



003622
2eje.

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**TRATAMIENTO ANALITICO PARA LAS
OSCILACIONES DE TRES NEUTRINOS EN MATERIA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)
P R E S E N T A
LUIS GUSTAVO CABRAL ROSETTI

DIRECTOR DE TESIS: DR. JUAN CARLOS D'OLIVO SAEZ

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO.

FACULTAD DE CIENCIAS.

TRATAMIENTO ANALITICO PARA LAS OSCILACIONES
DE TRES NEUTRINOS EN MATERIA.

T E S I S

Que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

Presenta:

Luis Gustavo Cabral Rosetti.

1994

DEDICATORIA :

A quien todo me entregó

sin pensar en su destino.

A mi madre que me dio:

Vida, amor, luz y camino.

JURADO

PRESIDENTE: Dr. FERNANDO MATIAS MORENO YNTRIAGO.

PRIMER VOCAL: Dr. PETER OTTO HESS BECHSTEDT.

SEGUNDO VOCAL: Dr. JUAN CARLOS D'OLIVO SAEZ.

TERCER VOCAL: Dr. JORGE HIRSCH GANIEVICH.

SECRETARIO: Dr. RODOLFO PATRICIO MARTINEZ Y ROMERO.

SUPLENTE: Dra. SILVIA TORRES CASTILLEJA.

SUPLENTE: Dr. LUIS FERNANDO URRUTIA RIOS.

AGRADECIMIENTOS

- Agradezco al Dr. Juan Carlos D'Olive Saez la dirección del presente trabajo de Tesis y el haberme iniciado en la investigación científica.

- Agradezco a las Autoridades del Instituto de Ciencias Nucleares de la U.N.A.M., el apoyo que me brindaron durante mis estudios de posgrado.

- Agradezco al CoNaCyT la beca que me otorgó para realizar los estudios de Maestría en Ciencias (Física) en la U.N.A.M..

- Agradezco a la FUNDACIÓN U.N.A.M. el haberme otorgado la beca del Programa Fundación U.N.A.M. de Iniciación Temprana a la Investigación y la Docencia; para poder hacer las gráficas de la Tesis y la escritura de la misma.

- Agradezco el apoyo económico para la impresión del presente trabajo de Tesis por medio del proyecto DGAPA-UNAM-IN100691, del Departamento de Gravitación y Teoría de Campos del I.C.N.-U.N.A.M..

AGRADECIMIENTOS

- Agradezco al Dr. José F. Nieves su hospitalidad en la UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO, durante mi estancia de tres semanas en el Departamento de Física del Recinto de Río Piedras para concluir los cálculos del presente trabajo.

- Agradezco al Dr. Juan Carlos Lopez Vieyra su apoyo y asesoría en LATEX y FORTRAN, así como al Fís. Enrique Cruz Martínez por su asesoría para construcción de gráficas.

- Agradezco a todos mis amigos de la sala de computo 1 del I.C.N.-U.N.A.M. por sus valiosos comentarios para la presentación de la versión final de este trabajo así como de la instalación de nuevo software en las computadoras, en especial al Sr. Miguel de Icaza y al Sr. Antonio Ramírez Fernández.

- Agradezco a mi madre Sra. Elvira Rosetti Alvarez todo el apoyo económico y moral durante mis estudios, así como su gran cariño.

AGRADECIMIENTOS

- Agradezco a mi tío el Sr. Gustavo Rosetti Alvarez su gran apoyo y cariño.

- Agradezco a toda mi familia su constante apoyo, en especial a mis tíos el Sr. Pedro Chávez Sánchez y la Sra. Sofia Rosetti de Chávez, así como a mis suegros el Sr. Arturo Mejía Olvera y la Sra. María del Carmen Vazquez de Olvera.

- Agradezco a mi querida esposa la Biol. María del Carmen Mejía de Cabral por todo el amor que siempre he recibido, así como su constante apoyo.

Contenido

Prefacio	1
Capítulo 1 Introducción	
1.1 Bosquejo histórico	5
1.2 El modelo electrodébil estandar	17
1.3 La matriz de mezcla	20
Capítulo 2 El problema de los neutrinos solares y su estatus actual	
2.1 Entendiendo el problema	35
2.2 Evolución estelar	37
2.3 Generación de energía y flujo de neutrinos	40
2.4 Principales técnicas de detección	41
2.5 Experimentos activos y resultados	46
2.6 Los nuevos experimentos	53
Capítulo 3 Oscilaciones de neutrinos	
3.1 Generalidades	59
3.2 Formalismo general de oscilaciones	60
3.3 Oscilaciones de vacío, caso $n = 2$	65
3.4 Confrontando los experimentos	69

Contenido

3.5 Oscilaciones en materia uniforme	73
3.6 Conversión resonante del neutrino	82
3.7 Solución adiabática	83
3.8 Efectos no adiabáticos	80
3.9 El parámetro adiabático	87
3.10 La aproximación semiclásica	92
3.11 El límite extremo no adiabático	94
3.12 Solución con tres generaciones	97
Capítulo 4 Cálculo de la probabilidad de supervivencia del neutrino del electrón usando la aproximación de Magnus para tres sabores	
4.1 Análisis general del problema	103
4.2 La ecuación de evolución en la base adiabática	105
4.3 Determinación del operador de evolución mediante la expansión de Magnus	114
4.4 La probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón $\langle \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle$	132
Capítulo 5 Gráficas y discusión de los resultados	130

Contenido

Capítulo 6 Conclusiones

6.1 Resumen de la solución obtenida	163
6.2 El análisis completo	166
6.3 Epílogo	175

APÉNDICES

Apéndice A Un teorema de diagonalización para matrices finitas	182
Apéndice B Derivación de la relación de dispersión en un medio	185
Apéndice C Demostración de que los autovalores del Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}(t)$ son positivos y diferentes	187
Apéndice D El desarrollo de Magnus	191
Apéndice E Los autovalores en las resonancias y ángulos de mezcla en el medio	195
Apéndice F Programas FORTRAN para calcular la probabilidad de supervivencia de los neutrinos del electrón que proviene del sol, así como los contornos Iso-SNU a una energía fija, ambos para tres generaciones.	208

Bibliografía	223
--------------------	-----

Prefacio

Aunque sumamente exitoso en lo que a sus predicciones fenomenológicas se refiere, el modelo estándar de las interacciones electrodébiles parece incompleto desde un punto de vista teórico [19]. En su forma actual no es capaz de predecir las masas de los fermiones (leptones y quarks) ni de explicar porque hay varias familias de tales partículas.

El estudio de las propiedades de los neutrinos ha jugado un rol esencial en la caracterización de las interacciones débiles y podría aportar nuevos ingredientes para el desarrollo de futuras teorías de las partículas elementales [34]. Entre los aspectos de la física de los neutrinos que permanecen aun sin ser dilucidados, cabe mencionarse la cuestión de si sus masas son o no diferentes de cero, y en tal caso, si los estados creados en los procesos débiles (ν_e, ν_μ, ν_τ) son combinaciones lineales de otros estados (ν_1, ν_2, ν_3) con masas definidas [10].

Uno de los fenómenos más interesantes que se presenta cuando existe mezcla entre neutrinos masivos, son las llamadas oscilaciones de neutrinos, es decir, transformaciones periódicas de neutrinos de un sabor en otro (por ej., $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\mu$) [55].

Debido a su interacción con la materia, neutrinos con distintos sabores tienen índices de refracción diferentes. Ello hace que, en general, las oscilaciones se vean afectadas por las propiedades del medio a través del cual los neutrinos se propagan [97].

En un importante trabajo, Mikheyev y Smirnov [57] demostraron que en un medio con densidad variable las amplitudes de oscilación tienen un comportamiento resonante para ciertos valores de la energía de los neutrinos. De esta manera, aun cuando los parámetros de las

oscilaciones (diferencias de masas y ángulos de mezcla) sean pequeños en el vacío, pueden incrementarse notablemente cuando los neutrinos atraviesan medios densos como el Sol u otras estrellas.

A partir del trabajo de Mikheyev y Smirnov, se han llevado a cabo muchos estudios numéricos y analíticos de las implicaciones del así llamado **efecto MSW**. La mayoría de tales investigaciones [19] fueron realizadas bajo la suposición de que sólo existe mezcla entre dos neutrinos. Ya que la evidencia experimental indica que existen tres sabores de neutrinos, los análisis mencionados serán válidos si el tercer neutrino no se mezcla o si la solución con tres neutrinos puede ser reducida a una solución "equivalente" de dos neutrinos. Sin embargo, a priori no hay razón para que esto suceda y, por lo tanto, las oscilaciones entre tres sabores pueden resultar cualitativamente diferentes del problema con sólo dos neutrinos [75,82,83].

En los estudios para dos neutrinos, se ha demostrado que existen tres regiones distintas del espacio de parámetros en las cuales el flujo de neutrinos del electrón es suficientemente reducido. Una de ellas, llamada *solución no adiabática*, predice una gran supresión de neutrinos de energía baja y media y parece ser la favorecida por los resultados experimentales [96].

Los estudios teóricos para el caso de tres neutrinos han sido llevados a cabo bajo la suposición de una conversión adiabática dentro del Sol o bien mediante la hipótesis de jerarquía de masas ($m_3 \gg m_2 \gg m_1$), lo cual permite factorizar el problema de evolución en dos subprocesos del tipo Landau-Zener entre dos neutrinos [82]. Por otra parte, la llamada solución de Magnus provee una representación exponencial del operador de evolución que resulta unitaria en cada orden de expansión [87]. Dicha expansión ha sido empleada con éxito en diferentes problemas físicos y recientemente D'Olivo y Oteo han mostrado que constituye un método adecuado para estudiar el régimen no adiabático de la teoría **MSW** [89].

Aunque el estudio mencionado se hizo bajo la suposición de oscilaciones entre dos neutrinos, no existen, en principio, obstáculos que

impidan aplicar el mismo formalismo a un número mayor de neutrinos. Por lo tanto, y dada la importancia de contar con un análisis del *régimen no adiabático* para el caso de mezcla entre tres tipos de neutrinos, en la presente Tesis se extiende el trabajo mencionado mediante la inclusión de un tercer sabor. Para el cálculo del operador de evolución en la primera aproximación de Magnus se requiere la expresión explícita de la exponencial de una matriz antihermítica de 3×3 , la cual es determinada a partir de un desarrollo que involucra la identidad, la matriz en cuestión y su cuadrado.

Cabe señalar que el estudio de la Ref. [89] se llevó a cabo en la base de sabor. En el presente trabajo de Tesis se hace un cálculo similar pero en la base de los autoestados instantáneos del Hamiltoniano, utilizándose la aproximación de Magnus como método para incorporar efectos no adiabáticos en la evolución de dichos estados. Estos efectos surgen a consecuencia de que la probabilidad de que ocurran transiciones entre los autoestados instantáneos es diferente de cero. De esta manera se obtiene una expresión analítica que permite una descripción satisfactoria de la probabilidad de supervivencia del neutrino del electrón en todo el rango de valores para la energía de los neutrinos. Los cálculos mencionados pueden llevarse a cabo para medios con densidades arbitrarias, aunque se pone especial énfasis en la situación en que la densidad decrece exponencialmente. Se supone que esta es una buena aproximación para el perfil de densidad de los electrones en el Sol, excepto en las regiones cercanas al centro y la superficie [94].

En el Capítulo 1 hacemos un bosquejo histórico y revisamos los conceptos más importantes de la teoría electrodébil estándar GSW basándonos principalmente en las ref. [1], [9], [10] y [20]. Esta última referencia fue proporcionada al autor por el Dr. J. C. D'Olive.

En el Capítulo 2 revisamos el problemas de los neutrinos solares y su estatus actual, para ello nos basamos principalmente en las ref. [28], [37], [44] y [45].

En el Capítulo 3 revisamos en forma general las oscilaciones de neutrinos en vacío y en medios materiales para ello usamos fundamen-

talmente la ref. [48].

Los Capítulos 4, 5 y 6 fueron desarrollados por el autor incluyendo la tercera generación de neutrinos, tomando como base para el presente trabajo de tesis la ref. [89].

El Apéndice A fue tomado de la ref. [20].

El Apéndice B fue tomado de la ref. [48] y [97].

El Apéndice C fue elaborado y probado por el autor.

El Apéndice D fue tomado de [87] y de un seminario dado por el Dr. J. C. D'Olivo Sacz.

El Apéndice E fue tomada una parte de las ref. [100] y posteriormente desarrollado, implementado y probado por el autor.

El Apéndice F fue desarrollado por el autor en la sala de computo No. 1 del Instituto de Ciencias Nucleares de la U. N. A. M. en la maquina SUN SPARC STATION 2 llamada IRENE y en una DEC STATION 2100 llamada ERANDI con el auxilio del Dr. Juan Carlos Lopez Vieyra y el Fís. Enrique Cruz Martínez.

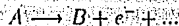
Capítulo 1

Introducción

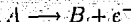
1.1 Bosquejo histórico

La historia de la física de los neutrinos comienza cuando Wolfgang Pauli sugiere la existencia de estas partículas en una carta escrita a Hans Geiger y Lisa Meitner el 4 de diciembre de 1930 para una conferencia de la Sociedad Física de Tübingen [1], en la cual se postula la existencia de una nueva partícula (el *neutrino*), con el fin de explicar el espectro continuo de electrones emitidos en el decaimiento beta. Si llamamos $N(T)$ al número relativo de electrones emitidos con energía cinética T , el experimento muestra que típicamente $N(T)$ toma la forma que aparece en la Fig. 1.1.

Notemos que $N(T)$ es cero después de un cierto "valor final" de energía T_{max} , lo cual refleja el hecho de que la energía cinética del electrón está limitada por la diferencia en las masas restantes del núcleo progenitor A y el núcleo hijo B [2]. En el decaimiento β -típico,



las únicas partículas "visibles" en esos tiempos eran A , B y e^- . Si éstas fueran realmente las únicas partículas que intervienen en la desintegración nuclear, tendríamos una distribución característica de un decaimiento en dos cuerpos,



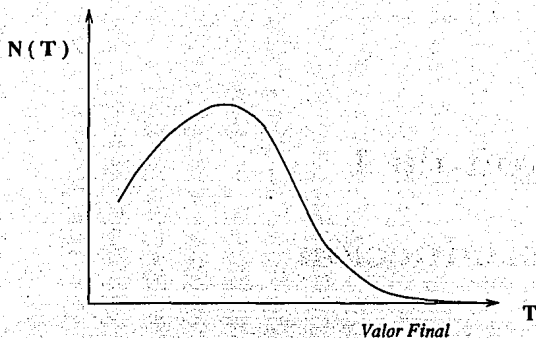


Figura 1.1: Típica forma del espectro de energía del electrón en el decaimiento nuclear β .

en la cual, el residuo de la estructura de A, deberá tener un momento p , que aumenta desde cero y que se encuentra determinado únicamente por las masas m_A , m_B , y m_{e^-} de los participantes en la reacción. Con ello todos los electrones emitidos deberán tener la misma energía.

Pauli sugirió que en lugar de $A \rightarrow B + e^-$, el decaimiento debería ser $A \rightarrow B + e^- + X$, donde X tenía una, o más, partículas eléctricamente neutras

Por el año de 1931, Pauli presentó su idea de la partícula X en una conferencia de la Sociedad Física Americana en Pasadena / California. El resumió lo que dijo aquella vez en un reporte de 1933 en el Congreso Solvay, de la siguiente manera [3]:

“En junio de 1931, durante una conferencia en Pasadena, yo propuse la siguiente interpretación (del decaimiento beta): Las leyes de conservación dictan, la emisión de partículas beta que ocurren junto con la emisión de una radiación muy penetrante de partículas neutras, la cual no ha sido observada todavía. La suma de las energías de la partícula beta y de la partícula neutra (o partículas neutras, donde uno no sabe si hay una o muchas) emitida por el núcleo en un proceso será igual a la energía que corresponde al límite superior del espectro β . Es

obvio que debemos asumir no solo la conservación de la energía, sino también la conservación del momento lineal, del momento angular y de las características de la estadística en los procesos elementales”.

El prosiguió:

“Con respecto a las propiedades de estas partículas neutras, nosotros aprendemos primero de sus pesos atómicos que sus masas no pueden ser mucho mayores que las de un electrón. En orden para distinguirlos de los neutrones pesados, Enrico Fermi propuso el nombre “neutrino”¹. Es posible que la masa propia del neutrino deba ser igual a cero, así que deberá propagarse con la velocidad de la luz, como los fotones. Sin embargo, su poder penetrante debe ser más grande que los fotones con la misma energía. Parece ser admisible que los neutrinos poseen un espín de $\frac{1}{2}$ y que la estadística que obedecen sea la de Fermi, en el hecho de que los experimentos no nos proveen con una prueba directa de esta hipótesis”.

Debemos hacer notar la insistencia de Pauli en mantener estas leyes de conservación. En contraste con esto, en 1924 Niels Bohr, sugirió que en un fenómeno mecánico-cuántico tal como el decaimiento β , la conservación de la energía no tiene cabida en cada evento, sino sólo en algún sentido estadístico. De esto Pauli dijo en la misma lectura: “Esta hipótesis no me parece que sea satisfactoria o aún plausible”.

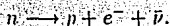
Con respecto a la conservación del momento angular y la estadística, debemos apuntar que en 1920 existía el problema de si había más partículas en el núcleo que los protones: “el problema de la masa nuclear desaparecida”. Ernest Rutherford sugirió que esta masa eléctricamente neutra consistía de protones y electrones fuertemente unidos entre sí, de lo cual se podría explicar el decaimiento β . De esta manera un núcleo deberá contener Z protones y combinaciones $(A - Z)$ protón-electrón (que se comportan como bosones), en donde A es el peso atómico y Z el número atómico. En 1932, cuando James Chadwick descubrió el

¹ Nota Histórica: Este vocablo fue inventado por Fermi para diferenciarlo del neutrón, pues el neutrino era considerado en charlas informales como un “neutrone bambino”.

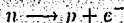
neutrón, lo que él pensó que había descubierto era justamente esta combinación protón-electrón. El desechó la idea de que el neutrón debería ser otra partícula fundamental con la frase [4]:

“Es en realidad, por supuesto, posible suponer que el neutrón pueda ser una partícula fundamental. Este punto es poco recomendable en el presente, excepto la posibilidad de explicar por ejemplo la estadística del núcleo N^{14} ”

Esta es una referencia al hecho de que los experimentos en el espectro molecular del N^{14} hechos por Rasetti en 1930, parecían mostrar que el N^{14} era una partícula de Bose-Einstein de espín 1. Para ver la relación de esto con el neutrino, consideremos el proceso de decaimiento β típico hacia protón



Hemos escrito $\bar{\nu}$ debido a que el objeto producido en el decaimiento es un *antineutrino*. Olvidándonos por un momento de la conservación de la energía-momento, bajo la hipótesis de Chadwick-Rutherford es posible también el decaimiento



porque $p + e^-$ tendrían espín entero y cumplirían la estadística de Bose-Einstein como suponían ocurría con el neutrón. Bajo la hipótesis de Pauli este decaimiento no es posible, pues aquí el “neutrón” tiene espín $\frac{1}{2}$ y cumple la estadística de Fermi-Dirac. Es por ello que en este decaimiento, él propusiera como la posibilidad más sencilla asignarle a su antineutrino $\bar{\nu}$ el valor de espín de $\frac{1}{2}$.

Por el año de 1934 Enrico Fermi propuso para estudiar este proceso la llamada “Interacción Fermi Cuatro”, cuya idea básica es que el decaimiento β pueda ser descrito como el acoplamiento en un punto del espacio-tiempo de los cuatro campos ψ_n , ψ_p , ψ_e y $\psi_{\bar{\nu}}$, que describen a estas partículas. En el moderno lenguaje de los diagramas de Feynman debemos decir que Fermi calculó el diagrama de la Fig. 1.2a.

El resultado parcial de su cálculo fue producir una expresión para $N(T)$ (Fig.1.1) que concordara con el experimento.

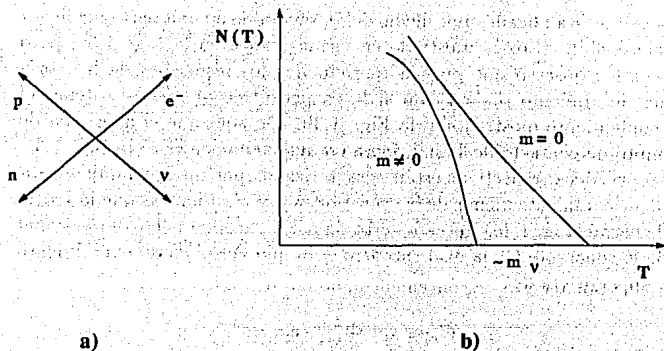
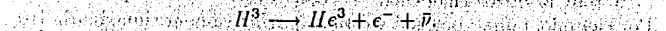


Figura 1.2: a) Interacción Fermi cuatro. b) Las formas de las distribuciones $N(T)$ dadas por Fermi, así como los puntos finales de las gráficas, dependen de la masa del neutrino.

Un rasgo distintivo de su $N(T)$ fue que su forma cercana al punto final era sensible a la masa del neutrino; ver Fig. 1.2b, donde $N(T)$ está curvada cerca del punto final en forma exagerada, para hacer evidente este hecho [5]. Se puede mostrar que para un decaimiento $A \rightarrow B + e^- + \nu$,

$$T_{\text{Punto Final}} = \frac{(m_A^2 + m_e^2 - (m_B + m_\nu)^2) c^2}{2m_A} - m_e c^2$$

de tal manera que los puntos finales, así también como las formas de las gráficas dependen de m_ν . Aquí e puede ser un electrón o un positrón pues tienen igual masa. El límite superior en la masa de este neutrino es actualmente [6] de $m_\nu < 7.2 \text{ eV}$, obtenida del estudio de $N(T)$ para el decaimiento



En 1935 Hideki Yukawa publicó su ensayo ya clásico de la teoría del mesón de las fuerzas nucleares [7]. Él propuso que un protón y un

neutrón están ligados por medio del intercambio de una partícula ligera (el *mesón*). Esto es mostrado en forma gráfica en la Fig. 1.3a; pero también observó que pueden reproducirse los resultados de la teoría del decaimiento β de Fermi si le es permitido al mesón π tener el acoplamiento mostrado en la Fig. 1.3b. De aquí que el diagrama de punto de contacto de Fermi, fuera reemplazado por el de la Fig. 1.3c. Los vértices respectivos están caracterizados por un acoplamiento dimensionalmente menor de las constantes g y g' , mientras que la teoría de Fermi (Fig. 1.3d) fué caracterizada por un acoplamiento dimensional de la constante G_F la cual encontró el propio Fermi en un experimento y su valor era de

$$G_F \approx 1 \times 10^{-50} \text{ erg} \cdot \text{cm}^3.$$

El valor actual de la constante de Fermi es de:

$$G_F = 1.43 \times 10^{-49} \text{ erg} \cdot \text{cm}^3.$$

Yukawa relacionó el producto gg'/m_π^2 con la constante G_F de Fermi. En la teoría de Yukawa, g está relacionada con la fuerza nuclear y g' con la fuerza débil.

$$g \gg g'.$$

Así, Yukawa fue el primero en introducir un *bosón* intermedio para mediar las interacciones débiles, en donde la partícula de Yukawa tenía ambos acoplamientos, es decir, fuerte y débil.

El siguiente desarrollo teórico en la comprensión de las partículas fundamentales, fue debido al brillante estudiante de Fermi, Ettore Majorana (1906-1938), el cual en 1937 [8], propuso que el neutrino fuera idéntico a su antipartícula. Es bien sabido que algunas partículas de Bose tales como los π^0 's y γ 's son idénticas a sus antipartículas, mientras que el K^0 no es idéntico a su *antibosón*, \bar{K}^0 . Según parece, hasta que Majorana propuso su sugerencia, fué asumido que un fermión neutro tal como el neutrón tendría que ser distinto de su antipartícula.

Los neutrinos Majorana tienen algunas características peculiares [9]. Por ejemplo, toman paridad y ésta es intrínsecamente imaginaria [10].

Por el año de 1949 varios físicos notaron que los procesos *muónicos* $\mu^- + p \rightarrow n + \nu$ y $\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$ podían también ser descritos por

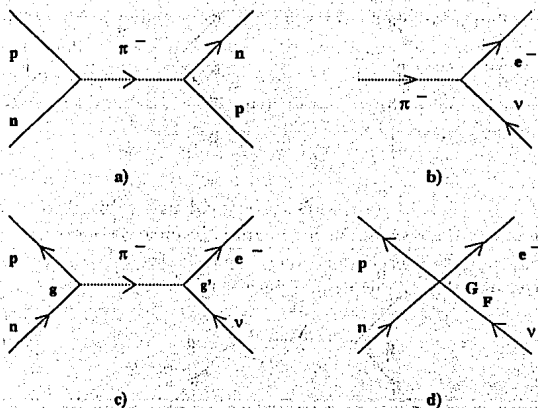
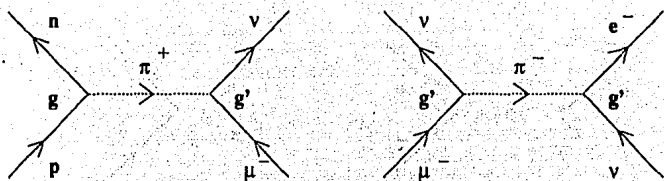
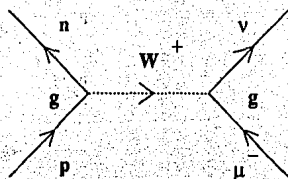


Figura 1.3: a) Representación gráfica del intercambio de un mesón π . b) Posible acoplamiento del pión según Yukawa. c) Reemplazo de la teoría de Fermi por la hipótesis de Yukawa. d) Interacción de Fermi con su constante de acoplamiento característica.



a)



b)

Figura 1.4: a) Procesos muónicos descritos por una interacción del tipo Fermi cuatro. b) Acoplamiento Universal.

una interacción del tipo Fermi Cuatro, tal como un decaimiento β , y entonces las constantes de Fermi deducidas de los rangos experimentales para estos procesos fueron casi las mismas que la noción de la constante G_F de Fermi en lo que llegó a ser denominada *Interacción Universal de Fermi*. De hecho uno de los grupos encabezados por Lee, Rosenbluth y Yang [11] notaron que uno puede explicar esta universalidad asumiendo que había un mesón intermedio acoplado a todas las partículas con la misma fuerza. Esto no podía ser un mesón π de Yukawa, el cual está acoplado de una manera diferente a núcleos y leptones (por ej. ver la Fig. 1.4a). En el esquema de Yukawa, los procesos leptónicos y hadrónicos deben tener diferentes fuerzas efectivas, mientras que en el nuevo esquema, el cual ilustramos en la Fig. 1.4b debe tener un acoplamiento universal, tal como una carga eléctrica.

En los 50's, se construyeron toda clase de argumentos teóricos concernientes a neutrinos, sin embargo no habían sido observados directamente y después de muchos años de esfuerzos y muchos comienzos falsos, se concluyó a mediados de los 50's que toda la fenomenología de las llamadas interacciones débiles podía ser descrita por la Lagrangiana de Fermi

$$\mathcal{L}_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\alpha(x) J_\alpha^\dagger(x)$$

donde $\frac{G_F}{\sqrt{2}}$ es la constante de acoplamiento de Fermi.

Esto cambió radicalmente en 1953 con el trabajo experimental de Cowan y Reines [12]. Su experimento es esencialmente el siguiente: un reactor de fisión es una fuente intensa de antineutrinos; la razón por la que se producen antineutrinos en vez de neutrinos es que cualquier radiación de neutrinos que se produce es una consecuencia del decaimiento radiactivo de la fisión de los fragmentos. Estos fragmentos se alcanzan cuando un núcleo tal como el U^{235} o U^{238} es dividido. Pero este núcleo contiene casi dos veces tantos neutrones como protones. Así, los productos de la fisión serán más neutrones que protones y por consiguiente inestables. Para alcanzar la estabilidad (es decir, casi el mismo número de neutrones que de protones) estos isótopos serán capaces de convertir neutrones en protones por el proceso de decaimiento β ²

²El antineutrino generado en el decaimiento β está asociado con el electrón y de

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

y así es como un reactor es una fuente de antineutrinos. Es también posible que sean producidos positrones (e^+), vía el llamado *decaimiento β inverso*

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$$

El escenario de Cowan-Reines provee el surgimiento de $\bar{\nu}_e$ del reactor, usando hidrógeno como blanco y con un absorbente de neutrones, el cadmio. En casi 10^{-9} s después de que el positrón es producido, se aniquila en dos γ 's, vía la reacción

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$$

Estas γ 's tienen esencialmente la energía en reposo del electrón, la cual es de cerca de 0.51 MeV. En tanto que el neutrón se extravía alrededor de hasta casi 10^{-5} s después de encontrar un núcleo de cadmio. Entonces es capturado por una explosión de γ 's. Cowan y Reines fueron capaces de seguir esta secuencia de eventos y así observar el antineutrino, ver Fig 1.5.

En la versión más sofisticada de este experimento, el cual fué hecho en Savannah River Plant en South Carolina en los años 1955-1956, el flujo fué de 5×10^{13} antineutrinos por cm^2 por segundo. A pesar de este enorme flujo, ellos observaron sólo tres eventos en una hora. Esto corresponde a una sección eficaz σ de neutrino por nucleón de casi $10^{-43} cm^2$. Las típicas secciones eficaces de las interacciones nucleares fuertes son medidas convencionalmente en *barns* ($10^{-24} cm^2$); lo cual nos muestra lo débil que es la interacción del neutrino con la materia [13].

El siguiente desarrollo teórico que permitió profundizar en el entendimiento de la física de los neutrinos se llevó a cabo en los años 1956-1957 y lleva asociados nombres tales como T. D. Lee, C. N. Yang, M. Gell-Mann y R. P. Feynman. Esta teoría [14] que involucra estrictamente neutrinos sin masa ($m_\nu = 0$) es propio de todos los hechos conocidos experimentales presentes.

ahora en adelante lo llamaremos $\bar{\nu}_e$.

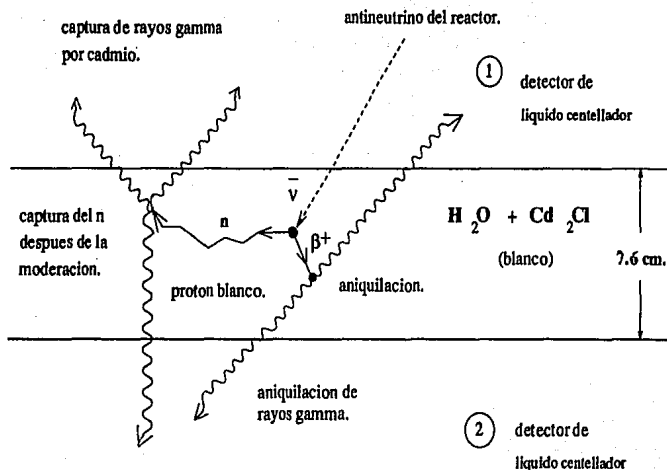
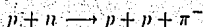


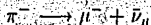
Figura 1.5: Esquema del experimento de Cowan y Reines para detectar antineutrinos provenientes de un reactor, adaptado de la Referencia [12].

Uno de los descubrimientos fundamentales de ésta época, fue que el neutrino físico es "esencialmente" levógiro. Por "esencialmente" suponemos con errores experimentales que deberían permitir una pequeña componente dextrógiro.

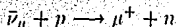
El siguiente gran avance en la comprensión de la física de los neutrinos, fue en el año 1962, año en el que el grupo de la Universidad de Columbia-Brook Haven, conducido por L.M.Lederman, M.Schwartz y J. Steinberger, descubrieron lo que hoy día llamamos el *sabor del neutrino* [15]. En dicho grupo, realizaron el experimento en el cual se producían mesones π en colisiones nucleón-nucleón de alta energía, obteniéndose por ejemplo,



proceso muy breve de duración aproximada de 10^{-8} s, y en el cual descansa, el decaimiento del π , es decir,



donde $\bar{\nu}_\mu$ es alguna clase de antineutrino dextrógiro (dextrógiro dentro del error experimental). Los investigadores de este grupo se hicieron la siguiente pregunta ¿es $\bar{\nu}_\mu \simeq \bar{\nu}_e$? y la respuesta experimental fue negativa. La idea básica fue permitir que el $\bar{\nu}_\mu$ chocara con protones y observar que



mientras se esperaba que sucediera $\bar{\nu}_\mu + p \longrightarrow e^+ + n$ y ello no sucedió. Se hicieron experimentos similares con el neutrino producido en el decaimiento $K^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. La determinación de la masa de este neutrino, desde entonces llamado *neutrino del muón*, ha sido difícil. Se determinó usando las masas conocidas del K , π y μ , así como la conservación de la energía-momento para la desintegración de dos cuerpos. Al final, la masa del neutrino surge como una pequeña diferencia numérica entre números grandes, lo cual limita la exactitud. El presente límite experimental es de

$$m_{\nu_\mu} < 270 \text{ KeV}.$$

El ν_μ podría ser tan masivo como un electrón sin que viole ninguna evidencia experimental directa. En 1976 se descubrió un nuevo leptón, el τ [16], con una masa de $1781.2 \pm 3.2 \text{ MeV}$. Existen muchas evidencias experimentales, las cuales hablan de que este leptón se desintegra vía

$$\tau \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \quad \text{o} \quad \tau \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau$$

donde esta ν es el nuevo leptón ν_τ , llamado *neutrino del tau*. Su masa ha sido mucho más difícil de aclarar. El límite presente es de [17]

$$m_{\nu_\tau} < 31 \text{ MeV}.$$

Aquí se autojaría hacer la siguiente pregunta: ¿Hay más *sabores* de neutrinos?, la respuesta es que no lo sabemos. Sin embargo la mayoría de las *Teorías de Gran Unificación* hablan de que a lo más debe haber en la *Naturaleza* tres *sabores* o *generaciones* de neutrinos [18].

Entre los años 1967-1968 gracias a los esfuerzos de los teóricos S. Weinberg, A. Salam, S. Glashow [19], fue desarrollado el modelo que describe las interacciones electromagnéticas y débiles, el cual trataremos en la siguiente sección.

1.2 El modelo electrodébil estándar

El modelo electrodébil estándar de S. L. Glashow, A. Salam y S. Weinberg (**GSW**) se basa en la suposición, ya comprobada experimentalmente, de la existencia de bosones vectoriales neutros y cargados que median las interacciones electromagnéticas y débiles. El Lagrangiano de la teoría se construye de tal manera que, para los campos fermiónicos y de norma no masivos, resulta invariante ante las transformaciones locales del grupo de simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, donde el subíndice L indica que los vectores base de la representación corresponden a múltiplos de helicidad izquierda, y el subíndice Y denota la hipercarga débil. A continuación, y también en forma que sea localmente invariante de norma, se introduce la interacción de los bosones vectoriales y de los fermiones con campos escalares o Higgses. A través de tal interacción y por el mecanismo de rotura espontánea de la simetría, los leptones, quarks y

bosones de norma adquieren masa sin que se vea afectada la renormalización de la teoría.

A continuación describiremos, con cierto detalle, la estructura de la teoría electrodébil [20]. Por simplicidad consideraremos el caso de una sola familia de leptones; la generalización para incluir varias generaciones de quarks y leptones será detallada en la sección siguiente cuando introduzcamos la matriz de mezcla.

Es bien conocido que la interacción débil a bajas energías puede ser descrita por el Lagrangiano efectivo corriente-corriente de Fermi

$$\mathcal{L}_W^{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger J^\mu, \quad (1.1)$$

donde J_μ es la corriente débil cargada y G_F como ya se mencionó antes la constante de Fermi. En este caso J_μ toma la forma

$$J_\mu = \bar{\Psi}_e (1 - \gamma_5) \Psi_\nu, \quad (1.2)$$

representando Ψ_e y Ψ_ν los campos del electrón y del neutrino del electrón respectivamente.

Por otro lado, la interacción electromagnética del electrón es expresada por

$$\mathcal{L}_{em} = e J_\mu^{em} A^\mu, \quad (1.3)$$

donde A^μ es el campo del fotón y

$$J_\mu^{em} = \bar{\Psi}_e \gamma_\mu \Psi_e \quad (1.4)$$

la corriente electromagnética.

Rearreglando J_μ y J_μ^{em} es posible reexpresarlas en términos de corrientes con propiedades de transformación definidas ante el grupo de simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. De esta manera, tenemos

$$J_\mu = 2(J_\mu^1 - i J_\mu^2), \quad J_\mu^{em} = J_\mu^0 - J_\mu^3,$$

con J_μ^0 y J_μ^n ($n = 1, 2, 3$) dadas por

$$J_\mu^0 = \bar{\Psi}_e \gamma_\mu \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \Psi_e + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_e \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \Psi_e,$$

$$J_{\mu}^n = \bar{\Psi} \gamma_{\mu} \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \frac{\tau^n}{2} \Psi,$$

donde $\Psi = (\Psi_{\nu}, \Psi_e)$ y τ^n son los generadores del grupo de $SU(2)_L$ en la representación fundamental. Las corrientes J_{μ}^0 y J_{μ}^n son identificadas con aquellas que corresponden a las simetrías $U(1)_Y$ y $SU(2)_L$ respectivamente. Bajo $SU(2)_L$ la parte levógira de los fermiones se transforma como un doblete y la parte dextrógira como un singulete. En base a esta simetría determinaremos el Lagrangiano de la teoría electrodébil demandando que, además de ser renormalizable, sea invariante ante las transformaciones locales del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

El álgebra del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ es dada por los generadores T^n y Y con las siguientes relaciones de conmutación

$$[T^i, T^m] = i \epsilon^{imn} T^n, \quad [T^n, Y] = 0. \quad (1.5)$$

Definiendo

$$T^0 \equiv \frac{Y}{2}, \quad (1.6)$$

las ecuaciones anteriores pueden escribirse

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad (1.7)$$

donde los índices a, b, c van desde 0 a 3, con $f^{0bc} = 0$ y $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ para a, b y c diferentes de 0. Los autovalores de la hipercarga débil Y en cada representación de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ son determinados de forma tal que deban cumplir con la relación de Gell-Mann-Nishijima $Q = T^3 + \frac{Y}{2}$, siendo Q el operador de la carga eléctrica y T^3 la proyección del isospin débil.

Asignaremos las partes levóginas y dextróginas de los fermiones a dobletes y singuletes de $SU(2)_L$ respectivamente. De esta forma, para el electrón e y para el neutrino del electrón ν_e tenemos el siguiente conjunto de campos

$$L_e = \begin{pmatrix} \Psi_{\nu L} \\ \Psi_{e L} \end{pmatrix}, \quad R_e = \Psi_{e R}, \quad R_{\nu} = \Psi_{\nu R}, \quad (1.8)$$

con

$$\Psi_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \Psi. \quad (1.9)$$

Ante una transformación infinitesimal el campo Ψ se transforma de la siguiente manera

$$\delta\Psi(x) = -i\theta^a(x) g^a T^a \Psi(x) \quad (\text{sin suma sobre } a)$$

con

$$g^a = \begin{cases} g, & a = 1, 2, 3 \\ g', & a = 0 \end{cases}$$

g y g' son las constantes de acoplamiento de $SU(2)_L \otimes U(1)$, respectivamente. Aplicando el principio de norma podemos derivar el Lagrangiano clásico en la forma estándar.

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F, \quad (1.10)$$

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^a f_a^{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

$$\mathcal{L}_F = i \bar{L} \not{D} L + i \bar{R}_e \not{D} R_e + i \bar{R}_\nu \not{D} R_\nu, \quad (1.12)$$

donde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g^a f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (\text{sin suma sobre } a) \quad (1.13)$$

y D_μ es la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + i g^a T^a W_\mu^a \quad (1.14)$$

W_μ^a es el campo de norma de $SU(2)_L \otimes U(1)$, cuya regla de transformación es,

$$\delta W_\mu^a = \partial_\mu \theta^a + g^a f^{abc} \theta^b W_\mu^c \quad (\text{sin suma sobre } a)$$

Los campos de norma y de materia están descritos por el Lagrangiano (1.12) y son todos no masivos, mientras que en el mundo físico los

fermiones (quizás con la única excepción de los neutrinos) son partículas con masa y los bosones de norma que median las interacciones débiles, dado que el rango es extremadamente corto de estas interacciones, resultan objetos muy pesados (sus masas son del orden de un átomo de Mo). Los términos convencionales de masa (por ejemplo, $\bar{\Psi} \Psi = \bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L$) violan la simetría de norma, por lo cual las masas de los bosones y fermiones se introducen en el modelo electrodébil estándar **GSW** mediante el llamado *mecanismo de rotura espontánea de la simetría*. Ya que la interacción electromagnética es mediada por el fotón que es un campo de norma sin masa, la simetría del Lagrangiano debe ser rota espontáneamente en la forma siguiente

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{em} .$$

Esto es posible gracias al escalar de Higgs el cual tiene un valor de expectación en el vacío de

$$T^a \langle \phi \rangle \neq 0, \quad a = 1, 2, 3$$

$$Q \langle \phi \rangle = 0, \quad (1.15)$$

En este vacío solo el bosón de norma que se acopla a Q permanece sin masa.

Para obtener fermiones masivos es conveniente introducir un doblete de campos de Higgs ya que el término $\bar{\Psi}_L \Psi_R$ es un doblete de $SU(2)_L$ y la interacción de Yukawa $\bar{\Psi}_L \Psi_R \phi$ resulta ser invariante de norma. El doblete de Higgs es [21]

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ v + \eta(x) + i \frac{\chi(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

con hipercarga $Y = 1$ y es acoplado a los bosones vectoriales y consigo mismo de la siguiente manera,

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + V(\phi), \quad (1.17)$$

con

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 = \lambda \left(\phi^\dagger \phi - \frac{\nu^2}{2} \right)^2 - \frac{\mu^2}{4\lambda} \quad (1.18)$$

donde λ y μ^2 son parámetros reales positivos y $\nu = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ representan el mínimo de potencial clásico $V(\phi)$.

Si sustituimos la Ec. (1.16) en la Ec. (1.17) las masas de los bosones de norma serán generadas de acuerdo con

$$\mathcal{L}_{m_G} = M_{ab} W_\mu^a W^{b\mu}, \quad (1.19)$$

donde

$$M_{ab} = \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & -g g' \\ 0 & 0 & -g g' & g'^2 \end{pmatrix} \times \frac{\nu^2}{8}. \quad (1.20)$$

Diagonalizando la matriz anterior obtenemos

$$\mathcal{L}_{m_G} = M_W^2 W_\mu^\pm W^\mu + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu, \quad (1.21)$$

con

$$M_W = \frac{g\nu}{2}, \quad M_Z = \sqrt{g^2 + g'^2} \frac{\nu}{2}, \quad M_\gamma = 0, \quad (1.22)$$

$$W_\mu^\pm = \frac{(W_\mu^1 \mp i W_\mu^2)}{\sqrt{2}},$$

$$Z_\mu = \frac{(g W_\mu^3 - g' W_\mu^0)}{\sqrt{g^2 + g'^2}},$$

$$A_\mu = \frac{(g' W_\mu^3 + g W_\mu^0)}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (1.23)$$

donde W_μ^\pm , Z_μ , A_μ representan los bosones débiles cargados, neutro y el fotón respectivamente. No hay término de masa para el fotón debido a la simetría $U(1)_{em}$ remanente dada por $\exp(-i\theta Q)$.

Los correspondientes bosones de Goldstone asociados con W_μ^\pm y Z_μ son representados por ϕ^\pm y χ , los cuales son todos no masivos. Existen también en \mathcal{L}_H términos de mezcla de la forma $\partial_\mu \phi W^\mu$ y $\partial_\mu \chi Z^\mu$. En la norma de 't Hooft, dichos términos son cancelados por los términos correspondientes que provienen del Lagrangiano que fija la norma y los propagadores de los Higgses no físicos tienen polos en las masas de los correspondientes bosones de norma.

De esta manera, los tres componentes del campo de Higgs ϕ son bosones de Goldstone no físicos. Además existe un bosón escalar neutro físico llamado η , cuya masa es dada por

$$M_\eta = \sqrt{2} \mu, \quad (1.24)$$

el cual es observable.

Por otro lado, las masas de los fermiones deben generarse a través de acoplamientos de Yukawa con ϕ , en cuyo caso la Lagrangiana se escribirá

$$\mathcal{L}_Y = -f_e \bar{L} \phi R_e - f_\nu \bar{L} \phi^c R_\nu + h.c., \quad (1.25)$$

donde

$$\phi^c = i \sigma_2 \phi^* = \begin{pmatrix} -\phi^{0*} \\ \phi^- \end{pmatrix}$$

es el campo conjugado de carga de ϕ . El Lagrangiano (1.25) genera los siguientes términos de masa para los fermiones

$$\mathcal{L}_{m_f} = -m_e \bar{\Psi}_e \Psi_e - m_\nu \bar{\Psi}_\nu \Psi_\nu \quad (1.26)$$

con

$$m_e = f_e \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad m_\nu = f_\nu \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (1.27)$$

Los acoplamientos de Yukawa f_e y f_ν son parámetros libres en el Lagrangiano y de aquí que las masas del electrón y de su correspondiente neutrino (ν_e) son cantidades arbitrarias cuyos valores deben ser determinadas experimentalmente. En la versión original del modelo electrodébil estándar la parte dextrógira del campo del neutrino está ausente, con lo cual $m_\nu = 0$.

Sumando las Ecs. (1.10), (1.17) y (1.25) obtenemos el Lagrangiano clásico del modelo **GSW**

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_V \quad (1.28)$$

En el Lagrangiano (1.28) el término que corresponde a la interacción del fotón con el electrón es

$$\left(\frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) A^\mu \bar{\Psi}_e \gamma_\mu \Psi_e$$

Para poder hacer esta expresión igual a $e J_\mu^{\text{em}} A_\mu$, es necesario tomar

$$e \equiv \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (1.29)$$

Comparando el Lagrangiano efectivo $\frac{g^2}{8M_W^2} J_\mu^\dagger J_\mu$, obtenido en el límite de baja energía para la interacción mediada por el bosón W^\pm , con la ecuación (1.1) obtenemos la relación

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2v^2} \quad (1.30)$$

la cual determina el valor de expectación.

Es conveniente definir el ángulo de mezcla débil o también llamado ángulo de Weinberg θ_w entre (W^3, W^0) y (Z, A) de la manera siguiente

$$\text{sen } \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (1.31)$$

Usando la Ec. (1.22) podemos expresar este en términos de las masas de los bosones W y Z

$$\operatorname{sen}^2 \theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \quad (1.32)$$

La mejor determinación de $\operatorname{sen}^2 \theta_W$ proviene de la dispersión dura de neutrinos. El promedio mundial es [22]

$$\operatorname{sen}^2 \theta_W = 0.217 \pm 0.014 \quad (1.33)$$

aunque resultados preliminares más recientes, sugieren el valor algo mayor de $0.232 \pm 0.012 \pm 0.10$.

Si sustituimos en la Ec. (1.30) el valor de la constante de Fermi G_F , obtenido a partir de los datos experimentales del decaimiento del muón,

$$G_F = (1.16635 \pm 0.00002) \times 10^{-5} \text{ GcV}^{-2}, \quad (1.31)$$

obtenemos

$$\frac{v}{\sqrt{2}} \simeq 174 \text{ GcV}, \quad (1.35)$$

el cual representa la escala de masa típica en la cual la simetría del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ es rota espontáneamente.

Haciendo uso de las relaciones (1.29), (1.30) y (1.31) la masa del M_W se puede expresar en términos de la constante de Fermi G_F , el ángulo de Weinberg $\operatorname{sen} \theta_W$ y la constante de estructura fina $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$

$$M_W^2 = \frac{\pi \alpha}{\sqrt{2} G_F \operatorname{sen}^2 \theta_W} \quad (1.36)$$

Esta relación se verá modificada por correcciones radiativas. Si se toma en cuenta correcciones de orden $\mathcal{O}(\alpha)$ y se usa $M_Z = M_W \cos \theta_W$, se obtienen las siguientes predicciones del modelo electrodébil estándar

$$M_W = 83.0 \begin{cases} + 2.9 \text{ GcV} \\ - 2.7 \text{ GcV} \end{cases} \quad M_Z = 93.8 \begin{cases} + 2.4 \text{ GcV} \\ - 2.2 \text{ GcV} \end{cases}, \quad (1.37)$$

los cuales están en buen acuerdo con los valores reportados por las colaboraciones $UA1$ y $UA2$ en los experimentos de colisiones $p\bar{p}$ realizados en el *CERN* [23].

1.3 La matriz de mezcla

Una de las cuestiones más notables dentro de la física de las partículas elementales es el llamado *problema de las familias o generaciones*. Este problema (como se mencionó en el bosquejo histórico) apareció con el descubrimiento del *muón*, leptón cargado cuyas interacciones son similares a las del electrón pero cuya masa es unas doscientas veces mayor que la de éste. A la pregunta *¿porqué existen diferentes familias y cuál es su número?* no tenemos ninguna respuesta satisfactoria, a pesar de haber especulaciones en el sentido de considerar la proliferación de partículas "elementales" como una evidencia de una nueva subestructura de la materia [24].

Tomando las familias por dadas sus diferentes miembros o "sabores" pueden ser caracterizados por ciertos números cuánticos internos como la *extrañeza*, el *encanto*, el *número del muón*, etc., los cuales dan cuenta de la supresión o no existencia de ciertos procesos (por ejemplo: $K_L \rightarrow \mu^+ + \mu^-$, $\mu \rightarrow e + \gamma$). Actualmente los leptones y quarks están agrupados en tres familias como se muestra en la Tabla (1.1).

Por otro lado, es bien conocido que las interacciones débiles dan origen a la violación de los diferentes números cuánticos de sabor, tales como la *extrañeza* y el *encanto* y podrían incluir los números cuánticos asociados con los quarks *t* y *b*, así como también los correspondientes al sector de leptones.

Dentro de las teorías de norma la conservación de los distintos sabores ocupa una posición en cierta forma especial. En contraste con la conservación de la carga eléctrica, la conservación del *número leptónico* del electrón o muón, no están asociados con acoplamientos invariantes de norma de corrientes conservadas, tipo e o μ , a un bosón vectorial sin masa. Es decir, las leyes de conservación de los diferentes sabores, aunque pudiesen ser exactas, no se verifican en la naturaleza como simetrías de norma rotas, ya que no observamos los efectos dinámicos de fuerzas de largo alcance asociados con cada uno de los números bariónicos o leptónicos.

La violación de los números cuánticos de sabor en las teorías de norma de las interacciones electrodébiles surge de la mezcla de partículas. Si las únicas restricciones impuestas sobre los Lagrangianos que describen tales interacciones son la invariancia de norma y la renormaliza-

	I	II	III	
Quarks	Up $\frac{1}{3}$ $+\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{3}$ u $+\frac{2}{3}$ R, A, V 5 MeV	Charm $\frac{1}{3}$ $+\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{3}$ c $+\frac{2}{3}$ R, A, V 1.25 GeV	Top $\frac{1}{3}$ $+\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{3}$ t $+\frac{2}{3}$ R, A, V ~ 174 GeV	
	Down $\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{3}$ d $-\frac{1}{3}$ R, A, V 9 MeV	Strange $\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{3}$ S $-\frac{1}{3}$ R, A, V 175 MeV	Bottom $\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{3}$ b $-\frac{1}{3}$ R, A, V 4.5 GeV	
	Electrón $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -1 e -1 0.511 MeV	Muon $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -1 μ -1 105.66 MeV	Tau $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -1 τ -1 1.78 GeV	
	Neutrino del Electrón $\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$ -1 v _e 0 0 < 2.2 eV	Neutrino del Muon $\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$ -1 v _{μ} 0 0 < 270 KeV	Neutrino del Tau $\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$ -1 v _{τ} 0 0 < 31 MeV	
Leyenda				
Nombre	Up $\frac{1}{3}$ $+\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{3}$	Número leptónico o bariónico Isoespín débil	Colores	
Símbolo	u $+\frac{2}{3}$ R, A, V 5 MeV	Hipercarga débil Carga eléctrica Color Masa en reposo	R = Rojo A = Azul V = Verde	

Figura 1.6: Modelo estándar de la Partículas Elementales.

bilidad, en general, existen acoplamientos no diagonales entre leptones (o quarks) de sabores diferentes con los bosones escalares de la teoría. Como la simetría de grupo de norma débil es espontáneamente rota, resulta que los autovalores de interacción débil no son los autovalores de la matriz de masa (regresaremos a esto en el Cap. 3). Por lo tanto, en general habrá mezcla entre fermiones de la misma carga y de la misma quiralidad, lo cual impide la existencia de un número cuántico exactamente conservado asociado con partículas en un dado multiplete débil.

A continuación mostraremos, dentro del modelo estándar, cómo la matriz de mezcla entre fermiones de distinto sabor se relaciona con el procedimiento de diagonalización de las matrices de masa de las partículas con la misma carga. Al hacer esto extenderemos el esquema de la Sección anterior al caso más realista de multigeneraciones de leptones o quarks [25].

En la Sección anterior, se dijo que la parte levógira y dextrógira de los fermiones corresponde a dobletes y singuletes de $SU(2)_L \otimes U(1)$, respectivamente. De esta forma, para los leptones tenemos

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ l_{iL} \end{pmatrix}, \quad R_{li} = l_{iR}, \quad R_{\nu i} = \nu_{iR}, \quad (1.38)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots$ y $L(R)$ representa la proyección levógira (dextrógira) de los campos cargados $l(Q = -1)$ y neutros $\nu(Q = 0)$.

El Lagrangiano más general renormalizable e invariante de norma para la interacción de los leptones con los campos de Higgs es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= - \bar{L}_i F_l R_l \phi + \bar{L}_i F_\nu R_\nu \phi^c + h.c. \\ &= - \sum_{ij} \left(\bar{L}_i f_{lij} R_{lj} \phi - \bar{L}_i f_{\nu ij} R_{\nu j} \phi^c \right) + h.c., \end{aligned} \quad (1.39)$$

donde hemos definido los siguientes vectores

$$L' = \begin{pmatrix} L'_1 \\ L'_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad R'_l = \begin{pmatrix} l'_{1R} \\ l'_{2R} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad R'_\nu = \begin{pmatrix} \nu'_{1R} \\ \nu'_{2R} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

con $L'_i = \begin{pmatrix} \nu'_{iL} \\ l'_{iL} \end{pmatrix}$ y donde f_{lij} , $f_{\nu ij}$ son números arbitrarios (en general complejos). Es conveniente aclarar que el Lagrangiano completo de la teoría puede siempre escribirse en términos de los campos con prima, de tal manera que las únicas interacciones no diagonales en el sabor aparezcan en el sector de los acoplamientos con los Higgses.

Después del rompimiento espontáneo de la simetría el Lagrangiano (1.39) produce los siguientes términos de masa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= - \left(\sum_{ij} \bar{l}'_{iL} m'_{lij} l'_{jR} + \sum_{ij} \bar{\nu}'_{iL} m'_{\nu ij} \nu'_{jR} + h.c. \right) \\ &= - \left(\bar{L}'_q M'_l R'_q + \bar{L}'_\nu M'_\nu R'_\nu + h.c. \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

con $m'_{lij} = f_{lij} \frac{v}{\sqrt{2}}$, $m'_{\nu ij} = f_{\nu ij} \frac{v}{\sqrt{2}}$ y

$$L'_l = \begin{pmatrix} l'_{1L} \\ l'_{2L} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad L'_\nu = \begin{pmatrix} \nu'_{1L} \\ \nu'_{2L} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Las matrices M'_l y M'_ν son matrices arbitrarias complejas cuya única restricción es la de conservar la carga eléctrica, es decir, $[Q, M'_\alpha] = 0$ ($\alpha = l, \nu$). Como demostramos en el apéndice A, estas matrices pueden ser diagonalizadas por una transformación biunitaria.

$$U_{iL} M'_{iL} U_{iR}^\dagger = M_i, \quad U_{\nu L} M'_{\nu L} U_{\nu R}^\dagger = M_\nu, \quad (1.43)$$

donde las matrices $U_{\alpha L, R}$ son todas unitarias,

$$U_{\alpha L, R} U_{\alpha L, R}^\dagger = U_{\alpha L, R}^\dagger U_{\alpha L, R} = I, \quad (\alpha = l, \nu) \quad (1.44)$$

y M_l, M_ν son matrices diagonales cuyos elementos siempre pueden escogerse positivos definidos. Los estados físicos de los leptones cargados y neutros ahora son

$$L_i = U_{iL}^\dagger L'_i, \quad R_i = U_{iR}^\dagger R'_i, \\ L_\nu = U_{\nu L}^\dagger L'_\nu, \quad R_\nu = U_{\nu R}^\dagger R'_\nu. \quad (1.45)$$

Cuando reemplazamos los campos con prima por los campos físicos, debido a la unitariedad de las matrices $U_{\alpha L, R}$, los términos cinemáticos y las corrientes electromagnética y neutra permanecen diagonales. La no existencia de corrientes neutras que cambien el sabor tiene que ver con el hecho de que todos los leptones con la misma carga y helicidad se transforman idénticamente ante el grupo de norma y que los leptones reciben su masa solo a través de acoplamiento con un solo escalar neutro [26]. En cambio para la corriente cargada obtenemos

$$J_\mu^{cc} = \bar{L}'_i \gamma_\mu L'_i = \bar{L}_i \gamma_\mu U_{iL} U_{\nu L}^\dagger L_\nu \\ = \bar{L}_i \gamma_\mu U_\nu L_\nu, \quad (1.46)$$

donde

$$U_\nu \equiv U_{iL} U_{\nu L}^\dagger, \quad (1.47)$$

es precisamente la matriz (unitaria) de mezcla entre los neutrinos.

Ahora podemos hacer las siguientes identificaciones

$$\begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \\ \vdots \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \\ \vdots \end{pmatrix} \equiv U_\nu \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

donde ν_l ($l = e, \mu, \tau, \dots$) son los llamados "autoestados de sabor" o "autoestados de interacción débil". Así por ejemplo, el ν_μ es la partícula que es producida junto con el muon en el decaimiento del pión: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. En términos de dichos campos la corriente cargada tiene la estructura

$$J_\mu^{cc} = \frac{1}{2} \sum_l \bar{l} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_l, \quad (l = e, \mu, \tau, \dots) \quad (1.49)$$

Para los quarks se puede seguir un procedimiento análogo de tal manera que la corriente cargada puede escribirse de la siguiente manera en términos de los campos físicos

$$J_\mu^{cc} = \bar{L}_{2/3} \gamma_\mu U_q L_{-1/3} \quad (1.50)$$

con

$$U_q = U_L(2/3) U_L^\dagger(-1/3) \quad (1.51)$$

y

$$L_{2/3} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}_L, \quad L_{-1/3} = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}_L \quad (1.52)$$

Así hemos mostrado que la mezcla de fermiones de la misma carga ocurre naturalmente en el modelo electrodébil estándar GSW en el sentido de que la invariancia de norma y la renormalización no imponen

el requerimiento de que la corriente cargada y la matriz de masa de los leptones y/o quarks sea simultáneamente diagonal. En cambio el valor de los parámetros de las matrices de mezcla y los valores de las masas de los fermiones son enteramente arbitrarios y no calculables.

En general para n familias el número de parámetros físicamente significativos en la matriz de mezcla es $(n-1)^2$. Esto resulta de sustraer, a los n^2 parámetros de una matriz unitaria de $n \times n$, las $(2n-1)$ fases arbitrarias que pueden ser eliminadas por una redefinición independiente de cada uno de los campos levógiros. El número total de tales fases no físicas es de $2n-1$, y no $2n$, ya que, en las dos matrices unitarias diagonales usadas en la redefinición de los campos levógiros, una de las fases corresponde a una fase global, la cual siempre puede tomarse igual a cero. Una matriz ortogonal de $n \times n$ es caracterizada por $\frac{n(n-1)}{2}$ ángulos, así que el resto de los parámetros esenciales de U corresponde a $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, regresaremos a esto en la Sección 3.2.

Por ejemplo para el caso $n=2$ tenemos un solo parámetro y U puede ser caracterizada por un ángulo y ninguna fase,

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.53)$$

lo cual corresponde a la ausencia de violación de **CP** en los acoplamientos de W^\pm en el caso de dos generaciones.

La forma más general de U para $n=3$ fue primeramente determinada por Kobayashi y Maskawa [27] y puede ser escrita en términos de tres ángulos y una fase.

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.54)$$

donde

$$U_{11} = c_1, \quad (1.55)$$

$$U_{12} = s_1 c_3, \quad (1.56)$$

$$U_{13} = s_1 s_3, \quad (1.57)$$

$$U_{21} = -s_1 c_2, \quad (1.58)$$

$$U_{22} = c_1 c_2 c_3 + s_2 s_3 e^{i\delta}, \quad (1.59)$$

$$U_{23} = c_1 c_2 s_3 - s_2 c_3 e^{i\delta}, \quad (1.60)$$

$$U_{31} = -s_1 s_2, \quad (1.61)$$

$$U_{32} = c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 e^{i\delta}, \quad (1.62)$$

$$U_{33} = c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 e^{i\delta}, \quad (1.63)$$

con $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$ ($i = 1, 2, 3$). En el límite $\theta_2 = \theta_3 = \delta = 0$, ésta se reduce a la mezcla de Cabibbo usual, con $\theta_1 = \theta_c$.

Capítulo 2

El problema de los neutrinos solares y su estatus actual

2.1 Entendiendo el problema

El Sol es un enorme reactor termonuclear en donde se llevan a cabo muchas reacciones para sintetizar hidrógeno en helio y posteriormente a elementos más pesados [28]. En estas reacciones, los neutrinos son producidos por procesos débiles que ocurren durante la fusión nuclear.

La astrofísica de los neutrinos es interesante y a la vez difícil. Debido a que los neutrinos sólo interactúan débilmente con la materia (ver Cap.1, pag.14), pueden alcanzarnos desde regiones prácticamente inaccesibles para la astronomía tradicional, pues en ella son usados los *fotones* como mensajeros de los objetos estelares. Gracias a los neutrinos, podemos *mirar* dentro de las estrellas y examinar directamente los energéticos procesos físicos que ocurren en el interior de nuestro Sol o en el centro de una estrella colapsándose gravitacionalmente como sucede en una Supernova.

Se conoce más acerca del Sol que de cualquier otra estrella y los cálculos para estimar el rango de producción de los neutrinos solares han sido hechos con mucha precisión. Dichos neutrinos pueden ser detectados en Tierra y los experimentos desarrollados hasta ahora han detectado *menos* neutrinos de los que son esperados teóricamente. Este conflicto entre la teoría y la observación es llamado " *El problema de los*

$$U_{13} = s_1 s_3, \quad (1.57)$$

$$U_{21} = -s_1 c_2, \quad (1.58)$$

$$U_{22} = c_1 c_2 c_3 + s_2 s_3 e^{i\delta}, \quad (1.59)$$

$$U_{23} = c_1 c_2 s_3 - s_2 c_3 e^{i\delta}, \quad (1.60)$$

$$U_{31} = -s_1 s_2, \quad (1.61)$$

$$U_{32} = c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 e^{i\delta}, \quad (1.62)$$

$$U_{33} = c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 e^{i\delta}, \quad (1.63)$$

con $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$ ($i = 1, 2, 3$). En el límite $\theta_2 = \theta_3 = \delta = 0$, ésta se reduce a la mezcla de Cabibbo usual, con $\theta_1 = \theta_c$.

neutrinos solares?

Este enigma ha preocupado tanto a los astrónomos quienes quieren usar las observaciones de los neutrinos para tratar de entender mejor como el Sol y otras estrellas brillan, como a los físicos de partículas elementales, quienes ven en él, una clave para futuros desarrollos teóricos y experimentales en la física de altas energías [29].

Las posibles vías de solución al problema de los neutrinos solares, deben estar en alguno de los siguientes aspectos:

- 1.- *Las técnicas experimentales de detección de neutrinos son inadecuadas, lo cual ha generado datos incorrectos.*
- 2.- *El cálculo en el flujo de neutrinos esperados puede ser incorrecto y por ende son grandes las incertidumbres generadas en el modelo solar estándar.*
- 3.- *Nuestro entendimiento de las propiedades de los neutrinos, basado en el modelo electrodébil estándar, es incompleto.*

En principio todas las alternativas anteriores son igualmente posibles, sin embargo desde las primeras observaciones hasta el momento, se ha visto que la primera alternativa está excluida debido a que desde entonces, se han desarrollado en años recientes muchos experimentos, empleando diferentes técnicas de detección, en los cuales el número de neutrinos es también menor que lo esperado. Para la segunda alternativa, Bahcall y colaboradores [30] han checado y perfeccionado sus cálculos a lo largo de muchos años, haciendo posible que las estimaciones de sus errores lleguen a ser progresivamente menores. Recientemente otro grupo ha desarrollado el mismo cálculo [31] y encuentran resultados cercanos a los de Bahcall y colaboradores, aunque su valor central es algo menor, es decir, más cercano al flujo observado en los experimentos. Ha sido argumentado [32], que si las propiedades de los neutrinos son descritas exactamente por el modelo electrodébil estándar **GSW**, únicamente cambios en el *modelo solar estándar* no pueden explicar la discrepancia entre el rango de neutrinos detectados en diferentes experimentos. Aquí supondremos que el modelo solar estándar es esencialmente correcto y que los cálculos del grupo de Bahcall [33] son confiables. De esta manera, la solución al enigma de los neutrinos

Capítulo 2

El problema de los neutrinos solares y su estatus actual

2.1 Entendiendo el problema

El Sol es un enorme reactor termonuclear en donde se llevan a cabo muchas reacciones para sintetizar hidrógeno en helio y posteriormente a elementos más pesados [28]. En estas reacciones, los neutrinos son producidos por procesos débiles que ocurren durante la fusión nuclear.

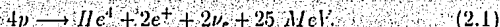
La astrofísica de los neutrinos es interesante y a la vez difícil. Debido a que los neutrinos sólo interactúan débilmente con la materia (ver Cap.1, pag.14), pueden alcanzarnos desde regiones prácticamente inaccesibles para la astronomía tradicional, pues en ella son usados los *fotones* como mensajeros de los objetos estelares. Gracias a los neutrinos, podemos *mirar* dentro de las estrellas y examinar directamente los energéticos procesos físicos que ocurren en el interior de nuestro Sol o en el centro de una estrella colapsándose gravitacionalmente como sucede en una Supernova.

Se conoce más acerca del Sol que de cualquier otra estrella y los cálculos para estimar el rango de producción de los neutrinos solares han sido hechos con mucha precisión. Dichos neutrinos pueden ser detectados en Tierra y los experimentos desarrollados hasta ahora han detectado *menos* neutrinos de los que son esperados teóricamente. Este conflicto entre la teoría y la observación es llamado " *El problema de los*

solares debe hallarse en la tercer alternativa, la cual necesariamente implica hacer desarrollos teóricos con miras a extender el modelo electrodébil estándar GSW[31].

2.2 Evolución estelar

La astrofísica asume [35] que el Sol es esférico y que se ha desarrollado en el tiempo en forma cuasi-estática, es decir cambiando paulatinamente de una configuración aproximadamente de equilibrio a otra, también aproximadamente de equilibrio, para un periodo de cerca de 5×10^9 años. La evolución se manifiesta por la pérdida de fotones de la superficie de la estrella, la cual está balanceada por la transformación de protones en partículas α (nucleos de He) en el centro del Sol. La reacción completa puede ser representada simbólicamente por la relación



Los protones son convertidos a partículas α , positrones y neutrinos, con una liberación de cerca de 25 MeV de energía térmica por cada cuatro protones transformados. Esto, por supuesto no se verifica en una simple reacción, y la Ec. (2.1) representa el resultado neto de un proceso que se lleva a cabo en muchos pasos. Cada conversión de cuatro protones a una partícula α es conocida como una *terminación* de la cadena de reacciones generadoras de energía que acompañan a la fusión termonuclear. La energía térmica generada por dicha fusión emerge de la superficie del Sol en forma de luz. La energía es transportada desde la profundidades del interior solar por fotones, lo cual significa que la *opacidad* de la materia a la radiación es importante. La presión que soporta el Sol es provista por los movimientos térmicos de los electrones y los iones.

Las principales aproximaciones usadas en la construcción del modelo solar estándar son listadas a continuación, pues juegan un papel fundamental.

- (1) **Equilibrio hidrostático:** Se supone que el Sol está en equilibrio hidrostático, es decir que las presiones radiativas y de partícu-

las en el modelo están exactamente balanceadas por la gravedad. Observacionalmente ésta es una excelente aproximación.

- (2) **Transporte de energía por fotones o por movimientos convectivos:** En el profundo interior del Sol donde son producidos los neutrinos, el transporte de energía es primariamente por difusión de fotones; la opacidad radiativa calculada es un ingrediente crucial en la construcción del modelo y ha sido objeto de recientes y detallados estudios [36].
- (3) **Generación de energía por reacciones nucleares:** La fuente de energía primaria tanto para los fotones como para los neutrinos radiados es la fusión nuclear, aunque los pequeños efectos de contracción gravitacional están también incluidos.
- (4) **Abundancia de cambios causados solamente por reacciones nucleares:** Se supone que el interior del Sol es químicamente homogéneo y que en amplias regiones del modelo los cambios en la abundancia locales de isótopos individuales debidos a la convección ocurren solamente por reacciones nucleares.

El modelo solar estándar es el resultado final de una sucesión de modelos, que representan la evolución en el tiempo del Sol desde su formación hasta su estado actual. En el modelo solar estándar la fracción de la masa más interna de hidrógeno es casi la mitad del valor de la superficie. Dicho modelo es una solución de las ecuaciones de evolución que satisfacen condiciones de contorno tanto espaciales como temporales, el cual tiene una masa fija M_{\odot} , una luminosidad total (en fotones) L_{\odot} y un radio externo R_{\odot} , para un tiempo de 4.6×10^9 años (la edad presente del Sol, determinada a partir de meteoritos). Los valores iniciales de la composición química y la entropía son calculados de manera iterativa hasta obtener una descripción confiable, pues son contrastados con los datos observacionales del Sol en el presente. La solución de las ecuaciones de evolución determinan los valores iniciales para las fracciones de masas de hidrógeno, helio y elementos más pesados, así como la presente distribución de dichos elementos y el flujo de neutrinos.

Las condiciones físicas en el interior del Sol donde los neutrinos son producidos son extremas, como en un plasma. La temperatura central es de alrededor de $15 \times 10^8 \text{ K}$ (correspondiendo a una energía cinética de poco más de 1 KeV) y la densidad central es de 150 gr cm^{-3} , también se presume que la física de los gases (altamente degenerados) del interior solar es relativamente simple. Cálculos del modelo solar estándar incluyen correcciones a la ecuación de estado que viene de la degeneración del electrón y los efectos del plasma, pero éstas correcciones son pequeñas y no afectan significativamente los flujos de neutrinos predichos.

La composición química inicial se asume que es la misma en todo el Sol; la composición de la superficie se asume que refleja la razón inicial de elementos pesados al hidrógeno. La superficie del Sol es también demasiado fría para reacciones nucleares que en un momento dado pudieran alterar dicha composición. Varios autores han discutido una posible solución al problema de los neutrinos solares en la cual se propone que la composición química inicial no era muy uniforme. Sin embargo, ninguno ha tenido éxito en construir un modelo teórico, consistente con todas las observaciones disponibles hasta el presente y en el cual la composición química inicial haya sido fuertemente no homogénea.

Para construir el modelo solar estándar se comienza con el cálculo de una estimación de la fracción inicial de la masa estelar total que estaba en la forma de hidrógeno. Las mediciones de la superficie del Sol dan tan solo las razones relativas del hidrógeno a las abundancias de elementos más pesados que el helio; la abundancia del helio en la superficie solar no se puede medir de forma completamente confiable. Los parámetros del modelo son desarrollados cuasi-estáticamente tomando en cuenta los cambios de composición y la energía liberada por reacciones nucleares. La precisión con la cual los cálculos del interior deben de ser llevados acabo es mucho mayor que para la mayoría de las otras aplicaciones de la teoría de evolución estelar, debido a que las mediciones del neutrino se relacionan directamente al proceso que está ocurriendo en el interior solar y debido a que los flujos calculados son sensibles a las condiciones físicas imperantes allí. Las condiciones de frontera impuestas al modelo de luminosidad deben de ser iguales a la luminosidad solar observada en el presente; esta condición tiene un fuerte efecto en los flujos de

neutrinos calculados. La razón es que tanto la luminosidad como los flujos de neutrinos son producidos por reacciones nucleares en el núcleo solar. Se han desarrollado modelos evolutivos por diferentes grupos de investigadores; los cuales ajustan de manera diferente los parámetros de entrada; dichos modelos permiten predecir flujos de neutrinos con un alto grado de confiabilidad. Tanto para el Sol como para otras estrellas, la teoría de la evolución estelar está en un acuerdo satisfactorio con las observaciones astronómicas convencionales presentes.

2.3 Generación de energía y flujo de neutrinos

A partir de la Ec. (2.1), es posible hacer una estimación *a grosso modo* del flujo de neutrinos que llegan a Tierra. La luminosidad del Sol es $L_{\odot} = 4 \times 10^{33} \text{ erg/s}$; por cada 25 MeV de energía llegando al exterior, son producidos dos neutrinos. De esta manera el flujo de neutrinos producidos por segundo está dado por $2L_{\odot}/25 \text{ MeV}$. Dividiendo esto por $4\pi r^2$, donde r es la distancia media Tierra-Sol ($1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$), obtenemos para el flujo en la superficie terrestre un valor de casi $6 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Como se puede ver de la Tabla 2.1 la mayoría de los neutrinos en el flujo vienen de la reacción pp donde el *deuterio* es producido a partir de dos protones.

La Tabla 2.1 da la cadena de reacciones que hemos resumido en la Ec. (2.1). En el primer estado, los protones sintetizan deuterio (H^2). Esto ocurre en dos reacciones paralelas, llamadas las reacciones pp y la pep por las partículas participantes en dichas reacciones. La reacción pp es la responsable de la mayoría de los neutrinos producidos en el Sol. Una vez que el deuterio es producido, rápidamente se sintetiza a He^3 , y de esta manera $2He^3$ pueden formar He^4 por interacción fuerte. Sin embargo, en muy pocos casos, el He^3 interactúa débilmente con protones y produce He^4 , produciendo neutrinos en el proceso.

Cuando el He^4 es producido, es posible que se puedan sintetizar núcleos más pasados como el Be^7 . Dado que el He^4 es un núcleo muy estable, el Be^7 producido se transforma finalmente a He^4 a través de varios pasos vía la producción de ya sea Li^7 o Be^8 como es mostrado en

la Tabla 2.1. Notemos que el neutrino del Be^8 tiene muy alta energía. Como veremos después esto es muy importante para la detección de neutrinos solares. Por supuesto que los neutrinos provenientes de la cadena hep son también energéticos, pero su flujo es tan pequeño que pueden ser despreciados para nuestros propósitos.

Existe también el ciclo CNO, involucrando núcleos más pesados como los de varios isótopos del carbono, nitrógeno y oxígeno (de aquí el nombre del ciclo) el cual produce algunos neutrinos. Las reacciones son mostradas en la Tabla 2.2. Para la temperatura del núcleo solar, este ciclo es muy débil y produce solo $\sim 1.5\%$ del total de neutrinos en el flujo [37].

2.4 Principales técnicas de detección

Todos los mecanismos de detección propuestos hasta ahora para los neutrinos solares pertenecen a una de las tres categorías siguientes.

1.- Detectores Radioquímicos: En este método, el ν_e proveniente del Sol, golpea un detector conteniendo núcleos X los cuales experimentan un decaimiento β inverso (ver Capítulo 1, pag. 14):



El detector es mantenido activo por un tiempo, y es entonces cuando se observa el núcleo resultante Y . Los núcleos Y son extraídos químicamente, y su número da el rango de captura de neutrinos. Los experimentos propuestos hasta ahora involucran varios materiales como blanco, los cuales son mostrados en la Tabla 2.3. Notemos que los núcleos *producto* son radiactivos. Es por esta razón que no se puede mantener la captura de neutrinos por un tiempo indefinido, antes de detectar químicamente los núcleos Y .

La ventaja de los detectores radioquímicos es que con ellos se pueden detectar neutrinos de *baja energía*. El umbral por supuesto dependerá del material usado como blanco. En el Ga^{71} por ejemplo, el umbral es tan bajo que aún neutrinos de baja energía como los de las reacciones pp pueden ser detectados. La desventaja de esta técnica es que no es posible saber el número de neutrinos que están llegando a interac-

Reacciones	Nombre de la reacción	E en MeV	Flujo $10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$
1^{er} paso: síntesis de p. a H^2			
$p + p \rightarrow H^2 + e^+ + \nu_e$	pp	≤ 0.42	$6.0 \times (1 \pm 0.02)$
$p + e^- + p \rightarrow H^2 + \nu_e$	pep	1.44	$0.014 \times (1 \pm 0.05)$
2^{do} paso: síntesis de H^2 a He^3			
$H^2 + p \rightarrow He^3 + \gamma$	—	—	—
3^{er} paso: síntesis de He^3 a He^4 directamente			
$He^3 + He^3 \rightarrow He^4 + p + p$	—	—	—
$He^3 + p \rightarrow He^4 + e^+ + \nu_e$	He ³ p	≤ 18.77	8×10^{-7}
4^{to} paso: Síntesis del Be^7			
$He^3 + He^4 \rightarrow Be^7 + \gamma$	—	—	—
5^{to} paso: Be^7 convirtiéndose en He^4			
$Be^7 + e^- \rightarrow Li^7 + \nu_e$	Be^7	0.861	$0.47 \times (1 \pm 0.15)$
$Li^7 + p \rightarrow He^4 + He^4$	—	—	—
$Be^7 + p \rightarrow B^8 + \gamma$	—	—	—
$B^8 \rightarrow (B^8)^* + e^+ + \nu_e$	B^8	≤ 14.06	5.8×10^{-4}
$(B^8)^* \rightarrow He^4 + He^4$	—	—	(1 ± 0.37)

Tabla 2.1: Reacciones involucradas en la cadena pp.

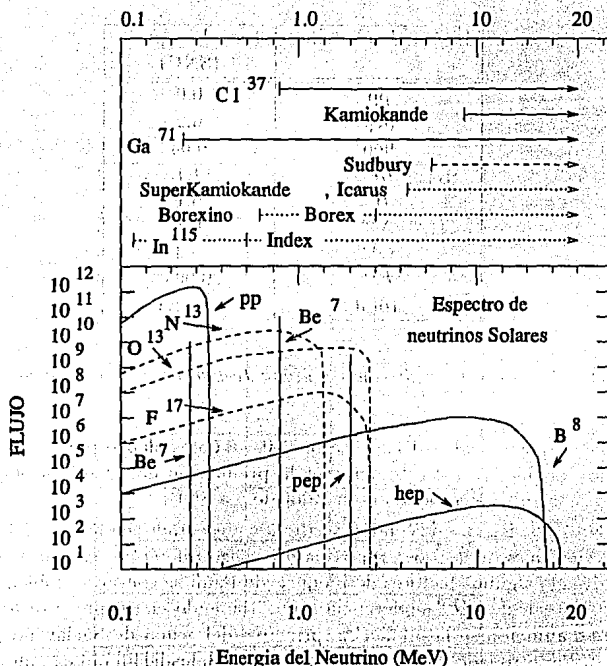


Figura 2.1: Distribución de Energía para el flujo de neutrinos solares de varias reacciones. Los flujos de neutrinos de fuentes continuas (como pp y B⁸) están dados por el número de unidades por cm² por segundo por MeV a una Unidad Astronómica. Los flujos lineales (pep y Be⁷) están dados en número de unidades por cm² por segundo. Las líneas sólidas corresponde a la cadena pp, y las líneas de puntos corresponden al ciclo CNO. En la parte superior de la figura se da el intervalo de sensibilidad de los diferentes detectores por encima del umbral de energía. Líneas continuas: detectores existentes. Líneas de trazos: detectores en construcción. Líneas de puntos: proyectos. Adaptado de la Ref. [37].

Reacciones	E en MeV	Flujo en $10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$
$C^{12} + p \rightarrow N^{13} + \gamma$	—	
$N^{13} \rightarrow C^{13} + e^+ + \nu_e$	≤ 1.2	$0.06(1 \pm 0.50)$
$C^{13} + p \rightarrow N^{14} + \gamma$	—	
$N^{14} + p \rightarrow O^{15} + \gamma$	—	
$O^{15} \rightarrow N^{15} + e^+ + \nu_e$	≤ 1.73	$0.05(1 \pm 0.50)$
$N^{15} + p \rightarrow C^{12} + He^4$	—	
$N^{15} + p \rightarrow O^{16} + \gamma$	—	
$O^{16} + p \rightarrow F^{17} + \gamma$	—	
$F^{17} \rightarrow O^{17} + e^+ + \nu_e$	≤ 1.71	$5.2 \times 10^{-4} (1 \pm 0.16)$
$p + O^{17} \rightarrow He^4 + N^{14}$	—	

Tabla 2.2: El ciclo CNO.

Núcleo Inicial (X)	Núcleo Final (Y)	Umbral (en Mev)	Vida Media de Y	Tasa de Captura (en SNU)
C^{13}	Al^{37}	0.814	35 días	7.9 ± 2.6
Ga^{71}	Ce^{71}	0.233	11.1 días	132 ± 20
Li^7	Be^7	0.862	53.1 días	51.8 ± 16
I^{127}	Xe^{127}	0.789	36 días	~ 80
Br^{81}	Kr^{81}	0.170	2×10^5 años	27.8 ± 1.1
Mo^{98}	Tc^{98}	1.68	4×10^5 años	17.4 ± 1.5
Tl^{205}	Pb^{205}	0.062	$\sim 10^7$ años	~ 263

Tabla 2.3: Reacciones adecuadas para la detección radioquímica y geoquímica de los neutrinos (ν_e) solares. Todas las reacciones son de la forma $\nu_e + X \rightarrow e^- + Y$ para los núcleos X y Y, los cuales son listados.

tuar con el blanco, así como las energías involucradas de los neutrinos capturados.

2.- Detectores Geoquímicos: El principio básico de esta técnica es el mismo que el de los detectores radioquímicos. La diferencia es que el núcleo producto tiene una vida media muy larga, en el rango de 10^5 a 10^8 años. En muestras de rocas o depósitos minerales es posible, en principio, buscar los núcleos producto, y su abundancia será una medida del flujo de neutrinos en el último millón de años o más. La desventaja del método es que requiere una estimación teórica de la cantidad de núcleos Y presente al inicio en la muestra de roca. Estas estimaciones no son muy confiables.

3.- Detectores de dispersión de electrones: En este método, se usa directamente la dispersión de neutrinos por electrones:

$$\nu + e^- \rightarrow \nu + e^- \quad (2.3)$$

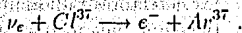
El electrón dispersado tiene un pico máximo en la dirección delantera. Así, mirando en esta dirección, es posible reconstruir la dirección del neutrino incidente y verificar que realmente provino del Sol. Esta es una gran ventaja del método. Por añadidura, es posible registrar evento por evento la llegada de los neutrinos, así como sus energías.

La desventaja es que cualquier partícula neutra incidente puede causar la misma clase de señal. De este modo, es necesario sustraer las contribuciones de los rayos gamma, ..., etc. Para este tipo de técnicas el umbral para los neutrinos tiene que mantenerse alto.

2.5 Experimentos activos y resultados

El experimento del Cl^{37} .

Por más de dos décadas, Davis y colaboradores han estado detectando neutrinos solares en las profundidades de la Homestake Gold Mine en Lead, Dakota del Sur, EUA. Su detector contiene 2.2×10^{30} átomos de percloroetileno líquido (C_2Cl_4), fluido limpiador muy usado en las tintorerías como quita manchas. La reacción que es usada para la detección de neutrinos es:



De la Tabla 2.3, notamos que el umbral de energía es de 0.814 MeV. Es por esto, que el experimento no puede detectar neutrinos del tipo pp. Dado que la sección eficaz de absorción está estrechamente ligada con la energía, los neutrinos de Be^8 contribuyen casi siempre al rango de captura. En la Fig. 2.2 [38], mostramos la contribución de los neutrinos producidos en diferentes reacciones al rango de captura. Cálculos teóricos con el Modelo Solar Estándar (MSE), dan los siguientes resultados para el rango de captura total esperado:

$$\phi_{Bah} = (7.9 \pm 0.9) SNU.$$

$$\phi_{TCCD} = (5.8 \pm 1.3) SNU. \quad (2.1)$$

El primer resultado es el del grupo de Bahcall [39], mientras que el segundo está tomado de la Ref. [31], con errores de 1σ . La unidad

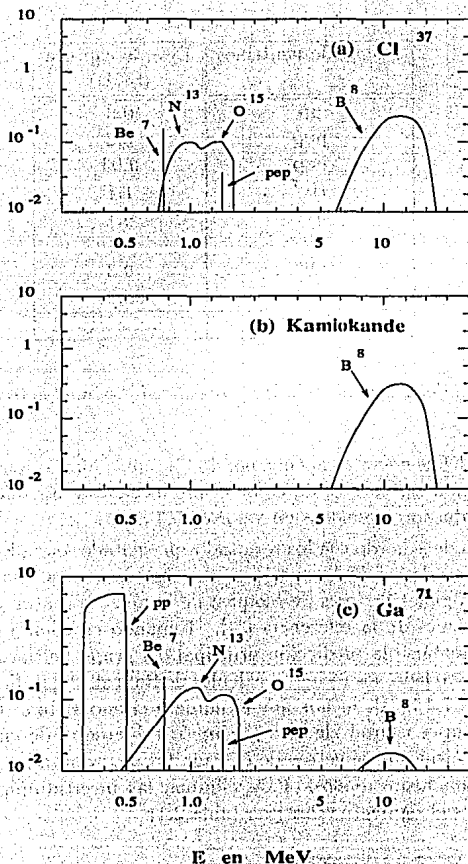


Figura 2.2: La distribución de energía de neutrinos capturados por varios detectores. Adaptado de la Ref. [38]. Las líneas de las fuentes están dadas como una fracción de la señal total, y las líneas continuas están normalizadas tal que el número de eventos integrados sea uno.

Fuente de neutrinos	Tasa de captura (SNU)
pp	0.0
pep	0.2
hep	0.03
Bc^7	1.1
B^8	6.1
N^{13}	0.1
O^{15}	0.3
F^{17}	0.003
Total	7.9 SNU

Tabla 2.1: Porcentaje de captura pronosticados para el detector de Cl^{37} .

SNU se define como 1 captura por 10^{30} átomos blanco por segundo ¹. De esta manera, en este detector la producción de un solo átomo de Ar^{37} por día corresponde a un valor de 5.3 SNU.

Si bien de acuerdo con los resultados presentados en la Ec. (2.4), las predicciones de los dos grupos parecen algo diferentes, es ahora conocido que algunos factores de bloqueo de Pauli se contaron doblemente en los cálculos de la referencia [31]. Tomando en cuenta este hecho, debe aumentarse la predicción principal del grupo de Saclay por casi 0.6. Por otro lado, los recientes cálculos de Bahcall [40] indican un valor central de 7.4 SNU, menor que el número citado arriba. En adición, los dos grupos usaron algunos parámetros diferentes de entrada. Usando los mismos parámetros de entrada los dos resultados vienen aún más cercanamente unidos. Para eliminar las incertidumbres teóricas tomaremos el siguiente valor (ver tabla 2.1):

¹Nota Histórica: La unidad, SNU, fue introducido como un juego de palabras que, como cuenta el propio Bahcall, se le "escapó" al editor de *Physical Review Letters* (ver por ejemplo, la nota 10 de pie de pagina en: J. N. Bahcall, *Phys. Rev. Lett.* 23 pp. 251 (1969)). Esta unidad es más útil para caracterizar resultados relativos a detectores, semejantes a los radiométricos como el Cl^{37} y Gd^{71} , los cuales tienen fijo el umbral de energía. Tomado del libro de Bahcall Ref. [37]

$$\phi_{\tau_{eo}} = 7.9 \text{ SNU} . \quad (2.5)$$

Los datos obtenidos por el grupo de Davis se muestran en la Fig. 2.3[11]. El valor principal de estos datos, con errores de 1σ son [12]:

$$\phi_{\text{Davis}} = (2.1 \pm 0.3) \text{ SNU} . \quad (2.6)$$

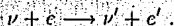
Esto significa que

$$P_{\text{Davis}} = \frac{\phi_{\text{Davis}}}{\phi_{\tau_{eo}}} = 0.27 \pm 0.04 \quad (2.7)$$

El problema de los neutrinos solares es la afirmación de que $P_{\text{Davis}} \neq 1$.

El experimento Kamiokande.

El detector Kamiokande II localizado en los Alpes Japoneses, ha estado en operación desde 1986. En este experimento se detecta la radiación Cherenkov emitida por electrones que son dispersados hacia adelante por neutrinos solares de acuerdo con la reacción:



La respuesta energética para el rango de captura es mostrado en la Fig. 2.2(b). Dado que detecta neutrinos por dispersión de electrones, se ha puesto un umbral alto para aceptar que ocurra un evento. En las primeras corridas éste fue puesto a 9.3 MeV . Después los cálculos de fondo fueron perfeccionados y el umbral fue bajado a 7.5 MeV . El resultado integrado de las corridas analizadas hasta ahora da [13]:

$$P_{\text{Kam}} = \frac{\phi_{\text{Kam}}}{\phi_{\tau_{eo}}} = 0.46 \pm 0.05 \text{ (stat)} \pm 0.06 \text{ (sist)} . \quad (2.8)$$

De esta manera, el problema de los neutrinos solares se presenta en este experimento independientemente del resultado de Davis.

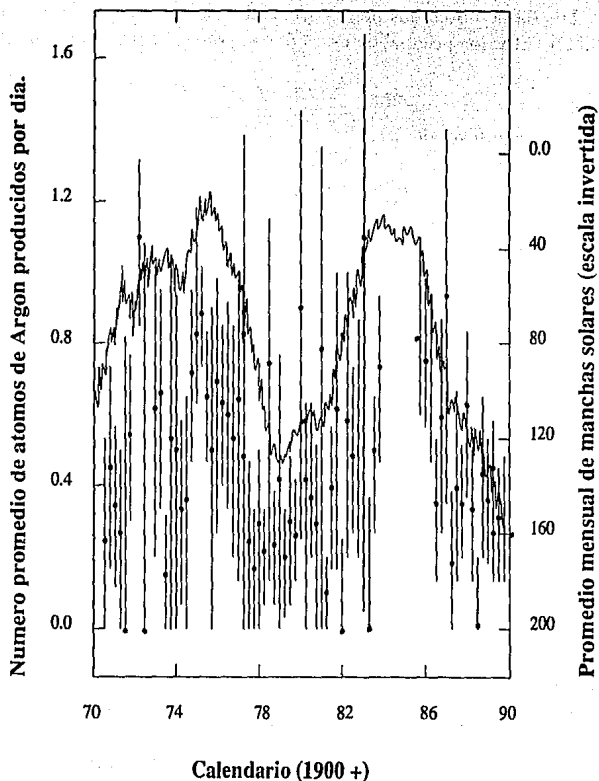
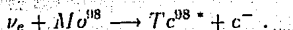


Figura 2.3: Los datos de Davis. Los círculos son los valores principales de el Ar^{37} producidos por el detector de Cloro. Las líneas continuas muestran el número mensualmente importante de manchas solares (notemos la escala invertida). Adaptado de la Ref. [1].

El experimento geoquímico de Mo^{98}

Un experimento geoquímico se ha venido desarrollando durante los últimos años en el Laboratorio Nacional de los Alamos, en Nuevo México, EUA en el cual los neutrinos son detectados vía absorción por átomos de molibdeno, los cuales son protegidos de posibles fenómenos atmosféricos por la cobertura de la mina Henderson en Colorado, USA. La absorción de neutrinos produce un isótopo inestable pero de larga vida media, el tecnecio. El método usa la reacción de captura de neutrinos:



La absorción de neutrinos puede poblar una variedad de estados excitados del Tecnecio, los cuales solo pueden ocurrir por neutrinos de B^8 (y en una cantidad mucho menor por los hep).

El tecnecio (Tc^{98}) tiene una vida media de 4.2 millones de años; de aquí, que la presente abundancia refleja el porcentaje de producción promedio durante un periodo de varios millones de años. El tiempo de vida es demasiado largo para que el isótopo sea detectado desde su radiactividad natural; en su lugar suficiente tecnecio es acumulado tal que un número suficiente de átomos ($N \approx 10^7$) estarán disponibles para que el Tc^{98} sea contado por un espectrómetro de masas ultra sensible. Este experimento probará la constancia del flujo de neutrinos de B^8 durante los pasados millones de años.

El experimento de Ga^{71}

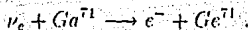
Dos experimentos para detectar neutrinos solares del tipo radioquímico los cuales usan Ga^{71} se encuentran actualmente en operación, uno por una colaboración principalmente de Europa Occidental (GALLEX) [11] y la segunda por un grupo que trabaja en la ex Unión Soviética en el Instituto para la Investigación Nuclear en Moscú con colaboración de los Estados Unidos llamado SAGE. La colaboración GALLEX usa 30 toneladas de galio en una solución acuosa; el detector está localizado en el Laboratorio Gran Sasso en Italia. En el experimento ruso se usan

Fuente de neutrinos	Tasa de captura (SNU)
pp	70.8
pep	3.0
hep	0.06
Be^7	34.3
B^8	14.0
N^{13}	3.8
O^{15}	6.1
F^{17}	0.06
Total	$132 \pm \frac{20}{17}$ SNU

Tabla 2.5: *Porcentaje de captura pronosticados para el detector de Ga^{71} .*

~ 60 toneladas de galio metálico como detector en un laboratorio de neutrinos solares construido debajo de una alta montaña en el Valle Baksan en las Montañas del Cáucaso en la ex Unión Soviética. La escala de ambos experimentos es impresionante considerando que cuando se desarrollaron estas técnicas experimentales, la producción mundial de galio era de solo 10 toneladas por año.

Los experimentos que utilizan galio pueden suministrar información única y fundamental acerca del proceso termonuclear que se lleva a cabo en el interior del Sol, así como de la producción y propagación de los neutrinos. La reacción de absorción de neutrinos es:



los átomos de germanio son removidos químicamente del galio y el decaimiento radiactivo del Ge^{71} (vida media de 11.1 días) son medidas por pequeños contadores. El umbral para absorción de neutrinos por Ga^{71} es de 0.233 MeV, lo cual está muy por debajo de la energía máxima de los neutrinos de la cadena pp, lo cual significa que este detector contará todos los neutrinos. Ningún otro experimento de neutrinos tiene una capacidad demostrada para detectar los neutrinos de baja energía de la reacción pp básica (ver el 1^{er} paso de la síntesis de protones

a hidrógeno en la Tabla 2.1).

La Tabla 2.5 muestra la contribución calculada de las fuentes de neutrinos individuales que son predichos para el porcentaje de captura. Los neutrinos de la reacción pp básica son esperados, de acuerdo al Modelo Solar Estandar, que se produzca aproximadamente la mitad del porcentaje total de captura. Los otros contribuyentes principales son los neutrinos que viene del $B\epsilon^7$, con casi un cuarto del porcentaje total, y los neutrinos del B^8 , con casi el 10 %.

La extracción química inicial es diferente en **GALLEX** y en los experimentos **SAGE**, pero los procedimientos químicos finales y los métodos de conteo de bajo nivel son similares para ambas colaboraciones. La comparación de los resultados para los dos experimentos provee valiosos registros para detectar posibles errores sistemáticos. La colaboración **GALLEX** emplea galio en la forma química de una solución acuosa de cloruro de galio y ácido clorhídrico. El Ge^{71} radiactivo es removido de esta solución purgándolo con gas, extrayéndose como GeH_4 y son medidos por detectores miniatura. Este grupo recibió la cantidad completa de galio para el experimento a finales de 1989 y comenzaron a mediados de 1990.

El proceso de extracción del germanio involucra mezclar el metal con una solución de ácido clorhídrico diluida. El Ge^{71} es removido de la solución ácida purgando con gas conectado en agua, un procedimiento similar a la primera separación de Ge^{71} usada en el proceso para obtener cloruro de galio. El proceso usado por el grupo ruso es mucho más lento, pero es capaz de obtener un alto rendimiento. La radiactividad del Ge^{71} es medida en contadores pequeños similares a aquellos desarrollados para el experimento Homestake (Cl^{37}). Los resultados experimentales de los tres principales detectores de neutrinos solares en operación, son mostrados en la Fig. 2.4

2.6 Los nuevos experimentos

Los experimentos del deuterio y argón

Dos poderosos nuevos detectores están siendo desarrollados como experimentos de siguiente generación [15]. Uno es una propuesta ex-

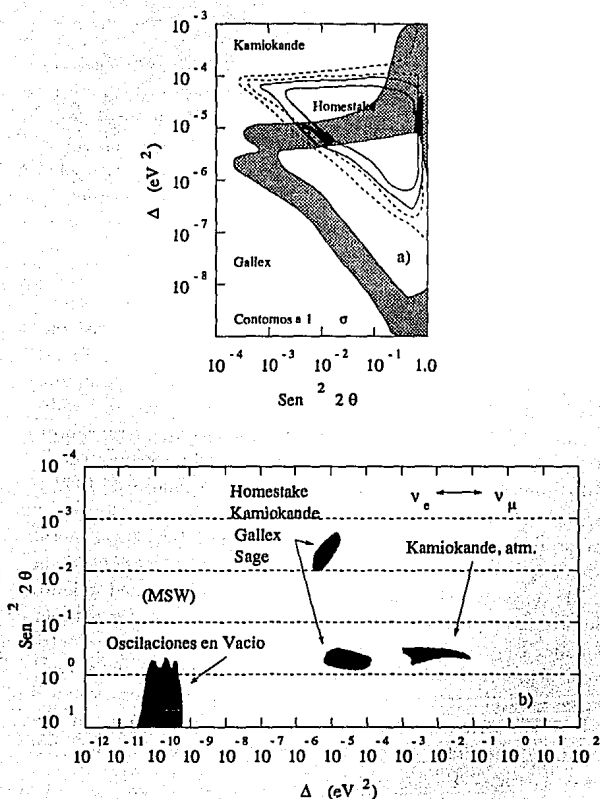


Figura 2.4: Resultados experimentales de los tres principales detectores de neutrinos solares en operación y su relación con el efecto MSW. a) Contornos con 1σ en el plano Δ vs. $\text{sen}^2 2\theta$, adaptado de las gráficas de P. I. Krastev y S. T. Petcov. b) Gráficas de las soluciones MSW y oscilaciones en el vacío en el plano de parámetros. El área de los neutrinos atmosféricos también son indicados, adaptado de la Ref. [45].

perimental de agua pesada de 1 kiloton (D_2O), ubicado en una mina de níquel (INCO) cerca de Sudbury en Ontario, Canadá. El otro es un detector de 3 kilotones de argón líquido, situado en el laboratorio subterráneo Gran Sasso en Italia central. El experimento de deuterio es una colaboración entre científicos canadienses, americanos y británicos, en cambio el detector de argón es fundamentalmente un experimento italiano con limitada participación americana. El detector de deuterio mide la energía y dirección de retroceso, de electrones observando la luz Cherenkov que se produce en los fotomultiplicadores. El detector de argón forma una imagen electrónica tridimensional de la posición de retroceso de los electrones producido por absorción de neutrinos o por dispersión, por apilamiento de electrones en un campo eléctrico homogéneo.

Estos experimentos son sensibles a neutrinos del B^8 y hep , para otros neutrinos solares es menor el umbral de energía por varios MeV y con ello se evitarán eventos de baja energía. Los neutrinos hep pueden producir un retroceso en los electrones con mayor energía de la que pueden producir los neutrinos del B^8 ; es por ello que los eventos muy energéticos producidos por los neutrinos hep pueden ser distinguidos experimentalmente de los eventos más frecuentes producidos por los neutrinos del B^8 . Afortunadamente, los neutrinos hep y B^8 son producidos en diferentes regiones del Sol, y son por tanto afectados de diferente manera en las discusiones teóricas de modelos solares "no estándar". Las dos fuentes suministran información complementaria acerca del Sol. El hecho de que hay dos fuentes muy diferentes aumenta la garantía de que una señal de neutrinos solares sea detectada. Los porcentajes esperados varían desde eventos de varios cientos hasta varios miles por año en cada detector, dependiendo de la explicación adoptada para el problema de los neutrinos solares.

Tanto los experimentos de argón como los de deuterio utilizan detectores que registran múltiples eventos, los cuales pueden estudiar los neutrinos solares ya sea por captura de neutrinos $\nu/\bar{\nu}$ por dispersión electrón-neutrino. La absorción de neutrinos es sensible sólo a los ν_e solares cuyo tipo (sabor) no está cambiando en su tránsito hacia la Tierra. Para dispersión electrón-neutrino, la sección eficaz para ν_μ ó ν_τ es casi un séptimo (1/7) de la sección eficaz para el ν_e . El origen solar de los eventos puede ser probado usando la distribución angular (con

respecto a la dirección Tierra-Sol) de los electrones dispersados por los neutrinos.

Las reacciones de absorción hacen posible la medición de energía de neutrinos individuales, E_ν , usando la relación $E_\nu = E_e + \text{constante}$, donde E_e es la energía del electrón que es producido y la *constante* es igual a la diferencia de masas nucleares inicial y final. Esta simple relación es válida debido a que los núcleos absorben el *momento* pero muy poca energía en la captura de neutrinos solares, donde los núcleos son mucho más pesados que los electrones y los neutrinos. La medición precisa de energías individuales de los neutrinos constituirá una prueba de la forma predicha del espectro de energía.

El experimento de deuterio puede incluir una forma de detección que es igualmente sensible a los tres tipos de neutrinos, ν_e , ν_μ , y ν_τ . En esta forma de **corriente neutra**, los núcleos de deuterio son desintegrados dentro de sus neutrones y protones constituyentes sin cambiar la carga de los nucleones. Otros métodos de detección tienen sensibilidad nula para casi todos los sabores de neutrinos excepto uno (como en la absorción de neutrinos) o mucho más sensibles a neutrinos de un tipo que de cualquier otro (como en la dispersión electrón-neutrino). La medida de la corriente neutra en la desintegración del deuterio puede suministrar una determinación del flujo total de neutrinos solares; los experimentos radioquímicos (con detectores de Cl^{37} , Ga^{71} y Mo^{98}) detectan únicamente la componente del flujo que está en la forma de neutrinos del electrón (ν_e). La razón del porcentaje de eventos para el proceso de corriente cargada (absorción) y el proceso de corriente neutra (desintegración) deberá ser un indicador sensible de los otros efectos inaccesibles de transformación de neutrinos.

La sección eficaz de interacción aplicable a estos experimentos puede ser calculada de manera muy segura. Por lo tanto, casi todas las incertidumbres totales en los porcentajes predichos están determinadas por las incertidumbres en el porcentaje de producción solar de neutrinos hep y Be^8 y para efectos de interacción débil desconocida en propagación de neutrinos.

Recientemente, se ha propuesto un experimento que debe utilizar B^{11} como detector y debe, en principio, observar simultáneamente la corriente neutra, es decir dispersión de electrones, y reacciones de captura de neutrinos (corriente cargada).

Detección electrónica de la cadena pp

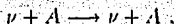
Varios detectores están siendo desarrollados para observar los neutrinos de la cadena pp básicos (baja energía) por métodos electrónicos.

Dos de los detectores están siendo diseñados para observar la dispersión de neutrinos con electrones a bajas temperaturas. El detector de *silicón cristalino* funcionará como un *termómetro* a bajas temperaturas (miliKelvin); midiendo la energía depositada por neutrinos individuales. Un detector de helio *superfluido* también ha sido propuesto para estudiar las excitaciones producidas en el fluido cuando los neutrinos son dispersados por electrones individuales.

Por añadidura, un detector de In^{115} está siendo desarrollado por varios grupos europeos. Este detector deberá trabajar como un *contador* líquido, registrando neutrinos que son capturados por In^{115} . El detector planeado es en principio capaz de medir de manera precisa el espectro incidente de neutrinos que provengan de la cadena pp (ver Fig. 2.1), aunque las fuentes radiactivas naturales representan un serio problema.

Detectores de dispersión coherente

Varios grupos americanos y europeos están involucrados en ambiciosos programas para usar la *dispersión coherente* de neutrinos por núcleos a bajas temperaturas para desarrollar detectores sensibles de neutrinos solares y de *materia oscura*. Este proceso puede ser representado por la reacción



donde el núcleo contiene A neutrones y protones. La sección eficaz para la dispersión coherente es aproximadamente proporcional a N^2 , el cuadrado del número total de neutrones en el núcleo blanco. El nombre de *dispersión coherente* refleja el hecho de que todos los neutrinos actúan juntos. La dispersión coherente es igualmente sensible a todos los

neutrinos descritos por el modelo electrodébil estándar, suministrando otro método (en adición a la desintegración de deuterio y la excitación del B^{11}) logrando así los llamados **detectores de igual oportunidad (EOD)**. La tasa de dispersión coherente por núcleo blanco es mucho mayor que la tasa por partícula blanco para el proceso incoherente discutido previamente (absorción del neutrino, dispersión de neutrinos por electrones), debido a la presencia del factor N^2 en la expresión para la sección eficaz. La gran sección eficaz implica que cantidades relativamente pequeñas de material (~ 0.1 Kton) pueden ser usadas para un experimento de neutrinos solares; la posibilidad de usar diferentes medios o núcleos pesados están siendo exploradas. Los detectores deberán de estar convenientemente calibrados usando antineutrinos de un reactor. La mayor dificultad en construir un detector de corriente neutra es que la señal observable es del retroceso nuclear, el cual tiene una baja energía (típicamente del orden de KeV's o más bajo, de aquí la baja temperatura de los detectores sugeridos) y la falta de especificidad (el depósito de energía para retroceso nuclear no suministra una señal única). En principio la dispersión coherente deberá ser usada para detectar *todas* las fuentes de neutrinos solares. En la práctica los neutrinos del B^8 , los cuales pueden tener energías mayores, pueden ser más fáciles de detectar debido a que la dispersión coherente de la sección eficaz y la magnitud del retroceso nuclear son proporcionales al cuadrado de la energía del neutrino.

Capítulo 3

Oscilaciones de neutrinos

3.1 Generalidades

De acuerdo con el modelo estándar de las interacciones electrodébiles GSW, los leptones se encuentran agrupados en tres familias o sabores, denominados

$$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

y las correspondientes familias de antileptones. Las familias se caracterizan por los números leptónicos individuales L_e (número del electrón L_e , número del muón L_μ , número del tauón L_τ) de tal modo que

$$L_\alpha(\nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{para neutrinos}$$

$$L_\alpha(\bar{\nu}_\beta) = -\delta_{\alpha\beta} \quad \text{para antineutrinos} \quad (3.2)$$

Las oscilaciones de neutrinos, es decir, las transiciones oscilatorias $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ entre los diferentes tipos de sabores de neutrinos dependen del tiempo, y las condiciones necesarias para que ocurran tales oscilaciones son que:

- Las diferencias de masas $m_{\nu_\alpha} - m_{\nu_\beta}$ no son todas cero, lo que implica que no todos los neutrinos son no masivos.

- (b) Los números leptónicos individuales L_α no son estrictamente conservados.

En este último caso los autoestados $|\nu_\alpha\rangle$, llamados *autoestados de sabor* en general no son autoestados del operador de masa M , es decir, $\langle \nu_\alpha | M | \nu_\beta \rangle \neq 0$ para $\alpha \neq \beta$. Más bien son superposiciones lineales de autoestados de masa no degenerados $|\nu_i\rangle$ con $\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij}$ y $m_i - m_j \neq 0$ para $i \neq j$. Las oscilaciones de neutrinos o *mezcla* de sabores de neutrinos $\nu_\alpha = \nu_\beta$ pueden ocurrir entonces debido a que $\langle \nu_\alpha | M | \nu_\beta \rangle$ es diferente de cero para $\alpha \neq \beta$.

Las dos condiciones listadas arriba son las mínimas extensiones al modelo electrodébil estándar GSW [16].

3.2 Formalismo general de oscilaciones

Los n autoestados de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ (i.e. $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \dots$) y los n autoestados de masa, también llamados autoestados físicos $|\nu_i\rangle$ (i.e. $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$) son relacionados por una transformación unitaria U llamada *matriz de mezcla*, la cual es análoga a la matriz de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa para los quarks. En el modelo estándar electrodébil, todos los neutrinos son no masivos en cuyo caso la matriz U no tiene significado físico. Por lo tanto, al introducir la matriz de mezcla, estamos suponiendo implícitamente que al menos uno de los neutrinos tiene *masa no nula*.

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad \leftrightarrow \quad |\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{i\alpha}^\dagger |\nu_\alpha\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle \quad (3.3)$$

con

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1, \quad \text{i.e.} \quad \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* = \delta_{ij}. \quad (3.1)$$

Para antineutrinos tenemos que reemplazar $U_{\alpha i}$ por $U_{\alpha i}^*$, es decir,

$$|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\bar{\nu}_i\rangle \quad (3.5)$$

El número de parámetros de una matriz unitaria $n \times n$ es de n^2 y las $2n - 1$ fases relativas de los $2n$ estados de neutrinos, pueden redefinirse

de tal modo que se dejen $(n-1)^2$ parámetros independientes izquierdos. Por ésto es conveniente tomar los $\frac{1}{2n}(n-1)$ "ángulos de mezcla débiles" de una rotación n -dimensional y las $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ las "fases que violan CP".

Al ser autoestados de la matriz de masa, los estados $|\nu_i\rangle$ son estados estacionarios, es decir, tienen dependencia temporal

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \quad (3.6)$$

con

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{p} \approx E + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{E}, \quad m_i \ll E_i, \quad (3.7)$$

donde $E \approx p$ es la energía total del neutrino y supondremos que los neutrinos son estables. Así un estado de sabor puro $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle$ al tiempo $t = 0$, evolucionará con el tiempo en el estado

$$|\nu\rangle = \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle = \sum_{i,\beta} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} |\nu_\beta\rangle. \quad (3.8)$$

La dependencia temporal en la *amplitud de transición* para la transición del sabor ν_α al sabor ν_β es

$$\begin{aligned} A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &\equiv \langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} \\ &= \sum_{i,j} U_{\alpha i} \cdot \delta_{i,j} e^{-iE_i t} \cdot (U^\dagger)_{j,\beta} = (U \cdot D \cdot U^\dagger)_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.9)$$

con

$$D_{i,j} = \delta_{i,j} e^{-iE_i t} \quad (\text{matriz diagonal}).$$

Se obtiene una expresión equivalente de la amplitud de transición, insertando la Ec. (3.7) en la Ec. (3.9) y extrayendo un factor de fase total e^{-iEt} :

$$A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i \frac{m_i^2}{2E} t}$$

$$= \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i \frac{m_i^2}{2} \frac{L}{E}} = A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L), \quad (3.10)$$

donde $L = ct$ ($c = 1$) es la distancia del detector, en el cual se observa ν_β desde la fuente ν_α . Para una j fija seleccionada arbitrariamente obtenemos una tercera expresión de la amplitud de transición:

$$\begin{aligned} A''(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) &= e^{-i E_j t} \cdot A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i(E_i - E_j)t} \\ &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* [e^{-i(E_i - E_j)t} - 1] = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* [e^{-i \Delta_{ij}} - 1] \end{aligned} \quad (3.11)$$

con

$$\Delta_{ij} = (E_i - E_j)t = \frac{\delta m_{ij}^2}{2} \cdot \frac{L}{E} \quad \text{donde} \quad \delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2. \quad (3.12)$$

En la Ec. (3.11) se utilizó la relación de unitariedad (3.4). De esta forma las amplitudes de transición son dadas por los $(n-1)^2$ parámetros independientes de la matriz unitaria (la cual determina las amplitudes de las oscilaciones) y las $n-1$ diferencias de las masas elevadas al cuadrado (lo cual determina la frecuencia de las oscilaciones), es decir, por los $n(n-1)$ parámetros reales. Si CP se conserva en las oscilaciones de neutrinos, desaparecen todas las fases que violan CP y las $U_{\alpha i}$ son reales, es decir U es una matriz ortogonal ($U^{-1} = U^T$) con $\frac{1}{2}n(n-1)$ parámetros. Entonces, el número de parámetros para las amplitudes de transición son $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$.

La probabilidad de transición se obtiene elevando al cuadrado el módulo de las amplitudes Ec. (3.9):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) &= \left| \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i E_i t} \right|^2 \\ &= \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 + 2\Re \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i \Delta_{ij}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aquí el segundo término describe la dependencia temporal (o espacial) de las oscilaciones de los neutrinos y el primer término es la probabilidad de transición promedio, promediada sobre el tiempo (distancia) o energía:

$$\langle \mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \rangle = \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 = \sum_i |U_{\alpha i}^* U_{\beta i}|^2 = \langle \mathcal{P}(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha) \rangle \quad (3.14)$$

Midiendo las probabilidades promedio obtenemos únicamente información sobre los parámetros de la matriz de mezcla, pero no sobre las diferencias de las masas elevadas al cuadrado. Se puede mostrar [17] de la relación de unitariedad $\sum_i |U_{\alpha i}|^2 = 1$ que $\langle \mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) \rangle = \sum_i |U_{\alpha i}|^4$ es mínima, si todas las $|U_{\alpha i}| = |U_{\alpha}|$ son iguales,

Usando la relación de unitariedad (3.4) la probabilidad puede escribirse también como

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \delta_{\alpha\beta} + 2\Re e \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} [e^{-i\Delta_{ij}} - 1] \quad (3.15)$$

Para $t = 0$, es decir, $\Delta_{ij} = 0$ tenemos por supuesto $\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; 0) = \delta_{\alpha\beta}$. Además $\sum_\beta \mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = 1$ debido a (3.1).

Si se conserva CP ($U_{\alpha i}$ es real), las Ecs. (3.13) y (3.15) se reducen a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \sum_i U_{\alpha i}^2 U_{\beta i}^2 + 2 \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j} \cos \Delta_{ij} \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{ij}}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para el caso $n > 2$ las fórmulas de las probabilidades de transición son más bien complicadas. Sin embargo el formalismo se simplifica fuertemente en el caso de que todas las masas de los neutrinos estén bien separadas una de otra (*jerarquía de masas*), es decir, $|m_i^2 - m_j^2| \ll |m_i^2 - m_k^2|$ para $i, j \neq k$. En este caso L/E en la Ec. (3.12) se incrementa desde cero de tal modo que $\Delta_{ij} \ll \Delta_{ik} = \Delta$ para $i, j \neq k$, únicamente

ocurren oscilaciones debido a que $\Delta \neq 0$ (*oscilaciones principales*); todas las otras $\Delta_{ij} \approx 0$ y los paréntesis cuadrados en las Ecs. (3.11) y (3.15) desaparecen. De esta manera, para las oscilaciones principales tenemos:

$$\begin{aligned} A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \delta_{\alpha\beta} + (e^{-i\Delta} - 1) \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \\ &= \delta_{\alpha\beta} + (e^{-i\Delta} - 1) [\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha k} U_{\beta k}^*] \\ &= e^{-i\Delta} [\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha k} U_{\beta k}^*] + U_{\alpha k} U_{\beta k}^* \end{aligned} \quad (3.17)$$

Elevando al cuadrado el módulo de $A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \delta_{\alpha\beta} + 2\Re \left[(e^{-i\Delta} - 1) \cdot U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \cdot (\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha k} U_{\beta k}^*) \right] \\ &= \mathcal{P}(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha; t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

De esta forma:

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = 1 - 4 \cdot (|U_{\alpha k}|^2 - |U_{\beta k}|^4) \cdot \sin^2 \left(\frac{\Delta}{2} \right) \quad (3.19)$$

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \neq \nu_\alpha) = 4 \cdot |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\Delta}{2} \right) = \mathcal{P}(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha \neq \beta). \quad (3.20)$$

Para finalizar esta sección, discutiremos brevemente la *matriz de masa* M mencionada en las generalidades. Puesto que los estados $|\nu_i\rangle$ tienen masas definidas m_i , M es diagonal en la representación $|\nu_i\rangle$:

$$\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij} \quad (3.21)$$

En la representación $|\nu_\alpha\rangle$, la matriz de masa tiene los elementos

$$\langle \nu_\beta | M | \nu_\alpha \rangle = \sum_{i,j} \langle \nu_\beta | \nu_i \rangle \langle \nu_i | M | \nu_j \rangle \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle = \sum_i m_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i} \quad (3.22)$$

en donde

$$\langle \nu_\beta | \nu_i \rangle = U_{\beta i}^*,$$

$$\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij},$$

y

$$\langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle = U_{\alpha j}.$$

Si todas las masas m_i son iguales $m_i = m$ (completa degeneración), entonces $\langle \nu_\beta | M | \nu_\alpha \rangle = m \delta_{\alpha\beta}$ por la propiedad de unitariedad (3.4) y no son posibles las transiciones $\nu_\alpha = \nu_\beta$. Las masas de los autoestados de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ son valores de expectación del operador de masa, es decir, promedios ponderados de las masas m_i :

$$m_\alpha \equiv \langle \nu_\alpha | M | \nu_\alpha \rangle = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 \cdot m_i \quad (3.23)$$

con $\sum_\alpha m_\alpha = \sum_i m_i$ por la unitariedad (invariancia de la traza), donde $|U_{\alpha i}|^2$ es la probabilidad de descubrir el estado $|\nu_i\rangle$ en $|\nu_\alpha\rangle$.

3.3 Oscilaciones de vacío, caso $N = 2$

En la presente Sección, así como en el resto de este Capítulo nos restringiremos al caso de dos generaciones, a fin de explicar con mayor claridad las ideas teóricas involucradas en la solución del problema de los neutrinos solares. El caso más realista de tres generaciones así como sus efectos y consecuencias, será discutido en la última Sección del presente Capítulo [18].

Analicemos la evolución en el tiempo [19] de una haz de neutrinos que se propagan en el vacío. La ecuación de evolución en la base de los "autoestados físicos" $|\nu_i\rangle$ es:

$$i \frac{d}{dt} |\nu_i\rangle(t) = H_0 |\nu_i\rangle(t) \quad (3.24)$$

en donde H_0 es el Hamiltoniano del sistema, el cual es diagonal en esta base:

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Para estudiar el problema de los neutrinos solares es necesario que consideremos neutrinos cuyas energías sean del orden de 1 MeV. Los experimentos de laboratorio ponen los siguientes límites superiores en las masas de los distintos neutrinos (ver la Fig. 1.6);

$$m_{\nu_e} < 9.3 \text{ eV}; \quad m_{\nu_\mu} < 520 \text{ KeV}; \quad m_{\nu_\tau} < 161 \text{ MeV}.$$

De esta manera se tiene que $m_i \ll E_i$ para $i = 1, 2$, y en este caso podemos usar la aproximación relativista Ec. (3.7). Es por esta razón que es posible usar x , la distancia viajada por el neutrino, en vez de t como variable independiente. La diferencia entre t y x introducirá correcciones de orden mayor en $\frac{m}{E}$.

La evolución temporal de un haz de neutrinos de energía E está gobernado por el Hamiltoniano

$$H_0 = \left(E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \right) - \frac{\Delta}{4E} \sigma_3, \quad (3.26)$$

en donde σ_3 es la matriz diagonal de Pauli.

Para propósitos futuros, resulta conveniente reescribir la ecuación de evolución en la *base de sabor*. Podemos hacer esto fácilmente teniendo en cuenta que, a partir de la Ec. (3.3), $|\nu_i\rangle = U^\dagger |\nu_\alpha\rangle$, la cual nos da

$$i \frac{d}{dx} |\nu_\alpha\rangle = U H_0 U^\dagger |\nu_\alpha\rangle. \quad (3.27)$$

Para dos neutrinos del tipo Dirac, hay un ángulo de mezcla en el vacío θ con $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y ninguna fase de violación de CP (es decir, se conserva CP). La matriz de mezcla U es dada por

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

y en la base de sabor el Hamiltoniano es dado por:

$$H'_0 = U H_0 U^\dagger = E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} + \frac{\Delta}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

De las relaciones (3.22) y (3.23) entre las masas de los neutrinos m_α y m_i llegamos

$$m_e = m_1 \cos^2 \theta + m_2 \operatorname{sen}^2 \theta,$$

$$m_\mu = m_1 \operatorname{sen}^2 \theta + m_2 \cos^2 \theta,$$

$$m_{\mu e} = \langle \nu_\mu | M | \nu_e \rangle = (m_2 - m_1) \cos \theta \operatorname{sen} \theta. \quad (3.30)$$

Resolviendo para m_1 , m_2 y θ llegamos:

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} \left[m_e + m_\mu \mp \sqrt{(m_\mu - m_e)^2 + 4 m_{\mu e}^2} \right],$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 m_{\mu e}}{m_\mu - m_e}. \quad (3.31)$$

De esto, podemos deducir la relación entre el ángulo θ y los elementos de la matriz H'_0 :

$$\tan 2\theta = \frac{2H'_{12}}{H'_{22} - H'_{11}}, \quad (3.32)$$

donde H'_0 es independiente de x , y nosotros podemos formalmente integrar la ecuación de movimiento para obtener la solución

$$\nu_\alpha(x) = \exp(-i H'_0 x) \nu_\alpha(0). \quad (3.33)$$

Los valores de la energía deberán de aparecer siempre con algún subíndice, de tal manera que no exista posibilidad de confusión. Por otro lado, notemos que hay un término en H'_0 que es proporcional a la matriz unitaria y contribuye con una fase global en (3.33); tal término no afecta el ángulo de mezcla, como es visto en la Ec. (3.32), resultando

irrelevante para nuestros propósitos, y por lo que podemos omitirlo. Tendremos entonces,

$$H'_e = \frac{\Delta}{4E} (\sigma_1 \operatorname{sen} 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta), \quad (3.31)$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \nu_\alpha(x) &= \exp\left[-\frac{i\Delta}{4E}x (\sigma_1 \operatorname{sen} 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta)\right] \nu_\alpha(0) \\ &= \left[\cos \frac{\Delta}{4E}x - i(\sigma_1 \operatorname{sen} 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) \operatorname{sen} \frac{\Delta}{4E}x\right] \nu_\alpha(0). \end{aligned} \quad (3.35)$$

La probabilidad de encontrar a un ν_μ o un ν_e en un haz que inicialmente estaba compuesto únicamente de ν_e es dada por

$$\begin{aligned} P_{\nu_e\nu_\mu}(x) &= \left| \langle \nu_\mu(0) | \nu_e(x) \rangle \right|^2 = \operatorname{sen}^2 2\theta \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\Delta}{4E}x \right) \\ P_{\nu_e\nu_e}(x) &= \left| \langle \nu_e(0) | \nu_e(x) \rangle \right|^2 = 1 - P_{\nu_e\nu_\mu}(x). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Notemos que la probabilidad de encontrar un ν_e es menor en general que la unidad. Gribov y Pontecorvo [50] sugirieron que esto podría ser la causa de la *disminución* del flujo de neutrinos del electrón observado en experimentos con neutrinos solares. Así mismo, debido a la conservación de la probabilidad

$$P_{\nu_e\nu_\mu} + P_{\nu_e\nu_e} = 1.$$

$P_{\nu_e\nu_e}$ se conoce como la *Probabilidad de Supervivencia del Neutrino del electrón*.

Notemos por otro lado, que estas fórmulas muestran explícitamente que las oscilaciones sólo ocurren si $\theta \neq 0$ y $\Delta \neq 0$. Su amplitud es máxima para $\theta = \pi/4$ (*mezcla máxima*).

3.4 Confrontando los experimentos

Al usar la Ec. (3.36) para explicar los datos procedentes de los neutrinos solares, debemos tomar para x la distancia Tierra-Sol de 1.49×10^8 Km. Si nosotros conocemos θ y Δ , es posible calcular la probabilidad de supervivencia para neutrinos de cualquier energía E . Dado que un experimento detecta un espectro de energías, necesitamos integrar sobre todo el espectro para encontrar la probabilidad de supervivencia para el haz entero [51]. Usando la notación

$$\mathcal{R} \equiv \left\langle \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta}{4E} x \right) \right\rangle, \quad (3.37)$$

donde los paréntesis angulares indican la energía promediada, la probabilidad de supervivencia está dada por

$$P_{\nu_e \nu_e} = 1 - \mathcal{R} \text{sen}^2 2\theta. \quad (3.38)$$

La cantidad \mathcal{R} es, por supuesto, diferente de un experimento a otro. En la Fig. 3.1 [52], se muestra como se comporta como una función de Δ para tres experimentos que actualmente se encuentran en operación [53].

Consideremos por ejemplo el experimento CP^r , para ello pasaremos por alto los neutrinos de energía intermedia producidos en los decaimientos del Br^7 , N^{13} u O^{15} , o en la reacción pep. Para los neutrinos de alta energía provenientes del decaimiento del Be^8 , la energía es de casi 10 MeV. Si $\Delta \ll 10^{-10} \text{ eV}^2$, la cantidad $(\frac{\Delta}{4E})$ llega a ser tan pequeña que difícilmente tendríamos una oscilación, i.e., $\mathcal{R} \approx 0$. En el otro extremo si $\Delta \gg 10^{-10} \text{ eV}^2$, las oscilaciones son tan rápidas que los efectos de las diferentes energías se promedian separadamente y obtenemos $\mathcal{R} = \frac{1}{2}$. En la región cercana a los 10^{-10} eV^2 tenemos que integrar realmente sobre el espectro el cual da los mayores perfiles parecidos a ondas en la Fig. 3.1.

Si incluimos el efecto de los neutrinos de energía intermedia, obtendremos "picos" de menor periodo en Δ superpuesta en las ondas de mayor periodo. Dado que la energía de los neutrinos de energía intermedia es de casi 1 MeV, los picos también se promedian para

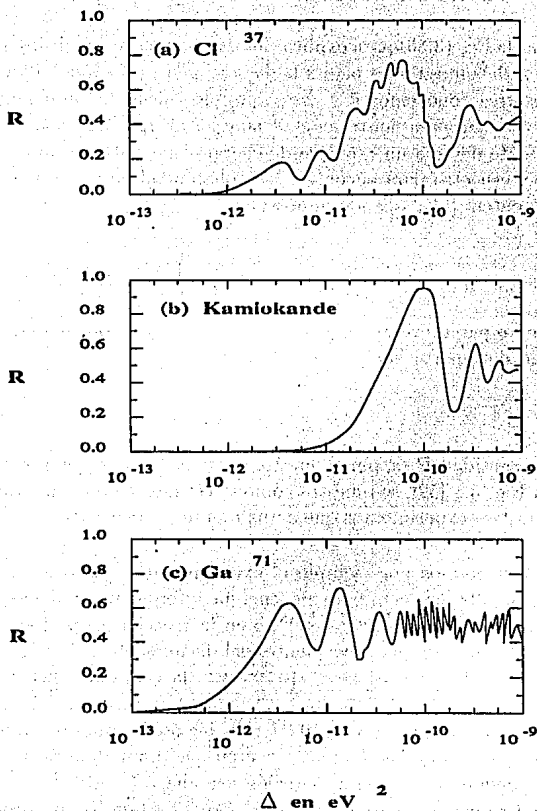


Figura 3.1: La variación de \mathcal{R} vs. Δ para varias respuestas de la energía. Adaptado de la Ref. [52].

$\Delta \gg 10^{-11} \text{ eV}^2$. Esto explica porque los picos menos agudos salen cerca del extremo derecho de la Fig. 3.1a.

En forma similar podemos entender los valores de \mathcal{R} para otros experimentos. Una vez conocidos, podemos usar la Ec. (3.38) para encontrar la probabilidad de supervivencia para valores fijos de Δ y θ , y de esta manera ver cuales valores son consistentes con los datos experimentales conocidos.

Para el experimento del CIP⁷ esto parece ser correcto, pues a partir de la Ec. (2.7), podemos establecer que

$$0.19 < P_{\nu_e \nu_e} < 0.35 \quad (3.39)$$

dentro de dos desviaciones estandar (2σ), es decir, al nivel del 95 % de confiabilidad. Para el experimento de Kamiokande, tenemos que tomar en cuenta que el flujo detectado no es meramente el flujo de ν_e . Si el ν_e oscila a ν_μ (o a ν_τ), el ν_μ también interactúa con el detector de electrones vía la corriente neutra. Para las energías relevantes para el experimento, la sección eficaz de dispersión de $\nu_\mu e$ es casi de $\frac{1}{7}$ de la sección eficaz de $\nu_e e$. De tal manera que lo que detecta Kamiokande es

$$P_{Kam} = P_{\nu_e \nu_e} + \frac{1}{7} P_{\nu_e \nu_\mu} \quad (3.40)$$

dado que $P_{\nu_e \nu_\mu} = 1 - P_{\nu_e \nu_e}$, se tiene

$$P_{\nu_e \nu_e} = \frac{1}{6} (7P_{Kam} - 1) \quad (3.41)$$

El resultado de la Ec. (2.8), nos da una $P_{Kam} = 0.16 \pm 0.08$ y después de añadir los dos errores, obtenemos

$$0.18 < P_{\nu_e \nu_e} < 0.55 \quad (3.42)$$

con una confiabilidad del 95 %. Es este rango el que debe de ser comparado con la expresión de la Ec. (3.38).

La gráfica [54] de las regiones permitidas en el espacio de parámetros de Δ vs. θ se muestra en la Fig. 3.2. Debido a que en la Ec. (3.38) aparece el $\sin^2 2\theta$ se toma directamente esta expresión como variable en el eje x. Como se observa de la gráfica, solo una pequeña region del espacio de parámetros es permitida por los datos experimentales.

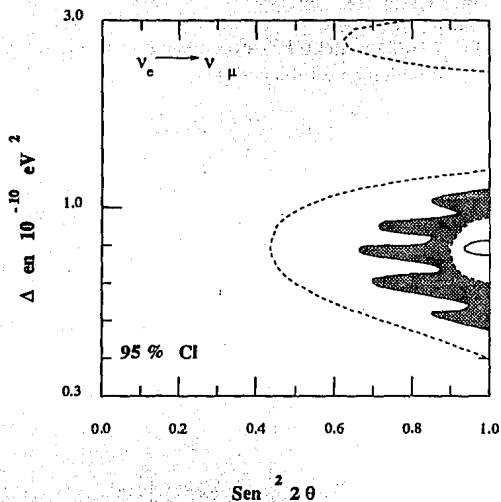


Figura 3.2: Las regiones del espacio de parámetros para Δ contra $\text{sen}^2 2\theta$ permitidas tanto para los datos del experimento C¹⁹ como el Kamiokande. Las líneas punteadas corresponden a los límites Kamiokande y las líneas sólidas a los límites experimentales del C¹⁹ en un nivel de confiabilidad del 95%. Adaptado de la Ref. [54].

La región corresponde a valores muy pequeño para Δ , de hecho, más pequeños que cualquiera de los valores explorados en los experimentos terrestres. Mostraremos más adelante que la materia solar puede realizar las oscilaciones de los neutrinos.

3.5 Oscilaciones en materia uniforme

En la discusión previa se ha supuesto que los neutrinos viajan a través del vacío, lo cual es una buena aproximación para el camino entre el Sol y la Tierra. Pero los neutrinos son producidos principalmente en el interior más profundo del Sol, y necesitan atravesar material de alta densidad antes de emerger del Sol. Las oscilaciones en el Sol, o en cualquier medio material, pueden ser muy diferentes de las oscilaciones en el vacío. La razón básica para esto, como lo dice Wolfenstein [55], es que las interacciones en un medio modifican la relación de dispersión de las partículas que viajan a través de él. En otro contexto, estamos familiarizados con este fenómeno para el caso de los fotones. Ellos no tienen masa en el vacío y su relación de dispersión es simplemente $E = |p|c$. En un medio, sin embargo, la relación de dispersión es más complicada, lo cual puede ser interpretado diciendo que el fotón desarrolla una masa efectiva, y, debido a esto, no viaja con velocidad c en un medio material.

Las relaciones de dispersión esencialmente dan la energía de una partícula en función de su momento. De esta manera, en el lenguaje cuántico, una diferente relación de dispersión significa un diferente Hamiltoniano del sistema. De esta forma, da una evolución diferente para la función de onda. Para un haz de neutrinos que viajan a través del material solar, la evolución es diferente de aquella que exhibiría el mismo haz viajando en el vacío.

El medio solar, por supuesto, es *no uniforme*. Antes de comenzar una discusión de la propagación del neutrino en tal medio, consideremos primero el caso más simple de un haz de neutrinos viajando a través de un medio de densidad uniforme. Como ya mencionamos las interacciones con el medio afectan la relación de dispersión de los neutrinos. Para cuantificar este efecto [56], consideremos la dispersión de un neutrino en materia (ver Apéndice B). Básicamente el material so-

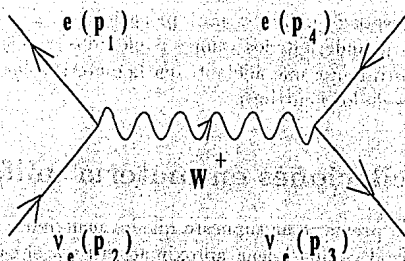


Figura 3.3: La dispersión de corriente cargada de los neutrinos del electrón con los electrones.

lar está compuesto de electrones, protones y neutrones. De estos, el neutrino electrónico (ν_e) puede tener interacciones de corriente cargada únicamente con el electrón. El neutrino del muon (ν_μ), por otro lado, participaría en las interacciones de corriente cargada solamente si los muones estuvieran presentes, pero las temperaturas del núcleo solar no son lo suficientemente altas para que esta condición sea satisfecha y lo mismo sucede para el neutrino del tau (ν_τ). Por consiguiente, de ahora en adelante, consideraremos que las contribuciones de corriente cargada afectan solo a ν_e . El diagrama de Feynman para este proceso está dado en la Fig. 3.3. Esto da la amplitud:

$$\left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \left\{ \bar{e}_L(p_1) \gamma^\lambda \nu_{eL}(p_2) \right\} \frac{-ig\gamma_\lambda}{(p_2 - p_1)^2 - M_W^2} \left\{ \bar{\nu}_{eL}(p_3) \gamma_\lambda e_L(p_4) \right\} \quad (3.13)$$

donde el símbolo $e_L(p)$ representa la componente izquierda para la energía positiva del campo del electrón.

Para las temperaturas del núcleo solar, la dependencia en el momento del propagador W puede ser despreciada. Usando la definición de la constante de Fermi que hallamos en la Sec. 1.2, pag. 24

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}, \quad (3.11)$$

obtenemos el Lagrangiano *efectivo* para interacción de corriente cargada

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{efec} &= -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{e}_L(p_1) \gamma^\lambda \nu_e(p_2) \right\} \left\{ \bar{\nu}_{eL}(p_3) \gamma_\lambda e_L(p_4) \right\} \\ &= -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{e}_L(p_1) \gamma^\lambda e_L(p_4) \right\} \left\{ \bar{\nu}_{eL}(p_3) \gamma_\lambda \nu_{eL}(p_2) \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde la segunda igualdad es obtenida vía la transformación de Fierz. Para la dispersión hacia adelante donde $p_2 = p_3 = p$, el cuadrimomento del neutrino no cambia. Observando tal situación, sería imposible saber que un fenómeno de dispersión ha tenido lugar. En tal caso pensaremos simplemente que el neutrino se está propagando con un cuadrimomento p . Por consiguiente, esto daría la siguiente contribución a la propagación del ν_e :

$$-\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left\langle \bar{e} \gamma^\lambda \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) e \right\rangle \bar{\nu}_{eL}(p) \gamma_\lambda \nu_{eL}(p), \quad (3.46)$$

después de promediar.

La temperatura del núcleo solar tiene un valor mucho menor que la masa del electrón. Por lo tanto podemos considerar que los electrones son no relativistas, en cuyo caso los promedios involucrados en la Ec. (3.46) dan lo siguiente:

$$\langle \bar{e} \gamma_\lambda \gamma_5 e \rangle \sim \text{espín}$$

$$\langle \bar{e} \gamma_i e \rangle \sim \text{velocidad}$$

$$\langle \bar{e} \gamma_0 e \rangle \sim N_e \quad (3.47)$$

Los electrones no están polarizados en el Sol, de tal manera que el valor esperado de espín es cero. El promedio de velocidad en el medio termal también se hace cero. De lo anterior obtenemos la siguiente contribución al Lagrangiano efectivo de las interacciones de corriente cargada:

$$-\sqrt{2} G_F N_e \bar{\nu}_{eL} \gamma_0 \nu_{eL}. \quad (3.48)$$

Ahora, consideraremos la contribución de corriente neutra. La interacción efectiva es

$$\mathcal{L}_{efec} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{f}(p_1) \gamma^\lambda \left(I_{3L} \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) - Q \sec^2 \theta_W \right) f(p_2) \right\} \\ \times \left\{ \bar{\nu}(p_3) \gamma_\lambda \nu_L(p_4) \right\} \quad (3.49)$$

donde f significa electrones, protones y neutrones. El símbolo ν puede ser tanto para ν_e o ν_μ , dado que ambos tienen iguales interacciones de corriente neutra. La contribución para la propagación hacia adelante puede ser determinada exactamente en la misma forma como en el caso anterior de corriente cargada. Uno obtiene la siguiente contribución al Lagrangiano efectivo:

$$-\sqrt{2}G_F \left[\sum_f N_f (I'_{3L} - 2 \sec^2 \theta_W Q^f) \right] \bar{\nu} \gamma_0 \nu_L \quad (3.50)$$

En esta ecuación, I'_{3L} , denota el tercer componente de *isospin débil* para el fermión f , y Q^f es la carga eléctrica del mismo. Para el electrón, protón y neutrón; los valores de estas cantidades son los siguientes:

	I_{3L}	Q
e	$-\frac{1}{2}$	-1
p	$\frac{1}{2}$	1
n	$-\frac{1}{2}$	0

Gracias a esto se observa que en la Ec. (3.50), las contribuciones del protón y el electrón se cancelan en un medio neutro donde $N_e = N_p$. Y el término de corriente neutra al Lagrangiano efectivo entonces se reduce a:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} G_F N_n \left(\bar{\nu}_{eL} \gamma_0 \nu_{eL} + \bar{\nu}_{\mu L} \gamma_0 \nu_{\mu L} \right) \quad (3.51)$$

Resumiendo, las contribuciones debidas a corriente neutra y cargada, tomadas juntas, añaden los siguientes términos al Lagrangiano efectivo los cuales son cuadráticos en los campos del neutrino:

$$\mathcal{L}_{efec} = - \sum_{l=e,\mu} \bar{\nu}_{lL} \gamma_0 V_{ll} \nu_{lL}, \quad (3.52)$$

donde

$$\begin{aligned} V_{\nu_e} &= \sqrt{2} G_F \left(N_e - \frac{1}{2} N_n \right) \\ V_{\nu_\mu} &= - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F N_n. \end{aligned} \quad (3.53)$$

El significado de tales términos lo podemos entender mediante la ecuación de Dirac:

$$\{ \gamma_0 E - \gamma \cdot \mathbf{p} - m \} \Psi = \gamma_0 V \Psi. \quad (3.54)$$

Rearreglando los términos

$$\gamma_0 (E - V) \Psi = \{ \gamma \cdot \mathbf{p} + m \} \Psi \quad (3.55)$$

y elevando al cuadrado ambos miembros, finalmente obtenemos

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} + V. \quad (3.56)$$

De esta manera, V se añade a la energía para un momento dado. En este sentido, V será llamada la energía potencial. La ecuación de evolución en materia está por consiguiente dada por

$$i \frac{d}{dt} |\nu_\alpha\rangle = H |\nu_\alpha\rangle \quad (3.57)$$

donde, usando la Ec. (3.56), podemos escribir el Hamiltoniano como

$$H = H'_0 + \begin{pmatrix} \sqrt{2} G_F \left(N_e - \frac{1}{2} N_n \right) & 0 \\ 0 & - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F N_n \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

en donde H_0 es el Hamiltoniano en el vacío, dado por la Ec. (3.31). De esta manera llegamos a que,

$$H = E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F N_n + \frac{1}{2E} M^2 \quad (3.59)$$

como antes E es la magnitud de la energía del neutrino, y

$$M^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta \cos 2\theta + 2A & \Delta \sin 2\theta \\ \Delta \sin 2\theta & -\Delta \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

donde por motivo de conveniencia, hemos definido

$$A = 2 \sqrt{2} G_F N_e E \quad (3.61)$$

El ángulo de mezcla efectivo en materia, $\hat{\theta}$, está dado en forma análoga a la Ec. (3.32) por

$$\tan 2\hat{\theta} = \frac{2H_{12}}{H_{22} - H_{11}} = \frac{\Delta \sin 2\theta}{\Delta \cos 2\theta - A} \quad (3.62)$$

y los vectores propios estacionarios son

$$\hat{\nu}_1 = \nu_e \cos \hat{\theta} - \nu_\mu \sin \hat{\theta}$$

$$\hat{\nu}_2 = \nu_e \sin \hat{\theta} + \nu_\mu \cos \hat{\theta} \quad (3.63)$$

Analizando los vectores propios se encuentran rasgos interesantes. Consideremos que el ángulo de mezcla en el vacío es pequeño, entonces, para $N_e \rightarrow 0$, $\hat{\theta} \rightarrow \theta$, tal que $\hat{\nu}_1 \simeq \nu_e$. Para el otro extremo tenemos que cuando $N_e \rightarrow \infty$, $\hat{\theta} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, tal que $\hat{\nu}_1 \simeq \nu_\mu$. En otras palabras, el estado propio de masa inferior es casi puramente ν_e si la densidad de materia se anula, y es casi puramente ν_μ si la densidad de materia es muy grande. Este hecho tiene consecuencias muy importantes. La relación energía-momento en materia está dada por los valores propios de la matriz \hat{H} , los cuales son

$$\hat{E}_\alpha = E - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F N_n + \frac{\hat{m}_\alpha^2}{2E} \quad (3.64)$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

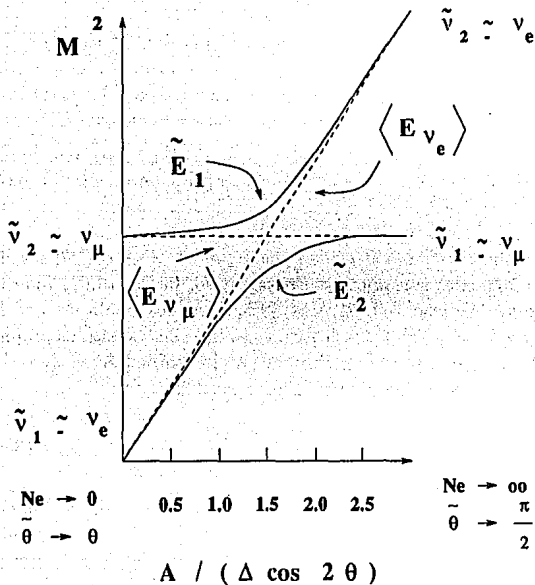


Figura 3.4: Energías efectivas de neutrinos en un medio. La cantidad A es proporcional a la densidad del número de electrones. Las líneas continuas son las energías para los estados propios físicos, las punteadas son los valores esperados de energía para los estados de sabor. La escala en el eje vertical es arbitraria. El ángulo de mezcla θ en el vacío se ha tomado que es 0.1 para la gráfica.

donde

$$m_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[(m_1^2 + m_2^2 + A) \mp \sqrt{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta \sin^2 2\theta} \right]. \quad (3.65)$$

Estos valores propios han sido graficados en la Fig. 3.4 como función de A . La figura también muestra los elementos diagonales de la matriz \hat{H} , los cuales son los valores esperados de energía para los estados ν_e y ν_μ . De la figura se puede ver que \hat{E}_1 está cercano a $\langle \hat{E}_{\nu_e} \rangle$ para densidades bajas mientras que está cercano a $\langle \hat{E}_{\nu_\mu} \rangle$ para densidades altas. Esto trae consigo el hecho de que $\hat{\nu}_1$ es principalmente ν_e a bajas densidades y principalmente ν_μ a altas densidades. Lo opuesto es cierto para $\hat{\nu}_2$.

Si un medio tiene una densidad dada por $A = \Delta \cos 2\theta$, los dos elementos diagonales son iguales. En este caso, la Ec. (3.62) muestra que el ángulo de mezcla efectivo es $\frac{\pi}{4}$, lo cual nos habla de que los estados ν_e y ν_μ están mezclados de forma máxima en los estados propios. La naturaleza de esta mezcla máxima es mejor entendida si, de la Ec. (3.62), escribimos abajo la expresión para $\sin^2 2\hat{\theta}$:

$$\sin^2 2\hat{\theta} = \frac{\Delta^2 \sin^2 2\theta}{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta}. \quad (3.66)$$

Para apreciar el significado físico del lado izquierdo de la ecuación anterior, necesitamos regresar a la Ec. (3.36), la cual da la probabilidad de supervivencia y conversión de un haz de ν_e viajando a través del vacío. Las probabilidades correspondientes para un haz viajando a través de un medio uniforme pueden ser obtenidas reemplazando θ por $\hat{\theta}$ y Δ por la diferencia de masa efectiva en el medio. Tomando el promedio del término dependiente de x , obtenemos

$$1 - \bar{P}_{\nu_e \nu_e} = \bar{P}_{\nu_e \nu_\mu} = \frac{1}{2} \sin^2 2\hat{\theta}. \quad (3.67)$$

De esta manera, el término del extremo izquierdo de la Ec. (3.66) es proporcional a la probabilidad promedio de conversión. El término del lado derecho muestra que, como una función de A , la probabilidad de conversión tiene la siguiente clase de comportamiento:

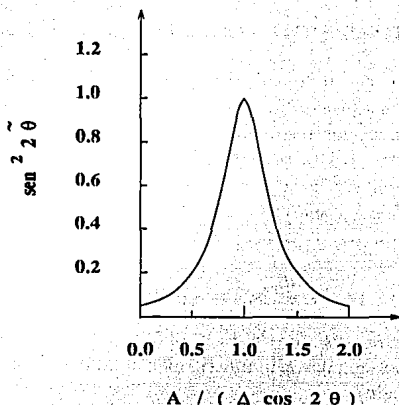


Figura 3.5: La curva del $\text{sen}^2 2\theta$ muestra la forma resonante. El ángulo de mezcla θ en el vacío es de 0.1 para la gráfica.

$$\frac{\text{Constante}}{(A - A_R)^2 + \Gamma^2} \quad (3.68)$$

Esta es exactamente la expresión para una resonancia *Breit-Wigner* de amplitud Γ y centrada en A_R (ver Fig. 3.5).

Así, lo importante de la Ec. (3.66) puede ser resumido como sigue: La probabilidad de conversión, como una función de A , tiene una *resonancia* en

$$A_R = \Delta \cos 2\theta \quad (3.69)$$

con amplitud

$$\Gamma = \Delta \text{sen } 2\theta \quad (3.70)$$

Mikheyev y Smirnov [57] fueron los primeros en darse cuenta de la importancia de la presencia de tal resonancia en el contexto del problema de los neutrinos solares.

3.6 Conversión resonante del neutrino

La observación crucial de Mikeyev y Smirnov [58] fue que los neutrinos producidos en las profundidades del Sol, en general, pasan a través de una región de densidad resonante en su camino hacia fuera del Sol. Para ver cómo afecta esto la propagación de los neutrinos, primeramente tenemos que derivar la ecuación de evolución de los estados propios "instantáneos" para *materia con densidad no uniforme*, como en el Sol. Comenzaremos con la ecuación para los estados de sabor

$$i \frac{d}{dx} |\nu_\alpha\rangle = \frac{1}{2E} \Delta \tilde{M}^2 |\nu_\alpha\rangle. \quad (3.71)$$

Esta es la misma que la Ec. (3.59), excepto que omitimos los términos proporcionales a la matriz identidad debido a que no afectan las probabilidades.

Ahora

$$|\nu_\alpha\rangle = \hat{U} |\tilde{\nu}_i\rangle, \quad (3.72)$$

donde \hat{U} es una matriz similar a aquella que definimos en la Ec. (3.28), con el ángulo θ reemplazado por $\tilde{\theta}$, el ángulo de mezcla efectivo en materia. Reescribiendo la ecuación de evolución como:

$$i \frac{d}{dx} (\hat{U} |\tilde{\nu}_i\rangle) = \frac{1}{2E} \Delta \tilde{M}^2 \hat{U} |\tilde{\nu}_i\rangle, \quad (3.73)$$

Tomando la derivada, debemos recordar que, en la materia no uniforme, $\tilde{\theta}$ y consecuentemente \hat{U} son diferentes en diferentes posiciones. De aquí que,

$$i \hat{U} \frac{d}{dx} |\tilde{\nu}_i\rangle + i \left(\frac{d}{dx} \hat{U} \right) |\tilde{\nu}_i\rangle = \frac{1}{2E} \Delta \tilde{M}^2 \hat{U} |\tilde{\nu}_i\rangle. \quad (3.74)$$

Usando la unitariedad de la matriz \hat{U} , obtenemos la ecuación de evolución para los estados físicos $|\tilde{\nu}_i\rangle$:

$$i \frac{d}{dx} |\tilde{\nu}_i\rangle = \left(\frac{1}{2E} \hat{U}^\dagger \Delta \tilde{M}^2 \hat{U} - i \hat{U}^\dagger \frac{d}{dx} \hat{U} \right) |\tilde{\nu}_i\rangle. \quad (3.75)$$

El término $U^\dagger \hat{M}^2 U$ también es obtenido para la materia uniforme, y da, independientemente de los términos proporcionales a la matriz unitaria, los valores propios instantáneos m_1^2 y m_2^2 en las entradas de la diagonal. El otro término puede ser calculado usando la fórmula explícita de U a partir de la Ec. (3.28). De todo ello obtenemos [59]

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & i \frac{d\theta}{dx} \\ -i \frac{d\theta}{dx} & \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

Notemos que si $\frac{d\theta}{dx} = 0$, ν_1 y ν_2 son de hecho estados propios estacionarios. Este es el resultado que se obtuvo para un medio uniforme. Para un medio no uniforme como el del Sol, tendremos que resolver esta ecuación para así poder hallar diferentes probabilidades de supervivencia.

3.7 Solución adiabática

Para ciertas situaciones muy particulares, es fácil de hallar una solución a la Ec. (3.76). Este es el caso cuando $\frac{d\theta}{dx}$ es pequeña, de tal manera que podemos hacer uso de la *aproximación adiabática*. Posteriormente cuantificaremos que tan pequeña deberá de ser $\frac{d\theta}{dx}$. Asumiremos aquí que la condición adiabática es la más relevante y que se encuentra satisfecha [60]. En este caso, ν_1 pasará prácticamente como ν_e , que corresponde a una superposición diferente de ν_e y ν_μ en diferentes puntos. Lo mismo es cierto para ν_2 , y esto puede suprimir el flujo de neutrinos.

Supongamos que $A_0 \rightarrow \infty$ (i.e., $N_e \rightarrow \infty$), donde el subíndice "0" denotará las cantidades en el punto de producción. De la Ec. (3.62) y (3.63), tenemos entonces que

$$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \text{i.e.,} \quad \nu_e \simeq \nu_2. \quad (3.77)$$

Este haz de ν_2 sale del Sol, en donde $A = 0$. Y allí

$$\nu_2 = \nu_e \sin \theta + \nu_\mu \cos \theta. \quad (3.78)$$

La probabilidad de encontrar ν_e en el haz es dada por $|\langle \nu_e | \nu_2 \rangle|^2$. Poniendo el superíndice "ad" para recordar que estamos tratando con la solución adiabática y podemos escribir

$$P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)} = \sin^2 \theta \quad \text{para } \lambda_0 \rightarrow \infty. \quad (3.79)$$

Debemos recordar que comenzamos con un haz el cual era casi puramente ν_e . Después que emerge del Sol, vemos que la probabilidad de encontrar al mismo ν_e en el haz es $\sin^2 \theta$. Si θ es pequeño, esto puede significar una tremenda supresión de esta especie. Esta es la esencia principal del mecanismo resonante de conversión de los neutrinos, el cual es usualmente llamado "efecto Mikeyev-Smirnov-Wolfenstein" o más brevemente "efecto MSW" después de los artículos pioneros de estos autores [61].

En general, en el punto de creación, el ángulo de mezcla efectivo no es $\frac{\pi}{2}$, sino que tiene algún valor θ_0 . En este caso,

$$\nu_e = \nu_1 \cos \theta_0 + \nu_2 \sin \theta_0. \quad (3.80)$$

De esta manera, hay una probabilidad $\cos^2 \theta_0$ de que el neutrino sea producido como un ν_1 . Si eso sucede, viajará fuera del Sol como un ν_1 donde puede ser detectado como un ν_e con una probabilidad $\cos^2 \theta$. Esto contribuye con un término $\cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta$ a la probabilidad de supervivencia $P_{\nu_e \nu_e}$. Alternativamente el neutrino puede ser producido como ν_2 , con una probabilidad $\sin^2 \theta_0$. En este caso, la probabilidad de que sea detectado, como ν_e es $\sin^2 \theta$. Usando estos dos casos, obtendremos la probabilidad de supervivencia total:

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)} &= \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta_0 \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta_0) (1 + \cos 2\theta) + \frac{1}{4} (1 - \cos 2\theta_0) (1 - \cos 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} [1 + \cos 2\theta_0 \cos 2\theta]. \end{aligned} \quad (3.81)$$

La probabilidad de conversión a ν_μ estará entonces dada por

$$P_{\nu_e \nu_\mu}^{(ad)} = 1 - P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)} = \frac{1}{2} [1 - \cos 2\theta_0 \cos 2\theta] \quad (3.82)$$

Más formalmente, para la detección de un ν_e a una distancia x del punto de producción, podemos escribir

$$P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)}(x) = \left| \langle \nu_e(x) | \nu_e(0) \rangle \right|^2 \\ = \left| \sum_{\alpha\alpha'} \langle \nu_e(x) | \nu_{\alpha'}(x) \rangle \langle \nu_{\alpha'}(x) | \nu_\alpha(0) \rangle \langle \nu_\alpha(0) | \nu_e(0) \rangle \right|^2, \quad (3.83)$$

introduciendo el conjunto completo de estados ν_α . Los productos internos más a la derecha y más a la izquierda dan los elementos de la matriz de mezcla en los puntos de detección y producción.

El elemento medio de la matriz da una fase correspondiente a la propagación adiabática de los estados ν_α , la cual es

$$\exp\left(i \int_0^x dx' \tilde{E}_\alpha(x')\right). \quad (3.84)$$

Así tenemos que

$$P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)}(x) = \left| e^{(i \int dx' \tilde{E}_1)} \cos \hat{\theta}_0 \cos \theta + e^{(i \int dx' \tilde{E}_2)} \operatorname{sen} \hat{\theta}_0 \operatorname{sen} \theta \right|^2 \\ = \frac{1}{2} \left[1 + \cos 2\theta_0 \cos 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta_0 \operatorname{sen} 2\theta \cos \left(\int_0^x dx' (\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1) \right) \right] \quad (3.85)$$

Los valores de \tilde{E}_2 y \tilde{E}_1 dependen del momento del haz de neutrinos. En las Ec. (3.81) y (3.82), asumiremos que el coseno, cuyo argumento es la integral de la diferencia de las energías desaparece cuando sumamos sobre todo el rango de momentos de los neutrinos detectados en un experimento terrestre. De la discusión en la Sec. 3.2, y refiriendonos a la Fig. 3.1, vemos que esto implica que $\Delta \gg 10^{-10} \text{ eV}^2$. Como veremos posteriormente, las soluciones que obtenemos son consistentes con esta condición.

3.8 Efectos no adiabáticos

Los efectos no adiabáticos inducen transiciones entre los estados $\hat{\nu}_1$ y $\hat{\nu}_2$. Más adelante, mostraremos que para valores realistas de los parámetros, tales efectos son importantes solo cerca de la región de resonancia [62]. Para otras regiones, la aproximación adiabática es una buena aproximación y puede ser usada sin problemas. En la región de resonancia, debemos resolver la ecuación de propagación de manera exacta, asumiendo alguna forma simplificada para el perfil de densidad que sea aproximadamente válido en esa región. A partir de dicha solución podemos hallar la probabilidad P_c de que en dicha región tenga lugar la transición de un estado propio a otro. Supongamos un estado ν_e que es producido en el interior del Sol y que sobrevive como tal con una probabilidad $P_{\nu_e\nu_e}$, si las condiciones fueran adiabáticas. En el caso no adiabático, es posible que todavía pueda continuar como un ν_e y la probabilidad de dicho evento sería de $1 - P_c$. Por otro lado, situaciones en las cuales debieron haber terminado en un ν_μ en el caso adiabático, pueden alcanzar en estado ν_e en el caso no adiabático si ocurre una transición. Tomando en cuenta los efectos no adiabáticos, tenemos [63]

$$\begin{aligned}
 P_{\nu_e\nu_e} &= (1 - P_c) P_{\nu_e\nu_e}^{(ad)} + P_c P_{\nu_e\nu_\mu}^{(ad)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + (1 - 2P_c) \cos 2\theta_0 \cos 2\theta \right], \quad (3.86)
 \end{aligned}$$

donde las probabilidades adiabáticas fueron tomadas de las Ecs. (3.81) y (3.82). Después, encontraremos P_c en términos de los parámetros fundamentales Δ y θ . Una vez que esto es conocido, la Ec. (3.86) da una fórmula analítica para determinar la probabilidad de supervivencia de un ν_e viajando hacia afuera del Sol.

Consideremos, para esto, un neutrino que es producido en la mitad más lejana del Sol. Existe una cierta probabilidad no nula de que viajará hacia la Tierra. Si esto es así, pasará a través de la región del núcleo solar. Si este neutrino es creado lo suficientemente lejos del centro en el Sol donde la densidad es más baja que la densidad de resonancia, cruzará una vez dicha región en su camino hacia el centro del Sol. Después de esto, cruzará de nuevo la región de resonancia, esta vez en su camino hacia fuera del Sol. Razonando de manera similar

al caso anterior, podemos hallar la probabilidad de supervivencia en este caso [64]. Aquí, $P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)}$ será multiplicada por la probabilidad de que el neutrino *salte* cerca de una región de resonancia, pero que no salte cerca de la otra. De esta manera,

$$\begin{aligned}
 P_{\nu_e \nu_e} &= \left[(1 - P_c)^2 + (P_c)^2 \right] P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)} + 2P_c (1 - P_c^{(no, ad)}) P_{\nu_e \nu_n}^{(ad)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + (1 - 2P_c)^2 \cos 2\theta_0 \cos 2\theta \right]. \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

Así las Ecs. (3.86) y (3.87) nos dan expresiones analíticas para la probabilidad de supervivencia en el caso general de que podamos expresar P_c como una función de los parámetros del problema.

3.9 El parámetro adiabático

Retomaremos ahora la matriz Hamiltoniana de la Ec. (3.76). Las soluciones adiabáticas se obtuvieron suponiendo que θ es un parámetro que varía muy ligeramente. Cuantificaremos ahora este enunciado, lo cual también llevará a una plausible expresión para P_c . Dicho de manera más precisa, la condición adiabática significa que los términos fuera de la diagonal en la matriz de la Ec. (3.76) son mucho menores que los términos de la diagonal principal. Al escribir la ecuación de evolución, omitimos los términos proporcionales a la matriz unidad por conveniencia. Tales términos modifican los elementos diagonales, pero sin embargo, mantendrán su diferencia sin cambio. De esta forma, en lo que a los elementos diagonales se refiere, no es el valor de cada uno de ellos por separado lo que es relevante, sino su diferencia. Por consiguiente, la condición adiabática es dada por

$$\left| \frac{d\theta}{dx} \right| \ll \frac{|m_1^2 - m_2^2|}{2E} \quad (3.88)$$

Usando la expresión para θ en la Ec. (3.62) tendremos

$$\frac{d\theta}{dx} = \sqrt{2} G_F E \frac{\Delta \operatorname{sen} 2\theta}{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \operatorname{sen}^2 2\theta} \frac{dN_e}{dx} \quad (3.89)$$

Los valores propios de la masa elevados al cuadrado fueron dados en la Ec. (3.65). Usándolos, reducimos la condición adiabática en la Ec. (3.88) a la forma

$$\left| \frac{dN_e}{dx} \right| \ll \frac{\left[(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \operatorname{sen}^2 2\theta \right]^{3/2}}{2\sqrt{2} G_F E^2 \Delta \operatorname{sen} 2\theta} \quad (3.90)$$

Retomando la expresión para el ángulo de mezcla efectivo de la Ec. (3.66), la expresión anterior puede ser reescrita como

$$\kappa(x) \gg 1, \quad (3.91)$$

donde la cantidad

$$\kappa(x) \equiv \frac{\left(\frac{\Delta}{E}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\theta}{2\sqrt{2} G_F \operatorname{sen}^3 2\theta} \frac{1}{\left| \frac{dN_e}{dx} \right|} \quad (3.92)$$

es el llamado "parámetro adiabático", el cual depende de la posición vía θ y $\frac{dN_e}{dx}$. Si la densidad es muy alta en algún punto, $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ y $\kappa(x)$ llega a ser muy grande. Por el contrario, si la densidad de la materia se anula en algún lugar, $\theta \rightarrow \theta$, y de nuevo $\kappa(x)$ será grande a menos que θ tenga un valor cercano a $\frac{\pi}{4}$. En la Fig. 3.6 se grafica $\kappa(x)$ para varios valores de $\frac{\Delta}{E}$ y θ , asumiendo que el perfil de densidad está dado por [65]

$$N_e(r) = N_e(0) \exp\left(-\frac{a z^2}{z+b}\right), \quad (3.93)$$

donde $z = \frac{r}{R_\odot}$. Los valores de los parámetros a , b y $N_e(0)$ que fueron usados son presentados en la Tabla 3.1. $N_e(0)$ da el valor de la densidad de electrones en el centro del Sol, expresada en términos del número de Avogadro de partículas por cm^3 .

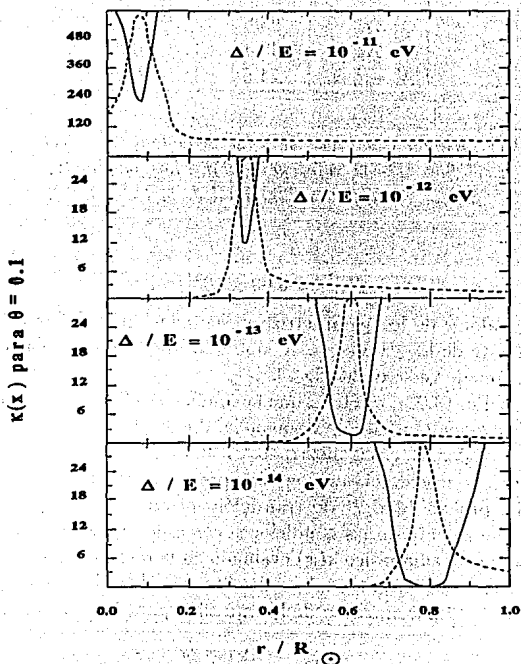


Figura 3.6: Las líneas sólidas dan el parámetro adiabático $\kappa(x)$ como función de la distancia del núcleo solar, para varios valores de los parámetros Δ/E . El ángulo de mezcla en el vacío ha sido tomado como 0.1. La altura de las líneas punteadas es proporcional a los valores de $\sin^2 2\theta$ para un neutrino producido en el núcleo solar, con el pico indicando el punto de resonancia. Notemos el cambio de escala en la gráfica superior.

Cantidad	$N(0)/N$	a	b
N_e	98.8	11.1	0.15
N_n	18.1	11.1	0.02
$N_e - \frac{1}{2}N_n$	71.6	11.1	0.20

Tabla 3.1: Medidas analíticas para las densidades de electrones y neutrones en el Sol. De la referencia [65]. Los parámetros dados aquí deben ser puestos en la forma funcional de la Ec. (3.93).

$$N_{AVO} = 6.03 \times 10^{23}/\text{cm}^3 \quad (3.94)$$

Los valores de los parámetros presentados en la Tabla 3.1 dan un buen ajuste de los valores de N_e obtenidos del modelo solar estándar, y según puede verse en la Fig. 3.7.

De la Ec. (3.92), es obvio que la condición adiabática es más difícil de satisfacer en el punto de resonancia, donde el $\sin 2\theta$ es máximo. En efecto en todos los casos mostrados en la Fig. 3.7 las regiones alejadas del punto de resonancia pueden siempre ser tratadas adiabáticamente [66]. La probabilidad P_e de transición introducida anteriormente depende únicamente de las condiciones cerca de la resonancia. El valor del parámetro adiabático $\kappa(x)$ evaluado en la resonancia lo llamaremos simplemente como κ_R , el cual puede obtenerse de la Ec. (3.92) poniendo $\sin 2\theta = 1$. Si hacemos uso de la expresión para la densidad resonante

$$N_R = \frac{\Delta \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F E} \quad (3.95)$$

que resulta de la Ec. (3.69) y de la definición para A, nos queda

$$\kappa_R \equiv \frac{\Delta}{E} \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} \frac{1}{\left| \frac{d}{dx} \ln N_e \right|_R} \quad (3.96)$$

Por supuesto si $\kappa_R \gg 1$, entonces la propagación es adiabática en todas partes, mientras que, si $\kappa_R \lesssim 1$, entonces P_e es apreciable.

Es claro que P_e debe de ser más grande para valores mayores de E , lo cual significa que cuanto más energéticos sean los neutrinos deben

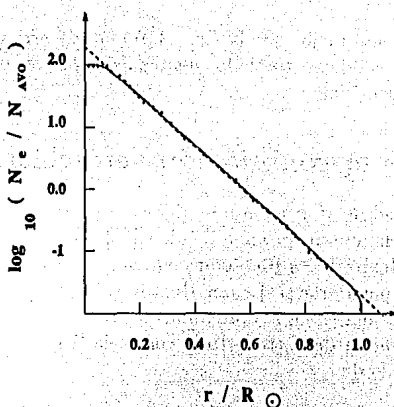


Figura 3.7: Los puntos son obtenidos de los cálculos del Modelo Solar Estándar. La línea sólida es donde se ajusta la Ec. (3.93).

saltar más rápidamente. Cuando $E \rightarrow 0$, P_c debe desaparecer. También, P_c no puede ser un polinomio en E dado que el cruce de niveles es esencialmente un efecto no perturbativo. Estas consideraciones sugirieron una forma de solución exponencial dada por Haxton y Parke [67]

$$P_c = \exp(-\kappa_R F) \quad (3.97)$$

donde la cantidad F es independiente de E y depende de la forma como varía N_c cerca de la resonancia.

Nosotros obtendremos más adelante una expresión analítica para la probabilidad de transición cuando los efectos no adiabáticos comienzan a ser importantes, es decir cuando $\kappa_R \lesssim 1$, la cual reproduce el límite adiabático y considera efectivamente la salida desde la adiabaticidad cuando nos movemos hacia el régimen no adiabático o también conocido como régimen repentino, reproduciendo satisfactoriamente en forma general la probabilidad de supervivencia del neutrino solar como una función de la energía. Dicha fórmula se comporta cualitativa y

cuantitativamente mejor que la Ec. (3.97) citada arriba, para todo el rango de valores de energía de los neutrinos, sin hacer uso de un perfil específico de densidad.

3.10 La aproximación semiclásica

La probabilidad de transición no adiabática entre dos estados fué calculado independientemente por Landau [68], Zener [69] y Stückelberg [70] en el contexto de los problemas en física nuclear, y fué aplicada al presente caso por Parke [71] y por Haxton [72]. Para encontrar el comportamiento principal en la aproximación semiclásica, podemos usar el método de Landau de la trayectoria compleja [73].

Este método da

$$\ln P_c = -2 \Im m \left[S_1(t_1, t_*) + S_2(t_*, t_2) \right], \quad (3.98)$$

donde $S_1(t_1, t_*)$, por ejemplo denota la acción para el movimiento del haz de neutrinos en el estado ν_1 de algún tiempo inicial t_1 a un tiempo de transición t_* el cual especificaremos más adelante. Después del tiempo t_* es usada la acción en el estado ν_2 hasta algún tiempo final t_2 cuando el haz de neutrinos proviene de la región no adiabática. Las partes imaginarias de la acción permanecen sin ser afectadas si tomamos $t_1 = t_2 = t_R$, siendo t_R el tiempo al cual el haz de neutrinos cruza el punto de resonancia.

De esta manera,

$$\ln P_c = -2 \Im m \int_{t_R}^{t_*} dt (\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1), \quad (3.99)$$

donde \tilde{E}_α son los estados propios de energía en el medio, dados por la Ec. (3.61). Cambiando la variable de integración de t a A , obtenemos

$$\ln P_c = -\frac{1}{E} \Im m \int_{A_R}^{A_*} \frac{dA}{(dA/dx)} \sqrt{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta}, \quad (3.100)$$

donde como antes estamos usando t y x en forma intercambiable y hemos reemplazado $\frac{dA}{dt}$ por $\frac{dA}{dx}$. El límite inferior de esta integral es

$A_R = \Delta \cos 2\theta$. El límite superior, A_* , es el valor de A en el "punto de transición" mencionado anteriormente. En el método de Landau, este es el valor de A para el cual los dos valores propios coinciden, es decir, $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_2$. De la Fig. 3.1, vemos que esto no sucede para ningún valor real de A . De hecho de las Ecs. (3.64) y (3.65) tenemos que

$$A_* = \Delta e^{\pm 2i\theta} \quad (3.101)$$

el cual es complejo. Así la integración de la Ec. (3.100) tendrá que ser hecha para valores complejos de A . Es por esta razón que este método es llamado el *método de trayectorias complejas*.

Para evaluar la integral, necesitamos saber cual es la forma A como una función de x en la región de resonancia. Si la variación es lineal, $\frac{dA}{dx}$ es constante y podemos sacarla fuera de la integral. Si este valor es positivo, usamos el exponente positivo en la Ec. (3.101) tal que $\ln P_c$ es negativo. Si $\frac{dA}{dx}$ es negativo, usamos el exponente negativo de la Ec. (3.101). En cualquier caso cambiando la variable de integración de A a $a = (A - \Delta \cos 2\theta) / \Delta \sin 2\theta$, tenemos

$$\begin{aligned} \ln P_c &= - \frac{\Delta^2 \sin^2 2\theta}{E \left| \frac{dA}{dx} \right|_R} \Im \int_0^i da \sqrt{1+a^2} \\ &= - \frac{\Delta^2 \sin^2 2\theta}{E \left| \frac{dA}{dx} \right|_R} \cdot \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Recordando que $A_R = \Delta \cos 2\theta$, podemos también escribir como

$$\ln P_c = - \frac{\Delta \sin^2 2\theta}{E \cos 2\theta} \cdot \frac{1}{\left| \frac{dA}{dx} \ln A \right|} \cdot \frac{\pi}{4}. \quad (3.103)$$

Esto muestra que en la Ec. (3.97), debe tomarse $F = \frac{\pi}{4}$, es decir

$$P_c = \exp\left(-\frac{\pi}{4} \kappa_R\right). \quad (3.104)$$

Por supuesto, este resultado, se basa en la suposición de que A es una función lineal de x cerca de la resonancia, lo cual puede parecer un poco drástico. Para una disminución exponencial en la densidad solar cercana a la resonancia se obtiene [74] $F = \frac{\pi}{4} (1 - \tan^2 \theta)$. Esto es de interés físico dado que la densidad solar tiene de hecho una variación

exponencial para una región amplia en el Sol. Sin embargo, para la mayoría de los valores de θ que son de interés, la diferencia en el caso exponencial y el lineal es insignificante. De esta manera, en lo que sigue tomaremos la forma más simple es decir $F = \frac{\pi}{4}$.

3.11 El límite extremo no adiabático

El método de Landau descrito arriba es un método semiclásico, y nos da el término principal en el límite de grandes valores del exponente. Cuando κ_R es muy pequeño ($\ll 1$), la expresión para P_c dada por la Ec. (3.104) no es satisfactoria.

La limitación de la Ec. (3.104) puede ser entendida si analizamos un ejemplo simplificado [75].

Consideremos un haz de neutrinos viajando a través de la frontera entre un medio uniforme y el espacio vacío. La propagación es obviamente adiabática para el medio uniforme, así como para el vacío, dado que ambos medios tienen densidades uniformes. Pero en el borde, hay un abrupto cambio de densidad tal que $\frac{dN}{dx} \rightarrow \infty$, lo cual significa que si tomamos la Ec. (3.92), $\kappa(x) \rightarrow 0$, es decir, la situación es *altamente no adiabática*. Si denotamos por "x" a un punto en lo más profundo del medio y por "y" a otro punto en la parte externa (en el vacío), es posible escribir la probabilidad de transición como

$$P_c \equiv \left| \langle \nu_2(y) | \hat{\nu}_1(x) \rangle \right|^2 = \left| \sum_I \langle \nu_2(y) | \nu_2(y') \rangle \langle \nu_2(y') | \nu_1(y') \rangle \right. \\ \left. \times \langle \nu_1(y') | \nu_1(x') \rangle \langle \nu_1(x') | \hat{\nu}_1(x) \rangle \langle \nu_1(x') | \nu_1(x) \rangle \right|^2, \quad (3.105)$$

donde x' es un punto justo dentro del medio y y' está fuera del medio (en el vacío), en los dos lados de la frontera plana. Los estados de sabor son continuos a través del borde, es decir, $\langle \nu_1(y') | \nu_1(x') \rangle = 1$. Usando la matriz de mezcla en materia y en el vacío y despreciando todos los términos de interferencia, obtenemos

$$P_c = \text{sen}^2(\hat{\theta} - \theta) \quad (3.106)$$

Si por ejemplo el medio es muy denso, $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ tal que

$$P_c = \cos^2 \theta. \quad (3.107)$$

Este no es el límite que obtenimos de la Ec. (3.97) el cual nos da $P_c \rightarrow 1$ cuando $n_n \rightarrow 0$. La diferencia es significativa si θ no es pequeña. Para convencernos de que la Ec. (3.107) da el resultado correcto en contraste con el resultado incorrecto de la Ec. (3.97), deberemos trabajar la expresión de la P_c dentro de la expresión para la probabilidad de supervivencia dada por la Ec. (3.86). Esto nos dará, usando $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$,

$$P_{\nu_e \nu_e} = 1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2 2\theta. \quad (3.108)$$

Esta es la probabilidad de supervivencia promedio de la energía en el vacío, como la obtenida en la Ec. (3.67). Este es el resultado esperado con $\theta = \frac{\pi}{2}$, pues no hay oscilaciones en el medio como puede ser visto poniendo el ángulo de mezcla igual a $\frac{\pi}{2}$ en la Ec. (3.36). Las oscilaciones pueden ocurrir solo después de que los rayos escapan hacia el vacío y por consiguiente el resultado del límite de vacío es recuperado.

Llegando a estar convencidos de las limitaciones de la forma exponencial para P_c en la Ec. (3.97) deberemos buscar una fórmula mejor. Esta puede ser obtenida por soluciones exactas de la ecuación de propagación. Es por esto, que usualmente se emplean los estados de sabor directamente. Comenzando con la Ec. (3.57) e inmediatamente después podemos escribir las dos ecuaciones diferenciales de primer grado para ν_e y ν_μ . Eliminando a ν_μ de estas ecuaciones obtenemos

$$\ddot{\nu}_e + i(\hat{H}_{11} + \hat{H}_{22})\dot{\nu}_e + (\hat{H}_{12}^2 - \hat{H}_{11}\hat{H}_{22} + i\hat{H}_{11}')\nu_e = 0, \quad (3.109)$$

en donde hemos retomado el hecho que solo el elemento \hat{H}_{11} es dependiente de x , ver la Ec. (3.60). Definiremos ahora una nueva variable

$$a_e = \exp\left(i \int^x dx' \hat{H}_{11}(x')\right) \nu_e. \quad (3.110)$$

la cual difiere de la variable vieja solo por una fase y por consiguiente no afecta las probabilidades. En términos de esta nueva variable, la ecuación anterior se transforma en [76]

$$\ddot{a}_e + i(H_{22} - H_{11})\dot{a}_e + H_{12}^2 a_e = 0 \quad (3.111)$$

Es necesario resolver la ecuación precedente y para ello necesitamos poner la H_{11} que es función de x . Una vez que se ha hecho esto, la probabilidad de supervivencia a una cierta distancia x estará dada por $|a_e(x)|^2$.

En principio, si nosotros somos capaces de resolver la Ec. (3.111) para el perfil de densidad del Sol, entonces obtendremos una respuesta exacta para las probabilidades de supervivencia de los neutrinos solares. Esto sin embargo, no puede ser hecho debido a que el perfil de densidad solar tiene una forma complicada. Es por ello que resolvemos la Ec. (3.111) solo cerca de la región de resonancia, asumiendo alguna forma *simple* para la variación de la densidad la cual sería aproximadamente válida en esa limitada región.

La solución exacta en esta región da la probabilidad P_c de transición cerca de la región de resonancia, la cual está dada por $1 - |a_e|^2$. Una vez hecho esto, podemos usar la Ec. (3.86), o la Ec. (3.87) para encontrar la probabilidad de supervivencia después de que el haz de neutrinos ha atravesado el material solar.

La solución exacta de la Ec. (3.111) fue primeramente hecha para una variación lineal de la densidad [77], pero desde entonces se ha resuelto para otros perfiles de densidad [78]. Todas estas soluciones dan la forma

$$P_c = \frac{\exp(-\kappa_R F) - \exp\left(-\frac{\kappa_R F}{\text{Sen}^2 \theta}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\kappa_R F}{\text{sch}^2 \theta}\right)} \quad (3.112)$$

en donde F se ha calculado usando el método de Landau-Zener. Notemos que para $\kappa_R \rightarrow 0$, esto nos dará el límite correcto de la Ec. (3.108). Donde esta forma es aceptable para todas las soluciones conocidas, es más, se ha conjeturado [79] que dicha forma funciona bien aún prescindiendo de la naturaleza de la variación de la densidad.

Resumiendo la solución de la ecuación de evolución para el rayo de neutrinos dada por la Ec. (3.76), tenemos que la probabilidad de que un ν_e sobreviva como un ν_e está dada por

$$P_{\nu_e \nu_e} = \frac{1}{2} \left[1 + (1 - 2P_c)^n \cos 2\theta_0 \cos 2\theta \right], \quad (3.113)$$

donde n es 1 o 2 dependiendo si las resonancias hayan sido encontradas una o dos veces, θ_0 es el ángulo de mezcla efectivo en el punto donde el neutrino es producido y está dado por

$$\tan 2\theta_0 = \frac{\frac{\Delta}{E} \sin 2\theta}{\frac{\Delta}{E} \cos 2\theta - 2\sqrt{2} G_F N_0}, \quad (3.114)$$

siendo N_0 la densidad del número de electrones en el punto de producción. Para la probabilidad de transición P_c , usaremos la expresión más simple

$$P_c = \exp \left(- \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\Delta}{E} \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} \cdot \frac{1}{\left| \frac{d}{dx} \ln N_e \right|_R} \right), \quad (3.115)$$

la cual es válida si la variación de la densidad es lineal cerca de la resonancia.

Para calcular $P_{\nu_e \nu_e}$, para neutrinos de una energía dada, necesitamos dos clases de información. Primero, necesitamos conocer el perfil de densidad de electrones en el Sol, de tal manera que así podamos conocer N_0 donde es producido el neutrino. El perfil también nos dará la cantidad $\left| \frac{d}{dx} \ln N_e \right|$ en el punto de resonancia, el cual aparece en la expresión para P_c . Segundo, necesitamos los parámetros físicos de la partícula del problema, especificando de nuevo el ángulo de mezcla θ y la diferencia de las masas elevadas al cuadrado Δ .

3.12 Solución con tres generaciones

Es posible generalizar las formulas obtenidas en el caso de dos generaciones para incluir los efectos de la tercera generación, es decir incluir el tercer sabor del neutrino (ν_τ). Para el caso de las oscilaciones en el vacío, podemos escribir cualquier estado de sabor en general como

$$|\nu_i\rangle = \sum_j U_{ij} |\nu_j\rangle, \quad (3.116)$$

donde el índice j corre sobre todos los estados propios de masa. Si se crea un haz de ν_i al tiempo $t = 0$, su evolución en el tiempo estará gobernada por

$$|\nu_i(t)\rangle = \sum_{\alpha} e^{-iE_{\alpha}t} U_{i\alpha} |\nu_{\alpha}\rangle \quad (3.117)$$

La probabilidad de encontrar el estado de sabor ν_l en este estado está dado por

$$\begin{aligned} P_{\nu_l\nu_i}(t) &= \left| \langle \nu_l | \nu_i(t) \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \left| U_{l\alpha} U_{i\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{i\beta} \right| \cos \left[(E_{\alpha} - E_{\beta})t - \varphi_{l\alpha\beta} \right], \end{aligned} \quad (3.118)$$

donde

$$\varphi_{l\alpha\beta} = \arg \left(U_{l\alpha} U_{i\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{i\beta} \right). \quad (3.119)$$

Usando la aproximación $E_{\alpha} \gg m_{\alpha}$ como antes, podemos usar la Ec. (3.6) para escribir [80]

$$P_{\nu_l\nu_i}(x) = \sum_{\alpha, \beta} \left| U_{l\alpha} U_{i\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{i\beta} \right| \cos \left(\frac{\Delta_{\alpha\beta}}{2E} x - \varphi_{l\alpha\beta} \right), \quad (3.120)$$

donde

$$\Delta_{\alpha\beta} \equiv m_{\alpha}^2 - m_{\beta}^2. \quad (3.121)$$

Como en el caso de dos generaciones, hay algunas regiones permitidas donde los valores de Δ están cercanos a 10^{-10} eV^2 . Pero, con tres generaciones, algún nuevo tipo de soluciones son también posibles. Por esto, vamos a considerar que estamos en un rango de valores de $\Delta_{\alpha\beta}$ donde $(\Delta_{\alpha\beta}/2E)x \gg 1$ para energías típicas de neutrinos solares. La

energía completamente promediada abarca entonces los términos con $\alpha \neq \beta$ y tendremos que

$$\bar{P}_{\nu_l \nu_l} = \sum_{\alpha} |U_{l\alpha}|^2 |U_{l'\alpha}|^2. \quad (3.122)$$

Para proceder, algunos autores [81] toman la siguiente parametrización de los elementos de la matriz de mezcla (CKM)

$$U_{e1} = \cos \theta_1, U_{e2} = \sin \theta_1 \cos \theta_2, U_{e3} = \sin \theta_1 \sin \theta_2. \quad (3.123)$$

Entonces,

$$\bar{P}_{\nu_e \nu_e} = \cos^4 \theta_1 + \sin^4 \theta_1 (\cos^4 \theta_2 + \sin^4 \theta_2). \quad (3.124)$$

A diferencia del caso de dos generaciones donde $\bar{P}_{\nu_e \nu_e} \gg 1/2$, aquí podemos tener a $\bar{P}_{\nu_e \nu_e}$ tan bajo como $1/3$. Esto puede ser consistente con las probabilidades de 2σ que se encuentran en los experimentos *Homiclake* y *Kamiokande*, dados en las Ecs. (3.39) y (3.42). La solución para los ángulos está mostrada en la Fig. 3.8. Los valores de las diferencias de masas elevadas al cuadrado tienen que ser mucho más grandes de 10^{-10} eV^2 y están acotados superiormente por los límites que imponen los experimentos terrestres.

Es relativamente fácil de calcular las correspondientes probabilidades si tomamos en cuenta los efectos de la materia ya que la propagación en el medio es adiabática. Siguiendo los argumentos que llevan a la Ec. (3.81), tenemos

$$P_{\nu_l \nu_l}^{(ad)} = \sum_{\alpha} |\tilde{U}_{l\alpha}|^2 |U_{l'\alpha}|^2, \quad (3.125)$$

donde \tilde{U} es la matriz de mezcla efectiva en el punto donde el neutrino es producido. Esto parece *engañosamente simple*. La parte *pesada* involucra la determinación de \tilde{U} en términos de la densidad del medio y la energía de los neutrinos. El análisis exacto para el caso de tres generaciones [82] es *verdaderamente complicado* dado que involucra la solución de una ecuación cúbica. Algunas técnicas de solución aproximada han sido tratadas en la literatura [83].

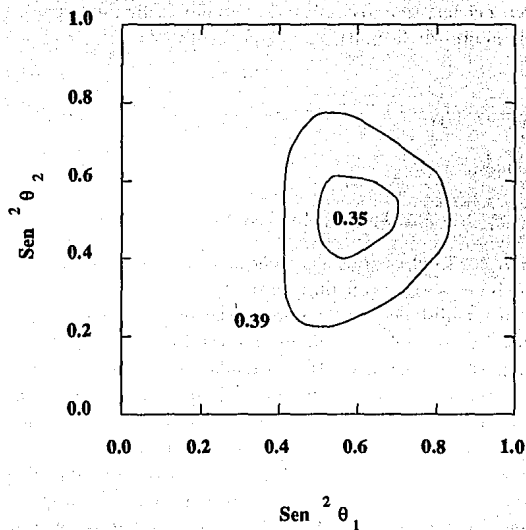


Figura 3.8: Soluciones de oscilación en el vacío para el problema del neutrino solar con tres generaciones de neutrinos. Las diferencias de masas elevadas al cuadrado se han asumido que son $\gg 10^{-10} \text{ eV}^2$. El interior de las curvas interna y externa son consistentes con los datos de los niveles 2σ y 3σ respectivamente.

De la discusión de dos generaciones, es obvio, que dos resonancias ocurrirán en el caso de tres generaciones. En un diagrama como el de la Fig. 3.4 estas resonancias tienen lugar cuando $\langle E_{\nu_e} \rangle$ cruza $\langle E_{\nu_\mu} \rangle$ y $\langle E_{\nu_\tau} \rangle$ respectivamente. Cuando las dos están muy separadas, las dos resonancias pueden ser tratadas independientemente una de la otra.

Pero aún entonces, la confrontación con los datos experimentales está verdaderamente complicada por muchas razones. El espacio solución es mucho mayor dado que involucra dos diferencias de masas elevadas al cuadrado, es decir, Δ_{21} y Δ_{31} , así como también los tres ángulos de mezcla. En general, hasta las fases que violan CP pueden aparecer en la matriz de mezcla, haciendo el problema más frustrante. Sin embargo, los resultados de los dos experimentos pueden no estar correlacionados en el sentido de que uno de ellos puede mostrar una "reducción" en flujo porque de ν_e 's se están convirtiendo a ν_μ 's, mientras que el otro puede mostrar una "reducción" porque de ν_e 's se están convirtiendo a ν_τ 's [81].

Los efectos no adiabáticos harán el problema *más complicado*. Introducen transiciones entre diferentes estados estacionarios. Si denotamos la probabilidad de transición de un estado ν_α a un estado ν_β por $P_{\alpha\beta}^c$, entonces

$$P_{\nu_i\nu_j} = \sum_{\alpha,\beta} |\tilde{U}_{i\alpha}|^2 |U_{j\beta}|^2 P_{\alpha\beta}^c \quad (3.126)$$

Para N generaciones, hay a lo más $(N-1)^2$ cantidades independientes, dado que $P_{\alpha\beta}^c$ debe satisfacer las relaciones

$$\sum_{\alpha} P_{\alpha\beta}^c = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{\beta} P_{\alpha\beta}^c = 1,$$

lo cual se sigue de la unitariedad. Sin embargo, las cantidades $P_{\alpha\beta}^c$, en general, no pueden ser calculadas analíticamente. Algunas conjeturas se han hecho donde las resonancias están bien separadas [85].

Capítulo 4

Cálculo de la probabilidad de supervivencia del neutrino del electrón usando la aproximación de Magnus para tres sabores

4.1 Análisis general del problema

Antes de dar una descripción general del problema a tratar, indicaremos de manera somera la motivación que nos llevó a su planteamiento:

- (1) La oscilación de neutrinos en medios materiales provee una solución elegante al *problema de los neutrinos solares*, haciendo uso del llamado **efecto MSW**.
- (2) La mayoría de los estudios teóricos se han hecho para el caso de dos generaciones.
- (3) Cuando se consideran tres generaciones de neutrinos el problema es, en general, *cualitativa y cuantitativamente* diferente (ver Sec. 3.12) y a la vez más complicado.

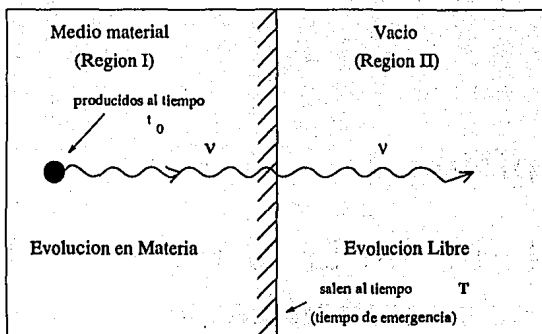


Figura 4.1: *Diagrama general del problema.*

- (4) Al parecer, los análisis basados en la aproximación adiabática parecen ser desfavorecidos por los experimentos.
- (5) La expansión de *Magnus* provee una aproximación unitaria para el operador de evolución $U(t, t_0)$ que, en principio, es independiente del número de generaciones y que permite incorporar efectos no adiabáticos en la evolución de los neutrinos.

En la Fig. (4.1) aparece un diagrama simplificado del problema. Ya que en el interior del Sol solo son producidos neutrinos del electrón, el estado inicial del sistema es

$$|\nu_0\rangle = |\nu_e\rangle,$$

Durante la propagación del haz a través de la materia solar una fracción de los ν_e es transformada en neutrinos de sabores diferentes (ν_μ o ν_τ), de manera tal que, al instante T en que los neutrinos emergen del Sol tendremos

$$|T\rangle = \sum_{\alpha} a_{\alpha} |\nu_{\alpha}\rangle = \sum_i a_i |\nu_i\rangle$$

donde $|\nu_i\rangle$ son los autoestados físicos, y

$$a_i = \sum_{\alpha} U_{\alpha i}^* a_{\alpha}.$$

Para $t > T$ los neutrinos se propagan en el vacío, por lo cual

$$|t\rangle = \sum_i \psi_i(t) |\nu_i\rangle = \sum_{\beta} \psi_{\beta}(t) |\nu_{\beta}\rangle,$$

en donde $\psi_i(t) = a_i e^{-iE_i(t-T)}$ es la amplitud en el vacío para los estados con masa definida y $\psi_{\beta}(t) = \sum_i U_{\beta i} \psi_i(t)$.

La probabilidad de observar un determinado sabor es dado por

$$P_{\beta} = |\psi_{\beta}(t)|^2 = \sum_i |U_{\beta i}|^2 |a_i|^2 + 2 \Re e \sum_{i < j} U_{\beta i}^* U_{\beta j} a_i^* a_j e^{-i\Delta_{ij}(t-T)},$$

con $\beta = e, \mu, \tau$. En la expresión anterior, el segundo término es la parte oscilante que podemos eliminar mediante un promedio sobre la distancia, lo cual nos deja con la *probabilidad promedio*

$$\bar{P}_{\beta} = \sum_i |U_{\beta i}|^2 |a_i|^2.$$

Así vemos que para nuestro problema la cantidad importante a ser calculada es la amplitud a_i de tener un ν_i al tiempo T de emergencia del medio.

4.2 La ecuación de evolución en la base adiabática

En materia la ecuación de evolución de las amplitudes de sabor es

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_e(t) \\ \psi_{\mu}(t) \\ \psi_{\tau}(t) \end{pmatrix} = \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} \psi_e(t) \\ \psi_{\mu}(t) \\ \psi_{\tau}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

con la condición inicial

$$\begin{pmatrix} \psi_c(t_0) \\ \psi_n(t_0) \\ \psi_s(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

En la Ec. (4.1)

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + V(t)Y \quad ; \quad \mathcal{H}_0 = U H_0 U^\dagger \quad (4.3)$$

$$V(t) = \sqrt{2} G_F N_c(t) \quad ; \quad H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

G_F es la constante de Fermi, $N_c(t)$ es la densidad de electrones del medio y H_0 es una matriz real y diagonal, cuyos elementos no nulos están definidos por:

$$\Delta_{21} = E_2 - E_1 \simeq \frac{\delta m_{21}^2}{2E} \quad ; \quad \Delta_{31} = E_3 - E_1 \simeq \frac{\delta m_{31}^2}{2E}$$

La matriz de mezcla U es análoga a la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa para el sector de quarks y nos permite pasar de la *basc de autoestados de sabor* a la *basc de autoestados de masa*.

$$\begin{pmatrix} \psi_c(t) \\ \psi_n(t) \\ \psi_s(t) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Si la partícula producida y detectada es un *neutrino del electrón* (ν_e), es conveniente usar la siguiente parametrización

$$U = O_{23} \Gamma O_{13} O_{12}, \quad (4.7)$$

en donde, O_{23} , O_{13} y O_{12} son las matrices ortogonales de rotación definidas como:

$$O_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad O_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}$$

$$O_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

con $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, ($i, j = 1, 2, 3$). Los ángulos $\theta_{i,j}$, nos determinan las mezclas entre los diferentes estados, es decir, el ángulo θ_{12} , mezcla 1 con 2, el ángulo θ_{13} , mezcla 1 con 3, y finalmente el ángulo θ_{23} , mezcla 2 con 3. La matriz Γ se define como

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

en donde δ es la fase de violación de CP .

Multiplicando las matrices definidas en las Ecs. (4.8) y (4.9), obtendremos de manera explícita la expresión para la matriz de mezcla U ,

$$U = \begin{pmatrix} U_{c1} & U_{c2} & U_{c3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{r1} & U_{r2} & U_{r3} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

en donde:

$$U_{c1} = c_{12} c_{13} ,$$

$$U_{c2} = s_{12} c_{13} ,$$

$$U_{c3} = s_{13} ,$$

$$U_{\mu1} = -s_{12} c_{23} e^{i\delta} - c_{12} s_{13} s_{23} e^{-i\delta} ,$$

$$U_{\mu2} = c_{12} c_{23} e^{i\delta} - s_{12} s_{13} s_{23} e^{-i\delta} ,$$

$$U_{\mu3} = c_{13} s_{23} e^{-i\delta} ,$$

$$U_{r1} = -s_{12} s_{23} e^{i\delta} - c_{12} s_{13} c_{23} e^{-i\delta} ,$$

$$U_{r2} = -c_{12} s_{23} e^{i\delta} - s_{12} s_{13} c_{23} e^{-i\delta} ,$$

$$U_{r3} = c_{13} c_{23} e^{-i\delta} .$$

$\mathcal{H}(t)$ es una matriz hermítica que puede ser diagonalizada a cada tiempo t de acuerdo con

$$U_m^\dagger(t) \mathcal{H}(t) U_m(t) = \mathcal{H}_D(t) \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_3(t) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

en donde $U_m(t)$ es una matriz unitaria y $\mathcal{E}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, son los autoestados instantáneos del Hamiltoniano $\mathcal{H}(t)$, los cuales tienen la propiedad de ser independientes de O_{23} y Γ , es decir, no depende de θ_{23} y δ . Esto se debe a que, en la parametrización escogida para U , las matrices O_{23} y Γ conmutan con Y :

$$O_{23}^T Y O_{23} = Y \quad ; \quad \Gamma^* Y \Gamma = Y$$

La matriz U_m nos permite pasar a la que llamaremos *base de autoestados instantáneos* o *base adiabática*, definida mediante la relación

$$\begin{pmatrix} \psi_e(t) \\ \psi_\mu(t) \\ \psi_r(t) \end{pmatrix} = U_m(t) \begin{pmatrix} \psi_{1m}(t) \\ \psi_{2m}(t) \\ \psi_{3m}(t) \end{pmatrix} = U_m(t) \Psi_m(t). \quad (4.12)$$

Para aquellos casos en que el potencial efectivo se anula en el borde del medio $V(T) = 0$, se tiene

$$U_m(T) = U \quad y \quad \psi_{im}(T) = \psi_i(T). \quad (4.13)$$

Sustituyendo la relación (4.12) en la ecuación de evolución (4.1) obtenemos

$$i U_m(t) \frac{d\Psi_m(t)}{dt} = \left[\mathcal{H}(t) U_m(t) - i \frac{dU_m(t)}{dt} \right] \Psi_m(t). \quad (4.14)$$

Multiplicando (4.14) por $U_m^\dagger(t)$ por la izquierda y usando la condición de unitariedad para $U_m(t)$

$$U_m^\dagger(t) U_m(t) = U_m(t) U_m^\dagger(t) = 1,$$

se tiene

$$i \frac{d\Psi_m(t)}{dt} = \left[\mathcal{H}_D(t) - i U_m^\dagger(t) \frac{dU_m(t)}{dt} \right] \Psi_m(t) \quad (4.15)$$

en donde $\mathcal{H}_D(t)$ es el Hamiltoniano diagonalizado, el cual ha sido definido por la Ec. (4.11).

Por otro lado es necesario determinar cuales son los *valores propios* y *vectores propios* de

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) &= U H_0 U^\dagger + V(t) Y \\ &= O_{23} \Gamma \left\{ O_{13} O_{12} H_0 O_{12}^T O_{13}^T + V(t) Y \right\} \Gamma^* O_{23}^T \end{aligned} \quad (4.16)$$

En la segunda igualdad usamos el hecho de que O_{23} y Γ conmutan con $V(t)$ y Y . El Hamiltoniano de la Ec. (4.16) puede ser reescrito como

$$\mathcal{H}(t) = O_{23} \Gamma \hat{\mathcal{H}}(t) \Gamma^* O_{23}^T, \quad (4.17)$$

con $\hat{\mathcal{H}}(t)$ definido por:

$$\hat{\mathcal{H}}(t) \equiv O_{13} O_{12} H_0 O_{12}^T O_{13}^T + V(t) Y. \quad (4.18)$$

De igual forma, el Hamiltoniano (4.16) puede ser escrito como

$$\mathcal{H}(t) = O_{23} \Gamma O_{13} \hat{\mathcal{H}}(t) O_{13}^T \Gamma^* O_{23}^T, \quad (4.19)$$

con $\hat{\mathcal{H}}(t)$ definido por:

$$\hat{\mathcal{H}}(t) \equiv O_{12} H_0 O_{12}^T + V(t) O_{13}^T Y O_{13}. \quad (4.20)$$

El Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}(t)$, tiene los autovalores positivos y diferentes (ver apéndice C) además de ser real y simétrico

$$\mathcal{H}^*(t) = \mathcal{H}(t) \quad ; \quad \mathcal{H}^T(t) = \mathcal{H}(t)$$

Los Hamiltonianos $\hat{\mathcal{H}}(t)$ y $\hat{\mathcal{H}}(t)$, tendrán gran utilidad cuando estemos interesados en hallar de manera aproximada los autovalores en las resonancias, así como los ángulos de mezcla en el medio (ver apéndice E).

Sea $\hat{O}_m(t)$ tal que

$$\hat{O}_m^T(t) \hat{\mathcal{H}}(t) \hat{O}_m(t) = \mathcal{H}_D(t), \quad (4.21)$$

de donde

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = \dot{O}_m(t) \mathcal{H}_D(t) \hat{O}_m^T(t), \quad (4.22)$$

y gracias a (4.17)

$$\mathcal{H}(t) = O_{23} \Gamma \hat{O}_m(t) \mathcal{H}_D(t) \hat{O}_m^T(t) \Gamma^* O_{23}^T, \quad (4.23)$$

o bien

$$\hat{O}_m^T(t) \Gamma^* O_{23}^T \mathcal{H}(t) O_{23} \Gamma \hat{O}_m(t) = \mathcal{H}_D(t), \quad (4.24)$$

de aquí que

$$U_m(t) = O_{23} \Gamma \hat{O}_m(t). \quad (4.25)$$

De la misma manera, sea $\hat{O}_m(t)$ tal que

$$\hat{O}_m^T(t) \dot{\mathcal{H}}(t) \hat{O}_m(t) = \dot{\mathcal{H}}_D(t), \quad (4.26)$$

entonces

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = \dot{O}_m(t) \dot{\mathcal{H}}_D(t) \dot{O}_m^T(t). \quad (4.27)$$

Por lo anterior concluimos que

$$\mathcal{H}(t) = O_{13} \dot{\mathcal{H}}(t) O_{13}^T,$$

de tal manera que

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = O_{13} \dot{O}_m(t) \dot{\mathcal{H}}_D(t) \dot{O}_m^T(t) O_{13}^T, \quad (4.28)$$

es decir

$$\dot{O}_m^T(t) O_{13}^T \dot{\mathcal{H}}(t) O_{13} \dot{O}_m(t) = \dot{\mathcal{H}}_D(t), \quad (4.29)$$

llegando a

$$\dot{O}_m(t) = O_{13} \hat{O}_m(t), \quad (4.30)$$

y por (4.25)

$$U_m(t) = O_{23} \Gamma O_{13} \hat{O}_m(t). \quad (4.31)$$

Por último, ya que

$$\mathcal{H}(t) = O_{12}^T \hat{\mathcal{H}}(t) O_{12} = O_{12}^T \hat{O}_m(t) \mathcal{H}_D(t) \hat{O}_m^T(t) O_{12},$$

tendremos que

$$\hat{O}_m^T(t) O_{12} \mathcal{H}(t) O_{12}^T \hat{O}_m(t) = \mathcal{H}_D(t). \quad (4.32)$$

De lo cual

$$O_m(t) = O_{12}^T \hat{O}_m(t) \quad (4.33)$$

o bien

$$\hat{O}_m(t) = O_{12} O_m(t),$$

entonces de (4.31)

$$U_m(t) = O_{23} \Gamma O_{13} O_{12} O_m(t),$$

es decir

$$U_m(t) = U O_m(t). \quad (4.34)$$

También es claro por (4.30) que

$$\hat{O}_m(t) = O_{13} O_{12} O_m(t). \quad (4.35)$$

Por la condición (4.13), para el tiempo de emergencia T , $V(T) = 0$, entonces

$$U_m(T) = U,$$

lo que significa que

$$O_m(T) = I, \quad (4.36)$$

$$\hat{O}_m(T) = O_{12}, \quad (4.37)$$

$$\hat{O}_m(T) = O_{13} O_{12}. \quad (4.38)$$

Si suponemos que

$$\hat{O}_m(t) \simeq \hat{O}_{13}(t) \hat{O}_{12}(t), \quad (4.39)$$

y por (4.30)

$$\hat{O}_m(t) \simeq O_{13} \hat{O}_{13}(t) \hat{O}_{12}(t) = \hat{O}_{13}(t) \hat{O}_{12}(t). \quad (4.40)$$

Entonces

$$\hat{O}_{12}(t) = \hat{O}_{12}(t), \quad (4.41)$$

y

$$\hat{O}_{13}(t) = O_{13} \hat{O}_{13}(t). \quad (4.42)$$

Por lo anterior llegamos finalmente a que la matriz de mezcla en el medio tiene como elementos

$$\theta_{23}^m(t) = \theta_{23}, \quad (4.43)$$

$$\delta_m(t) = \delta_1, \quad (4.44)$$

$$\theta_{13}^m(t) = \hat{\theta}_{13}(t) = \hat{\theta}_{13}(t) + \theta_{13}, \quad (4.45)$$

$$\theta_{12}^m(t) = \hat{\theta}_{12}(t) = \hat{\theta}_{12}(t). \quad (4.46)$$

Usando $U_m(t)$ dada en la Ec. (4.31) y teniendo en cuenta que O_{23} y Γ no tienen dependencia temporal derivamos la útil relación

$$U_m^\dagger(t) \frac{dU_m(t)}{dt} = O_m^\dagger(t) \frac{dO_m(t)}{dt}, \quad (4.47)$$

mediante la cual la Ec. (4.15) puede reexpresarse de la siguiente manera:

$$i \frac{d\Psi_m(t)}{dt} = \mathcal{H}_m(t) \Psi_m(t), \quad (4.48)$$

con la condición inicial

$$\begin{pmatrix} \psi'_{1m}(t_0) \\ \psi'_{2m}(t_0) \\ \psi'_{3m}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

en donde hemos definido

$$\mathcal{H}_m(t) \equiv \mathcal{H}_D(t) - i O_m^T(t) \frac{dO_m(t)}{dt}. \quad (4.49)$$

4.3 Determinación del operador de evolución mediante la expansión de Magnus

La matriz de mezcla que relaciona los autoestados de sabor con los autoestados de interacción (*banc adiabática*) en general tendrá la forma

$$O_m(t) = O_{23}(\theta_{23}^m(t)) \Gamma(\delta_m(t)) O_{13}(\theta_{13}^m(t)) O_{12}(\theta_{12}^m(t)) \quad (4.50)$$

donde $\theta_{12}^m(t)$, $\theta_{13}^m(t)$ así como $\theta_{23}^m(t)$ son los ángulos de mezcla en el medio y $\delta_m(t)$ es la fase de violación de CP también en el medio. Calculando de forma explícita las componentes del segundo sumando de la Ec. (4.49) se tiene

$$\begin{aligned} O_m^T(t) \frac{dO_m(t)}{dt} &= O_{12}^T(\theta_{12}^m(t)) \dot{O}_{12}^T(\theta_{12}^m(t)) \\ &+ O_{12}^T(\theta_{12}^m(t)) O_{13}^T(\theta_{13}^m(t)) \dot{O}_{13}(\theta_{13}^m(t)) O_{12}(\theta_{12}^m(t)) \\ &+ O_{12}^T(\theta_{12}^m(t)) O_{13}^T(\theta_{13}^m(t)) \dot{O}_{23}^T(\theta_{23}^m(t)) \\ &\times \dot{O}_{23}(\theta_{23}^m(t)) O_{13}(\theta_{13}^m(t)) O_{12}(\theta_{12}^m(t)). \end{aligned}$$

Derivando con respecto del tiempo y realizando los productos matriciales indicados llegamos a

$$O_m^T(t) \frac{dO_m(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & r(t) & p(t) \\ -r(t) & 0 & q(t) \\ -p(t) & -q(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

la cual es una matriz real y antisimétrica¹; cuyos elementos son

$$r(t) = \dot{\theta}_{12}^m(t) + \dot{\theta}_{23}^m(t) s_{12}^m(t), \quad (4.52)$$

$$p(t) = \dot{\theta}_{13}^m(t) c_{12}^m(t) - \dot{\theta}_{23}^m(t) s_{12}^m(t) c_{13}^m(t), \quad (4.53)$$

y

$$q(t) = \dot{\theta}_{13}^m(t) s_{12}^m(t) + \dot{\theta}_{23}^m(t) c_{12}^m(t) c_{13}^m(t), \quad (4.51)$$

donde $\dot{\theta}_{12}^m(t)$, $\dot{\theta}_{13}^m(t)$ y $\dot{\theta}_{23}^m(t)$ son las derivadas de los ángulos de mezcla en el medio y $s_{ij}^m(t)$ y $c_{ij}^m(t)$ son el seno y el coseno de dichos ángulos.

Usando la Ec. (4.11) y (4.51) en (4.49) nos queda

$$\mathcal{H}_m(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(t) & -i r(t) & -i p(t) \\ i r(t) & \mathcal{E}_2(t) & -i q(t) \\ i p(t) & i q(t) & \mathcal{E}_3(t) \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

Los elementos fuera de la diagonal de esta matriz dependen de la razón de cambio de densidad del medio $\frac{dV}{dt}$; a través de las derivadas de los ángulos de mezcla en el medio; $\dot{\theta}_{12}^m(t)$, $\dot{\theta}_{13}^m(t)$ y $\dot{\theta}_{23}^m(t)$.

Sea $\mathcal{U}(t, t_0)$ el operador de evolución, entonces

$$\Psi_m(t) = \mathcal{U}(t, t_0) \Psi_m(t_0),$$

que sustituido en la Ec. (4.18) nos da

¹La antisimetría de $O_m^T(t) \frac{dO_m(t)}{dt}$ es consecuencia de que $O_m(t)$ es una matriz ortogonal. En efecto derivando $O_m(t) O_m^T(t) = 1$ obtenemos $O_m^T(t) \frac{dO_m(t)}{dt} = -\frac{dO_m^T(t)}{dt} O_m(t) = -\left(O_m^T(t) \frac{dO_m(t)}{dt}\right)^T$.

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = \left\{ \mathcal{H}_D(t) - i O_m^T(t) \frac{dO_m(t)}{dt} \right\} U(t, t_0). \quad (4.56)$$

La parte diagonal de esta ecuación puede ser integrada pasándonos a la representación de interacción [86], a través de la transformación

$$U(t, t_0) = P(t) U_I(t, t_0) P^\dagger(t_0), \quad (4.57)$$

donde $P(t)$ es definida como

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha_3(t)} \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

y las fase $\alpha_k(t)$ son dadas por:

$$\alpha_k(t) = \int_{t_0}^t dt' \mathcal{E}_k(t') \quad (4.59)$$

con $k = 1, 2, 3$. De (4.59) vemos que $P(t_0) = I$.

Insertando la Ec. (4.57) en la ecuación de evolución (4.56), tenemos

$$\begin{aligned} & i \left(P^\dagger(t) \frac{dP(t)}{dt} U_I(t, t_0) + \frac{dU_I(t, t_0)}{dt} \right) \\ &= P^\dagger(t) \left(\mathcal{H}_D(t) - i O_m^T(t) \frac{dO_m(t)}{dt} \right) P(t) U_I(t, t_0). \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$P^\dagger(t) \frac{dP(t)}{dt} = -i \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_3(t) \end{pmatrix} = -i \mathcal{H}_D(t), \quad (4.60)$$

obtenemos la ecuación de evolución para $\mathcal{U}_P(t, t_0)$

$$i \frac{d\mathcal{U}_P(t, t_0)}{dt} = \mathcal{H}_P(t) \mathcal{U}_P(t, t_0), \quad (4.61)$$

en donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_P(t) &= -i P^\dagger(t) O_m^\tau(t) \frac{dO_m(t)}{dt} P(t) \\ &= -i \begin{pmatrix} 0 & h_1(t) & h_2(t) \\ -h_1^*(t) & 0 & h_3(t) \\ -h_2^*(t) & -h_3^*(t) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Hemos definido

$$h_1(t) = r(t) e^{-i\alpha_{21}(t)}, \quad (4.63)$$

$$h_2(t) = p(t) e^{-i\alpha_{31}(t)}, \quad (4.64)$$

$$h_3(t) = q(t) e^{-i\alpha_{32}(t)}, \quad (4.65)$$

con $\alpha_{ij}(t) \equiv \alpha_i(t) - \alpha_j(t)$, ($i, j = 1, 2, 3$).

En general no es posible calcular $\mathcal{U}_P(t, t_0)$ de manera exacta y en este trabajo lo aproximaremos mediante la expansión de Magnus [87] (ver apéndice D). Reteniendo solo el primer término de dicha expansión, quedándonos

$$\mathcal{U}_P(t, t_0) \sim e^{\Omega_1(t, t_0)}, \quad (4.66)$$

donde

$$\Omega_1(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t \mathcal{H}_P(t') dt'. \quad (4.67)$$

Empleando la Ec. (4.62) tendremos

$$\Omega_1(t, t_0) = \begin{pmatrix} 0 & -A(t) & -B(t) \\ A^*(t) & 0 & -C(t) \\ B^*(t) & C^*(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.68)$$

donde

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{t_0}^t dt' h_1(t') = \int_{t_0}^t dt' r(t') e^{-i\alpha_{21}(t')} \\ &= \int_{t_0}^t dt' (\dot{\theta}_{12}^m(t') + \dot{\theta}_{23}^m(t') s_{13}^m(t')) e^{-i\alpha_{21}(t')} \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} B(t) &= \int_{t_0}^t dt' h_2(t') = \int_{t_0}^t dt' p(t') e^{-i\alpha_{31}(t')} \\ &= \int_{t_0}^t dt' (\dot{\theta}_{13}^m(t') c_{12}^m(t') - \dot{\theta}_{23}^m(t') s_{12}^m(t') c_{13}^m(t')) e^{-i\alpha_{31}(t')} \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_{t_0}^t dt' h_3(t') = \int_{t_0}^t dt' q(t') e^{-i\alpha_{32}(t')} \\ &= \int_{t_0}^t dt' (\dot{\theta}_{13}^m(t') s_{12}^m(t') + \dot{\theta}_{23}^m(t') c_{12}^m(t') c_{13}^m(t')) e^{-i\alpha_{32}(t')} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Para poder integrar las ecuaciones anteriores haremos la suposición de que existe jerarquía de masas $m_1^2 \ll m_2^2 \ll m_3^2$, y en este caso $\theta_{23}^m(t) = \text{cte.}$ (ver apéndice E), haciendo que $\dot{\theta}_{23}^m(t) = 0$. También es necesario determinar explícitamente el valor de las derivadas de los ángulos en el medio y para ello tomaremos las ecuaciones del Apéndice E, (E.4) y (E.23) las cuales derivadas con respecto al tiempo dan

$$\dot{\theta}_{12}^m(t) = \frac{\text{sen}^2 2\theta_{12}^m(t) c_{13}^2}{2 \Delta_{21} \text{sen} 2\theta_{12}} \cdot \frac{dV(t)}{dt}, \quad (4.72)$$

$$\dot{\theta}_{13}^m(t) = \frac{\text{sen}^2 2\theta_{13}^m(t)}{2 (\Delta_{31} - \Delta_{21} S_{12}^2) \text{sen} 2\theta_{13}} \cdot \frac{dV(t)}{dt} \quad (4.73)$$

En base a lo anterior, procederemos al cálculo de $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$.

$$A(t) = \int_{t_0}^t dt' \theta_{12}^m(t') e^{-i\alpha_{21}(t')}, \quad (4.71)$$

donde

$$\alpha_{21}(t) = \int_{t_0}^t dt' \mathcal{E}_{21}(t') = \int_{t_0}^t dt' (\mathcal{E}_2(t') - \mathcal{E}_1(t')), \quad (4.75)$$

con $\mathcal{E}_{21}(t)$ los autovalores del Hamiltoniano $\mathcal{H}(t)$ (los cuales se hallaron en el Apéndice E), Ec. (E.2) correspondiente a la *Resonancia Baja*, explícitamente

$$\mathcal{E}_{21}(t) = \sqrt{(V(t) c_{13}^2 - \Delta_{21} c 2\theta_{12})^2 + (\Delta_{21} s 2\theta_{12})^2} \quad (4.76)$$

Sustituyendo las expresiones (E.4) y (4.72) en la Ec. (4.71) tendremos

$$A(t) = \int_{t_0}^t dV \frac{\text{sen}^2 2\theta_{12}^m(t) c_{13}^2}{2 \Delta_{21} \text{sen} 2\theta_{12}} e^{-i\alpha_{21}(t)}$$

$$A(t) = \frac{\Delta_{21} \text{sen} 2\theta_{12} c_{13}^2}{2}$$

$$\times \int_{V(t_0)}^{V(T)} \frac{e^{-i\Phi(V)} dV}{[V(t) c_{13}^2 - \Delta_{21} c 2\theta_{12}]^2 + [\Delta_{21} s 2\theta_{12}]^2}, \quad (4.77)$$

en donde

$$\Phi(V) = \int_{V(t_0)}^{V(T)} \frac{dV}{V} \sqrt{(V c_{13}^2 - \Delta_{21} c 2\theta_{12})^2 + (\Delta_{21} s 2\theta_{12})^2}. \quad (4.78)$$

Para poder integrar la Ec. (4.77) debemos notar que el factor

$$\left\{ [V(t) c_{13}^2 - \Delta_{21} c 2\theta_{12}]^2 + [\Delta_{21} s 2\theta_{12}]^2 \right\}^{-1}$$

exhibe la característica conducta resonante del mecanismo **MSW**.

La resonancia ocurre en $t = t_1$, en donde $V(t) = \Delta_{21} c 2\theta_{12}/c_{13}^2$ y $\text{sen } 2\theta_{12}^m(t) = 1$. La amplitud media de la resonancia es $\delta V = \Delta_{21} s 2\theta_{12}$ y haremos la suposición de que las contribuciones más importante para $A(t)$ vienen de los puntos localizados en el intervalo

$$\left| V(t) c_{13}^2 - \Delta_{21} c 2\theta_{12} \right| \leq \Delta_{21} s 2\theta_{12}.$$

Haciendo el cambio de variable $u = V(t) c_{13}^2$ en las Ecs. (1.77), (1.78) y definiendo las constantes

$$A_1 \equiv \Delta_{21} c 2\theta_{12}, \quad (4.79)$$

y

$$B_1 \equiv \Delta_{21} s 2\theta_{12}, \quad (4.80)$$

quedandonos la integral como:

$$A(t) = \frac{B_1}{2} \int_{u(t_0)}^{u(T)} \frac{e^{-i\Phi(u)} du}{(u - A_1)^2 + B_1^2}, \quad (4.81)$$

con

$$\Phi(u) = \int_{u(t_0)}^u \frac{du}{u} \sqrt{(u - A_1)^2 + B_1^2}. \quad (4.82)$$

Haciendo una expansión lineal de $\Phi(u)$ alrededor del punto de Resonancia Baja ($u \approx A_1$), quedandonos la integral (4.81) como

$$A(t) = \frac{B_1 e^{-i\Phi(A_1)}}{2} \int_{u(t_0)}^{u(T)} \frac{e^{-i\Phi'(A_1)(u-A_1)} du}{(u - A_1)^2 + B_1^2},$$

en donde

$$\Phi'(A_1) = \left. \frac{d\Phi(u)}{du} \right|_{u=A_1} = \left. \frac{\sqrt{(u - A_1)^2 + B_1^2}}{u} \right|_{u=A_1}$$

con

$$\dot{u}(t_1) = A_1 \left. \frac{1}{u(t)} \cdot \frac{d u(t)}{dt} \right|_{t=t_1} = A_1 \left. \frac{1}{V(t)} \cdot \frac{d V(t)}{dt} \right|_{t=t_1} \quad (4.83)$$

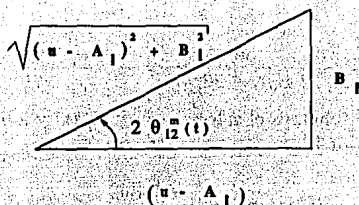


Figura 4.2: Ángulo de mezcla efectivo en materia para la Resonancia Baja, ver Sec. 3.5, pp. 78 y Apéndice E.

entonces $\Phi'(A_i)$ toma la forma de:

$$\Phi'(A_i) = \frac{B_i}{A_i} \lambda_i, \quad (4.84)$$

con λ_i definido por

$$\lambda_i \equiv \frac{1}{\left| \frac{1}{V(t)} \cdot \frac{dV(t)}{dt} \right|_{t=A_i}} \quad (4.85)$$

de tal forma que $\mathcal{A}(t)$ se escribirá como

$$\mathcal{A}(t) = \frac{B_i \cdot e^{-i\Phi(A_i)}}{2} \int_{u(t_0)}^{u(T)} \frac{e^{-i\frac{B_i}{A_i}\lambda_i(u-A_i)} du}{(u-A_i)^2 + B_i^2},$$

de la Fig. (4.2) obtenemos que

$$\cot 2\theta_{12}^m(t) = \frac{u-A_i}{B_i}, \quad (4.86)$$

de tal manera que si en la expresión de $\mathcal{A}(t)$ multiplicamos y dividimos por B_i en la exponencial, tendremos

$$\mathcal{A}(t) = \frac{B_i \cdot e^{-i\Phi(A_i)}}{2} \int_{u(t_0)}^{u(T)} \frac{e^{-i\frac{B_i^2}{A_i}\lambda_i \cot 2\theta_{12}^m(t)} du}{(u-A_i)^2 + B_i^2}.$$

Por otro lado, diferenciando la Ec. (4.86) tendremos

$$d\theta_{12}^m(t) = - \frac{du}{2 B_1 \csc^2 2\theta_{12}^m(t)} = - \frac{\sec^2 2\theta_{12}^m(t) du}{2 B_1}$$

de la Fig. (4.2) obtenemos el valor de $\sec^2 2\theta_{12}^m(t)$ y lo incorporamos a la expresión anterior llegado

$$d\theta_{12}^m(t) = \frac{-B_1 du}{2 [(u - A_1)^2 + B_1^2]} \quad (4.87)$$

La expresión (4.87) nos permite que en la integral para $A(t)$ cambiar de variable de u a $\theta_{12}^m(t)$, quedándonos dicha integral como

$$A(t) = - e^{-i \Phi(A_1)} \int_{\theta_{12}^m(t_0)}^{\theta_{12}^m(T)} d\theta_{12}^m e^{-i \kappa_1 \cot 2\theta_{12}^m}, \quad (4.88)$$

con $\theta_{12}^m(t_0)$, el ángulo de mezcla evaluado en el punto de producción, $\theta_{12}^m(T)$, el ángulo de mezcla en el punto de emergencia del medio y en donde hemos definido el *parámetro adiabático para la Resonancia Baja* como

$$\kappa_1 \equiv \frac{B_1^2}{A_1} \lambda_1, \quad (4.89)$$

y cuyo valor es en términos de los parámetros fundamentales

$$\kappa_1 = \Delta_{21} \tan 2\theta_{12} \sin 2\theta_{12} \left/ \left[\frac{1}{V(t)} \cdot \frac{dV(t)}{dt} \right]_{t=t_1} \right. \quad (4.90)$$

Ahora calcularemos la integral (4.88), para ello la integral con la que nos quedamos es similar a aquellas consideradas recientemente por Chodos y cols. [88] en un contexto diferente. Analizando el integrando llegamos

$$\begin{aligned} e^{-i \kappa_1 \cot 2\theta_{12}^m} &= \exp \left\{ -i \kappa_1 \left[\frac{e^{2i\theta_{12}^m} + e^{-2i\theta_{12}^m}}{e^{2i\theta_{12}^m} - e^{-2i\theta_{12}^m}} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \kappa_1 \left[\frac{e^{-4i\theta_{12}^m} + 1}{e^{-4i\theta_{12}^m} - 1} \right] \right\}, \end{aligned}$$

haciendo $z = e^{-4i\theta_{12}^m}$ y $\kappa_1 = \xi/2$ tendremos

$$\exp \left\{ \frac{\xi}{2} \left[\frac{z+1}{z-1} \right] \right\} = e^{-\frac{\xi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n^{(-1)}(\xi) z^n,$$

en donde $\mathcal{L}_n^{(-1)}(\xi)$ son los *Polinómios Generalizados de Laguerre*, de tal manera que el integrando quedará como

$$e^{-i \kappa_1 \cot 2\theta_{12}^m} = e^{-\kappa_1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n^{(-1)}(2 \kappa_1) e^{-i n \theta_{12}^m}, \quad (4.91)$$

quedandonos a primer orden en los polinómios generalizados de Laguerre $\mathcal{L}_0^{(-1)}(2 \kappa_1) = 1$, finalmente la integral de $\mathcal{A}(t)$ quedará como

$$\mathcal{A}(t) = e^{-\kappa_1} e^{-i \Phi(\Lambda_1)} \int_{\theta_{12}^m(T)}^{\theta_{12}^m(t_0)} d\theta_{12}^m,$$

de lo cual,

$$\mathcal{A}(t) = [\theta_{12}^m(t_0) - \theta_{12}^m(T)] e^{-\kappa_1} e^{-i \Phi(\Lambda_1)}. \quad (4.92)$$

Calcularemos ahora $\mathcal{B}(t)$ y para ello tendremos

$$\mathcal{B}(t) = \int_{t_0}^t dt' c_{12}^m(t') \theta_{13}^m(t') e^{-i \alpha_{31}(t')} \quad (4.93)$$

donde

$$\alpha_{31}(t) = \int_{t_0}^t dt' \mathcal{E}_{31}(t') = \int_{t_0}^t dt' (\mathcal{E}_3(t') - \mathcal{E}_1(t')), \quad (4.94)$$

con $\mathcal{E}_{31}(t)$ los autovalores del Hamiltoniano $\mathcal{H}(t)$ (que se obtuvieron en el Apéndice E), Ecs. (E.21) y (E.22) correspondiente a la *Resonancia Alta*.

Una de las hipótesis más importantes que hemos introducido desde el cálculo de la integral anterior es el hecho de que las resonancias están bien separadas, de tal manera que nuestro análisis aproximado es justamente alrededor de cada una de las resonancias. Notemos que la integral que define a $\mathcal{B}(t)$ tiene un término en el integrando que es $c_{12}^m(t)$, dicho término tomará el valor de *cero*, pues el ángulo $\theta_{21}^m(t)$ lo estamos evaluando en la Resonancia Alta y allí toma el valor aproximado de $\pi/2$ (ver la Ec. (E.34) del apéndice E), de todo esto podemos concluir que el valor de $\mathcal{B}(t)$ será de

$$B(t) = 0 \quad (1.95)$$

Ahora debemos encontrar el valor de $C(t)$,

$$C(t) = \int_{t_0}^t dt' s_{12}^m(t') \dot{\theta}_{13}^m(t') e^{-i\alpha_{32}(t')}, \quad (1.96)$$

donde

$$\alpha_{32}(t) = \int_{t_0}^t dt' \mathcal{E}_{32}(t') = \int_{t_0}^t dt' (\mathcal{E}_3(t') - \mathcal{E}_2(t')), \quad (1.97)$$

con $\mathcal{E}_{32}(t)$ los autovalores del Hamiltoniano $\mathcal{H}(t)$ que se obtuvieron en la Ec. (E.21) y (E.22) correspondiente a la *Resonancia Alla*.

Aplicando la misma hipótesis que usamos para calcular $B(t)$, el valor de $s_{12}^m(t) = 1$, pues estamos en la *Resonancia Alla* y aquí $\theta_{12}^m(V_h(t)) = \pi/2$, (ver la Ec. (E.31) del apéndice E), quedándonos

$$C(t) = \int_{t_0}^t dt' \dot{\theta}_{13}^m(t') e^{-i\alpha_{32}(t')}, \quad (1.98)$$

que es análoga a la que calculamos en $A(t)$, pero evaluada en la otra resonancia.

Primera mente obtendremos la diferencia de los autovalores, quedándonos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{32}(t) = & \left\{ \left[V(t) - c 2\theta_{13} (\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) \right]^2 \right. \\ & \left. + \left[(\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) s 2\theta_{13} \right]^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Sustituyendo las expresiones (E.23) y (4.73) en la Ec. (1.98) tendremos

$$\begin{aligned} C(t) = & \int_{t_0}^t dt' \frac{\text{sen}^2 2\theta_{13}^m(t')}{2(\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) \text{sen} 2\theta_{13}^m(t')} e^{-i\alpha_{32}} \\ C(t) = & \frac{(\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) \text{sen} 2\theta_{13}}{2} \end{aligned}$$

$$\times \int_{V(t_0)}^{V(t)} \frac{e^{-i\Phi(V)} dV}{\left[V(t) - c 2\theta_{13} (\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) \right]^2 + \left[(\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) s 2\theta_{13} \right]^2}, \quad (1.100)$$

en donde

$$\Phi(V) =$$

$$\int_{V(t_0)}^{V(T)} \frac{dV}{\dot{V}} \sqrt{\left[V(t) - c 2\theta_{13} (\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) \right]^2 + \left[(\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) s 2\theta_{13} \right]^2}. \quad (1.101)$$

Para poder integrar la Ec. (1.100) debemos notar que el factor

$$\left\{ \left[V(t) - c 2\theta_{13} (\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) \right]^2 + \left[(\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) s 2\theta_{13} \right]^2 \right\}^{-1}$$

exhibe la típica conducta resonante del mecanismo MSW.

La resonancia ocurre en $t = t_h$, en donde $V(t) = c 2\theta_{13} (\Delta_{31} - \Delta_{12} s_{12}^2)$ y $\sin 2\theta_{13}^m(t) = 1$. La amplitud de la resonancia es $\delta V = (\Delta_{31} - \Delta_{12} s_{12}^2) s 2\theta_{13}$ y haremos como antes la suposición de que las contribuciones más importantes para $\mathcal{C}(t)$ vienen de los puntos localizados en el intervalo

$$\left| V(t) - c 2\theta_{13} (\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) \right| \leq (\Delta_{31} - \Delta_{12} s_{12}^2) s 2\theta_{13}.$$

Definiendo ahora las constantes

$$A_h \equiv c 2\theta_{13} (\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2), \quad (1.102)$$

y

$$B_h \equiv (\Delta_{31} - \Delta_{12} s_{12}^2) s 2\theta_{13}, \quad (1.103)$$

quedandonos la integral como

$$C(t) = \frac{B_h}{2} \int_{V(t_0)}^{V(T)} \frac{e^{-i\Phi(V)} dV}{(V - A_h)^2 + B_h^2}, \quad (4.104)$$

con

$$\Phi(V) = \int_{V(t_0)}^V \frac{dv}{v} \sqrt{(v - A_h)^2 + B_h^2}. \quad (4.105)$$

Haciendo una expansión lineal de $\Phi(V)$ alrededor del punto de *Resonancia Alta* ($V \approx A_h$), quedándonos la integral (4.108) como

$$C(t) = \frac{B_h e^{-i\Phi(A_h)}}{2} \int_{V(t_0)}^{V(T)} \frac{e^{-i\Phi'(A_h)(v - A_h)}}{(v - A_h)^2 + B_h^2} dv,$$

en donde

$$\Phi'(A_h) = \left. \frac{d\Phi(v)}{dv} \right|_{v=A_h} = \left. \frac{\sqrt{(v - A_h)^2 + B_h^2}}{v} \right|_{v=A_h},$$

con

$$\dot{v}(t_h) = A_h \left. \frac{1}{v(t)} \cdot \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=t_h}, \quad (4.106)$$

entonces $\Phi'(A_h)$ toma la forma de:

$$\Phi'(A_h) = \frac{B_h}{v A_h} \lambda_h, \quad (4.107)$$

con λ_h definido por

$$\lambda_h \equiv \left. \frac{1}{\left| \frac{1}{v(t)} \cdot \frac{dv(t)}{dt} \right|} \right|_{t=t_h}. \quad (4.108)$$

de tal forma que $C(t)$ se escribirá como

$$C(t) = \frac{B_h e^{-i\Phi(A_h)}}{2} \int_{V(t_0)}^{V(T)} \frac{e^{-i \frac{B_h}{A_h} \lambda_h (v - A_h)} dv}{(v - A_h)^2 + B_h^2},$$

de la Fig. (1.3) obtenemos que

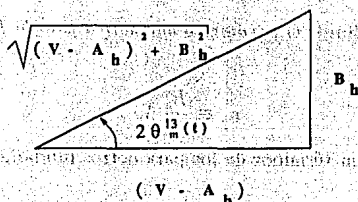


Figura 4.3: Ángulo de mezcla efectivo en materia para la Resonancia Alta, ver Sec. 3.5, pp. 78 y el Apéndice E.

$$\cot 2\theta_{13}^m(t) = \frac{V - A_h}{B_h} \quad (4.109)$$

de tal manera que si en la expresión de $C(t)$ multiplicamos y dividimos por B_h en la exponencial, tendremos

$$C(t) = \frac{B_h}{2} e^{-i\Phi(A_h)} \int_{\theta_{13}^m(t_0)}^{\theta_{13}^m(T)} e^{-i \frac{B_h^2}{A_h} \cot 2\theta_{13}^m(t)} \frac{d\theta_{13}^m(t)}{\sqrt{(V - A_h)^2 + B_h^2}}$$

Por otro lado, diferenciando la Ec. (4.109) tendremos

$$d\theta_{13}^m(t) = - \frac{dv}{2 B_h \csc^2 2\theta_{13}^m(t)} = - \frac{\csc^2 2\theta_{13}^m(t) dv}{2 B_h}$$

de la Fig. (4.3) obtenemos el valor de $\csc^2 2\theta_{13}^m(t)$ y lo incorporamos a la expresión anterior llegado

$$d\theta_{13}^m(t) = - \frac{dv}{2 \sqrt{(V - A_h)^2 + B_h^2}} \quad (4.110)$$

La expresión (4.110) nos permite que, en la integral para $C(t)$, cambiar de variable de V a $\theta_{13}^m(t)$, quedándonos dicha integral como

$$C(t) = - e^{-i\Phi(A_h)} \int_{\theta_{13}^m(t_0)}^{\theta_{13}^m(T)} d\theta_{13}^m e^{-i A_h \cot 2\theta_{13}^m} \quad (4.111)$$

con $\theta_{13}^m(t_0)$ el ángulo de mezcla evaluado en el punto de producción, $\theta_{13}^m(T)$ el ángulo de mezcla en el punto de emergencia del medio y en

donde hemos definido el *parámetro adiabático para la Resonancia Alta* como

$$\kappa_h \equiv \frac{B_h^2}{A_h} \lambda_h, \quad (4.112)$$

y cuyo valor es en términos de los parámetros fundamentales

$$\kappa_h = (\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) \tan 2\theta_{13} \operatorname{sen} 2\theta_{13} \left/ \left[\frac{1}{v(t)} \cdot \frac{dv(t)}{dt} \right] \right|_{t=t_h} \quad (4.113)$$

Ahora calcularemos la integral (4.111), para ello notemos que la integral resultante es análoga a la que calculamos en $\mathcal{A}(t)$, haciendo un análisis semejante del integrando

$$\begin{aligned} e^{-i\kappa_h \cot 2\theta_{13}^m} &= \exp \left\{ -i\kappa_h \left[i \frac{e^{2i\theta_{13}^m} + e^{-2i\theta_{13}^m}}{e^{2i\theta_{13}^m} - e^{-2i\theta_{13}^m}} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \kappa_h \left[\frac{e^{4i\theta_{13}^m} + 1}{e^{4i\theta_{13}^m} - 1} \right] \right\}, \end{aligned}$$

haciendo $z = e^{4i\theta_{13}^m}$ y $\kappa_h = \eta/2$ tendremos

$$\exp \left\{ \frac{\eta}{2} \left[\frac{z+1}{z-1} \right] \right\} = e^{-\frac{\eta}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n^{(-1)}(\eta) z^n,$$

en donde $\mathcal{L}_n^{(-1)}(\eta)$ son los *Polinómios Generalizados de Laguerre*, de tal manera que el integrando quedará como

$$e^{-i\kappa_h \cot 2\theta_{13}^m} = e^{-\kappa_h} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n^{(-1)}(2\kappa_h) e^{4in\theta_{13}^m}, \quad (4.114)$$

quedandonos a primer orden en los polinómios generalizados de Laguerre $\mathcal{L}_0^{(-1)}(2\kappa_h) = 1$, finalmente la integral de $\mathcal{C}(t)$ quedará como

$$\mathcal{C}(t) = e^{-\kappa_h} e^{-i\Phi(A_h)} \int_{\theta_{13}^m(T)}^{\theta_{13}^m(t_0)} d\theta_{13}^m,$$

de lo cual,

$$\mathcal{C}(t) = [\theta_{13}^m(t_0) - \theta_{13}^m(T)] e^{-\kappa_h} e^{-i\Phi(A_h)} \quad (4.115)$$

Con la información anterior podemos construir el primer término en la expansión de Magnus Ec. (4.68). Para ello recordemos que

$$e^{\Omega_1(t, t_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Omega_1(t, t_0))^n}{n!} = I + \Omega_1(t, t_0) + \frac{\Omega_1^2(t, t_0)}{2!} + \frac{\Omega_1^3(t, t_0)}{3!} + \dots,$$

el primer sumando es la matriz unitaria, el segundo sumando viene dado por la Ec. (4.68) (tomando en cuenta que $B(t) = 0$), el tercer sumando por

$$\Omega_1^2(t, t_0) = \begin{pmatrix} -|\mathcal{A}(t)|^2 & 0 & \mathcal{A}(t) \mathcal{C}(t) \\ 0 & -\{|\mathcal{A}(t)|^2 + |\mathcal{C}(t)|^2\} & 0 \\ \mathcal{A}^*(t) \mathcal{C}^*(t) & 0 & -|\mathcal{C}(t)|^2 \end{pmatrix}, \quad (4.116)$$

definamos por simplicidad que

$$\Pi^2(t) \equiv |\mathcal{A}(t)|^2 + |\mathcal{C}(t)|^2, \quad (4.117)$$

de tal manera que

$$\Omega_1^2(t, t_0) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}(t) \Pi^2(t) & 0 \\ -\mathcal{A}^*(t) \Pi^2(t) & 0 & \mathcal{C}(t) \Pi^2(t) \\ 0 & -\mathcal{C}^*(t) \Pi^2(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.118)$$

$$\Omega_1^3(t, t_0) = \begin{pmatrix} |\mathcal{A}(t)|^2 \Pi^2(t) & 0 & -\mathcal{A}(t) \mathcal{C}(t) \Pi^2(t) \\ 0 & \Pi^4(t) & 0 \\ -\mathcal{A}^*(t) \mathcal{C}^*(t) \Pi^2(t) & 0 & |\mathcal{C}(t)|^2 \Pi^2(t) \end{pmatrix}, \quad (4.119)$$

$$\Omega_1^3(t, t_0) = \begin{pmatrix} 0 & -A(t) \Pi^1(t) & 0 \\ A^*(t) \Pi^1(t) & 0 & -C(t) \Pi^1(t) \\ 0 & C^*(t) \Pi^1(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.120)$$

etcétera.

Con base a las relaciones (4.116) hasta (4.120) obtenemos la siguiente relación de recurrencia

$$\Omega_1^3(t, t_0) = -\Pi^2(t) \Omega_1(t, t_0),$$

$$\Omega_1^4(t, t_0) = -\Pi^3(t) \Omega_1^2(t, t_0),$$

$$\Omega_1^5(t, t_0) = \Pi^4(t) \Omega_1(t, t_0),$$

y en base a esto, podemos hallar los siguientes términos de la serie infinita

$$\Omega_1^6(t, t_0) = \Pi^5(t) \Omega_1^2(t, t_0),$$

$$\Omega_1^7(t, t_0) = -\Pi^6(t) \Omega_1(t, t_0),$$

$$\Omega_1^8(t, t_0) = -\Pi^7(t) \Omega_1^2(t, t_0),$$

etcétera.

Es posible obtener la $e^{\Omega_1(t, t_0)}$ en términos de la matriz identidad I , $\Omega_1(t, t_0)$, y $\Omega_1^2(t, t_0)$ gracias a la relación de recurrencia que guardan las potencias pares e impares

$$e^{\Omega_1(t, t_0)} = I + \Omega_1(t, t_0) + \frac{\Omega_1^2(t, t_0)}{2!} - \frac{\Pi^2(t) \Omega_1(t, t_0)}{3!} + \frac{\Pi^2(t) \Omega_1^2(t, t_0)}{4!} \\ + \frac{\Pi^4(t) \Omega_1(t, t_0)}{5!} + \frac{\Pi^4(t) \Omega_1^2(t, t_0)}{6!} - \frac{\Pi^6(t) \Omega_1(t, t_0)}{7!} - \dots,$$

$$\begin{aligned}
 &= I + \Omega_1(t, t_0) \left\{ 1 - \frac{\Pi^2(t)}{3!} + \frac{\Pi^4(t)}{5!} - \frac{\Pi^6(t)}{7!} + \dots \right\} \\
 &+ \Omega_1^2(t, t_0) \left\{ \frac{1}{2!} - \frac{\Pi^2(t)}{4!} + \frac{\Pi^4(t)}{6!} - \frac{\Pi^6(t)}{8!} + \dots \right\},
 \end{aligned}$$

la parte impar es

$$\frac{\Omega_1(t, t_0)}{\Pi(t)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Pi^{2n+1}(t)}{(2n+1)!} \right\} = \frac{\Omega_1(t, t_0)}{\Pi(t)} \operatorname{sen} \Pi(t),$$

la parte par es

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\Omega_1(t, t_0)}{\Pi(t)} \right)^2 - \left(\frac{\Omega_1(t, t_0)}{\Pi(t)} \right)^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Pi^{2n}(t)}{2n!} \right\} \\
 &= \left(\frac{\Omega_1(t, t_0)}{\Pi(t)} \right)^2 \{ 1 - \cos \Pi(t) \}.
 \end{aligned}$$

Entonces el operador de evolución $\mathcal{U}_r(t, t_0)$ quedará como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_r(t, t_0) &= I + \left(\frac{\Omega_1(t, t_0)}{\Pi(t)} \right) \operatorname{sen} \Pi(t) \\
 &+ \{ 1 - \cos \Pi(t) \} \left(\frac{\Omega_1(t, t_0)}{\Pi(t)} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{4.121}$$

y que en forma matricial es

$$\mathcal{U}_r(t, t_0) = \begin{pmatrix} \Lambda_1(t) & -\Lambda_2(t) & \Lambda_3(t) \\ \Lambda_2^*(t) & \Lambda_1(t) & -\Lambda_3(t) \\ \Lambda_3^*(t) & \Lambda_2^*(t) & \Lambda_1(t) \end{pmatrix}, \tag{4.122}$$

donde

$$\Lambda_1(t) = \frac{|C(t)|^2 + |A(t)|^2 \cos \Pi(t)}{\Pi^2(t)}, \tag{4.123}$$

$$\Lambda_2(t) = \frac{\mathcal{A}(t) \operatorname{sen} \Pi(t)}{\Pi(t)}, \quad (4.124)$$

$$\Lambda_3(t) = \frac{\mathcal{A}(t) \mathcal{C}(t) (1 - \cos \Pi(t))}{\Pi^2(t)}, \quad (4.125)$$

$$\Lambda_4(t) = \cos \Pi(t), \quad (4.126)$$

$$\Lambda_5(t) = \frac{\mathcal{C}(t) \operatorname{sen} \Pi(t)}{\Pi(t)}, \quad (4.127)$$

$$\Lambda_6(t) = \frac{|\mathcal{A}(t)|^2 + |\mathcal{C}(t)|^2 \cos \Pi(t)}{\Pi^2(t)}, \quad (4.128)$$

y se puede probar que $\mathcal{U}_p(t, t_0) \mathcal{U}_p^\dagger(t, t_0) = \mathcal{U}_p^\dagger(t, t_0) \mathcal{U}_p(t, t_0) = I$.

4.4 La probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón $\langle \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle$

Ahora con la información de la Sección anterior calcularemos finalmente la probabilidad de supervivencia del ν_e .

$$\bar{\mathcal{P}}(\nu_e) = \sum_{i=1}^3 |U_{ei}(t)|^2 |a_i(t)|^2,$$

donde

$$\sum_{i=1}^3 |a_i(t)|^2 = 1 \quad y \quad \sum_{i=1}^3 |U_{ei}(t)|^2 = 1,$$

con la condición de que $|a_i(T)|^2 = |\psi_i(T)|^2$, en el borde del medio.

Sabemos por las Ecs.(4.6) y (4.12) que

$$\begin{pmatrix} \psi_e(t) \\ \psi_\mu(t) \\ \psi_\tau(t) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \end{pmatrix} = U_m(t) \begin{pmatrix} \psi_{1m}(t) \\ \psi_{2m}(t) \\ \psi_{3m}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.129)$$

pero en el borde del Sol $N_e(T) = 0$ y entonces $V(T) = 0$, por tanto $U_m(T) = U$. De tal manera

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \end{pmatrix} = U^\dagger U_m(t) \begin{pmatrix} \psi_{1m}(t) \\ \psi_{2m}(t) \\ \psi_{3m}(t) \end{pmatrix}$$

y en el borde del Sol

$$\begin{pmatrix} \psi_1(T) \\ \psi_2(T) \\ \psi_3(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{1m}(T) \\ \psi_{2m}(T) \\ \psi_{3m}(T) \end{pmatrix}, \quad (4.130)$$

gracias a la Ec. (4.66), tendremos la relación de los estados en el medio al tiempo de emergencia T , con los estados en el medio al instante de producción t_0

$$\begin{pmatrix} \psi_{1m}(T) \\ \psi_{2m}(T) \\ \psi_{3m}(T) \end{pmatrix} = \mathcal{U}_F(T; t_0) \begin{pmatrix} \psi_{1m}(t_0) \\ \psi_{2m}(t_0) \\ \psi_{3m}(t_0) \end{pmatrix}, \quad (4.131)$$

si en el estado inicial $|t_0\rangle$ se producen neutrinos $|\nu_e\rangle$ las condiciones iniciales serán Ec. (4.2)

$$\psi_e(t_0) = 1; \quad \psi_\mu(t_0) = 0; \quad \psi_\tau(t_0) = 0.$$

Como

$$\begin{pmatrix} \psi_c(t) \\ \psi_\mu(t) \\ \psi_r(t) \end{pmatrix} = U_m(t) \begin{pmatrix} \psi_{1m}(t) \\ \psi_{2m}(t) \\ \psi_{3m}(t) \end{pmatrix},$$

por la Ec. (4.12), entonces

$$\begin{pmatrix} \psi_{1m}(t) \\ \psi_{2m}(t) \\ \psi_{3m}(t) \end{pmatrix} = U_m^\dagger(t) \begin{pmatrix} \psi_c(t) \\ \psi_\mu(t) \\ \psi_r(t) \end{pmatrix},$$

evaluando en el punto de producción t_0 y aplicando las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} \psi_{1m}(t_0) \\ \psi_{2m}(t_0) \\ \psi_{3m}(t_0) \end{pmatrix} = U_m^\dagger(t_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $U_m(t)$ está dado aproximadamente por:

$$U_m(t) = O_{13}(\theta_{13}^m(t)) O_{12}(\theta_{12}^m(t)),$$

y que en forma matricial

$$U_m(t) = \begin{pmatrix} U_{c1}^m(t) & U_{c2}^m(t) & U_{c3}^m(t) \\ U_{\mu 1}^m(t) & U_{\mu 2}^m(t) & U_{\mu 3}^m(t) \\ U_{r 1}^m(t) & U_{r 2}^m(t) & U_{r 3}^m(t) \end{pmatrix}. \quad (4.132)$$

donde

$$U_{c1}^m(t) = c_{13}^m(t) c_{12}^m(t), \quad (4.133)$$

$$U_{c2}^m(t) = c_{13}^m(t) s_{12}^m(t), \quad (4.134)$$

$$U_{e3}^m(t) = s_{13}^m(t), \quad (4.135)$$

$$U_{\mu 1}^m(t) = -s_{12}^m(t), \quad (4.136)$$

$$U_{\mu 2}^m(t) = c_{12}^m(t), \quad (4.137)$$

$$U_{\mu 3}^m(t) = 0, \quad (4.138)$$

$$U_{r1}^m(t) = -s_{13}^m(t) c_{12}^m(t), \quad (4.139)$$

$$U_{r2}^m(t) = -s_{13}^m(t) s_{12}^m(t), \quad (4.140)$$

$$U_{r3}^m(t) = c_{13}^m(t). \quad (4.141)$$

Llegando a

$$\begin{pmatrix} \psi_{1m}(t_0) \\ \psi_{2m}(t_0) \\ \psi_{3m}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1}^m(t_0) \\ U_{e2}^m(t_0) \\ U_{e3}^m(t_0) \end{pmatrix},$$

en donde

$$U_{e1}^m(t_0) = c_{12}^m(t_0) c_{13}^m(t_0), \quad (4.142)$$

$$U_{e2}^m(t_0) = s_{12}^m(t_0) c_{13}^m(t_0), \quad (4.143)$$

y

$$U_{e3}^m(t_0) = s_{13}^m(t_0), \quad (4.144)$$

poniendo este resultado en la Ec. (4.131) tenemos

$$\begin{pmatrix} \psi_{1m}(T) \\ \psi_{2m}(T) \\ \psi_{3m}(T) \end{pmatrix} = U_P(T, t_0) \begin{pmatrix} U_{e1}^m(t_0) \\ U_{e2}^m(t_0) \\ U_{e3}^m(t_0) \end{pmatrix}, \quad (4.145)$$

de tal manera que

$$\begin{pmatrix} \psi_e(T) \\ \psi_\mu(T) \\ \psi_r(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \end{pmatrix} U_P(T, t_0) \begin{pmatrix} U_{e1}^m(t_0) \\ U_{e2}^m(t_0) \\ U_{e3}^m(t_0) \end{pmatrix},$$

elevando al cuadrado la probabilidad quedará como

$$\langle \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle = \begin{pmatrix} |U_{e1}|^2 & |U_{e2}|^2 & |U_{e3}|^2 \end{pmatrix} \mathcal{W}(T, t_0) \begin{pmatrix} |U_{e1}^m(t_0)|^2 \\ |U_{e2}^m(t_0)|^2 \\ |U_{e3}^m(t_0)|^2 \end{pmatrix},$$

en donde $\mathcal{W}(T, t_0)$ es el cuadrado de la matriz definida en la Ec. (4.122) despreciando los términos cruzados tendremos que la probabilidad es

$$\langle \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle = |U_{e1}|^2 \mathcal{P}_\alpha(t) + |U_{e2}|^2 \mathcal{P}_\beta(t) + |U_{e3}|^2 \mathcal{P}_\gamma(t), \quad (4.146)$$

donde

$$\mathcal{P}_\alpha(t) = |\Lambda_1(t)|^2 |U_{e1}^m(t_0)|^2 + |\Lambda_2(t)|^2 |U_{e2}^m(t_0)|^2 + |\Lambda_3(t)|^2 |U_{e3}^m(t_0)|^2,$$

$$\mathcal{P}_\beta(t) = |\Lambda_2(t)|^2 |U_{e1}^m(t_0)|^2 + |\Lambda_1(t)|^2 |U_{e2}^m(t_0)|^2 + |\Lambda_3(t)|^2 |U_{e3}^m(t_0)|^2,$$

$$\mathcal{P}_\gamma(t) = |\Lambda_\alpha(t)|^2 |U_{e1}^m(t_0)|^2 + |\Lambda_\beta(t)|^2 |U_{e2}^m(t_0)|^2 + |\Lambda_\gamma(t)|^2 |U_{e3}^m(t_0)|^2,$$

y que en forma desglosada toman los valores de

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha(t) = \frac{1}{\Pi^4(t)} & \left\{ \left(|C(t)|^2 + |A(t)|^2 \cos \Pi(t) \right)^2 (c_{12}^m(t_0))^2 (c_{13}^m(t_0))^2 \right. \\ & + |A(t)|^2 \left(|A(t)|^2 + |C(t)|^2 \right) \operatorname{sen}^2 \Pi(t) (s_{12}^m(t_0))^2 (c_{13}^m(t_0))^2 \\ & \left. + |A(t)|^2 |C(t)|^2 \left(1 - \cos \Pi(t) \right)^2 (s_{13}^m(t_0))^2 \right\} \quad (4.147) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\beta(t) = \frac{1}{\Pi^2(t)} & \left\{ |A(t)|^2 \operatorname{sen}^2 \Pi(t) (c_{12}^m(t_0))^2 (c_{13}^m(t_0))^2 \right. \\ & + \left(|A(t)|^2 + |C(t)|^2 \right) \cos^2 \Pi(t) (s_{12}^m(t_0))^2 (c_{13}^m(t_0))^2 \\ & \left. + |C(t)|^2 \operatorname{sen}^2 \Pi(t) (s_{13}^m(t_0))^2 \right\} \quad (4.148) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\gamma(t) = \frac{1}{\Pi^4(t)} & \left\{ |A(t)|^2 |C(t)|^2 \left(1 - \cos \Pi(t) \right)^2 (c_{12}^m(t_0))^2 (c_{13}^m(t_0))^2 \right. \\ & + |C(t)|^2 \left(|A(t)|^2 + |C(t)|^2 \right) \operatorname{sen}^2 \Pi(t) (s_{12}^m(t_0))^2 (c_{13}^m(t_0))^2 \\ & \left. + \left(|A(t)|^2 + |C(t)|^2 \cos \Pi(t) \right)^2 (s_{13}^m(t_0))^2 \right\} \quad (4.149) \end{aligned}$$

con la propiedad de que

$$\mathcal{P}_\alpha(t) + \mathcal{P}_\beta(t) + \mathcal{P}_\gamma(t) = 1. \quad (4.150)$$

Por otro lado

$$|U_{e1}|^2 = c_{12}^2 c_{13}^2 ; \quad |U_{e2}|^2 = s_{12}^2 c_{13}^2 ; \quad |U_{e3}|^2 = s_{13}^2 . \quad (4.151)$$

Tomando las Ecs. (4.150) y (4.151) y poniéndolas en la Ec. (4.146), llegaremos a la expresión final de la probabilidad de supervivencia del neutrino del electrón

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle &= s_{12}^2 c_{13}^2 + (c_{12}^2 c_{13}^2 - s_{12}^2 c_{13}^2) \mathcal{P}_\alpha(t) \\ &+ (s_{13}^2 - s_{12}^2 c_{13}^2) \mathcal{P}_\gamma(t) . \end{aligned} \quad (4.152)$$

Capítulo 5

Gráficas y discusión de los resultados

Con la expresión de la probabilidad de supervivencia del neutrino del electrón que calculamos en la Sección anterior, procederemos a hacer un análisis de dicha expresión para todo el espectro de energía. El caso más interesante físicamente es aquel en el cual se tiene una considerable supresión de una especie en particular (en este caso ν_e), y que corresponde a valores pequeños de los ángulos de mezcla en el vacío θ_{12} y θ_{13} y masas de los neutrinos claramente separadas $\Delta_{31} \gg \Delta_{21}$. Valores grandes de los ángulos de mezcla en vacío conducen también a grandes oscilaciones de neutrinos pero casi independientes de la densidad del medio $V(t)$, lo cual implica que prácticamente no exista diferencia entre las oscilaciones en el medio y en la materia. Si las masas son casi degeneradas $\Delta_{31} \approx \Delta_{21}$, y hacemos uno de los ángulos tender a cero, el problema puede ser descrito en términos de oscilaciones entre dos especies.

Un argumento adicional en favor de ángulos de mezcla pequeños y jerarquía de masas es que también aparecen en el sector de quarks y la idea de *Gran Unificación* sugiere una conexión íntima entre las masas de los leptones y de los quarks.

Como resultado de la dependencia del $\text{sen } 2\theta_{12}^m(t)$ y del $\text{sen } 2\theta_{13}^m(t)$ con $V(t)$ podemos distinguir cinco regiones de densidad con diferente conducta en las oscilaciones, las cuales analizaremos a continuación:

(1) Zona de Densidad muy Baja

Si $0 \leq V(t) \ll \Delta_{21}$, ambos ángulos de mezcla, $\theta_{12}^m(t)$ y $\theta_{13}^m(t)$, son cercanos a sus valores del vacío, es decir $\theta_{12}^m(t) \rightarrow \theta_{12}$; $\theta_{13}^m(t) \rightarrow \theta_{13}$, con

$$P_{\alpha}(t) \rightarrow c_{12}^2 c_{13}^2 \quad (5.1)$$

$$P_{\gamma}(t) \rightarrow s_{13}^2, \quad (5.2)$$

sustituyendo (5.1) y (5.2) en (4.152) vemos que pueden ocurrir considerables oscilaciones solo entre $\nu_{\mu} \leftrightarrow \nu_{\tau}$. La probabilidad de que sobreviva un ν_e es

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle = c_{12}^4 c_{13}^4 + s_{12}^4 c_{13}^4 + s_{13}^4, \quad (5.3)$$

el cual es el resultado esperado para el vacío con $n=3$.

(2) Zona de Resonancia Baja

Para $V(t) \approx \Delta_{21}$, $\theta_{13}^m(t)$ todavía tiene aproximadamente el valor del vacío ($\theta_{13}^m(t) \approx \theta_{13}$), mientras que $\theta_{12}^m(t)$ cruza a través de la *Resonancia Baja*, es decir $\theta_{12}^m(t) \approx \frac{\pi}{4}$ con

$$P_{\alpha}(t) \rightarrow \cos^2 \Pi(t) \cos^2 \theta_{12}^m(t_0) \cos^2 \theta_{13}^m(t_0) \\ + \sin^2 \Pi(t) \sin^2 \theta_{12}^m(t_0) \cos^2 \theta_{13}^m(t_0) \quad (5.4)$$

y

$$P_{\gamma}(t) \rightarrow \sin^2 \theta_{13}^m(t_0), \quad (5.5)$$

sustituyendo (5.4) y (5.5) en (4.152) hallamos que existen oscilaciones $\nu_e \leftrightarrow \nu_{\mu}$ con una probabilidad

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2\mathcal{P}_c^I) \cos 2\theta_{12}^m(t_0) \cos 2\theta_{12}, \quad (5.6)$$

donde

$$\cos 2\theta_{12}^m(t_0) = \frac{A_1 - V(t_0)}{\sqrt{(V(t_0) - A_1)^2 + B_1^2}}, \quad (5.7)$$

y

$$\mathcal{P}_c^I = \text{sen}^2 \left[\left(\theta_{12}^m(t_0) - \theta_{12}^m(T) \right) e^{-\kappa_1} \right]. \quad (5.8)$$

La función \mathcal{P}_c^I representa la probabilidad de transición entre los estados ν_{2m} y ν_{1m} , y fue derivada recientemente por D'Olivo [89] para el caso de oscilaciones con dos especies. Esto expresa la corrección total al resultado adiabático para $\langle P_{\nu_e} \rangle$, el cual se obtiene inmediatamente haciendo $\mathcal{P}_c^I = 0$. Para $\kappa_1 \gg 1$, \mathcal{P}_c^I es exponencialmente pequeña, como es típico para la probabilidad de transición asintótica. Por otro lado cuando $\kappa_1 < 1$ hay correcciones considerables para la aproximación adiabática que reducen la magnitud de la transformación resonante. La Ec. (5.6) fue obtenida por primera vez por Parke [90] para dos especies con la probabilidad de cruce dada en términos de la fórmula de Landau-Zener: $\mathcal{P}_c^I = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\kappa_1\right)$.

En el límite extremo no adiabático, $\Delta_{21} \rightarrow 0$, y de la Ec. (5.7) obtenemos que $\theta_{12}^m(t_0) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ y consecuentemente $\mathcal{P}_c^I = \cos^2 \theta_{12}$. Cuando este valor de \mathcal{P}_c^I se sustituye en la Ec. (5.6) recuperamos el resultado del vacío para el caso de dos especies

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle = 1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2 2\theta_{12}, \quad (5.9)$$

como era de esperarse. Esto debe de contrastarse con el valor límite

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle = \cos^2 \theta_{12}. \quad (5.10)$$

predicho por la fórmula de Landau-Zener (y en general por cualquier resultado que sea derivado usando la fórmula de Dykhne), el cual, cuando θ_{12} es grande, se desvía apreciablemente del límite correcto dado por (5.9). El valor correcto del límite no adiabático extremo ha sido derivado también bajo la suposición, de que la transición entre los estados adiabáticos ocurre casi instantáneamente al tiempo $t = t_i$ [91]. Sin embargo, en este caso el resultado correspondiente para \mathcal{P}_e^l se aproxima a $\cos^2 \theta_{12}$ como $(\frac{\delta m^2}{E})^2$ en lugar de linealmente como en el caso de la Ec. (5.8).

Los efectos no adiabáticos comienzan a ser importantes en esta zona cuando κ_i es del orden de 1 a condición que los neutrinos avancen a través de la *Resonancia Baja*. Si $E < \frac{\delta m^2}{2V(t_0)} \cos 2\theta_{12}$ no pueden ocurrir transiciones, es decir $\mathcal{P}_e^l = 0$, y la propagación de los neutrinos será adiabática aún para $\kappa_i < 1$. De esta manera la expresión exponencial asintótica ($\kappa \rightarrow 0$) para \mathcal{P}_e^l , e incluso para los de las Refs. [92], deben de modificarse para considerar esta situación. Una manera efectiva es multiplicar \mathcal{P}_e^l por la función escalón $\Theta(V(t_0) - \Delta_{21} \cos 2\theta_{12})$, de modo que la probabilidad de transición se anule cuando los neutrinos son producidos después de la resonancia [93]. No se requiere de tal modificación para la fórmula de Magus Ec. (5.8) debido a que, como una función de $\frac{\delta m^2}{2E}$, la diferencia $\theta_{12}^m(t_0) - \theta_{12}^m(T)$ se comporta como una función escalón continua.

(3) Zona de Densidad Intermedia

Para $\Delta_{21} \ll V(t) \ll \Delta_{31}$, los ángulos de mezcla toman los valores de $\theta_{12}^m(t) \approx \frac{\pi}{2}$ y de $\theta_{13}^m(t) \approx \theta_{13}$ con

$$\mathcal{P}_\alpha(t) \approx c_{12}^2 c_{13}^2 \quad (5.11)$$

y

$$\mathcal{P}_\gamma(t) \approx s_{13}^2 \quad (5.12)$$

sustituyendo (5.11) y (5.12) en (4.152) vemos que únicamente pueden ocurrir oscilaciones entre $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ y la probabilidad total

para la supervivencia del ν_e es

$$\langle \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle \approx c_{12}^4 c_{13}^4 + s_{12}^4 c_{13}^4 + s_{13}^4 \quad (5.13)$$

dicha probabilidad tenderá a ser igual al caso del vacío para tres generaciones, cuando las masas de los neutrinos estén claramente separadas, es decir, $\Delta_{31} \gg \Delta_{21}$.

(4) Zona de Resonancia Alta

Para $V(t) \approx \Delta_{31}$, el ángulo $\theta_{12}^m(t)$ toma el valor aproximado de $\theta_{12}^m(t) \approx \frac{\pi}{2}$, mientras que $\theta_{13}^m(t)$ cruza a través de la *Resonancia Alta*, es decir $\theta_{13}^m(t) \approx \frac{\pi}{4}$. En este caso

$$\mathcal{P}_\alpha(t) \rightarrow \cos^2 \theta_{13}^m(t_0) \cos^2 \theta_{12}^m(t_0) \quad (5.14)$$

y

$$\mathcal{P}_\gamma(t) \rightarrow \cos^2 \Pi(t) \sin^2 \theta_{13}^m(t_0) \quad (5.15)$$

sustituyendo (5.14) y (5.15) en (4.152) encontramos oscilaciones del tipo $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ con una probabilidad de

$$\langle \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - 2\mathcal{P}_c^h \right) \cos 2\theta_{13}^m(t_0) \cos 2\theta_{13} \quad (5.16)$$

con

$$\cos 2\theta_{13}^m(t_0) = \frac{A_h - V(t_0)}{\sqrt{(V(t_0) - A_h)^2 + B_h^2}} \quad (5.17)$$

y

$$\mathcal{P}_c^h = \sin^2 \left[\left(\theta_{13}^m(t_0) - \theta_{13}^m(T) \right) e^{-\kappa_h} \right] \quad (5.18)$$

llegando de nuevo a la expresión para oscilación con dos especies en esta zona.

La probabilidad de cruce \mathcal{P}_c^h representa la probabilidad de transición entre los estados ν_{3m} a ν_{2m} y viceversa, análogo al caso de la *Resonancia Baja*. De nuevo si hacemos $\mathcal{P}_c^h = 0$ recuperamos el caso adiabático y para $\kappa_h \gg 1$, \mathcal{P}_c^h es exponencialmente pequeña. Cuando $\kappa_h < 1$ existen considerables correcciones para la aproximación adiabática.

En el límite extremo no adiabático tenemos que $\Delta_{31} \rightarrow 0$ y de la Ec. (5.15) obtenemos $\theta_{13}^m(t_0) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, y en consecuencia $\mathcal{P}_c^h = \cos^2 \theta_{13}$. Sustituyendo este valor en la Ec (5.14) obtenemos una expresión idéntica a (5.9) con θ_{12} reemplazado por θ_{13} .

Consideraciones similares a las discutidas después de haber obtenido (5.9) se aplican a este caso para el comportamiento de $\langle \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle$ en el límite no adiabático extremo pronosticado por la fórmula de Landau-Zener el cual se desvía apreciablemente cuando θ_{13} es grande.

Los efectos no adiabáticos comienza a ser importantes en esta zona cuando κ_h es del orden de 1 a condición que los neutrinos avancen através de la *Resonancia Alta*. Si $E < \frac{\delta m_{31}^2}{2V(t_0)} (\cos 2\theta_{13} - R^{-1} \sin^2 \theta_{12} \cos 2\theta_{13})$ no pueden ocurrir transiciones, es decir $\mathcal{P}_c^h = 0$, y la propagación de los neutrinos será adiabática aún para $\kappa_h < 1$. Otra vez, las expresiones tipo Landau-Zener para \mathcal{P}_c^h , deben de modificarse para considerar ésta situación y una manera efectiva es la de multiplicar \mathcal{P}_c^h por la función escalón $\Theta(V(t_0) - \Delta_{31} (\cos 2\theta_{13} - R^{-1} \sin^2 \theta_{12} \cos 2\theta_{13}))$.

La fórmula de Magnus toma en cuenta sin agregados dicha situación ya que, como función de $\frac{\delta m_{31}^2}{2E}$, la diferencia $\theta_{13}^m(t_0) - \theta_{13}^m(T)$ se comporta como un escalón continuo.

(5) Zona de Densidad muy Alta

Para $V(t) \gg \Delta_{31}$ las oscilaciones para el neutrino del electrón (ν_e) son suprimidas fuertemente debido a que $\theta_{12}^m(t) \approx \frac{\pi}{2}$ y $\theta_{13}^m(t) \approx \frac{\pi}{2}$ con

$$\mathcal{P}_\alpha(t) \rightarrow c_{12}^2 c_{13}^2 \quad (5.19)$$

y

$$P_{\gamma}(t) \rightarrow s_{13}^2, \quad (5.20)$$

sustituyendo (5.19) y (5.20) en (4.152) recuperamos el resultado esperado de vacío para $n = 3$ con probabilidad de supervivencia del neutrino del electrón ν_e de

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle = c_{12}^4 c_{13}^4 + s_{12}^4 c_{13}^4 + s_{13}^4, \quad (5.21)$$

y son posibles las grandes oscilaciones del tipo $\nu_{\mu} \leftrightarrow \nu_{\tau}$.

De esta manera en materia con densidad $V(t) \approx \Delta_{12}$ ó $V(t) \approx \Delta_{13}$ se amplifican las transformaciones del neutrino del electrón (ν_e), en neutrinos de otros sabores de manera considerable.

Gráficas de la probabilidad de supervivencia $\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle$ son dadas en las Figs. (5.1)-(5.17) como función de $\frac{\delta m^2}{E}$, para diferentes valores del $\sin^2 2\theta_{12}$, $\sin^2 2\theta_{13}$ y $R = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{21}}$. Utilizamos el perfil exponencial [94] $N_e(r) = 245 \exp(-10.54 r/R_{\odot}) N_{\text{Avog}} \text{ cm}^{-3}$, donde N_{Avog} es el número de Avogadro, r es la distancia radial medida desde el centro del Sol y R_{\odot} es el radio solar ($R_{\odot} = 6.96 \times 10^5 \text{ Km}$). Excepto para regiones cercanas al centro y la superficie, esto proporciona una buena aproximación de la densidad de electrones en el Sol. Asumimos que los ν_e son producidos en $r_0 = 0.08635 R_{\odot}$ donde N_e calculada por el ajuste exponencial coincide con la densidad central predicha por el *Modelo Solar Estándar*.

Nuestro resultado no solo reproduce el comportamiento esperado para la probabilidad de supervivencia, sino que también da resultados razonablemente buenos en un sentido cuantitativo.

Para construir las gráficas se diseñó un programa FORTRAN para calcular la probabilidad de supervivencia del neutrino del electrón (ver el apéndice F).

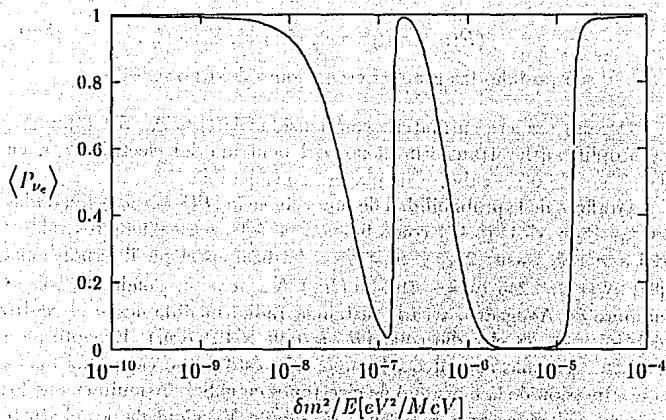


Figura 5.1: El espectro Solar de neutrinos y las fosas de supresión para tres generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$; tomando los valores de $\sin^2 2\theta_{12} = 0.01$, $\sin^2 2\theta_{13} = 0.001$ y $R = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{31}} = 10^{-2}$.

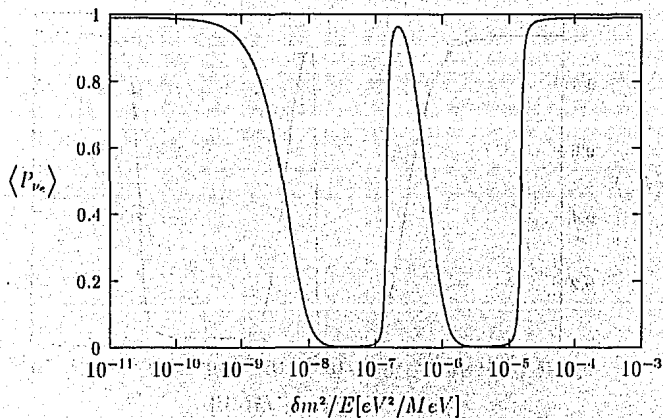


Figura 5.2: El espectro Solar de neutrinos y las fosas de supresión para tres generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\text{sen}^2 2\theta_{12} = 0.01$, $\text{sen}^2 2\theta_{13} = 0.01$ y $R = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{21}} = 10^{-2}$.

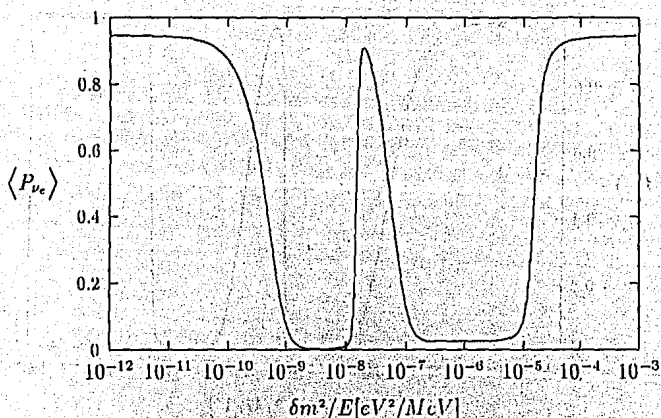


Figura 5.3: El espectro Solar de neutrinos y las fosas de supresión para tres generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\sin^2 2\theta_{12} = 0.1$, $\sin^2 2\theta_{13} = 0.01$ y $R = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} = 10^{-3}$.

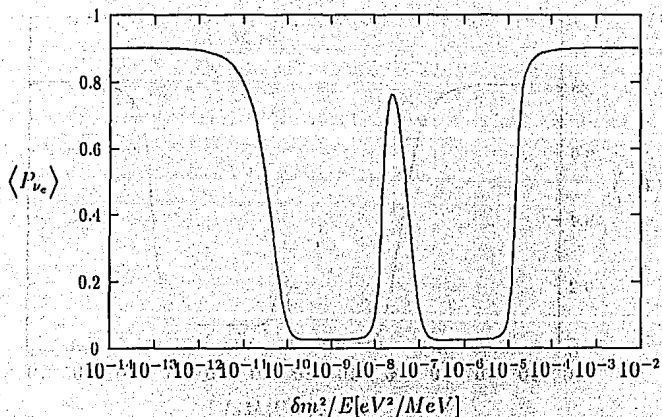


Figura 5.4: El espectro Solar de neutrinos y las fosas de supresión para tres generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\sin^2 2\theta_{12} = 0.1$, $\sin^2 2\theta_{13} = 0.1$ y $R = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{31}} = 10^{-3}$.

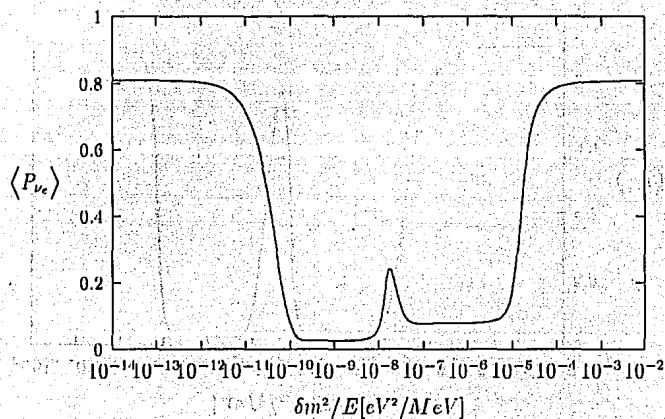


Figura 5.5: El espectro Solar de neutrinos y las fosas de supresión para tres generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$; tomando los valores de $\sin^2 2\theta_{12} = 0.3$, $\sin^2 2\theta_{13} = 0.1$ y $R = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{21}} = 10^{-3}$.

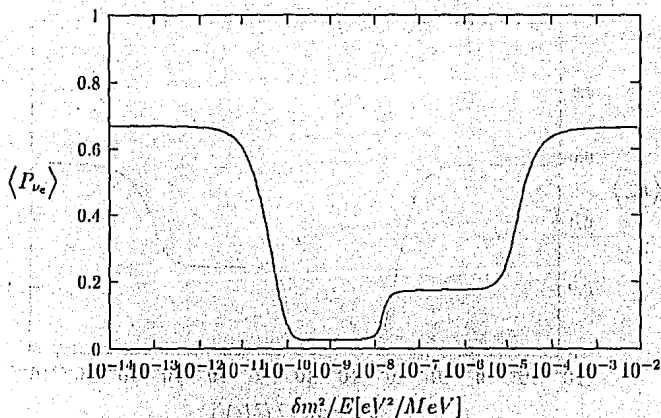


Figura 5.6: El espectro Solar de neutrinos y las fosas de supresión para tres generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\text{sen}^2 2\theta_{12} = 0.6$, $\text{sen}^2 2\theta_{13} = 0.1$ y $R = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{31}} = 10^3$.

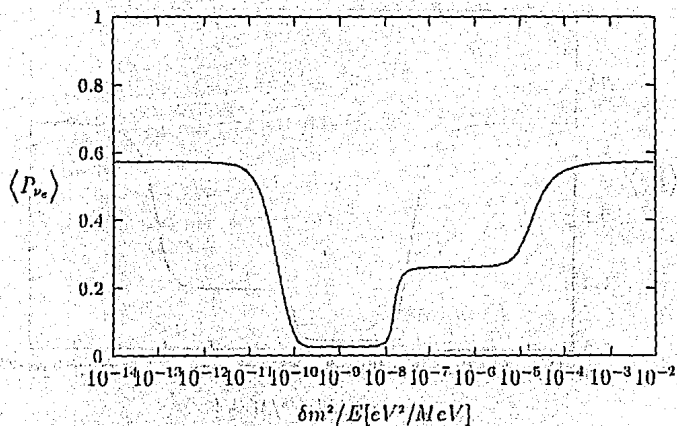


Figura 5.7: El espectro Solar de neutrinos y las fosas de supresión para tres generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\text{sen}^2 2\theta_{12} = 0.8$, $\text{sen}^2 2\theta_{13} = 0.1$ y $R = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{21}} = 10^3$.

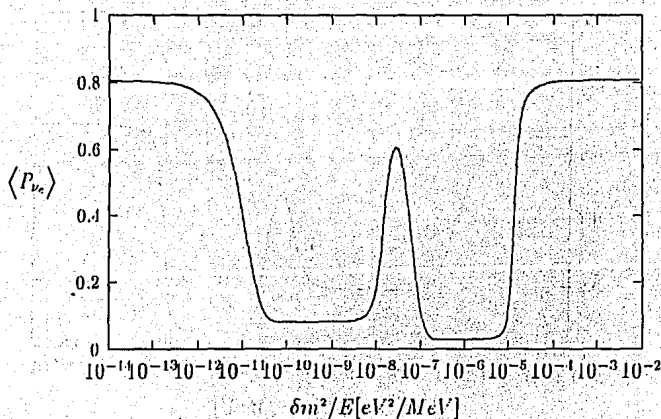


Figura 5.8: El espectro Solar de neutrinos y las fosas de supresión para tres generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\text{sen}^2 2\theta_{12} = 0.1$, $\text{sen}^2 2\theta_{13} = 0.3$ y $R = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{21}} = 10^3$.

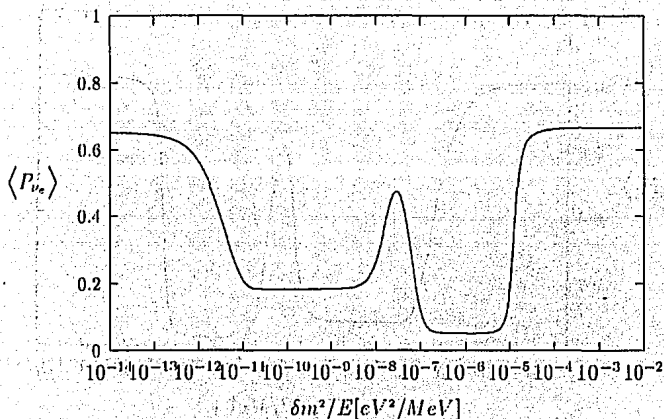


Figura 5.9: El espectro Solar de neutrinos y las fosas de supresión para tres generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\sin^2 2\theta_{12} = 0.1$, $\sin^2 2\theta_{13} = 0.6$ y $R = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{31}} = 10^3$.

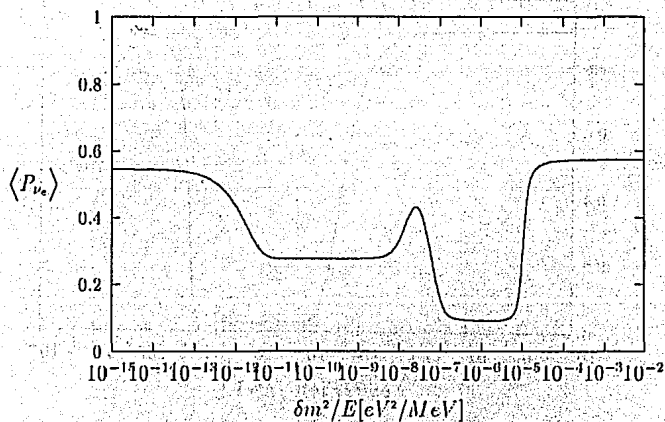


Figura 5.10: El espectro Solar de neutrinos y las fosas de supresión para tres generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\sin^2 2\theta_{12} = 0.1$, $\sin^2 2\theta_{13} = 0.8$ y $R = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{21}} = 10^3$.

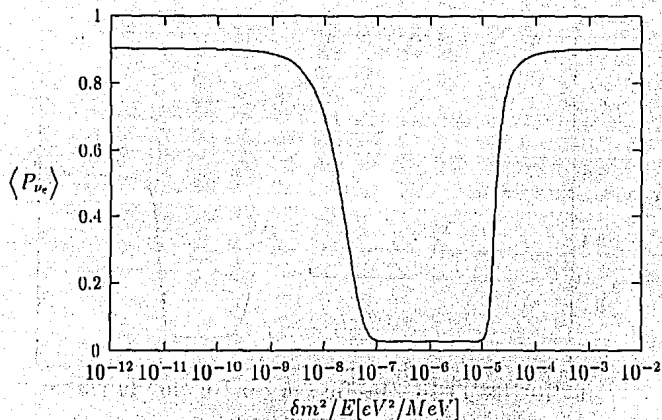


Figura 5.11: El espectro Solar de neutrinos y las fosas de supresión para tres generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\sin^2 2\theta_{12} = 0.1$, $\sin^2 2\theta_{13} = 0.1$ y $R = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{21}} = 1$. Notemos que se reduce al caso $n = 2$, por no cumplirse que las masas de los neutrinos estén bien separadas $\Delta_{31} \gg \Delta_{21}$.

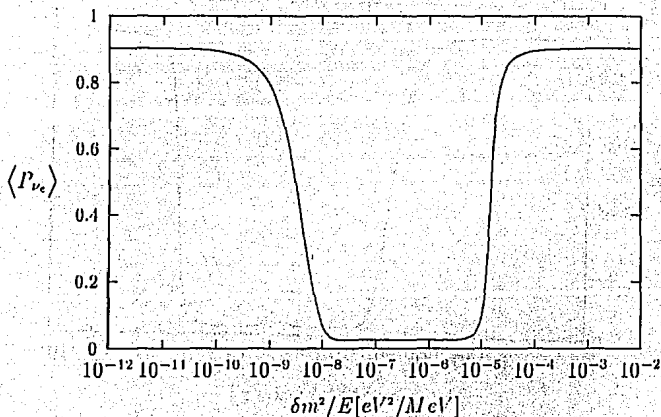


Figura 5.12: El espectro Solar de neutrinos y las fosas de supresión para tres generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs: $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\sec^2 2\theta_{12} = 0.1$, $\sec^2 2\theta_{13} = 0.1$ y $R = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{21}} = 10$. Notemos que aún podemos tratar el problema como $n = 2$.

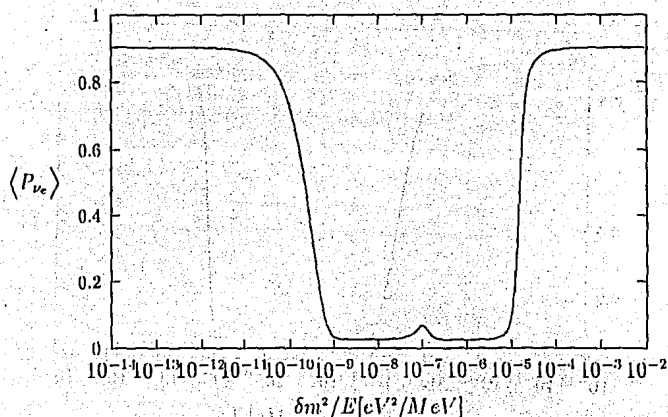


Figura 5.13: El espectro Solar de neutrinos y la fosa de supresión para tres generaciones, que se reduce al caso de dos generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\sin^2 2\theta_{12} = 0.1$, $\sin^2 2\theta_{13} = 0.1$ y $R = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{21}} = 150$. Notemos que tenemos una pequeña contribución debida a que Δ_{31} es mayor que Δ_{21} .

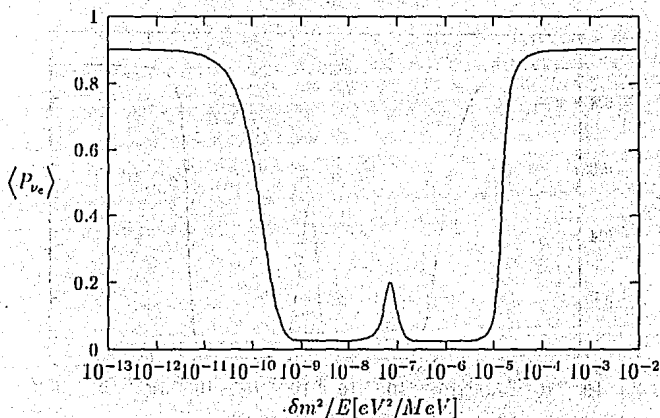


Figura 5.14: El espectro Solar de neutrinos y la fosa de supresión para tres generaciones, que se reduce al caso de dos generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\sin^2 2\theta_{12} = 0.1$, $\sin^2 2\theta_{13} = 0.1$ y $R = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{31}} = 250$. Notemos que ahora ya es un problema con $n = 3$.

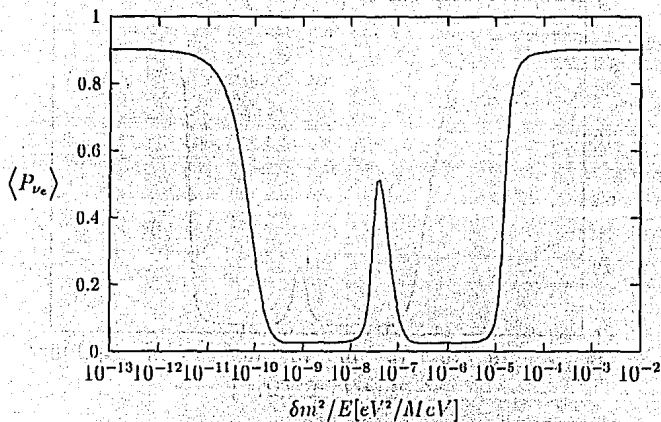


Figura 5.15: El espectro Solar de neutrinos y la fosa de supresión para tres generaciones, que se reduce al caso de dos generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\text{sen}^2 2\theta_{12} = 0.1$, $\text{sen}^2 2\theta_{13} = 0.1$ y $R = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{21}} = 500$.

en el espectro solar $\langle P_{\nu_e} \rangle$ al ser suprimida la generación de tres generaciones de neutrinos. La fosa de supresión en el espectro solar de neutrinos se reduce al caso de dos generaciones. Gráfico de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\sin^2 2\theta_{12} = 0.01$, $\sin^2 2\theta_{13} = 0.0$ y $R = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{31}} = 7$.

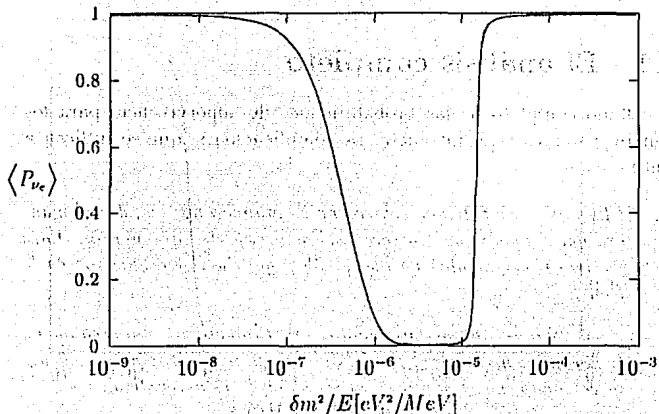


Figura 5.16: El espectro Solar de neutrinos y la fosa de supresión para tres generaciones, que se reduce al caso de dos generaciones. Gráfico de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\sin^2 2\theta_{12} = 0.01$, $\sin^2 2\theta_{13} = 0.0$ y $R = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{31}} = 7$.

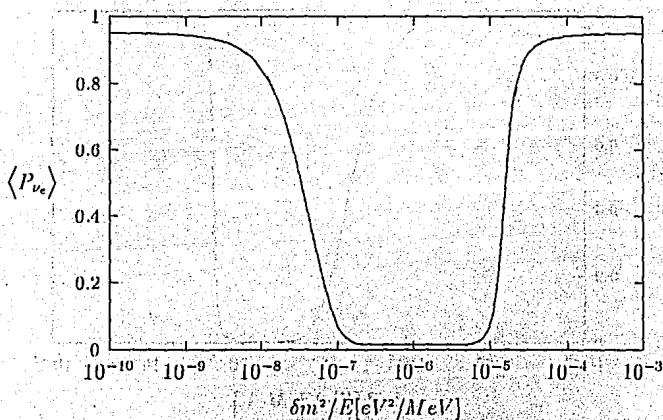


Figura 5.17: El espectro Solar de neutrinos y la fosa de supresión para tres generaciones, que se reduce al caso de dos generaciones. Gráfica de la probabilidad de supervivencia para un neutrino del electrón procedente del Sol vs. $\delta m^2/E$, tomando los valores de $\text{sen}^2 2\theta_{12} = 0.1$, $\text{sen}^2 2\theta_{13} = 0.0$ y $R = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{21}} = 3$.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Resumen de la solución obtenida

Para concluir este trabajo, analizaremos los resultados obtenidos en el Capítulo pasado; allí se hicieron básicamente tres tipos de hipótesis.

- 1.- Todos los neutrinos son producidos en un punto $r = 0.08635 R_{\odot}$, donde la densidad de electrones es de $98.8 N_{A\odot}$, la cual es la densidad del núcleo solar de acuerdo con el Modelo Solar Estándar (MSW).
- 2.- En los puntos de resonancia, $\left| \frac{d}{dx} \ln N_e \right| = 10.45 R_{\odot}$, independientemente de donde se llevan a cabo las resonancias en el interior del Sol.
- 3.- Existe jerarquía de masas $m_1 \ll m_2 \ll m_3$ entre los neutrinos, de tal manera que las resonancias están bien separadas y es posible describirlas cada una por separado.

La primera aseveración es razonable dado que la mayoría de los neutrinos son producidos cerca del núcleo donde la temperatura es alta. Para la segunda, notamos que el perfil de densidad

$$N_e(r) = 245 \exp(-10.54 r/R_{\odot}) N_{A\odot}$$

está en acuerdo con los cálculos astrofísicos en todas partes excepto, un 15% para regiones cercanas al núcleo y la superficie, como puede verse

En el extremo derecho de las Figs. (5.1)-(5.10), el valor de $\delta m^2/E$ es tan grande que no se cumplen, ni las condiciones de resonancia, ni las de no adiabaticidad; en ese caso $\mathcal{P}_e^l \simeq 0$ y $\mathcal{P}_e^h \simeq 0$, mientras que $\theta_{12}^m(t) \simeq \theta_{12}$ y $\theta_{13}^m(t) \simeq \theta_{13}$, (ver las Ecs. (5.7) y (5.17)), de tal manera que

$$\langle \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle = c_{12}^4 c_{13}^4 + s_{12}^4 c_{13}^4 + s_{13}^4, \quad (6.1)$$

la cual corresponde a la probabilidad promedio de supervivencia en el vacío.

Por otra parte en el extremo izquierdo de dichas gráficas, $\mathcal{P}_e^l \simeq 1$ y $\mathcal{P}_e^h \simeq 1$ y $\theta_{12}^m(t) \simeq \frac{\pi}{2}$, $\theta_{13}^m(t) \simeq \frac{\pi}{2}$, y se llega de nuevo al resultado del vacío para $n = 3$.

Partiendo del extremo izquierdo de las gráficas anteriores y aumentando $\delta m^2/E$ llegaremos al punto $V(t) = \cos 2\theta_{13} (\Delta_{31} - \Delta_{21} \sin^2 \theta_{12})$ en donde se satisface la condición de la *Resonancia Alta*. Cerca de este punto la *probabilidad de supervivencia* tiene pendiente hacia abajo por la conversión resonante $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$. El rango de valores de $\delta m^2/E$ para el cual esta caída tiene lugar, es determinado por la *amplitud de resonancia* Ec.(4.103). Claramente la amplitud de la cuenca aumenta con el incremento de los parámetros de vacío.

De manera análoga ocurre para la otra transición $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$, con $V(t) = \Delta_{21} \cos 2\theta_{12} / \cos^2 \theta_{13}$ donde la amplitud de la *Resonancia Baja* viene dada por la expresión (4.80).

Si los efectos "no adiabáticos", no fueran importantes, la probabilidad de supervivencia debería estar ubicada en una "gran cuenca" para todos los valores de $\delta m^2/E$. Sin embargo, dependiendo de los parámetros de vacío, los efectos no adiabáticos llegan a ser importantes, lo cual se traduce en una mayor probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón ν_e .

Para finalizar esta sección, diremos que en las Figs. (5.1)-(5.10) tenemos las gráficas de supresión para tres generaciones y que allí encontramos cuatro regiones de solución al *Problema de los neutrinos solares*, dos por cada resonancia, claramente diferentes para cada gráfica. Partiendo del extremo derecho hacia la izquierda de estas gráficas, encontramos la *Región Adiabática Baja* y la *Región No Adiabática Baja*, separadas por el "plato" de la *Resonancia Baja*. De forma similar, si nos

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Resumen de la solución obtenida

Para concluir este trabajo, analizaremos los resultados obtenidos en el Capítulo pasado; allí se hicieron básicamente tres tipos de hipótesis.

- 1.- Todos los neutrinos son producidos en un punto $r = 0.08635 R_{\odot}$, donde la densidad de electrones es de $98.8 N_{A^{10.1}}$, la cual es la densidad del núcleo solar de acuerdo con el Modelo Solar Estándar (MSW).
- 2.- En los puntos de resonancia, $\left| \frac{d}{dr} \ln N_e \right| = 10.45 R_{\odot}$, independientemente de donde se llevan a cabo las resonancias en el interior del Sol.
- 3.- Existe jerarquía de masas $m_1^2 \ll m_2^2 \ll m_3^2$ entre los neutrinos, de tal manera que las resonancias están bien separadas y es posible describirlas cada una por separado.

La primera aseveración es razonable dado que la mayoría de los neutrinos son producidos cerca del núcleo donde la temperatura es alta. Para la segunda, notamos que el perfil de densidad

$$N_e(r) = 2.15 \exp(-10.54 r/R_{\odot}) N_{A^{10.1}}$$

está en acuerdo con los cálculos astrofísicos en todas partes excepto, un 15% para regiones cercanas al núcleo y la superficie, como puede verse

de la Fig. (3.7). Para la tercera suposición nos basamos en los recientes reportes experimentales (Fig. (1.6)) y en el análisis del Apéndice E.

Las Figs. (5.1)-(5.17) muestran la variación de la probabilidad de supervivencia $\langle P_{\nu_e} \rangle$ como función de $\delta m^2/E$, para varios valores de los ángulos de mezcla en el vacío $\text{sen}^2 2\theta_{12}$, $\text{sen}^2 2\theta_{13}$ y el cociente $R = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2}$ entre los cuadrados de las diferencias de las masas.

La naturaleza de estas curvas puede ser resumida como sigue. Para valores grandes de $\delta m^2/E$, la probabilidad de supervivencia es elevada; conforme $\delta m^2/E$ disminuye, se llega a un punto donde la probabilidad descende hasta alcanzar una cuenca plana; a este lugar le hemos llamado la *Resonancia Baja*, en donde se encuentran favorecidas las transiciones $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$. La probabilidad $\langle P_{\nu_e} \rangle$ permanece constante por un tiempo hasta que, para valores más pequeños de $\delta m^2/E$ crece hasta alcanzar de nuevo su valor de vacío. A continuación experimenta de nuevo un descenso cuando disminuimos aún más $\delta m^2/E$, encontrando una nueva cuenca plana, que corresponde a la zona de *Resonancia Alta* en donde las transiciones ocurren entre $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$, bajando aún más el cociente $\delta m^2/E$ la probabilidad $\langle P_{\nu_e} \rangle$ se eleva otra vez y finalmente alcanza una meseta, tendiendo así asintóticamente al valor del vacío (límite extremo no adiabático).

La clave para el entendimiento de este comportamiento se halla en las Ecs. (5.6), (5.8), (5.16) y (5.18). Hemos dicho antes que en las resonancias, los ángulos de mezcla efectivos llegan a ser $\theta_{12}^m(t) \approx \frac{\pi}{4}$ y $\theta_{13}^m(t) \approx \frac{\pi}{4}$. Afuera del Sol, es decir, en el vacío los ángulos de mezcla θ_{12} y θ_{13} tienen valores de $\theta_{12} < \frac{\pi}{4}$ y $\theta_{13} < \frac{\pi}{4}$. De esta manera, los neutrinos experimentarían las resonancias si, en el punto de producción, los ángulos de mezcla efectivos exceden $\frac{\pi}{4}$; en ese caso, en su camino hacia afuera del núcleo solar, pasará los neutrinos a través de los puntos donde $\theta_{12}^m(t) = \theta_{13}^m(t) = \frac{\pi}{4}$ y finalmente llegarán afuera con un valor aún menor de los ángulos θ_{12} y θ_{13} de mezcla en el vacío.

El otro punto importante de entender acerca de las curvas antes mencionadas es la importancia de los efectos no adiabáticos. Obviamente, tales efectos no aparecen si las probabilidades de transición \mathcal{P}_e^l y \mathcal{P}_e^h son mucho menores que $\frac{1}{2}$, lo cual puede verse de las Ecs. (5.6) y (5.7). En otras palabras, los efectos no adiabáticos son "importantes" si los parámetros adiabáticos $\kappa_l \lesssim 1$ y $\kappa_h \lesssim 1$.

En el extremo derecho de las Figs. (5.1)-(5.10), el valor de $\delta m^2/E$ es tan grande que no se cumplen, ni las condiciones de resonancia, ni las de no adiabaticidad; en ese caso $\mathcal{P}_e^l \simeq 0$ y $\mathcal{P}_e^h \simeq 0$, mientras que $\theta_{12}^m(t) \simeq \theta_{12}$ y $\theta_{13}^m(t) \simeq \theta_{13}$, (ver las Ecs. (5.7) y (5.17)), de tal manera que

$$(\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e)) = c_{12}^4 c_{13}^4 + s_{12}^4 c_{13}^4 + s_{13}^4, \quad (6.1)$$

la cual corresponde a la probabilidad promedio de supervivencia en el vacío.

Por otra parte en el extremo izquierdo de dichas gráficas, $\mathcal{P}_e^l \simeq 1$ y $\mathcal{P}_e^h \simeq 1$ y $\theta_{12}^m(t) \simeq \frac{\pi}{2}$, $\theta_{13}^m(t) \simeq \frac{\pi}{2}$; y se llega de nuevo al resultado del vacío para $n = 3$.

Partiendo del extremo izquierdo de las gráficas anteriores y aumentando $\delta m^2/E$ llegaremos al punto $V(t) = \cos 2\theta_{13} (\Delta_{31} - \Delta_{21} \sin^2 \theta_{12})$ en donde se satisface la condición de la *Resonancia Alta*. Cerca de este punto la *probabilidad de supervivencia* tiene pendiente hacia abajo por la conversión resonante $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$. El rango de valores de $\delta m^2/E$ para el cual esta caída tiene lugar, es determinado por la *amplitud de resonancia* Ec.(4.103). Claramente la amplitud de la cuenca aumenta con el incremento de los parámetros de vacío.

De manera análoga ocurre para la otra transición $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$, con $V(t) = \Delta_{21} \cos 2\theta_{12}/\cos^2 \theta_{13}$ donde la amplitud de la *Resonancia Baja* viene dada por la expresión (4.80).

Si los efectos "no adiabáticos", no fueran importantes, la probabilidad de supervivencia debería estar ubicada en una "gran cuenca" para todos los valores de $\delta m^2/E$. Sin embargo, dependiendo de los parámetros de vacío, los efectos no adiabáticos llegan a ser importantes, lo cual se traduce en una mayor probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón ν_e .

Para finalizar esta sección, diremos que en las Figs. (5.1)-(5.10) tenemos las gráficas de supresión para tres generaciones y que allí encontramos cuatro regiones de solución al *Problema de los neutrinos solares*, dos por cada resonancia, claramente diferentes para cada gráfica. Partiendo del extremo derecho hacia la izquierda de estas gráficas, encontramos la *Región Adiabática Baja* y la *Región No Adiabática Baja*, separadas por el "plato" de la *Resonancia Baja*. De forma similar, si nos

movemos aún más hacia la izquierda hallaremos la *Región Adiabática Alta* y la *Región No Adiabática Alta*, separadas por la fosa de supresión de la *Resonancia Alta*. Cuando aumentamos los valores de los parámetros θ_{12} y θ_{13} vemos que ambas soluciones adiabáticas ocurren aproximadamente en los mismos valores de $\delta m^2/E$. Sin embargo las soluciones no adiabáticas se desplazan hacia la izquierda, creando cuencas más anchas.

6.2 El análisis completo

El cálculo completo de las probabilidades de supervivencia para los neutrinos solares (ν_e), involucra las complicaciones, que se indican a continuación:

- 1.- *El flujo de los neutrinos solares no es monocromático, de tal manera que tenemos que integrar sobre el espectro de energía. Para los tres experimentos en operación y que fueron graficados en la Fig. 2.2.*
- 2.- *Los neutrinos no son producidos exactamente en una región en torno del centro solar, por lo que tenemos que tomar en cuenta la variación en el punto de producción de estas partículas.*

La primera complicación puede superarse si fijamos la energía media de los neutrinos capturados por cada uno de los detectores en operación. Para la segunda, el no tomar en cuenta los pocos neutrinos producidos fuera del centro del Sol no conlleva a una drástica simplificación del problema.

Consideremos ahora neutrinos de una energía fija, para los cuales conocemos su probabilidad de supervivencia de acuerdo con los resultados de los experimentos dados en la Sec. 3.4.¹ Para ello queremos encontrar que valores de θ_{12} , θ_{13} y R que sea consistentes con esos intervalos de la probabilidad de supervivencia. Para ello discutiremos los resultados obtenidos de tal manera que los podamos comparar

¹Los resultados de SAGE fueron tomados de J. N. Abdurashitov et al., *Phys. Lett. B* 328, 234 (1994) y para los de GALLEX de N. Hata P. Langacker *Phys. Rev. D* 50, 632 (1994)

con cálculos numéricos sobre rangos de captura de neutrinos fijando la energía. Como ya se ha mencionado las soluciones dependen de tres parámetros libres, a saber: $R = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{21}}$, $|U_{e2}|^2$ y $|U_{e3}|^2$, y para la construcción de gráficas bidimensionales es conveniente definir $S = \frac{|U_{e3}|^2}{|U_{e2}|^2}$, ver el Apéndice F.

De las Figs. (6.1)-(6.3), los resultados para cada experimento son aproximadamente dos "triángulos" acoplados, el triángulo superior representa la *Resonancia Alta* ($\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$), mientras que el triángulo inferior representa la *Resonancia Baja* ($\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$).

Para cada experimento existen dos "bandas" horizontales, dos bandas verticales y dos diagonales. Consideremos primero las bandas horizontales, en conexión con las soluciones graficadas en las Figs. (5.1)-(5.12), estas bandas representan las *propagaciones adiabáticas* de los neutrinos. Para los experimentos de Homestake (C^{137}), Kamiokande (efecto Cherenkov) y el combinado SAGE-GALLIEX (Ca^{71}) (Fig. (6.1)-(6.3)), muestran que las partes horizontales de las soluciones no se traslapan. Para valores de R y E fijos, la condición de resonancia es satisfecha y todos los neutrinos con esa energía son convertidos. Solo los neutrinos de baja energía sobreviven.

Consideremos ahora las bandas verticales, las cuales también son adiabáticas. Aquí la condición de resonancia es satisfecha para casi todas las energías relevantes y de esa forma los neutrinos sobreviven con una probabilidad dada por la Ec. (6.1) independientemente de la energía.

Las bandas diagonales corresponden a las *zonas no adiabáticas*, las cuales son casi rectas, para entender esto retomaremos las expresiones (5.6) y (5.16) para la probabilidad de supervivencia en la *Resonancia Baja y Alta* respectivamente. Si consideramos que θ_{12} y θ_{13} son pequeños tendremos que dichas regiones

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle \simeq P_c^l \quad \text{y} \quad \langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle \simeq P_c^h,$$

de tal manera que contornos constantes de $\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle$ correspondan a contornos constantes de P_c^l y P_c^h en una buena aproximación. Por otro lado la densidad del medio en el punto de producción es elevada y allí, los ángulos de mezcla toman los valores aproximados

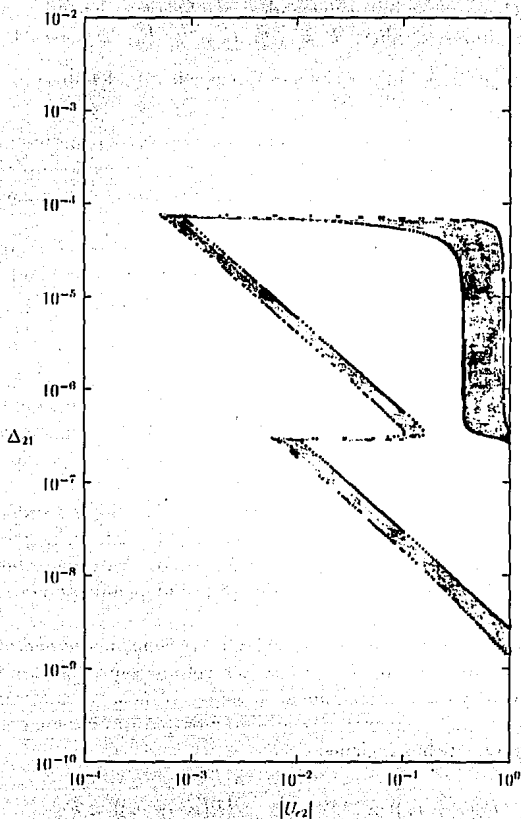


Figura 6.1: Contornos de igual supresión (Iso-SNU) para el experimento HOMESTAKE (C^{137}) fijando la energía a $E = 5$ MeV. La zona sombreada corresponde a $0.19 < P_{\nu_e \nu_e} < 0.35$ con las restricciones $S = R = 250$.

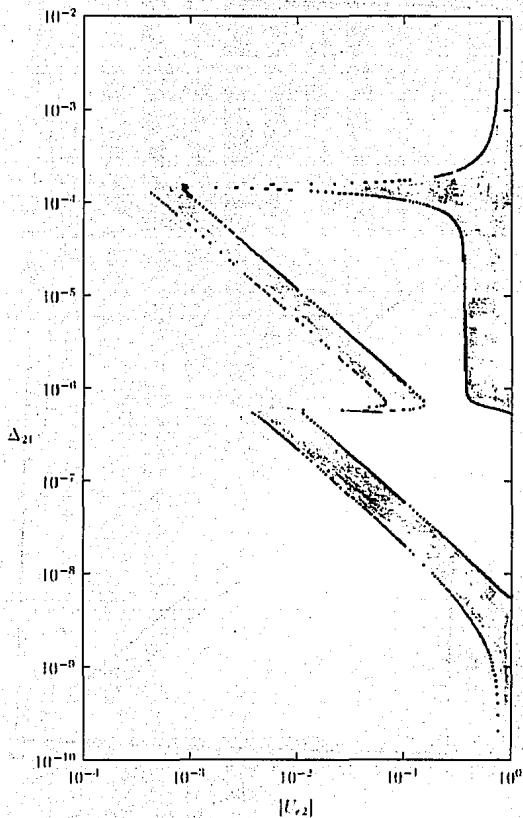


Figura 6.2: Contornos de igual supresión (Iso-SNI) para el experimento KAMIOKANDE (efecto Chérenkov) fijando la energía a $E = 10$ MeV. La zona sombreada corresponde a $0.18 < P_{\nu_e \nu_e} < 0.55$ con las restricciones $S = R = 250$.

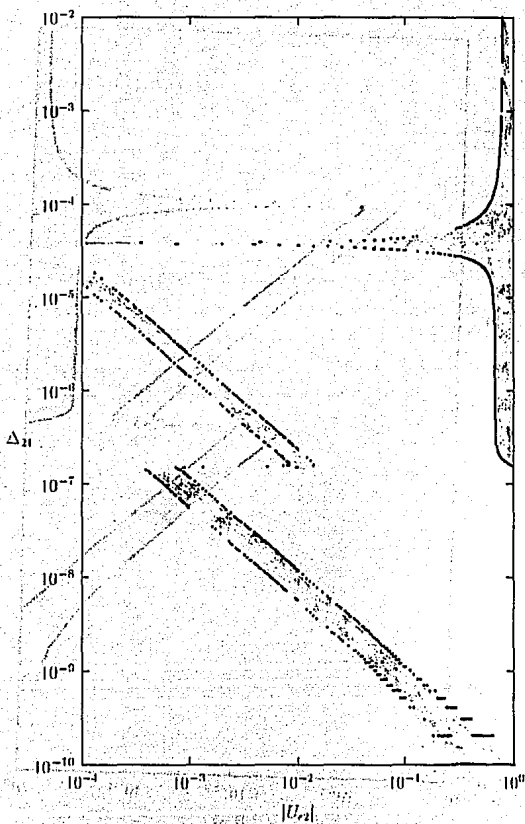


Figura 6.3: Contornos de igual supresión (Iso-SNU) para el experimento SAGE-GALLEX combinado (Ga^{71}) fijando la energía a $E = 0.25 \text{ MeV}$. La zona sombreada corresponde a $0.38 < P_{\nu_e \nu_e} < 0.76$ con las restricciones $S = R = 250$.

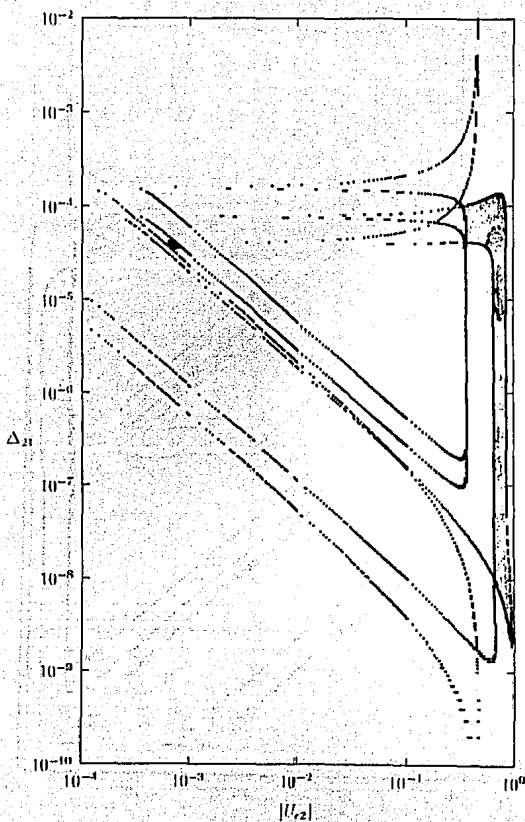


Figura 6.4: Contornos de igual supresión (Iso-SNU) para los tres experimentos en operación. La zona sombreada corresponde a la intersección de las tres gráficas con las restricciones anteriores y $R \rightarrow 1$ y $S \rightarrow 1$. Caso $n = 2$ con $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$.

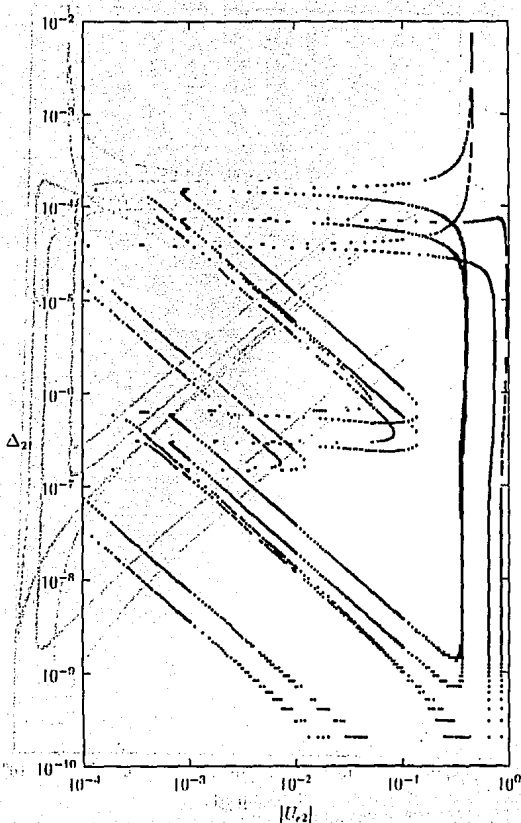


Figura 6.5: Contornos de igual supresión (Iso-SNU) para los tres experimentos en operación. Con las restricciones anteriores y $R \rightarrow \infty$ y $S \rightarrow 1$. Caso $n = 3$ con $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ y $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ bien separadas.

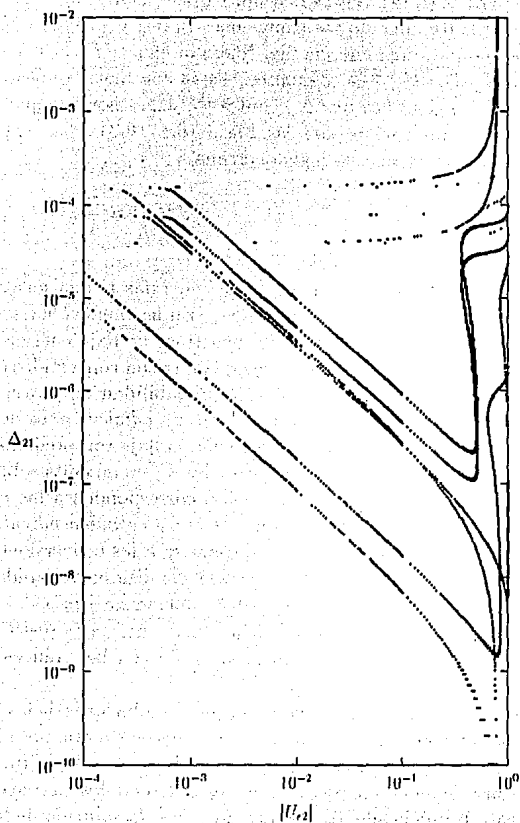


Figura 6.6: Contornos de igual supresión (Iso-SNU) para los tres experimentos en operación. Con las restricciones anteriores y $R = \text{cte.}$ y $S \rightarrow 0$. Caso $n = 2$ con $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$.

de $\pi/2$ (ver en el Capítulo 5, la zona de densidad muy alta). De las Ecs. (5.8) y (5.18) vemos que aproximadamente $\log \mathcal{P}_c^l \sim \kappa_l$ y $\log \mathcal{P}_c^h \sim \kappa_h$. Retomando las expresiones (4.90) y (4.113) para κ_l y κ_h , vemos que para una energía fija, líneas de igual $\langle \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e) \rangle$ corresponden $|U_{e3}|^2 / |U_{e2}|^2 \sim \text{constante}$. Estas son líneas rectas en una gráfica $\log - \log$ si graficamos Δ_{21} contra $|U_{e2}|^2$; es por ello que hemos escogido esta combinación para las Figs. (6.1)-(6.3). La ventaja de hacer esto es que expande la región cercana a

$$\theta_{12}^m(t_l) \approx \frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad \theta_{12}^m(t_h) \approx \frac{\pi}{4},$$

en donde ocurren las resonancias.

Notemos que las distribuciones de las energías tienen un carácter diferente para cada una de las seis bandas. En las bandas horizontales, es decir en las *bandas adiabáticas*, los neutrinos de baja energía sobreviven (los de la cadena **pp**) y los de energía alta son convertidos (los del Be^7 y B^8). En las bandas verticales, la probabilidad de conversión es independiente de la energía. En las *bandas no adiabáticas*, es decir, en las bandas diagonales, los neutrinos de energía baja son predominantemente convertidos (los de la cadena **pp**) y los de energía alta sobreviven (los del Be^7 y B^8). Las bandas verticales corresponden a las *cucucas planas*, donde la probabilidad de supervivencia es *independiente de la energía*. Las bandas horizontales corresponden a las conversiones resonantes, donde la probabilidad de supervivencia disminuye rápidamente con el aumento de la energía, o la disminución de $\delta m^2/E$. En las regiones no adiabáticas la dependencia con la energía es justo lo contrario. Estas características están en acuerdo con las gráficas de las Figs. (5.1)-(5.12).

De lo anterior podemos entender porqué las soluciones de las bandas horizontales quedan excluidas cuando tomamos en cuenta, por ejemplo, tanto los resultados de Davis como los de Kamiokaude, (Figs. (6.7)-(6.9)). El promedio de energía de neutrinos detectados es mayor en el experimento Kamiokaude, de tal manera que si la solución de las bandas horizontales fuera correcta, entonces deberían de haber visto una supresión mayor en el flujo de neutrinos que en el experimento de Davis. Pero esto no es lo observado de acuerdo con los datos presentes reportados por el grupo japonés, de tal manera que las bandas horizontales

quedan excluidas como posibles soluciones al *enigma de los neutrinos solares*.

Debemos hacer notar que los "triángulos" de las Figs. (6.1)-(6.3) están acoplados porque la *región de transición no adiabática de la Resonancia Baja* ($\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$), esta conectada con la *región de transición adiabática de la Resonancia Alta* ($\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$), de acuerdo con lo obtenido en el Capítulo pasado.

Para estas gráficas las razones de masas y ángulos de mezcla varían de una a otra, pero si hacemos en cualquiera de ellas, digamos para Kamikande que $R \rightarrow 1$ y $S \rightarrow 1$, encontramos que los rangos de energía sobre el cual ocurre la conversión se traslapan formando efectivamente un "problema de dos sabores" y únicamente aparece un solo triángulo, ver la Fig. (6.4). Por el contrario, cuando hacemos que $R \rightarrow \infty$ y $S \rightarrow 1$ tendremos dos "triángulos idénticos" bien separados, ver la Fig. (6.5). Cuando $R = \text{cte.}$ y $S \rightarrow 0$, el rango de energía para la conversión $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ se hace más pequeña con respecto de la conversión $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$, haciendo que estos efectos desaparezcan gradualmente, ver la Fig. (6.6).

6.3 Epílogo

El efecto MSW para tres generaciones de neutrinos, es una elegante solución al *enigma de los neutrinos solares*. Con la parametrización propuesta en la Ec. (4.7) para la matriz de mezcla, los valores propios de la masa, así como los ángulos de mezcla en el medio dependen únicamente de los parámetros de vacío θ_{12} y θ_{13} , pero no de θ_{23} , ni de la fase de violación de CP que puede aparecer en la matriz de mezcla.

Si existe jerarquía de masas $m_1 \ll m_2 \ll m_3$ los senos de los ángulos de mezcla $\text{sen } 2\theta_{12}^m(t)$ y $\text{sen } 2\theta_{13}^m(t)$ exhiben la típica conducta resonante del efecto MSW. Encontrando dos regiones en donde ocurren resonancias distintas: una de ellas llamada *Zona de Resonancia Baja* en la cual se ven favorecidas las transiciones $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$, y otra llamada *Zona de Resonancia Alta* en donde aparecen transiciones $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$, ambas de las cuales pueden ser aproximadas por un tratamiento de dos neutrinos.

Para diferencias de masas de neutrinos que son casi degenerados $\Delta_{21} \approx \Delta_{31}$, recuperamos el caso $n = 2$ discutido recientemente por D'Olivo [95].

El formalismo desarrollado aquí proporciona una expresión analítica simple para la *probabilidad de supervivencia promedio* de los neutrinos del electrón ν_e , la cual reproduce el límite adiabático y considera efectivamente la salidad de la adiabaticidad cuando nos movemos hacia el régimen repentino (ver la discusión del Capítulo 5), el cual, los últimos experimentos [96] indican que si el efecto MSW se está llevando a cabo en el interior del Sol u otras estrellas, deberá de ocurrir en la *Región no adiabática*.

Para mostrar las regiones de solución hemos superpuesto dos a dos, las gráficas de los experimentos en operación Figs. (6.7)-(6.9), en donde sombreamos la intersección de ambos experimentos. También hemos superpuesto los tres experimentos en la Fig. (6.10) y en la Fig. (6.11) mostramos únicamente las zonas de intersección, hallando que los experimentos son consistentes con "tres" posibles soluciones del efectos MSW. Las "soluciones no adiabáticas" favorecidas son: con $\Delta_{21} \approx 4 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$; $\Delta_{31} \approx 1 \times 10^{-2} \text{ eV}^2$; $|U_{e2}|^2 \approx 2 \times 10^{-3}$ y $|U_{e3}|^2 \approx 1.25 \times 10^{-4}$, esta solución aparece en el caso $n = 2$ discutida en la literatura; y la solución con $\Delta_{21} \approx 5 \times 10^{-7} \text{ eV}^2$; $\Delta_{31} \approx 1.5 \times 10^{-4} \text{ eV}^2$; $|U_{e2}|^2 \approx 8 \times 10^{-3}$ y $|U_{e3}|^2 \approx 5 \times 10^{-4}$, esta última es una nueva solución al problema de los neutrinos solares que aún no se ha explorado; las soluciones anteriores representa una tremenda supresión de los neutrinos del Be^7 , una significativa disminución de los neutrinos del B^8 , y esencialmente ninguna supresión para los neutrinos de la cadena pp. La otra solución alternativa corresponde a ángulos de mezcla grandes $|U_{e2}|^2 \approx 5.5 \times 10^{-1}$ y $|U_{e3}|^2 \approx 3.44 \times 10^{-2}$ y a diferencias de masas $\Delta_{21} \approx 3 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ y $\Delta_{31} \approx 7.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$; esta solución también aparece en los reportes teóricos y experimentales para en caso de *dos sabores*. Aquí es posible que todos los neutrinos estén suprimidos independientemente de la energía.

Finalmente queremos enfatizar que el formalismo desarrollado aquí, puede aplicarse a cualquier sistema cuántico que pueda tratarse como si su espacio de estado fuera de tres dimensiones.

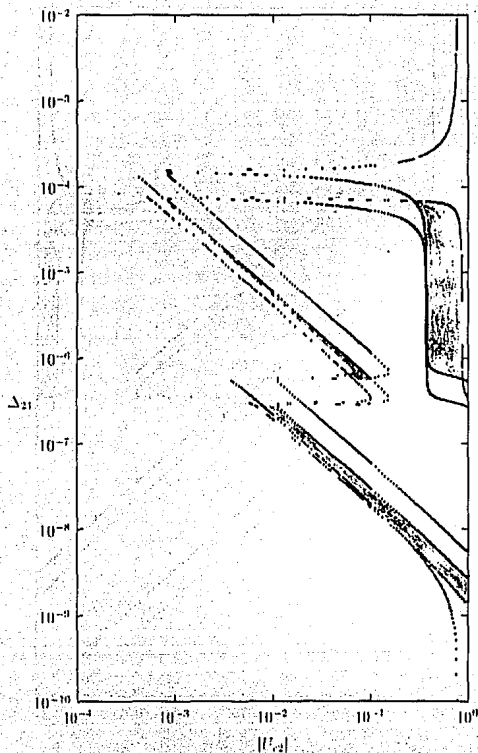


Figura 6.7: Contornos de igual supresión (Iso-SNU) para los experimentos HOMESTAKE (C^{137}) y KAMIOKANDE (efecto Cherenkov) fijando las energías de cada uno de ellos a $E = 5$ MeV y $E = 10$ MeV respectivamente. Las zonas sombreadas corresponden a las intersecciones de $0.19 < P_{\nu_e \nu_e} < 0.35$ y $0.18 < P_{\nu_e \nu_e} < 0.55$ en cada experimento con las restricciones $S = R = 250$.

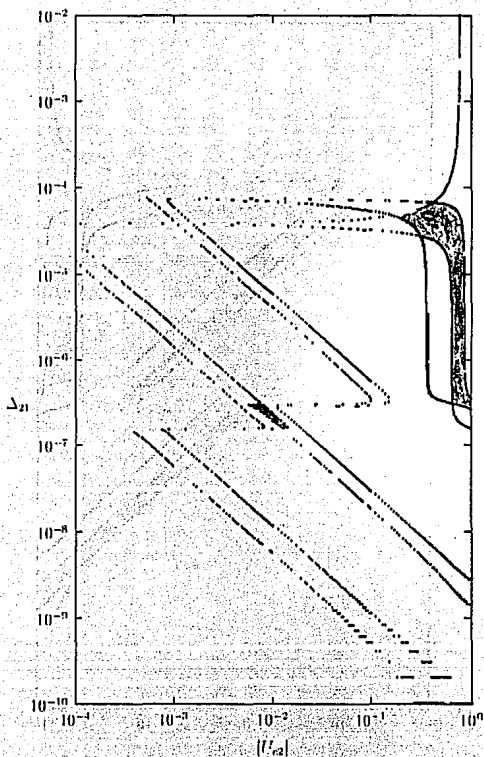


Figura 6.8: Contornos de igual supresión (Iso-SNU) para los experimentos HOMESTAKE (Cl^{37}) y SAGE-GALLEX combinado (Ga^{71}) fijando las energías de cada uno de ellos a $E = 5$ MeV y $E = 0.25$ MeV respectivamente. Las zonas sombreadas corresponden a las intersecciones de $0.19 < P_{\nu_{e\nu_e}} < 0.35$ y $0.38 < P_{\nu_{e\nu_e}} < 0.76$ en cada experimento con las restricciones $S = R = 250$.

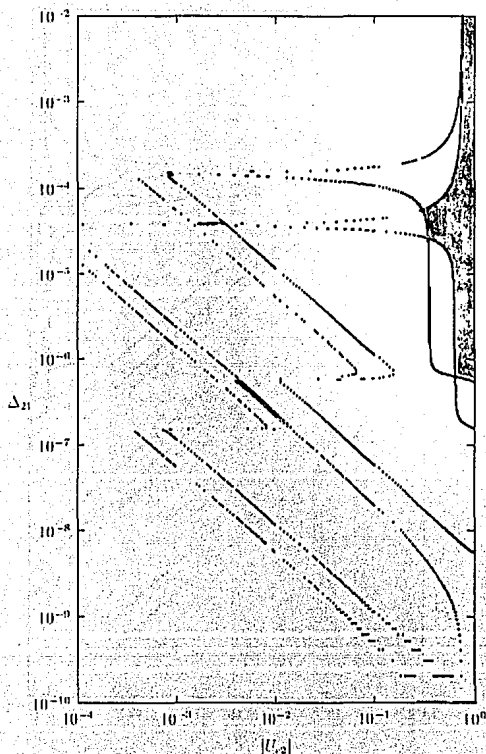


Figura 6.9: Contornos de igual supresión (Iso-SNU) para los experimentos KAMIOKANDE (efecto Cherenkov) y SAGE-GALLIUM combinado (Ga^{71}) fijando las energías de cada uno de ellos a $E = 10$ MeV y $E = 0.25$ MeV, respectivamente. Las zonas sombreadas corresponden a las intersecciones de $0.18 < P_{\nu_e \nu_e} < 0.55$ y $0.38 < P_{\nu_e \nu_e} < 0.76$ en cada experimento con las restricciones $S = R = 250$.

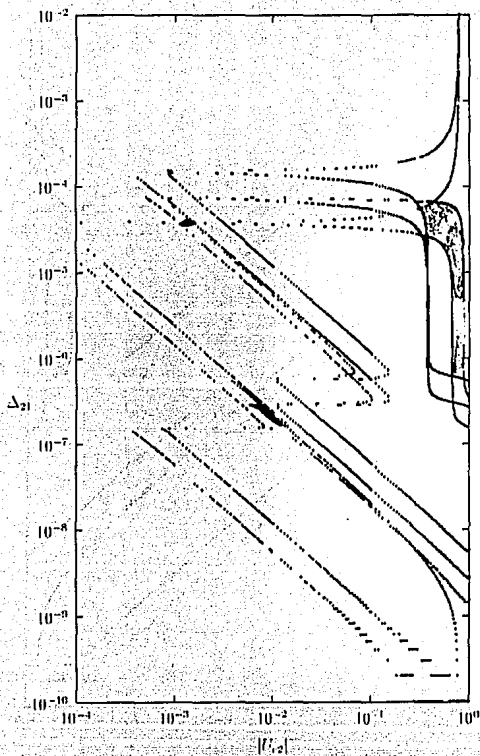


Figura 6.10: Contornos de igual supresión (Iso-SNU) para los experimentos HOMESTAKE ($C\bar{\nu}_e$), KAMIOKANDE (espectro Cherenkov) y SAGE-GALLEX combinado (Ga^{71}) fijando las energías de cada uno de ellos a $E = 5$ MeV, $E = 10$ MeV y $E = 0.25$ MeV respectivamente. Las zonas sombreadas corresponden a las intersecciones de $0.19 < P_{\nu_e \nu_e} < 0.35$, $0.18 < P_{\nu_e \nu_e} < 0.55$ y $0.38 < P_{\nu_e \nu_e} < 0.76$ en cada experimento con las restricciones $S = R = 250$.

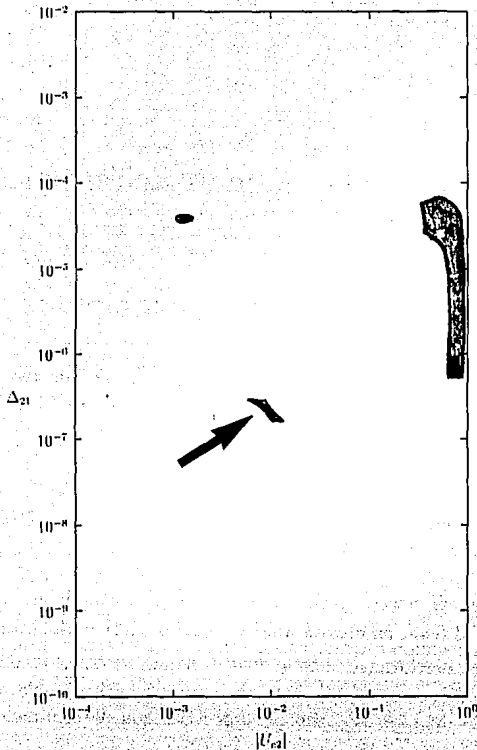


Figura 6.11: Contornos de igual supresión (Iso-SNU) para los experimentos HOMESTAKE (Cl^{37}); KAMIOKANDE (efecto Cherenkov) y SAGE-GALLEX combinado (Ge^{71}) fijando las energías de cada uno de ellos a $E = 5$ MeV; $E = 10$ MeV y $E = 0.25$ MeV respectivamente. Las zonas sombreadas corresponden a las intersecciones de $0.19 < P_{\nu_e\nu_e} < 0.35$; $0.18 < P_{\nu_e\nu_e} < 0.55$ y $0.38 < P_{\nu_e\nu_e} < 0.76$ en cada experimento con las restricciones $S = R = 250$.

Apéndice A

Un teorema de diagonalización para matrices finitas.

En primer lugar, retomaremos un resultado del álgebra lineal acerca de matrices de dimensión finita:

- (1) Una matriz compleja A puede ser diagonalizada por una transformación unitaria si y sólo si A es normal, esto es si

$$AA^\dagger = A^\dagger A. \quad (A.1)$$

- (2) Si B es una matriz arbitraria, entonces las matrices BB^\dagger y $B^\dagger B$ tienen los mismos autovalores.

La condición necesaria en (1) es inmediata, la condición de suficiencia resulta al tener en cuenta que la ecuación $AA^\dagger = A^\dagger A$ implica que las matrices hermíticas $\frac{A+A^\dagger}{2}$ y $\frac{A-A^\dagger}{2i}$ conmutan entre sí, por lo cual pueden ser diagonalizadas por la misma matriz unitaria. Para verificar (2), notemos que los autovalores respectivos son determinados por las ecuaciones.

$$\det (BB^\dagger - \lambda I) = 0 \quad (A.2)$$

y

$$\det (B^\dagger B - \lambda I) = 0. \quad (A.3)$$

Si $\det B \neq 0$,

$$\begin{aligned} \det (BB^\dagger - \lambda I) &= \det B \det (B^\dagger - \lambda B^{-1}) \\ &= \det (B^\dagger - \lambda B^{-1}) \det B = \det (B^\dagger B - \lambda I), \end{aligned}$$

de esta manera las Ecs. (A.2) y (A.3) son idénticas. Si $\det B = 0$, entonces definimos $B(\epsilon) = B - \epsilon I$. Para ϵ suficientemente próximo, pero no igual a cero, tenemos que $\det B(\epsilon) \neq 0$ y de aquí que el $\det (B(\epsilon) B^\dagger(\epsilon) - \lambda I) = \det (B^\dagger(\epsilon) B(\epsilon) - \lambda I)$, esta es una relación entre polinomios en ϵ , y por lo tanto, entre funciones continuas de ϵ , así tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos el resultado deseado.

Ahora procederemos a probar el teorema de la diagonalización.

TEOREMA: *Para toda matriz B existen matrices unitarias U_1 y U_2 tales que*

$$U_1^\dagger B U_2 = D, \tag{A.4}$$

donde D es una matriz diagonal definida no negativa.

Demostración: Sean Z_1 y Z_2 matrices unitarias que diagonalizan a las matrices hermiticas BB^\dagger y $B^\dagger B$. Debido a que estas matrices tienen los mismos autovalores, podemos escribir

$$Z_1^\dagger B B^\dagger Z_1 = Z_2^\dagger B^\dagger B Z_2. \tag{A.5}$$

Definiendo $A = Z_1^\dagger B Z_2$. De aquí que $A^\dagger = Z_2^\dagger B^\dagger Z_1$ y (A.5) puede escribirse

$$A A^\dagger = A^\dagger A. \tag{A.6}$$

Por lo tanto A es una matriz normal y, de acuerdo con (1), existe una matriz unitaria V tal que

$$V^\dagger A V = V^\dagger Z_1^\dagger B Z_2 V = (Z_1 V)^\dagger B (Z_2 V) = D' \tag{A.7}$$

donde D' es diagonal. Siempre es posible escribir a D' en la forma

$$D' = DK,$$

donde D es la matriz diagonal no negativa obtenida reemplazando los elementos de D' por sus valores absolutos, y K es una matriz diagonal unitaria (sus elementos son fases). Si ahora hacemos

$$U_1 = Z_1 V \quad \text{y} \quad U_2 = Z_2 V K^\dagger$$

de (A.7) resulta

$$U_1^\dagger B U_2 = D,$$

con U_1 y U_2 unitarias.

Apéndice B

Derivación de la relación de dispersión en un medio.

En la Teoría Cuántica de Campos, la *relación de dispersión* de una partícula viene dada por el polo de su propagador. De esta manera, si podemos encontrar el propagador completo de un neutrino en un medio, esto puede darnos H de la Ec. (3.59). Para hacer esto, calculamos la autoenergía del neutrino en el baño térmico del medio solar [97]. El propagador completo está dado en la forma

$$\frac{1}{\not{p} - m - \Sigma(p)} \quad (B.1)$$

Para la contribución más baja de la $\Sigma(p)$ viene de los diagramas mostrados en la Fig. 6.12. Considerando solo el diagrama de corriente cargada, obtenemos

$$i \Sigma(p) = \left(\frac{ig}{\sqrt{2}} \right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\lambda L i S_e(k) \gamma_\rho L \cdot \frac{ig^{\lambda\rho}}{M_W^2} \quad (B.2)$$

donde $L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ es el operador de proyección para la *quiralidad izquierda*, $S_e(k)$ es el propagador del electrón y hemos despreciado la dependencia en el momento del propagador W . Para el propagador del electrón, usamos el propagador efectivo en el medio, el cual es

$$i S_e(k) = (\not{k} + m_e) \left[\frac{i}{k^2 - m_e^2} - 2\pi \delta(k^2 - m_e^2) f_F(k \cdot u) \right], \quad (B.3)$$

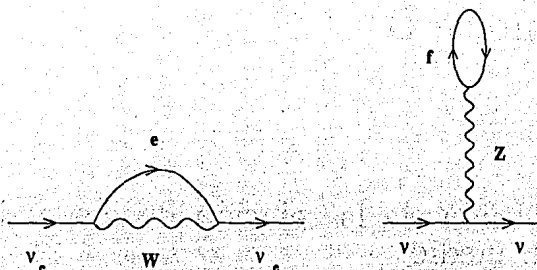


Figura 6.12: Un lazo para la corrección de la autoenergía del propagador del neutrino.

en donde

$$f_F(x) = \frac{\Theta(x)}{e^{\beta(x-\mu)} + 1} + \frac{\Theta(-x)}{e^{-\beta(x-\mu)} + 1}, \quad (B.4)$$

donde Θ es la función escalón en la cual se iguala a +1 si el argumento es positivo y es cero para el caso contrario, μ es el potencial químico y β^{-1} es la temperatura de los electrones en el sustrato.

El primer término para el propagador del electrón en la Ec. (B.3) da renormalización infinita. Esto está presente aún en el vacío y es eliminado por una prescripción de renormalización. El segundo término da

$$-\sqrt{2} G_F (N_{e^-} - N_{e^+}) \gamma_0 L, \quad (B.5)$$

de lo cual podemos obtener la Ec. (3.48). La presencia del operador de proyección de helicidad L en esta fórmula implica que la corrección se aplica solamente a los neutrinos levógiros. De forma análoga, se puede evaluar el diagrama de corriente neutra.

Apéndice C

Demostración de que los autovalores del Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}(t)$ son positivos y diferentes.

De manera explícita los respectivos sumandos del Hamiltoniano definido en la Ec. (1.20), son dados por las matrices

$$O_{12} H_0 O_{12}^T = \begin{pmatrix} \Delta_{12} s_{12}^2 & \Delta_{12} s_{12} c_{12} & 0 \\ \Delta_{12} s_{12} c_{12} & \Delta_{12} c_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix}, \quad (C.1)$$

$$V(t) O_{13}^T O_{13} = \begin{pmatrix} V(t) c_{13}^2 & 0 & V(t) s_{13} c_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ V(t) s_{13} c_{13} & 0 & V(t) s_{13}^2 \end{pmatrix}, \quad (C.2)$$

que sustituida en la Ec. (1.20) nos da

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} & \hat{C} \\ \hat{B} & \hat{D} & 0 \\ \hat{C} & 0 & \hat{E} \end{pmatrix} \quad (C.3)$$

con

$$\hat{A} = \Delta_{12} s_{12}^2 + V(t) c_{13}^2, \quad (C.4)$$

$$\hat{B} = \Delta_{12} s_{12} c_{12}, \quad (C.5)$$

$$\hat{C} = V(t) s_{13} c_{13}, \quad (C.6)$$

$$\hat{D} = \Delta_{21} c_{12}^2, \quad (C.7)$$

$$\hat{E} = \Delta_{31} + V(t) s_{13}^2. \quad (C.8)$$

Para determinar el espectro de valores propios tenemos que calcular

$$\det(\hat{\mathcal{H}} - \lambda I) = \begin{vmatrix} \hat{A} - \lambda & \hat{B} & \hat{C} \\ \hat{B} & \hat{D} - \lambda & 0 \\ \hat{C} & 0 & \hat{E} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

lo cual nos lleva a la ecuación característica

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + b\lambda - c = 0. \quad (C.9)$$

con los coeficientes a , b y c definidos por

$$a \equiv (\hat{A} + \hat{D} + \hat{E}), \quad (C.10)$$

$$b \equiv (\hat{A}\hat{D} + \hat{A}\hat{E} + \hat{E}\hat{D} - \hat{B}^2 - \hat{C}^2), \quad (C.11)$$

$$c \equiv (\hat{B}^2\hat{E} + \hat{C}^2\hat{D} - \hat{A}\hat{D}\hat{E}). \quad (C.12)$$

Sustituyendo en las definiciones (C.10) a (C.12) los valores dados por las Ecs. (C.4) a (C.8) y simplificando obtenemos las expresiones explícitas de los coeficientes de la ecuación cúbica en términos de los parámetros del problema.

$$a = \Delta_{12} + \Delta_{31} + V(t). \quad (C.13)$$

$$b = \Delta_{21} \Delta_{31} + V(t) \left[\Delta_{21} (c_{12}^2 + s_{12}^2 s_{13}^2) + \Delta_{31} c_{13}^2 \right], \quad (C.14)$$

$$c = V(t) \Delta_{21} \Delta_{31} c_{12}^2 c_{13}^2, \quad (C.15)$$

todos ellos definidos positivos.

Sea ahora $F(\lambda)$ el polinomio

$$F(\lambda) = \lambda^3 - a\lambda^2 + b\lambda - c, \quad (C.16)$$

cuyos ceros están dados por (C.9) y que tiende a $\pm\infty$ cuando $\lambda \rightarrow \pm\infty$. Derivando con respecto del tiempo la Ec. (C.16) tenemos

$$F'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2a\lambda + b.$$

Los extremos de $F'(\lambda)$, corresponden a los valores de λ tales que

$$3\lambda^2 - 2a\lambda + b = 0,$$

es decir

$$\lambda_{\mp} = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 3b}}{3}, \quad (C.17)$$

en donde es necesario determinar el valor explícito de $a^2 - 3b$. Para ello, sustituimos los valores de a y b dados por las Ecs. (C.13) y (C.14)

$$\begin{aligned} a^2 - 3b = & \Delta_{21}^2 + \Delta_{31}^2 + V^2(t) - \Delta_{21} \Delta_{31} - V(t) (\Delta_{21} + \Delta_{31}) \\ & + 3V(t) \Delta_{31} s_{13}^2 + 3V(t) \Delta_{21} c_{13}^2 s_{12}^2. \end{aligned}$$

De la expresión anterior los dos últimos términos son obviamente positivos. Por otra parte la cantidad $\mathcal{G}(V(t))$ definida como:

$$\mathcal{G}(V(t)) = V^2(t) - V(t) (\Delta_{21} + \Delta_{31}) + \Delta_{21}^2 + \Delta_{31}^2 - \Delta_{21} \Delta_{31} \quad (C.18)$$

tiene, como función de $V(t)$, un mínimo en $V(t) = (\Delta_{21} + \Delta_{31})/2$. El valor de $\mathcal{G}(V(t))$ en el mínimo es

$$\frac{3}{4}(\Delta_{21} - \Delta_{31})^2 \geq 0,$$

con lo cual podemos concluir que

$$\mathcal{G}(V(t)) \geq 0, \quad (C.19)$$

y a su vez esto implica que,

$$a^2 - 3b \geq 0. \quad (C.20)$$

El análisis anterior nos permite asegurar que los los autovalores del Hamiltoniano $\mathcal{H}(t)$ son *positivos definidos*, para cualesquier valor de los parámetros Δ_{31} , Δ_{21} , s_{ij} , c_{ij} , y para cualquier valor de $V(t)$. De esta manera los autovalores pueden representarse mediante las fórmulas siguientes [98].

$$\lambda_1(t) = \frac{2}{3} \sqrt{a^2 - 3b} \operatorname{Cos} \left(\frac{\phi}{3} \right) - \frac{a}{3}, \quad (C.21)$$

$$\lambda_2(t) = -\frac{1}{3} \sqrt{a^2 - 3b} \left[\operatorname{Cos} \left(\frac{\phi}{3} \right) + \sqrt{3} \operatorname{Sen} \left(\frac{\phi}{3} \right) \right] - \frac{a}{3}, \quad (C.22)$$

y

$$\lambda_3(t) = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 - 3b} \left[\sqrt{3} \operatorname{Sen} \left(\frac{\phi}{3} \right) - \operatorname{Cos} \left(\frac{\phi}{3} \right) \right] - \frac{a}{3}, \quad (C.23)$$

con

$$\phi = \operatorname{Cos}^{-1} \left\{ \frac{2a^3 + 9(3c - ab)}{2(3b - a^2)\sqrt{a^2 - 3b}} \right\}. \quad (C.24)$$

Si bien hemos obtenido expresiones *exactas* para los autovalores, sus implicaciones físicas distan de ser transparentes [99].

Apéndice D

El desarrollo de Magnus.

La ecuación de evolución es

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U}(t, t_0) = \hat{\mathcal{H}}(t) \mathcal{U}(t, t_0), \quad (D.1)$$

con

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(t). \quad (D.2)$$

En general el operador de evolución puede expresarse como

$$\mathcal{U}(t, t_0) = e^{\Omega(t, t_0)}, \quad (D.3)$$

donde

$$\Omega(t, t_0) = \sum_{i=1}^n \Omega_i(t, t_0), \quad (D.4)$$

con la propiedad de ser antihermítico

$$\Omega_i^\dagger(t, t_0) = -\Omega_i(t, t_0), \quad (D.5)$$

haciendo que $\mathcal{U}(t, t_0)$ sea unitario a cada orden.

Sea $A(z)$ y $A'(z) = dA(z)/dz$, con $z \in \text{Re}$ o Im , en general

$$[A(z), A'(z)] \neq 0,$$

entonces

$$\frac{d}{dt} e^{A(z)} = \int_0^1 d\xi e^{\xi A(z)} A'(z) e^{(1-\xi) A(z)}$$

$$= \frac{e^{\Gamma_A - 1}}{\Gamma_A} A'(z) e^{A(z)} \quad (D.6)$$

$$= \left(A'(z) + \frac{1}{2!} \Gamma_A A'(z) + \dots + \frac{1}{n!} \Gamma_A^{n-1} A'(z) + \dots \right) e^{A(z)}, \quad (D.7)$$

donde

$$\Gamma_A \mathcal{X} = [A(z), \mathcal{X}],$$

$$\Gamma_A^2 \mathcal{X} = [A(z), [A(z), \mathcal{X}]],$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_A^n \mathcal{X} = [A(z), [A(z), \dots [A(z), \mathcal{X}]]].$$

En nuestro caso

$$\frac{d}{dt} e^{\Omega(t, t_0)} = \frac{e^{\Gamma_\Omega - 1}}{\Gamma_\Omega} \dot{\Omega}(t, t_0) e^{\Omega(t, t_0)}, \quad (D.8)$$

pero por la Ec. (D.1)

$$\frac{d}{dt} e^{\Omega(t, t_0)} = \mathcal{H}(t) e^{\Omega(t, t_0)}, \quad (D.9)$$

entonces

$$\frac{e^{\Gamma_\Omega - 1}}{\Gamma_\Omega} \dot{\Omega}(t, t_0) = \mathcal{H}(t),$$

despejando $\dot{\Omega}(t, t_0)$

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}(t, t_0) &= \frac{\Gamma_\Omega}{e^{\Gamma_\Omega - 1}} \mathcal{H}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \Gamma_\Omega \dot{\mathcal{H}}(t), \end{aligned} \quad (D.10)$$

en donde B_n son los números de Bernoulli. Escribiendo de forma explícita (D.10)

$$\hat{\Omega}(t, t_0) = \hat{\mathcal{H}}(t) - \frac{1}{2} [\hat{\Omega}(t, t_0), \hat{\mathcal{H}}(t)] + \frac{1}{12} [\hat{\Omega}(t, t_0), [\hat{\Omega}(t, t_0), \hat{\mathcal{H}}(t)]] + \dots$$

Usando (D.4) y tomando en cuenta que

$$\Omega_n(t, t_0) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu^n}\right), \quad (D.11)$$

hallaremos $\hat{\Omega}(t, t_0)$ de forma iterada, como ejemplo lo haremos hasta $n = 3$.

1) $\hat{\Omega}_1(t, t_0) = \hat{\mathcal{H}}(t)$ entonces

$$\Omega_1(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt' \hat{\mathcal{H}}(t'), \quad (D.12)$$

2) $\hat{\Omega}_2(t, t_0) = -\frac{1}{2} [\Omega_1(t, t_0), \hat{\mathcal{H}}(t)]$ entonces

$$\Omega_2(t, t_0) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' [\Omega_1(t', t_0), \hat{\mathcal{H}}(t')]$$

$$\Omega_2(t, t_0) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' [\hat{\mathcal{H}}(t''), \hat{\mathcal{H}}(t')], \quad (D.13)$$

3) $\hat{\Omega}_3(t, t_0) = -\frac{1}{2} [\Omega_2(t, t_0), \hat{\mathcal{H}}(t)] + \frac{1}{12} [\Omega_1(t, t_0), [\hat{\Omega}(t, t_0), \hat{\mathcal{H}}(t)]]$, aplicando la identidad de Jacobi, tendremos

$$\begin{aligned} \Omega_3(t, t_0) = & \frac{1}{6} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt''' \left\{ [\hat{\mathcal{H}}(t'''), [\hat{\mathcal{H}}(t''), \hat{\mathcal{H}}(t')]] \right. \\ & \left. + [[\hat{\mathcal{H}}(t'), \hat{\mathcal{H}}(t'')], \hat{\mathcal{H}}(t''')] \right\}. \quad (D.14) \end{aligned}$$

En general no existe una fórmula recursiva para determinar $\Omega_n(t, t_0)$.

Si $[\mathcal{H}(t'), \mathcal{H}(t'')] = 0$ entonces $\Omega_i(t, t_0)$ será igual a cero para toda i ($i \neq 1$), en consecuencia el operador de evolución (D.2) puede ser aproximado por el primer término en la expansión de Magnus, usando (D.2)

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t') dt'\right).$$

Apéndice E

Los autovalores en las resonancias y los ángulos de mezcla en el medio.

Para el caso de mezcla entre tres generaciones existe una gráfica análoga a la que ha sido dada en la Sec. [3.5 pag. 79] donde los autoestados de masa están trazados como una función de la densidad del número de electrones (ver Fig. 6.13) [100]. En el caso de jerarquía de masas ($m_3^2 \gg m_2^2 \gg m_1^2$), vemos que hay dos regiones bien delimitadas donde los niveles casi se cruzan, dichas regiones ocurren cuando $V(t)^2$, se aproxima a una de las masas del neutrino más pesado. La *Resonancia Baja* ocurre cuando $V(t) \approx \Delta_{21}$, mientras que la *Resonancia Alta* ocurre cuando es $V(t) \approx \Delta_{31}$.

Resonancia Baja

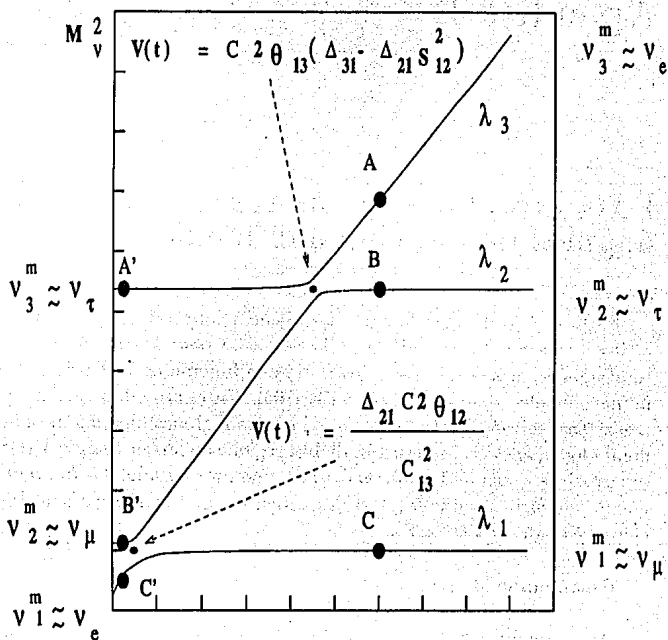
Para estudiar la *Resonancia Baja* consideramos el Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}(t)$ definido por la Ec. (4.20) y que en forma matricial está dado por la Ec. (C.3), ver el apéndice C

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = O_{12} H_0 O_{12}^T + V(t) O_{13}^T Y O_{13},$$

vemos que esta matriz toma la forma

$$\begin{pmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

²De aquí en adelante por razones de consistencia en la notación llamaremos $V(t)$ a lo que en la Sec. 3.5 pag. 78 se denominó como Λ .



$$0 \leq V(t) \ll \Delta_{21} \qquad V(t) \qquad V(t) \gg \Delta_{31}$$

$$\theta_{12}^m \approx \theta_{12} \quad ; \quad \theta_{13}^m \approx \theta_{13}$$

$$\theta_{12}^m \approx \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \theta_{13}^m \approx \frac{\pi}{2}$$

Figura 6.13: Las masas de los tres sabores de neutrinos son una función de $V(t)$, la materia induce masa al neutrino del electrón. Aquí hemos tomado $m_3^m = 5 m_2^m = 25 m_1^m$, $|U_{e2}|^2 = 5 \times 10^{-2}$, y $|U_{e3}|^2 = 5 \times 10^{-4}$. Adaptado de la Ref. [100].

si el término $\hat{C}' = V(t) s_{13} c_{13}$ lo podemos tratar como una perturbación pequeña comparada con $m_3^2 - (m_1^2 + m_2^2)$, en este caso la matriz (C.3) se *parte* en un neutrino desacoplado y en una submatriz $\hat{H}'(t)$ de 2×2 , la cual es para orden cero en el término $V(t) s_{13} c_{13}$

$$\hat{H}'(t) = \begin{pmatrix} \Delta_{21} s_{12}^2 + V(t) c_{13}^2 & \Delta_{21} s_{12} c_{12} \\ \Delta_{21} s_{12} c_{12} & \Delta_{21} c_{12}^2 \end{pmatrix} \quad (E.1)$$

Determinaremos los autovalores de la matriz (E.1) en la forma usual a partir del determinante

$$\begin{vmatrix} \Delta_{21} s_{12}^2 + V(t) c_{13}^2 - \lambda & \Delta_{21} s_{12} c_{12} \\ \Delta_{21} s_{12} c_{12} & \Delta_{21} c_{12}^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

las soluciones de la ecuación cuadrática correspondiente son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (\Delta_{21} + V(t) c_{13}^2) \mp \left[(\Delta_{21} + V(t) c_{13}^2)^2 - 4 V(t) \Delta_{21} c_{12}^2 c_{13}^2 \right]^{1/2} \right\},$$

aplicando relaciones trigonométricas a la ecuación anterior la pondremos en una forma más conveniente

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (\Delta_{21} + V(t) c_{13}^2) \mp \left[(V(t) c_{13}^2 - \Delta_{21} c 2 \theta_{12})^2 + (\Delta_{21} s 2 \theta_{12})^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (E.2)$$

en donde $s 2 \theta_{12} \equiv \text{sen } 2 \theta_{12}$ y $c 2 \theta_{12} \equiv \text{cos } 2 \theta_{12}$. Dentro de la aproximación en la que estamos trabajando, el autovalor λ_3 es simplemente el tercer elemento de la diagonal principal del Hamiltoniano $\mathcal{H}(t)$

$$\lambda_3 = \Delta_{31} + V(t) s_{13}^2. \quad (E.3)$$

Con el ángulo de mezcla dado por (ver Sec. 3.5, pag. 78)

$$\text{sen } 2 \theta_{12}^m(t) = \frac{\Delta_{21} s 2 \theta_{12}}{\sqrt{(V(t) c_{13}^2 - \Delta_{21} c 2 \theta_{12})^2 + (\Delta_{21} s 2 \theta_{12})^2}} \quad (E.4)$$

De tal manera

$$\mathcal{H}_D(t) \simeq O_{12}^T(\theta_{12}^m(t)) \mathcal{H}(t) O_{12}(\theta_{12}^m(t))$$

con

$$O_{12}(\theta_{12}^m(t)) = \begin{pmatrix} c_{12}(\theta_{12}^m(t)) & s_{12}(\theta_{12}^m(t)) & 0 \\ -s_{12}(\theta_{12}^m(t)) & c_{12}(\theta_{12}^m(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (E.5)$$

Por lo tanto $O_m(t)$, en la *Resonancia Baja*, el Hamiltoniano $\mathcal{H}(t)$ es (aproximadamente) diagonalizado por

$$O_m(t) \simeq O_{12}(\theta_{12}^m(t)), \quad (E.6)$$

con lo cual la matriz de mezcla en el medio $U_m(t)$ es dada por

$$U_m(t) \simeq O_{23} \Gamma O_{13} O_{12}(\theta_{12}^m(t)). \quad (E.7)$$

El ángulo de mezcla es modificado sustancialmente en la resonancia baja por la dispersión coherente del medio. Cuando $V(t) \rightarrow 0$, $\theta_{12}^m(t) \rightarrow \theta_{12}$ y la matriz de mezcla es justamente la expresión para el vacío, para $V(t) \gg \Delta_{21}$, $\theta_{12}^m(t) \rightarrow \pi/2$. Por otro lado, el rasgo distintivo más interesante de $\theta_{12}^m(t)$ es su conducta resonante como una función de $V(t)$, de la expresión (E.4) la resonancia ocurre cuando

$$V(t) c_{13}^2 = \Delta_{21} c 2\theta_{12}, \quad (E.8)$$

en cuyo caso, tanto θ_{13} como θ_{23} mantienen sus valores del vacío, mientras que el ángulo de mezcla en el medio $\theta_{12}^m(t) \approx \pi/4$, correspondiendo a la mezcla máxima para el caso de resonancia entre dos neutrinos, analizado en la Sec. 3.5 pag. 78.

Resonancia Alta

Para hallar los autovalores en la región de *Resonancia Alta*, tomamos el Hamiltoniano definido por la Ec. (4.18)

$$\mathcal{H}(t) = O_{13}^T O_{12}^T H_0 O_{12}^T O_{13}^T + V(t) Y.$$

Explicitamente tenemos

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} & \hat{C} \\ \hat{B} & \hat{D} & -\hat{B} \\ \hat{C} & -\hat{B} & \hat{E} \end{pmatrix}, \quad (E.9)$$

donde

$$\hat{A} = \Delta_{21} s_{12}^2 c_{13}^2 + \Delta_{31} s_{13}^2 + V(t), \quad (E.10)$$

$$\hat{B} = \Delta_{21} s_{12} c_{12} c_{13}, \quad (E.11)$$

$$\hat{C} = \Delta_{31} s_{13} c_{13} - \Delta_{21} s_{12}^2 s_{13} c_{13}, \quad (E.12)$$

$$\hat{D} = \Delta_{21} c_{12}^2, \quad (E.13)$$

$$\hat{E} = \Delta_{21} s_{12}^2 s_{13}^2 + \Delta_{31} c_{13}^2. \quad (E.14)$$

La matriz (E.9) tomará la forma

$$\begin{pmatrix} \times & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \end{pmatrix},$$

si el término $\hat{B} = \Delta_{21} s_{12} c_{12} c_{13}$ lo podemos tratar como una perturbación pequeña, y en este caso la matriz (E.9) se parte en un neutrino desacoplado y en una submatriz $\hat{\mathcal{H}}'(t)$ de 2×2 . Para orden cero en el término $\Delta_{21} s_{12} c_{12} c_{13}$

$$\hat{\mathcal{H}}'(t) = \begin{pmatrix} \Delta_{21} s_{12}^2 c_{13}^2 + \Delta_{31} s_{13}^2 + V(t) & \Delta_{31} s_{13} c_{13} - \Delta_{21} s_{12}^2 s_{13} c_{13} \\ \Delta_{31} s_{13} c_{13} - \Delta_{21} s_{12}^2 s_{13} c_{13} & \Delta_{21} s_{12}^2 s_{13}^2 + \Delta_{31} c_{13}^2 \end{pmatrix} \quad (E.15)$$

Determinando los autovalores de la Ec. (E.15) en la forma usual

$$\begin{vmatrix} \Delta_{21} s_{12}^2 c_{13}^2 + \Delta_{31} s_{13}^2 + V(t) - \lambda & \Delta_{31} s_{13} c_{13} - \Delta_{21} s_{12}^2 s_{13} c_{13} \\ \Delta_{31} s_{13} c_{13} - \Delta_{21} s_{12}^2 s_{13} c_{13} & \Delta_{21} s_{12}^2 s_{13}^2 + \Delta_{31} c_{13}^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

las soluciones de la ecuación cuadrática correspondiente son

$$\lambda_{\mp} = \frac{1}{2} \left\{ (\Delta_{31} + \Delta_{21} s_{12}^2 + V(t)) \mp \left[(\Delta_{31} + \Delta_{21} s_{12}^2 + V(t))^2 - 4 \left[V(t) (\Delta_{21} s_{12}^2 s_{13}^2 + \Delta_{31} c_{13}^2) + \Delta_{21} \Delta_{31} s_{12}^2 \right] \right]^{1/2} \right\} \quad (E.16)$$

aplicando relaciones trigonométricas a la ecuación anterior la pondremos en una forma más conveniente

$$\lambda_{\mp} = \frac{1}{2} \left\{ (\Delta_{31} + \Delta_{21} s_{12}^2 + V(t)) \mp \left[(V(t) - c 2\theta_{13} (\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2))^2 + ((\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) s 2\theta_{13})^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (E.17)$$

en donde $s 2\theta_{13} \equiv \text{sen } 2\theta_{13}$ y $c 2\theta_{13} \equiv \text{cos } 2\theta_{13}$. El último autovalor λ_2 es simplemente la componente central de la diagonal principal en el Hamiltoniano $\mathcal{H}(t)$ completo,

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \Delta_{21} (1 + c 2\theta_{12}). \quad (E.18)$$

De las Ecs. (E.17) y (E.18) obtenemos los autovalores del Hamiltoniano $\mathcal{H}(t)$; sin embargo, están desordenados, es decir:

$$\mathcal{H}_D(t) = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_+ \end{pmatrix}, \quad (E.19)$$

para ordenarlos, tendremos que multiplicar la matriz $\mathcal{H}_D(t)$ por una transformación de similitud (unitaria) adecuada. Para ello encontraremos que la matriz ortogonal de rotación O_{12} definida en la Ec. (4.8) evaluada en $\theta = \pi/2$ cumple con este cometido, es decir:

$$\mathcal{H}_D(t) = O_{12}^T(\pi/2) \mathcal{H}_D(t) O_{12}(\pi/2) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_- & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_+ \end{pmatrix}. \quad (E.20)$$

Gracias a lo anterior los autovalores cambiarán de nombre de la siguiente manera, pues ahora ya están bien colocados:

$$\lambda_2 \rightarrow \lambda_1, \quad \lambda_- \rightarrow \lambda_2, \quad \lambda_+ \rightarrow \lambda_3.$$

De tal manera que los autovalores que previamente se obtuvieron en las Ecs. (E.17) y (E.18) cambiarán a

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \Delta_{21} (1 + c 2\theta_{12}), \quad (E.21)$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left\{ (\Delta_{31} + \Delta_{21} s_{12}^2 + V(t)) \mp \left[(V(t) - c 2\theta_{13} (\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2))^2 + ((\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) s 2\theta_{13})^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (E.22)$$

Y el ángulo de mezcla en el medio está dado por (ver Sec. 3.5, pag. 78)

$$\text{sen } 2\theta_{13}^m(t) = \frac{(\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) s 2\theta_{13}}{\sqrt{[V(t) - c 2\theta_{13} (\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2)]^2 + [(\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) s 2\theta_{13}]^2}} \quad (E.23)$$

Entonces

$$\mathcal{H}_D(t) \simeq O_{12}^T(\pi/2) O_{13}^T(\theta_{13}^m(t)) \mathcal{H}(t) O_{13}(\theta_{13}^m(t)) O_{12}(\pi/2),$$

con

$$O_{13}(\theta_{13}^m(t)) = \begin{pmatrix} c_{13}(\theta_{13}^m(t)) & 0 & s_{13}(\theta_{13}^m(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}(\theta_{13}^m(t)) & 0 & c_{13}(\theta_{13}^m(t)) \end{pmatrix}, \quad (E.24)$$

de lo anterior podemos asegurar que para diagonalizar aproximadamente $\mathcal{H}(t)$ en la *Resonancia Alta* debemos usar:

$$O_m(t) \simeq O_{13}(\theta_{13}^m(t)) O_{12}(\pi/2), \quad (E.25)$$

con lo cual la matriz de mezcla en el medio $U_m(t)$ es dada por

$$U_m(t) \simeq O_{23} \Gamma O_{13}(\theta_{13}^m(t)) O_{12}(\pi/2). \quad (E.26)$$

De forma análoga al análisis que se hizo para la *Resonancia Baja*, cuando $V(t) \rightarrow 0$; $\theta_{13}^m(t) \rightarrow \theta_{13}$, y cuando $V(t) \gg \Delta_{31}$, $\theta_{13}^m(t) \rightarrow \pi/2$. La conducta resonante de $\theta_{13}^m(t)$ en la expresión (E.23) ocurre cuando,

$$V(t) = c 2\theta_{13} (\Delta_{31} - \Delta_{21} s^2). \quad (E.27)$$

Para el caso de la *Resonancia Alta* θ_{12} y θ_{23} mantiene sus valores del vacío, mientras que el ángulo de mezcla en el medio es $\theta_{13}^m(t) \approx \pi/4$, correspondiendo al caso de oscilaciones de dos especies.

El análisis anterior muestra que, para muchas opciones de masas y ángulos de mezcla, las oscilaciones de tres neutrinos en materia se separan en dos resonancias, cada una semejante a una resonancia de dos sabores. Las resonancias ocurren cuando la masa inducida del neutrino del electrón, $V(t)$, llega a degenerar como un estado de masa más pesado. Entonces una mezcla pequeña del autoestado de vacío entre el neutrino del electrón y el autoestado de masa más pesado puede llegar a ser muy importante. Esto es cierto para más de tres generaciones y nuestro análisis aproximado puede ser generalizado rápidamente. Para tres neutrinos, con una pequeña mezcla de autoestados de vacío, las resonancias son, una e - 2 (o, aproximadamente, $c - \mu$), dicha resonancia ocurre cuando $V(t) \approx \Delta_{21}$ y la otra e - 3 (o, aproximadamente, $c - \tau$), esta ocurrirá cuando $V(t) \approx \Delta_{31}$. Nosotros nos referiremos a dichas resonancias como *Resonancia Baja (l)*, y como *Resonancia Alta (h)*, respectivamente.

Nuestro formalismo aproximado asume que hay dos resonancias y calcula los ángulos de mezcla en materia cerca de cada resonancia como una función de $V(t)$. La validez de esta afirmación depende de las diferencias de masas elevadas al cuadrado y de ángulos de mezcla en vacío dado que ellos determinan la localización y amplitud (anchura) de las resonancias. Los efectos de la materia entran sólo a través de $V(t)$ de modo que las resonancias estén bien separadas cuando

Elementos de matriz en materia	$V(t) \rightarrow 0$	$V_i(t) \ll V(t) \ll V_h(t)$	$V(t) \rightarrow \infty$
$ O_{e1}^m(t) ^2$	$ U_{e1} ^2$	0	0
$ O_{e2}^m(t) ^2$	$ U_{e1} ^2$	$ U_{e1} ^2 + U_{e2} ^2$	0
$ O_{e3}^m(t) ^2$	$ U_{e3} ^2$	$ U_{e3} ^2$	1

Tabla 6.1: Los elementos de la matriz de mezcla como una función de $V(t)$, evaluados en los casos límite.

$$V_i(t) + \delta V_i(t) \ll V_h(t) + \delta V_h(t), \quad (E.28)$$

donde $V_{i(h)}(t)$ es el valor de $V(t)$ en la resonancia baja (alta) y $\delta V_{i(h)}(t)$ es la amplitud de esa resonancia. Estas cantidades pueden ser halladas de aproximar expresiones cercanas a cada resonancia

$$V_i(t) = \frac{\Delta_{21} c 2\theta_{12}}{c_{13}^2}; \quad \delta V_i(t) = \frac{\Delta_{21} s 2\theta_{12}}{c_{13}^2}, \quad (E.29)$$

$$V_h(t) = (\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) c 2\theta_{13}; \quad \delta V_h(t) = (\Delta_{31} - \Delta_{21} s_{12}^2) s 2\theta_{13}. \quad (E.30)$$

Para ángulos pequeños, la Ec. (E.28) toma la forma

$$\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{31}} \ll 1. \quad (E.31)$$

Para jerarquía de masas ($m_1^2 \ll m_2^2 \ll m_3^2$), la Ec. (E.28) quedará como

$$\theta_{13} < \frac{\pi}{8} + \mathcal{O}\left[\frac{m_2^2}{m_3^2}, \frac{m_1^2}{m_3^2}\right], \quad (E.32)$$

θ_{13} es el ángulo asociado con la mezcla $e - 3$. La Ec. (E.32) depende de cómo definimos la amplitud de resonancia pero, para el orden principal las Ecs. (E.31) y (E.32) son independientes de los parámetros

pequeños. Las dos ecuaciones son similares en que una vez que tenemos los cocientes de las diferencias de las masas elevadas al cuadrado o los ángulos de mezcla pequeños, la restricción en los parámetros es entonces débil. Cuando la Ec. (E.28) es satisfecha las dos resonancias se separan y serán mejor descritas por una aproximación de dos sabores cerca de cada resonancia.

Las expresiones aproximadas son fáciles de usar y gracias a ello, para dos resonancias bien separadas, combinamos las expresiones de primer orden de cada resonancia para así poder construir una fórmula general. La matriz de mezcla que relaciona los autoestados de sabor con los autoestados de interacción (base adiabática), puede obtenerse combinando las Ecs. (E.6) y (E.25), dándonos una expresión muy general

$$O_m(t) = O_{23}(\theta_{23}^m(t)) \Gamma(\delta_m(t)) O_{13}(\theta_{13}^m(t)) O_{12}(\theta_{12}^m(t)) \quad (E.33)$$

donde $\theta_{12}^m(t)$ y $\theta_{13}^m(t)$ son los ángulos de mezcla dados por las expresiones (E.1) y (E.23) respectivamente, el ángulo $\theta_{23}^m(t) = cte.$, cuando tenemos jerarquía de masas, pues en este caso $O_{23}(\theta_{23}^m(t)) = I$; de igual manera $\Gamma(\delta_m(t))$ permanece constante.

Cuando $V_h(t) \gg V_l(t)$ entonces los ángulos de mezcla en materia tomarán los valores aproximados de

$$\theta_{12}^m(V_h(t)) \simeq \pi/2 \quad \text{y} \quad \theta_{13}^m(V_l(t)) \simeq \theta_{13} \quad (E.34)$$

Más allá de las resonancias $\theta_{12}^m(t)$, $\theta_{13}^m(t)$ y $O_m(t)$ toman los valores asintóticos simples (ver la Tabla E.1).

Una vez obtenidos los autovalores de manera aproximada en las resonancias, pasaremos a mostrar que no son tan diferentes de los autovalores exactos.

Resonancia Baja

Para la *Resonancia Baja* los autovalores deben satisfacer

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0; \quad (E.35)$$

donde λ_i ($i = 1, 2, 3$) denotan los autovalores aproximados ahí dados por las Ecs. (E.2) y (E.3). Sustituyéndolos en la Ec. (E.35) llegamos

$$\lambda_i^3 - a_i \lambda_i^2 + b_i \lambda_i - c_i = 0 \quad (E.36)$$

con

$$a_i = \Delta_{21} + \Delta_{31} + V(t), \quad (E.37)$$

$$b_i = \Delta_{21} \Delta_{31} + V(t) \left[\Delta_{31} c_{13}^2 + s_{13}^2 (\Delta_{21} + V(t) s_{13}^2) \right], \quad (E.38)$$

$$c_i = V(t) \Delta_{21} c_{12}^2 \left[\Delta_{13} c_{13}^2 + V(t) s_{13}^2 c_{13}^2 \right]. \quad (E.39)$$

Comparando (C.13) con (E.37) vemos que $a = a_i$, las diferencias están en los restantes coeficientes. Definiendo al r cociente de las masas de la Ec. (E.31) como

$$r \equiv \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{31}}, \quad (E.40)$$

tendremos

$$b = \Delta_{21} \Delta_{31} + V(t) \Delta_{31} c_{13}^2 \left[1 + r \left(\frac{s_{12}^2 s_{13}^2}{c_{13}^2} + \frac{c_{12}^2}{c_{13}^2} \right) \right], \quad (E.41)$$

$$b_i = \Delta_{21} \Delta_{31} + V(t) \Delta_{31} c_{13}^2 \left[1 + r \left(\frac{s_{12}^2}{c_{13}^2} \right) + V(t) \frac{s_{13}^2}{\Delta_{31}} \right], \quad (E.42)$$

$$c = V(t) \Delta_{21} \Delta_{31} c_{12}^2 c_{13}^2, \quad (E.43)$$

$$c_i = V(t) \Delta_{21} \Delta_{31} c_{12}^2 c_{13}^2 \left[1 + V(t) \frac{s_{13}^2}{\Delta_{31}} \right]. \quad (E.44)$$

Dividiendo b_i/b así como c_i/c y evaluando $V(t)$ en la *Resonancia Baja*

$$b_i = (1+r)b \quad ; \quad c_i = (1+r)c, \quad (E.45)$$

tomando en cuenta que en general $r \ll 1$ encontramos

$$b_i \simeq b \quad ; \quad c_i \simeq c.$$

Resonancia Alta

Para la *Resonancia Alta* procederemos de forma análoga, para ello tomaremos la Ec. (E.35) y sustituiremos los autovalores aproximados dados por las Ecs. (E.21) y (E.22)

$$\lambda_h^3 - a_h \lambda_h^2 + b_h \lambda_h - c_h = 0 \quad (E.46)$$

con

$$a_h = \Delta_{21} + \Delta_{31} + V(t), \quad (E.47)$$

$$b_h = \Delta_{21} \Delta_{31} + V(t) \left[\Delta_{31} c_{13}^2 + \Delta_{21} (s_{12}^2 s_{13}^2 + c_{12}^2) + \Delta_{21}^2 s_{12}^2 c_{12}^2 \right], \quad (E.48)$$

$$c_h = V(t) \Delta_{21} c_{12}^2 \left[\Delta_{13} c_{13}^2 + \Delta_{21} (s_{12}^2 s_{13}^2 + \Delta_{31} s_{12}^2) \right]. \quad (E.49)$$

Comparando directamente (C.13) con (E.47) vemos que $a = a_h$ y las diferencias están en los restantes coeficientes. Tomando la definición (E.10) quedarán

$$b_h = \Delta_{21} \Delta_{31} + V(t) \Delta_{31} c_{13}^2 \left[1 + r \left(\frac{s_{12}^2 s_{13}^2}{c_{13}^2} + \frac{c_{12}^2}{c_{13}^2} + \frac{s_{12}^2 c_{12}^2}{c_{13}^2} \right) \right], \quad (E.50)$$

$$c_h = V(t) \Delta_{21} \Delta_{31} c_{12}^2 c_{13}^2 \left[1 + r \left(\frac{s_{12}^2 s_{13}^2}{c_{13}^2} + \frac{\Delta_{31} s_{21}^2}{c_{13}^2} \right) \right]. \quad (E.51)$$

Dividiendo b_h/b y c_h/c ,

$$b_h = (1+r)b \quad ; \quad c_h = (1+r)c, \quad (E.52)$$

tomando en cuenta que $r \ll 1$ tendremos

$$b_h \simeq b \quad ; \quad c_h \simeq c.$$

De lo anterior podemos afirmar que el formalismo empleado para diagonalizar de manera aproximada los Hamiltonianos $\mathcal{H}(t)$ y $\tilde{\mathcal{H}}(t)$ es válido, pues los autovalores computados de esta manera en cada una de las resonancias son los correctos.

Apéndice F

Programas FORTRAN para calcular la probabilidad de supervivencia de los neutrinos del electrón que provienen del Sol, así como los contornos Iso-SNU a una energía fija, ambos para tres generaciones.

```

c
c Este programa calcula la probabilidad de supervivencia
c de tres neutrinos provenientes del Sol.
c
c
c      double precision A2,C2,D2,D22,Fa1,Fa2,Fa3,Fc1,Fc2,Fc3
c
c
c      archivo de salida de resultados : neutri3b.dat
c
c      open(unit=7,file='neutri3b.dat',status='old')
c
c
c *****
c La probabilidad esta dada por la relacion
c
c <Pne>=0.25*ars13*(1.0 -(1.0-2*Pa)*rs12)+{0.5*brs13
c      - 0.25*brs12*ars13}*Pc
c

```



```

C
C *****

```

```

c Parametros libres : ( S12 = Sin^2 (2 Theta12)
c                      S13 = Sin^2 (2 Theta13)
c                      R   = Delta 31 / Delta 21
c
c
c
c

```

```

Write(*,*)'Este programa calcula la probabilidad de'
write(*,*)'provenientes del Sol'

```

```

write(*,*)
write(*,*)'*****'
write(*,*)

```

```

Write(*,*)'Parametros libres *input: '

```

```

Write(*,*)'S12 : '

```

```

Read(*,*) S12

```

```

Write(*,*)'S13 : '

```

```

Read(*,*) S13

```

```

Read(*,*) R

```

```

Write(*,*)'Limite inferior x: (-20,..5) '

```

```

Read(*,*) XLI

```

```

Write(*,*)'Limite superior x: (-20,..5) '

```

```

Read(*,*) XLS

```

```

Write(*,*)

```

```

Write(*,*)'Numero de pasos:'

```

```

Read(*,*) Paso

```

```

c

```

```

c

```

```

write(7,*)'# Parametros: '

```

```

write(7,*)'# S13= ', S13

```

```

write(7,*)'# R = ', R

```

```

write(*,*)

```

```

write(7,*)'# x Probabilidad '

```

```
write(7,*)'#*****'
```

```
write(7,*)
```

c

c

```
rs12 = sqrt(1.0 - S12 )
```

```
rs13 = sqrt(1.0 - S13 )
```

```
ars12 = 1.0 + rs12
```

```
brs12 = 1.0 - rs12
```

```
ars13 = 1.0 + rs13
```

```
brs13 = 1.0 - rs13
```

c

c

c

c

c

c

```
Variable independiente : x XLI < x < XLS
```

c

```
XLS lim sup
```

c

c

```
*****
```

```
step = ( XLS - XLI )/paso
```

```
do 10 x= XLI,XLS,step
```

c

c

c

```
Parametros dependientes de x :
```

c

```
a1aux = -(5.0 + x)
```

```
V0 = 1.505198676*10.0**a1aux
```

```
D0 = 1.673216428*10.0**a2aux
```

c

c

c

c

c

```
Parametros adiabaticos :
```

c

```
XKL = D0*S12/ rs12
```

```
XKH = D0*(R- 0.5*brs12)*S13/rs13
```

```

c
c
DEN = SQRT ( (V0*0.5*ars13- rs12)**2 + S12 )
XNUM = ( .rs12 - V0*0.5*ars13 )
C2T12 = XNUM / DEN
c
c   if( (abs(c2t12)-1.0).le.0.000000001) then
c     c2t12=anint(c2t12)
c   endif
T12 = 0.5*acos( C2T12 )

```

```

c
c
c

```

```

DEN2=SQRT((V0-rs13*(R-0.5*brs12) )**2
+ S13*(R-0.5*brs12)**2 )

```

```

c
c
c
c   XNUM2= ( rs13*(R - 0.5*brs12) - V0)
c   C2T13 = XNUM2/ DEN2
c   if( (abs(c2t13)-1.0).le.1.0E-30) then
c     c2t13=anint(c2t13)
c   endif

```

```

c
c   T13 = 0.5*ACOS( C2T13)

```

```

c
c
c

```

Angulos de Mezcla, en materia y en vacio :

```

c
c
c   Th12 = 0.5*acos(rs12)
c   Th12M = T12
c   Th13 = 0.5*acos(rs13)
c   Th13M = T13

```

```

c
c
c
c

```



```

c          Fc2= C2
c          Fc3= 2.0
c          endif

c
c          Calculo de probabilidades parciales
c
c          Pa= 0.25*( Fa1* ( 1.0 + c2t12)*( 1.0 + c2t13) +
1          Fa2* ( 1.0 - c2t12)*( 1.0 + c2t13) +
1          Fa3* ((1.0-cd2)**2)*( 1.0 - c2t13) )

c
c          Pc= 0.25*( Fc1*(1.0 + c2t12)*(1.0 + c2t13) +
1          Fc2*(1.0 - c2t12)*(1.0 + c2t13) +
1          Fc3*(1.0 - c2t13) )

c
c          Finalmente la probabilidad de supervivencia
c
c
c
c
c          Proba = 0.25*ars13*(1.0-(1.0-2.0*Pa)*rs12) +
c          (0.5*brs13 - 0.25*brs12*ars13)*Pc
c
c
c          write(7,2001) x ,Proba
c          2001 format(4(F15.10,2x))
c          10          continue

c
c          write(*,*)'Ver resultados en archivo neutri3b.dat'
c          end

```

```

c
c
c Este programa calcula la region permitida del
c del espacio de parametros (contornos Iso-SNU)
c para los neutrinos del electron que provienen
c del Sol, experimento HOMESTAKE para n = 3, y
c con E = 5 Mev.
c
c
c
c
cdouble precision A2,S12,S13,C2,D2,D22,Fa1,Fa2,Fa3,Fc1
double precision stp,S12IN,S12FI,XLI,XLS,paso,R,S13,S
c
c
c
c archivo de salida de resultados : entrada.dat
c
c open(unit=7,file='entrada.dat',status='old')
c
c     open(unit=10,file='sal21.dat',status='old')
c     open(unit=20,file='sal22.dat',status='old')
c     open(unit=30,file='sal23.dat',status='old')
c     open(unit=40,file='sal24.dat',status='old')
c     open(unit=50,file='sal25.dat',status='old')
c     open(unit=60,file='sal26.dat',status='old')
c     open(unit=70,file='sal27.dat',status='old')
c     open(unit=80,file='sal28.dat',status='old')
c     open(unit=90,file='sal29.dat',status='old')
c
c *****
c La probabilidad esta dada por la relacion
c
c <Pne>=0.25*ars13*{1.0 -(1.0-2*Pa)*rs12}+{0.5*brs13
c     -0.25*brs12*ars13}*Pc

```

```

C
C *****
C
C Parametros libres :      S12 = Sin^2 (2 Theta12)
C                          S13 = Sin^2 (2 Theta13)
C                          R  = Delta 31 / Delta 21
C
C
C
C
C Write(*,*)'*****'
C Write(*,*)
C Write(*,*)'Este programa calcula la region permitida del'
C write(*,*)'del espacio de parametros (contornos Iso-SNU)'
C write(*,*)'para los neutrinos del electron que provienen'
C write(*,*)'del Sol, experimento HOMESTAKE para n = 3, y'
C Write(*,*)'con E = 5 Mev.'
C write(*,*)
C write(*,*)'*****'
C       write(*,*)
C Write(*,*)'Parametros libres   input:'
C Write(*,*)
C Write(*,*)'S12 : '
C Read(*,*) S12
C Write(*,*)'S13 : '
C Read(*,*) S13
C Write(*,*)'S'
C Read(*,*)S
C Write(*,*)'R'
C Read(*,*) R
C       Write(*,*)'Limite inferior x: (-20,..5) '
C       Read(*,*) XLI
C       Write(*,*)'Limite superior x: (-20,..5) '
C       Read(*,*) XLS
C       Write(*,*)

```

```

Write(*,*)'Numero de pasos:'
Read(*,*) Paso
c
C      write(7,*)'#   Parametros: '
C write(7,*)'#   S12=           ', S12
C write(7,*)'#   S13=           ', S13
C write(7,*)'#   R =           ', R
C write(*,*)
C write(7,*)'# Sin^2(TH12) x Probabilidad '
C write(7,*)'#*****'
C      write(7,*)

do i=1,10000
If( (i .eq. 1) .or. (i .eq. 10) .or. (i .eq. 100)
.or. (i .eq. 1000) .or. (i .eq. 10000))then
      stp=0.000001*i
S12IN=0.00001*i
S12FI=0.0001*i
Call coco(S12IN,S12FI,stp,XLI,XLS,Paso,R,S13,S)
end if
enddo
stop
end

c
c      Subrutina que calcula .....
c
c      Subroutine coco(S12IN,S12FI,stp,XLI,XLS,paso,R,S13,S)
c double precision A2,S12,S13,C2,D2,D22,Fa1,Fa2,Fa3,Fc1
c double precision S12IN,S12FI,stp,XLI,XLS,Paso,R,S13,S
c      if(S12FI .ge. 1)then
c          S12FI=1.5
c      end if

```



```

do S12=S12IN,S12FI,stp
S13 = (sqrt(1.0/S))*S12
rs12 = sqrt(1.0 - S12)
rs13 = sqrt(1.0 - S13)
ars12 = 1.0 + rs12
brs12 = 1.0 - rs12
ars13 = 1.0 + rs13
brs13 = 1.0 - rs13
c
c
c
c
c
cVariable independiente :   x   XLI < x < XLS
c                                     XLI lim inf
c                                     XLS lim sup
c
c*****
step = ( XLS - XLI )/paso
do 10 x= XLI,XLS,step
c
c
c Parametros dependientes de x :
c
a1aux=-(5.0 + x)
a2aux= 7 + x
VO = 7.525993382*10.0**a1aux
DO = 3.346432855*10.0**a2aux
c
c
c
c Parametros adiabaticos :
c
XKL = DO*S12/ rs12
XKH = DO*(R- 0.5*brs12 )*S13/rs13
c

```

```

c
c
DEN = SQRT ( (V0*0.5*ars13- rs12)**2 + S12 )
XNUM = ( rs12 - V0*0.5*ars13 )
C2T12 = XNUM / DEN
c if( (abs(c2t12)-1.0).le.0.000000001) then
c c2t12=anint(c2t12)
c endif
T12 = 0.5*acos( C2T12 )
c
c
c
DEN2=SQRT((V0-rs13*(R-0.5*brs12) )**2 +
          S13*(R-0.5*brs12)**2)
XNUM2= ( rs13*(R - 0.5*brs12) - V0)
C2T13 = XNUM2/ DEN2
c if( (abs(c2t13)-1.0).le.1.0E-30) then
c c2t13=anint(c2t13)
c endif

T13 = 0.5*ACOS( C2T13)
C
C
C
c
c
c Angulos de Mezcla, en materia y en vacio :
c
c
Th12 = 0.5*acos(rs12)
Th12M = T12
Th13 = 0.5*acos(rs13)
Th13M = T13
c
c
c
c

```

```

A2 = 2.0*(( Th12M - Th12 )**2)*exp(-2.0*XKL)
c
C2 = 2.0*(( Th13M - Th13 )**2)*exp(-2.0*XKH)
c
D2 = (A2 + C2)
D22 = D2**2
c
c
s2d2= ( sin( sqrt(D2) ) )**2
cd2 = cos( sqrt(D2) )
c
c
c
c
c
c Probabilidades Parciales "Pa" y "Pc"
c
c
c Factores importantes:
c
c
if (D2.ge.1E-90)then ! lim D2 -> 1E-30
c
    Fa1= ( (C2+A2*cd2)**2 )/ D22
    Fa2= A2*D2*s2d2 / D22
    Fa3= 2.0*A2*C2/ D22
    Fc1= ( A2*C2*( 1.0 - cd2 )**2 )/ D22
    Fc2= C2*D2*s2d2/ D22
    Fc3= 2.0*( A2 + C2*cd2 )**2/ D22
c
else ! Si D2 es muy peque~no aproxima por los limites
c
    Fa1= 1.0
    Fa2= A2
    Fa3= A2*C2/2.0
    Fc1= A2*C2/4.0
    Fc2= C2

```

```

c          Fc3= 2.0
endif

c
c
c          Calculo de probabilidades parciales
c
Pa= 0.25*( Fa1* ( 1.0 + c2t12)*( 1.0 + c2t13) +
1          Fa2* ( 1.0 - c2t12)*( 1.0 + c2t13) +
1          Fa3* ((1.0-cd2)**2)*( 1.0 - c2t13) )

c
c
c          Pc= 0.25*( Fc1*(1.0 + c2t12)*(1.0 + c2t13) +
1          Fc2*(1.0 - c2t12)*(1.0 + c2t13) +
1          Fc3*(1.0 - c2t13) )

c
c
c
c          Finalmente la probabilidad de supervivencia
c
c
c
c
c          Proba = 0.25*ars13*(1.0-(1.0-2.0*Pa)*rs12) +
1          (0.5*brs13- 0.25*brs12*ars13)*Pc

c
c
c
c
c
c
do aproba=0.1,0.9,0.1
if((Proba .le. (aproba+0.002) ) .and.
   (Proba .ge. (aproba-0.002) ))
then write(aproba*100,2001) S12,10**x ,Proba
2001 format(4(F15.10,2x))

```

```
endif
      end do
10  continue
enddo
return
end
cwrite(*,*)'Ver resultados en archivo sal21.dat,
          sal22.dat,..., etc.'
```


Bibliografía

- [1] C. S. Wu, *The neutrino in Theoretical Physics in the twentieth-century* (Interscience, New York, pp. 251, 1960).
- [2] C. S. Wu, *op.cit.*, pp. 252.
- [3] R. T. Beyer, *Foundations of nuclear physics*. (Dover Publications, New York, pp. 5-21, 1949).
- [4] R. T. Beyer, *op. cit.*, pp. 5-21.
- [5] D. H. Perkins, *Introduction to High Energy Physics*. (Addison-Wesley, Filipinas, pp. 132, 1972).
- [6] *Particle Properties Data Booklet*. (North Holland, Amsterdam, 1992).
- [7] R. T. Beyer, *op. cit.*, pp. 45-61.
- [8] E. Majorana, *Nuovo Cimento* **14**, 171 (1973).
- [9] B. Kayser, *Majorana Neutrinos: Their electromagnetic properties and neutral current weak interactions* presentado en el Orbis Scientiae Meeting, Coral Gables, 1982.
- [10] F. Boehm and P. Vogel, *Physics of massive neutrinos* (Cambridge University Press, pp. 7, 1987).
- [11] B. Kayser, F. Gibart-Debur and F. Perrier, *The Physics of massive neutrinos* (World Scientific, Singapur, pp. 35, 1989).
- [12] T. D. Lee, M. Rosenbluth and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **75**, 905 (1949).

- [12] C. L. Coward and F. Reines, *Phys. Rev.* **92**, 830 (1953).
- [13] A. Beiser, *Conceptos de Física Moderna* (McGraw-Hill; México, pp. 417-421, 1977).
- [14] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **92**, 830 (1953);
 Wolfenstein, *Phys. Rev. D*, **17**, 2369; (1978);
 W. C. Haxton et al., *Phys. Rev. Lett.* **47**, 153 (1981).
- [15] G. Danby et al., *Phys. Rev. Lett.* **9**, 36 (1962).
- [16] M. L. Perl et al., *Phys. Lett.* **63B**, 466 (1976).
 G. J. Feldman et al., *Phys. Rev. Lett.* **38**, 117 (1977).
- [17] *Particle Properties Data Booklet*, op. cit.
- [18] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, *Supergravity, Proceedings of Supergravity Workshop Stony Brook, New York, (North-Holland, Amsterdam, pp. 315, 1979)*.
- [19] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).
 S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22**, pp. 579 (1951).
 A. Salam and J. C. Ward, *Nuovo Cimento* **11**, 568 (1959).
- [20] Tomado de J. C. D'Olivo, *Tesis de Doctorado, Cap. II, Cibucstar I.P.N.*, (1984).
- [21] J. Bernstein, *Rev. Mod. Phys.* **46**, 7 (1974).
- [22] W. J. Marciano, *1983 International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies, Cornell University, Preprint BNL 33970*.
- [23] UA1 Collaboration, G. Aronson et al., *Phys. Lett.* **126B**, pp. 130 (1983); *Phys. Lett.* **128B**, 273 (1983).
 UA2 Collaboration, P. Bagnaia et al., *Phys. Lett.* **129B**, 398 (1983).
- [24] Tomado de J. C. D'Olivo, *Tesis de Doctorado, Cap. III, op. cit.*

- [25] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, *Phys. Rev.* **41**, 4 (1978).
V. Barger et al., *Phys. Rev. Lett.* **45**, 692 (1980).
- [26] S. L. Glashow and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D15**, 1958 (1977).
A. C. Rothman and K. Kang, *Phys. Rev.* **D23**, pp. 2657 (1981).
- [27] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652 (1973).
- [28] D. D. Clayton, *Principles of Stellar Evolution, and Nucleosynthesis*, (Chicago University Press, 1989).
- [29] F. Boehm and P. Vogel, *op. cit.* pp. 7.
- [30] J. N. Bahcall and R. K. Ulrich, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 297 (1988).
- [31] S. Turck-Chièze, S. Cahen, M. Cassé, C. Doom, *Astrophys. J.* **335**, 415 (1988).
- [32] J. N. Bahcall, H. Bethe, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2233 (1990).
- [33] J. N. Bahcall and R. K. Ulrich, *op. cit.*
- [34] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, *Gauge theory of elementary particle physics* (Oxford Science Publications, Cap. 13, pp.409, 1986).
- [35] D. D. Clayton, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, *op. cit.*
- [36] J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 885 (1992).
- [37] J. N. Bahcall, *Neutrino Astrophysics* (Cambridge University Press, 1989).
O. Fackler, G. Fontaine and J. Trần Thanh Vân, *Massive Neutrinos Tests of Fundamental Symmetries*, Proceedings of the XXVI the Rencontre de Moriond Les Ares, Sauvic, France Enero 26 a Febrero 2 de 1991. (Editions Frontieres, pp. 5).

- [38] V. Barger, R. J. N. Phillips, K. Whisnant, *Phys. Rev. D* **43**, 1110 (1991).
- [39] J. N. Bahcall and R. K. Ulrich, *op. cit.*
- [40] J. N. Bahcall, M. Pinsonneault, *Rev. Mod. Phys.* (por aparecer).
- [41] J. N. Bahcall, W. H. Press, *Astrophys. J.* **370**, 730 (1991).
- [42] R. Davis, en *Neutrino '88*, proceedings of the *XIII th International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics*, editado por J. Scheeps et. al. (World Scientific pp. 518 1989).
- [43] Kamiokande Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1297 (1990).
- [44] T. Kristen, *GALLEX Experiment*, charla para la conferencia *Neutrino '90*, (Genova, Italia 1990).
V. N. Gavrin, *SAGE Experiment*, charla para la conferencia *Neutrino '90*, (Genova, Italia 1990).
- [45] J. P. Revol, *Future Neutrino Oscillation Experiments*, presentado en la "*Recontres de Physique de la Vallée d'Aoste 1993*" Marzo 8 de 1993, (CERN-PPE/93-84, 27 de Mayo de 1993).
Galex Collaboration, *Galex solar neutrino observations: the results from Galex I and early results from Galex II*, por ser publicado en *Physics Letters B*.
- [46] Ta-Pei Cheng and Ling-Fond Li, *op. cit.*
- [47] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, *op. cit.*
- [48] P. B. Pal, *Particle Physics confronts the solar neutrino problem*, University of Oregon, Institute of Theoretical Science (Noviembre de 1991), por aparecer en *International Journal of Modern Physics A*.
- [49] V. N. Gribov, B. Pontecorvo, *Phys. Lett.*, **B28**, 493 (1969).
S. M. Bilenky, B. Pontecorvo, *Phys. Lett.*, **B61**, 248 (1976).
R. G. H. Robertson et al., *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 957 (1991).
- [50] V. N. Gribov, B. Pontecorvo, *op. cit.*

- [51] J. N. Bahcall, S. C. Frautschi, *Phys. Lett.*, **B29**, 623 (1969).
- [52] V. N. Gribov, B. Pontecorvo, *op. cit.*
- [53] V. Barger, R. J. N. Phillips, K. Whisnant, *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 3084 (1990).
A. Acker, S. Pakvasa, J. Pantaleone, *Phys. Rev.*, **D43**, 1751 (1991).
- [54] V. Barger, R. J. N. Phillips, K. Whisnant, *Phys. Rev.*, **D43**, 1110 (1991).
- [55] L. Wolfenstein, *Phys. Rev.*, **D17**, 2369 (1978).
- [56] L. Wolfenstein, *op. cit.*
- [57] S. P. Mikheyev, A. Yu. Smirnov, *Nuovo Ciminto*, **9C**, 17 (1986).
- [58] S. P. Mikheyev, A. Yu. Smirnov, *op. cit.*
- [59] V. Barger, R. J. N. Phillips, K. Whisnant, *Phys. Rev.*, **D43**, 980 (1986).
- [60] V. Barger, R. J. N. Phillips, K. Whisnant, *op. cit.*
H. Bethe, *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 1305 (1986).
- [61] L. Wolfenstein, *op. cit.*
S. P. Mikheyev, A. Yu. Smirnov, *op. cit.*
- [62] A. Messiah, in *'86 Massive Neutrinos in Astrophysics and Particle Physics*, ed. O. Fackler & J. Tran Thanh Van (Éditions Frontières, Gif-sur-Yvette, pp. 373, 1986).
- [63] S. J. Parke, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1275 (1986).
- [64] W. C. Haxton, *Phys. Rev.*, **D35**, 2352 (1987).
- [65] V. Barger, N. G. Deshpande, P. B. Pal, R. J. N. Phillips, K. Whisnant, *Phys. Rev.* **D43**, 1759 (1991).
- [66] A. Messiah, *op. cit.*

- [67] W. C. Haxton, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1271 (1986).
S. J. Parke, *ibid.* **39**, 1930 (1989).
- [68] L. Landau, *Phys. Z. Sowjetunion*, **2**, 46 (1932).
- [69] C. Zener, *Proc. Roy. Soc.*, **137**, 696 (1932).
- [70] E. C. G. Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta.*, **5**, 369 (1932).
- [71] S. J. Parke, *op. cit.*
- [72] W. C. Haxton, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1271 (1986).
- [73] L. D. Landau, L. M. Lifshitz, *Mecánica Cuántica (teoría no relativista)* (Reverte, España, Capítulo VII, pp. 183-213, 1983).
- [74] P. Pizzochero, *Phys. Rev.*, **D36**, 2293 (1987).
- [75] T. K. Kuo, J. Pantaleone, *Phys. Rev.*, **D39**, 1930 (1989).
- [76] W. C. Haxton, *Phys. Rev.* **D35**, 2352 (1987).
S. J. Parke, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1275 (1986).
- [77] S. J. Parke, *op. cit.*
- [78] T. Kanenko, *Prog. Theor. Phys.*, **78**, 532 (1987).
S. Toshev, *Phys. Lett.*, **B196**, 170 (1987).
S. T. Petcov, *Phys. Lett.*, **B200**, 373 (1988).
D. Notzold, *Phys. Rev.*, **D36**, 1625 (1987).
M. Ito, T. Kanenko, M. Nakagawa, *Prog. Theor. Phys.*, **79**, 13 (1988).
T. K. Kuo, J. Pantaleone, *op. cit.*
- [79] T. K. Kuo, J. Pantaleone, *op. cit.*
- [80] S. M. Bilenky, B. Pontecorvo, *Phys. Rep.*, **41**, 225 (1978).
- [81] P. B. Pal, *op. cit.*
- [82] V. Barger, K. Whisnant, S. Pakvasa, R. J. N. Phillips, *Phys. Rev.* **D22**, 2718 (1980).
H. W. Zaglauer, K. H. Schwarzer, *Phys. Lett.* **198B**, 556 (1987).

- [83] T. K. Kuo, J. Pantaleone, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1805 (1986).
T. K. Kuo, J. Pantaleone, *Phys. Rev.* **D35**, 3432 (1987).
H. W. Zaglauer, K. H. Schwarzer, *Z. Phys.* **C40**, 273 (1988).
A. Joshipura, M. V. N. Murthy, *Phys. Rev.* **D37**, 1374 (1988).
A. Baldini, G. F. Giudice, *Phys. Lett.* **186B**, 211 (1987).
C. W. Kim, W. K. Sze, *Phys. Rev.* **D35**, 1404 (1987).
A. Bottino, J. Ingham, C. W. Kim, *Phys. Rev.* **D39**, 909 (1989).
S. T. Petcov, S. Toshev, *Phys. Lett.* **187B**, 120 (1987).
S. T. Petcov, *Phys. Lett.* **214B**, 259 (1988).
S. P. Mikheyev, A. Yu. Smirnov, *Phys. Lett.* **200B**, 560 (1988).
- [84] L. Wolfenstein, en *Proceeding of the 12th International conference on Neutrino Physics and Astrophysics*, ed. T. Kitagaki and H. Yuta (World Scientific, pp. 1, 1986).
- [85] C. W. Kim, S. Nussinov, W. K. Sze, *Phys. Lett.* **184B**, 403 (1987).
- [86] A. Messiah, *Mecánica Cuántica*, Tomo I pp. 295, Tomo II pp. 675, Editorial Tecnos Madrid 1983.
- [87] W. Magnus, *Commun. Pure Appl. Math.*, **7**, 649 (1954).
- [88] A. Chodos, K. Everding and D. Owen, *Phys. Rev.* **D42**, 2881 (1990).
- [89] J. C. D'Olivo, *Phys. Rev.*, **D45**, 924 (1992).
J. C. D'Olivo and J. A. Oteo, *Phys. Rev.*, **D42**, 256 (1990).
- [90] W. C. Haxton, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1271 (1986).
S. J. Parke, *ibid.* **57**, 1275 (1986).
- [91] C. K. Kim, S. Nussinov, and W. K. Sze, *Phys. Lett. B* **184**, 403 (1987); *Phys. Rev.* **D35**, 4014 (1987).
- [92] S. Toshev, *Mod. Phys. Lett.* **A3**, 71 (1988).
S. T. Petcov, *Phys. Lett.* **B200**, 373 (1988); P. I. Krastev and S. T. Petcov, *ibid.* **207**, 64 (1988).
- [93] Para revisiones de oscilaciones de neutrinos en materia, ver S. P. Mikheyev and A. Yu. Smirnov, *Usp. Fiz. Nauk.* **153**, 3 (1987)

- [93] *[Sov. Phys. Usp.* **30**, 759 (1987)]; T. K. Kuo and J. Pantaleone, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 937 (1989).
- [94] J. N. Bahcall and R. K. Ulrich, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 297 (1988)
J. N. Bahcall, *Neutrino Astrophysics* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989).
- [95] J. C. D'Olivo, *op. cit.*
- [96] Naoya Hata, *Solar Neutrinos: Hint for neutrino Mass* presentado en Solar Modeling Workshop, Institute of Nuclear Theory, University of Washington, Seattle, March 21, 1994.
- [97] D. Notzold, G. Raffelt, *Nucl. Phys.* **B307**, 924 (1988).
P. B. Pal, T. M. Pham, *Phys. Rev.* **D40**, 259 (1989).
J. F. Nieves, *Phys. Rev.* **D40**, 866 (1989).
J. C. D'Olivo, J. F. Nieves and M. Torres, *Phys. Rev.* **D46**, 1172 (1992).
- [98] J. V. Uspensky, *Teoría de Ecuaciones* Cap. V, pp. 93 (Editorial Limusa, México 1970).
- [99] T. K. Kuo and J. Pantaleone, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 937 (1989).
- [100] V. Barger, R. J. N. Phillips, K. Whisnant, and S. Pakvasa, *Phys. Rev.* **D22**, 2718 (1980).
H. W. Zagluer and K. H. Schwarzer, *Z. Phys. C* **40**, 273 (1988).
T. K. Kuo and J. Pantaleone *Rev. Mod. Phys.* **61**, 937 (1989).