concluyó que efectivamente hay una conexión fuerte entre la gravitación y la geometría del espacio-tiempo.

## 1.2 Geometría del espacio-tiempo

Al inicio del siglo, se estudiaba la gravitación a partir de la fuerza que existe entre los cuerpos debida a su masa. Con Einstein se planteó la idea de que un cuerpo con masa modifica la geometría del espacio-tiempo, entonces cualquier otro cuerpo en su entorno se mueve de acuerdo a la curvatura del espacio-tiempo. Su comportamiento no se debe a la interacción con el cuerpo masivo directamente, sino a la geometría del espacio-tiempo, por lo cual la geometría toma un papel más importante en la explicación de la naturaleza.

### 1.2.1 El Tensor Métrico y los Intervalos

Toda la información respecto a la geometría del espacio-tiempo, está contenida en el **tensor métrico**, que determina las propiedades geométricas de cada sistema curvilíneo de coordenadas. Dicho tensor es de rango 2 y se representa por  $g_{\mu\nu}$  siendo, en la Teoría General de la Relatividad, tensores simétricos. Estos tensores tienen, a lo más, 10 componentes independientes en lugar de 16. Si se tiene un espacio plano, en coordenadas cartesianas, las componentes del tensor de curvatura son  $g_{00} = -1$ ;  $g_{11} = 1$ ;  $g_{22} = 1$ ;  $g_{33} = 1$ ;  $g_{\mu\nu} = 0$  si  $\mu \neq \nu$ , y se denomina métrica plana o de Relatividad Especial. [16]

Debido a que la geometría del espacio-tiempo está bien descrita al utilizar la geometría Riemanniana, si las componentes del tensor métrico son funciones de las coordenadas  $x^\mu$ , el elemento de línea o intervalo está dado por  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , donde respetamos la convención de Einstein, i. e. los índices repetidos implican una suma sobre ellos. El elemento de línea mide la distancia entre un par de puntos cercanos  $x^\mu$  y  $x^\mu + dx^\mu$ , la cual, en general, depende tanto de  $x^\mu$  como de  $dx^\mu$  [27].

Dado el tensor métrico, podemos construir su determinante  $g$  y con él obtener  $g^{\mu\nu} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}$ , llamado tensor métrico contravariante. Por lo tanto, el tensor métrico contravariante ha sido construido de tal manera que  $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho}$ . Esta propiedad nos permite subir o bajar los índices de un tensor  $A^{\mu\nu} = g^{\nu\rho} A^{\mu}_{\rho}$  y  $A_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} A^{\rho}_{\nu}$ , teniendo siempre presente la posición relativa de los índices.

## 1.2.2 Geodésicas, Símbolos de Christoffel y Curvatura

Con el desarrollo de la Teoría General de la Relatividad se encontró que un cuerpo masivo modifica la geometría del espacio-tiempo, de tal manera que las geodésicas de dicha geometría (geodésica: curva que une dos puntos cuya distancia permanece estacionaria bajo pequeñas variaciones), son las trayectorias curvas descritas por las partículas atraídas por el cuerpo masivo. Las geodésicas pueden obtenerse a partir de  $g_{\mu\nu}$  mediante:  $\frac{d}{d\lambda} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda}$  en donde  $\lambda$  es un parámetro invariante arbitrario, y equivalen a las ecuaciones de movimiento de las partículas.

Las líneas geodésicas nos llevan a definir los **Símbolos de Christoffel** como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\eta} \left( \frac{\partial g_{\eta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\eta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\eta}} \right), \quad (1.1)$$

los cuales satisfacen las relaciones siguientes:  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$ ;  $g_{\mu\nu} \Gamma_{\eta\rho}^{\nu} \equiv \Gamma_{\mu,\eta\rho} = \Gamma_{\mu,\rho\eta}$ ;  $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} = \Gamma_{\mu,\nu\rho} + \Gamma_{\nu,\mu\rho}$  y, en el caso más general, hay 40 diferentes. Estos símbolos no son tensores ya que no se transforman como tales [19], pero a partir de ellos podemos construir un tensor de rango 4 conocido como **Tensor de Curvatura** o **Tensor de Riemann-Christoffel**

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\mu} \Gamma^{\rho}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\nu} \Gamma^{\rho}_{\beta\mu}. \quad (1.2)$$

El tensor de curvatura nos da un criterio para saber si el espacio-tiempo es plano o no, ya que solamente en el primer caso tendríamos  $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$  en todo el espacio-tiempo, siendo este resultado independiente de haber escogido un sistema de referencia que

cerca del punto considerado sea plano. Las propiedades del tensor de curvatura son :  $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$  ;  $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$  y en particular, todas las componentes para las cuales  $\alpha = \beta$  ó  $\mu = \nu$ , son cero. También es posible verificar que la suma cíclica de componentes formada por la permutación de cualesquiera tres índices es cero; i. e.  $R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$ . Finalmente, es posible obtener las identidades de Bianchi:  $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu;\rho} + R^{\alpha}_{\beta\rho\mu;\nu} + R^{\alpha}_{\beta\nu\rho;\mu} = 0$ . Las componentes del tensor de curvatura no son todas independientes, en un espacio tetradimensional,  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  tiene un total de 20 componentes independientes que pueden reducirse por medio de transformaciones a 14, y según el caso, hasta a menos. [16]

A partir del tensor de curvatura, es posible construir un tensor simétrico de rango 2.

$$R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta}. \quad (1.3)$$

Se le denomina **Tensor de Ricci** y nos permite construir el **Escalar de Curvatura** o de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

que en el caso particular de una métrica plana da  $R = 0$ . [16]

### 1.3 Acción en la Relatividad General

En la mecánica clásica se ha definido una cantidad escalar la cual nos permite obtener las ecuaciones de movimiento del sistema haciendo uso del cálculo variacional. Dicha cantidad también es posible definirla para otros sistemas que no sean mecánicos, siendo igual de importante que en la mecánica. Su definición y su importancia se encuentran resumidas en el Principio de Mínima Acción y dicho principio nos permite hablar de la función que tienen las constricciones dentro de la física. A continuación presentamos cómo, a partir de la acción de relatividad general, es posible obtener las ecuaciones de Einstein.

### 1.3.1 Principio de Mínima Acción

Consideremos un sistema dinámico con un hamiltoniano  $H(q, p, t)$ , donde por simplicidad representamos las coordenadas generalizadas con  $q$ ;  $p$  son sus momentos conjugados dados por  $p = \partial L / \partial \dot{q}$ ,  $t$  denota el tiempo y  $L$  es el lagrangiano del sistema. Las ecuaciones canónicas del sistema, o ecuaciones de movimiento, son

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Para cada sistema, existe una cierta integral  $S$ , llamada acción, que al variarla respecto a las variables independientes y manteniendo los extremos fijos, da cero. En ese caso  $S$  nos da un valor máximo o mínimo, pero no es preciso que sea uno u otro. Esa integral no debe depender del sistema de referencia y, consecuentemente, debe ser un escalar. La definición de esa cantidad aparece en el Principio de Mínima Acción, enunciado a continuación;

**Principio 3** *La integral de acción*

$$S = \int L dt,$$

*tiene un valor estacionario para variaciones pequeñas en la trayectoria donde los extremos se mantienen fijos, i. e.*

$$\delta S = 0,$$

*donde  $L = L(q_i, p_i, t)$  es el lagrangiano del sistema y la integral es entre dos puntos definidos por  $t_1$  y  $t_2$ .*

A partir de la relación entre el lagrangiano  $L$  y el hamiltoniano  $H$  podemos poner el principio de mínima acción en otra forma

$$S = \int (p dq - H dt) = \int (p\dot{q} - H) dt. \quad (1.5)$$

El Principio de Mínima Acción resulta equivalente a las Ecuaciones de Euler-Lagrange donde, si consideramos un sistema conservativo, con constricciones no dependientes del tiempo y cuyas coordenadas generalizadas son independientes, tenemos que:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Estas ecuaciones nos dan las ecuaciones de movimiento del sistema. [28]

Al obtener la generalización a campos, en lugar de el lagrangiano tenemos una densidad lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \partial q / \partial x^i, t)$  donde  $q = q(x^\mu)$  son las variables que describen el estado del sistema. La densidad lagrangiana es tal que  $L = \int \mathcal{L} dV$  donde  $dV$  es el elemento de volúmen, pero el Principio de Mínima Acción mantiene su forma

$$\delta S = \delta \int L dt = \delta \int \mathcal{L} d\Sigma = 0, \quad (1.6)$$

siendo  $d\Sigma = dV dt$ . Definiendo  $q_{,i} = \frac{\partial q}{\partial x^i}$ , las Ecuaciones de Euler-Lagrange quedan como

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0.$$

### 1.3.2 Sistemas con constricciones

En ocasiones, se desea trabajar con sistemas restringidos por fuerzas internas que toman la forma de relaciones funcionales entre las coordenadas o entre las velocidades (momentos). Si  $\xi$  representa posiciones o velocidades, tenemos;

$$f^\mu(\xi^\nu, t) = 0. \quad (1.7)$$

En estos casos, esas fuerzas son ignorables ya que solamente hay que considerar las limitaciones que les imponen a las posiciones de las partículas. Esas constricciones se llaman holonómicas y cambian la dimensión, la topología y la geometría del espacio de configuración, i. e. del espacio de coordenadas, como veremos a continuación. En general,

el espacio de configuración es Riemanniano [17]. Al escoger las coordenadas generalizadas de un sistema, se busca el número más pequeño de coordenadas independientes necesarias para describir completamente al sistema. El número de coordenadas necesarias es igual al número de grados de libertad del sistema. Al tener una constricción, las coordenadas dejan de ser independientes ya que tienen que satisfacer la ecuación de constricción (1.7). De ésta, es posible despejar una de las coordenadas en función de las otras y eliminarla como coordenada generalizada. Esto produce una reducción en el número de coordenadas generalizadas y, por lo tanto, en el número de grados de libertad [15]. Visto de un punto de vista más geométrico, un sistema mecánico compuesto de  $N$  partículas libres tiene un espacio de configuración de  $3N$  dimensiones. Si hay constricciones, el espacio de configuración es un subespacio de menos de  $3N$  dimensiones, cuya geometría puede ser caracterizada por un elemento de línea Riemanniano, lo cual obviamente modifica la dimensión, la topología y la geometría del espacio de configuración [17].

Una vez reducida la dimensionalidad del espacio, se construye el lagrangiano en términos de las variables restantes, no-constrañidas y se utiliza en la integral de acción para obtener las ecuaciones de movimiento. Otra opción es utilizar multiplicadores de Lagrange, modificando el lagrangiano con las fuerzas constrictoras. El nuevo lagrangiano se puede utilizar en la integral de acción, la cual al variarla respecto a los coeficientes de las fuerzas constrictoras, da las ecuaciones de constricción.

### 1.3.3 Acción en Relatividad General y Ecuaciones de Einstein

Para obtener las ecuaciones del campo gravitacional, primero es necesario obtener la acción para este campo. Posteriormente, las ecuaciones requeridas pueden ser obtenidas al variar la suma de la acción del campo más la de las partículas materiales ya que, como vimos anteriormente, hay una relación entre el campo gravitacional y los cuerpos que lo producen.

La acción del campo gravitacional debe poder expresarse como una integral escalar sobre todo el espacio y sobre la coordenada temporal  $x^0$  entre los dos valores dados. Es

posible encontrar formalmente la forma de la acción a partir de las características que debe satisfacer, para ello consultar la referencia [16], pag. 268. Así, la acción para el campo gravitacional queda dada por

$$S = -\frac{1}{16\pi k} \int R\sqrt{-g}d\Sigma, \quad (1.8)$$

donde  $R$  es el escalar de curvatura,  $g$  el determinante del tensor métrico,  $k$  la constante gravitacional y  $d\Sigma = dx^0 dx^3$ . De modo que variando

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi k} \delta \int R\sqrt{-g}d\Sigma.$$

A partir de una transformación de coordenadas, de la acción dada por (1.6) y haciendo un análisis del cambio en las componentes del tensor métrico, es posible obtener la variación de la acción para la materia. Recordando que los términos  $\delta q$  deben cancelarse debido a las ecuaciones de movimiento y que  $\delta g^{\mu\nu} = 0$  en los límites de integración, obtenemos

$$\delta S_m = \int \left\{ \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho}} \right\} \delta g^{\mu\nu} d\Sigma.$$

Para un cálculo más detallado consultar [16], sección 94. Si definimos

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} = \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho}},$$

donde al tensor  $T_{\mu\nu}$  lo llamamos **Tensor Energía-Momento**, la variación de la acción para la materia toma la forma siguiente

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Sigma.$$

Como se mencionó anteriormente, a partir de la acción del campo gravitacional y de la materia, es posible encontrar las ecuaciones de Einstein si aplicamos el Principio de

Mínima Acción. Para ello es necesario calcular explícitamente

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Sigma = \delta \int g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}d\Sigma = \int \left\{ R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu} \right\} d\Sigma$$

Calculando las variaciones necesarias (ver [16], sección 95) y recordando que la variación del campo es cero en los límites de integración, se llega a que

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Sigma = \int \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}d\Sigma,$$

y finalmente

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi k} \int \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}d\Sigma.$$

Para finalizar hay que recordar que  $\delta(S + S_m) = \delta S + \delta S_m = 0$ , entonces

$$\delta S + \delta S_m = -\frac{1}{16\pi k} \int \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - 8\pi k T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}d\Sigma = 0,$$

y, considerando la arbitrariedad de  $\delta g^{\mu\nu}$ , obtenemos las ecuaciones del campo gravitacional ó **Ecuaciones de Einstein**

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi k T_{\mu\nu}, \quad (1.9)$$

siendo las ecuaciones fundamentales de la Teoría General de la Relatividad. Si las escribimos en componentes mixtas y contraemos, también se pueden escribir cómo

$$R_{\mu\nu} = 8\pi k \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\mu}^{\mu} \right)$$

de donde es fácil observar que en el vacío, las ecuaciones se reducen a  $R_{\mu\nu} = 0$ , un sistema de 10 ecuaciones acopladas. Las ecuaciones de Einstein son no-lineales y como es posible observar de (1.9) relacionan la distribución de la materia y su movimiento con la estructura del espacio-tiempo. En principio es imposible especificar la distribución espaciotemporal de la materia (materia y su movimiento) y a partir de ésto calcular la



estructura del espacio-tiempo (curvatura) ya que el espacio-tiempo no es el escenario para los eventos físicos, más bien es un aspecto de la interacción y movimiento de la materia [27].

## 1.4 Formulación ADM

Una vez que se tienen las Ecuaciones de Einstein y la acción para el campo gravitacional, de acuerdo a la construcción *clásica* de la teoría hamiltoniana, es necesario construir los momentos canónicos conjugados a las variables dinámicas para obtener el hamiltoniano. Para ello debemos obtener  $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$ , i. e., debemos privilegiar al tiempo para poder definir  $\dot{q}$ . De lo anterior podemos ver que para construir el hamiltoniano hay que diferenciar una de las coordenadas del espacio-tiempo de las otras. Esto equivale a considerar al espacio-tiempo como formado por rebanadas que no se intersectan, donde cada rebanada es una hipersuperficie de tres dimensiones. Pensamos en la *evolución* como el cambio entre una de estas hipersuperficies y la siguiente. Generalmente lo que se hace es rebanar tomando  $x^0 = t = cte.$ , entonces la evolución nos dice como cambia la geometría de la hipersuperficie de tres dimensiones conforme pasa el tiempo. Lo anterior no es la única opción, pero hasta ahora ha sido la más efectiva y simple de interpretar.

### 1.4.1 Obtención de la acción ADM

Si rebanamos el espacio-tiempo tomando  $x^0 = t = cte.$ , es necesario tener presente dos cosas; 1) la geometría de las rebanadas individuales (hipersuperficies de tres dimensiones con una métrica dada) y 2) la relación entre una rebanada y la siguiente. El punto 2) se satisface si definimos una función lapso (lapse)  $N$  que se relaciona con la separación entre cada par de hipersuperficies, y un vector formado por funciones de desplazamiento (shift)  $N_i$  que se relacionan con el movimiento de un punto al pasar a la siguiente hipersuperficie, que tanto se movió el sistema de coordenadas respecto a un punto específico al transcurrir el tiempo. Estas cuatro funciones nos dicen como ir embonando las hipersuperficies para

formar el continuo del espacio-tiempo. Así tenemos 10 variables correspondientes a las que teníamos anteriormente del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  tetradimensional; 6 de la métrica tridimensional simétrica en la hipersuperficie espacial  $\gamma_{ij}$ , 1 de la función lapso  $N$  y 3 de las funciones de desplazamiento  $N_i$ .

Una vez definidas estas 10 variables, se reescribe el elemento de línea en términos de las nuevas variables para obtener la relación entre ellas y las viejas variables. Se encuentra que  $\gamma_{ij} = g_{ij}$ , que  $N = (-g^{00})^{-\frac{1}{2}}$  y que  $N_i = g_{0i}$ . A partir de ahora, por la primera relación antes señalada, denotaremos  $\gamma_{ij}$  por  $g_{ij}$ .

El siguiente paso es reescribir la acción en términos de las nuevas variables, para ello hay que expresar el escalar de curvatura tridimensional  $R$  y el elemento de volumen  $\sqrt{-g}d\Sigma$  en función de  $g_{ij}$ ,  $N$  y  $N_i$ . Si se desea ver una discusión más extensa y detallada consultar el artículo de A. Corichi y D. Nuñez [6]. Una vez hecho esto, la acción ADM resulta estar dada por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \left\{ \pi^{ij} \dot{g}_{ij} - N \left[ \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} (\pi^k{}_k)^2 \right) - \sqrt{g} R \right] + 2N_i \pi^{ik}{}_{|k} \right\} dt d^3x, \quad (1.10)$$

en la cual  $\pi^{ij}$  son los momentos canónicos conjugados definidos como

$$\pi^{ij} = 16\pi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{g}_{ij}},$$

$\pi^{ik}{}_{|k} = \pi^{ik}{}_{,k} + \Gamma^i{}_{jk} \pi^{jk}$ , y donde se descarta una divergencia total. Observamos que la nueva densidad lagrangiana no depende de  $\dot{N}$  o  $\dot{N}_i$ , por lo cual podemos concluir que son coordenadas no dinámicas.

También es posible definir

$$H_0(\pi^{ij}, g_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} (\pi^k{}_k)^2 \right] - \sqrt{g} R \quad (1.11)$$

$$\text{y } H_i(\pi^{ij}, g_{ij}) = -2\pi^{ik}{}_{|k}, \quad (1.12)$$

para finalmente poder escribir

$$S = \frac{1}{16\pi} \int [\pi^{ij} \dot{g}_{ij} - NH_0 - N_i H_i] dt d^3x, \quad (1.13)$$

con  $H_0 = H_0(\pi^{ij}, g_{ij})$  y  $H_i = H_i(\pi^{ij}, g_{ij})$ .

Si se varía la acción respecto a las diferentes variables obtenemos como resultado varias ecuaciones diferentes;

1. Al variar respecto a  $\pi^{ij}$ , se llega a las condiciones necesarias para que la acción sea una extremal

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \frac{2N}{\sqrt{g}} \left( \pi_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \pi^k{}_k \right) + N_{ij} + N_{j|i}, \quad (1.14)$$

donde  $N_{ij} = \frac{\partial N_i}{\partial x^j} - N^k \Gamma_{kij}$ .

2. Si variamos respecto a  $g_{ij}$  obtenemos el resto de las ecuaciones dinámicas de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi^{ij}}{\partial t} = & -N\sqrt{g} \left( R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \right) + \frac{1}{2} \frac{N}{\sqrt{g}} g^{ij} \left( \pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} (\pi^k{}_k)^2 \right) - \frac{2N}{\sqrt{g}} \left( \pi^{im} \pi_m{}^j - \frac{1}{2} \pi^{ij} \pi^k{}_k \right) \\ & + \sqrt{g} \left( N^{ij} - g^{ij} N^{lm}{}_{|m} \right) + \left( \pi^{ij} N^m \right)_{|m} - N^i{}_{|m} \pi^{mj} - N^j{}_{|m} \pi^{mi} + \dots, \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde  $N^{ij} = [N_{,k} g^{ki}]_{,i} g^{ij} + [N_{,k} g^{kz}] \Gamma_{zi}^j g^{ij}$  y  $N^{lm}{}_{|m} = (g)^{-\frac{1}{2}} [g^{ms} \sqrt{g} N_{,s}]_{,m}$  y los puntos suspensivos son para casos en los que hay otros campos presentes. Ver [18], pag. 525.

Juntas, las dos condiciones anteriores dan las Ecuaciones de Einstein e involucran  $\pi^{ij}$ ,  $g_{ij}$ ,  $N$  y  $N_i$  así como sus derivadas espaciales únicamente. Estas ecuaciones son las que mueven  $\pi^{ij}$  y  $g_{ij}$  de una hipersuperficie  $x^0 = t_1 = cte_1$  a otra  $t_2 = cte_2$ .

3. Al variar respecto a  $N_\mu$ , donde incluimos  $N = N_0$ , se obtiene que  $H_\mu = 0$ . La ecuación para  $\mu = 0$  es la constricción hamiltoniana, las otras tres son llamadas constricciones espaciales. Además son las ecuaciones de valores iniciales que deben

satisfacerse y evitan que  $\pi^{ij}$  y  $g_{ij}$  sean especificadas arbitrariamente a cualquier tiempo.

Las cuatro constricciones producen que no todas las  $\pi^{ij}$  y  $g_{ij}$  sean independientes, por consiguiente el problema fundamental que se busca resolver con la formulación ADM es poder identificar un conjunto de variables canónicamente conjugadas que permitan poner a la acción en forma canónica, en términos de dicho conjunto [21]. Una vez hecho ésto, es posible pasar a discutir el problema de la cuantización del campo gravitacional.

## Capítulo 2

# Introducción a la Teoría Cuántica de Campos

### 2.1 Mecánica Cuántica

La mecánica cuántica surgió como resultado de varias observaciones y experimentos en los cuales los métodos clásicos no funcionaban o llevaban a contradicciones e inconsistencias. Por ello, en el caso límite de considerar números cuánticos grandes, debe conducir a la mecánica clásica por lo cual no es sorprendente que incluya generalizaciones de las ideas y métodos de ésta. Algunas de las observaciones que dieron pie a la mecánica cuántica y que surgieron como resultado de los experimentos mencionados son el comportamiento de partícula que presenta la radiación, las propiedades ondulatorias de la materia, y la cuantización de cantidades físicas. Las dos primeras observaciones llevaron a plantear la dualidad onda-partícula. Conceptos como éste contribuyeron a cambiar considerablemente la visión del hombre respecto a su entorno y han influido en varias áreas de investigación para modificar su enfoque respecto a los fenómenos observados. Por ende, haremos un breve repaso de los conceptos más fundamentales de esta teoría como son la Relación de Dispersión o Principio de Indeterminación, las funciones de onda y los operadores cuánticos, la ecuación de Schrödinger y las distintas representaciones de las funciones de onda.

### 2.1.1 Relación de Dispersión o Principio de Indeterminación

La mayoría de las teorías clásicas consideran que el método de observación no influye de ninguna manera en las variables a medir, cosa que en la teoría cuántica es cuestionada. A partir de dicho cuestionamiento, Heisenberg encontró que existe una relación entre la posición y el momento conocida como **Relación de Dispersión o Principio de Indeterminación**

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar, \quad (2.1)$$

siendo  $\hbar = h/(2\pi)$  donde  $h$  es la constante de Planck. Esta relación da un límite respecto a la precisión con la que se pueden conocer la posición y el momento simultáneamente. Debido a que en mecánica clásica se considera que el estado de un sistema puede conocerse al dar la posición y la velocidad de cada partícula del sistema a un tiempo inicial  $t_0$  y que la evolución del sistema está dada por las ecuaciones de movimiento, vemos que no respeta la Relación de Dispersión. En consecuencia, debe buscarse otra manera de representar el estado del sistema sin tener que pedir el poder conocer la posición y la velocidad (momento) al mismo tiempo.

### 2.1.2 Funciones de onda y operadores cuánticos

El estado de un sistema puede representarse por medio de una función compleja  $\Psi(x, t)$  de las coordenadas del sistema, como veremos más adelante, a partir de sus características. En este caso consideraremos una sola dimensión espacial representada por  $x$ . Dicha función recibe el nombre de **función de onda** ya que podemos pensar en que una partícula puede ser representada como un paquete de ondas localizado precisamente en el punto donde se encuentra dicha partícula. También se le conoce como vector de estado ya que puede pensarse como un vector en el espacio de Hilbert. Esto implica que la función es continua en  $x$  y de cuadrado integrable, de modo que  $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx \leq \infty$ , i. e. se desvanece en los extremos. Si está normalizada,  $\Psi(x, t) \Psi^*(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$ , donde el asterisco es el complejo conjugado, representa la probabilidad de encontrar la

partícula en  $x$  al tiempo  $t$ , es decir con coordenadas  $(x, t)$ . Debido a que existe una relación entre la posición  $x$  y el momento  $p$ , la función de onda puede escribirse como

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \Phi(p, t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} [px]\right) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \Phi(p) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left[px - \frac{p^2 t}{2m}\right]\right) dp,$$

donde  $m$  es la masa de la partícula bajo estudio. La relación anterior está dada por una Transformada de Fourier y por lo tanto es posible obtener  $\Phi(p, t)$  en función de  $\Psi(x, t)$  con una Transformada Inversa de Fourier. Naturalmente  $|\Phi(p, t)|^2$  representa la probabilidad de encontrar la partícula al tiempo  $t$  con momento  $p$ . Al utilizar  $\Phi$  se dice que estamos en el espacio de momentos mientras que cuando usamos  $\Psi$  estamos en el espacio de configuración. [8]

Los operadores desempeñan un papel importante en la mecánica cuántica ya que representan a las cantidades dinámicas (observables) del sistema. Los operadores actúan, u operan, sobre funciones de onda. Cuando hacemos una medición del sistema y medimos la observable  $\mathcal{O}(x)$ , su **valor esperado**, de expectación o promedio es  $\langle \mathcal{O}(x) \rangle = \int \Psi^*(x, t) \mathcal{O}(x) \Psi(x, t) dx$ . Físicamente, el valor esperado es el promedio de los resultados de muchos experimentos para medir dicha observable en sistemas idénticos y bajo las mismas condiciones. Con los operadores podemos construir la llamada **ecuación de eigenvalores**

$$\mathcal{O}\varphi_o(x) = \alpha\varphi_o(x), \quad (2.2)$$

donde  $\alpha$  son los eigenvalores (números) y  $\varphi_o(x)$  las eigenfunciones. Las eigenfunciones son funciones que describen el estado de un sistema cuando alguna cantidad dinámica del mismo tiene un valor definido, siendo ese valor el eigenvalor. Las eigenfunciones forman una base completa en términos de la cual podemos desarrollar cualquier función y permiten obtener la probabilidad de que una medición arbitraria del sistema de precisamente el eigenvalor correspondiente.

Entre los operadores existen ciertas relaciones, una de ellas es la de conmutación. El **conmutador** de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  está dado por  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$  y corresponde clásicamente a los

Paréntesis de Poisson. Cuando dos operadores conmutan, i. e.  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0$ , pueden tener eigenfunciones simultáneas. Un operador muy importante que representa al momento es

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Es importante ya que uno de los primeros pasos para hacer la transición de un planteamiento clásico a uno cuántico es cambiar la posición por el operador de posición (que en esta representación es solamente multiplicación por  $x$ ) y el momento por este operador diferencial. Además hay que notar que  $[p, x] = -i\hbar$  y que en toda la discusión anterior debe interpretarse el momento como este operador diferencial. [8]

### 2.1.3 Ecuación de Schrödinger y distintas representaciones

Una vez que tenemos la función de onda que representa el estado del sistema podemos hablar de su evolución en el tiempo, la cual está dada por la Ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \mathcal{H} \Psi(x, t), \quad (2.4)$$

donde  $\mathcal{H}$  es el operador hamiltoniano que permite obtener la energía del sistema ya que sus eigenvalores son la energía. Si  $\mathcal{H}$  no depende explícitamente del tiempo, al resolver la ecuación (2.4) es posible obtener

$$\Psi(x, t) = \exp\left(-\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}\right) \Psi(x, 0), \quad (2.5)$$

donde  $\Psi(x, 0) = \Psi(x)$  es el estado del sistema a un tiempo inicial que denotamos por 0. Si ahora obtenemos el valor esperado de una observable  $\mathcal{A}$  tenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A} \rangle &= \int \Psi^*(x, t) \mathcal{A} \Psi(x, t) dx \\ &= \int \Psi^*(x, 0) \exp\left(\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}\right) \mathcal{A} \exp\left(-\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}\right) \Psi(x, 0) dx \end{aligned} \quad (2.6)$$



$$= \int \Psi^*(x) \mathcal{A}(t) \Psi(x) dx \quad (2.7)$$

En este caso es posible dar dos interpretaciones:

1) En (2.6), es posible apreciar que las funciones de onda, o vectores de estado, cambian con el tiempo, quedándose fijo el operador que hace el papel de eje coordenado. Se le llama **Representación de Schrödinger**.

2) En (2.7), son los vectores de estado los que permanecen fijos, mientras que el operador cambia con el tiempo. Esta es la **Representación de Heisenberg**. [4]

Si diferenciamos la ecuación (2.7) obtenemos una ecuación que determina la variación temporal de las variables dinámicas

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{A}, \mathcal{H}] .$$

la cual actúa como una ecuación de movimiento en la Representación de Heisenberg, siendo ésta, a veces, más utilizada en la teoría cuántica de campos [20]. En esta tesis utilizamos la representación de Schrödinger.

## 2.2 Teoría Clásica de Campos

En varias áreas de la física clásica se introduce el concepto de **campo** de fuerza para describir la interacción entre partículas. En lugar de que una partícula actúe sobre otra, crea un campo alrededor de sí misma de modo que cierta fuerza actúa sobre cualquier otra partícula localizada en este campo [16]. Es un concepto muy útil ya que no es necesario especificar cada una de las fuerzas que actúan sobre una partícula, basta con dar su posición en el campo de fuerzas para poder obtener su comportamiento. Se ha encontrado que es posible tratar el campo como un sistema mecánico con un número infinito de grados de libertad ya que se considera como un continuo. En este caso, el campo es descrito por una función de campo que corresponde a un número infinito de grados de libertad [4]. Las ecuaciones de movimiento de las funciones de campo

pueden obtenerse de dos maneras, análogas a las de la mecánica clásica y son presentadas brevemente en la siguiente sección para posteriormente ejemplificar uno de esos métodos con un campo unidimensional: una cuerda vibrante.

## **2.2.1 Formalismos de la Teoría Clásica de Campos**

### **Formulación Hamiltoniana o canónica**

Las cantidades fundamentales son las coordenadas generalizadas y los momentos conjugados a ellas, así como el hamiltoniano. Las ecuaciones canónicas y las variables dinámicas se obtienen directamente del hamiltoniano de manera semejante a la mecánica clásica. La desventaja de este método para la relatividad es que privilegia al tiempo de modo que deja de ser una formulación covariante. Por ello existen algunos esfuerzos para desarrollar una formulación covariante de la física cuántica en lugar de intentar cuantizar la relatividad.

### **Formulación Lagrangiana**

A partir del lagrangiano del sistema y del Principio de Mínima Acción se obtienen las ecuaciones de movimiento, mientras que las variables dinámicas son definidas como invariantes que corresponden a varias transformaciones del sistema de coordenadas y de las funciones de campo. De esta manera aparecen las cuatro coordenadas espaciotemporales de un modo simétrico, sin privilegiar ninguna coordenada. Precisamente es este el método utilizado en el capítulo 1 al obtener la generalización a campos del Principio de Mínima Acción y de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Para ver una discusión más completa, consultar la referencia [4], pags. 11 y 12.

## **2.2.2 El problema de la cuerda vibrante**

Como mencionamos anteriormente, se puede considerar a un campo como un sistema mecánico con un número infinito de grados de libertad y para ejemplificar este proceso,

vamos a considerar el equivalente a un campo unidimensional: una cuerda vibrante fija en ambos extremos. En la siguiente sección usaremos este mismo ejemplo para ejemplificar la cuantización de un campo. Por simplicidad vamos a utilizar la formulación hamiltoniana y nos basaremos en el tratamiento que se da a este problema en la referencia [10], pags. 249 y 250.

Sea una cuerda horizontal de longitud  $L$  fija en ambos extremos de modo que esté tensa, con uno de los extremos en el origen de coordenadas  $x = 0$ . Si desplazamos verticalmente la cuerda en algún punto, comenzará a vibrar y podemos hablar del desplazamiento vertical y del elemento de cuerda observado, notando que  $y = y(x)$ . Primero introducimos un nuevo conjunto de coordenadas al desarrollar el desplazamiento en una serie de Fourier

$$y = \sum_{s=1}^{\infty} q_s \operatorname{sen} \left( \frac{s\pi x}{L} \right), \quad (2.8)$$

con  $s \in \mathbb{N}$ . Las  $q_s$  son las coordenadas del sistema y forman un conjunto infinito. En particular podemos decir que  $q_s$  es la proyección de  $y$  sobre el  $s$ -ésimo vector que forma la base del sistema, en este caso  $\operatorname{sen}(s\pi x/L)$ .

Si llamamos  $\rho$  la masa por unidad de longitud tenemos que la energía cinética del sistema está dada por

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^L \dot{y}^2 dx = \frac{\rho}{2} \sum_{s,u} \dot{q}_s \dot{q}_u \int_0^L \operatorname{sen} \left( \frac{s\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{u\pi x}{L} \right) dx.$$

Recordando que  $\operatorname{sen}(s\pi x/L)$  y  $\operatorname{sen}(u\pi x/L)$  son ortogonales y que  $\int_0^L \operatorname{sen}^2(s\pi x/L) dx = L/2$ , tenemos:

$$T = \frac{\rho}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \dot{q}_s^2 \frac{L}{2} = \frac{M}{4} \sum_{s=1}^{\infty} \dot{q}_s^2, \quad (2.9)$$

donde  $M$  es la masa total de la cuerda.

A su vez, la energía potencial del sistema será

$$V = \int_0^L F dl = \tau \int_0^L \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{\tau}{2} \sum_{s,u} \frac{s u \pi^2}{L^2} q_s q_u \int_0^L \cos \left( \frac{s \pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{u \pi x}{L} \right) dx,$$

donde  $\tau$  es la tensión en la cuerda y utilizamos el hecho de que al desplazar la cuerda, su nueva longitud está dada por  $L + \Delta L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$ , con  $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$ . Como buscamos  $dl$ , podemos hacer la aproximación que a desplazamientos pequeños  $\sqrt{1 + y'^2} \approx 1 + \frac{1}{2} y'^2$  y así resulta que  $dl = \frac{1}{2} y'^2 [13]$ . Utilizamos la ortogonalidad de los cosenos para obtener finalmente

$$V = \frac{\tau}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^2 \pi^2}{L^2} q_s^2 \frac{L}{2} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^2 \pi^2 \tau}{4L} q_s^2. \quad (2.10)$$

El momento conjugado a una  $q_s$  está dado como

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \frac{M}{2} \dot{q}_s,$$

y por ser un sistema conservativo, el hamiltoniano clásico resulta ser

$$H = T + V = \sum_{s=1}^{\infty} \left( \frac{M}{4} \dot{q}_s^2 + \frac{s^2 \pi^2}{4L} \tau q_s^2 \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \left( \frac{p_s^2}{M} + \frac{s^2 \pi^2}{4L} \tau q_s^2 \right). \quad (2.11)$$

A partir de la ecuaciones de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} = \dot{q}_s, \quad \frac{\partial H}{\partial q_s} = -\dot{p}_s,$$

podemos obtener la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial^2 q_s}{\partial t^2} = -\frac{s^2 \pi^2 \tau}{ML} q_s, \quad (2.12)$$

la cual muestra que cada  $q_s$  varía como un oscilador armónico simple en función del tiempo. Entonces el movimiento total de la cuerda puede ser descrito por una infinidad de osciladores armónicos simples independientes.

## 2.3 Teoría Cuántica de Campos

Clásicamente se considera que se tienen por un lado partículas y por otro campos que median la interacción entre las mismas. En la formulación de la mecánica cuántica se observa que las ondas y las partículas son una representación del mismo "objeto", y como en la teoría clásica de campos la presencia y naturaleza de las fuerzas (campos) está relacionada con la existencia de partículas, debe poderse establecer una descripción unificada de partículas, ondas y campos [30]. Dicha descripción se logra con la Teoría Cuántica de Campos, cuyos principios básicos presentaremos brevemente a continuación. Para comenzar comentaremos lo que quiere decir cuantizar un campo. Después procederemos a mencionar los métodos utilizados para ello y presentaremos el ejemplo de la cuantización de la cuerda vibrante. Finalizamos mencionando los problemas que surgen al cuantizar, o intentar cuantizar, un campo.

### 2.3.1 Interpretación de lo que es cuantizar un campo

Existen dos puntos de vista equivalentes y relacionados respecto a "visualizar" lo que es cuantizar un campo:

1. Cuantizar borra la distinción entre partículas y campos; las partículas se vuelven difusas y están sujetas a una ecuación de onda, mientras que los campos, representados clásicamente como continuos, adquieren una naturaleza discreta [23]. En otras palabras, cuantizar un campo es el procedimiento por medio del cual se asignan partículas con cantidades discretas de energía (cuantos) al campo. Dichos cuantos describen la interacción entre las partículas que crean el campo y corresponden a varios estados energéticos posibles de los osciladores que forman el campo. Por lo anterior puede decirse que la teoría cuántica de campos es una teoría de la interacción de partículas elementales [4].
2. Cuantizar implica decir que existen funciones de onda que describen a los conjuntos de partículas cuyas transformaciones mutuas están contenidas explícitamente en la

teoría cuántica de campos. De acuerdo a esto, las funciones de onda toman una forma de operadores. Las funciones de onda están definidas por las ecuaciones de campo y por las reglas de conmutación que cumplen. Las ecuaciones de campo también se vuelven operadores que actúan sobre una función de onda común a todos los campos llamada función de estado [4].

Para ver la relación entre ambos puntos expuestos, partamos de la segunda interpretación. Si tenemos un campo, al cuantizarlo debemos interpretarlo como una teoría de varias partículas. De acuerdo a esto, si  $\Phi(x)$  es el campo ya cuantizado,  $|\Phi(x)|^2$  es proporcional al número de partículas presentes y hay que reinterpretar a  $\Phi(x)$  como un operador. En la representación de Heisenberg, es posible desarrollarlo en términos de una serie de Fourier sobre los operadores de aniquilación y creación. Se llaman así ya que actúan sobre los cuantos de la primera interpretación, aumentando o disminuyendo su número y, consecuentemente, la energía del sistema. La cantidad  $\Phi(x, t)$  juega un papel análogo al que juega el vector de posición  $x(t)$  en la mecánica cuántica por lo tanto al hablar del momento conjugado a  $\Phi(x, t)$ ;  $\Pi(x, t)$ , definido por el campo, surgen reglas de conmutación que deben satisfacerse y utilizarse para construir las de los operadores de aniquilación y creación [23].

### 2.3.2 Métodos para cuantizar un campo

Existen varios métodos para cuantizar un campo. El más consistente y mejor desarrollado es la **cuantización canónica** y está basado en la formulación Hamiltoniana de las teorías Lagrangianas. Las teorías Lagrangianas son aquellas que permiten obtener las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de Mínima Acción. Una característica de dichas teorías en su formulación Hamiltoniana es que presentan constricciones, por lo tanto la cuantización canónica puede verse como la cuantización de sistemas Hamiltonianos con constricciones. A pesar de que este método tiene ventajas, un problema que tiene para efectos de la relatividad es el no ser covariante.

Una alternativa es la **cuantización Lagrangiana** que si es covariante. Se basa

en construir la acción efectiva del sistema, o más generalmente, construir la funcional generadora de funciones de Green [5]. Otra alternativa es el método de integrales de trayectoria (integrales funcionales) cuyo objetivo es obtener el propagador del campo por medio de la acción del sistema en cuestión [24]. Dada una función al tiempo  $t_1$ , el propagador da la función correspondiente a un tiempo posterior  $t_2$  [23]. Los dos últimos métodos pueden introducirse independientemente o pueden relacionarse con la cuantización canónica ya que de cierta forma, son derivados de ella.

Para finalizar esta sección, mostraremos el esquema general a seguirse en la cuantización canónica, la cual se basa en construir una teoría cuántica a partir de la versión clásica.

- a) Construir la formulación Hamiltoniana del sistema mecánico clásico. Esto implica poner el hamiltoniano en término de coordenadas generalizadas y momentos. Dado esto, todas las cantidades dinámicas deben poder expresarse en términos de funciones de las coordenadas generalizadas y los momentos.
- b) Especificar el estado del sistema cuántico por un vector de estado (función de onda)  $\Psi$ .
- c) A cada cantidad dinámica del inciso a) se le asigna un operador cuántico y se postulan los operadores de posición y momento para que satisfagan sus respectivas reglas de conmutación. Por lo tanto el hamiltoniano también se vuelve un operador.
- d) Se escribe la ecuación de Schrödinger a partir del hamiltoniano, para obtener la evolución del vector de estado en el tiempo.
- e) Se resuelve la ecuación de Schrödinger para poder obtener, entre otras cosas, los valores de expectación de las cantidades dinámicas del sistema.

En el paso d) es posible utilizar la representación de Heisenberg o la de Schrödinger ya que son equivalentes [24]. Esta sección se basó principalmente en la discusión que aparece en [9], pags. 1 a 5.

### 2.3.3 Cuantización de la cuerda vibrante

Como ejemplo de la cuantización canónica, procederemos a cuantizar la cuerda vibrante utilizando los resultados de la sección 1.2.2., basándonos nuevamente en la referencia [10], pag. 251. La representación utilizada es la de Schrödinger. Para cuantizar la cuerda vibrante hay que trabajar con cada una de las coordenadas independientes  $q_s$  de (2.8) como un oscilador armónico simple ya que satisfacen la ecuación (2.12). Por ser coordenadas independientes, la función de onda "total" que describa el sistema será el producto de las funciones de onda obtenidas para cada componente. La ecuación de Schrödinger que cumplen cada uno de esos factores es

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q_s, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{M} \frac{\partial^2 \Psi(q_s, t)}{\partial q_s^2} + \frac{s^2 \pi^2 \tau}{4L} q_s^2 \Psi(q_s, t),$$

donde utilizamos la forma operacional del hamiltoniano (2.11), del momento (2.3) y de la posición  $q_s$ .

Si  $\Psi(q_s, t) = u(q_s) \exp(-i\mathcal{H}t/\hbar)$ , ver (2.5), observamos que la ecuación de eigenvalores para la energía está dada por  $\mathcal{H}u(q_s) = Eu(q_s)$ , ver (2.2), donde  $E$  es la energía característica del estado, esto es

$$-\frac{\hbar^2}{M} \frac{\partial^2 u(q_s)}{\partial q_s^2} + \frac{s^2 \pi^2 \tau}{4L} q_s^2 u(q_s) = Eu(q_s),$$

rearrreglando términos obtenemos

$$\frac{\partial^2 u(q_s)}{\partial q_s^2} + \frac{M}{\hbar^2} \left[ E - \frac{s^2 \pi^2 \tau}{4L} q_s^2 \right] u(q_s) = 0. \quad (2.13)$$

Si la energía toma los siguientes valores

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \sqrt{\frac{s^2 \tau}{4LM}} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \nu, \quad (2.14)$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  y llamamos  $\nu$  a la frecuencia con la cual el oscilador clásico vibraría, las



soluciones a la ecuación de eigenvalores (2.13) son

$$u_n(q_s) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\alpha_s q_s^2}{2}\right) H_n(\sqrt{\alpha_s} q_s), \quad (2.15)$$

donde  $\alpha_s = (s\pi/h) \sqrt{M\tau/AL}$  y las  $H_n$  son los polinomios de Hermite del argumento indicado.

Ahora hay que ser más específicos con el oscilador que se encuentra precisamente en la coordenada  $q_s$ . Denotemos por  $u_{n_s}(q_s)$  a la función que representa la coordenada  $q_s$  en el estado característico de energía dado por (2.14) con  $n = n_s$ . Entonces la energía de toda la cuerda en dicho estado se obtiene al sumar las energías de las diferentes coordenadas

$$E_C = \sum_{s=1}^{\infty} E_{n_s} = \sum_{s=1}^{\infty} \left(n_s + \frac{1}{2}\right) h\nu_s, \quad (2.16)$$

y la función de onda total que representa el estado de toda la cuerda está dada por

$$U = \prod_{s=1}^{\infty} u_{n_s}(q_s).$$

### 2.3.4 Problemas que surgen al cuantizar un campo

De la ecuación (2.16) se puede observar que hay un problema respecto al valor que toma la energía ya que siempre resulta ser infinita, aún en el caso de que todos los osciladores estén en el estado base, i. e. todas las  $n_s = 0$ . Hay dos explicaciones que se pueden dar a este resultado, pero finalmente se reducen a lo mismo.

Por un lado podemos decir que el problema surge de considerar a la cuerda, un objeto material y finito, como formada por un número infinito de coordenadas. Para arreglar este problema podemos hacer que la suma en la ecuación (2.8) sea finita. En este caso, aún en el estado base, la energía tendría un valor finito, aunque muy grande.

Por otro lado, se puede decir que el cero de la energía es totalmente arbitrario y que el valor mínimo de la ecuación (2.16) representa una constante aditiva que hay que restar.

Esto tampoco resuelve el problema de la cuerda vibrante ya que aún así podría llegar a tener una energía finita muy grande.

En general, en cualquier método que se utilice, surge el problema de los infinitos y, en muchos casos, utilizar el artificio de mover el cero de la energía, por ejemplo, no resuelve el problema. En otros casos el problema del infinito se presenta en que la función de onda que se obtiene no está acotada y, en consecuencia, no representa un paquete de ondas y mucho menos puede relacionarse con una función de probabilidad. Se puede intentar resolver este problema con un artificio equivalente al de mover el cero de la energía pero, debido al hecho de que hay varias maneras de restar ese infinito y aún no se conoce un criterio que permita seleccionar una manera adecuada, no siempre es posible (aunque hay excepciones notables como la electrodinámica cuántica). A este artificio se le conoce como renormalización. En el capítulo siguiente hablaremos, en particular, de los problemas que surgen al intentar cuantizar el campo gravitacional.

## Capítulo 3

# Simetría Esférica, Teorema de Birkhoff y Minisuperespacios

### 3.1 Campos gravitacionales esféricamente simétricos

Los campos gravitacionales esféricamente simétricos son aquellos en los cuales las variables físicas no cambian sobre toda una hipersuperficie tetradimensional esférica. En otras palabras, la expresión para el intervalo  $ds$  es la misma para todos los puntos localizados a la misma distancia del centro.

Los campos gravitacionales esféricamente simétricos son producidos por una distribución esférica de materia la cual puede estar estática o tener un movimiento esféricamente simétrico, i. e. de tal manera que la velocidad en cada punto este dirigida a lo largo del radio de la esfera, aunque realmente ambos casos son equivalentes como veremos más adelante [3]. Su importancia radica en el hecho de que muchos cuerpos masivos del universo presentan, aproximadamente, simetría esférica. Además la primera solución obtenida a las ecuaciones de Einstein fué para un campo gravitacional estático con simetría esférica [25] y [2].

Para deducir el campo gravitacional de un cuerpo esférico y estático comenzamos con la métrica de la relatividad especial en la forma esféricamente simétrica

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$ . Para introducir el efecto gravitacional del cuerpo, i. e. la curvatura en el espacio-tiempo debida a su presencia, sin modificar la simetría esférica, permitimos que las componentes del tensor métrico que ya son diferentes de cero tomen diferentes valores:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + a^2(r) d\Omega^2, \quad (3.1)$$

siendo  $\Phi(r)$  y  $\Lambda(r)$ . Como estamos buscando la solución a las ecuaciones de Einstein para una distribución estática de materia, las componentes del tensor métrico no pueden depender del tiempo. Es posible escoger la coordenada radial como  $a(r) = \bar{r}(r)$ , considerando que  $\bar{r}$  sea tal que la circunferencia de un círculo con centro en el origen de coordenadas sea igual a  $2\pi\bar{r}$ , entonces al sustituir en la ecuación (3.1) e ignorar las tildes tenemos el elemento de línea

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.2)$$

donde solamente hay dos incógnitas;  $\Phi(r)$  y  $\Lambda(r)$ . A estas coordenadas se les llama **coordenadas de Schwarzschild**. [16]

Es importante saber que significado físico tienen las coordenadas utilizadas anteriormente, por lo cual lo mencionaremos brevemente a continuación. Las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$  representan ángulos en una esfera ya que en cualquier superficie bidimensional a  $r$  y  $t$  constante, la distancia entre dos puntos cercanos esta dada por  $ds^2 = r^2 d\Omega^2$ , como corresponde al hablar de coordenadas esféricas tridimensionales. El área de dicha esfera bidimensional es

$$A = \int (r d\theta) (r \text{sen}\theta d\phi) = 4\pi r^2,$$

por lo tanto, podemos decir que la métrica (3.2) nos dice como medir la coordenada radial  $r$  que emplea. Se mide el área  $A$  de la esfera formada por todos los puntos rotacionalmente equivalentes al punto  $P$  en el cual se quiere obtener  $r(P)$  para después calcular

$$r(P) = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}.$$

Lo anterior es equivalente a pedir que la circunferencia de dicha área, ó de un círculo centrado en el origen de coordenadas, sea igual a  $2\pi r$  [12]. Finalmente la coordenada  $t$  debe cumplir con ciertas propiedades geométricas, en particular hay que recordar que  $dt$  es el intervalo de tiempo entre dos eventos medidos por un observador que se encuentra en una región suficientemente alejada para que el espacio-tiempo parezca plano, no es el tiempo propio [18].

### 3.1.1 Solución de Schwarzschild

A partir de la expresión para un campo gravitacional esféricamente simétrico en coordenadas de Schwarzschild (3.2) y tomando en cuenta que estamos buscando una solución para el vacío, i.e. fuera de la masa que produce el campo, y que queremos recuperar la métrica plana en el infinito ( $r \rightarrow \infty$ ), se puede obtener la siguiente solución a las ecuaciones de Einstein

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.3)$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ , llamada solución ó métrica de Schwarzschild [2] y las coordenadas tienen el mismo significado físico mencionado anteriormente.

Observamos que en  $r = 0$  hay una singularidad del espacio-tiempo, mientras que en  $r = 2m/c^2$  hay un punto conflictivo el cual puede ser eliminado con un cambio de coordenadas. Al radio

$$r = \frac{2m}{c^2} \quad (3.4)$$

se le conoce como **radio de Schwarzschild** y lo denotaremos por  $r_s$ . Podemos ver su importancia recordando el concepto de velocidad de escape de la mecánica clásica. *Velocidad de escape* es la velocidad mínima que debe poseer un cuerpo para lograr “escapar” del campo gravitacional producido por otro cuerpo de masa  $M$ . “Escapar” quiere decir ir desde una distancia inicial  $\rho$  medida desde el centro del cuerpo que produce el campo hasta infinito, naturalmente  $\rho$  se encuentra fuera del cuerpo que produce el campo. Un

cuerpo con la velocidad de escape describe una trayectoria parabólica tal que conforme el cuerpo se aleja, su velocidad tiende a cero. La expresión para la velocidad de escape  $v$  es

$$v = \sqrt{\frac{2M}{\rho}} \quad (3.5)$$

y se obtiene de consideraciones de energía. Supongamos que queremos ver la distancia inicial  $\rho = R$  a la cual la velocidad de escape resulta ser igual a la velocidad de la luz  $v = c$ , en este caso, a partir de (3.5), podemos obtener la expresión buscada

$$R = \frac{2M}{c^2},$$

que es igual a la expresión para el radio de Schwarzschild (3.4) si  $m = M$ . Es claro que el cálculo previo tiene sus bemoles al relacionarlo con la relatividad general, pero lleva al resultado correcto y permite obtener una idea intuitiva de lo que quiere decir el radio de Schwarzschild [3].

Regresando al ámbito de la relatividad general, si consideramos a  $r$  como el radio de una estrella, cuando  $r \gg r_s$  la curvatura es pequeña y los efectos relativistas en el entorno de la estrella son despreciables. En cambio, cuando  $r \ll r_s$  la curvatura es grande y predominan los efectos relativistas [25]. Entonces cuando  $r < r_s$ , la curvatura pronunciada provoca que la región dentro de  $r_s$  quede aislada del resto del universo y que ni siquiera la luz pueda salir ya que su velocidad no es suficiente para poder escapar del campo gravitacional de la estrella. Si se ve desde el punto de vista del exterior de la "estrella", lo que ocurre es que la luz proveniente de otras estrellas que se encuentran atrás de ella, queda capturada haciendo que aparezca una región oscura en el espacio en la cual aparentemente no hay estrellas u otros objetos celestes. Esto es lo que se conoce como un hoyo negro [12].

### 3.1.2 Teorema de Birkhoff

La solución de Schwarzschild engloba a un conjunto de soluciones de las ecuaciones de Einstein, como puede apreciarse en el Teorema de Birkhoff enunciado a continuación:

**Teorema 1** *Sea la geometría de una región dada del espacio-tiempo: 1) esféricamente simétrica, y 2) una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío. Entonces esa geometría es necesariamente una parte de la geometría (métrica) de Schwarzschild.*

En otras palabras, la métrica de Schwarzschild es una descripción única del espacio-tiempo fuera de una distribución de masa esféricamente simétrica, entonces todas las soluciones esféricamente simétricas a las ecuaciones de Einstein que se desvanecen en el infinito son equivalentes. Aún cuando la masa realice un movimiento esféricamente simétrico, por ejemplo al colapsarse manteniendo la simetría, la estructura del espacio-tiempo fuera de la masa está descrita por la métrica de Schwarzschild y, consecuentemente, puede considerarse como estática. También puede interpretarse de manera que niegue la emisión de ondas esféricamente simétricas [27]. Para ver una demostración detallada del Teorema de Birkhoff se puede consultar el libro [18], página 843.

### 3.2 Superespacios y minisuperespacios

Cuando se habla de la relatividad general, se piensa en un espacio tetradimensional en el cual se desarrolla toda la acción. Hay otra manera de visualizar la evolución del espacio-tiempo la cual surge de notar que la estructura geométrica del espacio (espacio tridimensional) es la que cambia con el tiempo, no así la estructura del espacio-tiempo. Para incorporar este hecho en las teorías de la gravitación, surgió el concepto del **superespacio** que es el espacio formado por todas las 3-geometrias (clase de equivalencia de las 3-métricas equivalentes entre sí bajo transformaciones de coordenadas) y es el espacio en el cual se desarrolla la dinámica del campo gravitacional [18].

En el superespacio, cada 3-geometría está representada por un punto, y la evolución temporal de dicha 3-geometría describe una trayectoria dentro del superespacio [22].

Al hablar de la formulación ADM en el capítulo 1, implícitamente estábamos haciendo referencia a esta manera de visualizar la evolución del espacio-tiempo ya que nos restringimos a un espacio con una 3-geometría (hipersuperficies) en lugar de trabajar con una 4-geometría. El conjunto de 3-geometrías que forman la trayectoria pueden arreglarse para formar la 4-geometría o, en otras palabras, el espacio-tiempo correspondiente, como veremos más adelante. Dicho arreglo le da su estructura al espacio-tiempo así generado. Para hacer el arreglo, es necesario definir los parámetros (la función de lapso y el vector de desplazamiento) que describen las rebanadas  $t = cte.$  de la formulación ADM [22]. Entonces, clásicamente, para hablar de la dinámica del espaciotiempo, se da la 3-geometría y su razón de cambio (temporal) a un tiempo determinado y se resuelvan las ecuaciones de Einstein para la 4-geometría.

Cuando además de considerar al espacio de todas las 3-geometrías imponemos restricciones de simetría, hablamos de un minisuperespacio [24]. Los minisuperespacios también contienen la evolución de 4-geometrías como trayectorias en el sector del superespacio considerado. En la presente tesis el problema que se intenta resolver es cuantizar dos minisuperespacios con simetría esférica para así dar los primeros pasos hacia lo que podría ser un Teorema Cuántico de Birkhoff.

### 3.3 Cuantización del campo gravitacional

En el ambiente cuántico, debido a la relación de dispersión (principio de indeterminación), no es posible dar la 3-geometría así como su razón de cambio simultáneamente. En términos de superespacio, la teoría cuántica hace que la distinción entre las 3-geometrías que se encuentran en una trayectoria y aquellas que no, sea difusa. Al considerar distancias del orden de la longitud de Planck ( $1.6 \times 10^{-33} cm$ ), surgen fluctuaciones en la geometría las cuales hacen que la trayectoria que atraviesa el superespacio tenga "grosor". La manera de cuantificar esto es hacer que la teoría cuántica le asigne a cada 3-geometría una amplitud de probabilidad que, en la aproximación clásica, sea mayor cerca de la



trayectoria encontrada clásicamente y caiga rápidamente fuera de ella. Sin embargo, debido a las fluctuaciones, hay un rango de 3-geometrias con una amplitud de probabilidad semejante [18]. Esa amplitud de probabilidad nos da la probabilidad de encontrar al espacio con la 3-métrica correspondiente a un tiempo dado. La dinámica aparece más claramente al obtener la amplitud de probabilidades para un conjunto de 3-geometrias ya que en ese caso se superponen para construir un paquete de ondas localizado. La fase de esta amplitud de probabilidades está dada por la acción ADM y es ésta la que determina si hay interferencia constructiva para poder crear el paquete de ondas localizado o no. Con esta visión se obtiene una descripción consistente con la teoría cuántica de la dinámica del campo gravitacional.

Una vez discutido el aspecto físico de lo que es cuantizar el campo gravitacional, veamos el procedimiento matemático empleado. Ya que se tiene la formulación ADM, es posible pasar a la representación cuántica de las ecuaciones de movimiento de las 3-geometrias construyendo la Ecuación de Wheeler-DeWitt

$$\mathcal{H}\Psi = 0. \quad (3.6)$$

$\mathcal{H}$  se obtiene al reescribir el hamiltoniano ADM con las posiciones y los momentos sustituidos por su contrapartes en forma de operadores cuánticos. La Ecuación de Wheeler-DeWitt es el equivalente cuántico de la ecuación Einstein-Hamilton-Jacobi para gravitación,

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{1}{2} g_{ij} g_{kl} - g_{ik} g_{jl} \right) \frac{\delta^2 I}{\delta g_{ij} \delta g_{kl}} + \sqrt{g} R = 0, \quad (3.7)$$

la cual es una ecuación de movimiento en el espacio de 3-métricas [14]. Si designamos por  $I$  a

$$I = \int_{\Sigma_{t_1}}^{\Sigma_{t_2}} \left\{ \pi^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right\} d\Sigma,$$

la ecuación anterior dice como se propagan los frentes de  $I$  constante en el superespacio. En la ecuación de Wheeler-DeWitt  $\mathcal{H}$  y los momentos se consideran como operadores cuánticos. Si es posible encontrar la función de onda que satisface la ecuación (3.6)

para la métrica seleccionada, se ha conseguido cuantizar ese superespacio. Las distintas soluciones a la ecuación (3.7) representan estados cuánticos diferentes para el sistema. Cabe mencionar que hay un grupo (sheaf) de trayectorias en el superespacio, las cuales generan el mismo espacio-tiempo, entonces, de alguna manera, podemos decir que una 4-geometría particular está representada en el superespacio por una o varias trayectorias [7].

## Capítulo 4

# Hacia la cuantización de dos minisuperespacios

### 4.1 Minisuperespacio con métrica A

Para cuantizar un minisuperespacio primero hay que definir su 3-métrica y a partir de ella definir los momentos conjugados a las variables dinámicas a considerar. Una vez hecho esto, se puede proceder a obtener la acción ADM y finalmente intentar plantear y resolver la ecuación de Wheeler-DeWitt. Un punto importante a considerar es la consistencia de la 3-métrica con las ecuaciones de Einstein, dicho desarrollo se encuentra en el apéndice B.

#### 4.1.1 Métrica A; tensor métrico y los momentos conjugados

La métrica de Schwarzschild puede reescribirse en coordenadas isotrópicas por medio de la transformación  $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (t, \bar{r}, \theta, \phi)$  donde

$$r = \bar{r} \left( 1 + \frac{m}{2\bar{r}} \right)^2$$

para obtener el elemento de línea en la forma

$$ds^2 = - \left( \frac{1 - \frac{m}{2\bar{r}}}{1 + \frac{m}{2\bar{r}}} \right)^2 dt^2 + \left( 1 + \frac{m}{2\bar{r}} \right)^4 \left[ d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (4.1)$$

Ver apéndice A para los cálculos. La parte del tensor métrico que nos interesa realmente es la parte espacial, no la temporal, entonces todos los cálculos se hicieron en base a ésta. Esto se debe a que buscamos la cuantización del minisuperespacio representado por la parte espacial del elemento de línea (4.1). En este caso, haciendo  $\bar{r} = r$  observamos que el tensor métrico queda como

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

De aquí es posible ver que  $N_i = g_{0i} = 0$ , pero no lo sustituiremos aún en la acción ya que buscamos obtener las constricciones espaciales. Además observamos que  $g_{22} = r^2 g_{11}$  y  $g_{33} = \text{sen}^2\theta g_{22} = r^2 \text{sen}^2\theta g_{11}$ , entonces

$$\sqrt{g} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^6 r^2 \text{sen}\theta. \quad (4.3)$$

Utilizando la expresión (4.3) y las expresiones para los símbolos de Christoffel (1.1) obtenemos las componentes del tensor de Ricci tridimensional a partir de (1.3)

$$R_{11} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-2} \left(\frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2}\right)^2 - 2 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} \left(\frac{m''}{r} - \frac{m'}{r^2} + \frac{m}{r^3}\right),$$

$$R_{22} = -\frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-2} \left(\frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} \left(m'' r + m' - \frac{m}{r}\right),$$

$$R_{33} = R_{22} \text{sen}^2\theta,$$

las otras componentes son cero debido a que en el tensor métrico las únicas componentes diferentes de cero son las de la diagonal. El escalar de Ricci (1.4) resulta ser

$$R = -\frac{128r^4 m''}{(2r + m)^6} = -\frac{4m''}{r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^6}. \quad (4.4)$$

Por otro lado, a partir de la expresión (1.14), observando que  $N_{ij}$  y  $N_{ji}$  son cero debido a la forma que tiene la métrica seleccionada, obtenemos tres ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial t} = \frac{2N}{\sqrt{g}} \left( \pi_{11} - \frac{1}{2} g_{11} \pi^k_k \right), \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial t} = r^2 \frac{\partial g_{11}}{\partial t} = \frac{2N}{\sqrt{g}} \left( \pi_{22} - \frac{1}{2} r^2 g_{11} \pi^k_k \right), \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial t} = r^2 \text{sen}^2 \theta \frac{\partial g_{11}}{\partial t} = \frac{2N}{\sqrt{g}} \left( \pi_{33} - \frac{1}{2} r^2 \text{sen}^2 \theta g_{11} \pi^k_k \right). \quad (4.7)$$

De (4.5) despejamos  $\pi_{11}$  y con ayuda de (1.14) reescribimos  $\pi^k_k$  para obtener

$$\pi_{11} = \frac{\sqrt{g}}{2N} \frac{\partial g_{11}}{\partial t} + \frac{1}{2} g_{11} \pi^k_k = \frac{2\sqrt{g}}{N} \frac{\partial g_{11}}{\partial t}, \quad (4.8)$$

y a partir de las segundas igualdades en (4.6), (4.7) así como de su comparación con (4.5) obtenemos las siguientes relaciones

$$\pi_{22} = r^2 \pi_{11}, \quad (4.9)$$

$$\pi_{33} = r^2 \text{sen}^2 \theta \pi_{11}. \quad (4.10)$$

Además, estudiando el primer término en la acción ADM, tenemos que podemos reescribirlo como

$$\pi^{ij} g_{ij} = \pi^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial m} \dot{m} \equiv \pi_m \dot{m}$$

de modo que, utilizando la métrica y las relaciones (4.9) y (4.10), obtenemos

$$\pi_m \equiv \pi^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial m} = \pi^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial m} + \pi^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial m} + \pi^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial m} = \frac{6}{r} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^3 \pi^{11},$$

por tanto, despejando encontramos que:

$$\pi^{11} = \frac{r}{6} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-3} \pi_m, \quad (4.11)$$

$$\pi^{22} = \frac{1}{6r} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-3} \pi_m, \quad (4.12)$$

$$\pi^{33} = \frac{1}{6r \text{sen}^2 \theta} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-3} \pi_m. \quad (4.13)$$

Por otro lado, de las constricciones espaciales obtenemos dos ecuaciones diferentes tales que

$$\begin{aligned} & \pi^{11}{}_{,1} + \Gamma_{11}^1 \pi^{11} + \Gamma_{22}^1 \pi^{22} + \Gamma_{33}^1 \pi^{33} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \pi_m}{\partial r} &= \left[ \frac{1}{r} + \frac{5}{2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} \left(\frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2}\right) \right] \pi_m, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} & \text{y } \pi^{22}{}_{,2} + \Gamma_{11}^2 \pi^{11} + \Gamma_{22}^2 \pi^{22} + \Gamma_{33}^2 \pi^{33} = 0 \\ \Rightarrow \pi_m &= \pi_m(r, t, \text{sen} \theta). \end{aligned} \quad (4.15)$$

La ecuación para  $\pi^{33}$  no proporciona información y por ello la omitimos.

#### 4.1.2 Obtención de la acción ADM

El siguiente paso es encontrar la acción ADM del capítulo 1 para esta métrica particular:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \left\{ \pi^{ij} \dot{g}_{ij} - N \left[ \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} (\pi^k{}_k)^2 \right) - \sqrt{g} R \right] + 2N_i \pi^i{}_k \right\} dt d^3x, \quad (4.16)$$

para ello es necesario primero hacer notar que  $d^3x = dr d\theta d\phi$ . Integramos  $\phi$  de 0 a  $2\pi$  y obtenemos

$$S = \frac{1}{8} \int \left\{ \pi^{ij} \dot{g}_{ij} - N \left[ \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} (\pi^k{}_k)^2 \right) - \sqrt{g} R \right] + 2N_i \pi^i{}_k \right\} dt dr d\theta. \quad (4.17)$$

Además definimos un nuevo momento  $\hat{\pi}_m$  justificado por (4.15), de modo que

$$\pi^{ij} \dot{g}_{ij} \equiv \pi_m \dot{m} \equiv \hat{\pi}_m \text{sen} \theta \dot{m}. \quad (4.18)$$

Ahora calculamos por separado cada uno de los términos que aún no hemos obtenido y que componen el integrando, y utilizando las relaciones obtenidas anteriormente tenemos

que:

$$\pi^{ij}\pi_{ij} = 3\pi^{11}\pi_{11} = \frac{r^2}{12} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \hat{\pi}_m^2 \sin^2 \theta,$$

entonces

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \pi^{ij} \pi_{ij} = \frac{1}{12} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \hat{\pi}_m^2 \sin \theta. \quad (4.19)$$

Además

$$\pi^k_k = \pi^{ij} g_{ij} = 3\pi^{11} g_{11} = \frac{r}{2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right) \hat{\pi}_m \sin \theta$$

entonces

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} (\pi^k_k)^2 = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \hat{\pi}_m^2 \sin \theta. \quad (4.20)$$

Finalmente, como queremos obtener una constricción espacial, la correspondiente a  $N_1$ , y escogimos la norma de manera que  $N_2 = N_3 = 0$ , tenemos que  $\pi^{ik} = \pi^{11} \delta^k_1$  y

$$\pi^{11}_{|1} = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r}{6} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-3} \hat{\pi}_m \right] - \frac{r}{6} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \left( \frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2} \right) \hat{\pi}_m - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-3} \hat{\pi}_m \right\} \sin \theta. \quad (4.21)$$

A partir de (4.3), (4.18), (4.19), (4.20) y (4.21) vemos que se puede sacar como factor común a  $\sin \theta$  siendo esa la única dependencia de  $\theta$ . Por lo tanto al integrar  $\theta$  de 0 a  $\pi$  y sustituyendo el escalar de Ricci  $R$  (4.4), obtenemos finalmente

$$S = \frac{1}{4} \int \left\{ \hat{\pi}_m \dot{m} - N \left[ -\frac{1}{24} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \hat{\pi}_m^2 + 4m'' \left(1 + \frac{m}{2r}\right) r \right] + 2N_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r}{6} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-3} \hat{\pi}_m \right] - \frac{r}{6} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \left( \frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2} \right) \hat{\pi}_m - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-3} \hat{\pi}_m \right\} \right\} dt dr.$$

### 4.1.3 Análisis de las constricciones y cuantización

Ahora es necesario hacer el análisis de las constricciones para posteriormente introducir la teoría cuántica e intentar obtener la función de onda que describe el sistema.

Para empezar es necesario limitar a una "caja" esférica nuestro sistema bajo estudio. Decimos "caja" aunque en realidad es el cascarón comprendido entre  $r_o$  y  $R$ , donde  $r_o$

es algo así como el radio de Schwarzschild. Por ello, la integral que aparece en la acción respecto a  $\dot{r}$  será una integral definida y es ahí dentro donde tenemos interés de realizar nuestro estudio. Definimos  $R_o = R - r_o$ .

Veamos la forma que tiene la constricción hamiltoniana, recordando que buscamos resolverla cuando está igualada a cero ( $H_o = 0 \Rightarrow NH_o = 0 \Rightarrow \int NH_o dr = cte.$ ) e introduciendo  $\tilde{N}$  por simplicidad, como veremos más adelante, obtenemos que

$$\int_{r_o}^R \tilde{N} H_o dr = \int_{r_o}^R \tilde{N} \left[ \frac{1}{24} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-4} \hat{\pi}_m - 4m'' \left( 1 + \frac{m}{2r} \right) r \right] dr.$$

Cambiando  $\hat{\pi}_m$  por  $\pi_m$  y redefiniendo  $N = \tilde{N} \frac{1}{24} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-4}$  tenemos

$$\int_{r_o}^R \tilde{N} H_o dr = \int_{r_o}^R N \left[ \pi_m^2 - 96 \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^5 r m'' \right] dr. \quad (4.22)$$

Ahora veamos la forma de la constricción espacial ( $H_i = 0 \Rightarrow N_i H_i = 0 \Rightarrow \int N_i H_i dr = cte.$ ), donde introducimos  $\tilde{N}_1$ ,

$$\int_{r_o}^R \tilde{N}_1 H_1 dr = \int_{r_o}^R \tilde{N}_1 \left[ \pi_m' \left( 1 + \frac{m}{2r} \right) - \left( \frac{1}{r} + \frac{5}{2r} m' - 2 \frac{m}{r^2} \right) \pi_m \right] dr,$$

esto puede reexpresarse como

$$\int_{r_o}^R \tilde{N}_1 \frac{(\pi_m w)'}{w} dr = \int_{r_o}^R N_1 (\pi_m w)' dr, \quad (4.23)$$

donde

$$w = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-5} \quad (4.24)$$

y  $N_1 = \frac{1}{w} \tilde{N}_1$ . Sin embargo, para que la constricción espacial sí sea igual a cero, necesitamos que

$$(\pi_m w)' = \pi_m' w + \pi_m w' = 0. \quad (4.25)$$



Desarrollemos en una serie de eigenfunciones  $f_l(r)$  las funciones

$$\pi_m = p_0(t) + \sum_l p_l(t) f_l(r), \quad (4.26)$$

$$m = m_0(t) + \sum_l m_l(t) f_l(r), \quad (4.27)$$

y sustituyendo en la expresión (4.25) obtenemos

$$w \sum_l p_l f_l' + p_0 w' + w' \sum_l p_l f_l = 0. \quad (4.28)$$

Por otro lado, recordando que en la acción tenemos un término de la forma siguiente, y sustituyendo los desarrollos (4.26) y (4.27)

$$\int_{r_0}^R \pi_m \dot{m} dr = \int_{r_0}^R \left( p_0 + \sum_l p_l f_l \right) \left( \dot{m}_0 + \sum_n \dot{m}_n f_n \right) dr = p_0 \dot{m}_0 R_0 + \sum_l p_l \dot{m}_l A_l,$$

donde  $R_0 = R - r_0$ ,  $A_l = \int_{r_0}^R f_l f_n dr$  y  $\int_{r_0}^R f_l dr = 0$ . De la parte que multiplica a  $\dot{m}_0$  y a  $\dot{m}_l$ , así como la transformación del momento a su forma de operador, encontramos que

$$p_0 \rightarrow -\frac{i}{R_0} \frac{\partial}{\partial m_0} \quad \text{y} \quad p_l \rightarrow -\frac{i}{A_l} \frac{\partial}{\partial m_l}. \quad (4.29)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (4.28) y aplicándolas a una función de onda  $\Psi$ , obtenemos

$$\sum_l \left( w f_l' + w' f_l \right) \frac{i}{A_l} \frac{\partial \Psi}{\partial m_l} + w' \frac{i}{R_0} \frac{\partial \Psi}{\partial m_0} = 0. \quad (4.30)$$

Proponemos como solución a la ecuación anterior

$$\Psi = \exp \left[ - \int_{r_0}^R h_0(t) \left[ \int g(m, r) dm \right] dr \right], \quad (4.31)$$

donde  $g(m, r) = w^{-1}$ . Así

$$\int g dm = \int r \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^5 dm = \frac{r^2}{3} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^6,$$

de modo que

$$\Psi = \exp \left[ - \int_{r_0}^R h_0(t) \frac{r^2}{3} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^6 dr \right]. \quad (4.32)$$

Finalmente, desarrollamos  $g$  en una serie de eigenfunciones,

$$\frac{1}{w} = g = g_0(t) + \sum_n g_n(t) f_n(r), \quad (4.33)$$

de manera que al analizar las derivadas de  $\Psi$  a partir de (4.31), obtenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial m_0} = - \left\{ \int_{r_0}^R h_0(t) \frac{\partial}{\partial m_0} \left[ \int g dm \right] dr \right\} \Psi = - \left\{ \int_{r_0}^R h_0(t) g dr \right\} \Psi = -h_0 g_0 R_0 \Psi$$

ya que  $\frac{\partial}{\partial m_0} \left[ \int g dm \right] = g \frac{\partial m}{\partial m_0} = g$  y

$$\frac{\partial \Psi}{\partial m_1} = - \left\{ \int_{r_0}^R h_0(t) \frac{\partial}{\partial m_1} \left[ \int g dm \right] dr \right\} \Psi = - \left\{ \int_{r_0}^R h_0(t) g f_1 dr \right\} \Psi = -h_0 g_1 A_1 \Psi$$

debido a que  $\frac{\partial}{\partial m_1} \left[ \int g dm \right] = g \frac{\partial m}{\partial m_1} = g f_1$ .

Volviendo a la expresión (4.30) y sustituyendo las derivadas, después de simplificar obtenemos:

$$- \sum_l \left( w' f'_l + w' f_l \right) g_l - w' g_0 = 0. \quad (4.34)$$

Sabemos que  $g = \frac{1}{w}$ , entonces,  $g' = -w'/w^2 = \sum_n g_n f'_n$ , entonces la ecuación anterior se vuelve

$$w \left( \frac{w'}{w^2} \right) - \frac{w'}{w} \equiv 0$$

siendo idénticamente cero que es lo que buscábamos para comprobar que la función de onda propuesta efectivamente es una solución a la restricción espacial. Esto es lo mismo que reescribir, sustituyendo (4.24) en (4.25),

$$\pi'_m \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-5} + \pi_m \left[ -\frac{5}{2r} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-6} \left( \frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-5} \right] = 0.$$

Ahora obtenemos la restricción hamiltoniana a partir de (4.22) y reescribamosla

en términos de  $w$

$$H_0 = \pi_m^2 - 96 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^5 r m'' = \pi_m^2 - 96 \frac{m''}{w} = 0. \quad (4.35)$$

Sustituyendo el desarrollo de  $\pi_m$  y  $m$

$$p_0^2 + 2p_0 \sum_l p_l f_l + \sum_n \sum_l p_n p_l f_n f_l - \frac{96}{w} \sum_l m_l f_l'' = 0$$

y tomando en cuenta las relaciones (4.29), obtenemos que

$$\mathcal{H}\Psi = -\frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m_0^2} - \frac{2}{R_0 A_l} \frac{\partial}{\partial m_0} \left[ \sum_l \frac{\partial \Psi}{\partial m_l} f_l \right] - \sum_{n,l} \frac{1}{A_n A_l} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m_n \partial m_l} f_n f_l - \frac{96}{w} \sum_l m_l f_l'' \Psi = 0,$$

siendo la anterior la ecuación de Wheeler-DeWitt para este minisuperespacio.

Hacemos  $\Psi = \exp[-s(m_0, m_l)]$  donde  $s = \int_{r_0}^R h_0 [f g dm] dr$ . Calculando las primeras y segundas derivadas de  $\Psi$  con respecto a  $m_0$  y  $m_l$  y sustituyendolas en la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} -h_0^2 \left[ g_0^2 + 2g_0 \sum_l g_l f_l + \sum_n \sum_l g_n g_l f_n f_l \right] + h_0 \left[ \frac{1}{R_0^2} \int \frac{\partial g}{\partial m} dr + \frac{2}{R_0} \sum_l \frac{f_l}{A_l} \int \frac{\partial g}{\partial m} f_l dr \right. \\ \left. + \sum_n \sum_l \frac{f_n f_l}{A_n A_l} \int \frac{\partial g}{\partial m} f_n f_l dr \right] - \frac{96}{w} \sum_l m_l f_l'' \Psi = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Por la relación (4.33)  $\frac{1}{w^2} = g_0^2 + 2g_0 \sum_l g_l f_l + \sum_{n,l} g_n g_l f_n f_l$  obtenemos en (4.36)

$$\begin{aligned} -h_0^2 + h_0 w^2 \left( \frac{1}{R_0^2} \int \frac{\partial g}{\partial m} dr + \frac{2}{R_0} \sum_l \frac{f_l}{A_l} \int \frac{\partial g}{\partial m} f_l dr + \sum_n \sum_l \frac{f_n f_l}{A_n A_l} \int \frac{\partial g}{\partial m} f_n f_l dr \right) \\ - 96w \sum_l m_l f_l'' \Psi = 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Por otro lado, introduzcamos  $q(r) = \delta(r - \xi) = q_0 + \sum_l q_l f_l(r)$  donde  $r_0 < \xi < R$ .

Por las propiedades de la delta de Dirac:

$$\int_{r_0}^R q dr = R_0 q_0 = 1 \Rightarrow q_0 = \frac{1}{R_0}$$

$$\text{y } \int_{r_0}^R q f_i dr = \lambda_i q_i.$$

Además,

$$\int_{r_0}^R q f_i dr = \int_{r_0}^R \delta(r - \xi) f_i(r) dr = f_i(\xi) \Rightarrow q_i = \frac{f_i(\xi)}{A_i},$$

entonces,

$$q(r) = \delta(r - \xi) = \frac{1}{R_0} + \sum_i \frac{f_i(\xi)}{A_i} f_i(r).$$

Ahora, estudiando el último término que multiplica a  $h_0$  en (4.37), tenemos

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{f_n(r)}{A_n} \sum_i \frac{f_i(r)}{A_i} \int_{r_0}^R \frac{\partial g(\xi)}{\partial m} f_i(\xi) f_n(\xi) d\xi &= \sum_n \frac{f_n(r)}{A_n} f_n(r) \frac{\partial g(r)}{\partial m} \\ &\quad - \sum_n \frac{f_n(r)}{A_n} \frac{1}{R_0} \int_{r_0}^R f_n(\xi) \frac{\partial g(\xi)}{\partial m} d\xi. \end{aligned}$$

Nota: por simplicidad solo escribimos  $g(r)$  y no  $g(r, m)$ .

Además, como

$$\frac{1}{R_0^2} \int \frac{\partial g}{\partial m} dr + \frac{2}{R_0} \sum_n \frac{f_n(r)}{A_n} \int \frac{\partial g(\xi)}{\partial m} f_n(\xi) d\xi = \frac{1}{R_0} \frac{\partial g(r)}{\partial m},$$

el término que multiplica a  $h_0$  en (4.37) queda como

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_0^2} \int \frac{\partial g}{\partial m} dr + \frac{2}{R_0} \sum_i \frac{f_i}{A_i} \int \frac{\partial g}{\partial m} f_i dr + \sum_n \sum_i \frac{f_n f_i}{A_n A_i} \int \frac{\partial g}{\partial m} f_n f_i dr \\ = \left( \frac{1}{R_0} + \sum_n \frac{f_n^2(r)}{A_n} \right) \frac{\partial g(r)}{\partial m} = \delta(0) \frac{\partial g(r)}{\partial m}. \end{aligned}$$

Así la ecuación a resolver para  $h_0$  queda como

$$-h_0^2 + h_0 w^2 \left\{ \delta(0) \frac{\partial g(r)}{\partial m} \right\} - 96w \sum_l m_l'' f_l \Psi = 0, \quad (4.38)$$

donde  $\Psi = \exp[-s]$  con  $s = \int_{r_0}^R h_0 [f g dm] dr$ . Como conocemos  $g$  (y por tanto  $w$ ), no es posible restar un infinito a la ecuación anterior para poderla resolver. Entonces, no es posible obtener la función de onda buscada.

## 4.2 Minisuperespacio con métrica B

### 4.2.1 Métrica B; tensor métrico y las momentos conjugados

El siguiente minisuperespacio que vamos a intentar cuantizar también tiene simetría esférica. Es una modificación del anterior que surge al incorporar una función  $a(r, t)$  dentro de la métrica de modo que ésta queda como

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 a^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

dónde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2$ . A partir de la métrica podemos encontrar que

$$\sqrt{g} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^6 a^2 \text{sen} \theta \quad (4.40)$$

y que

$$R = - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-5} \left\{ 8 \left(\frac{a'}{a} - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2}\right) + \frac{4m''}{r} \right. \\ \left. + 2 \left(1 + \frac{m}{2r}\right) \left[ \frac{2a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 - \frac{1}{a^2} \right] \right\}. \quad (4.41)$$

De la expresión (1.14) únicamente podemos deducir la relación  $\pi_{33} = \text{sen}^2 \theta \pi_{22}$  ya que  $a = a(r, t)$ .

El primer término de la acción ADM es

$$\begin{aligned} \pi^{ij} g_{ij} &= 2\pi^{11} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \frac{\dot{r}}{r} + 2\pi^{22} \left[ 2 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \frac{\dot{m}}{r} a^2 + 2 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 a \dot{a} \right] \\ &= \left[ \frac{2}{r} \left(1 + \frac{\dot{r}}{2r}\right)^3 \pi^{11} + \frac{4}{r} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 a^2 \pi^{22} \right] \dot{r} + \left[ 4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 a \pi^{22} \right] \dot{a} \equiv \pi_m \dot{r} + \pi_a \dot{a}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde definimos

$$\pi_m \equiv \left[ \frac{2}{r} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \pi^{11} + \frac{4}{r} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 a^2 \pi^{22} \right] \quad \text{y} \quad \pi_a \equiv \left[ 4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 a \pi^{22} \right]. \quad (4.43)$$

A partir de estas definiciones podemos encontrar que

$$\pi^{11} = \frac{r}{2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-3} \pi_m - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} a \pi_a, \quad (4.44)$$

$$\pi^{22} = \frac{\pi_a}{4a} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4}, \quad (4.45)$$

$$\pi^{33} = \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\pi_a}{4a} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4}. \quad (4.46)$$

En este punto conviene introducir dos nuevas variables para simplificar los cálculos

$$\varphi = \left(1 + \frac{m}{2r}\right) \quad \text{y} \quad \pi_\varphi = 2r \pi_m. \quad (4.47)$$

Con ellas tenemos que

$$g_{11} = \varphi^4, \quad g_{22} = \varphi^4 a^2, \quad g_{33} = \varphi^4 a^2 \text{sen}^2 \theta,$$

$$\sqrt{g} = \varphi^6 a^4 \text{sen}^2 \theta,$$

y por lo tanto

$$\dot{g}_{11} = 4\dot{\varphi}\varphi^3, \quad \dot{g}_{22} = 4\dot{\varphi}\varphi^3 a^2 + 2\varphi^4 \dot{a} a, \quad \dot{g}_{33} = (4\dot{\varphi}\varphi^3 a^2 + 2\varphi^4 \dot{a} a) \text{sen}^2 \theta. \quad (4.48)$$

De las definiciones (4.43) encontramos

$$\pi_\varphi = 4\varphi^3 \pi^{11} + 2a\varphi^{-1} \pi_a \quad \text{y} \quad \pi_a = 4a\varphi^4 \pi^{22}. \quad (4.49)$$

Reescribimos los símbolos de Christoffel en términos de las nuevas variables y los sustituimos en las expresiones para las constricciones espaciales de modo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \pi^{11}_{,1} + \Gamma_{11}^1 \pi^{11} + \Gamma_{22}^1 \pi^{22} + \Gamma_{33}^1 \pi^{33} &= 0 \\ \Rightarrow -\varphi' \pi_\varphi + \varphi \pi'_\varphi - 4a' \pi_a - 2a \pi'_a &= 0, \end{aligned} \quad (4.50)$$

siendo esta una ecuación diferencial que permite poner a  $\pi_a$  en términos de  $\pi_\varphi$ , o equivalentemente, de  $\pi_m$ . Si se agrupan términos, (4.50) queda como

$$\varphi^2 \left( \varphi^{-1} \pi_\varphi \right)' - 2a^{-1} \left( a^2 \pi_a \right)' = 0.$$

Despejando e integrando por partes

$$\pi_a = \frac{1}{2a^2} \int a\varphi^2 \left( \varphi^{-1} \pi_\varphi \right)' dr = \frac{\varphi}{2a} \pi_\varphi - \frac{1}{2a^2} \int \left( a\varphi^2 \right)' \varphi^{-1} \pi_\varphi dr. \quad (4.51)$$

Ahora vemos la otra constricción espacial

$$\begin{aligned} \pi^{22}_{,2} + \Gamma_{11}^2 \pi^{11} + \Gamma_{22}^2 \pi^{22} + \Gamma_{33}^2 \pi^{33} &= 0 \\ \Rightarrow \pi_a = \pi_a(r, t, \text{sen}\theta). \end{aligned} \quad (4.52)$$

La tercera constricción no da información y por ello la omitimos.

## 4.2.2 Obtención de la Acción ADM

Igual que en la sección 4.1.2, es posible integrar la acción respecto a  $\phi$  de 0 a  $2\pi$  y obtenemos la misma expresión (4.17). Nuevamente solo conservamos  $N_1$  para tener solo

una restricción espacial.

Por otro lado, con las variables auxiliares introducidas en la sección anterior, calculamos el resto de los términos que forman la acción, pero no sin antes introducir dos nuevos momentos justificados por (4.52)

$$\pi_a = \hat{\pi}_a \text{sen} \theta \quad \text{y} \quad \pi_\varphi = \hat{\pi}_\varphi \text{sen} \theta.$$

Ahora sí

$$\pi^{ij} \pi_{ij} = \left[ \frac{1}{16} \varphi^2 \hat{\pi}_\varphi^2 - \frac{1}{4} \varphi a \hat{\pi}_\varphi \hat{\pi}_a + \frac{3}{8} a^2 \hat{\pi}_a^2 \right] \text{sen}^2 \theta,$$

$$\pi^k_k = \frac{1}{4} \varphi \hat{\pi}_\varphi \text{sen} \theta,$$

entonces, sustituyendo  $\pi_a$

$$\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} (\pi^k_k)^2 = \left[ -\frac{\varphi \hat{\pi}_\varphi}{16a} \int (a\varphi^2)' \varphi^{-1} \hat{\pi}_\varphi dr + \frac{3}{32a^2} \left\{ \int (a\varphi^2)' \varphi^{-1} \hat{\pi}_\varphi dr \right\}^2 \right] \text{sen}^2 \theta. \quad (4.53)$$

Por último

$$\pi^{ik} |_k = \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{4} \varphi^{-3} \hat{\pi}_\varphi - \frac{1}{2} \varphi^{-4} a \hat{\pi}_a \right\} + \frac{1}{2} \varphi^{-4} \left[ \varphi' \hat{\pi}_\varphi - (4\varphi^{-1} \varphi' a + a') \hat{\pi}_a \right] \right] \text{sen} \theta. \quad (4.54)$$

Sustituyendo lo que es  $\varphi$ ,  $\pi_\varphi$  y haciendo  $a = r$  tenemos para el término de la acción que esta multiplicado por  $\frac{1}{\sqrt{g}} N = r^{-2} \text{sen}^{-1} \theta \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-6} N$

$$\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} (\pi^k_k)^2 - gR = \left[ -\frac{1}{8} \left(1 + \frac{m}{2r}\right) \hat{\pi}_m \int \left[ r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \right]' \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} 2r \hat{\pi}_m dr \right. \\ \left. + \frac{3}{32r^2} \left\{ \int \left[ r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \right]' \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} 2r \hat{\pi}_m dr \right\}^2 + 4m'' r^3 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^7 \right] \text{sen}^2 \theta,$$



y para el que multiplica a  $2N_1$

$$\begin{aligned} \pi^{ik}|_k = & \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{4r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \int \left[ r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \right]' \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} 2r \dot{\pi}_m dr \right\} \right. \\ & - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-3} \dot{\pi}_m - \frac{r}{2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \left( \frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2} \right) \dot{\pi}_m \\ & + \frac{1}{2r} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-5} \left( \frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2} \right) \int \left[ r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \right]' \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} 2r \dot{\pi}_m dr \\ & \left. + \frac{1}{4r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \int \left[ r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \right]' \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} 2r \dot{\pi}_m dr \right] \text{sen} \theta. \end{aligned}$$

De esta manera notamos que nuevamente podemos sacar como factor común  $\text{sen} \theta$  e integrar  $\theta$  de 0 a  $\pi$ . Nuevamente consideramos una "caja" esférica comprendida entre  $r_0$  y  $R$ . Así la integral que aparece en la acción respecto a  $dr$  será una integral definida y definiremos  $R_0 = R - r_0$ . Si reexpresamos  $r^{-2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-6} N$  como  $N$ , la acción queda como:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{4} \int_{r_0}^R \left\{ \dot{\pi}_m \dot{m} - N \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ -\frac{1}{8} \left(1 + \frac{m}{2r}\right) \dot{\pi}_m \int \left[ r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \right]' \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} 2r \dot{\pi}_m dr \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{32r^2} \left\{ \int \left[ r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \right]' \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} 2r \dot{\pi}_m dr \right\}^2 + 4m'' r^3 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)' \right] \right. \\ & + 2N_1 \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{4r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \int \left[ r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \right]' \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} 2r \dot{\pi}_m dr \right\} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-3} \dot{\pi}_m \right. \\ & - \frac{r}{2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \left( \frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2} \right) \dot{\pi}_m + \frac{1}{2r} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-5} \left( \frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2} \right) \int \left[ r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \right]' \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} 2r \dot{\pi}_m dr \\ & \left. \left. + \frac{1}{4r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \int \left[ r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \right]' \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} 2r \dot{\pi}_m dr \right] \right\} dt dr \quad (4.55) \\ = & \int_{r_0}^R \{ \dot{\pi}_m \dot{m} - N H_0 - N_1 H_1 \} dr dt. \end{aligned}$$

### 4.2.3 Análisis de la constricción hamiltoniana

Hacemos

$$\dot{\pi}_m = \epsilon \pi_m = \epsilon p_0(t) + \epsilon p_l(t) f_l(r), \quad (4.56)$$

$$m = m_0(t) + \epsilon m_l(t) f_l(r), \quad (4.57)$$

siendo  $\epsilon$  un parámetro de orden. Sustituimos las relaciones anteriores en el término  $NH_0$  y simplificamos, recordado que solo nos interesan términos hasta de orden  $\epsilon^2$

$$\begin{aligned} N \left\{ -\frac{1}{8} \left(1 + \frac{m}{2r}\right) \epsilon \pi_m \int (2r - m_0) \epsilon \pi_m dr + \frac{3}{32r^2} \left\{ \int (2r - m_0) \epsilon \pi_m dr \right\}^2 + 4m'' r^3 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^7 \right\} \\ = N \left\{ -\frac{1}{8} \left(1 + \frac{m_0}{2r}\right) (\epsilon p_0 + \epsilon p_l f_l) \int (2r - m_0) (\epsilon p_0 + \epsilon p_l f_l) dr \right. \\ \left. + \frac{3}{32r^2} \left\{ \int (2r - m_0) (\epsilon p_0 + \epsilon p_l f_l) dr \right\}^2 + 4\epsilon m_l f_l'' r^3 \left(1 + \frac{m_0}{2r}\right)^7 \left(1 + \frac{7\epsilon m_l f_l}{2r + m_0}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Observamos que solamente hay un término que presenta  $\epsilon$ , a partir del cual, recordando que para tener  $H_0 = 0$  cada potencia de  $\epsilon$  debe ser igual a cero, obtenemos

$$4m_l f_l'' r^3 \left(1 + \frac{m_0}{2r}\right)^7 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_l f_l'' = m'' = 0, \quad (4.58)$$

entonces tenemos que, haciendo  $\epsilon = 1$ , el término que multiplica a  $N$  en la acción es

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^R N \left\{ -\frac{1}{8} \left(1 + \frac{m_0}{2r}\right) (p_0 + p_l f_l) \int (2r - m_0) (p_0 + p_l f_l) dr \right. \\ \left. + \frac{3}{32r^2} \left\{ \int (2r - m_0) (p_0 + p_l f_l) dr \right\}^2 \right\} dr = 0. \quad (4.59) \end{aligned}$$

Calculamos tanto las integrales indefinidas como la integral definida que aparece en la acción, donde las eigenfunciones de los desarrollos son

$$f_l = \frac{r}{R_0},$$

y obtenemos, al acomodar en términos de las potencias de las  $p$  y de las  $m$ ,

$$\int_{r_0}^R N H_0 dr = \frac{N}{8} \left\{ -\frac{1}{12} p_0^2 (R^3 - r_0^3) - \frac{1}{6} p_0 p_l \frac{1}{R_0} (R^4 - r_0^4) - \frac{1}{15} p_l^2 \frac{1}{R_0^2} (R^5 - r_0^5) \right. \\ \left. + m_0 \left[ -p_0^2 (R^2 - r_0^2) - \frac{13}{36} p_0 p_l \frac{1}{R_0} (R^3 - r_0^3) - \frac{1}{12} p_l^2 \frac{1}{R_0^2} (R^4 - r_0^4) \right] \right. \\ \left. + m_0^2 \left[ \frac{5}{4} p_0^2 (R - r_0) + \frac{3}{4} p_0 p_l \frac{1}{R_0} (R^2 - r_0^2) + \frac{7}{48} p_l^2 \frac{1}{R_0^2} (R^3 - r_0^3) \right] \right\}. \quad (4.60)$$

Siendo esta expresión la que nos interesa para cuantizar este minisuperespacio.

## Capítulo 5

# Cuantización del minisuperespacio con métrica B

En el capítulo anterior obtuvimos la acción ADM para el minisuperespacio B. A partir de ella, ya podemos proceder a intentar cuantizar este minisuperespacio, en otras palabras, ya podemos intentar obtener una función de onda que nos de la probabilidad de encontrar el minisuperespacio con la métrica dada a un tiempo posterior. Si se encuentra una función de onda adecuada, podemos ver que nos dice acerca de la posibilidad de formular un Teorema Cuántico de Birkhoff.

De la acción obtenida en el capítulo 4, observamos que tenemos un término de la forma  $H_0 = 0$  a partir del cual hay que obtener la ecuación de Wheeler-DeWitt para este minisuperespacio. Para ello, necesitamos utilizar la forma operacional de los momentos, introducir una función de onda  $\Psi$  y plantear la ecuación  $\mathcal{H}\Psi = 0$ . Para definir la  $\mathcal{H}$  de este minisuperespacio, en base a la expresión obtenida (4.60), descartaremos los términos que multiplican  $m_0$ . Despreciar dichos términos está justificado en el hecho de que  $m_0$  es pequeño, y así se obtiene una ecuación similar a la de un oscilador armónico sin potencial. Además podemos decir que, debido a lo que representan;  $R \gg r_0$ ,  $R_0 \approx R$  y así podemos poner todo en términos de  $R$ . De esta manera

$$-\frac{1}{12}R^3 p_0^2 \Psi - \frac{1}{6R}R^4 p_0 p_1 \Psi - \frac{1}{15R^2}R^5 p_1^2 \Psi = 0 \quad (5.1)$$

$$\Rightarrow -p_0^2 \Psi - 2p_0 p_l \Psi - \frac{12}{15} p_l^2 \Psi = 0.$$

Sustituyendo la forma diferencial de los momentos, podemos obtener la ecuación de Wheeler-DeWitt

$$\mathcal{H}\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m_0^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m_0 \partial m_l} + \frac{4}{5} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m_l^2} = 0. \quad (5.2)$$

Por sencillez, definimos

$$x \equiv m_0, \quad y \equiv m_l \quad (5.3)$$

y la ecuación (5.2) queda como

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \frac{4}{5} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (5.4)$$

Proponemos como solución

$$\Psi = \exp[-S], \quad (5.5)$$

donde  $S = S(x, y)$ . Calculamos las derivadas necesarias y así tenemos

$$\left[ -\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \left[ -\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} \right] + \frac{4}{5} \left[ -\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 \right] = 0. \quad (5.6)$$

Para poder resolver esta ecuación diferencial parcial, utilizamos la aproximación de que las segundas derivadas son despreciables frente a las primeras. Esta técnica matemática fue desarrollada y utilizada de una manera más general por Jeffreys & Jeffreys [11]. Posteriormente sirvió para la formulación del método de aproximación conocido como WKB, elaborado por S. Wentzel, H. A. Kramers y L. Brillouin [26]. De ésta manera obtenemos

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{4}{5} \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (5.7)$$

Proponemos

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{4}{5} \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 = \left( \frac{\partial S}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial S}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x} - \mu_2 \frac{\partial S}{\partial y} \right) = 0, \quad (5.8)$$

dónde  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son las raíces de la ecuación característica

$$\mu^2 + 2\mu + \frac{4}{5} = 0. \quad (5.9)$$

Si se cumple (5.8),  $S$  puede ser cualquier función

$$S = f(x + \mu_1 y) + g(x + \mu_2 y). \quad (5.10)$$

Proponemos

$$\begin{aligned} S &= q_1 (x - x_0 + \mu_1 y)^2 + q_2 (x - x_0 - \mu_2 y)^2 \\ &= q_1 [(x - x_0)^2 + 2\mu_1 (x - x_0)y + \mu_1^2 y^2] + q_2 [(x - x_0)^2 - 2\mu_2 (x - x_0)y + \mu_2^2 y^2] \end{aligned}$$

con  $x_0$ ,  $q_1$  y  $q_2$  constantes. Como estamos buscando una función  $S$  tal que  $\Psi = \exp\{-S\}$  se desvanezca cuando  $x$  y  $y$  son grandes, la igualamos a algo de la forma

$$S = (q_1 + q_2)(x - x_0)^2 + (q_1\mu_1^2 + q_2\mu_2^2)y^2$$

(una gaussiana), y así obtenemos las condiciones que deben satisfacer  $q_1$  y  $q_2$ :

$$q_1\mu_1 - q_2\mu_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1}q_2, \quad (5.11)$$

además

$$q_1 + q_2 > 0 \quad \text{y} \quad q_1\mu_1^2 + q_2\mu_2^2 > 0. \quad (5.12)$$

A partir de (5.9) y (5.11), vemos que si hacemos

$$\mu_1 = -1 + \sqrt{\frac{1}{5}} < 0 \quad \text{y} \quad \mu_2 = -1 - \sqrt{\frac{1}{5}} < 0 \quad (5.13)$$

se satisfacen las relaciones (5.12) ya que

$$q_1 + q_2 > 0 \Rightarrow \frac{\mu_2}{\mu_1} + 1 > 0 \text{ y, en efecto, } \frac{-2}{-1 + \sqrt{\frac{1}{5}}} > 0,$$

$$q_1\mu_1^2 + q_2\mu_2^2 > 0 \Rightarrow \mu_2\mu_1 + \mu_2^2 > 0 \text{ y, en efecto, } 1 + \sqrt{\frac{1}{5}} > 0.$$

De esta manera tenemos que  $q_1 > q_2$  entonces, si llamamos  $q_1 = Q$ ,

$$S = Q \left[ \left( 1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) (x - x_0)^2 + (\mu_1^2 + \mu_2\mu_1) y^2 \right] \quad (5.14)$$

y la función de onda buscada resulta ser

$$\Psi = \exp \left[ -Q \left[ \left( 1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) (m_0 - x_0)^2 + (\mu_1^2 + \mu_2\mu_1) m_1^2 \right] \right], \quad (5.15)$$

$$\Psi = \exp \left[ -Q \left[ (1.38197) (m_0 - x_0)^2 + (1.10557) m_1^2 \right] \right].$$

En la siguiente hoja, presentamos una gráfica tridimensional y curvas de nivel de  $\Psi$  como función de  $x$  y  $y$  en las cuales es posible observar que es una gaussiana centrada en  $(x_0, 0)$ , ya que pusimos  $x_0 = 1$ . Hay que hacer notar que esta es una solución a la ecuación diferencial (5.2), no es la más general ya que existe la posibilidad de tomar  $S$  de otra forma, en cuyo caso  $\Psi$  sería diferente.

Ahora solamente hace falta mostrar que efectivamente la aproximación utilizada al despreciar las segundas derivadas estaba justificada. Para ello hay que notar que

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2Q \left( 1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) (x - x_0) \Rightarrow \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = 4Q^2 \left( 1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 (x - x_0)^2,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 2Q \left( 1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) = \text{constante},$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 2Q (\mu_1^2 + \mu_2\mu_1) y \Rightarrow \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 = 4Q^2 (\mu_1^2 + \mu_2\mu_1)^2 y^2,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 2Q (\mu_1^2 + \mu_2 \mu_1) = \text{constante}.$$

Vemos que, en la ecuación (5.6), los términos de las segundas derivadas son de orden  $Q$ , y al compararse con los términos de orden  $Q^2$  se pueden despreciar ya que  $Q$  es grande. Así obtenemos la ecuación (5.7).



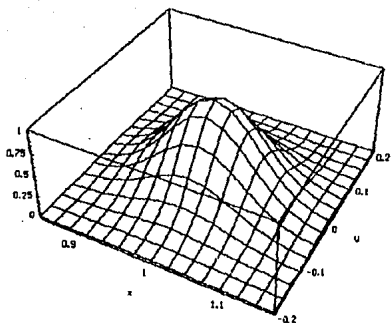


Figura 1. Gráfica de la función de onda  $\Psi = \Psi(x,y)$  como función de  $x$  y  $y$ .

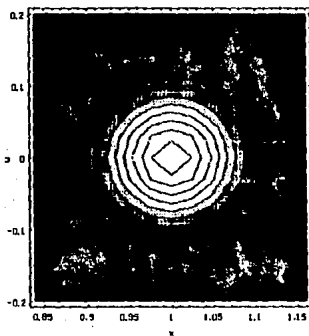


Figura 2. Curvas de nivel de la gráfica anterior.

## Conclusiones

Haciendo una recapitulación sobre el trabajo realizado, observamos que surgen varios problemas al intentar cuantizar un minisuperespacio particular, por ello no es sorprendente que también haya problemas al intentar construir una teoría cuántica de la gravitación. Los dos minisuperespacios seleccionados, aunque de forma muy similar, dieron resultados diferentes.

En el caso **A** no se pudo resolver la ecuación de Wheeler-DeWitt debido a dos causas relacionadas. La aparición de una delta de Dirac dentro de la ecuación a resolver provocó problemas y el hecho de que el resto de los términos de dicha ecuación eran conocidos, no permitió que se restara "algo" para poder obtener una ecuación finita y, tal vez, soluble.

Con el minisuperespacio **B** se logró resolver la ecuación de Wheeler-DeWitt aproximadamente una vez que se eliminó el término correspondiente al potencial. Dicha solución es una solución particular la cual podría corresponder a un estado cuántico específico del sistema. Se obtuvo al escoger una función específica de  $m_0$  y  $m_1$  la cual cumpliera, al introducirla en la ecuación diferencial obtenida, con las características necesarias para poder obtener una función de onda que satisficiera la ecuación de Wheeler-DeWitt y cumpliera con las características requeridas. Hizo falta analizar lo que sucede si no se eliminan los términos que multiplican a las potencias de  $m_0$ . Así mismo, podría resultar productivo analizar otras de las posibles soluciones a la ecuación obtenida para ver si siguen algún patrón y nos dan más información.

El resultado parcial obtenido en el caso **B** no nos permite concluir acerca de la existencia de un Teorema Cuántico de Birkhoff, entendido como un enunciado que excluya la posibilidad de tener emisión de gravitones que formen ondas esféricamente simétricas. Únicamente es posible decir que se han dado unos primeros pasos hacia la posible formulación del mencionado teorema, y que aún quedan varios puntos por resolver.

Además de los puntos ya mencionados, hace falta definir de una manera clara el

contenido físico del Teorema de Birkhoff clásico en la formulación hamiltoniana. Esto es, trasladar a las constricciones y a los momentos de la formulación ADM, la elección de coordenadas que se tiene que hacer en el ámbito clásico para hablar del Teorema de Birkhoff. Por ejemplo, en el minisuperespacio  $A$ , esto sería relacionar  $h_o(t)$  de  $\pi_m = h_o(t)r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^5$  con la  $f(t)$  que aparece al demostrar el Teorema de Birkhoff, ver la referencia [16], pag. 300.

La ecuación de Wheeler-DeWitt del minisuperespacio  $B$  no contiene información acerca del comportamineto de  $\Psi(x, t)$  al transcurrir el tiempo. Es decir, no nos dice nada respecto a si  $\Psi$  es "estática" o no en el sentido de mantener su forma y/o su posición. Para ver ésto, habría que definir un "tiempo" y para ello hay que adentrarse en "el problema de tiempo" de la gravedad cuántica. En nuestro caso, el elegir un tiempo interno parece no funcionar a priori. Esto se debe a que si  $x$  o  $y$  son el tiempo, la probabilidad de encontrar el espacio con cierta 3-métrica aparecería súbitamente en cierto tiempo ( $x = x_o$  o  $y = 0$  según sea el caso), y desaparecería súbitamente un tiempo despues, siendo que buscamos que esa probabilidad varíe de manera suave y no ocurra solamente a un tiempo.

Otro aspecto a estudiar es el comportamiento de los operadores de momento para la función de onda obtenida. Es necesario ver que forma toman y definir lo que se quiere decir con  $\pi_m = 0$  y  $\pi_a = 0$ , que serían una posible definción de lo que entendemos por función "estática".

Así mismo, es necesario investigar el papel que juegan  $R$  y  $r_o$  en el minisuperespacio cuantizado. Ver que quiere decir hacer que  $R \rightarrow \infty$  y/o  $r_o \rightarrow 0$  ya que en este último caso, por ejemplo, llegaríamos al fin de nuestra carta de coordenadas, entraríamos a una área que ya no parece tener significado físico como es el estar en el interior del radio de Schwarzschild.

Finalmente habría que analizar la posibilidad de tener radiación de Hawking de gravitones esféricamente simétricos dentro del contexto de nuestro problema ya que podría cambiar considerablemente la interpretación del resultado obtenido.

*Concedeme el don del silencio, y desafiaré a la noche.*

Khalil Gibran

## Apéndice A

# Transformación de la métrica de Schwarzschild

En este apéndice demostraremos que la métrica de Schwarzschild (3.3)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (\text{A.1})$$

efectivamente puede reescribirse en coordenadas isotrópicas por medio de la transformación  $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (t, \bar{r}, \theta, \phi)$  donde

$$r = \bar{r} \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2,$$

para obtener el elemento de línea en la forma (4.1)

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - \frac{m}{2\bar{r}}}{1 + \frac{m}{2\bar{r}}}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^4 [d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. \quad (\text{A.2})$$

Para ello partamos de la expresión (A.1), transformando cada término por separado.

Consideremos el término que multiplica a  $dt^2$

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = 1 - \frac{2m}{\bar{r} \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2} = 1 - \frac{2m}{\bar{r} \left(\frac{2\bar{r} + m}{2\bar{r}}\right)^2} = 1 - \frac{8m\bar{r}}{(2\bar{r} + m)^2}$$

$$= \frac{4\bar{r}^2 + 4m\bar{r} + m^2 - 8m\bar{r}}{(2\bar{r} + m)^2} = \frac{(2\bar{r} - m)^2}{(2\bar{r} + m)^2} = \left( \frac{1 - \frac{m}{2\bar{r}}}{1 + \frac{m}{2\bar{r}}} \right)^2, \quad (\text{A.3})$$

entonces el término que multiplica a  $dr^2$  será

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} = \left[ \frac{(2\bar{r} - m)^2}{(2\bar{r} + m)^2} \right]^{-1} = \frac{(2\bar{r} + m)^2}{(2\bar{r} - m)^2} = \left( \frac{1 + \frac{m}{2\bar{r}}}{1 - \frac{m}{2\bar{r}}} \right)^2. \quad (\text{A.4})$$

Ahora veamos

$$\begin{aligned} dr &= \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2 d\bar{r} + 2\bar{r} \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right) \left(-\frac{m}{2\bar{r}^2}\right) d\bar{r} \\ &= \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right) \left[ \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right) - \frac{m}{\bar{r}} \right] d\bar{r} = \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right) \left(1 - \frac{m}{2\bar{r}}\right) d\bar{r}, \end{aligned}$$

entonces

$$dr^2 = \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2 \left(1 - \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2 d\bar{r}^2 \quad (\text{A.5})$$

y así tenemos que

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 = \left(\frac{1 + \frac{m}{2\bar{r}}}{1 - \frac{m}{2\bar{r}}}\right)^2 \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2 \left(1 - \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2 d\bar{r}^2 = \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^4 d\bar{r}^2.$$

Finalmente

$$r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) = \bar{r}^2 \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^4 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (\text{A.6})$$

por lo tanto, juntando los resultados anteriores,

$$ds^2 = - \left( \frac{1 - \frac{m}{2\bar{r}}}{1 + \frac{m}{2\bar{r}}} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^4 \left[ d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right]$$

expresión igual a (A.2).

## Apéndice B

# Consistencia con las Ecuaciones de Einstein

Vemos si la métrica A seleccionada es consistente con las ecuaciones de Einstein. Para ello es necesario variar la acción respecto a  $\hat{\pi}_m$  y a  $m$ , las variables dinámicas del sistema. Comencemos con la variación respecto a  $\hat{\pi}_m$ .

$$\delta S = \frac{1}{4} \int \left\{ \delta \hat{\pi}_m \dot{m} - N \left[ -\frac{1}{24} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-4} 2 \hat{\pi}_m \delta \hat{\pi}_m \right] \right. \\ \left. + 2N_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r}{6} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-3} \delta \hat{\pi}_m \right] - \frac{r}{6} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-4} \left( \frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2} \right) \delta \hat{\pi}_m - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-3} \delta \hat{\pi}_m \right\} \right. \\ \left. \right\} dt dr.$$

Integrando por partes el primer término de la segunda línea y sacando  $\delta \hat{\pi}_m$  como factor común obtenemos:

$$\delta S = \frac{1}{4} \int \left\{ \dot{m} + N \left[ \frac{1}{12} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-4} \hat{\pi}_m \right] \right. \\ \left. - 2N_1' \left[ \frac{r}{6} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-3} \right] - 2N_1 \left[ \frac{r}{6} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-4} \left( \frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2} \right) + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-3} \right] \right\} \delta \hat{\pi}_m dt dr,$$

como escogimos una norma en la cuál  $N_1 = N_2 = N_3 = 0$ , observamos que la función que se cumple para tener  $\delta S = 0$  es una ecuación diferencial para  $m$ , y si nos olvidamos del gorro en  $\pi_m$  tenemos

$$\dot{m} = -\frac{N}{12} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-4} \pi_m. \quad (\text{B.1})$$

Por otro lado analicemos las ecuaciones de Einstein representadas por (1.14)

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial m} \dot{m} = \frac{\partial g_{11}}{\partial t} = \frac{2N}{\sqrt{g}} \left( \pi_{11} - \frac{1}{2} g_{11} \pi_k^k \right),$$

sustituyendo en los extremos

$$4 \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^3 \left( \frac{1}{2r} \right) \dot{m} = 2N \left[ \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-1} \frac{1}{6r} \pi_m - \frac{1}{4r} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-1} \pi_m \right],$$

despejando  $\dot{m}$  obtenemos

$$\dot{m} = -\frac{N}{12} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-4} \pi_m \quad (\text{B.2})$$

que es igual a la ecuación (B.1) obtenida anteriormente a partir de la variación de la acción respecto a  $\pi_m$ .

Ahora hay que variar la acción respecto a  $m$ , para obtener la ecuación que satisface  $\pi_m$ , recordando que  $N_1 = 0$ .

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{4} \int \left\{ \hat{\pi}_m (\delta \dot{m}) + N \left[ \frac{-4}{24} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-5} \frac{1}{2r} \delta m \pi_m^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 6 \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^5 \frac{1}{2r} \delta m r^2 \left[ -\frac{4m''}{r} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-5} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + r^2 \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-6} \left[ -\frac{4}{r} (\delta m)'' \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-5} + 20 \frac{m''}{r} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-6} \frac{1}{2r} \delta m \right] \right\} dt dr, \end{aligned}$$

simplificando

$$\delta S = \frac{1}{4} \int \left\{ \hat{\pi}_m (\delta \dot{m}) + N \left[ -\frac{1}{12r} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-5} \pi_m^2 \delta m - 2m'' \delta m - 4r \left( 1 + \frac{m}{2r} \right) (\delta m)'' \right] \right\} dt dr,$$

aplicando integración por partes y olvidando el gorro llegamos a

$$\delta S = \frac{1}{4} \int \left\{ -\dot{\pi}_m - \frac{N}{12r} \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^{-5} \pi_m^2 - 2Nm'' - 4N'' \left( r + \frac{m}{2} \right) \right\}$$



$$\begin{aligned}
-8N' \left(1 + \frac{m'}{2}\right) - 2Nm'' \} \delta m dtdr = \frac{1}{4} \int \left\{ -\dot{\pi}_m - \frac{N}{12r} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-5} \dot{\pi}_m^2 \right. \\
\left. - 4Nm'' - 4N'' \left(r + \frac{m}{2}\right) - 8N' \left(1 + \frac{m'}{2}\right) \right\} \delta m dtdr.
\end{aligned}$$

Nuevamente, recordando que estamos buscando la función que se cumple cuando  $\delta S = 0$ , tenemos

$$\dot{\pi}_m = -\frac{N}{12r} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-5} \pi_m^2 - 4Nm'' - 8N' \left(1 + \frac{m'}{2}\right) - 4N'' \left(r + \frac{m}{2}\right). \quad (B.3)$$

Por otro lado, consideremos una combinación lineal de las ecuaciones obtenidas de variar la acción ADM respecto a  $g_{ij}$  para encontrar que

$$\dot{\pi}^{11} g_{11} + 2\dot{\pi}^{22} g_{22} = \frac{N}{2} \sqrt{g} R - \frac{1}{2} \frac{N}{\sqrt{g}} \left[ \pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} (\pi_k^k)^2 \right] - 2 (g^{11} \sqrt{g} N')'.$$

Evaluando el lado derecho

$$= -2N \left(1 + \frac{m}{2r}\right) m'' r \operatorname{sen} \theta + \frac{N}{48} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \pi_m^2 \operatorname{sen} \theta \quad (B.4)$$

$$- 2N' \left(1 + \frac{m'}{2r}\right) (2 + m') r \operatorname{sen} \theta - 2N'' \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 r^2 \operatorname{sen} \theta. \quad (B.5)$$

Para evaluar el lado izquierdo primero debemos diferenciar las expresiones para  $\pi^{11}$  (4.11) y  $\pi^{22}$  (4.12), después sustituir la expresión para  $\dot{m}$  (B.2) para así tener

$$\dot{\pi}^{11} g_{11} + 2\dot{\pi}^{22} g_{22} = \frac{N}{16} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \pi_m^2 \operatorname{sen} \theta + \frac{r}{2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right) \dot{\pi}_m \operatorname{sen} \theta. \quad (B.6)$$

Igualando el lado derecho (B.5) y el izquierdo (B.6), y despejando  $\dot{\pi}_m$  obtenemos:

$$\dot{\pi}_m = -\frac{N}{12r} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-5} \pi_m^2 - 4Nm'' - 4N'' \left(2 + m'\right) - 4N' \left(r + \frac{m}{2}\right) \quad (B.7)$$

que es igual a la expresión (B.3) obtenida a partir de la variación.

En base a que las expresiones obtenidas a partir de las variaciones específicas para

nuestra métrica y de las variaciones generales de la acción ADM son iguales, podemos decir que la métrica escogida es consistente con la formulación ADM y por lo tanto con las ecuaciones de Einstein.

# Bibliografía

- [1] R. Adler, M. Bazin y M. Schiffer, *Introduction to General Relativity* (International Series in Pure and Applied Physics), Mc-Graw Hill Book Company, 2a edición, Nueva York, 1975.
- [2] H. A. Atwater, *Introduction to General Relativity*, Pergamon Press, Alemania, 1974.
- [3] P. Bergmann, *The Riddle of Gravitation*, Hudson River Editions, E.U.A., 1968.
- [4] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Wiley-Interscience, 3a edición, E.U.A., 1989.
- [5] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Quantum Fields*, Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1982.
- [6] A. Corichi y D. Nuñez, *Introducción al formalismo ADM*, Revista Mexicana de Física 37, No. 4 (1991).
- [7] A. Fischer en *Relativity*, Editado por M. Carmeli, Plenum Press, Nueva York, 1970.
- [8] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, John Wiley & Sons, E.U.A., 1980.
- [9] D. M. Gitman y I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag Berlín Heidelberg, Alemania, 1990.
- [10] W. Houston, *Principles of Quantum Mechanics*, Dover Publications Inc., Nueva York, 1959.
- [11] H. & B. S. Jeffreys, *Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Gran Bretaña, 1923.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

- [12] I. R. Kenyon, *General Relativity*. Oxford University Press, Gran Bretaña, 1991.
- [13] T. W. B. Kibble, *Classical Mechanics*, Mc-Graw Hill Book Company, 2a edición, Gran Bretaña, 1973.
- [14] K. Kuchař, M.P. Ryan Jr., *Is minisuperspace quantization valid: Taub in mirmaster*, Physical Review D, Vol. 40, #12 (1989) 3982-3996.
- [15] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Dover Publications Inc., 4a edición, Nueva York, 1986.
- [16] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Course of Theoretical Physics, vol. 2), Pergamon Press, 4a edición, Gran Bretaña, 1987.
- [17] R. A. Matzner y L.C. Shepley, *Classical Mechanics*, Prentice Hall, Nueva Jersey, 1991.
- [18] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman & Company, Nueva York, 1973.
- [19] C. Møller, *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, Gran Bretaña, 1952.
- [20] Y. Ohnuki, S. Kametuchi, *Quantum Field Theory and Parastatistics*, University of Tokyo Press, Japón, 1982.
- [21] M. P. Ryan Jr., *Hamiltonian Cosmology*, Lecture Notes in Physics #13, Springer-Verlag Berlín Heidelberg, Alemania, 1972.
- [22] M. P. Ryan Jr., *Minisuperspaces*, Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM.
- [23] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Gran Bretaña, 1985.
- [24] M. Salgado, *Cuantización de minisuperespacios: Schwarzschild y Kerr*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1989.

- [25] A. Sanchez, *Introducción a las soluciones de las ecuaciones de Einstein*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1992.
- [26] L. Schiff, *Quantum Mechanics*, Mc-Graw Hill Book Company, 3a edición, Japón, 1968.
- [27] H. Stephani, *General Relativity*, Cambridge University Press, Gran Bretaña, 1982.
- [28] J. L. Synge y B. A. Griffith, *Principios de Mecánica*, Mc-Graw Hill Book Company, 3a edición, España, 1965.
- [29] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley & Sons, E.U.A., 1972.
- [30] E. Wichmann, *Quantum Physics*, Berkeley Physics Course, vol. 4, Mc-Graw Hill Book Company, E.U.A., 1971.
- [31] L. Zhdánov, *Manual de Física*, Editorial MIR, Moscú, 1980.