

21
2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

OPERADORES DE ONDA EN LA TEORIA
DE DISPERSION EN MECANICA CLASICA

T E S I S
Que para obtener el Título de
F I S I C O
p r e s e n t a
Antonio Hernández Garduño



México, D. F.

1994

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) Antonio Hernández Garduño

con número de cuenta 9052335-9 con el Título: Operadores de Onda en la Teoría de Difracción en Mecánica Clásica

Otorgamos nuestro Voto Aprobatorio y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Físico

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	
Dr.	Ricardo Alberto	Weder Zaninovich	
Director de Tesis	Juan Manuel	Lozano Peña	
Dr.	Kurt Bernardo	Wolf Horner	
Dr.	Alberto	Alonso y Gorin	
Suplente	Juan Hector	Arredondo Ruiz	
Suplente			

A mis padres.

Agradecimientos

Este trabajo debe su existencia no sólo a un esfuerzo personal sino al trabajo y apoyo de una multitud de personas, a quienes deseo dar mi agradecimiento. En primer lugar debo mencionar a mis padres, quienes han luchado por darme todo en favor de mi educación y crecimiento. A ellos dedico este trabajo. Agradesco también el gran apoyo de mis hermanos y el cariño que siempre he recibido de muchos de mis familiares.

Deseo también agradecer al Dr. Ricardo Weder, no sólo por ser mi director de tesis sino también por su apoyo en otros asuntos que sin duda serán de gran importancia en mi desarrollo académico.

Quiero agradecer a muchos de mis profesores de la carrera, a quienes les debo mucho de lo que sé y lo que soy. No quiero hacer aquí una lista de nombres, pues temo omitir alguno. A todos ellos mi estimación y respeto. Mencionaré, sin embargo, el nombre del prof. Alberto Barajas Celis, cuyo entusiasmo y lucidez fueron para mí un impulso importante en aquellos primeros años en la Universidad.

Finalmente, no puedo dejar de mencionar la amistad de muchos de mis compañeros de carrera. El apoyo que me han brindado varios de ellos ha sido decisivo.

Tabla de Contenido.

1	Introducción	3
1.1	Planteamiento general del problema de dispersión.	3
1.2	Notación y resultados preliminares.	4
1.2.1	Reducción del problema de dos cuerpos.	4
1.2.2	Trayectorias en el espacio de las fases.	5
1.2.3	Condiciones de existencia y unicidad.	6
1.2.4	Soluciones de dispersión, F de corto-rango.	6
1.3	Objetivo y estructura de la Tesis.	7
2	Caracterización de las soluciones de dispersión	9
2.1	Existencia y Unicidad de soluciones de dispersión bajo fuerzas de largo rango.	9
2.2	Pruebas técnicas para el capítulo 2.	22
3	El Operador de Onda	28
3.1	El Operador de Onda como transformación canónica.	28
3.2	Complejidad Asintótica.	46
3.2.1	Ejemplo de captura.	49
3.3	Pruebas técnicas para el capítulo 3.	51
4	La S-transformación en el problema de fuerzas de corto-rango.	59
4.1	Reducción de S	61
4.2	La sección eficaz de dispersión.	67
A	Apéndice	70
	Notas	75

Bibliografía

CONTENIDO

1. Introducción

2. Objetivos

3. Metodología

4. Resultados

5. Conclusiones

6. Bibliografía

7. Anexos

8. Índice

9. Resumen

10. Glosario

11. Referencias

12. Tablas

13. Figuras

14. Gráficos

15. Diagramas

16. Formatos

17. Modelos

18. Ejemplos

19. Ejercicios

20. Problemas

21. Casos

22. Estudios

23. Análisis

24. Síntesis

25. Síntesis

26. Síntesis

27. Síntesis

28. Síntesis

29. Síntesis

30. Síntesis

31. Síntesis

32. Síntesis

33. Síntesis

34. Síntesis

35. Síntesis

36. Síntesis

37. Síntesis

38. Síntesis

39. Síntesis

40. Síntesis

41. Síntesis

42. Síntesis

43. Síntesis

44. Síntesis

45. Síntesis

46. Síntesis

47. Síntesis

48. Síntesis

49. Síntesis

50. Síntesis

51. Síntesis

52. Síntesis

53. Síntesis

54. Síntesis

55. Síntesis

56. Síntesis

57. Síntesis

58. Síntesis

59. Síntesis

60. Síntesis

61. Síntesis

62. Síntesis

63. Síntesis

64. Síntesis

65. Síntesis

66. Síntesis

67. Síntesis

68. Síntesis

69. Síntesis

70. Síntesis

71. Síntesis

72. Síntesis

73. Síntesis

74. Síntesis

75. Síntesis

76. Síntesis

77. Síntesis

78. Síntesis

79. Síntesis

80. Síntesis

81. Síntesis

82. Síntesis

83. Síntesis

84. Síntesis

85. Síntesis

86. Síntesis

87. Síntesis

88. Síntesis

89. Síntesis

90. Síntesis

91. Síntesis

92. Síntesis

93. Síntesis

94. Síntesis

95. Síntesis

96. Síntesis

97. Síntesis

98. Síntesis

99. Síntesis

100. Síntesis

Capítulo 1

Introducción

1.1 Planteamiento general del problema de dispersión en un sistema de dos cuerpos.

En el problema de dos cuerpos podemos siempre hacer la descripción desde un sistema de referencia montado en una de las partículas, a la que podemos llamar *centro dispersor*. Cuando la fuerza decrece suficientemente rápido con la distancia, entonces la trayectoria de la otra partícula tiene un comportamiento más “sencillo” cuando está lejos del centro dispersor que cuando está relativamente cerca de él. En la teoría de dispersión uno está interesado en describir las trayectorias cuando éstas están muy alejadas del centro, dejando de lado lo que le ocurre a la trayectoria en las cercanías del centro dispersor.

En el problema de dispersión uno tiene la imagen de una partícula que se acerca al centro dispersor y que tiene una fuerte interacción con éste alrededor, digamos, del tiempo $t = 0$. Para $t \rightarrow -\infty$ la partícula se aproxima desde distancias muy lejanas y para $t \rightarrow +\infty$ la partícula se encuentra otra vez muy alejada del centro dispersor. Es de interés el poder parametrizar de manera adecuada la trayectoria cuando $t \rightarrow -\infty$ y cuando $t \rightarrow +\infty$. La manera en que esto se hace es encontrando una dinámica que describa el comportamiento asintótico de la trayectoria cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Los parámetros asociados a esa dinámica (que se denomina *dinámica libre* ó *dinámica cuasi-libre*) se pueden ver como condiciones “iniciales” en $t = \pm\infty$ y surge el problema de encontrar bajo qué condiciones una solución a estas condiciones “iniciales” existe y es única. Otro problema que interesa es cómo se pueden relacionar los parámetros asociados a la trayectoria en $t = -\infty$ con

aquellos en $t = +\infty$.

Si abordamos el problema en el espacio de las fases $\Sigma \equiv \mathfrak{R}^6 = \{(x, p)\}$ entonces se encuentra que los parámetros que caracterizan el comportamiento asintótico de las trayectorias en $t = \pm\infty$ son puntos de dicho espacio fásico. Ahora, si el punto $(a, b) \in \Sigma$ parametriza el comportamiento asintótico de una trayectoria cuando, p. ej., $t \rightarrow -\infty$ entonces uno debe poder relacionarlo con algún otro punto $(x, p) \in \Sigma$ que corresponda al estado de la partícula en algún tiempo dado finito, digamos en $t = 0$. Se debe entonces construir un operador que relacione estos dos puntos de Σ ; a este operador se le llama *operador de onda* (por analogía con su homólogo en la teoría de dispersión en mecánica cuántica).

La manera en que ahora uno establece la relación entre los parámetros (puntos en Σ)¹ de la trayectoria en $t = -\infty$ —“entrada”— con aquellos de la trayectoria en $t = +\infty$ —“salida”— no es otra cosa que una transformación de $\Sigma \rightarrow \Sigma$. Esta transformación se conoce como la *S-transformación* (ó *S-matriz*). Uno construye esta S-transformación a partir de los operadores de onda.

1.2 Notación y resultados preliminares.

1.2.1 Reducción del problema de dos cuerpos al de uno solo.

Si consideramos la dispersión asociada a la interacción entre dos partículas, siendo dicha interacción dependiente únicamente de $r_2 - r_1, \dot{r}_2 - \dot{r}_1$, ó derivadas superiores de la diferencia de los vectores de posición de las partículas entonces la lagrangiana tendrá la forma:

$$L = T(\dot{R}, \dot{r}) - U(r, \dot{r}, \dots)$$

donde $r = r_2 - r_1$ y R es el vector de posición del centro de masa (con ésto tenemos seis coordenadas independientes correspondientes a los seis grados de libertad del problema). La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + T'$$

donde el primer término es la energía cinética de traslación del centro de masa y T' es la energía cinética respecto al centro de masa:

$$T' = \frac{1}{2} \left(m_1 \dot{r}'_1{}^2 + m_2 \dot{r}'_2{}^2 \right) \quad (1.1)$$

¹O, más precisamente, puntos en Σ_0 — el conjunto definido en la pag. 5.

siendo r'_1 y r'_2 vectores de posición relativos al centro de masa.

$$r'_1 = r_1 - \frac{r_1 m_1 + r_2 m_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad (1.2)$$

y análogamente

$$r'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \quad (1.3)$$

Substituyendo (1.2) y (1.3) en (1.1) :

$$\begin{aligned} T' &= \left(\frac{1}{2m_1} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{1}{2m_2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \right) \dot{r}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \dot{r}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \end{aligned}$$

donde $\mu \equiv (1/m_1 + 1/m_2)^{-1}$. Tenemos así:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - U(r, \dot{r}, \dots)$$

El lagrangiano no contiene términos de R , por lo que el centro de masa se moverá uniformemente (o no se moverá). Las ecuaciones de movimiento que contengan a r —o sus derivadas respecto al tiempo— no contendrán a R ó \dot{R} . Por lo tanto no será relevante la información de \dot{R} contenida en el lagrangiano y podemos tratar a nuestro sistema como un problema de una sola partícula cuyo lagrangiano será:

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - U(r, \dot{r}, \dots)$$

que corresponde a una partícula de masa $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ y posición $r = r_2 - r_1$. Este es el sistema equivalente de "un cuerpo".

1.2.2 Trayectorias en el espacio de las fases.

Representaremos cada estado de este sistema mediante un punto en el espacio de las fases \mathbb{R}^6 , denotado de ahora en adelante como " Σ ". Este punto estará representado por el par (r, v) , la posición y velocidad de la partícula. Por simplicidad supondremos que su masa μ es igual a la unidad, así que no distinguiremos entre velocidad y momento.

Ya que hemos definido Σ definamos Σ_0 , un subconjunto de Σ que necesitaremos más adelante:

$$\Sigma_0 = \{ (r, v) \in \Sigma \mid v \neq 0 \} .$$

Definiremos ahora la transformación —ó evolución en el tiempo— que determina la trayectoria por la que se mueve un punto en Σ , de acuerdo al campo de fuerzas al que está sometida la partícula de nuestro sistema: Sea $U_t : \Sigma \times \mathfrak{R} \rightarrow \Sigma$, la *dinámica de interacción*, tal que

$$U_t(r_0, v_0) = (r(t), v(t))$$

donde $r(t)$ satisface la ecuación de Newton

$$\ddot{r}(t) = F(r(t)) \quad (1.4)$$

bajo las condiciones iniciales

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = v_0 \quad (1.5)$$

(y donde $v(t) \equiv \dot{r}(t)$).

También conviene definir ahora $S_t^{(0)} : \Sigma \times \mathfrak{R} \rightarrow \Sigma$, la *dinámica libre*, como

$$S_t^{(0)}(r, v) = (r + vt, v).$$

1.2.3 Condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución a la ecuación de Newton en todo tiempo.

Es sabido (véase [7, p.153] y [8, p.149]) que las siguientes condiciones sobre el campo de fuerza son suficientes para asegurar que $\forall t \in (-\infty, \infty)$ existe una única solución a la ec. (1.4) sujeta a las condiciones iniciales (1.5); dichas condiciones son:

$$|F(r)| \leq c \text{ para todo } r \quad (1.6)$$

$$|F(r) - F(r')| \leq D_R |r - r'| \text{ si } |r - r'| \leq 1 \text{ y } |r| < R. \quad (1.7)$$

Supondremos (1.6) y (1.7) a lo largo del presente trabajo.

1.2.4 Existencia y Unicidad de “soluciones de dispersión” para el caso de fuerzas de corto-rango.

En el caso de fuerzas de corto-rango la descripción del comportamiento asintótico de las “soluciones de dispersión” es particularmente simple, pues

dicho comportamiento se puede aproximar satisfactoriamente mediante la dinámica libre $S_t^{(0)}$. Concretamente, si la fuerza satisface

$$|F(r)| \leq cr^{-2-\varepsilon} \quad \text{para todo } r \text{ y } \varepsilon > 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{|F(x) - F(y)|}{|x - y|} \leq Dr^{-2-\varepsilon'} \quad \text{para todo } x, y \text{ con } (1.9)$$

$$x, y \geq r \text{ y } \varepsilon' > 0$$

es sabido, según se estudia en [2], que a todo $(a, b) \in \Sigma_0$ le podemos asociar una *única* solución $r(t)$ de la ecuación de Newton tal que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\dot{r}(t) - b| = 0 \quad (1.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |r(t) - a - bt| = 0 \quad (1.11)$$

(y un resultado simétrico cuando $t \rightarrow +\infty$). A los parámetros a y b los podemos ver como condiciones "iniciales" en $t = -\infty$ para la "solución de dispersión" $r(t)$. Podemos reescribir (1.10) y (1.11) en una sola línea, diciendo que a cada $(a, b) \in \Sigma_0$ le corresponde un $(r(0), \dot{r}(0)) \in \Sigma$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (U_t(r(0), \dot{r}(0)) - S_t^{(0)}(a, b)) = 0 \quad (1.12)$$

Esta ecuación sugiere que definamos la transformación $\Omega_- : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ tal que $\Omega_-(a, b) = (r(0), \dot{r}(0))$ donde $(r(0), \dot{r}(0))$ satisface (1.12). Una definición análoga tendremos para Ω_+ , en el caso en que $t \rightarrow +\infty$. A Ω_{\pm} , que como vemos es un mapeo inyectivo, se le conoce como el *operador de onda*. En [2] se establece también el siguiente resultado:

$$\Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_{-t} S_t^{(0)} \quad (1.13)$$

1.3 Objetivo y estructura de la Tesis.

El objetivo central del presente trabajo es presentar la generalización de los resultados para la fuerza de corto-rango que hemos descrito arriba, para el caso de fuerzas de largo-rango, i.e., cuando la fuerza tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$ como $r^{-1-\alpha}$ ($1 > \alpha > 0$).

En este sentido, el presente trabajo (y particularmente los capítulos dos y tres) serán un estudio y análisis de la investigación llevada a cabo por Ira. W. Herbst en [1], donde aborda la tarea que hemos mencionado en el párrafo anterior. (Véanse las "Notas").

Esencialmente, queremos exponer como se puede construir una *dinámica cuasi-libre* (como se verá, la *dinámica libre* ya no funcionará en este caso) que describa bien el comportamiento asintótico de la “solución de dispersión” cuando $t \rightarrow \pm\infty$, así como exponer como se puede construir un operador de onda análogo al que hemos mencionado arriba y que sea una *transformación canónica*.

En el capítulo dos, con el cual se inicia propiamente la tesis, discutimos la construcción de la *dinámica cuasi-libre* $E_t^{(0)}$ que aproxima bien el comportamiento asintótico de las soluciones de dispersión y que permite caracterizarlas mediante un punto (a, b) en Σ de manera análoga a como ocurre en el caso de fuerzas de corto-rango. Se define también, provisionalmente, el “operador de onda” W_{\pm} que satisface una ecuación de la forma (1.12), a saber, la ec. (2.45). Este W_{\pm} no satisfecerá, sin embargo, una ecuación como la (1.13) y tampoco será (en general) una *transformación canónica*.

En el capítulo tres discutimos la construcción de otra *dinámica cuasi-libre* que permita construir a su vez el operador Ω_{\pm} que cumpla tanto con una ecuación de la forma (1.13) como con la exigencia de ser una *transformación canónica*. Para ello necesitaremos hacer más restrictivas las condiciones impuestas sobre el potencial. Discutimos también en este capítulo el concepto de *completitud asintótica*.

En el capítulo cuatro estudiamos la *S-transformación* para el caso de fuerzas de corto-rango. Aquí el objetivo es solamente ilustrar como se aplican las nociones desarrolladas en los dos capítulos anteriores sobre el operador de onda para la caracterización de la *S-transformación* y el desarrollo del concepto de *sección eficaz de dispersión*.

El capítulo cuatro está esencialmente basado en el estudio que de la *S-transformación* hacen Michael Reed y Barry Simon en [3, secc. XI.2].

En el apéndice se dan algunas definiciones importantes que se utilizarán a lo largo de toda la obra, así como algunos teoremas de ecuaciones diferenciales ordinarias y un teorema de análisis no-lineal que necesitaremos.

Finalmente, en las “Notas” (pag. 75) detallamos las referencias bibliográficas en las que se basan cada una de las partes de este trabajo.

Capítulo 2

Caracterización de las soluciones de dispersión

2.1 Existencia y Unicidad de soluciones de dispersión bajo fuerzas de largo rango.

En este capítulo vamos a estudiar las soluciones a la ecuación de Newton:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$$

donde el campo de fuerza satisface las siguientes hipótesis:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -(\nabla V)(\mathbf{x}) \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.1)$$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x})| \leq k(1 + |\mathbf{x}|)^{-1-\alpha}, \quad 1 > \alpha > 0, \quad \alpha^{-1} \neq \text{entero.} \quad (2.2)$$

$$\left| \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right| \leq k(1 + |\mathbf{x}|)^{-2-\alpha} \quad (2.3)$$

(Observemos que (2.2) y (2.3) implican las condiciones (1.6) y (1.7), suficientes para asegurar la existencia y unicidad de la solución a la ecuación de Newton bajo la condición "inicial" $\langle x(t_0), p(t_0) \rangle = \langle x_0, p_0 \rangle$ para un t_0 finito.)

La idea central de este capítulo es la de mostrar como puede un punto $\langle a, p \rangle$ en Σ caracterizar el "comportamiento asintótico" de $U_t \langle x, p \rangle$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$, donde $\langle x, p \rangle$ es otro punto de Σ . Para que podamos hablar de un "comportamiento asintótico" necesitamos que la $\mathbf{x}(t)$ en la expresión $\langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle = U_t \langle x, p \rangle$ sea una solución "no-acotada" (cuando $t \rightarrow \pm\infty$) de

la ecuación de Newton. Deben entonces definirse los subconjuntos $\Sigma_{\pm} \subset \Sigma$ tales que si $(x, p) \in \Sigma_{\pm}$ entonces la $x(t)$ sea no-acotada cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Es claro que si $E(\langle x, p \rangle) < 0$, donde $E = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$ es la energía total, entonces la $x(t)$ estará confinada a una región acotada. Así pues, en la definición de Σ_{\pm} es necesario pedir $E \geq 0$. Y, como se verá en las demostraciones que desarrollaremos en este capítulo, es conveniente pedir que la energía sea estrictamente positiva. Definimos entonces

Definición 2.1

$$\Sigma_{\pm} = \left\{ (x_0, p_0) \in \mathfrak{R}^6 \mid V(x_0) + \frac{1}{2}p_0^2 > 0; \right. \\ \left. \langle x(t), p(t) \rangle \text{ satisfacc } \overline{\lim}_{t \rightarrow \pm\infty} |x(t)| = \infty \right\}$$

donde $\langle x(t), p(t) \rangle = U_t(x_0, p_0)$.

Para que una solución a la ecuación de Newton sea "de dispersión" pediremos que no esté acotada cuando $t \rightarrow -\infty$ ni cuando $t \rightarrow \infty$, ambas condiciones. El conjunto de puntos del espacio fásico que pertenecen a "soluciones de dispersión" quedará entonces definido como

$$\Sigma_s = \Sigma_+ \cap \Sigma_-.$$

Observemos que por conservación de la energía $p(t)$ se encuentra siempre acotado.

Vamos a ver ahora como podemos caracterizar el comportamiento asintótico de una solución de dispersión. Este será el objeto de los siguientes dos lemas y el teorema de este capítulo.

Lema 2.1.1 *Asumamos (2.1), (2.2) y (2.3). Entonces $\langle x_0, p_0 \rangle \in \Sigma_{\pm}$ si y sólo si $\langle x(t), p(t) \rangle = U_t(x_0, p_0)$ satisfacc:*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} p(t) \text{ existe y es no nulo.}$$

Prueba. Haremos la demostración para Σ_- .

\Rightarrow) Supongamos que $p(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} p \neq 0$. Entonces

$$p(t) = p + \gamma(t), \quad \text{con } \gamma(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0.$$

Sea $t_0 < 0$ tal que $|\gamma(t)| \leq |p|/2 \forall t < t_0$.

$$\Rightarrow \int_0^t \gamma(t) dt = k_0 + \int_{t_0}^t \gamma(t) dt$$

donde $k_0 = \int_0^{t_0} \gamma(t) dt$; es decir

$$\left| \int_0^t \gamma(t) dt \right| \leq |k_0| + \left| \int_t^{t_0} \gamma(t) dt \right| \quad (2.4)$$

Pero para $t < t_0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_t^{t_0} \gamma(t) dt \right| &\leq \int_t^{t_0} |\gamma(t)| dt \leq \left| \frac{p}{2} \right| (t_0 - t) \\ &\leq \left| \frac{p}{2} \right| (|t| - |t_0|) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por lo tanto, de (2.4) y (2.5):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t p(t) dt \right| &= \left| \int_0^t p dt + \int_0^t \gamma(t) dt \right| \\ &\geq \left| p \int_t^0 dt \right| - \left| \int_t^0 \gamma(t) dt \right| \\ &\geq |p||t| - |k_0| + \left| \frac{p}{2} \right| |t_0| - \left| \frac{p}{2} \right| |t| \\ &= \left| \frac{p}{2} \right| |t| - |k_0| + \left| \frac{p}{2} \right| |t_0| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \infty \end{aligned}$$

Y como $x(t) = x(0) + \int_0^t p(t) dt$, hemos demostrado que $|x(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow -\infty$; además $E = \frac{1}{2}p^2(t) + V(x(t)) = \frac{1}{2}p^2 > 0$. Por lo tanto $\langle x_0, p_0 \rangle = \langle x(0), p(0) \rangle \in \Sigma_-$.

\Leftrightarrow Supongamos que $\langle x_0, p_0 \rangle \in \Sigma_-$. Entonces $\overline{\lim}_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = \infty$ y $E(\langle x(0), p(0) \rangle) > 0$.

Para probar que $p(t) \rightarrow p$ debemos usar la condición (2.2); pero para que nos sea útil necesitamos una estimación que nos diga que $|x(t)| \sim |t|$. De hecho tenemos que para $|t|$ suficientemente grande se cumple

$$|x(t)| \geq \sqrt{\frac{E}{2}} |t| \quad (2.6)$$

La demostración de esto es un poco técnica, por lo que la dejamos para la sección 2.2.

Haremos ver ahora que de (2.6) se sigue que existe el límite cuando $t \rightarrow -\infty$ de

$$p(t) = p_0 + \int_0^t F(x(s)) ds \quad (2.7)$$

y que este límite define el momento asintótico p :

$$p = p_0 + \int_0^{-\infty} F(x(s)) ds. \quad (2.8)$$

Sea $T_0 < 0$ tal que (2.6) se cumple para todo $t < T_0$. Sean $t_1 < t_2 < T_0$. Tendremos que si F_j es la j -ésima componente de F ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} F_j(x(s)) ds \right| &\leq \int_{t_1}^{t_2} |F_j(x(s))| ds \leq k \int_{t_1}^{t_2} (1 + |x|)^{-1-\alpha} ds \\ &\leq k \int_{t_1}^{t_2} |x|^{-1-\alpha} ds \leq c \int_{t_1}^{t_2} |s|^{-1-\alpha} ds, \quad c = k\left(\frac{E}{2}\right)^{\frac{-1-\alpha}{2}} \\ &= c\alpha^{-1}(|t_2|^{-\alpha} - |t_1|^{-\alpha}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando¹ $t_1, t_2 \rightarrow -\infty$.

Por el criterio de Cauchy concluimos que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_0^t F_j(x(s)) ds$ existe. Por lo tanto el límite de (2.7) existe y queda definido por (2.8). Restando (2.8) de (2.7) tenemos, para $t \leq 0$:

$$\begin{aligned} |p(t) - p| &= \left| \int_{-\infty}^t F(x(s)) ds \right| \\ &\leq k \int_{-\infty}^t (1 + |x(s)|)^{-1-\alpha} ds \end{aligned} \quad (2.9)$$

Para $t < T_0$ continuamos:

$$\begin{aligned} |p(t) - p| &\leq k \int_{-\infty}^t |x(s)|^{-1-\alpha} ds \leq c \int_{-\infty}^t |s|^{-1-\alpha} ds \\ &\leq c\alpha^{-1}|t|^{-\alpha} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$p(t) - p = O(|t|^{-\alpha}), \quad (|t| \rightarrow \infty) \quad (2.10)$$

Y además, como $p(t)$ es acotado, tenemos que $|p(t) - p| \leq |p(t)| + |p| < \infty$ para toda $t \leq 0$.

¹ Aquí hemos usado la fórmula elemental $\int_{t_1}^{t_2} |s|^{-\beta} ds = (\beta - 1)^{-1} |s|^{1-\beta} \Big|_{s=t_1}^{s=t_2}$ si $\beta \neq 1$ y $t_1 < t_2 < 0$.

Entonces el momento asintótico p es distinto de cero, pues de lo contrario tendríamos para $|t|$ grandes, (abreviando $c' = \sqrt{\frac{E}{2}}$):

$$\begin{aligned} c'|t| \leq |x(t)| &= \left| x_0 + \int_0^{T_0} p(s) ds + \int_{T_0}^t O(|s|^{-\alpha}) ds \right| \\ &\leq C_0 + c''|t|^{1-\alpha} \end{aligned}$$

para constantes C_0 y c'' adecuadas. Así, como $\alpha < 1$, tendremos que para $|t| \rightarrow \infty$ será válida la desigualdad

$$c'|t| \leq 2c''|t|^{1-\alpha}. \quad (2.11)$$

Pero (2.11) es imposible para $|t|$ suficientemente grande. Por lo tanto el momento asintótico es distinto de cero y el lema queda demostrado. \square

Corolario 2.1 Sea $\langle x_0, p_0 \rangle \in \Sigma_{\pm}$, $\langle x(t), p(t) \rangle = U_t \langle x_0, p_0 \rangle$. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (U_{t+\tau} - U_t) \langle x_0, p_0 \rangle = \langle p^{\pm}\tau, 0 \rangle$$

donde $p^{\pm} \neq 0$ es el momento asintótico de $p(t)$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Prueba.

$$\begin{aligned} x(t+\tau) - x(t) &= \int_t^{t+\tau} p(s) ds \\ &= \int_t^{t+\tau} [O(|s|^{-\alpha}) + p^{\pm}] \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} p^{\pm}\tau, \end{aligned}$$

y es claro que $p(t+\tau) - p(t) \rightarrow 0$. \square

Una vez establecido el lema 2.1.1 tenemos a nuestra trayectoria asintótica caracterizada, al menos parcialmente, por el momento asintótico p . Una terna más de números reales nos permitirá terminar de caracterizar la trayectoria asintótica, como veremos a continuación.

Lema 2.1.2 Asumamos (2.1), (2.2) y (2.3). Si $\langle x_1(0), p_1(0) \rangle, \langle x_2(0), p_2(0) \rangle$ están en Σ_{\pm} y ambas satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} p_i(t) - p = 0; \quad i = 1, 2 \quad (2.12)$$

entonces para $t \rightarrow \pm\infty$

$$p_1(t) - p_2(t) = O(|t|^{-1-\alpha}) \quad (2.13)$$

y existe un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{a}| = O(|t|^{-\alpha}). \quad (2.14)$$

Si $\mathbf{a} = 0$ entonces $\mathbf{x}_1(t) \equiv \mathbf{x}_2(t)$.

Prueba. Probaremos la proposición para $(\mathbf{x}_i(0), p_i(0)) \in \Sigma_-$. Sea $\Delta(t) = x_2(t) - x_1(t)$. De la hipótesis hecha sobre los $p_i(t)$ y de (2.10) tenemos

$$\begin{aligned} |\dot{\Delta}(t)| &= |(p_1(t) - p) + (p - p_2(t))| \leq |p_1(t) - p| + |p_2(t) - p| \\ &= O(|t|^{-\alpha}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ya que $|\dot{\Delta}(0)|, |\Delta(0)| < \infty$ y $\dot{\Delta}(t)$ es continua tendremos que

$$\Delta(t) = \int_0^t \dot{\Delta}(s) ds + \Delta(0)$$

está acotada para todo $t \in [T, 0]$ y cualquier $T < 0$ fijo. Y para $t \rightarrow -\infty$ se tendrá

$$\begin{aligned} |\Delta(t)| &= \left| \int_T^t \dot{\Delta}(s) ds + k \right| \leq \int_t^T O(|s|^{-\alpha}) ds + |k| \\ &\leq c|t|^{1-\alpha} + k'. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|\Delta(t)| = O(1 + |t|^{1-\alpha}). \quad (2.16)$$

Pero esto está lejos de garantizarnos que $\Delta(t)$ tiende a cero cuando $t \rightarrow -\infty$. Sin embargo, todavía no hemos usado la condición (2.3); ahí está la clave.

Observemos que de la ec. de Newton y del hecho que $\dot{\Delta}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$ (hipótesis) se sigue

$$\dot{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^t [F(x_2(s)) - F(x_1(s))] ds \quad (2.17)$$

Sabemos que $F(x_2(s)) - F(x_1(s)) = DF(\xi)(x_2(s) - x_1(s))$ donde ξ está entre x_2 y x_1 . Ya que tanto $x_2(s)$ como $x_1(s)$ cumplen con una desigualdad de la forma (2.6) tendremos que la condición (2.3) implica

$$|F(x_2(s)) - F(x_1(s))| \leq \beta(1 + |s|)^{-2-\alpha} |\Delta(s)|.$$

De (2.17) tendremos entonces

$$|\dot{\Delta}(t)| \leq \beta \int_{-\infty}^t \frac{|\Delta(s)|}{(1+|s|)^{2+\alpha}} ds \quad (2.18)$$

Probaremos ahora que $|\Delta(t)|$ está acotado para todo $t < 0$; razonamos por inducción. Sabemos, de (2.15), que

$$|\dot{\Delta}(t)| = O(|t|^{-n\alpha}) \quad (2.19)$$

con $n = 1$. Asumamos (2.19) para un n arbitrario pero bajo la condición de que $1 - n\alpha > 0$. De la misma forma en que demostramos (2.16) tendremos ahora que

$$|\Delta(s)| = O(1 + |s|^{1-n\alpha}). \quad (2.20)$$

Para $t \ll 0$ tendremos, de (2.18),

$$\begin{aligned} |\dot{\Delta}(t)| &\leq \beta' \int_{-\infty}^t \frac{|s|^{1-n\alpha}}{|s|^{2+\alpha}} ds = \beta' \int_{-\infty}^t |s|^{-1-(n+1)\alpha} ds \\ &= \beta'' [(n+1)\alpha]^{-1} |t|^{-(n+1)\alpha} = O(|t|^{-(n+1)\alpha}), \end{aligned} \quad (2.21)$$

así que iterando obtenemos que $|\Delta(t)| = O(1 + |t|^{1-n'\alpha})$ con $1 - n'\alpha < 0$ y por lo tanto $|\Delta(t)|$ está acotado para todo $t < 0$.

Pero si $|\Delta(s)|$ es acotado entonces (2.18) implica que para $t \rightarrow -\infty$

$$|\dot{\Delta}(t)| \leq \beta'' \int_{-\infty}^t |s|^{-2-\alpha} ds = O(|t|^{-1-\alpha}) \quad (2.22)$$

así que hemos demostrado la mitad del teorema. Por otro lado observemos que si $t_1 < t_2 \ll 0$ tendremos

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{\Delta}(s) ds \right| &\leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\Delta}(s)| ds \leq c \int_{t_1}^{t_2} |s|^{-1-\alpha} ds \\ &\leq c' (|t_1|^{-\alpha} + |t_2|^{-\alpha}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $t_1, t_2 \rightarrow -\infty$. Por lo tanto (criterio de Cauchy) existe a tal que $|\Delta(t) - a| \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$ y se cumple

$$|\Delta(t) - a| = \left| \int_{-\infty}^t \dot{\Delta}(s) ds \right| = O(|t|^{-\alpha}) \quad (2.23)$$

cuando $t \rightarrow -\infty$.

Queda sólo por demostrar que si $a = 0$ entonces $\Delta(t) \equiv 0$. Asumamos $a = 0$. Sea $\|\Delta\|_T = \sup_{t \leq T} |\Delta(t)|$. Para T suficientemente negativa y $t \leq T$ veremos que (2.18) implica

$$\begin{aligned} |\dot{\Delta}(t)| &\leq \beta \|\Delta\|_T \int_{-\infty}^t (1 + |s|)^{-2-\alpha} ds \\ &\leq \beta \|\Delta\|_T \int_{-\infty}^t |s|^{-2-\alpha} ds = \beta' \|\Delta\|_T |t|^{-1-\alpha} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Y como, de (2.23)

$$\begin{aligned} |\Delta(t)| &= \left| \int_{-\infty}^t \dot{\Delta}(s) ds \right| \leq \beta' \|\Delta\|_T \int_{-\infty}^t |s|^{-1-\alpha} ds \\ &= \beta'' \|\Delta\|_T |t|^{-\alpha} \leq \beta'' \|\Delta\|_T |T|^{-\alpha} \end{aligned}$$

entonces, para T suficientemente negativa,

$$\|\Delta\|_T \leq \rho \|\Delta\|_T$$

con $\rho < 1$. Entonces $\Delta(t) = 0$ para todo $t < T$ y la unicidad de la solución a la ecuación de Newton nos dice $x_1(t) \equiv x_2(t)$. Esto termina la demostración. \square

Veamos qué es lo que nos dice el lema 2.1.2. Todas las trayectorias con el mismo momento asintótico p forman una cierta "familia" de trayectorias. Si conocemos un miembro $x_0(t)$ de esta familia entonces cualquier otra trayectoria con el mismo momento asintótico queda caracterizada de manera unívoca por el vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$a = \lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t) - x_0(t)) \quad (2.25)$$

Como hemos visto en la introducción, en el caso de fuerzas de corto rango, la $x_0(t)$ en (2.25) puede ser sustituida por la "dinámica libre" pt , pues en ese caso existe el $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t) - pt)$ y este determina de manera unívoca, junto con el momento asintótico, a la trayectoria $x(t)$.

Vamos a tratar de construir, para el caso general de fuerzas de largo rango, una función $z^-(p, t)$ análoga a la dinámica libre tal que el límite

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t) - z^-(p, t)) \quad (2.26)$$

exista y defina de manera única, junto con el momento asintótico p , la trayectoria $x(t)$.

Podemos decir que nuestro trabajo ya está hecho, pues una $x_0(t)$ que satisfaga

$$\dot{x}_0(t) = p + \int_{-\infty}^t F(x_0(t)) \quad (2.27)$$

será un miembro de la familia de trayectorias con momento asintótico p que garantiza la existencia del límite (2.26) con $z^-(p, t) \equiv x_0(t)$. Pero obviamente no es interesante definir la $z^-(p, t)$ de esta manera, pues no simplificaría en nada la descripción del comportamiento asintótico de la trayectoria.

Sin embargo, podemos iterar (2.27) mediante una sucesión de funciones $\{z_n^-(p, t)\}$ tal que $z_0^-(p, t)$ sea la dinámica libre pt y tal que todas las $z_n^-(p, t)$ pasen por el mismo punto (digamos, por el origen) en $t = 0$.

Toda esta discusión se aplica también, claro está, al caso $t \rightarrow +\infty$.

Así, definamos la ecuación de iteración

$$z_n^\pm(p, t) = p + \int_{\pm\infty}^t F(z_{n-1}^\pm(p, s)) ds \quad (2.28)$$

bajo las condiciones $z_0^\pm(p, t) = p$, $z_n^\pm(p, 0) = 0$.

Mostraremos en el siguiente teorema que no es necesario llevar la iteración hasta infinito y que podemos hacer

$$z^\pm(p, t) \equiv z_N^\pm(p, t) \quad (2.29)$$

donde $N = [1/\alpha]$.

Teorema 2.1 *Asumamos (2.1), (2.2) y (2.3). Entonces para cada² $\langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle \in \Sigma_0$ existe un único $\langle \mathbf{x}_0^\pm, \mathbf{p}_0^\pm \rangle \in \Sigma_\pm$ tal que $U_t \langle \mathbf{x}_0^\pm, \mathbf{p}_0^\pm \rangle = \langle \mathbf{x}_{(\mathbf{a}, \mathbf{p})}^\pm(t), \dot{\mathbf{x}}_{(\mathbf{a}, \mathbf{p})}^\pm(t) \rangle$ satisfacc*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\dot{\mathbf{x}}_{(\mathbf{a}, \mathbf{p})}^\pm(t) - \mathbf{p}| = 0 \quad (2.30)$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\mathbf{x}_{(\mathbf{a}, \mathbf{p})}^\pm(t) - z^\pm(\mathbf{p}, t) - \mathbf{a}| = 0 \quad (2.31)$$

E inversamente, si $\langle \mathbf{x}_0^\pm, \mathbf{p}_0^\pm \rangle \in \Sigma_\pm$ entonces $U_t \langle \mathbf{x}_0^\pm, \mathbf{p}_0^\pm \rangle = \langle \mathbf{x}_{(\mathbf{a}, \mathbf{p})}^\pm(t), \dot{\mathbf{x}}_{(\mathbf{a}, \mathbf{p})}^\pm(t) \rangle$ para algún único $\langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle \in \Sigma_0$.

² $\Sigma_0 \equiv \Sigma \setminus \{ \langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle \mid \mathbf{p} = 0 \}$

Prueba. Haremos la demostración para $t \rightarrow -\infty$ y omitiremos el superíndice 'N' para que ésta sea más legible. Para la prueba necesitaremos establecer una estimación para la diferencia entre $z_N(p, t)$ y $z_{N-1}(p, t)$ para $|t|$ grandes, así como una estimación de la forma en que tiende a infinito $|z_N(p, t)|$ cuando $t \rightarrow -\infty$. Se puede demostrar que si $|p| \geq \varepsilon > 0$ entonces existen $c, \delta > 0$ y $t_0 < 0$, todos dependiendo de ε , tales que para todo $t < t_0$

$$|z_N(p, t) - z_{N-1}(p, t)| \leq c|t|^{1-N\alpha} \quad (2.32)$$

$$|z_N(p, t)| \geq \delta|t| \quad (2.33)$$

La demostración de esto la dejamos para la última sección de este capítulo, lema 2.2.2.

Definamos ahora C_T como el conjunto de funciones $y : (-\infty, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfacen $\|y\|_T \equiv \sup_{t \in (-\infty, T]} |y(t)| \leq 1$. C_T es entonces un espacio métrico completo. Definamos el mapeo $\psi_{a,p,T}(y)$ como:

$$(\psi_{a,p,T}(y))(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} [F(z_N(p, s) + a + y(s)) - F(z_{N-1}(p, s))] ds d\tau \quad (2.34)$$

para $t \leq T$. Vamos a utilizar las ecs. (2.32) y (2.33) para probar que $\psi_{a,p,T}$ es un mapeo contractivo de C_T sobre sí misma para una T suficientemente negativa. Sea $I(y, s)$ el integrando de la ec. (2.34) con $y \in C_T$:

$$\begin{aligned} I(y, s) &= F(z_N(p, s) + a + y) - F(z_{N-1}(p, s)) \\ &= [F(z_N(p, s) + a + y) - F(z_N(p, s))] + \\ &\quad + [F(z_N(p, s)) - F(z_{N-1}(p, s))] \end{aligned}$$

De la condición (2.3) y la ec. (2.33) tenemos, para $|s|$ grandes,

$$|F(z_N(p, s) + a + y) - F(z_N(p, s))| \leq k_1 |s|^{-2-\alpha} |a + y|.$$

Como $y \in C_T$, $|a + y|$ está acotado y tendremos

$$|F(z_N(p, s) + a + y) - F(z_N(p, s))| \leq k_2 |s|^{-2-\alpha} \quad (2.35)$$

Por otro lado, de la ec. (2.32) y la condición (2.3)

$$|F(z_N(p, s)) - F(z_{N-1}(p, s))| \leq k_1 |s|^{-2-\alpha} c |s|^{1-N\alpha} \quad (2.36)$$

Como $1 - N\alpha > 0$ entonces, para $|s|$ suficientemente grande, la suma de los miembros izquierdos de (2.35) y (2.36) puede ser adecuadamente estimada por un término con la misma forma que el miembro derecho de (2.36). Así,

$$|I(y, s)| \leq c_1 |s|^{-1-(N+1)\alpha} \quad (2.37)$$

Por lo tanto,

$$\|\psi_{a,p,T}(y)\|_T \leq c_2 |T|^{1-(N+1)\alpha} \quad (2.38)$$

De manera análoga consideramos $|\psi_{a,p,T}(y_2) - \psi_{a,p,T}(y_1)|$ con $y_1, y_2 \in C_T$. De (2.33) y la condición (2.3) tenemos, para $|s|$ grandes,

$$\begin{aligned} |F(z_N(p, s) + a + y_2(s)) - F(z_N(p, s) + a + y_1(s))| &\leq \\ &\leq k_3 |s|^{-2-\alpha} |y_2(s) - y_1(s)| \end{aligned}$$

por lo que

$$\|\psi_{a,p,T}(y_2) - \psi_{a,p,T}(y_1)\|_T \leq c_3 |T|^{-\alpha} \|y_2 - y_1\|_T \quad (2.39)$$

Si escogemos T tal que $c_2 |T|^{1-(N+1)\alpha} \leq 1$, $c_3 |T|^{-\alpha} < 1$ entonces (2.38) y (2.39) nos dicen que $\psi_{a,p,T}$ es un mapeo contractivo de C_T sobre sí mismo. Por el principio del mapeo contractivo, teorema A.1, $\psi_{a,p,T}$ tiene un único punto fijo $y \in C_T$. Definamos

$$x_{(a,p)}(t) = z_N(p, t) + a + y(t) \quad (2.40)$$

con y el punto fijo de $\psi_{a,p,T}$ en C_T . Entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(a,p)}(t) &= p + \int_{-\infty}^t F(z_{N-1}(p, s)) ds + \\ &+ \int_{-\infty}^t [F(z_N(p, s) + a + y(t)) - F(z_{N-1}(p, s))] ds \\ &= p + \int_{-\infty}^t F(x_{(a,p)}(s)) ds \end{aligned} \quad (2.41)$$

así que $x_{(a,p)}(t)$ satisface la ec. de Newton. (2.30) se sigue inmediatamente de (2.41) y (2.31) se sigue de que $|y(t)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$, en virtud de la ec. (2.34) y de que $y(t) = \psi_{a,p,T}(y(t))$. Entonces existe el $\langle x_0^-, p_0^- \rangle = \langle x_{(a,p)}(0), \dot{x}_{(a,p)}(0) \rangle$ buscado. Este punto es además único, pues si no, sea $\langle x'(t), \dot{x}'(t) \rangle = U_t \langle x_0^-, p_0^- \rangle$ con $\dot{x}'(t) \rightarrow p$ y $x'(t) - z_N(p, t) - a \rightarrow 0$. Tendremos entonces que $x'(t) - x_{(a,p)}(t) \rightarrow 0$ y el lema 2.1.2 nos diría $\langle x_0^-, p_0^- \rangle = \langle x_0^-, p_0^- \rangle$.

Finalmente, si $\langle x_0, p_0 \rangle \in \Sigma_-$ queremos encontrar $\langle a, p \rangle \in \Sigma_0$ tal que si $\langle x(t), p(t) \rangle = U_t \langle x_0, p_0 \rangle$ entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} |p(t) - p| &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t) - z(p, t) - a| &= 0 \end{aligned}$$

Por el lema 2.1.1 existe $p \neq 0$ tal que $p(t) \rightarrow p$, así que sólo falta encontrar 'a'. Sea b cualquier elemento de \mathbb{R}^3 y asociemos a la pareja $\langle b, p \rangle$ la trayectoria $x_{\langle b, p \rangle}(t)$ tal que cumple con ecuaciones de la forma de (2.30) y (2.31); en particular la correspondiente a la primera, i.e. $\lim_{t \rightarrow -\infty} |x_{\langle b, p \rangle}(t) - p| = 0$, y el lema 2.1.2, nos dicen que existe c tal que

$$|x_{\langle b, p \rangle}(t) - x(t) - c| \rightarrow 0. \quad (2.42)$$

Sea $a = b - c$. Afirmamos que ésta es la 'a' que necesitamos. Por lo pronto, la primera parte de esta demostración nos permite asegurar que a la pareja $\langle a, p \rangle$ le podemos asociar la trayectoria $x_{\langle a, p \rangle}(t)$ tal que se cumplan (2.30) y (2.31) (para $t \rightarrow -\infty$). Así que basta demostrar que $x_{\langle a, p \rangle}(t) \equiv x(t)$. Pero, según hemos dicho,

$$|x_{\langle a, p \rangle}(t) - z(p, t) - a| \rightarrow 0$$

y ya teníamos

$$|x_{\langle b, p \rangle}(t) - z(p, t) - b| \rightarrow 0.$$

Estas dos últimas expresiones implican

$$|x_{\langle a, p \rangle}(t) - x_{\langle b, p \rangle}(t) + c| \rightarrow 0 \quad (2.43)$$

Entonces, de (2.42) y (2.43),

$$\begin{aligned} |x(t) - x_{\langle a, p \rangle}(t)| &\leq |x_{\langle a, p \rangle}(t) - x_{\langle b, p \rangle}(t) + c| + \\ &+ |x_{\langle b, p \rangle}(t) - x(t) - c| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 \end{aligned}$$

y, otra vez por el lema 2.1.2, $x(t) \equiv x_{\langle a, p \rangle}(t)$. Esto termina la demostración del teorema 2.1. \square

El teorema anterior nos permite parametrizar (ó caracterizar) las trayectorias no acotadas para $t \rightarrow \pm\infty$ mediante la *dinámica aproximada* $E_i^{(0)}$,

$$E_i^{(0)}\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha + z^\pm(\beta, t), \beta \rangle, \quad \pm t > 0.$$

Y así el teorema que acabamos de demostrar se puede parafrasear diciendo que para toda trayectoria $\langle x^\pm(t), p^\pm(t) \rangle$ no acotada (en $t = \pm\infty$) y con energía positiva existe un (único) punto $\langle a, p \rangle$ en Σ_0 tal que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (U_t \langle x^\pm(0), p^\pm(0) \rangle - E_i^{(0)}\langle a, p \rangle) = 0 \quad (2.44)$$

Y como hemos establecido también que a cada $(a, p) \in \Sigma_0$ le corresponde un (único) punto $(x^\pm(0), p^\pm(0))$ tal que (2.44) se satisfaga, podemos definir el mapeo $W_\pm(a, p) = (x_0^\pm, p_0^\pm)$ donde (x_0^\pm, p_0^\pm) satisface (2.44) (con $x^\pm(0) = x_0^\pm$, $p^\pm(0) = p_0^\pm$). La ec. (2.44) se escribe entonces como

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (U_t W_\pm - E_t^{(0)}) = 0 \quad (2.45)$$

Enumeraremos a continuación algunas propiedades importantes de la dinámica aproximada $E_t^{(0)}$:

1. Es una transformación que preserva la medida.

En efecto, $E_t^{(0)}$ es una translación, que depende solo del momento, de la coordenada espacial. Entonces el determinante del jacobiano asociado a esta transformación es igual a la unidad.

2. Conserva el momento.

3. Conmuta con la dinámica libre³ $S_t^{(0)}$.

En efecto, $S_t^{(0)} E_t^{(0)}(\alpha, \beta) = (\alpha + z^\pm(\beta, t) + \beta t, \beta) = E_t^{(0)}(\alpha + \beta t, \beta) = E_t^{(0)} S_t^{(0)}(\alpha, \beta)$.

Por otro lado, el mapeo W_\pm definido arriba tiene la propiedad:

$$U_t W_\pm = W_\pm S_t^{(0)} \quad (2.46)$$

o bien $W_\pm = U_{-t} W_\pm S_t^{(0)}$. Esto será cierto si y sólo si (ec. (2.45)),

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} (U_s [U_{-t} W_\pm S_t^{(0)}] - E_s^{(0)}) = 0 \quad (2.47)$$

Pero:

$$\begin{aligned} U_s U_{-t} W_\pm S_t^{(0)} - E_s^{(0)} &= U_{s-t} W_\pm S_t^{(0)} - E_s^{(0)} \\ &= (U_{s-t} W_\pm S_t^{(0)} - U_s W_\pm S_t^{(0)}) + \\ &\quad + (U_s W_\pm S_t^{(0)} - E_s^{(0)} S_t^{(0)}) + \\ &\quad + (E_s^{(0)} S_t^{(0)} - E_s^{(0)}). \end{aligned}$$

³ $S_t^{(0)}(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta t, \beta)$

El segundo paréntesis tiende a cero cuando $s \rightarrow \pm\infty$ en virtud de (2.45). Además, del corolario 2.1,

$$(U_{s-t}W_{\pm}S_t^{(0)} - U_sW_{\pm}S_t^{(0)})\langle\alpha, \beta\rangle \xrightarrow{s \rightarrow \pm\infty} \langle-\beta t, 0\rangle$$

pero $(E_s^{(0)}S_t^{(0)} - E_s^{(0)})\langle\alpha, \beta\rangle = \langle\beta t, 0\rangle$. Entonces la ec. (2.47) es correcta y la relación (2.46) queda establecida.

El operador W_{\pm} que hemos construido nos permite asociar un punto $\langle x_0, p_0 \rangle$ de la trayectoria de dispersión con un punto $\langle a, p \rangle$ de la trayectoria asintótica. Esto es precisamente lo que le hemos pedido al *operador de onda* en la introducción. Además, la ec. (2.45) nos dice que $W_{\pm}(Q)$ es el dato inicial de la solución a la dinámica de interacción que es asintótica en $t = \pm\infty$ a la solución de la dinámica aproximada que tiene dato inicial igual a Q . Pero esta es precisamente la manera en que [3, p.8] define al operador de onda (pero estudiando solamente la dispersión bajo fuerzas de corto rango). Parece entonces que W_{\pm} es el operador de onda generalizado al problema con fuerzas de largo rango. Sin embargo W_{\pm} no es, en general⁴, una transformación canónica. En el siguiente capítulo construiremos la transformación $\Omega_{\pm} : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_{\pm}$ que sí satisface este requerimiento y será nuestro operador de onda generalizado. Esta construcción necesitará establecer nuevas hipótesis sobre el potencial. Observaremos, sin embargo, que Ω_{\pm} y W_{\pm} coincidirán para el problema con fuerzas de corto rango.

2.2 Pruebas técnicas para el capítulo 2.

Lema 2.2.1 *Asumamos (2.1), (2.2) y (2.3). Supongamos que $\mathbf{x}(t)$ es solución de la ecuación de Newton con $\overline{\lim}_{t \rightarrow -\infty} |\mathbf{x}(t)| = \infty$ y que $E(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)) > 0$. Entonces existe $T_0 < 0$ tal que para toda $t < T_0$ se cumple*

$$|\mathbf{x}(t)| \geq \sqrt{\frac{E}{2}}|t|.$$

Y análogamente cuando $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}(t)| = \infty$.

Prueba. Haremos la demostración para el caso $t \rightarrow -\infty$. Sea $I(t) = \frac{1}{2}|\mathbf{x}(t)|^2$ el momento de inercia. Tenemos:

$$\dot{I}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}\right) = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}$$

⁴Sin embargo, en el caso de fuerzas centrales y bajo ciertas restricciones extra sobre el potencial [1, secc. V], W_{\pm} será una transformación canónica.

o bien

$$\dot{I}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} x^2(t) \right) = \dot{x}(t)x(t)$$

donde $x(t) = |\mathbf{x}(t)|$ y $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} |\mathbf{x}(t)| \neq \left| \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \right|$ (en general). También:

$$\ddot{I}(t) = \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} + |\dot{\mathbf{x}}|^2$$

Como $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$, $E = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 + V$, entonces

$$\ddot{I}(t) = 2E + \mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) - 2V(\mathbf{x}).$$

Ya que⁵ $E > 0$ y tanto V como $\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}$ tienden a cero cuando $x \rightarrow \infty$ (lo primero lo hemos supuesto en (2.1) y lo segundo se sigue de (2.2)), podemos encontrar R_0 tal que $|\mathbf{x}| > R_0$ implica que

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) - 2V(\mathbf{x})| < E.$$

Como el $\overline{\lim}_{t \rightarrow -\infty} |\mathbf{x}(t)| = \infty$ podemos encontrar alguna $t_0 < 0$ tal que $x(t_0) > R_0$ y $\dot{x}(t_0) < 0$.

Ahora afirmamos que $x(t) > R_0$ para todo $t < t_0$. Pues supongamos lo contrario, i.e., que existe algún tiempo anterior a t_0 en el que $x(t) < R_0$. Sea t_1 el tiempo mas grande (menos negativo) de los $t < t_0$ con $x(t) = R_0$. Ya que $\ddot{I}(t) \geq E > 0$ para $t \in [t_1, t_0]$ tenemos que $\dot{I}(t_1) = x(t_1)\dot{x}(t_1) < \dot{I}(t_0) = x(t_0)\dot{x}(t_0) < 0 \Rightarrow \dot{x}(t_1) < 0$. Pero como $x(t_1 + \varepsilon) > R_0$ y $x(t_1) = R_0$ entonces $\dot{x}(t_1) \geq 0$; esto es una contradicción. Por lo tanto $x(t) > R_0$ para todo $t < t_0$.

Entonces $\ddot{I}(t) = E + g_1(t)$ donde $g_1(t) \geq 0$ para todo $t \in (-\infty, t_0]$. Integrando vemos que para $t < t_0$

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= \dot{I}(t_0) + \int_{t_0}^t \ddot{I}(\tau) d\tau \\ &= b + Et + \int_{t_0}^t g_1(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde b es una constante. La integral en el miembro derecho de (2.48) es evidentemente no-positiva, por lo que

$$\dot{I}(t) = b + Et - g_2(t)$$

⁵ Aquí se vé la necesidad de no haber incluido $E = 0$ en la definición de Σ_{\pm} .

con $g_2(t) \geq 0$ para todo $t \in [-\infty, t_0)$. Integrando nuevamente, para $t < t_0$ tendremos

$$\begin{aligned} I(t) &= I(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{I}(\tau) d\tau \\ &= a + bt + \frac{1}{2}Et^2 + \left(-\int_{t_0}^t g_2(\tau) d\tau\right) \end{aligned}$$

y el paréntesis es no-negativo. Así pues,

$$I(t) \geq a + bt + \frac{1}{2}Et^2 \quad (2.49)$$

para todo $t < t_0$ y constantes a y b apropiadas. Escribimos entonces

$$\frac{1}{2}x^2(t) = a + bt + \frac{1}{2}Et^2 + g_3(t)$$

donde $g_3(t) \geq 0 \forall t \in (-\infty, t_0]$;

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}Et^2\right)^{-1} \left(\frac{1}{2}x^2(t)\right) = \frac{a + bt}{\frac{1}{4}Et^2} + \frac{g_3(t)}{\frac{1}{4}Et^2} + 2 \quad (2.50)$$

Del miembro derecho de (2.50), el primer término tiende a cero cuando $t \rightarrow -\infty$ y el segundo término es positivo para todo $t < t_0$. Por lo tanto $(\frac{1}{4}Et^2)^{-1}(\frac{1}{2}x^2(t)) \geq 1$ para $|t|$ suficientemente grande por lo que podemos escribir

$$|x(t)| \geq \sqrt{\frac{E}{2}}|t| \quad (2.51)$$

para todo $t < T_0$ y alguna $T_0 < 0$. \square

Lema 2.2.2 Definamos $z_n(p, t)$ como en la pág. 17. Supongamos que $|p| \geq \varepsilon > 0$. Entonces existen $c, \delta > 0$ y $t_0 < 0$, que dependen de ε , tales que para todo $t < t_0$,

$$\begin{aligned} |z_N(p, t) - z_{N-1}(p, t)| &\leq c|t|^{1-N\alpha} \\ |z_N(p, t)| &\geq \delta|t| \end{aligned}$$

Prueba. Sea $\delta = \varepsilon/3$. Argumentamos por inducción. $z_0(p, t) = pt$ así que con $t_0^{(0)} = -1$ se cumple la desigualdad $|z_0(p, t)| \geq \delta|t|$, $\forall t < t_0^{(0)}$. Supongamos ahora que para algún $n < N$ existe $t_0^{(n)} < 0$ tal que para todo $t < t_0^{(n)}$, $|z_n(p, t)| \geq \delta|t|$. Sea $\hat{I}_n(t) \equiv \int_{-\infty}^t F(z_n(p, s)) ds$.

Veremos que $\hat{I}_n(t)$ está acotado para todo $t \leq 0$, así que tendrá sentido hablar de la integral $\int_0^t \hat{I}_n(t)$. Veremos luego que, para $|t|$ grandes, esta integral no crece más rápidamente que $O(|t|^{1-\alpha})$, y esto bastará para demostrar luego que $|z_{n+1}(p, t)| \geq \delta|t|$.

Utilizando la condición (2.2),

$$|\hat{I}_n(t)| \leq k \int_{-\infty}^t (1 + |z_n(p, s)|)^{-1-\alpha} ds \quad (2.52)$$

Para $t < t_0^{(n)}$,

$$\begin{aligned} |\hat{I}_n(t)| &\leq k \int_{-\infty}^t (1 + \delta|s|)^{-1-\alpha} ds \\ &\leq k\delta^{-1-\alpha} \int_{-\infty}^t |s|^{-1-\alpha} ds = k_1|t|^{-\alpha} \end{aligned}$$

con $k_1 = k\delta^{-1-\alpha}\alpha^{-1} > 0$. De hecho, para todo $t \leq 0$ obtenemos, de (2.52),

$$|\hat{I}_n(t)| \leq k \int_{-\infty}^{t_0^{(n)}} (\delta|s|)^{-1-\alpha} ds + k \int_{t_0^{(n)}}^0 ds = l_1$$

con $l_1 = k_1|t_0^{(n)}|^{-\alpha} + k|t_0^{(n)}| > 0$. Por lo tanto tendremos, para $t < t_0^{(n)}$,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \hat{I}_n(s) ds \right| &\leq \left| \int_0^{t_0^{(n)}} \hat{I}_n(s) ds \right| + \left| \int_{t_0^{(n)}}^t \hat{I}_n(s) ds \right| \\ &\leq l_1 \int_{t_0^{(n)}}^0 ds + k_1 \int_t^{t_0^{(n)}} |s|^{-\alpha} ds \\ &= l_2 + k_1(\alpha - 1)^{-1} \left[|t_0^{(n)}|^{1-\alpha} - |t|^{1-\alpha} \right], \quad l_2 = l_1|t_0^{(n)}| > 0, \\ &\leq l_2 + k_2|t|^{1-\alpha} \end{aligned} \quad (2.53)$$

con $k_2 = k_1(1 - \alpha)^{-1} > 0$.

Observamos ahora que $z_{n+1}(p, t) = \int_0^t \dot{z}_{n+1}(p, s) ds = \int_0^t [p + \hat{I}_n(s)] ds$. Así que

$$|z_{n+1}(p, t)| \geq |p||t| - \left| \int_0^t \hat{I}_n(s) ds \right|.$$

Como $|p| \geq 3\delta$, de (2.53) concluimos, para $t < t_0^{(n)}$,

$$|z_{n+1}(p, t)| \geq \delta|t| + (\delta|t| - l_2) + (\delta|t| - k_2|t|^{1-\alpha}).$$

Escojamos $t_0^{(n+1)} < t_0^{(n)}$ tal que

$$a) |t_0^{(n+1)}| > l_2/\delta$$

$$b) |t_0^{(n+1)}|^\alpha > k_2/\delta.$$

Entonces, para todo $t < t_0^{(n+1)}$ se cumplirá

$$|z_{n+1}(p, t)| \geq \delta |t| \quad (2.54)$$

con lo cual queda probada la desigualdad (2.33).

Para probar (2.32) definamos $\Delta_n(t) = z_n(p, t) - z_{n-1}(p, t)$, $n = 1, 2, \dots, N$. En el caso particular $n = 1$ tendremos

$$\dot{\Delta}_1(t) = \int_{-\infty}^t F(z_0(p, s)) ds = \int_{-\infty}^t F(pt) ds.$$

Así,

$$|\dot{\Delta}_1(t)| \leq k \int_{-\infty}^t (1 + |ps|)^{-1-\alpha} ds.$$

Esta integral está acotada para todo $t \leq 0$ y para $t \ll 0$ se tiene

$$|\dot{\Delta}_1(t)| \leq k|p|^{-1-\alpha} \int_{-\infty}^t |s|^{-1-\alpha} ds = k|p|^{-1-\alpha} \alpha^{-1} |t|^{-\alpha}$$

por lo que, para $t < T'$ y cualquier $T' < 0$ fija (digamos $T' = t_0^{(1)}$),

$$|\Delta_1(t)| = \left| \int_0^t \dot{\Delta}_1(s) ds \right| \leq c_1 |t|^{1-\alpha} \quad (2.55)$$

para alguna $c_1 > 0$ apropiada. Supongamos ahora que para alguna $n = 1, 2, \dots, N-1$ se cumple

$$|\Delta_n(t)| \leq c_n |t|^{1-n\alpha}$$

para toda $t < t_0^{(n)}$. Observamos que

$$\begin{aligned} |\dot{\Delta}_{n+1}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^t [F(z_n(p, s)) - F(z_{n-1}(p, s))] ds \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^t |DF(\xi(s)) \Delta_n(s)| ds \end{aligned}$$

con $\xi(s)$ en el segmento que une $z_n(p, s)$ y $z_{n-1}(p, s)$. Por la argumentación de arriba sabemos que para todo $n = 1, 2, \dots$ existe $t_0^{(n)}$ tal que si $t < t_0^{(n)}$

se cumplen $|z_n(p, t)|, |z_{n-1}(p, t)| \geq \delta|t|$. Por lo tanto, usando la condición (2.3),

$$|\dot{\Delta}_{n+1}(t)| \leq k' \int_{-\infty}^t (1 + \delta|s|)^{-2-\alpha} |\Delta_n(s)| ds \quad (2.56)$$

Por hipótesis de inducción, para $t < t_0^{(n)}$ tenemos

$$|\dot{\Delta}_{n+1}(t)| \leq d_2 \int_{-\infty}^t (1 + \delta|s|)^{-2-\alpha} |s|^{1-n\alpha} ds$$

con $d_2 = k'c_n$; luego,

$$\begin{aligned} |\dot{\Delta}_{n+1}(t)| &\leq d_2 \int_{-\infty}^t |\delta s|^{-2-\alpha} |s|^{1-n\alpha} ds \\ &= d_3 \int_{-\infty}^t |s|^{-1-(n+1)\alpha} ds, \quad d_3 = d_2 \delta^{-2-\alpha}, \\ &= d_4 |t|^{-(n+1)\alpha}, \quad d_4 = d_3 [(n+1)\alpha]^{-1}. \end{aligned}$$

Para todo $t \leq 0$, $|\dot{\Delta}_{n+1}(t)|$ está acotada. Entonces, para $t < t_0^{(n)}$,

$$\begin{aligned} |\Delta_{n+1}(t)| &\leq \left| \int_0^{t_0^{(n)}} \dot{\Delta}_{n+1}(s) ds \right| + \left| \int_{t_0^{(n)}}^t \dot{\Delta}_{n+1}(s) ds \right| \\ &\leq h^{(n)} + \int_t^{t_0^{(n)}} d_4 |s|^{-(n+1)\alpha} ds \\ &= h^{(n)} + d_5 [|t|^{1-(n+1)\alpha} - |t_0^{(n)}|^{1-(n+1)\alpha}] \\ &\leq h^{(n)} + d_5 |t|^{1-(n+1)\alpha} \end{aligned}$$

con $d_5 = d_4 [1 - (n+1)\alpha] > 0$ y $h^{(n)}$ una constante positiva apropiada. Sea c_{n+1} tal que

$$c_{n+1} \geq h^{(n)} |t_0^{(n)}|^{(n+1)\alpha-1} + d_5.$$

Entonces, para todo $t < t_0^{(n+1)} < t_0^{(n)}$ tendremos

$$|\Delta_{n+1}(t)| \leq c_{n+1} |t|^{1-(n+1)\alpha}. \quad (2.57)$$

Esto prueba la ec. (2.32). \square

Capítulo 3

El Operador de Onda

3.1 El Operador de Onda como transformación canónica.

En este capítulo construiremos una dinámica *cuasi-libre*, $U_t^{(0)}$, que sea transformación canónica y que se aproxime a la dinámica de interacción U_t suficientemente bien como para que el mapeo $\Omega_t = U_t^{-1}U_t^{(0)}$ converja cuando $t \rightarrow \pm\infty$:

$$\Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega_t .$$

Ω_{\pm} será llamado el "operador de onda".

Por analogía con la $E_t^{(0)}$ del capítulo anterior pediremos que $U_t^{(0)}$ conserve el momento. Esta será la manera más sencilla de asegurar que si $\Omega_{-}\langle a, p \rangle = \langle x_0, p_0 \rangle$ entonces el momento asintótico de $U_t\langle x_0, p_0 \rangle$ sea p .

Por definición de transformación canónica (véase apéndice) necesitamos construir un hamiltoniano $H' = H_0 + U$ ($H_0 \equiv \frac{1}{2}p^2$) asociado con $U_t^{(0)}$. Si hemos de pedir que $U_t^{(0)}$ conserve el momento entonces la $U = U(p, t)$ del H' no dependerá de x . Las ecuaciones de Hamilton se escriben entonces como

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= 0 \\ \dot{x} &= p + \nabla_p U(p, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Entonces $U_t^{(0)}\langle a, p \rangle = \langle a + x(p, t), p \rangle$ con

$$x(p, t) = pt + \int_0^t \nabla_p U(p, s) ds \quad (3.2)$$

Para construir la $U(p, s)$ que satisfaga (3.2) definiremos la siguiente familia de 'potenciales' $U_k(p, t)$. Sea $N = \lfloor 1/\alpha \rfloor$. (Como $\alpha < 1 \Rightarrow N \geq 1$). Para $k = 0, 1, 2, \dots, N+1$ definamos

$$\left. \begin{aligned} U_0(p, t) &= 0 \\ U_k(p, t) &= V \left(pt + \int_0^t \nabla_p U_{k-1}(p, s) ds \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

y a su vez definamos la familia de funciones $x_k(p, t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$ como

$$x_k(p, t) = pt + \int_0^t \nabla_p U_k(p, s) ds, \quad (3.4)$$

así que tendremos $U_k(p, t) \equiv V(x_{k-1}(p, t))$ y $x_0(p, t) = pt$. Finalmente definamos

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(p, t) &= x_N(p, t) \\ U(p, t) &= U_N(p, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Sustituyendo la definición (3.5) en (3.4) obtenemos la ec. (3.2), con lo cual terminamos la construcción de $U_t^{(0)}$ y su Hamiltoniano asociado. Sin embargo, para que la anterior lista de 'potenciales' $U_k(p, t)$ esté bien definida necesitamos imponer más restricciones sobre el potencial V que las que hemos considerado hasta ahora. Ya que¹ $DU_k(p, t)$ involucra a $(D^k V)(x)$, para poder hablar de $\nabla_p U(p, s)$ en la ecuación (3.2), p.ej., necesitamos cuando menos imponer la restricción $V \in C^N(\mathfrak{R}^3)$.

De hecho, para poder demostrar que $\Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega_t$ existe y que es una transformación canónica, necesitaremos postular las siguientes condiciones:

$$V \in C^{N+2}(\mathfrak{R}^3) \quad (3.6)$$

$$|(D^n V)(x)| \leq c|x|^{-\alpha-n} \quad (3.7)$$

con $n = 0, 1, \dots, N+2$.

Bajo estas hipótesis es posible demostrar (véanse los lemas 3.3.1 y 3.3.2 en la última sección de este capítulo) que se satisfacen las siguientes desigualdades, que utilizaremos en la demostración de los siguientes tres teoremas.

¹ $D^n U_k(p, t) \equiv D_p^n U_k(p, t)$ es la derivada parcial de $U_k(p, t)$ con respecto a p . $(D^n V)(x) \equiv (D_x^n V)(x)$ es la derivada de $V(x)$ respecto a x .

Si $|p| \geq \varepsilon > 0$ entonces para $n = 1, 2$ se cumplen:

$$|(D^n U_{N+1})(p, t) - (D^n U_N)(p, t)| \leq c(1 + |t|)^{-\alpha(N+1)} \quad (3.8)$$

$$|(D^n x_N)(p, t)| \leq c(1 + |t|) \quad (3.9)$$

$$|x_N(p, t) - pt| \leq c|t|^{1-\alpha} \quad (3.10)$$

Teorema 3.1 *Asumamos (3.6) y (3.7). Entonces existe la transformación Ω_{\pm}^{-1} definida como el $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega_t^{-1}$. Ω_{\pm}^{-1} es un mapeo uno-a-uno de Σ_{\pm} sobre Σ_0 . Además, si $(x_1(0), p_1(0))$ y $(x_2(0), p_2(0))$ están en Σ_{\pm} y ambos satisfacen la cc. (2.12) entonces*

$$\Omega_{\pm}^{-1}(x_1(0), p_1(0)) - \Omega_{\pm}^{-1}(x_2(0), p_2(0)) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (x_1(t) - x_2(t), 0). \quad (3.11)$$

Prueba. Sea $U_t(x_0, p_0) = (x(t), p(t))$. De acuerdo con la definición de Ω_t , tenemos $\Omega_t^{-1}(x_0, p_0) = (U_t^{(0)})^{-1}U_t(x_0, p_0) = (U_t^{(0)})^{-1}(x(t), p(t)) = (x(t) - x(p(t), t), p(t))$, así que escribimos

$$\Omega_t^{-1}(x_0, p_0) = (r(t), p(t))$$

con $r(t) \equiv x(t) - x(p(t), t)$. Si $(x_0, p_0) \in \Sigma_{\pm}$ entonces $p(t)$ converge cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Nuestro trabajo será ver que $r(t)$ también converge cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Tenemos:

$$\dot{r}_j(t) = \dot{p}_j(t) - \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(p(t), t)\dot{p}_i(t) - \frac{\partial x_j}{\partial t}(p(t), t) \quad (3.12)$$

Pero:

$$\dot{p}_i(t) = F_i(x(t)) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial t}(p, t) = p_j + \frac{\partial}{\partial p_j}U_N(p, t) \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.13) y (3.14) en (3.12):

$$\dot{r}_j(t) = -\frac{\partial x_j}{\partial p_i}(p(t), t)F_i(x(t)) - \frac{\partial}{\partial p_j}U_N(p(t), t) \quad (3.15)$$

Por otro lado, como $U_{N+1}(p, t) = V(x(p, t))$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{N+1}}{\partial p_j}(p, t) &= \frac{\partial V}{\partial x_i}(x(p, t)) \frac{\partial x_i(p, t)}{\partial p_j} \\ &= -F_i(x(p, t)) \frac{\partial x_i(p, t)}{\partial p_j}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(p, t) = \delta_{ij}t + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial p_j \partial p_i} V(x_{N-1}(p, s)) ds$$

y $V, x_{N-1} \in C^2$ tenemos entonces

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(p, t) = \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(p, t). \quad (3.17)$$

De (3.16) y (3.17) escribimos

$$\frac{\partial U_{N+1}}{\partial p_j}(p(t), t) + F_i(x(p(t), t)) \frac{\partial x_j(p(t), t)}{\partial p_i} = 0 \quad (3.18)$$

Sumando (3.18) al miembro derecho de (3.15):

$$\begin{aligned} \dot{r}_j(t) = & \left[\frac{\partial x_j(p, t)}{\partial p_i} \{F_i(x(p, t)) - F_i(x(t))\} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial U_{N+1}}{\partial p_j}(p, t) - \frac{\partial U_N}{\partial p_j}(p, t) \right) \right]_{p=p(t)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como $p(t) \rightarrow p \neq 0$ entonces para $|t|$ suficientemente grande se tendrá $|p(t)| \geq \varepsilon > 0$. Podemos entonces usar (3.8) y ver que para el segundo paréntesis en el miembro derecho de (3.19) tenemos

$$\left| \frac{\partial U_{N+1}}{\partial p_j}(p, t) - \frac{\partial U_N}{\partial p_j}(p, t) \right| \leq c|t|^{-(N+1)\alpha} \quad (3.20)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |F_i(x(p(t), t)) - F_i(x(t))| & \leq |D^2V(\xi)||r(t)| \\ & \leq c|\xi|^{-2-\alpha}|r(t)| \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde ξ está entre $x(p(t), t)$ y $x(t)$. Sabemos que $|x(t)| \geq c|t|$ para alguna c . Para $|x(p(t), t)|$ observamos:

$$\begin{aligned} |x(p(t), t) - p| & \leq |x(p(t), t) - x(p, t)| + \\ & \quad + |x(p, t) - p|. \end{aligned} \quad (3.22)$$

De (3.9) y la ec. (2.10):

$$\begin{aligned} |x(p(t), t) - x(p, t)| & \leq |Dx(\eta, t)||p(t) - p| \\ & \leq c(1 + |t|)(1 + |t|)^{-\alpha} \leq c(1 + |t|)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

(η entre p y $p(t)$) y por lo tanto, recordando también (3.10),

$$|x(p(t), t) - pt| \leq c|t|^{1-\alpha} \quad (3.23)$$

para $|t|$ grandes. Esta última ecuación implica que $|x(p(t), t)| \geq c|t|$, para alguna c^2 . Por lo tanto (3.21) implica

$$|F_i(x(p(t), t)) - F_i(x(t))| \leq c|t|^{-2-\alpha}|r(t)|$$

y entonces, de (3.9),

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial p_j}(p, t) [F_i(x(p, t)) - F_i(x(t))] \right|_{p=p(t)} \leq c|t|^{-1-\alpha}|r(t)| \quad (3.24)$$

Observemos ahora que $-1 - \alpha < -\alpha(N + 1)$ por lo que al sustituir (3.20) y (3.24) en (3.19) podemos escribir simplemente

$$|\dot{r}(t)| \leq c|t|^{-(N+1)\alpha}(|r(t)| + 1) \quad (3.25)$$

para todo $|t| > T_0$ y alguna $T_0 > 0$.

Veremos a continuación que (3.25) implica que $|r(t)|$ está acotada. Sea $\rho(t) = |r(t)| + 1$. Tenemos $|\dot{\rho}(t)| = \left| \frac{d}{dt}|r(t)| \right| \leq |\dot{r}(t)|$. Así que podemos escribir (3.25) como

$$|\dot{\rho}(t)| \leq c|t|^{-(N+1)\alpha}\rho(t). \quad (3.26)$$

Supongamos en lo que sigue que $t > T_0$. El caso $t < -T_0$ es análogo. La ec. (3.26) implica

$$\rho(t) \leq \rho(T_0) + c \int_{T_0}^t \frac{1}{s^\beta} \rho(s) ds, \quad \beta = (N + 1)\alpha.$$

²Si esto no es claro para el lector, puede ver la idea que usamos a partir de la ec. (3.60), pag. 52.

Entonces, por la desigualdad de Gronwall³,

$$\begin{aligned} \rho(t) &\leq \rho(T_0) + c \int_{T_0}^t \frac{1}{s^\beta} \rho(T_0) \exp\left(\int_s^t \frac{c}{\mu^\beta} d\mu\right) ds \\ &= \rho(T_0) + \rho(T_0) \int_{T_0}^t \left(-\frac{d}{ds} \exp\left(\int_s^t \frac{c}{\mu^\beta} d\mu\right)\right) ds \\ &= \rho(T_0) - \rho(T_0) \left[\exp\left(\frac{c}{1-\beta} (t^{1-\beta} - s^{1-\beta})\right)\right]_{s=T_0}^{s=t}; \end{aligned}$$

así que:

$$\rho(t) \leq \rho(T_0) \exp\left(\frac{c}{1-\beta} (t^{1-\beta} - T_0^{1-\beta})\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \rho(T_0) c_0$$

(con $c_0 = \exp\left(\frac{c T_0^{1-\beta}}{\beta-1}\right)$) pues $1-\beta < 0$. Esto nos dice que $|r(t)|$ está acotado cuando $t \rightarrow \pm\infty$, como habíamos afirmado. Entonces la ec. (3.25) implica

$$|\dot{r}(t)| \leq c'|t|^{-(N+1)\alpha} \quad (3.27)$$

cuando $t \rightarrow \pm\infty$; $(N+1)\alpha > 1$. Entonces, por el criterio de Cauchy, $r(t)$ converge cuando $t \rightarrow \pm\infty$ y hemos demostrado que el $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega_t^{-1}(w)$ existe para todo $w \in \Sigma_\pm$. Definimos $\Omega_\pm^{-1} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega_t^{-1}$.

Probaremos ahora la ec. (3.11) y la usaremos para ver que el mapeo Ω_\pm^{-1} es uno-a-uno y sobre. Supongamos que $(x_1(0), p_1(0)), (x_2(0), p_2(0))$ satisfacen (2.12). Por el lema 2.1.2 tenemos que $|p_1(t) - p_2(t)| \leq c|t|^{-1-\alpha}$. Tendremos, usando (3.9), que

$$\begin{aligned} |x(p_1(t), t) - x(p_2(t), t)| &\leq |Dx(\eta, t)| |p_1(t) - p_2(t)| \\ &\leq c|t| |t|^{-1-\alpha} = c|t|^{-\alpha} \end{aligned} \quad (3.28)$$

³La desigualdad de Gronwall [10, p.37] afirma que si φ , ψ y χ son funciones reales continuas en un intervalo $I: a \leq t \leq b$ y satisfacen

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\varphi(s) ds$$

para todo $t \in I$, con $\chi(t) > 0$ en I , entonces:

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \chi(u) du\right) ds, \quad \forall t \in I.$$

para $|t|$ grandes. Entonces $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} [x(p_1(t), t) - x(p_2(t), t)] = 0$ y substituyendo esto en

$$\begin{aligned} \Omega_{\pm}^{-1} \langle x_1(0), p_1(0) \rangle - \Omega_{\pm}^{-1} \langle x_2(0), p_2(0) \rangle &= \\ &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle x_1(t) - x_2(t) - x(p_1(t), t) + x(p_2(t), t), p_1(t) - p_2(t) \rangle \end{aligned}$$

obtenemos la ec. (3.11). Si ahora $\Omega_{\pm}^{-1} \langle x_1(0), p_1(0) \rangle - \Omega_{\pm}^{-1} \langle x_2(0), p_2(0) \rangle = \langle 0, 0 \rangle$ entonces el lema 2.1.2 nos dice que $x_1(t) \equiv x_2(t)$ y entonces

$$\langle x_1(0), p_1(0) \rangle = \langle x_2(0), p_2(0) \rangle ;$$

i.e., Ω_{\pm}^{-1} es uno-a-uno.

Sea ahora $\langle a, p \rangle \in \Sigma_0$. El teorema 2.1 afirma que existe $\hat{x}(t)$ tal que $\dot{\hat{x}}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} p \neq 0$. Pero $\Omega_{\pm}^{-1} \langle \hat{x}(0), \dot{\hat{x}}(0) \rangle = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \hat{r}(t), \dot{\hat{x}}(t) \rangle$ con $\hat{r}(t) = \hat{x}(t) - x(\hat{x}(t), t)$. Según ya hemos demostrado, existe $b = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \hat{r}(t)$. Sea $x(t) \equiv a - b + \hat{x}(t)$. Entonces

$$\Omega_{\pm}^{-1} \langle x(0), \dot{x}(0) \rangle = \langle r(t), \dot{x}(t) \rangle$$

con $\dot{x}(t) \rightarrow p$ y $r(t) \rightarrow a$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Hemos entonces encontrado $w = \langle x(0), \dot{x}(0) \rangle \in \Sigma_{\pm}$ tal que $\Omega_{\pm}^{-1} w = \langle a, p \rangle$; i.e., Ω_{\pm}^{-1} es sobre. Esto termina la demostración. \square

Hemos establecido la existencia del mapeo Ω_{\pm}^{-1} , y hemos demostrado que es un mapeo biyectivo, lo cual define el inverso de Ω_{\pm}^{-1} , obviamente denotado por Ω_{\pm} .

Un paralelismo que existe entre W_{\pm} y Ω_{\pm} es que este último también satisface la propiedad

$$\Omega_{\pm} S_t^{(0)} = U_t \Omega_{\pm} \quad (3.29)$$

En efecto. Sea $\Omega_{\pm}^{-1} \langle x(0), p(0) \rangle = \langle a, p \rangle$ y definamos, en la ecuación (3.11),

$$\langle x_1(0), p_1(0) \rangle = \langle x(\lambda), p(\lambda) \rangle \quad \text{y} \quad \langle x_2(0), p_2(0) \rangle = \langle x(0), p(0) \rangle .$$

Entonces $\Omega_{\pm}^{-1} \langle x(\lambda), p(\lambda) \rangle = \langle a + \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (x(t + \lambda) - x(t)), p \rangle$. Ahora, del corolario 2.1 (pag. 13), $x(t + \lambda) - x(t) \rightarrow p\lambda$. Por lo tanto $\Omega_{\pm}^{-1} U_{\lambda} \langle x(0), p(0) \rangle = \langle a + p\lambda, p \rangle = S_{\lambda}^{(0)} \Omega_{\pm}^{-1} \langle x(0), p(0) \rangle$, lo cual prueba (3.29).

Falta demostrar que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega_t = \Omega_{\pm}$. A continuación demostraremos que dicho límite se alcanza uniformemente sobre cualquier compacto $K \subset \Sigma_0$.

Teorema 3.2 *Asumamos (3.6) y (3.7). Entonces $\Omega_t \rightarrow \Omega_{\pm}$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de Σ_0 .*

Prueba. Sea $K \subset \Sigma_0$ un compacto y sea $Q = (a, p) \in K$. Vamos a demostrar que $\Omega_- Q = \lim_{t \rightarrow -\infty} \Omega_t Q$ uniformemente en K .

Sea $(x(t), p(t)) = U_t \Omega_- Q$. Introduciremos ahora las funciones $\beta(Q; t) : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$ y $G(\alpha, s) : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$ que utilizaremos en la prueba:

$$\begin{aligned} \beta(Q; t) &= (\beta_1(Q; t), \beta_2(Q; t)) \\ &\equiv (x(t) - x(p(t), t) - a, p(t) - p) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$G(\alpha, s) = (G_1(\alpha, s), G_2(\alpha, s)) \quad \text{con:}$$

$$\begin{aligned} G_1(\alpha, s) &= \frac{\partial x}{\partial \alpha_2}(\alpha_2, s) [F(x(\alpha_2, s)) - F(x(\alpha_2, s) + \alpha_1)] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (U_{N+1} - U_N)(\alpha_2, s) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$G_2(\alpha, s) = F(x(\alpha_2, s) + \alpha_1) \quad (3.32)$$

Aquí $\partial(x)/\partial \alpha_2$ es la matriz de los $\partial(x_i)/\partial \alpha_{2j}$, y $\partial/\partial \alpha_2(U_{N+1} - U_N)$ es el vector columna de los $\partial/\partial \alpha_{2i}(U_{N+1} - U_N)$.

Vamos a demostrar ahora que se cumple

$$\beta(Q; t) = \int_{-\infty}^t G(Q + \beta(Q; s), s) ds \quad (3.33)$$

Tenemos $Q + \beta(Q; s) = (x(s) - x(p(s), s), p(s))$. Entonces

$$\begin{aligned} G_1(Q + \beta(Q; s), s) &= \left[\frac{\partial x}{\partial p}(p, s) [F(x(p, s)) - F(x(s))] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial p} (U_{N+1} - U_N)(p, s) \right]_{p=p(s)} = \dot{r}(s) \end{aligned}$$

donde $r(t) = x(t) - x(p(t), t)$, según habíamos estudiado antes.⁴ Del teorema anterior, $\lim_{s \rightarrow -\infty} r(s) = a$. Esto quiere decir que $x(t) - x(p(t), t) - a = \int_{-\infty}^t \dot{r}(s) ds$, por lo que

$$\beta_1(Q; t) = \int_{-\infty}^t G_1(Q + \beta(Q; s), s) ds.$$

⁴Ver la página 30 ó bien la ec. (3.19).

Por otro lado:

$$G_2(Q + \beta(Q; s), s) = F(x(s)) = \dot{p}(s)$$

Como $\lim_{t \rightarrow -\infty} p(t) = p$ entonces $p(t) - p = \int_{-\infty}^t \dot{p}(s) ds$. Así:

$$\beta_2(Q; t) = \int_{-\infty}^t G_2(Q + \beta(Q; s), s) ds.$$

Ya que $K \subset \Sigma_0$ es compacto existen a_0, p_0 tales que $|a| \leq a_0, |p| \geq p_0 > 0$ para todo $(a, p) \in K$. Sea $\mathcal{M}_{T, \varepsilon}$ el conjunto de las funciones continuas $\gamma : (-\infty, T] \rightarrow \mathbb{R}^6$ con $\|\gamma\|_T = \sup_{s \in (-\infty, T)} |\gamma(s)| \leq \varepsilon$, con $\varepsilon < p_0$. $\mathcal{M}_{T, \varepsilon}$ es un espacio métrico completo, con la distancia definida por la norma $\|\cdot\|_T$. Para $t \leq T$ definamos el operador φ^Q como

$$\varphi^Q(\gamma)(t) \equiv \int_{-\infty}^t G(Q + \gamma(s), s) ds. \quad (3.34)$$

Vamos a demostrar que para T suficientemente negativa, φ^Q es un mapeo de $\mathcal{M}_{T, \varepsilon}$ sobre sí mismo y que es una contracción. Para ello hace falta establecer las desigualdades

$$|G(\alpha, s)| \leq C_\delta(1 + |s|)^{-\alpha(N+1)} \quad (3.35)$$

$$\left| \frac{\partial G}{\partial \alpha}(\alpha, s) \right| \leq C_\delta(1 + |s|)^{-\alpha(N+1)} \quad (3.36)$$

que se cumplen para todo α con $|\alpha_1| \leq \delta^{-1}$ y $|\alpha_2| \geq \delta$, dado cualquier $\delta > 0$. Dejamos la demostración de (3.35) y (3.36) para la última sección de este capítulo, lema 3.3.3.

Si $(\alpha_1, \alpha_2) = Q + \gamma(s)$, con $\gamma \in \mathcal{M}_{T, \varepsilon}$, entonces

$$|\alpha_1| \leq |a| + |\gamma_1(s)| \leq a_0 + \varepsilon$$

$$|\alpha_2| \geq |p| - |\gamma_2(s)| \geq p_0 - \varepsilon$$

Escojamos la δ del lema 3.3.3 tal que $\delta^{-1} \geq a_0 + \varepsilon, 0 < \delta \leq p_0 - \varepsilon$. Por otro lado, sea T suficientemente negativa como para que se cumpla

$$C_\delta(\alpha(N+1) - 1)^{-1}(1 + |T|)^{1-\alpha(N+1)} < \min(1, \varepsilon). \quad (3.37)$$

Dada $\gamma \in \mathcal{M}_{T, \varepsilon}, t < T$ y usando (3.35):

$$\begin{aligned} |\varphi^Q(\gamma)(t)| &\leq C_\delta \int_{-\infty}^T (1 + |s|)^{-\alpha(N+1)} ds \\ &\leq C_\delta(\alpha(N+1) - 1)^{-1}(1 + |T|)^{1-\alpha(N+1)} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Y dadas $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{M}_{T,\varepsilon}$ y usando (3.36):

$$|\varphi^Q(\gamma_1)(t) - \varphi^Q(\gamma_2)(t)| \leq \int_{-\infty}^t \left| \frac{\partial G}{\partial \alpha}(\zeta(s), s) \right| |\gamma_1(s) - \gamma_2(s)| ds$$

con $\zeta(s)$ entre $Q + \gamma_1(s)$ y $Q + \gamma_2(s)$, por lo que $|\zeta_1(s)| \leq \delta^{-1}$ y $|\zeta_2(s)| \geq \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\varphi^Q \gamma_1 - \varphi^Q \gamma_2\|_T &\leq \\ &\leq \|\gamma_1 - \gamma_2\|_T C_\delta \int_{-\infty}^t (1 + |s|)^{-\alpha(N+1)} ds \\ &\leq \|\gamma_1 - \gamma_2\|_T C_\delta (\alpha(N+1) - 1)^{-1} (1 + |T|)^{1-\alpha(N+1)} \\ &= \rho \|\gamma_1 - \gamma_2\|_T, \quad \rho < 1. \end{aligned}$$

Así, hemos verificado que φ^Q es una contracción de $\mathcal{M}_{T,\varepsilon}$ sobre sí misma. Del teorema A.1 (Principio del Mapeo Contractivo) sabemos entonces que φ^Q tiene un único punto fijo en $\mathcal{M}_{T,\varepsilon}$.

Como $\beta(Q; \cdot)$ satisface (3.33) estamos tentados a decir que $\beta(Q; \cdot)$ es el punto fijo de φ^Q en $\mathcal{M}_{T,\varepsilon}$. Para ello hace falta, sin embargo, ver antes que $\beta(Q; \cdot) \in \mathcal{M}_{T,\varepsilon}$. Sea $\gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ el punto fijo de φ^Q en $\mathcal{M}_{T,\varepsilon}$. Lo que haremos es ver que $\beta(Q; t) \equiv \gamma(t)$. Definamos

$$\begin{aligned} \hat{p}(t) &= \gamma_2(t) + p \\ \hat{x}(t) &= \gamma_1(t) + a + x(\hat{p}(t), t). \end{aligned}$$

Entonces $Q + \gamma(s) = \langle \hat{x}(s) - x(\hat{p}(s), s), \hat{p}(s) \rangle$. Como $\gamma_2(s) = \int_{-\infty}^s F(\hat{x}(s)) ds$ entonces $|\hat{p}(t) - p| \rightarrow 0$. Si tuvieramos a) que $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{p}(t)$ y $\hat{x}(t)$ satisface la ecuación de Newton, y b) que $|\hat{x}(t) - x(t)| \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$, entonces por el lema 2.1.2 tendríamos que

$$\langle \hat{x}(t), \hat{p}(t) \rangle = \langle x(t), p(t) \rangle \quad \forall t \leq T \quad (3.38)$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \beta(Q; t) &= \langle \hat{x}(t) - x(\hat{p}(t), t) - a, \hat{p}(t) - p \rangle \\ &= \langle \gamma_1(t), \gamma_2(t) \rangle = \gamma(t). \end{aligned}$$

Ya que $\dot{\gamma}_2(s) = F(\hat{x}(s))$ entonces sólo hace falta demostrar $\dot{\hat{x}}(s) = \hat{p}(s)$ para tener a). Pero

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \int_{-\infty}^t \left[\frac{\partial x}{\partial p}(p, s) [F(x(p, s)) - F(\hat{x}(s))] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial p} (U_{N+1} - U_N)(p, s) \right]_{p=\hat{p}(s)} ds. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Usando el mismo tipo de cálculos que los usados para probar (3.19) (pero en sentido inverso), la ec. (3.39) se reduce a

$$\gamma_1(t) = \int_{-\infty}^t [-\dot{x}(\hat{p}(s), s) + \hat{p}(s)] ds$$

por lo que $\dot{\gamma}_1(t) = -\dot{x}(\hat{p}(t), t) + \hat{p}(t)$ y entonces $\dot{\hat{x}}(t)$ es efectivamente $\hat{p}(t)$. Para probar el inciso b), i.e. que $|\hat{x}(t) - x(t)| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$, escribimos

$$\begin{aligned} |\hat{x}(t) - x(t)| &\leq |\hat{x}(t) - x(t) + x(p(t), t) - x(\hat{p}(t), t) - a + a| + \\ &\quad + |x(\hat{p}(t), t) - x(p(t), t)| \\ &\leq |\gamma_1(t)| + |\beta_1(Q; t)| + |x(\hat{p}(t), t) - x(p(t), t)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $t \rightarrow -\infty$. (Aquí hemos usado que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{p}(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} p(t)$ y podemos aplicar (3.28)). Por lo tanto se cumple (3.38) y entonces $\beta(Q; \cdot) \in \mathcal{M}_{T, \epsilon}$.

Definamos ahora $\langle x^{(t)}(s), p^{(t)}(s) \rangle = U_s \Omega_t(Q) = U_{s-t} U_t^{(0)}(Q)$. Definamos también

$$\beta^t(Q; s) = \langle x^{(t)}(s) - x(p^{(t)}(s), s) - a, p^{(t)}(s) - p \rangle. \quad (3.40)$$

Con un cálculo similar al efectuado arriba observamos

$$\frac{\partial}{\partial s} \beta^t(Q; s) = G(Q + \beta^t(Q; s), s).$$

Además $\langle x^{(t)}(t), p^{(t)}(t) \rangle = U_{t-t} U_t^{(0)} Q = \langle a + x(p, t), p \rangle$, por lo que

$$\begin{aligned} \beta^t(Q; t) &= \langle a + x(p, t) - x(p^{(t)}(t), t) - a, p^{(t)}(t) - p \rangle \\ &= \langle 0, 0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\beta^t(Q; s) = \int_t^s G(Q + \beta^t(Q; \lambda), \lambda) d\lambda \quad (3.41)$$

Para $\gamma \in \mathcal{M}_{T, \epsilon}$ definamos

$$\varphi^{Q, t}(\gamma)(s) \equiv \int_t^s G(Q + \gamma(\lambda), \lambda) d\lambda.$$

$\varphi^{Q, t}$ es un mapeo contractivo de $\mathcal{M}_{T, \epsilon}$ sobre sí mismo, lo cual se vé con cálculos análogos a los que utilizamos con φ^Q . También, si $\gamma^{(t)}(s)$ es

el punto fijo de $\varphi^{Q,t}$ en $\mathcal{M}_{T,\varepsilon}$, podemos demostrar que $\beta^t(Q; s) = \gamma^t$ y entonces $\beta^t(Q; s) \in \mathcal{M}_{T,\varepsilon}$. Para ello, en analogía a como lo hicimos arriba, definimos

$$\begin{aligned}\hat{p}^{(t)}(s) &= \gamma_2^{(t)}(s) + p \\ \hat{x}^{(t)}(s) &= \gamma_1^{(t)}(s) + a + x(\hat{p}^{(t)}(s), s)\end{aligned}$$

y se demuestra que $\dot{\hat{x}} = \hat{p}(s)$ y $\ddot{\hat{x}}(s) = F(\hat{x}(s))$. Se calcula de inmediato que

$$\langle \hat{x}^{(t)}(t), \hat{p}^{(t)}(t) \rangle = \langle a + x(p, t), p \rangle$$

Pero $\langle x^{(t)}(t), p^{(t)}(t) \rangle = \langle a + x(p, t), p \rangle$ así que $\langle \hat{x}^{(t)}(t), \hat{p}^{(t)}(t) \rangle = \langle x^{(t)}(t), p^{(t)}(t) \rangle$ y por la unicidad de la solución a la ecuación de Newton con valores iniciales en un tiempo finito concluimos que $\gamma^{(t)}(s) = \beta^t(Q; s)$ y entonces $\beta^t(Q; s) \in \mathcal{M}_{T,\varepsilon}$.

Demostremos ahora que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\varphi^{Q,t} - \varphi^Q\|_T = 0$ uniformemente en Q para $Q \in K$. Aquí se define $\|\varphi^{Q,t} - \varphi^Q\|_T = \sup_{\gamma \in \mathcal{M}_{T,\varepsilon}} \|\varphi^{Q,t}(\gamma) - \varphi^Q(\gamma)\|_T$. Tendremos que (3.35) implica:

$$\begin{aligned}& \left| \varphi^{Q,t}(\gamma)(s) - \varphi^Q(\gamma)(s) \right| = \\ &= \left| \int_t^s G(Q + \gamma(\lambda), \lambda) d\lambda - \int_{-\infty}^s G(Q + \gamma(\lambda), \lambda) d\lambda \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^t G(Q + \gamma(\lambda), \lambda) d\lambda \right| \\ &\leq C_s (\alpha(N+1) - 1)^{-1} (1 + |t|)^{1-\alpha(N+1)} \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0\end{aligned}$$

para todo $Q \in K$ y cualquier $\gamma \in \mathcal{M}_{T,\varepsilon}$.

Tendremos entonces:

$$\begin{aligned}\|\beta(Q; \cdot) - \beta^t(Q; \cdot)\|_T &= \|\varphi^Q(\beta(Q; \cdot)) - \varphi^{Q,t}(\beta^t(Q; \cdot))\|_T \\ &\leq \|\varphi^Q(\beta(Q; \cdot)) - \varphi^Q(\beta^t(Q; \cdot))\|_T + \\ &\quad + \|\varphi^Q(\beta^t(Q; \cdot)) - \varphi^{Q,t}(\beta^t(Q; \cdot))\|_T \\ &\leq \rho \|\beta(Q; \cdot) - \beta^t(Q; \cdot)\|_T + \\ &\quad + \|(\varphi^Q - \varphi^{Q,t})(\beta^t(Q; \cdot))\|_T \\ \Rightarrow \|\beta(Q; \cdot) - \beta^t(Q; \cdot)\|_T &\leq (1 - \rho)^{-1} \|\varphi^Q - \varphi^{Q,t}\|_T\end{aligned}\tag{3.42}$$

Así que, en particular, $\beta^t(Q; T) \rightarrow \beta(Q; T)$ uniformemente en Q para $Q \in K$, por lo que

$$p^{(t)}(T) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} p(T) \quad (3.43)$$

uniformemente en K . Además, observemos que

$$\begin{aligned} \beta^t(Q; T) &= U_T \Omega_t(Q) - \langle x(p^{(t)}(T), T) + a, p \rangle \\ \beta(Q; T) &= U_T \Omega_-(Q) - \langle x(p(T), T) + a, p \rangle \\ \Rightarrow |U_T \Omega_t(Q) - U_T \Omega_-(Q)| &\leq |\beta^t(Q; T) - \beta(Q; T)| + \\ &+ |x(p^{(t)}(T), T) - x(p(T), T)| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

uniformemente en Q para $Q \in K$, donde hemos usado (3.43).

Como U_T es continua, (3.44) implica que $\Omega_t \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Omega_-$, uniformemente en Q para $Q \in K$. \square

Teorema 3.3 *Asumamos (3.6) y (3.7) y sea $D\Omega_t$ la matriz de derivadas $\partial(\Omega_t)_i / \partial Q_j(Q)$. Entonces $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} D\Omega_t = D\Omega_{\pm}$ uniformemente en subconjuntos compactos de Σ_0 . Además, los operadores de onda Ω_{\pm} son transformaciones canónicas (continuamente diferenciables) en Σ_0 .*

Prueba. $F(x)$ es continuamente diferenciable. Entonces el teorema A.2 (apéndice) nos dice que $\langle x^{(t)}(s), p^{(t)}(s) \rangle = U_{s-t} \langle x^{(t)}(t), p^{(t)}(t) \rangle$ es una función continuamente diferenciable respecto a cada componente de su dato "inicial" $\langle x^{(t)}(t), p^{(t)}(t) \rangle$. Por otro lado, $\langle x^{(t)}(t), p^{(t)}(t) \rangle = U_t^{(0)} \langle a, p \rangle = \langle a + x(p, t), p \rangle$ es una función continuamente diferenciable respecto a $\langle a, p \rangle$, ya que $x(p, t)$ lo es. Aplicando la regla de la cadena tendremos que $\langle x^{(t)}(s), p^{(t)}(s) \rangle$ es continuamente derivable respecto a cada componente de $Q = \langle a, p \rangle$; es decir, $\partial x_i^{(t)} / \partial Q_j(s)$ y $\partial p_j^{(t)} / \partial Q_j(s)$ existen y son continuas.

Definamos ahora $\Psi_{ij}^{(t)} = \frac{\partial x_i^{(t)}}{\partial Q_j}$, $\Lambda_{ij}^{(t)} = \frac{\partial p_j^{(t)}}{\partial Q_j}$. Como $\dot{x}_i^{(t)}(s) = p_i^{(t)}(s)$, $\dot{p}_i^{(t)}(s) = F_i(x^{(t)}(s))$, entonces $\Psi_{ij}^{(t)}(s)$, $\Lambda_{ij}^{(t)}(s)$ satisfacen el sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \Psi_{ij}^{(t)}(s) &= \Lambda_{ij}^{(t)}(s) \\ \frac{d}{ds} \Lambda_{ij}^{(t)}(s) &= A_{ik}^{(Q,t)}(s) \Psi_{kj}^{(t)}(s) \end{aligned} \right\} (\Lambda)$$

donde $A_{ik}^{(Q,t)}(s) \equiv \partial F_i / \partial x_k(x^{(t)}(s))$.

(Observemos que $A_{ik}^{(Q,t)}(s)$ depende de Q a través de $x^{(t)}(s)$.)

Dado $\langle \Psi^{(t)}(0), \Lambda^{(t)}(0) \rangle \in \mathfrak{R}^{3 \times 6} \times \mathfrak{R}^{3 \times 6}$ definamos

$$L_s^{(t)} \langle \Psi^{(t)}(0), \Lambda^{(t)}(0) \rangle = \langle \Psi^{(t)}(s), \Lambda^{(t)}(s) \rangle$$

la solución a (A) con condiciones iniciales $\langle \Psi^{(t)}(0), \Lambda^{(t)}(0) \rangle$. Análogamente definamos

$$L_s \langle \Psi(0), \Lambda(0) \rangle = \langle \Psi(s), \Lambda(s) \rangle$$

la solución al siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \Psi_{ij}(s) &= \Lambda_{ij}(s) \\ \frac{d}{ds} \Lambda_{ij}(s) &= A_{ik}^{(Q)}(s) \Psi_{kj}(s) \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

donde $A_{ik}^{(Q)}(s) \equiv \partial F_i / \partial x_k(x(s))$.

Observemos ahora que para $s \in [T, 0]$

$$\left| A^{(Q,t)}(s) - A^{(Q)}(s) \right| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 \quad (3.45)$$

uniformemente en $Q \in K$. En efecto,

$$\left| A^{(Q,t)}(s) - A^{(Q)}(s) \right| = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi)(x^{(t)}(s) - x(s)) \right|.$$

Sabemos que $U_T \Omega_t \rightarrow U_T \Omega_-$ así que $\langle x^{(t)}(T), p^{(t)}(T) \rangle \rightarrow \langle x(T), p(T) \rangle$ uniformemente en $Q \in K$. Entonces $\max_{s \in [T, 0]} |x^{(t)}(s) - x(s)| \rightarrow 0$ uniformemente en $Q \in K$ y se sigue (3.45). Pero entonces el lema A.1 y el teorema A.3 implican que

$$\text{si } \langle \Psi^{(t)}(T), \Lambda^{(t)}(T) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \langle \Psi(T), \Lambda(T) \rangle \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \text{entonces } \langle \Psi^{(t)}(0), \Lambda^{(t)}(0) \rangle &= (L_T^{(t)})^{-1} \langle \Psi^{(t)}(T), \Lambda^{(t)}(T) \rangle \rightarrow \\ &\rightarrow L_T^{-1} \langle \Psi(T), \Lambda(T) \rangle = \langle \Psi(0), \Lambda(0) \rangle \end{aligned} \quad (3.47)$$

cuando $t \rightarrow -\infty$, uniformemente en Q para $Q \in K$.

Dada $\gamma(s)$ elemento del conjunto de funciones continuas de $(-\infty, T]$ a $\mathfrak{R}^{6 \times 6}$, definamos los mapeos Θ^Q y $\Theta^{Q,t}$ como sigue:⁵

$$\Theta^{Q,t}(\gamma)(s) = \int_t^s \frac{\partial G}{\partial Q}(Q + \beta^t(\lambda), \lambda)(I + \gamma(\lambda)) d\lambda \quad (3.48)$$

$$\Theta^Q(\gamma)(s) = \int_{-\infty}^s \frac{\partial G}{\partial Q}(Q + \beta(\lambda), \lambda)(I + \gamma(\lambda)) d\lambda \quad (3.49)$$

Derivando con respecto a Q ambos miembros de la ec. (3.41) vemos que $\partial\beta^t/\partial Q(s)$ es punto fijo de $\Theta^{Q,t}$.

Además:

$$\left\| \frac{\partial\beta^t}{\partial Q} \right\|_T \leq \int_t^s \left\| \frac{\partial G}{\partial Q}(Q + \beta^t(\lambda), \lambda) \right\| \left\| I + \frac{\partial\beta^t}{\partial Q} \right\|_T d\lambda.$$

Sabemos que $\beta^t(\cdot) \in \mathcal{M}_{T,\varepsilon}$ por lo que $\left\| \frac{\partial G}{\partial Q}(Q + \beta^t(\lambda), \lambda) \right\| \leq C_\delta(1 + |\lambda|)^{-\alpha(N+1)}$ (ver (3.36)) si $Q \in K$. Por otro lado $\left\| I + \frac{\partial\beta^t}{\partial Q} \right\|_T \leq 1 + \left\| \frac{\partial\beta^t}{\partial Q} \right\|_T$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial\beta^t}{\partial Q} \right\|_T &\leq \left(1 + \left\| \frac{\partial\beta^t}{\partial Q} \right\|_T \right) C_\delta \int_{-\infty}^T (1 + |\lambda|)^{-\alpha(N+1)} d\lambda \\ &\leq \left(1 + \left\| \frac{\partial\beta^t}{\partial Q} \right\|_T \right) \rho \end{aligned}$$

donde $\rho < 1$ se ha definido en el teorema anterior.

Tenemos entonces

$$\left\| \frac{\partial\beta^t}{\partial Q} \right\|_T \leq \frac{\rho}{1 - \rho} \equiv k_0.$$

Ya encontramos un punto fijo de $\Theta^{Q,t}$, pero de Θ^Q no hemos dicho todavía nada. Demostremos a continuación que Θ^Q es un mapeo de \mathcal{M}'_{T,k_0} sobre sí mismo y que además es una contracción. (Aquí definimos \mathcal{M}'_{T,k_0} como el conjunto de todas las funciones continuas de $(-\infty, T]$ a $\mathfrak{R}^{6 \times 6}$ tales que su norma es menor o igual a k_0).

Así, supongamos que $\gamma \in \mathcal{M}'_{T,k_0}$. Tendremos

$$\begin{aligned} |\Theta^Q(\gamma)(s)| &\leq \int_{-\infty}^s \left| \frac{\partial G}{\partial Q}(Q + \beta(\lambda), \lambda) \right| |I + \gamma(\lambda)| d\lambda \\ &\leq (1 + \|\gamma\|_T) C_\delta \int_{-\infty}^T (1 + |\lambda|)^{-\alpha(N+1)} d\lambda \\ &\leq (1 + k_0) \rho. \end{aligned}$$

⁵ I es la matriz identidad; $\beta^t(\lambda) = \beta^t(Q; \lambda)$.

Pero:

$$(1 + k_0)\rho = \left(1 + \frac{\rho}{1-\rho}\right)\rho = \frac{\rho}{1-\rho} = k_0$$

así que Θ^Q es efectivamente un mapeo de \mathcal{M}'_{T,k_0} sobre sí mismo. Es inmediato verificar que también es una contracción.

Entonces existe $\gamma^Q(s)$, el punto fijo de Θ^Q en \mathcal{M}'_{T,k_0} . Demostremos a continuación que

$$\left\| \frac{\partial \beta^t(Q; \cdot)}{\partial Q} - \gamma^Q \right\|_T \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0. \quad (3.50)$$

uniformemente en Q para $Q \in K$.

Para abreviar las expresiones definamos los símbolos $H(\cdot)$ y $H^t(\cdot)$ como

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \frac{\partial G}{\partial Q}(Q + \beta(\lambda), \lambda) \\ H^t(\lambda) &= \frac{\partial G}{\partial Q}(Q + \beta^t(\lambda), \lambda). \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial \beta^t(Q; s)}{\partial Q} - \gamma^Q(s) \right| = \\ &= \left| \int_t^s H^t(\lambda) \left(I + \frac{\partial \beta^t(Q; \lambda)}{\partial Q} \right) d\lambda - \int_{-\infty}^s H(\lambda) (I + \gamma^Q(\lambda)) d\lambda \right| \\ &\leq I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde:

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \left| \int_{-\infty}^s H^t(\lambda) (I + \gamma^Q(\lambda)) d\lambda - \int_{-\infty}^s H(\lambda) (I + \gamma^Q(\lambda)) d\lambda \right| \\ I_2 &\equiv \left| \int_t^s H^t(\lambda) (I + \gamma^Q(\lambda)) d\lambda - \int_{-\infty}^s H^t(\lambda) (I + \gamma^Q(\lambda)) d\lambda \right| \\ I_3 &\equiv \left| \int_t^s H^t(\lambda) \left(I + \frac{\partial \beta^t(Q; \lambda)}{\partial Q} \right) d\lambda - \int_t^s H^t(\lambda) (I + \gamma^Q(\lambda)) d\lambda \right| \end{aligned}$$

Estimamos a continuación cada una de estas expresiones.

$$I_1 \leq (1 + \|\gamma^Q\|_T) \int_{-\infty}^T [H^t(\lambda) - H(\lambda)] d\lambda. \quad (3.52)$$

Observemos que el integrando está acotado por la función $2C'_\delta(1+|\lambda|)^{-\alpha(N+1)}$ (en virtud de la ec. (3.36)); esta función es integrable en $(-\infty, T]$. Por otro

lado, el teorema anterior nos dice que $\beta^t(\lambda) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \beta(\lambda)$ (uniformemente en $Q \in K$), así que para cada λ fijo tendremos que $[H^t(\lambda) - H(\lambda)] \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$. Entonces el teorema de convergencia dominada [9, p.91] nos dice que la integral del miembro derecho de (3.52) tiende a cero cuando $t \rightarrow -\infty$, uniformemente en Q para $Q \in K$. Es decir,

$$I_1 \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0. \quad (3.53)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq (1 + \|\gamma^Q\|_T) \int_{-\infty}^t H^t(\lambda) d\lambda \\ &\leq (1 + \|\gamma^Q\|_T) C_\delta \int_{-\infty}^t (1 + |\lambda|)^{-\alpha(N+1)} d\lambda \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Y finalmente:

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \left\| \frac{\partial \beta^t(Q; \cdot)}{\partial Q} - \gamma^Q \right\|_T \int_{-\infty}^T H^t(\lambda) d\lambda \\ &\leq \left\| \frac{\partial \beta^t(Q; \cdot)}{\partial Q} - \gamma^Q \right\|_T \rho. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Así que resumiendo (3.53), (3.54), (3.55) y (3.51):

$$\left\| \frac{\partial \beta^t(Q; \cdot)}{\partial Q} - \gamma^Q \right\|_T \leq (1 - \rho)^{-1} J_Q(t)$$

donde $J_Q(t)$ es una función que tiende a cero cuando $t \rightarrow -\infty$, uniformemente para $Q \in K$; i.e., hemos probado (3.50).

Entonces $\beta(Q; s)$ es derivable (con respecto a Q) y su derivada es precisamente $\gamma^Q(s)$. En efecto,

$$\beta^t(Q_0; s) = \int_0^1 \nabla_Q \beta^t(Q(\lambda); s) \cdot \hat{e} d\lambda + \beta^t(Q; s),$$

donde $Q(\lambda) = \lambda Q_0 + (1 - \lambda)Q$, $\hat{e} = \frac{Q_0 - Q}{|Q_0 - Q|}$. Entonces, para todo $s \leq T$,

$$\begin{aligned} \beta(Q_0; s) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \beta^t(Q_0; s) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_0^1 \nabla_Q \beta^t(Q(\lambda); s) \cdot \hat{e} d\lambda + \lim_{t \rightarrow -\infty} \beta^t(Q; s) \\ &= \int_0^1 \gamma(Q(\lambda); s) \cdot \hat{e} d\lambda + \beta(Q; s), \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación $\gamma(Q; s) \equiv \gamma^Q(s)$. Entonces, en particular,

$$\begin{aligned} \beta(Q_1, \dots, Q_j + \Delta, \dots, Q_6; s) &= \\ &= \int_0^\Delta \gamma(Q_1, \dots, Q_j + \lambda', \dots, Q_6; s) \cdot \hat{e}_j d\lambda' + \beta(Q; s), \end{aligned}$$

así que

$$\frac{\partial \beta(Q; s)}{\partial Q_j} = \gamma_j^Q(s).$$

En consecuencia, para el caso particular $s = T$,

$$\left| \frac{\partial \beta(Q; T)}{\partial Q} - \frac{\partial \beta^t(Q; T)}{\partial Q} \right| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$$

lo cual implica directamente (de la definición de $\beta(Q; \cdot)$ y $\beta^t(Q; \cdot)$, ecs. (3.30) y (3.40)):

$$\left\langle \frac{\partial x^{(t)}(T)}{\partial Q}, \frac{\partial p^{(t)}(T)}{\partial Q} \right\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \left\langle \frac{\partial x(T)}{\partial Q}, \frac{\partial p(T)}{\partial Q} \right\rangle.$$

Se cumple entonces la condición (3.46), y la ec. (3.47) implica que

$$\left\langle \frac{\partial x^{(t)}(0)}{\partial Q}, \frac{\partial p^{(t)}(0)}{\partial Q} \right\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \left\langle \frac{\partial x(0)}{\partial Q}, \frac{\partial p(0)}{\partial Q} \right\rangle.$$

Es decir:

$$\frac{\partial \Omega_t(Q)}{\partial Q} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \frac{\partial \Omega_-(Q)}{\partial Q}$$

uniformemente en Q para $Q \in K$.

Sabemos que $U_t^{(0)}$ y U_{-t} son transformaciones canónicas. La composición de transformaciones canónicas es canónica [4, p.483]. Por lo tanto Ω_t es transformación canónica.

En general, sabemos [4, p.485] que si \mathcal{T} es una transformación que transforma las coordenadas $\eta = \langle q, p \rangle$ en $\xi = \langle Q, P \rangle$ entonces \mathcal{T} es canónica si y solo si $[Q_i, P_j]_\eta = [q_i, p_j]_\eta$ (donde $[\cdot, \cdot]$ es el paréntesis de Poisson). Como Ω_t es canónica se tendrá $[\Omega_t(Q)_i, \Omega_t(Q)_j]_Q = [Q_i, Q_j]_Q$ por lo que

$$\begin{aligned} [\Omega_-(Q)_i, \Omega_-(Q)_j]_Q &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [\Omega_t(Q)_i, \Omega_t(Q)_j]_Q \\ &= [Q_i, Q_j]_Q. \end{aligned}$$

Por lo tanto Ω_- es transformación canónica. \square

Con esto terminamos la construcción del operador de onda Ω_{\pm} . Notemos que a pesar de que $\Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_{-t} U_t^{(0)}$, no se tendrá (en general) $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} [U_t \Omega_{\pm} - U_t^{(0)}] = 0$. De hecho, para fuerzas de largo rango, *este límite es característicamente* ∞ [1, p.207]. Sin embargo, para fuerzas de corto rango, $E_t^{(0)} = U_t^{(0)} = S_t^{(0)}$, por lo que $W_{\pm} = \Omega_{\pm}$ en ese caso.

3.2 Completitud Asintótica.

En esta sección discutiremos el concepto de completitud asintótica. De acuerdo a la definición que dimos en el capítulo 2, Σ_+ es la porción del espacio de las fases que comprende a los puntos cuyas trayectorias no están acotadas cuando $t \rightarrow +\infty$; y una descripción análoga tenemos para Σ_- . Sabemos que los operadores de onda Ω_+ y Ω_- tienen el mismo dominio, Σ_0 . Cabe aquí preguntarnos si también su rango es el mismo, es decir, si Σ_+ y Σ_- coinciden. Se dice [3, p.11] que se tiene *completitud asintótica débil* cuando $\Sigma_+ = \Sigma_-$, ó más precisamente, cuando todas las trayectorias que no están acotadas en $t = -\infty$ tampoco lo están en $t = +\infty$.

Por otro lado, quizá existan puntos del espacio de las fases que no se encuentran ni en Σ_+ ni en Σ_- . Excluyendo a los puntos cuya energía es estrictamente cero, los puntos que no estén ni en Σ_+ ni en Σ_- serán aquellos cuyas trayectorias están acotadas para todo $t \in (-\infty, \infty)$. Definimos a Σ_{acot} como la porción del espacio de las fases que comprende precisamente a estos puntos:

Definición 3.1 Sea $(x(t), p(t)) = U_t(x_0, p_0)$. Definimos

$$\Sigma_{acot} = \{(x_0, p_0) \in \Sigma \mid |x(t)| < k \quad \forall t \in (-\infty, \infty)\}$$

y alguna k finita}

Es fácil ver (por ejemplo) que si la energía es negativa para algún punto q en el espacio de las fases, entonces la *medida*⁶ de Σ_{acot} es no nula. Pues en alguna bola B alrededor de q la energía seguirá siendo negativa, la medida de B es distinta de cero, y es claro que el conjunto de puntos $\{(a, b) \mid \frac{1}{2}b^2 + V(a) < 0\}$ está contenido en Σ_{acot} , ya que hemos asumido que nuestro sistema es conservativo y el potencial $V(r)$ tiende a $-\infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.

⁶Medida de Lebesgue.

Se dice [3, p.11] que se tiene completitud asintótica fuerte, ó simplemente *completitud asintótica* cuando tenemos $\Sigma \setminus \Sigma_{acot} = \Sigma_+ = \Sigma_-$.

Para el problema de dispersión de dos partículas clásicas que estamos considerando, no tendremos completitud asintótica ó ni siquiera completitud asintótica débil en un sentido riguroso. Pero si estamos dispuestos a excluir de nuestra consideración subconjuntos del espacio de las fases que tengan medida cero, entonces sí tendremos completitud asintótica. Esto lo demostramos a continuación.

Teorema 3.4 *Asumamos las condiciones (2.1), (2.2) y (2.3). Entonces los conjuntos Σ_- , Σ_+ y $\Sigma \setminus \Sigma_{acot}$ coinciden salvo conjuntos de medida cero.*

Prueba. Utilizemos la notación $\langle r_{a,p}(t), \dot{r}_{a,p}(t) \rangle = U_t(a, p)$. Definamos los conjuntos N_+ y N_- como

$$N_{\pm} = \left\{ (a, p) \in \Sigma \mid \overline{\lim}_{t \rightarrow \pm\infty} |r_{a,p}(t)| < \infty \right\}$$

Es decir, $\Sigma_{acot} = N_+ \cap N_-$. Demostraremos a continuación que⁷ $\mu(N_+ \Delta N_-) = 0$. Para ello definamos una familia $\{K_n\}$ de subconjuntos compactos de Σ , tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Sigma$ y para toda n , $K_{n-1} \subset K_n$.⁸ Definamos ahora dos nuevas familias de subconjuntos de Σ , $\{N_+^{(n)}\}$ y $\{N_-^{(n)}\}$ como

$$N_+^{(n)} = \{(a, p) \in \Sigma \mid \langle r_{a,p}(t), \dot{r}_{a,p}(t) \rangle \in K_n \quad \forall t \in [0, +\infty)\}$$

$$N_-^{(n)} = \{(a, p) \in \Sigma \mid \langle r_{a,p}(t), \dot{r}_{a,p}(t) \rangle \in K_n \quad \forall t \in (-\infty, 0]\}$$

Lo primero que observamos es que $N_+ = \bigcup_n N_+^{(n)}$. En efecto, ya que el potencial que consideramos no tiene singularidades y está acotado en ∞ , por conservación de la energía tenemos que $|\dot{r}(t)|$ está acotado; digamos $|\dot{r}(t)| \leq c \quad \forall t \in \mathfrak{R}$. Como $r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{r}(s) ds$ entonces

$$|r(t)| \leq |r(t_0)| + c(t - t_0),$$

y esto nos dice que $|r(t)|$ debe estar acotado para toda $t \in [0, T]$ y cualquier $T > 0$. Ahora, si $w \in N_+$ tendremos⁹ $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |r(t)| < \infty$ y por lo tanto $|r(t)| < k$ para todo $t \in [0, \infty)$ y alguna k finita, es decir, $U_t w \in K_n$ para toda $t \in [0, \infty)$ y alguna n ; esto significa que $w \in N_+^{(n)}$ para alguna n . Así,

⁷ $A \Delta B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

⁸ Contención en sentido estricto.

⁹ $\langle r(t), \dot{r}(t) \rangle \equiv U_t w$

$N_+ \subset \bigcup_n N_+^{(n)}$. La contención inversa es inmediata. Por un argumento simétrico tendremos que también $N_- = \bigcup_n N_-^{(n)}$.

Pero entonces $N_+ \setminus N_- \subset \bigcup_n (N_+^{(n)} \setminus N_-^{(n)})$. En efecto, sea $w \in N_+ \setminus N_-$. Entonces w está en $N_+^{(n)}$ para algún n y $w \notin N_-^{(n)}$ para todo n ; i.e., $w \in N_+^{(n)} \setminus N_-^{(n)}$ para alguna n .

Entonces, para ver que $\mu(N_+ \setminus N_-) = 0$ basta ver que $\mu(N_+^{(n)} \setminus N_-^{(n)}) = 0$ para cada n . Esto es lo que haremos a continuación. Un argumento simétrico nos dirá que también $\mu(N_- \setminus N_+) = 0$.

Observemos que, para toda n ,

$$1. \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k N_+^{(n)} \subset N_-^{(n)}.$$

En efecto. Sea $l \in [0, \infty)$ y sea $k' \geq l$. Sea $w \in \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k N_+^{(n)}$. Entonces $U_{-l}w = U_{k'-l}q$, para algún $q \in N_+^{(n)}$ y $k' - l \geq 0 \Rightarrow U_{-l}w \in K_n$ y por lo tanto $w \in N_-^{(n)}$.

$$2. U_k N_+^{(n)} \subset N_+^{(n)} \quad \forall k.$$

En efecto. Sea $l \in [0, \infty)$ y sea $w \in U_k N_+^{(n)}$. Entonces $U_l w = U_{l+k}q$ para algún $q \in N_+^{(n)} \Rightarrow U_l w \in K_n$ y por lo tanto $w \in N_+^{(n)}$.

Entonces,

$$\mu(N_+^{(n)} \setminus N_-^{(n)}) \leq \mu(N_+^{(n)} \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k N_+^{(n)}).$$

Pero $N_+^{(n)} \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k N_+^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_+^{(n)} \setminus U_k N_+^{(n)}$. Así,

$$\mu(N_+^{(n)} \setminus N_-^{(n)}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(N_+^{(n)} \setminus U_k N_+^{(n)}).$$

Pero el *teorema de Liouville* nos dice que $\mu(U_k N_+^{(n)}) = \mu(N_+^{(n)})$ así que tendremos $\mu(N_+^{(n)} \setminus N_-^{(n)}) = 0$ y, finalmente, $\mu(N_+ \setminus N_-) = 0$.

Definamos ahora Σ' como

$$\Sigma' = \Sigma \setminus \{w \in \Sigma \mid E(w) = 0\} \setminus N_+ \Delta N_-.$$

Ya que $\{p \mid E(a_0, p) = 0\}$ es una esfera que tiene medida cero para cada a_0 fijo, tendremos que $\{w \in \Sigma \mid E(w) = 0\}$ es un conjunto de medida cero.

Así, Σ' es Σ con dos conjuntos de medida cero removidos. Demostremos ahora que $\Sigma' \setminus \Sigma_{acot} = \Sigma' \cap \Sigma_- = \Sigma' \cap \Sigma_+$. Sea $w \in \Sigma' \setminus \Sigma_{acot}$. Entonces $w \notin N_+ \Delta N_-$ y $w \notin N_+ \cap N_- \Rightarrow w \notin N_+ \cup N_-$; por lo tanto w está tanto en el complemento de N_+ como en el complemento de N_- . Como $E(w) \neq 0$ entonces $w \in \Sigma_+$ y $w \in \Sigma_-$. Las contenciones inversas son inmediatas. Esto termina la demostración. \square

Así pues, hemos demostrado que, módulo conjuntos de medida cero, Σ es la unión disjunta de Σ_{acot} y $\Sigma_+ = \Sigma_-$. Los conjuntos de medida cero que hemos necesitado dejar de lado son el conjunto de puntos con energía exactamente cero y el conjunto de puntos cuyas trayectorias están acotadas "por un lado" ($t \rightarrow \pm\infty$) pero no por "el otro" ($t \rightarrow \mp\infty$). El caso de la *captura* se encuentra en esta última clase de trayectorias.

3.2.1 Ejemplo de captura.

Entendemos por *captura* a las soluciones de la ec. de Newton tales que $\lim_{t \rightarrow -\infty} |r(t)| = \infty$ pero $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |r(t)| < \infty$. Veamos a continuación que, a pesar de formar parte de un conjunto de medida cero, en realidad no es difícil encontrar ejemplos de este tipo de trayectorias.

Así por ejemplo, supongamos un potencial V que depende de $|r|$ solamente (campo central). Para simplificar, restringámonos a fuerzas de corto rango¹⁰ y supongamos que el potencial es de la forma dada por la curva marcada con " $l = 0$ " en la figura 3.1, tal que tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$ como $r^{-2-\epsilon}$ ($\epsilon > 0$). Este potencial es fuertemente repulsivo para distancias pequeñas y débilmente atractivo para grandes distancias. Un potencial así es típico en los potenciales intermoleculares que se suponen en la teoría cinética.

Como el potencial efectivo $V'(r)$ depende del momento angular l de la partícula como $V'(r) = V(r) + l/r^2$, es claro que para una $l = l_1$ distinta de cero, pero no demasiado grande, el potencial efectivo tendrá la forma que se representa en la curva marcada con " $l = l_1$ " en la figura 3.1, es decir, presenta un máximo local para algún $r = r_1$. Si la partícula tiene una energía (positiva) mayor ó menor que E_1 (ver figura) y se aproxima desde infinito al centro dispersor, entonces alcanzará una distancia mínima respecto a dicho

¹⁰Para un potencial central general (con $V(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$) observamos: el potencial efectivo V' para una partícula con momento angular l_0 viene dado por $V'_0(r) = V(r) + l_0^2/2r^2$. Supongamos que r_0 satisface $\partial V'_0/\partial r(r_0) = 0$. Entonces si la partícula tiene energía $E_0 = V'_0(r_0)$ se presentará la captura.

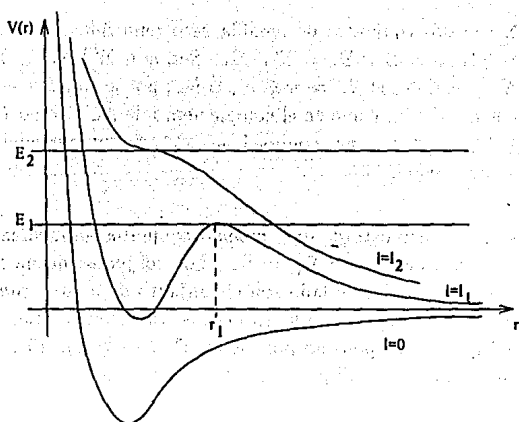


Figura 3.1: 'Captura' en $r = r_1$ cuando $(E, l) = (E_1, l_1)$.

centro y después se alejará cada vez más, tendiendo nuevamente a infinito. Pero si la energía tiene exactamente el valor E_1 entonces la partícula se quedará atrapada en equilibrio inestable alrededor del centro dispersor, en una órbita circular de radio r_1 ; es decir, se presenta la captura.

Observemos que, en el ejemplo que estamos estudiando, para un valor dado del momento angular existe sólo un valor de la energía (i.e., un sólo punto y no un continuo) que corresponde a la captura. De hecho, para un valor suficientemente grande de l (l_2 en la figura), la curva que representa al potencial efectivo ya no presentará un máximo local sino sólo un punto de inflexión. Para valores de l mayores que l_2 , ó energías mayores que E_2 (ver figura), ya no tendremos captura.

Con esto damos por concluida nuestra discusión sobre la completitud asintótica. Quizá la importancia de haberla establecido es que nos va a permitir definir la llamada S-transformación, que no es otra cosa que un mapeo que asocia el punto en Σ_0 que representa el comportamiento asintótico de la trayectoria en $t = -\infty$ con el punto en Σ_0 que representa el comportamiento asintótico de la trayectoria en $t \rightarrow +\infty$. Esta S-transformación es entonces la que nos va a permitir hacer contacto con la situación experimental.

Nos vá a ser imposible, sin embargo, desarrollar en esta tesis una teoría completa de la S-transformación que englobe lo que hemos estudiado en el presente capítulo. Con un caracter más bien ilustrativo, estudiaremos en el siguiente capítulo la S-transformación para el caso de fuerzas de *corto-rango* y básicamente estudiaremos el caso en que también son *centrales*.

3.3 Pruebas técnicas para el capítulo 3.

Lema 3.3.1 *Asumamos (3.6), (3.7) y sean $x_k(p, t)$ y $U_k(p, t)$ definidas como en la pag. 29. Entonces dada ε existe c tal que si $|p| \geq \varepsilon > 0$ se cumplen:*

$$|(D_p^n x_k)(p, t)| \leq c(1 + |t|) \quad (3.56)$$

$$|x_k(p, t) - pt| \leq c|t|^{1-\alpha} \quad (3.57)$$

$$\text{donde}^{11} \begin{cases} k = 0, 1, \dots, N \\ n = 1, 2, \dots, N + 2 - k \end{cases}$$

Prueba. Tratemos de estimar $|D_p^n x_k|$:

$$|D_p^n x_k(p, t)| \leq |t| + \left| \int_0^t |D_p^{n+1} V(x_k(p, s))| ds \right| \quad (3.58)$$

así que lo primero que necesitamos es estimar la $n + 1$ -ésima derivada de $V(x_k)$ con respecto a p . Para ello debemos establecer la siguiente

Proposición 1 *La expresión $D_p^{n+1} V(x_k(p, s))$ es igual a una sumatoria cuyos términos son de la forma:*

$$c D_x^m V(x_k(p, s)) \cdot \prod_{i=1}^m D_p^{a_i} x_k(p, s) \quad (3.59)$$

con $1 \leq m \leq n + 1$; $\sum_{i=1}^m a_i = n + 1$, $1 \leq a_i \leq n + 1$

(c es una constante que depende de cada término).

¹¹La ec. (3.56) y la ec. (3.64) del siguiente lema también son válidos para $n = 0$, siempre y cuando pidamos además $|p|$ acotado. Ese caso, sin embargo, es irrelevante para nuestro trabajo.

Esta proposición se demuestra por inducción. Para $n = 0$:

$$D_p V(x_k(p, s)) = D_x V(x_k(p, s)) D_p x_k(p, s)$$

que evidentemente es de la forma (3.59). Si ahora suponemos que cada término de $D_p^{n+1} V(x_k)$ es de la forma (3.59), derivando con respecto a p obtenemos:

$$\begin{aligned} c D_x^{m+1} V(x_k(p, s)) D_p x_k(p, s) & \prod_{i=1}^m D_p^{a_i} x_k(p, s) + \\ & + c D_x^m V(x_k(p, s)) D_p^{a_1+1} x_k(p, s) \prod_{i=2}^m D_p^{a_i} x_k(p, s) + \\ & + \dots + \\ & + c D_x^m V(x_k(p, s)) \prod_{i=1}^{m-1} D_p^{a_i} x_k(p, s) D_p^{a_m+1} x_k(p, s) \end{aligned}$$

y cada término de esta expresión es de la forma (3.59) con $n+1 \mapsto n+2$. Con esto queda establecida la proposición.

Volvamos a la demostración del lema que nos ocupa. Observamos que para $k = 0$ tenemos $x_0(p, t) = pt$ y en este caso (3.56) y (3.57) se cumplen trivialmente para $n = 1, 2, \dots, N+2$. Así que basta demostrar que si (3.56) y (3.57) se cumplen para k y para $n = 1, 2, \dots, n_0$ entonces se cumplen para $k+1$ y $n = 1, 2, \dots, n_0 - 1$.

En lo que sigue pensemos sólo en el caso $t \rightarrow +\infty$; por simetría tendremos el caso $t \rightarrow -\infty$.

Reescribiendo (3.57) observamos:

$$\left| \frac{|x_k(p, t)|}{|t|} - |p| \right| \leq c|t|^{-\alpha} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (3.60)$$

Así que dada $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < |p|$ existe $t_0 > 0$ tal que

$$|p| - \frac{|x_k(p, t)|}{|t|} \leq \varepsilon \quad \forall t > t_0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x_k(p, t)| & \geq (|p| - \varepsilon)|t| \\ |x_k(p, t)| & \geq c|t|, \quad c > 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Ahora las condiciones (3.6), (3.7) y la proposición que enunciamos arriba implican, bajo la hipótesis de inducción (con $n + 1 \leq n_0$), que

$$\begin{aligned} |D_p^{n+1}V(x_k(p, s))| &\leq c(1 + |t|)^{-\alpha-m}(1 + |t|)^m \\ &= c(1 + |t|)^{-\alpha} \end{aligned}$$

Entonces¹², de (3.58):

$$\begin{aligned} |D_p^n x_{k+1}(p, s)| &\leq |t| + c(1 + |t|)^{1-\alpha} \\ &\leq c(1 + |t|) \end{aligned} \quad (3.62)$$

para toda $n \leq n_0 - 1$. Por otro lado:

$$\begin{aligned} |x_{k+1}(p, t) - pt| &\leq \int_0^t |D_p V(x_k(p, s))| ds \\ &= \int_0^t |D_x V(x_k) D_p x_k(p, s)| ds \\ &\leq c \int_0^t (1 + |s|)^{-1-\alpha}(1 + |s|) ds \\ &= c(1 + |t|)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

así que para t grandes:

$$|x_{k+1}(p, t) - pt| \leq c|t|^{1-\alpha} \quad (3.63)$$

Una vez establecidas (3.62) y (3.63) hemos terminado la demostración. En particular, para $k = N$ se obtienen las ecs. (3.9) y (3.10) de la página 30. \square

Con base en el lema anterior demostramos ahora:

Lema 3.3.2 *Bajo las mismas condiciones que en el lema anterior, dada ε existe c tal que si $|p| \geq \varepsilon > 0$ se cumple:*

$$|D^n U_{k+1}(p, t) - D^n U_k(p, t)| \leq c(1 + |t|)^{-\alpha(k+1)} \quad (3.64)$$

$$\text{con } \begin{cases} k = 0, 1, \dots, N \\ n = 1, 2, \dots, N + 2 - k \end{cases}$$

¹² Usaremos la misma letra, c , para denotar las varias constantes que van a ir apareciendo.

Prueba. Procedemos por inducción sobre k . Para $k = 0$ tenemos, aplicando la proposición de la pag. 51 a $D_p^n V(x_0(p, s))$, que

$$\begin{aligned} |D^n U_1(p, s) - D^n U_0(p, s)| &= |D^n U_1(p, s)| \\ &= |D_p^n V(x_0(p, s))| \leq c(1 + |s|)^{-\alpha} \end{aligned}$$

para toda $n = 1, 2, \dots, N + 2$. Supongamos ahora que

$$|D^{n'} U_k(p, t) - D^{n'} U_{k-1}(p, t)| \leq c(1 + |t|)^{-\alpha k}$$

para toda $n' = 1, 2, \dots, N + 2 - (k - 1)$. Entonces, para $n = 0, 1, \dots, N + 2 - k$ tenemos:

$$\begin{aligned} |D^n(x_k - x_{k-1})(p, t)| &\leq \int_0^t |D_p^{n+1}(U_k - U_{k-1})(p, s)| ds \\ &\leq c \int_0^t (1 + |s|)^{-\alpha k} ds \leq c(1 + |t|)^{1-\alpha k} \end{aligned} \quad (3.65)$$

La desigualdad (3.65) nos ayudará ahora a estimar

$$\begin{aligned} |D_p^n U_{k+1}(p, t) - D_p^n U_k(p, t)| &= \\ &= \left| D_p^n V(x_k(p, t)) - D_p^n V(x_{k-1}(p, t)) \right|; \end{aligned} \quad (3.66)$$

pero de la forma general de los términos de $D_p^n V(x_k)$ (ver (3.59)) se deduce que el miembro derecho de (3.66) se expresa como una sumatoria cuyos términos son de la forma (en valor absoluto):

$$\begin{aligned} &\left| D_x^m V(x_k) \prod_{i=1}^m D_p^{\alpha_i} x_k(p, t) - D_x^m V(x_{k-1}) \prod_{i=1}^m D_p^{\alpha_i} x_{k-1}(p, t) \right| \leq \\ &\leq \left| D_x^m V(x_k) \prod_{i=1}^m D_p^{\alpha_i} x_k(p, t) - D_x^m V(x_k) \prod_{i=1}^m D_p^{\alpha_i} x_{k-1}(p, t) \right| + \\ &+ \left| D_x^m V(x_k) \prod_{i=1}^m D_p^{\alpha_i} x_{k-1}(p, t) - D_x^m V(x_{k-1}) \prod_{i=1}^m D_p^{\alpha_i} x_{k-1}(p, t) \right| \end{aligned} \quad (3.67)$$

Del miembro derecho de (3.67) denotemos por $|A|$ al primer valor absoluto y por $|B|$ al segundo. Calculamos:

$$|A| \leq |D_x^m V(x_k(p, t))| \left| \prod_{i=1}^m D_p^{\alpha_i} x_k(p, t) - \prod_{i=1}^m D_p^{\alpha_i} x_{k-1}(p, t) \right|. \quad (3.68)$$

Introducimos ahora la función auxiliar

$$f(w_1, w_2, \dots, w_m) = \prod_{i=1}^m w_i$$

Entonces:

$$\left| \prod_{i=1}^m D_p^{a_i} x_k(p, t) - \prod_{i=1}^m D_p^{a_i} x_{k-1}(p, t) \right| = \left| Df(\xi_1, \dots, \xi_m) \begin{pmatrix} D_p^{a_1} x_k - D_p^{a_1} x_{k-1} \\ D_p^{a_2} x_k - D_p^{a_2} x_{k-1} \\ \dots \\ D_p^{a_m} x_k - D_p^{a_m} x_{k-1} \end{pmatrix} \right| \quad (3.69)$$

donde ξ_i está en el segmento¹³ que une $D_p^{a_i} x_k(p, t)$ y $D_p^{a_i} x_{k-1}(p, t)$. Pero:

$$|Df(\xi_1, \dots, \xi_m)| = \left| \left(\prod_{j \neq 1} \xi_j \quad \prod_{j \neq 2} \xi_j \quad \dots \quad \prod_{j \neq m} \xi_j \right) \right|$$

y ya que del lema anterior $|\prod_{j \neq h} \xi_j| \leq c(1 + |t|)^{m-1}$ ($h = 1, 2, \dots, m$), entonces

$$|Df(\xi_1, \dots, \xi_m)| \leq c(1 + |t|)^{m-1} \quad (3.70)$$

Por otro lado, de (3.65),

$$\left| D_p^{a_i} x_k - D_p^{a_i} x_{k-1} \right| \leq c(1 + |t|)^{1-\alpha k} \quad (3.71)$$

así que substituyendo (3.70) y (3.71) en (3.69), y a su vez (3.69) en (3.68):

$$\begin{aligned} |A| &\leq c(1 + |t|)^{-\alpha - m} (1 + |t|)^{m-1} (1 + |t|)^{1-\alpha k} \\ &= c(1 + |t|)^{-\alpha(k+1)} \end{aligned} \quad (3.72)$$

donde hemos usado también las condiciones (3.6) y (3.7) y la expresión (3.61). Por otro lado, es fácil estimar

$$\begin{aligned} |B| &\leq \left| D_r^{m+1} V(\xi) \right| |(x_k - x_{k-1})(p, t)| \left| \prod_{i=1}^m D_p^{a_i} x_{k-1}(p, t) \right| \\ &\leq c(1 + |t|)^{-\alpha - m - 1} (1 + |t|)^{1-\alpha k} (1 + |t|)^m \\ &= c(1 + |t|)^{-\alpha(k+1)} \end{aligned} \quad (3.73)$$

¹³Segmentos de 'recta' en un espacio de cuando menos... ¡nueve dimensiones!

de las condiciones (3.6), (3.7), la ec. (3.65) y el lema anterior. Substituyendo (3.72) y (3.73) en (3.67) concluimos que

$$\left| D_p^n U_{k+1}(p, t) - D_p^n U_k(p, t) \right| \leq c(1 + |t|)^{-\alpha(k+1)}$$

con $n = 1, 2, \dots, N + 2 - k$. Esto termina la demostración. En particular, para $k = N$ obtenemos la ec. (3.8) de la pag. 30. \square

Lema 3.3.3 *Bajo las condiciones (3.6) y (3.7) definamos G como en la pag. 35. Para todo $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ con $|\alpha_1| \leq \delta^{-1}$, $|\alpha_2| \geq \delta$ y alguna $\delta > 0$ se cumplen:*

$$|G(\alpha, s)| \leq C_\delta(1 + |s|)^{-\alpha(N+1)} \quad (3.74)$$

$$\left| \frac{\partial G}{\partial \alpha}(\alpha, s) \right| \leq C_\delta(1 + |s|)^{-\alpha(N+1)} \quad (3.75)$$

Prueba. La prueba es directa pero los cálculos son largos.¹⁴ Comenzamos probando (3.74):

$$|G(\alpha, s)| = \left| \begin{pmatrix} G_1(\alpha, s) \\ G_2(\alpha, s) \end{pmatrix} \right|$$

De la definición de G :

$$\begin{aligned} |G_1(\alpha, s)| &\leq |D_{\alpha_2} x(\alpha_2, s) [F(x(\alpha_2, s)) - F(x(\alpha_2, s) + \alpha_1)]| + \\ &\quad + |D_{\alpha_2}(U_{N+1} - U_N)(\alpha_2, s)|. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Del miembro derecho de esta expresión denotemos por $|A|$ al primer valor absoluto y por $|B|$ al segundo.

$$\begin{aligned} |A| &\leq |D_{\alpha_2} x(\alpha_2, s) [F(x(\alpha_2, s)) - F(x(\alpha_2, s) + \alpha_1)]| \\ &\leq c(1 + |s|) \left| D_x^2 V(\xi) \right| |\alpha_1| \\ &\leq c(1 + |s|)(1 + |s|)^{-2-\alpha} = c(1 + |s|)^{-1-\alpha} \\ &\leq c(1 + |s|)^{-\alpha(N+1)} \end{aligned} \quad (3.77)$$

ya que $-1 - \alpha < -\alpha(N + 1)$.

$$\begin{aligned} |B| &\leq |D_{\alpha_2}(U_{N+1} - U_N)(\alpha_2, s)| \\ &\leq c(1 + |s|)^{-\alpha(N+1)} \end{aligned} \quad (3.78)$$

¹⁴ Usaremos los resultados de los dos lemas anteriores.

Por otro lado, (usando (3.61)),

$$\begin{aligned} |G_2(\alpha, s)| &\leq |F(x(\alpha_2, s) + \alpha_1)| \\ &\leq c(1 + |s|)^{-1-\alpha} \leq c(1 + |s|)^{-\alpha(N+1)} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Las desigualdades (3.77), (3.78) y (3.79) demuestran (3.74).

La ec. (3.75) se demuestra como sigue:

$$|DG(\alpha_2, s)| = \left| \begin{pmatrix} D_{\alpha_1} G_1 & D_{\alpha_2} G_1 \\ D_{\alpha_1} G_2 & D_{\alpha_2} G_2 \end{pmatrix} \right|$$

De la definición de G tenemos:

$$D_{\alpha_1} G_1 = -D_{\alpha_2} x(\alpha_2, s) \cdot D_x F(x(\alpha_2, s) + \alpha_1) \cdot I$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |D_{\alpha_1} G_1| &\leq |D_{\alpha_2} x(\alpha_2, s)| |D_x F(x(\alpha_2, s) + \alpha_1)| \\ &\leq c(1 + |s|)(1 + |s|)^{-2-\alpha} \\ &= c(1 + |s|)^{-1-\alpha} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Para $D_{\alpha_2} G_1$ tenemos:

$$|D_{\alpha_2} G_1| \leq |A'| + |B'| + |C'|$$

donde $|A'|$, $|B'|$ y $|C'|$ denotan:

$$|A'| = |D_{\alpha_2}^2 x(\alpha_2, s)[F(x(\alpha_2, s)) - F(x(\alpha_2, s) + \alpha_1)]|$$

$$\begin{aligned} |B'| &= |D_{\alpha_2} x(\alpha_2, s)[D_x F(x(\alpha_2, s)) - \\ &\quad - D_x F(x(\alpha_2, s) + \alpha_1)] D_{\alpha_2} x(\alpha_2, s)| \end{aligned}$$

$$|C'| = D_{\alpha_2}^2 (U_{N+1} - U_N)(\alpha_2, s)$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} |A'| &\leq c(1 + |s|) |DF(\xi)| |\alpha_1| \\ &\leq c(1 + |s|)(1 + |s|)^{-2-\alpha} = c(1 + |s|)^{-1-\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B'| &\leq c(1 + |s|) |D_x^2 F(\xi)| |\alpha_1| (1 + |s|) \\ &\leq c(1 + |s|)^2 |D_x^2 V(\xi)| \\ &\leq c(1 + |s|)^2 (1 + |s|)^{-\alpha-3} = c(1 + |s|)^{-1-\alpha} \end{aligned}$$

$$|C'| \leq c(1 + |s|)^{-\alpha(N+1)}.$$

Por lo tanto:

$$|D_{\alpha_2} G_1| \leq c(1 + |s|)^{-\alpha(N+1)} \quad (3.81)$$

Por otro lado:

$$|D_{\alpha_1} G_2| = 0 \quad (3.82)$$

Y finalmente:

$$|D_{\alpha_2} G_2| = |D_x F(x(\alpha_2, s) + \alpha_1) D_{\alpha_2} x(\alpha_2, s)|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |D_{\alpha_2} G_2| &\leq c |D_x F| (1 + |s|) \\ &\leq c(1 + |s|)^{-2-\alpha} (1 + |s|) = c(1 + |s|)^{-1-\alpha} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Las desigualdades (3.80), (3.81), (3.82) y (3.83) se resumen en la desigualdad (3.75). \square

Capítulo 4

La S-transformación en el problema de fuerzas de corto-rango.

En este capítulo estudiaremos la S-transformación, S , para el caso de fuerzas de corto-rango. En casi todo el tiempo supondremos además que se trata de un campo de fuerza central. Discutiremos como podemos 'reducir' S a dos funciones (Θ y T) reales de dos variables reales; daremos fórmulas explícitas para estas dos funciones. Discutiremos también el concepto de *sección eficaz de dispersión* y su relación con la situación experimental a través de la sección eficaz *diferencial* de dispersión.

Una vez establecida la *completitud asintótica* (capítulo anterior) tendrá sentido definir $S: \Sigma^{(-)} \rightarrow \Sigma^{(+)}$ como

$$S(w) = (\Omega_+)^{-1}(\Omega_- w)$$

donde¹

$$\Sigma^{(\pm)} = (\Omega_{\pm})^{-1}[\Sigma' \setminus \Sigma_{acot}] .$$

Observemos que $\Sigma^{(\pm)}$ está contenido en $\Sigma_0 = \{(a, p) \in \Sigma \mid p \neq 0\}$ y de hecho $\Sigma^{(\pm)}$ coincide con Σ_0 salvo un conjunto de medida cero. Y ya que Σ_0

¹No confundir $\Sigma^{(\pm)}$ con Σ_{\pm} , el conjunto definido en la pag. 10. Σ_{acot} se define en la pag. 46 y Σ' en la pag. 48.

es 'casi todo' \mathbb{R}^6 , tendremos que S es un mapeo de \mathbb{R}^6 a \mathbb{R}^6 , salvo conjuntos de medida cero. Llamamos a S la "S-transformación".

Así pues la S-transformación nos permite asociar el punto representativo del comportamiento asintótico de la trayectoria en $t = -\infty$ con aquel representativo del comportamiento asintótico en $t = +\infty$. Tendremos así la siguiente imagen de la dispersión:

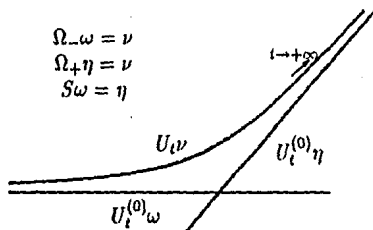


Figura 4.1: Representación esquemática de la dispersión.

Vamos a estudiar a continuación, como ejemplo de la aplicación de los conceptos anteriores, como se 'reduce' la descripción de S a dos funciones reales de dos variables reales en el caso en que F es una fuerza central (de corto rango).

Supongamos pues, en lo que sigue, las condiciones (2.1) y (2.3); en lugar de (2.2) supongamos que

$$|F(\mathbf{x})| \leq k(1 + |\mathbf{x}|)^{-2-\epsilon}, \quad \epsilon > 0$$

y a la condición (2.1) agregamos que $V = V(|\mathbf{r}|)$. Hemos dicho ya en la introducción que la dinámica que describe adecuadamente el comportamiento asintótico de las trayectorias de 'dispersión', en el caso que nos ocupa, es la *dinámica libre* $S_t^{(0)}$:

$$U_t^{(0)}\langle \alpha, \beta \rangle = S_t^{(0)}\langle \alpha, \beta \rangle \equiv \langle \alpha + \beta t, \beta \rangle.$$

Y además,

$$\Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_{-t} U_t^{(0)} \quad (4.1)$$

Estableceremos ahora cuatro propiedades para la S-transformación:

$$1. SU_t^{(0)} = U_t^{(0)}S.$$

En efecto. La ecuación (3.29) nos dice, en el presente caso, que $\Omega_{\pm}U_t^{(0)} = U_t\Omega_{\pm}$. Entonces $SU_t^{(0)}w = \Omega_+^{-1}\Omega_-U_t^{(0)}w = \Omega_+^{-1}U_t\Omega_-w = U_t^{(0)}\Omega_+^{-1}\Omega_-w = U_t^{(0)}Sw$.

$$2. SR = RS.$$

Aquí R es elemento de $SO(3)$, el conjunto de rotaciones en \mathfrak{R}^3 . Definimos $R(r, v) = \langle Rr, Rv \rangle$. Es claro que entonces (ya que el campo es central), $\Omega_{\pm}(Rw) = R(\Omega_{\pm}w)$. Entonces $SRw = \Omega_+^{-1}\Omega_-Rw = \Omega_+^{-1}R\Omega_-w = R\Omega_+^{-1}\Omega_-w = RSw$.

$$3. E_0(S \cdot) = E_0(\cdot).$$

Aquí $E_0(a, b) \equiv \frac{1}{2}b^2$. Primero observemos que $E(\Omega_{\pm}w) = E_0(w)$, donde $E(r, v) \equiv \frac{1}{2}v^2 + V(r)$. Tenemos, usando la ecuación (4.1), que $E(\Omega_{\pm}w) = E(\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_{-t}U_t^{(0)}w)$, y ya que el campo es conservativo, $E(\Omega_{\pm}w) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} E(U_t^{(0)}w) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} [\frac{1}{2}b^2 + V(a + bt)] = \frac{1}{2}b^2 = E_0(w)$, (donde $w = \langle a, b \rangle$). Así que se concluye fácilmente $E_0(Sw) = E_0[\Omega_+^{-1}\Omega_-w] = E(\Omega_-w) = E_0(w)$.

$$4. L(S \cdot) = L(\cdot).$$

En efecto, sabemos que el momento angular $L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ se conserva tanto en la dinámica de interacción como en la dinámica libre, así que $L(Sw) = L(w)$.

Observemos que para probar las propiedades 1 y 3 no necesitamos usar que el campo es central.

4.1 Reducción de S a dos funciones reales de dos variables reales.

Es posible hacer un análisis geométrico (en \mathfrak{R}^6), utilizando las cuatro propiedades que hemos enunciado arriba, para hacer ver que la S-transformación puede ser descrita por dos funciones reales de dos variables reales. Tomemos un $w \in \Sigma^{(-)}$ con energía $E_0(w) = E'$ y magnitud del momento angular igual a l . Consideremos el conjunto

$$\Lambda_{E', l} = \{RU_t^{(0)}w \mid t \in \mathfrak{R}, R \in SO(3)\}.$$

Ya que cada R en $SO(3)$ está determinado por tres parámetros, entonces l y R agrupan cuatro parámetros 'libres'. Así, $A_{E',l}$ es (en general) una 4-variedad en \mathbb{R}^6 . También es fácil convencerse que cada elemento de $A_{E',l}$ tiene energía E' y magnitud de momento angular l . Lo primero se sigue de que E_0 es invariante ante rotaciones y lo segundo de que la dinámica libre $U_t^{(0)}$ conserva el momento angular L , y la magnitud de L es invariante ante rotaciones.

Así pues, podemos describir a $\Sigma^{(-)}$ como la colección de todas las (clases de equivalencia) $A_{E',l}$, cada una de ellas caracterizadas por dos parámetros E' y l . De las propiedades 1 y 2 se sigue que si yo conozco Sw_0 para un $w_0 \in A_{E',l}$, entonces conozco Sw para cualquier otro $w \in A_{E',l}$. Por otro lado, de las propiedades 3 y 4 se sigue (dado un $w \in \Sigma^{(-)}$ fijo) que Sw debe encontrarse en una 2-variedad $B_{E',L}$ definida como el conjunto de puntos con la misma energía E' y el mismo momento angular (vector) L . (Así, el rango de S queda foliado por los $B_{E',L}$, mientras que su dominio quedó foliado por los $A_{E',l}$). E' y L forman cuatro parámetros (reales) 'fijos', lo cual sugiere que deben quedar 'libres' dos parámetros más y tenemos que $B_{E',L}$ es (en general) efectivamente una 2-variedad (pues el rango de S está en \mathbb{R}^6). Es decir, cada punto en $B_{E',L}$ queda definido por dos 'coordenadas'; así, para conocer Sw necesitamos sólo determinar sus dos 'coordenadas' en $B_{E',L}$. Esto nos dice que la S -transformación debe poder ser descrita mediante dos funciones reales, cada una de ellas función de los parámetros E' y l (ó algún par de variables reales).

Vamos ahora a elaborar el análisis anterior en términos más precisos y mostraremos explícitamente dos funciones que pueden describir adecuadamente la S -transformación. Ya que S es invariante ante rotaciones, es suficiente conocer $S(r, v)$ para² $v = p\hat{z}$ y r en el plano y - z .

Ahora bien, de la propiedad 1 se sigue que si $S(r, v) = \langle r', v' \rangle$ entonces $S(r + vt, v) = \langle r' + v't', v' \rangle$, así que es suficiente para nuestro estudio suponer que $r \cdot v = 0$. De esta manera, si nosotros conocemos $S(b\hat{y}, p\hat{z})$ para todo b y p entonces podemos recuperar $S(w)$ para todo $w \in \Sigma^{(-)}$. El parámetro b es conocido como *parámetro de impacto*. Sea $S(b\hat{y}, p\hat{z}) = \langle r', v' \rangle$. Por conservación de la energía (propiedad 3) tenemos que $|v'| = p$ así que $v' = p\hat{c}(b, p)$ donde \hat{c} es un vector unitario. Por conservación del momento angular (propiedad 4) r' y v' se encuentran en el plano y - z y además la componente de r' perpendicular a v' , r'_\perp , queda determinada por la ecuación $|r'_\perp||v'| = |L|$.

²Definamos \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} como los vectores unitarios en la dirección del eje correspondiente.

Así que lo único que queda por determinar es el ángulo que forma v' con respecto a \hat{z} , y la magnitud de r_{\parallel}' , la componente de r' en la dirección de v' . En conclusión, las dos funciones que describen a S son el *ángulo de dispersión*, Θ , y el *tiempo de retardo*, T , definidos como:

$$\Theta = \arccos(\hat{e} \cdot \hat{z}) \quad (4.2)$$

$$T = \frac{1}{p} \mathbf{r}' \cdot \hat{e} \quad (4.3)$$

(r_{\parallel}' será igual a pT). Así, la S-transformación ha quedado caracterizada por dos funciones reales (Θ y T) de dos variables reales, b y p , ó alternativamente, $E = \frac{1}{2}p^2$ y $l = bp$.

Para hacer más completa nuestra exposición daremos a continuación explícitamente Θ y T .

Sabemos [4, p.107] que la relación entre la coordenada angular y radial para una partícula que se mueve en un campo de fuerzas central es:

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2E}{l^2} - \frac{2V}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0,$$

con $V = V(r)$.

En la ecuación anterior, hagamos $r_0 = r_0(l, E)$ el radio del periáspide³, y hagamos $\theta_0 = 0$. Entonces, si ψ es el ángulo que forma el radio del periáspide con una de las asíntotas (ver figura 4.2) tendremos:

$$\psi = l \int_{r_0(l, E)}^{\infty} \left[2E - 2V - \frac{l^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{r^2} dr$$

y por lo tanto:

$$\Theta = \pi - 2l \int_{r_0(l, E)}^{\infty} \left[2E - 2V - \frac{l^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{r^2} \quad (4.4)$$

con $r_0(l, E) = \sup\{r \mid V(r) + \frac{l^2}{2r^2} \geq E\}$. (Que esta expresión para $r_0(l, E)$ corresponde al radio del periáspide se sigue del hecho de que así $\dot{r} = 0$ en $r = r_0(l, E)$ y \dot{r} está definida y es distinta de cero para todo $r > r_0(l, E)$; y en efecto, si una partícula se aproxima desde infinito al centro dispersor tendrá $\dot{r} < 0$ hasta llegar al periáspide).

³El "periáspide" es el punto de la trayectoria más cercano al centro dispersor.

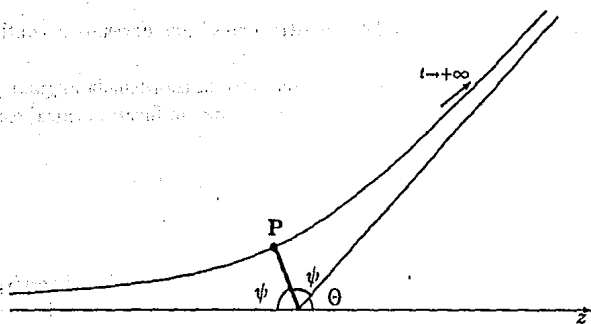


Figura 4.2: Cálculo de Θ , el ángulo de dispersión.

Comentemos ahora algo sobre el tiempo de retardo. En el análisis que sigue nos referiremos a la figura 4.3. Sea $\omega = \langle b\hat{y}, p\hat{z} \rangle$ y sea $\eta = \langle r', v' \rangle = S\omega$. Sea $\nu = \Omega_-\omega = \Omega_+\eta$. Imaginemos ahora tres partículas, p_ω , p_ν y p_η que se mueven de acuerdo a las dinámicas $U_t^{(0)}(\omega)$, $U_t(\nu)$ y $U_t^{(0)}(\eta)$, respectivamente. El tiempo que tarda p_η en ir de B' a R es

$$T = \frac{|\overline{B'R}|}{p}$$

con $|\overline{B'R}| = r' \cdot \hat{e}(b, p)$. T es el tiempo de retardo. A continuación damos, sin demostración⁴, la fórmula para T en términos de $E = \frac{1}{2}p^2$ y $l = bp$:

$$T = 2 \int_{R_0}^{\infty} \left\{ [2E - r^{-2}l^2]^{-\frac{1}{2}} - [2E - 2V - r^{-2}l^2]^{-\frac{1}{2}} \right\} dr + \\ + 2 \int_{\frac{l}{\sqrt{2E}}}^{R_0} [2E - r^{-2}l^2]^{-\frac{1}{2}} dr - 2 \int_{r_0(l, E)}^{R_0} [2E - 2V - r^{-2}l^2]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (4.5)$$

con $V = V(r)$ y donde R_0 es cualquier radio mayor que $l/\sqrt{2E}$ y que $r_0(l, E) = \sup\{r \mid V(r) + \frac{l^2}{2r^2} \geq E\}$.

Podemos dar la siguiente interpretación física del tiempo de retardo. Sea $T_{b,q}$ el tiempo que tarda p_η en ir de B' a un punto Q_η tal que $|\overline{OQ_\eta}| = q$. Sea $T_{r_0,q}$ el tiempo que tarda p_ν en ir de P (periáspide) a un punto Q_ν tal que $|\overline{OQ_\nu}| = q$. En realidad, para q grandes, Q_η y Q_ν son puntos muy cercanos entre sí. Supongamos que estamos interesados en conocer la diferencia entre $T_{b,q}$ y $T_{r_0,q}$. Sabemos [4, p. 91] que el tiempo que tarda una partícula que se mueve en un campo de fuerza central en ir desde un punto con radio r_0 hasta otro con radio r , viene dado por

$$t = \int_{r_0}^r [2E - 2V - \frac{l^2}{r^2}]^{-\frac{1}{2}} dr.$$

Ya que $|\overline{OB'}| = |\overline{OB}| = b = l/\sqrt{2E}$ y $|\overline{OP}| = r_0(l, E)$ entonces:

$$T_{b,q} - T_{r_0,q} = \int_{\frac{l}{\sqrt{2E}}}^q \left[2E - \frac{l^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} dr - \int_{r_0(l, E)}^q \left[2E - 2V(r) - \frac{l^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} dr.$$

Observamos ahora que $\frac{1}{2}T$, con T dado por la ec. (4.5), es el límite de esta diferencia de tiempos cuando $q \rightarrow \infty$; esto nos dá una interpretación física del "tiempo de retardo", así como una justificación de su nombre.

⁴Véase [3, p. 386] (problema 11).

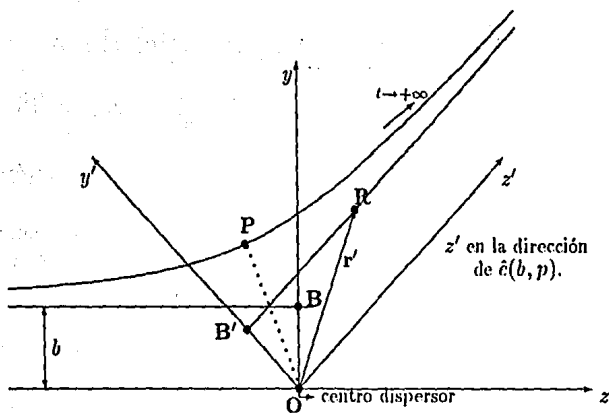


Figura 4.3: Descripción de T , el tiempo de retardo.

Observemos que para el caso de la dispersión de Coulomb ($V(r) = 1/r$) la integral para Θ converge, pero no así la integral para T .

Con esto terminemos nuestra discusión sobre la reducción de S en el caso de un campo central. En lo que sigue, consideremos el caso general, i.e., un campo no necesariamente central (pero mantenemos la hipótesis de que la fuerza es de corto-rango). Estudiaremos a continuación el concepto de *sección eficaz de dispersión*.

4.2 La sección eficaz de dispersión.

Para hacer contacto con los experimentos físicos debemos definir la sección eficaz de dispersión y estudiar su relación con el ángulo de dispersión. Consideraremos una "reducción" de S ligeramente distinta a la que estudiamos arriba. Sea $S(r, v) = \langle f(r, v), g(r, v) \rangle$, con $v = p\hat{z}$. Vamos a ignorar la información que nos da $f(r, v)$ —lo cual significa ignorar el tiempo de retardo T en el análisis de arriba (campo central). Notemos que podemos seguir usando las propiedades 1 y 3 (pag. 61). Por la propiedad 1 tendremos que $g(r, p\hat{z}) = g(r + \alpha\hat{z}, p\hat{z})$ para todo α . Consideremos entonces solo los r tales que $r \cdot \hat{z} = 0$. Por la propiedad 3 tenemos que $|g(r, p\hat{z})| = p$, así que sólo importa considerar la función $\hat{g}(r, p\hat{z})$ definida por la ecuación

$$g(r, p\hat{z}) = p\hat{g}(r, p\hat{z}).$$

Fijemos p . Entonces la función \hat{g} se convierte en un mapeo de \mathfrak{R}^2 (el plano perpendicular a $v = p\hat{z}$) a S^2 (la esfera unitaria). Así, la medida de Lebesgue en \mathfrak{R}^2 induce una medida σ en S^2 :

$$\sigma(E) = \mu(\hat{g}^{-1}(E)) \quad (4.6)$$

donde μ es la medida de Lebesgue en \mathfrak{R}^2 y E es un subconjunto⁵ de S^2 . A σ se le conoce como la *medida de la sección eficaz de dispersión*.⁶

En la mayor parte de los casos σ es absolutamente continua con respecto a Ω , la medida usual en S^2 , cuando se remueve la dirección frontal $\theta = 0$.

⁵Subconjunto de Borel.

⁶Notemos que aquí la nomenclatura difiere ligeramente de [4, secc. 3-10], donde utilizan la " σ " para denotar la sección eficaz *diferencial* de dispersión.

Entonces podemos definir $d\sigma/d\Omega$, una función en S^2 , tal que

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega .$$

A $d\sigma/d\Omega$ se le conoce como *sección eficaz diferencial* (de dispersión).

Un experimento de dispersión puede ser descrito adecuadamente por el siguiente modelo. Se hace incidir un haz de partículas sobre un 'blanco' (centro dispersor). Podemos considerar que este haz de partículas tiene una extensión lateral "infinita" y que tiene densidad ρ uniforme, donde ρ es el número de partículas por unidad de área transversal a la dirección de propagación del haz. La energía del haz es constante. Se coloca un detector en un ángulo de dispersión (θ, ϕ) , muy alejado del blanco; este detector cuenta las partículas que inciden sobre una región angular $\Delta\Omega$ alrededor de (θ, ϕ) . Si el detector está muy alejado del blanco y $\Delta\Omega$ es muy pequeño entonces el área $\Delta\sigma$, sobre el plano perpendicular al haz, por el cual pasan las partículas que después de dispersarse "entran" en la región angular $\Delta\Omega$ del detector, será aproximadamente igual a

$$\Delta\sigma \approx \frac{\text{número de partículas detectadas}}{\rho} ;$$

es decir, para $\Delta\Omega$ muy pequeña y un detector muy alejado se tendrá (muy aproximadamente)

$$\frac{\text{número de partículas detectadas}}{\Delta\Omega \rho} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\Omega} \approx \frac{d\sigma}{d\Omega} . \quad (4.7)$$

El miembro izquierdo de (4.7) es lo que se mide experimentalmente.

Terminemos esta sección dando una fórmula explícita para $d\sigma/d\Omega$ en el caso de que el campo es central. En ese caso, para una energía E dada, el ángulo de dispersión Θ queda unívocamente determinado por el parámetro de impacto b . Consideremos el área del plano transversal a la dirección de propagación del haz, correspondiente a las partículas con parámetro de impacto comprendido entre b y $b + \Delta b$; esta área será igual a

$$\Delta\sigma = 2\pi b \Delta b$$

Supongamos que a las partículas con parámetro de impacto entre b y $b + \Delta b$ les corresponde un ángulo de dispersión comprendido entre θ_0 y $\theta_0 + \Delta\theta$. El ángulo sólido correspondiente será

$$\Delta\Omega = 2\pi \text{sen}(\theta_0) \Delta\theta .$$

Así que tendremos $\Delta\sigma/\Delta\Omega = (b/\sin\theta_0)(\Delta b/\Delta\theta)$ y se concluye fácilmente que

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\theta=\theta_0} = \sum_{\{b|\theta(b)=\theta_0\}} b \csc\theta_0 \left(\frac{d\theta}{db} \right)^{-1} \quad (4.8)$$

en el caso en que la suma sea finita.

Apéndice A

Definición A.1 Un espacio métrico es un conjunto M y una función real $d(\cdot, \cdot)$ definida en $M \times M$ que satisfacc:

(i) $d(x, y) \geq 0$

(ii) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

A la función d se le conoce como la métrica en M .

Definición A.2 Una sucesión de elementos $\{x_n\}$ de un espacio métrico (M, d) es llamada sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $n, m \geq N$ implica $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Si toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico converge, entonces se dice que el espacio métrico es completo.

Definición A.3 Un espacio lineal con norma es un espacio vectorial, V , sobre \mathfrak{R} (ó \mathfrak{C}), y una función, $\|\cdot\|$ de V a \mathfrak{R} que satisfacc:

(i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \text{ en } V$

(ii) $\|v\| = 0$ si y solo si $v = 0$

(iii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ para todo v en V y α en \mathfrak{R} (ó \mathfrak{C})

(iv) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ para todo v y w en V

Definición A.4 Una transformación lineal acotada (u operador acotado) de un espacio lineal con norma, $(V_1, \|\cdot\|_1)$, a otro espacio lineal con norma, $(V_2, \|\cdot\|_2)$, es una función T , de V_1 a V_2 , que satisfacc:

(i) $T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w)$ para todo $v, w \in V$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ó \mathbb{C}).

(ii) Para algún $C \geq 0$, $\|Tv\|_2 \leq C\|v\|_1$.

La C más pequeña que satisfaga este último inciso es la norma de T . Así:

Definición A.5 Si T es una transformación lineal acotada de V_1 a V_2 , definimos la norma de T , denotada $\|T\|$ ó $\|T\|_{1,2}$, como

$$\|T\| = \sup_{\|v\|_1=1} \|Tv\|_2$$

Pasamos ahora a definir el concepto de *transformación canónica*, dentro del contexto de la mecánica clásica.

Supongamos que un sistema (mecánico) puede ser descrito por las coordenadas y momentos generalizados q_i y p_i . Decimos que los q_i y p_i son *coordenadas canónicas* (ó conjugadas) si satisfacen las relaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

donde H es una función $H(p, q, t)$. En lo que sigue, asumamos que las q_i, p_i son canónicas.

Supongamos que el sistema puede ser descrito mediante un 'nuevo' conjunto de coordenadas y momentos generalizados, Q_i y P_i . Tendremos que

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t) \\ P_i &= P_i(q, p, t). \end{aligned}$$

lo que podemos abreviar escribiendo

$$\langle Q_i, P_i \rangle = \langle T_i^{(1)}(q, p, t), T_i^{(2)}(q, p, t) \rangle.$$

Denotemos $\mathcal{T}(q, p, t) = \langle T^{(1)}(q, p, t), T^{(2)}(q, p, t) \rangle$. De acuerdo con esta notación tenemos la siguiente:

Definición A.6 Se dice que \mathcal{T} es una *transformación canónica* (en el contexto que acabamos de describir) si existe una función $K(Q, P, t)$ tal que

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}.$$

Así, T es canónica si las coordenadas Q_i, P_i son canónicas, i.e., si sus ecuaciones de movimiento en el nuevo sistema están en la forma de Hamilton. K es el hamiltoniano en el nuevo sistema.

Daremos a continuación algunos resultados importantes que se utilizan a lo largo de este trabajo.

Teorema A.1 (Principio del Mapeo Contractivo) *Sea X un espacio métrico completo y sea M un subconjunto cerrado de X . Sea \mathcal{F} una función de M en M y sea ρ un número real con $0 \leq \rho < 1$ tal que $\|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\| \leq \rho\|x - y\|$ para todo $x, y \in M$. Entonces existe un único punto $z \in M$ tal que $\mathcal{F}z = z$.*

Prueba Sea $x_0 \in M$ y $x_n = \mathcal{F}x_{n-1}$ para $n = 1, 2, \dots$. Vamos a demostrar que existe el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$, y que z es el punto fijo.

Si $n \geq 1$ entonces $|x_{n+1} - x_n| = |\mathcal{F}x_n - \mathcal{F}x_{n-1}| \leq \rho|x_n - x_{n-1}|$. Probamos por inducción que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \rho^n |x_1 - x_0|$$

pues si suponemos que la afirmación vale para n , entonces: $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \rho|x_{n+1} - x_n| \leq \rho^{n+1}|x_1 - x_0|$, i.e., vale para $n+1$; además, $|x_2 - x_1| \leq \rho|x_1 - x_0|$ trivialmente.

De esta manera, si $k, n \geq 1$ entonces:

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &= \left| \sum_{i=0}^{k-1} (x_{n+i+1} - x_{n+i}) \right| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |x_{n+i+1} - x_{n+i}| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \rho^{n+i} |x_1 - x_0| \\ &\leq \rho^n |x_1 - x_0| \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \rho^n |x_1 - x_0| (1 - \rho)^{-1} \end{aligned}$$

Es decir:

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \rho^n |x_1 - x_0| (1 - \rho)^{-1}$$

Pero la expresión $\rho^n |x_1 - x_0| (1 - \rho)^{-1} \rightarrow 0$ cuando n tiende a infinito. Por lo tanto, la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy y como M es cerrado entonces existe $z \in M$ con $z = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Podemos obtener, de paso, la siguiente estimación, haciendo $k \rightarrow \infty$ en la expresión de arriba:

$$|x_n - z| \leq \rho^n (1 - \rho)^{-1} |x_1 - x_0|$$

Por hipótesis \mathcal{F} es continua. Entonces

$$\mathcal{F}z = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = z .$$

z es entonces un punto fijo. Si $w \in M$ es también punto fijo, i.e. $\mathcal{F}w = w$, entonces

$$|z - w| = |\mathcal{F}z - \mathcal{F}w| \leq \rho|z - w|$$

Si $|z - w| \neq 0$ entonces $1 < 1$, contradicción. Por lo tanto el punto fijo es único. \square

Ahora enunciaremos algunos resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sea

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.1})$$

un sistema normal de ecuaciones diferenciales de primer orden con $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Denotemos por $\mathbf{x}(t, \mathbf{c})$ a la curva $\mathbf{x}(t)$ que es solución de (A.1) bajo la condición 'inicial' $\mathbf{x}(a) = \mathbf{c}$. En [6, p.163] se establece el siguiente teorema:

Teorema A.2 *Sea la función vectorial \mathbf{X} de clase C^1 y sea $\mathbf{x}(t, \mathbf{c})$ la solución al sistema normal (A.1) que toma el valor inicial \mathbf{c} en $t = a$. Entonces $\mathbf{x}(t, \mathbf{c})$ es una función continuamente diferenciable respecto a cada componente c_j de \mathbf{c} .*

Se omite la prueba.

Observación. Si definimos $\mathbf{c} = (x_0, p_0)$, $\mathbf{x}(t, \mathbf{c}) \equiv U_t(x_0, p_0)$ entonces $\mathbf{x}(t, \mathbf{c})$ es solución del sistema $d\mathbf{x}(t, \mathbf{c})/dt = \mathbf{X}(\mathbf{x}(t, \mathbf{c}), t)$ donde $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = (x_2, \mathbf{F}(x_1))$ y $\mathbf{x}(0, \mathbf{c}) = \mathbf{c}$. Si la fuerza \mathbf{F} es continuamente derivable entonces $\mathbf{X} \in C^1$. Entonces el teorema enunciado nos dice que $\mathbf{x}(t, \mathbf{c})$ es una función continuamente diferenciable de cada componente de \mathbf{c} , es decir, que $U_t(x_0, p_0)$ es una función continuamente diferenciable respecto a cada componente de x_0 y p_0 .

Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es lineal cuando en (A.1) se tiene $\mathbf{X} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)$, donde $\mathbf{A}(t)$ es una transformación lineal, i.e., $\mathbf{A}(t)$ es una matriz de componentes $a_{ij}(t)$. Establecemos el siguiente

Lema A.1 *Cualquier sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden lineal con coeficientes $a_{ij}(t)$ continuos en un intervalo cerrado I satisface la condición de Lipschitz*

$$|\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{X}(\mathbf{y}, t)| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (\text{A.2})$$

para una L finita.

Prueba. $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$ es la suma de n^2 vectores \mathbf{z}_{ij} con su i -ésima componente igual a $a_{ij}(x_j - y_j)$ y todas las demás iguales a cero. Entonces

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{X}(\mathbf{y}, t)| &\leq \sum_{i,j} |\mathbf{z}_{ij}| \leq \sum_{i,j} |a_{ij}(t)| |x_j - y_j| \\ &\leq \sum_{i,j} \sup_{t \in I} |a_{ij}(t)| |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \equiv L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \end{aligned}$$

Ya que las $a_{ij}(t)$ son continuas en I , L es finita. \square

Veamos ahora que bajo condiciones apropiadas la solución de (A.1) varía de manera continua cuando \mathbf{X} varía continuamente.

Teorema A.3 *Sean $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ soluciones de los sistemas normales de ecuaciones diferenciales de primer orden*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}, t)$$

respectivamente, en $a \leq t \leq b$. Sean además \mathbf{X} y \mathbf{Y} definidas y continuas en un dominio común D , y sea

$$|\mathbf{X}(\mathbf{z}, t) - \mathbf{Y}(\mathbf{z}, t)| \leq \varepsilon, \quad a \leq t \leq b, \quad \mathbf{z} \in D.$$

Finalmente, supongamos que $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ satisface la condición de Lipschitz (A.2). Entonces

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq |\mathbf{x}(a) - \mathbf{y}(a)| e^{L|t-a|} + \frac{\varepsilon}{L} [e^{L|t-a|} - 1].$$

(No se requiere que \mathbf{Y} satisfaga la condición de Lipschitz).

Se omite la prueba. El enunciado y la demostración aparecen en [6, p.145].

Notas

En lo que se refiere a la **Introducción** (Capítulo uno), apuntamos lo siguiente. La reducción del problema de dos cuerpos está tomada de [4], secc. 3-1. La presentación de los resultados básicos en el problema de dispersión con fuerzas de corto-rango está basada en [2] y en [3], secc. XI.2.

El **Capítulo dos** está basado esencialmente en la secc. II de [1]. Concretamente: el Lema 2.1.1 está basado en [1, lema II.1]; el Lema 2.1.2 está basado en [1, lema II.2]; el Teorema 2.1 está basado en [1, teorema II.1]. El Lema 2.2.1 está basado en una parte del teorema XI.3 de [3, secc. XI.2]. La demostración del Lema 2.2.2 es mía.

En lo que se refiere al **Capítulo tres**, la sección 3.1 está basada esencialmente en la secc. III de [1]. La sección 3.2 donde discutimos el concepto de completitud asintótica está tomado de la discusión correspondiente que se desarrolla en la secc. XI.2 de [3].

Concretamente, el Teorema 3.1 está basado en [1, teorema III.1]. Los Teoremas 3.2 y 3.3 están basados en [1, teorema III.2]. Pasando a la siguiente sección, el Teorema 3.4 está basado en [3, teorema XI.3]. El ejemplo que presentamos de 'captura' está basado en la discusión que se hace sobre el 'movimiento orbital' en [4], secc. 3-10, y en la discusión que aparece en [2], apéndice 2.

En lo que respecta a la última sección del tercer capítulo, las demostraciones de los Lemas 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3 son mías.

Las ideas centrales del **Capítulo cuatro** están tomadas de [3], secc. XI.2. Sin embargo, las demostraciones de las fórmulas (4.4) y (4.5) están tomadas de [4], secciones 3-2 y 3-10. La demostración de 4.8 está basada en [4], secc. 3-10.

En lo que se refiere al **Apéndice**, las definiciones A.1, A.2, A.3, A.4 y A.5 están tomadas de [7], capítulo I. La definición A.6 está tomada de [4], secc. 9-1. El Teorema A.1 está tomado de [5, cap. 4]. El Teorema A.2, el Lema A.1 y el Teorema A.3 están tomados de [6, cap. 6].

Bibliografía

- [1] Herbst, Ira W., *Classical Scattering with Long Range Forces*, Commun. math. Phys. 35, pp.193—214, 1974.
- [2] Simon, Barry, *Wave Operators for Classical Particle Scattering*, Commun. math. Phys. 23, pp.37—48, 1971.
- [3] Reed, Michael y Simon, Barry, *Scattering Theory*, Methods of Modern Mathematical Physics vol. III, Academic Press Inc., 1972.
- [4] Goldstein, Herbert, *Mecánica Clásica*, Editorial Reverté, 1990.
- [5] Martin, Robert H. Jr., *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*, John Wiley & Sons, 1976.
- [6] Birkhoff, Garrett y Rota, Gian-Carlo, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, 3a. Ed.—1978.
- [7] Reed, Michael y Simon, Barry, *Functional Analysis*, Methods of Modern Mathematical Physics vol. I, Academic Press Inc., 1972.
- [8] Reed, Michael y Simon, Barry, *Fourier Analysis and Self-Adjointness*, Methods of Modern Mathematical Physics vol. II, Academic Press Inc., 1975.
- [9] Royden, H.L., *Real Analysis*, Macmillan Publishing Company, 3a. ed—1988.
- [10] Coddington, Earl A. y Levinson, Norman, *Theory of Ordinary Differential Equations*, R.E. Krieger Publishing Co., 1984.