11
26 J.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMA DE FROBENIUS-CHEVALLEY

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
MATEMATICO
P R E S E N T A:

CARLOS HERNANDEZ RODRIGUEZ

MEXICO, D. F. 1994

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) HERNANDEZ RODRIGUEZ CARLOS

con número de cuenta 7731357-9 con el Título: "TEOREMA DE FROBENIUS-CHEVALLEY"

Otorgamos nuestro Voto Aprobatorio y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de MATEMATICO

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
DR.	FELIX	RECILLAS JUAREZ	
Director de Tesis DR.	ALBERTO LEON	KUSHNER SCHNUR	Alberto León Kushner
DRA.	ZENAIDA ELVIRA	RAMOS ZUÑIGA	
DR.	EUGENIO	GARNICA VIGIL	
Suplente M. EN C.	ROGELIO	JIMENEZ FRAGOSO	
Suplente			

CONTENIDO

INTRODUCCION

Este trabajo está basado principalmente en las notas concernientes al estudio de las variedades analíticas reales que durante dos semestres dió el Dr. Félix Recillas Juárez. El propósito del mismo es el de dar una demostración completa y detallada del teorema de Frobenius-Chevalley; de rehacer las demostraciones de algunos teoremas, proposiciones, lemas etc., de enunciar y demostrar en forma completa ciertos resultados; todo perteneciente al capítulo III del libro Theory of Lie Groups de Claude Chevalley. Para una clara y mejor comprensión de éstos. Al final del trabajo se encuentra un Apéndice A con definiciones, proposiciones etc. a los que se hacen referencia a lo largo del mismo. Por último este trabajo no hubiera sido posible sin el gran interés y apoyo del Dr. Félix Recillas Juárez a quién agradezco en lo que vale.

Capítulo 1

Subvariedades y Distribuciones

1.1 Subvariedades

Sea $\mathcal{V}$ una variedad, con el símbolo $|\mathcal{V}|$ se denotará el junto de puntos subyacente a la variedad $\mathcal{V}$.

Definición 1.1.1 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos variedades. Se dirá que $\mathcal{W}$ es una* **subvariedad** *de la variedad $\mathcal{V}$: $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ si se satisfacen las siguientes condiciones.*

i) *El conjunto de puntos subyacente a la variedad $\mathcal{W}$: $|\mathcal{W}|$ es un subconjunto del conjunto de puntos subyacente a la variedad $\mathcal{V}$: $|\mathcal{V}|$. Es decir,*

$$|\mathcal{W}| \subset |\mathcal{V}|.$$

ii) *El mapeo identidad ι de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{V}$:*

$$\iota : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \iota(q) = q$$

es un mapeo regular dondequiera (Defn A.1.4).

Un ejemplo de una subvariedad está dado por la siguiente.

Proposición 1.1.1 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos variedades. Si $\mathcal{W}$ es una subvariedad abierta de la variedad $\mathcal{V}$, entonces la variedad $\mathcal{W}$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{V}$.*

Prueba. Como por hipótesis $\mathcal{W}$ es una subvariedad abierta de la variedad $\mathcal{V}$ se satisface la condición **i)** de la Definición 1.1.1:

$$|\mathcal{W}| \subset |\mathcal{V}|.$$

Como el conjunto $W = |\mathcal{W}|$ es un conjunto abierto de la variedad $\mathcal{V}$, si q es un punto fijo pero arbitrario de $\mathcal{W}$: $q \in \mathcal{W}$ y si

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_n\}, V, a)$$

es un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{V}$ en el punto $q \in \mathcal{V}$ la Observación A.1.1 afirma que existe una vecindad cúbica V_0 del punto $q \in \mathcal{W}$ con respecto a este sistema de coordenadas contenida en la vecindad W del punto q:
$q \in V_0 \subset W$, lo cual implica que las restricciones $\iota_* x_1, ..., \iota_* x_n$ de las funciones $x_1, ..., x_n$ a la variedad $\mathcal{W}$ forman un sistema de coordenadas

$$\varphi_0 : (\{\iota_* x_1, ..., \iota_* x_n\}, V_0, a_0)$$

sobre $\mathcal{W}$ en el punto $q \in \mathcal{W}$, donde ι es el mapeo identidad de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{V}$:

$$\iota : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \iota(q) = q.$$

La misma hipótesis implica que este mapeo identidad ι es un mapeo analítico dondequiera. Por consiguiente el mapeo inducido ι_* mapea la clase $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\iota(q))$ en la clase $\mathcal{F}_{\mathcal{W}}(q)$:

$$\iota_* : \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\iota(q)) \to \mathcal{F}_{\mathcal{W}}(q)$$

para todo punto $q \in \mathcal{W}$. Consideremos ahora un punto q fijo pero arbitrario de la variedad $\mathcal{W}$: $q \in \mathcal{W}$ y supongamos que X_q es un vector tangente a la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $q \in \mathcal{W}$: $X_q \in T_q\mathcal{W}$ tal que

$$d\iota_q X_q = 0,$$

es decir,

$$d\iota_q X_q x_i = 0 \ (1 \le i \le n) \ \Rightarrow \ X_q \iota_* x_i = 0 \ (1 \le i \le n)$$

lo cual implica
$$X_q = 0.$$
En otras palabras la diferencial $d\iota_q$ del mapeo identidad ι es un mapeo lineal inyectivo en el punto $q \in \mathcal{W}$ y como este punto se eligió arbitrariamente en la variedad $\mathcal{W}$, la sucesión
$$0 \to T_q\mathcal{W} \xrightarrow{d\iota_q} T_{\iota(q)}\mathcal{V}$$
es una sucesión exacta para todo punto $q \in \mathcal{W}$. Por consiguiente la condición **ii)** de la Definición 1.1.1 se satisface:

ii) El mapeo identidad ι de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{V}$:
$$\iota : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$$
definido por la correspondencia
$$q \mapsto \iota(q) = q$$
es un mapeo regular dondequiera.

Y así la Proposición 1.1.1 está demostrada. ∎

Proposición 1.1.2 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades. Si $\mathcal{W}$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{V}$, entonces la aplicación*
$$\iota_* : \mathcal{F}_\mathcal{V}(\iota(q)) \to \mathcal{F}_\mathcal{W}(q)$$
definida por la correspondencia
$$f \mapsto \iota_* f = f \circ \iota$$
es una biyección y se tiene
$$\iota_*\mathcal{F}_\mathcal{V}(\iota(q)) = \mathcal{F}_\mathcal{W}(q)$$

Prueba. Como por hipótesis el mapeo identidad ι de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{V}$ es un mapeo regular en particular es un mapeo analítico dondequiera lo cual implica que el mapeo inducido ι_* mapea la clase de funciones analíticas $\mathcal{F}_\mathcal{V}(\iota(q))$ en el punto $\iota(q) \in \mathcal{V}$ en la clase de las funciones analíticas $\mathcal{F}_\mathcal{W}(q)$ en el punto $q \in \mathcal{W}$:
$$\iota_* : \mathcal{F}_\mathcal{V}(\iota(q)) \to \mathcal{F}_\mathcal{W}(q).$$

Por consiguiente

$$\iota_*\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\iota(q)) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{W}}(q) \tag{1.1}$$

para todo punto $q \in \mathcal{W}$. Se afirma que

$$\iota_*\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\iota(q)) \supset \mathcal{F}_{\mathcal{W}}(q)$$

para todo punto $q \in \mathcal{W}$. En efecto, consideremos un sistema de coordenadas $\{x_1, ..., x_n\}$ sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $\iota(q) \in \mathcal{V}$. Como $\mathcal{W}$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{V}$ el mapeo identidad ι de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{V}$ es un mapeo regular; lo que permite aplicar la Proposición A.1.4 y extraer de la familia de funciones $\{\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m\}$ un sistema de coordenadas

$$\{\iota_* x_{i_1}, ..., \iota_* x_{i_m}\}$$

sobre la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $q \in \mathcal{W}$. Si g es una función analítica en el punto $q \in \mathcal{W}$: $g \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}}(q)$, entonces g depende analíticamente de las funciones $\iota_* x_{i_1}, ..., \iota_* x_{i_m}$ en el entorno del punto $q \in \mathcal{W}$:

$$g \underset{q}{\sim} \iota_* x_{i_1}, ..., \iota_* x_{i_m}.$$

La Proposición A.1.5 implica la existencia de una función f definida en la vecindad del punto $\iota(q) \in \mathcal{V}$ y analítica en el entorno del mismo punto: $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\iota(q))$ tal que la función $\iota_* f$ depende analíticamente de las funciones $\iota_* x_{i_1}, ..., \iota_* x_{i_m}$ en el entorno del punto q:

$$\iota_* f \underset{q}{\sim} \iota_* x_{i_1}, ..., \iota_* x_{i_m}$$

Además la función $\iota_* f$ coincide con la función g en una vecindad del punto $q \in \mathcal{W}$:

$$g = \iota_* f.$$

Como g se eligió arbitrariamente en la clase $\mathcal{F}_{\mathcal{W}}(q)$ se obtiene que

$$\mathcal{F}_{\mathcal{W}}(q) \subset \iota_*\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\iota(q)). \tag{1.2}$$

Las dos inclusiones (1.1) y (1.2) implican

$$\iota_*\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\iota(q)) = \mathcal{F}_{\mathcal{W}}(q)$$

Y así la Proposición 1.1.2 está demostrada. ∎

En todo lo que sigue a cada función $\iota_* f = f \circ \iota$ de la imagen de la clase de las funciones sobre $\mathcal{V}$ analíticas en p, bajo la aplicación ι_*:

$$\iota_*\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\iota(p)) = \{\iota_* f = f \circ \iota | f \in \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\iota(p))\}$$

se llamará la **contracción** de la función f a $\mathcal{W}$.
Sean $\mathcal{W}$ una subvariedad de la variedad $\mathcal{V}$, ι el mapeo identidad de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{V}$. Si p es un punto de $\mathcal{W}$ y $\iota(p)$ su imagen en $\mathcal{V}$ bajo ι, la condición **ii)** de la Definición 1.1.1 implica que la diferencial $d\iota_p$ de ι en p mapea isomorficamente el espacio tangente $T_p\mathcal{W}$ a $\mathcal{W}$ en p sobre un subespacio vectorial $\mathcal{M}_p$ del espacio tangente $T_{\iota(p)}\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}$ en el punto $\iota(p) \in \mathcal{V}$:

$$T_p\mathcal{W} \cong d\iota_p T_p\mathcal{W} = Imd\iota_p = \mathcal{M}_p \subset T_{\iota(p)}\mathcal{V}.$$

Vía este isomorfismo se identificará el espacio $T_p\mathcal{W}$ con el subespacio $\mathcal{M}_p$:

$$\mathcal{M}_p = T_p\mathcal{W}$$

y se dirá aunque impropiamente que $\mathcal{M}_p$ es el espacio tangente a $\mathcal{W}$ en el punto $p \in \mathcal{W}$. Establecida esta convención se enuncia la siguiente.

Definición 1.1.2 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad y $\mathcal{W}$ una subvariedad de $\mathcal{V}$. Si X es un campo vectorial analítico sobre $\mathcal{V}$, se dirá que Y, un campo vectorial analítico sobre $\mathcal{W}$ es la* **contracción** *de X a $\mathcal{W}$, si para todo punto $p \in \mathcal{W}$ se tiene la relación*

$$d\iota_p(Y_p) = X_{\iota(p)},$$

es decir, Y y X están ι-relacionados.

Proposición 1.1.3 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad y sea $\mathcal{W}$ una subvariedad de $\mathcal{V}$. Si X es un campo vectorial analítico sobre $\mathcal{V}$ tal que para todo punto $p \in \mathcal{W}$ el vector tangente $X_{\iota(p)}$ a $\mathcal{V}$ en el punto $\iota(p) \in \mathcal{V}$ está contenido en el espacio tangente $\mathcal{M}_p$ a $\mathcal{W}$ en p:*

$$X_{\iota(p)} \in \mathcal{M}_p,$$

entonces existe una y sólo una contracción Y sobre $\mathcal{W}$ del campo vectorial X.

Prueba. Por hipótesis, para todo punto $p \in \mathcal{W}$ se tiene la relacion

$$X_{\iota(p)} \in Imd\iota_p = \mathcal{M}_p$$

y como el mapeo identidad ι es regular dondequiera la Proposición A.1.1 implica que existe uno y sólo un campo vectorial analítico Y sobre $\mathcal{W}$ ι-relacionado con X, es decir,

$$d\iota_p Y_p = X_{\iota(p)} \quad \text{para toda } p \in \mathcal{W}.$$

Por consiguiente Y es la contracción de X a $\mathcal{W}$, y así la Proposición 1.1.3 está demostrada. ∎

Proposición 1.1.4 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad y sea $\mathcal{W}$ una subvariedad de $\mathcal{V}$. Si X_1 y X_2 son campos vectoriales analíticos sobre $\mathcal{V}$, y si Y_1 y Y_2 son sus correspondientes contracciones a $\mathcal{W}$, entonces*

$$[Y_1, Y_2] \text{ es la contracción a } \mathcal{W} \text{ de } [X_1, X_2].$$

Prueba. Por hipótesis

$$d\iota_p((Y_i)_p) = (X_i)_{\iota(p)} \quad (i = 1, 2)$$

para todo punto $p \in \mathcal{W}$, es decir,

$$Y_i \text{ está } \iota - \text{relacionado con } X_i \quad (i = 1, 2)$$

y como el mapeo identidad ι es analítico, la Proposición A.1.2 implica que

$$[Y_1, Y_2] \text{ está } \iota - \text{relacionado con } [X_1, X_2]$$

o lo que es lo mismo

$$d\iota_p[Y_1, Y_2]_p = [X_1, X_2]_{\iota(p)}$$

para todo punto $p \in \mathcal{W}$. Por consiguiente $[Y_1, Y_2]$ es la contracción a $\mathcal{W}$ de $[X_1, X_2]$. Así la Proposición 1.1.4 está demostrada. ∎

1.2 Distribuciones

Definición 1.2.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad de dimensión n: $dim\mathcal{V} = n$. Por una* **distribución** *$\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{V}$ de dimensión m: $dim\mathcal{M} = m$, se entenderá una aplicación $\mathcal{M}$ de la variedad $\mathcal{V}$ en la unión ajena de los espacios tangentes a $\mathcal{V}$:*

$$\mathcal{M} : \mathcal{V} \to \coprod_{q \in \mathcal{V}} T_q\mathcal{V}$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \mathcal{M}(q) = \mathcal{M}_q,$$

donde $\mathcal{M}_q$ es un subespacio vectorial del espacio tangente $T_q\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}$ en el punto $q \in \mathcal{V}$ de dimensión m: $dim\mathcal{M}_q = m$ para todo punto $q \in \mathcal{V}$: $\mathcal{M}_q \subset T_q\mathcal{V}$ donde $dim\mathcal{M}_q \leq dim\mathcal{V}$.

Definición 1.2.2 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad, $\mathcal{M}$ una distribución sobre la variedad $\mathcal{V}$, p un punto de $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y X un campo vectorial definido y analítico en la vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$. Se dirá que el campo vectorial X* **pertenece** *a la distribución $\mathcal{M}$:*

$$X \text{ pertenece a } \mathcal{M}$$

si existe una vecindad V del punto p tal que para todo punto $q \in V$ el vector tangente $X(q)$ a $\mathcal{V}$ en el punto q:

$$X(q) = X_q \in T_q\mathcal{V}$$

pertenece al subespacio vectorial $\mathcal{M}_q$ del espacio $T_q\mathcal{V}$: $X(q) = X_q \in \mathcal{M}_q$.

Estas definiciones nos permiten enunciar la siguiente.

Proposición 1.2.1 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad de dimensión n, $\mathcal{M}$ una distribución sobre $\mathcal{V}$ de dimensión m tal que $dim\mathcal{M} = m \leq n = dim\mathcal{V}$, p un punto de $\mathcal{V}$, y sea $X_1, ..., X_m$ un sistema de m campos vectoriales definidos y analíticos en el entorno del punto $p \in \mathcal{V}$ de tal suerte que*

$$X_i \text{ pertenece a } \mathcal{M} \qquad (1 \leq i \leq m).$$

Si el conjunto de vectores

$$\{X_1(p), ..., X_m(p)\}$$

forma una base del espacio vectorial $\mathcal{M}_p$, entonces existe una vecindad V del punto $p \in \mathcal{V}$ tal que el sistema de m campos vectoriales

$$\{X_1, ..., X_m\}$$

están definidos y son analíticos sobre la vecindad V. Además para todo punto $q \in V$ el conjunto de m vectores

$$\{X_1(q), ..., X_m(q)\}$$

tangentes a $\mathcal{V}$ en el punto $q \in V$: $X_i(q) \in T_q\mathcal{V}$ $(1 \leq i \leq m)$ forma una base del subespacio $\mathcal{M}_q$ del espacio $T_q\mathcal{V} : \mathcal{M}_q \subset T_q\mathcal{V}$.

Prueba. Consideremos un sistema de coordenadas

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_n\}, W, a)$$

sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ con una vecindad cúbica W suficientemente pequeña como para que el sistema de m campos vectoriales

$$\{X_1, ..., X_m\}$$

estén definidos y sean analíticos sobre W y además que los m vectores

$$\{X_1(q), ..., X_m(q)\}$$

tangentes a la variedad $\mathcal{V}$ para todo punto $q \in W$ pertenezcan al espacio vectorial $\mathcal{M}_q$:

$$X_i(q) = (X_i)_q \in \mathcal{M}_q \quad \textit{para todo } q \in W \quad (1 \leq i \leq m).$$

La proposición es consecuencia del siguiente.

Lema 1.2.1 *La $m \times n$-matriz*

$$(X_i(q)x_j) \ (1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n)$$

es de rango m en todo punto $q \in W$: $rng(X_i(q)x_j) = m$ si y sólo si los m vectores

$$\{X_1(q), ..., X_m(q)\}$$

tangentes a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $q \in \mathcal{V}$: $X_i(q) \in T_q\mathcal{V}$ $(1 \leq i \leq m)$ son linealmente independientes.

Prueba del Lema 1.2.1 La condición es suficiente. En efecto, supongamos por un instante que existe la relación

$$\lambda_1 X_1(q)x_j + \cdots + \lambda_m X_m(q)x_j = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \ (1 \leq i \leq m)$$

o equivalentemente

$$(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i(q))x_j = 0 \qquad (1 \leq j \leq n)$$

lo cual implica

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i(q) = 0.$$

Como por hipótesis la familia finita de vectores

$$\{X_1(q), ..., X_m(q)\}$$

es linealmente independiente se obtiene

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

Es decir, las m hileras de la $m \times n$-matriz son linealmente independientes lo cual significa que el

$$rng(X_i(q)x_j) = m \qquad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

en el punto $q \in W$. Como el argumento es reversible se obtiene que la condición es necesaria. Y así el Lema 1.2.1 está demostrado. ∎

Para continuar con la demostración de la Proposición 1.2.1 observemos que la hipótesis nos permite aplicar el Lema 1.2.1 y obtener que la $m \times n$-matriz

$$(X_i(p)x_j) \qquad (1 \leq i \leq m\,,\ 1 \leq j \leq n)$$

es de rango m: $rng(X_i(p)x_j) = m$.

Como los coeficientes $X_i(p)x_j$ de esta matriz son funciones analíticas en el punto $p \in \mathcal{V}$, en particular son continuas en p; por consiguiente existe una vecindad V del punto $p \in \mathcal{V}$: $p \in V$ tal que para todo punto $q \in V$ el rango de la matriz $(X_i(q)x_j)$ es igual a m:

$$rng(X_i(q)x_j) = m \ \forall q \in V.$$

No se pierde ninguna generalidad si se supone que la vecindad V del punto $p \in \mathcal{V}$ es igual a la vecindad cúbica W del punto p: $V = W$. Esta convención nos permite afirmar, de acuerdo con el Lema 1.2.1 que la familia finita de vectores

$$\{X_1(q), ..., X_m(q)\}$$

tangentes a $\mathcal{V}$ en el punto $q \in W$ son linealmente independientes y pertenecen al subespacio $\mathcal{M}_q$: $X_i(q) \in \mathcal{M}_q$ $(1 \leq i \leq m)$. Como por hipótesis la distribución $\mathcal{M}$ es de dimensión m la $dim\mathcal{M}_q = m$ para toda $q \in \mathcal{V}$, el conjunto de vectores

$$\{X_1(q), ..., X_m(q)\}$$

constituye una base para el subespacio $\mathcal{M}_q \subset T_q\mathcal{V}$, en todo punto $q \in W$. Y así la Proposición 1.2.1 está demostrada. ∎

Esta proposición motiva la siguiente.

Definición 1.2.3 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad de dimensión n, $\mathcal{M}$ una distribución sobre $\mathcal{V}$ de dimensión m tal que $dim\mathcal{M} \leq dim\mathcal{V}$, p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Se dirá que la* **distribución** *$\mathcal{M}$ es* **analítica** *en el punto $p \in \mathcal{V}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:*

i) *Existe una vecindad V del punto $p \in \mathcal{V}$ y un sistema de m campos vectoriales*

$$\{X_1, ..., X_m\}$$

definidos y analíticos sobre V.

ii) *Para todo punto $q \in V$ el conjunto finito de vectores tangentes a $\mathcal{V}$ en el punto $q \in \mathcal{V}$:*

$$\{X_1(q), ..., X_m(q)\}$$

constituye una base del subespacio $\mathcal{M}_q \subset T_q\mathcal{V}$.

Al sistema de m campos vectoriales

$$\{X_1, ..., X_m\}$$

se le llama una **BASE LOCAL** *de la distribución $\mathcal{M}$ en la vecindad V del punto $p \in \mathcal{V}$.*

De acuerdo con esta definición a la Proposición 1.2.1 deviene la siguiente.

Proposición 1.2.2 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad de dimensión n, $\mathcal{M}$ una distribución de dimensión m sobre $\mathcal{V}$ tal que $dim\mathcal{M} \leq dim\mathcal{V}$, p un punto de $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y sea*

$$\{X_1, ..., X_m\}$$

un sistema de m campos vectoriales definidos y analíticos en el entorno del punto $p \in \mathcal{V}$ tal que

$$X_i \text{ pertenece a } \mathcal{M} \quad (1 \leq i \leq m).$$

Si el conjunto de vectores tangentes a $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$

$$\{X_1(p), ..., X_m(p)\}$$

constituye una base para el subespacio $\mathcal{M}_p \subset T_p\mathcal{V}$, entonces la distribución $\mathcal{M}$ es analítica en el punto $p \in \mathcal{V}$ y el sistema de m campos vectoriales

$$\{X_1, ..., X_m\}$$

es una base local de la distribución $\mathcal{M}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$.

Proposición 1.2.3 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad, p un punto de $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$, $\mathcal{M}$ una distribución analítica sobre $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, y sea*

$$\{X_1, ..., X_m\}$$

una base local de la distribución $\mathcal{M}$ en el entorno del punto $p \in \mathcal{V}$. Si X es un campo vectorial con la propiedad:

$$X \text{ pertenece a } \mathcal{M}$$

en el entorno del punto $p \in \mathcal{V}$ y tal que

$$X_q = \sum_{i=1}^{m} A_i(q) X_i(q)$$

donde

$$A_1(q), ..., A_m(q)$$

son funciones definidas el la vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$, entonces X es un campo vectorial definido y analítico el la vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$ si y sólo si las funciones

$$A_1(q), ..., A_m(q)$$

están definidas y son analíticas en la vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$.

Prueba. Consideremos un sistema de coordenadas

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_n\}, V, a)$$

sobre $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ con la vecindad cúbica V suficientemente pequeña como para que el sistema finito

$$\{X_1, ..., X_m\}$$

de campos vectoriales, que por hipótesis es una base local de la distribución $\mathcal{M}$ en la vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$, satisfaga las condiciones **i)** y **ii)** de la Definicion 1.2.3; como por hipótesis

$$X \text{ pertenece a } \mathcal{M}$$

en el entorno del punto $p \in \mathcal{V}$, supondremos sin perdida de generalidad que la vecindad cúbica V también satisface la condición de la Definición 1.2.3 de tal suerte que se tenga

$$X_q = \sum_{i=1}^{m} A_i(q) X_i(q) \quad \forall q \in V.$$

La condición **i)** de la Definición 1.2.3 implica que las funciones

$$X_i(q)x_j \qquad (1 \le i \le m\,,\, 1 \le j \le n)$$

están definidas y son analíticas sobre la vecindad cúbica V del punto $p \in \mathcal{V}$. Supongamos que la condición se satisface, es decir, las funciones

$$A_1(q), ..., A_m(q)$$

están definidas y son analíticas sobre V. Esta hipótesis implica que la función

$$X_q x_j = \sum_{i=1}^{m} A_i(q) X_i(q) x_j$$

está definida y es analítica sobre la vecindad cúbica V del punto $p \in \mathcal{V}$. Si ahora consideramos el símbolo del campo vectorial X en el sistema de coordenadas $\{x_1, ..., x_n\}$, a saber,

$$X = \sum_{j=1}^{n} X x_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

La Proposición 1.2.1 implica que el campo vectorial X está definido y es analítico sobre la vecindad cúbica V del punto $p \in \mathcal{V}$. De esta manera se tiene demostrada la suficiencia de la condición. Para demostrar que la condición es necesaria se procede como sigue: por hipótesis la vecindad cúbica V del punto $p \in \mathcal{V}$ satisface la condición **ii)** de la Definición 1.2.3, a saber, para todo punto $q \in V$ el conjunto de vectores

$$\{X_1(q), ..., X_m(q)\}$$

tangentes a $\mathcal{V}$ en el punto $q \in \mathcal{V}$: $X_i(q) \in T_q\mathcal{V}$ $(1 \le i \le m)$ constituye una base para el espacio vectorial $\mathcal{M}_q$ lo cual de acuerdo con el Lema 1.2.1 implica que la $m \times n$-matriz

$$(X_i(q)x_j) \qquad (1 \le i \le m\,,\, 1 \le j \le n)$$

es de rango m: $rng(X_i(q)x_j) = m$ en todo punto $q \in V$ lo cual implica que en cada punto $q \in V$ es posible determinar un sistema de índices

$$(j_1, ..., j_m)$$

del conjunto de índices $(1, 2, ..., n)$ tal que el determinante de la $m \times m$-matriz

$$(X_i(q)x_{j_k}) \qquad (1 \le i \le m\,,\, 1 \le k \le m)$$

es distinto de cero en la vecindad V del punto $q \in \mathcal{V}$:

$$det(X_i(q)x_{j_k}) \neq 0 \qquad (1 \leq i,k \leq m)$$

de tal suerte que los valores del las funciones

$$A_1(q), ..., A_m(q)$$

en la vecindad V del punto $q \in \mathcal{V}$ se pueden obtener resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum X_i(q)x_{j_k} \cdot A_i(q) = X_i(q)x_{j_k} \qquad (1 \leq k \leq m).$$

De esta manera la analiticidad de las funciones

$$A_1(q), ..., A_m(q)$$

en la vecindad V del punto $p \in \mathcal{V}$ está demostrada. Es decir, la condición es necesaria y la Proposición 1.2.3 está demostrada. ∎

Definición 1.2.4 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad, $\mathcal{M}$ una distribución anaítica sobre $\mathcal{V}$. Se dirá que $\mathcal{M}$ es una* **distribución involutiva** *si se satisface la condición siguiente: Si X_1 y X_2 son campos vectoriales definidos y analíticos sobre un conjunto abierto U de la variedad $\mathcal{V}$ tal que*

$$X_1, X_2 \ \textit{pertenecen a} \ \mathcal{M}$$

sobre el conjunto abierto U, entonces el campo vectorial

$$[X_1, X_2] \ \textit{pertenece a} \ \mathcal{M}$$

sobre el conjunto abierto U.

Proposición 1.2.4 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad, Σ una familia de campos vectoriales definidos y analíticos sobre $\mathcal{V}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

i) *El espacio vectorial $\mathcal{M}_q$ generado por el conjunto de vectores tangentes a $\mathcal{V}$ en el punto $q \in \mathcal{V}$:*

$$\mathcal{M}_q = \langle X(q) = X_q \in T_q\mathcal{V} | X \in \Sigma \rangle$$

es un subespacio vectorial del espacio tangente a $\mathcal{V}$ en el punto $q \in \mathcal{V}$: $\mathcal{M}_q \subset T_q\mathcal{V}$ de dimensión m: $dim\mathcal{M}_q = m \ \forall q \in \mathcal{V}$.

ii) *Para toda pareja de campos vectoriales X, Y de la familia Σ el campo vectorial $[X, Y]$ se puede expresar como una combinación lineal finita de campos vectoriales de la familia Σ:*

$$X,\, Y \in \Sigma \Longrightarrow [X, Y] = \sum_{i=1}^{l} A_i Z_i, \quad Z_1, ..., Z_l \in \Sigma$$

cuyos coeficientes

$$A_1, ..., A_l$$

son funciones definidas sobre la variedad $\mathcal{V}$. Entonces la aplicación

$$\mathcal{M} : \mathcal{V} \to \coprod_{q \in \mathcal{V}} T_q\mathcal{V}$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \mathcal{M}(q) = \mathcal{M}_q$$

donde $\mathcal{M}_q$ es un subespacio del espacio tangente a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $q \in \mathcal{V}$ de dimensión m: $dim\mathcal{M}_q = m \leq n = dim\mathcal{V}$ para todo punto $q \in \mathcal{V}$, es una distribución analítica e involutiva sobre la variedad $\mathcal{V}$.

Prueba. La condición **i)** de la hipótesis implica que la aplicación

$$\mathcal{M} : \mathcal{V} \to \coprod_{q \in \mathcal{V}} T_q\mathcal{V}$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \mathcal{M}(q) = \mathcal{M}_q$$

donde $\mathcal{M}_q = \langle X(q) = X_q \in T_q\mathcal{V} | X \in \Sigma \rangle$ es una distribución de dimensión m: $dim\mathcal{M} = m \leq n = dim\mathcal{V}$. Si ahora consideramos un punto p fijo pero arbitrario de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ la misma condición **i)** implica la existencia de m campos vectoriales de la familia Σ:

$$\{X_1, ..., X_m\}, \qquad X_1, ..., X_m \in \Sigma$$

definidos y analíticos en la vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$ con la propiedad

$$X_i \textit{ pertenece a } \mathcal{M}, \qquad (1 \leq i \leq m)$$

de tal suerte que el conjunto de vectores

$$\{X_1(p), ..., X_m(p)\}$$

tangentes a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ forma una base del espacio $\mathcal{M}_p$. Estas implicaciones nos permiten aplicar la Proposición 1.2.2 y obtener que la distribución $\mathcal{M}$ es una distribución analítica en el punto $p \in \mathcal{V}$. Como este punto $p \in \mathcal{V}$ se eligió arbitrariamente la distribución $\mathcal{M}$ es una distribución analítica sobre la variedad $\mathcal{V}$. Además el sistema de los m campos vectoriales

$$\{X_1, ..., X_m\}, \qquad X_1, ..., X_m \in \Sigma$$

es una base local de la distribución $\mathcal{M}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Se afirma que esta distribución analítica $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{V}$ es una distribución involutiva. En efecto, sean X y Y dos campos vectoriales definidos y analíticos en la vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$ tales que

$$X \text{ pertenece a } \mathcal{M}$$

y

$$Y \text{ pertenece a } \mathcal{M}$$

en el entorno del punto $p \in \mathcal{V}$. Como el sistema de los m campos vectoriales

$$\{X_1, ..., X_m\}$$

es una base local de la distribución analítica $\mathcal{M}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, podemos expresar el campo vectorial X como

$$X = \sum_{i=1}^{m} g_i X_i$$

y el campo vectorial Y como

$$Y = \sum_{j=1}^{m} h_j X_j$$

lo que nos permite escribir

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{m} [g_i X_i, h_j X_j]$$

donde g_i y h_j $(1 \leq i,j \leq m)$ son funciones definidas y analíticas en el entorno del punto $p \in \mathcal{V}$ (Proposición 1.2.3). Si ahora calculamos

$$\begin{aligned}[g_iX_i, h_jX_j] &= h_jX_jg_iX_i - g_iX_ih_jX_j \\ &= h_j(X_jg_i)X_i + g_ih_jX_jX_i - g_ih_jX_iX_j - g_i(X_ih_j)X_j \\ &= (h_j(X_jg_i))X_i - (g_i(X_ih_j))X_j + g_ih_j[X_i, X_j]\end{aligned}$$

obtenemos

$$[g_iX_i, h_jX_j] = (h_j(X_jg_i))X_i - (g_i(X_ih_j))X_j + g_ih_j[X_i, X_j].$$

Como por definición X_i, X_j están en Σ la condición **ii)** de la hipótesis afirma que el campo vectorial

$$[X_i, X_j] = \sum_{i=1}^{l} A_iZ_i, \qquad Z_1, ...Z_l \in \Sigma$$

cuyos coeficientes

$$A_1, ..., A_l$$

son funciones analíticas definidas en la vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$. Por consiguiente

$$X_i, X_j \text{ pertenecen a } \mathcal{M} \Longrightarrow [X_i, X_j] \text{ pertenece a } \mathcal{M}$$

lo cual implica

$$[X, Y] \text{ pertenece a } \mathcal{M}$$

Y así la Proposición 1.2.4 está demostrada. ∎

Definición 1.2.5 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad, $\mathcal{M}$ una distribución analítica sobre la variedad $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ una subvariedad de la variedad $\mathcal{V}$: $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Se dirá que $\mathcal{W}$ es una* **variedad integral** *de la distribución $\mathcal{M}$ si para todo punto q de la subvariedad $\mathcal{W}$: $q \in \mathcal{W}$ el espacio vectorial*

$$\mathcal{M}(q) = \mathcal{M}_q$$

coincide con el espacio tangente a $\mathcal{W}$ en el punto $q \in \mathcal{W}$:

$$\mathcal{M}_q = T_q\mathcal{W}.$$

Una consecuencia inmediata de esta definición es la siguiente.

Proposición 1.2.5 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad, $\mathcal{M}$ una distribución analítica sobre la variedad $\mathcal{V}$. Si todo punto q de $\mathcal{V}$: $q \in \mathcal{V}$ pertenece a una variedad integral $\mathcal{W}$ de la distribución $\mathcal{M}$, entonces la distribución $\mathcal{M}$ es una distribución involutiva.*

Prueba. Sean X_1 y X_2 dos campos vectoriales definidos y analíticos sobre un conjunto abierto U de la variedad $\mathcal{V}$ tal que

$$X_i \text{ pertenece a } \mathcal{M} \qquad (i = 1, 2)$$

sobre el abierto $U \subset \mathcal{V}$, y sea p un punto fijo pero arbitrario del abierto U: $p \in U$. Por definición existe una vecindad V_i del punto p tal que

$$X_i(q) \in \mathcal{M}_q \quad \forall q \in V \qquad (i = 1, 2)$$

y como por hipótesis existe una variedad integral $\mathcal{W}$ de la distribución $\mathcal{M}$ que contiene al punto $p \in U$ se tiene

$$X_i(p) \in Imd\iota_p = \mathcal{M}_p \qquad (i = 1, 2).$$

Como por hipótesis $\mathcal{M}$ es una distribución analítica existe una base local

$$\{X_1, ..., X_m\} \qquad (m = dim\mathcal{M})$$

en el entorno del punto $p \in U$. Supongamos sin perdida de generalidad que V_i es la vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$ asociada a esta base local de la distribución $\mathcal{M}$. En particular para el punto $\iota(p) = p \in \mathcal{V}$ el conjunto de vectores

$$\{X_1(p), ..., X_m(p)\}$$

tangentes a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ es una base del espacio $\mathcal{M}_p$:

$$\mathcal{M}_p = \mathbb{R}X_1(p) + \cdots + \mathbb{R}X_m(p),$$

lo cual implica que este conjunto de vectores también es una base del espacio tangente a la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $p \in \mathcal{W}$:

$$Imd\iota_p = \mathbb{R}X_1(p) + \cdots + \mathbb{R}X_m(p).$$

Por otro lado como el mapeo identidad ι de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{V}$ es un mapeo continuo podemos elegir a la vecindad V_i del punto $p \in U$ suficientemente pequeña como para que el conjunto de vectores

$$\{X_1(q), ..., X_m(q)\}$$

siga siendo una base del espacio tangente a $\mathcal{W}$ en el punto $q \in W = \iota^{-1}(V)$:

$$Imd\iota_q = I\!\!R X_1(q) + \cdots + I\!\!R X_m(q).$$

Como por definición para todo punto $q \in V_i$,

$$\mathcal{M}_q = I\!\!R X_1(q) + \cdots + I\!\!R X_m(q) \Longrightarrow Imd\iota_q = \mathcal{M}_q$$

se obtiene

$$X_i(q) \in Imd\iota_q \qquad (i = 1,2)$$

para todo punto $\iota(q) = q \in V$; por consiguiente de acuerdo con la Proposición 1.1.3 existe la contracción Y_i del campo vectorial X_i a $\mathcal{W}$ definido y analítico sobre la vecindad V_i:

$$d\iota_q(Y_i)_q = (X_i)_{\iota(q)} \qquad (i = 1,2)$$

y como la Proposición 1.1.4 afirma que el campo vectorial $[Y_1, Y_2]$ es la contracción del campo vectorial $[X_1, X_2]$ a $\mathcal{W}$:

$$d\iota_q[Y_1, Y_2]_q = [X_1, X_2]_{\iota(q)}$$

y como

$$[X_1, X_2]_{\iota(q)} = d\iota_q[Y_1, Y_2]_q \in Imd\iota_q = \mathcal{M}_q$$

se obtiene

$$[X_1, X_2]_{\iota(q)} \in \mathcal{M}_q \quad \forall\ \iota(q) = q \in V.$$

Es decir,

$$[X_1, X_2] \text{ pertenece a } \mathcal{M}$$

en el entorno del punto $p \in U$ y como el punto p se eligió arbitrariamente en el conjunto abierto U se tiene demostrada la Proposición 1.2.5 ∎

1.3 Variedades Integrales de Distribuciones Involutivas

Lema 1.3.1 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad de dimensión n: $dim\mathcal{V} = n$, p un punto de la variedad $\mathcal{V}$ y X un campo vectorial definido y analítico en el entorno de un punto $p \in \mathcal{V}$ tal que*

$$X_p \neq 0.$$

Entonces existe un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$

$$\psi : (\{y_1, ..., y_n\}, W, b)$$

con las propiedades:

1) $\psi(p) = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$.

2) i) *El campo vectorial X está definido y es analítico sobre la vecindad cúbica W del punto $p \in \mathcal{V}$.*

ii) *El campo vectorial X coincide sobre la vecindad cúbica W con el campo vectorial definido y analítico sobre la vecindad W cuyo símbolo en el sistema de coordenadas $\{y_1, ..., y_n\}$ es $\frac{\partial}{\partial y_1}$:*

$$X = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Prueba. Puesto que todo vector tangente a la variedad $\mathcal{V}$ en un punto $p \in \mathcal{V}$ está unívocamente determinado por los valores que asigna a las funciones de un sistema de coordenadas la hipótesis implica la existencia de un sistema de coordenadas

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_n\}, V, b)$$

sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ tal que

$$X_p x_1 \neq 0,$$

y cuya vecindad cúbica V es suficientemente pequeña como para que el campo vectorial X esté definido y sea analítico sobre la vecindad V. Por consiguiente las funciones Xx_i $(1 \leq i \leq n)$ están definidas y son analíticas sobre la vecindad cúbica V y cuyas expresiones en el sistema de coordenadas $\{x_1, ..., x_n\}$ están dadas por

$$Xx_i = F_i(x_1, ..., x_n) \qquad (1 \leq i \leq n),$$

donde $F_i(u_1, ..., u_n)$ es una función real en n variables reales definida y analítica sobre el cubo $I_b^n \subset \mathbb{R}^n$:

$$I_b^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i - x_i(p)| < b, \ (1 \leq i \leq n)\}.$$

Con ayuda de estas funciones se define el sistema

(A) $$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, ..., x_n) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

de ecuaciones diferenciales analíticas. Si aplicamos a este sistema el teorema de existencia para sistemas de ecuaciones diferenciales analíticas, obtenemos un número real positivo b_1 tal que $0 < b_1 < b$ y un sistema

$$\text{(B)} \qquad f_i(y_1, ..., y_n) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

de n funciones definidas y analíticas sobre el cubo $I^n_{b_1}$:

$$I^n_{b_1} = \{(y_1, ..., y_n) \in I\!R^n : |y_i| < b_1, (1 \leq i \leq n)\} \subset I\!R^n$$

de tal suerte que para todo punto:

1) $(y_1, ..., y_n) \in I^n_{b_1} \Longrightarrow (f_1(y_1, ..., y_n), ..., f_n(y_1, ..., y_n)) \in I^n_b$.

2) Las funciones
$$x_i = f_i(t, y_2, ..., y_n) \qquad (1 \leq i \leq n)$$
representan una solución del sistema (A) de ecuaciones diferenciales analíticas con las condiciones iniciales
$$f_i(0, y_2, ..., y_n) = (1 - \delta_{1i})y_i + x_i(p) \qquad (1 \leq i \leq n).$$

La propiedad **1)** nos permite definir la función
$$F : I^n_{b_1} \to I^n_b$$
por la correspondencia
$$(y_1, ..., y_n) \mapsto F(y_1, ..., y_n) = (f_1(y_1, ..., y_n), ..., f_n(y_1, ..., y_n)).$$

Las condiciones iniciales de la solución **2)** implican que el punto $(0, ..., 0) \in I^n_{b_1}$ tiene como imagen bajo la función F al punto $\varphi(p) \in I^n_b$:
$$(0, ..., 0) \mapsto F(0, ..., 0) = (x_1(p), ..., x_n(p)) = \varphi(p) \in I^n_b.$$

Se afirma que el determinante de la $n \times n$-matriz Jacobiana $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{(0,...,0)}$ es distinto de cero:
$$det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{(0,...,0)} \neq 0.$$

En efecto, si calculamos
$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right|_{(0,...,0)} &= \left.\frac{df_1}{dt}\right|_{(0,...,0)} = F_1\Big(f_1(y_1, ..., y_n), ..., f_n(y_1, ..., y_n)\Big)\Big|_{(0,...,0)} \\
&= F_1(f_1(0, ..., 0), ..., f_n(0, ..., 0)) \\
&= F_1(x_1(p), ..., x_n(p)) \\
&= X_p x_1 \neq 0
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right|_{(0,\dots,0)} \neq 0.$$

Si $j > 1$ y calculando

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right|_{(0,\dots,0)} &= \left.\frac{\partial f_i(0,y_2,\dots,y_n)}{\partial y_j}\right|_{(0,\dots,0)} \\
&= \left.\frac{\partial((1-\delta_{1i})y_i+x_i(p))}{\partial y_j}\right|_{(0,\dots,0)} \\
&= \left.\frac{\partial(y_i+x_i(p))}{\partial y_j}\right|_{(0,\dots,0)} = \delta_{ij},
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\left.\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right|_{(0,\dots,0)} = \delta_{ij}.$$

Por consiguiente

$$det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{(0,\dots,0)} = \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right|_{(0,\dots,0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right|_{(0,\dots,0)} \neq 0.$$

Es decir,

$$det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{(0,\dots,0)} \neq 0.$$

Y así la afirmación está demostrada. Esta afirmación nos permite aplicar el teorema de la función inversa al mapeo analítico F para obtener una vecindad abierta U del punto $(0,\dots,0) \in I^n_{b_1}$ que se mapea homeomorficamente bajo el mapeo F sobre una vecindad abierta U' del punto $\varphi(p) = (x_1(p),\dots,x_n(p)) \in I^n_b$, y una función únicamente determinada G de U' sobre U:

$$G : U' \to U$$

definida por la correspondencia

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto G(x_1,\dots,x_n) = (g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_n(x_1,\dots,x_n))$$

y analítica en el punto $\varphi(p) \in I^n_b$. Por consiguiente

$$G \circ F = id_U, \quad F \circ G = id_{U'},$$

obteniendose

$$det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{\varphi(p)} \neq 0 \qquad (1 \leq i,j \leq n).$$

Como las funciones

$$y_i = g_i(x_1, ..., x_n) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

dependen analíticamente en el entorno del punto $p \in \mathcal{V}$ de las funciones $x_1, ..., x_n \in \mathcal{F}(p)$ esto implica que las funciones

$$y_1, ..., y_n \in \mathcal{F}(p),$$

es decir, $y_1, ..., y_n$ son funciones analíticas en el punto p, luego podemos aplicar a estas funciones la Proposición A.1.3 para obtener el sistema de coordenadas

$$\psi : (\{y_1, ..., y_n\}, W, b)$$

sobre la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$. Si ahora calculamos para todo punto $q \in W$:

$$\begin{aligned} \psi(q) &= (y_1(q), ..., y_n(q)) \\ &= (g_1(x_1(q), ..., x_n(q)), ..., g_n(x_1(q), ..., x_n(q))) \\ &= G(x_1(q), ..., x_n(q)) \\ &= G(\varphi(q)) \end{aligned}$$

se obtiene

$$\psi(q) = G(\varphi(q)) \quad \forall q \in W.$$

En particular para $q = p$ si calculamos

$$\psi(p) = G \circ \varphi(p) = G \circ F(0, ..., 0) = (0, ..., 0)$$

obtenemos la propiedad 1) del Lema 1.3.1

$$\psi(p) = (0, ..., 0) \in I\!R^n.$$

Como evidentemente podemos escribir para todo punto $q \in W$

$$F \circ \psi(q) = F \circ G \circ \varphi(q) = \varphi(q)$$

se obtiene

$$F \circ \psi(q) = \varphi(q) \in I_b^n \Longrightarrow q \in V$$

lo cual implica que $W \subset V$. Esta inclusión implica la propiedad **2i)** del Lema 1.3.1.
En este sistema de coordenadas la solución (**B**) del sistema (**A**) de ecuaciones diferenciales analíticas devienen las expresiones de las funciones $x_1, ..., x_n \in \mathcal{F}(p)$

$$x_i = f_i(y_1, ..., y_n).$$

La correspondiente propiedad

$$x_i(q) = f_i(y_1(q), ..., y_n(q)) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

para todo punto $q \in W$ nos permite calcular

$$X(q)x_i = X_q x_i = F_i(x_1(q), ..., x_n(q)) = F_i(f_1(y_1(q), ..., y_n(q)), ..., f_n(y_1(q), ..., y_n(q)))$$
$$= \frac{df_i(y_1, ..., y_n)}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} = \frac{\partial x_i}{\partial y_1}(q)$$

y obtener

$$X(q)x_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_1}(q) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

para todo punto q de W: $q \in W$

$$Xx_i = \frac{\partial}{\partial y_1}x_i \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Lo cual significa que la propiedad **2ii)** se verifica. Y así el Lema 1.3.1 está demostrado. ∎

Lema 1.3.2 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad de dimensión n: $dim\mathcal{V} = n$, p un punto de $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$,*

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_n\}, V, a)$$

un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$, sea m un entero positivo: $m > 0$ tal que $0 < m < n$ y sean $n - m$ números reales

$$\xi_{m+1}, ..., \xi_n \in I\!R$$

satisfaciendo la siguiente condición

$$|x_{m+k}(p) - \xi_{m+k}| < a \qquad (1 \leq k \leq n - m).$$

Si denotamos con el símbolo $\mathcal{H}_\xi$ *al subconjunto*

$$\mathcal{H}_\xi = \{q \in V | x_{m+k}(q) = \xi_{m+k}, \ (1 \leq k \leq n-m)\}$$

de la variedad $\mathcal{V}$ *:* $\mathcal{H}_\xi \subset \mathcal{V}$ *, entonces existe una subvariedad de la variedad* $\mathcal{V}$ *cuyo subconjunto subyacente es el subconjunto* $\mathcal{H}_\xi$*, subvariedad que seguiremos denotando con el símbolo* $\mathcal{H}_\xi$*:* $\mathcal{H}_\xi \subset \mathcal{V}$ *.*

Prueba. En primer lugar observemos que la aplicación ι_n^m de $I\!R^m$ en $I\!R^n$:

$$\iota_n^m : I\!R^m \to I\!R^n$$

definida por la correspondencia

$$(x_1, ..., x_m) \mapsto \iota_n^m(x_1, ..., x_m) = (x_1, ..., x_m, \xi_{m+1}, ..., \xi_n)$$

es una inyección, observación que se verifica fácilmente. En seguida consideremos el mapeo identidad ι del conjunto $\mathcal{H}_\xi$ en la variedad $\mathcal{V}$:

$$\iota : \mathcal{H}_\xi \to \mathcal{V}$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \iota(q) = q,$$

y las contracciones

$$\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m$$

al conjunto $\mathcal{H}_\xi$ de las funciones $x_1, ..., x_n$ del sistema de coordenadas

$$\{x_1, ..., x_n\}.$$

Estas contracciones son funciones reales definidas sobre el conjunto $\mathcal{H}_\xi$:

$$\iota_* x_i : \mathcal{H}_\xi \to I\!R$$

por medio de la correspondencia

$$q \mapsto \iota_* x_i(q) = x_i(\iota(q))$$

para toda $1 \leq i \leq m$; funciones que nos permiten definir la aplicación

$$\Phi : \mathcal{H}_\xi \to I\!R^m$$

por medio de la correspondencia

$$q \mapsto \Phi(q) = (\iota_* x_1(q), ..., \iota_* x_m(q)).$$

Se afirma que esta aplicación Φ es una biyección del conjunto $\mathcal{H}_\xi$ sobre el conjunto abierto y conexo

$$I_a^n = \left\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \middle| |x_i(p) - x_i| < a, \ (1 \leq i \leq n)\right\}$$

del espacio $\mathbb{R}^n$: $I_a^n \subset \mathbb{R}^n$. En efecto, como por definición para todo punto $q \in \mathcal{H}_\xi$,

$$\Phi(q) = (\iota_* x_1(q), ..., \iota_* x_m(q)) = (x_1(\iota(q)), ..., x_m(\iota(q)))$$

y como en particular

$$|x_i(p) - x_i(q)| < a \qquad (1 \leq i \leq n)$$

se tiene

$$\Phi(q) \in I_a^m$$

es decir, Φ mapea al conjunto $\mathcal{H}_\xi$ en el cubo I_a^m:

$$\Phi : \mathcal{H}_\xi \to I_a^m.$$

Consideremos ahora un punto $q \in \mathcal{H}_\xi$ fijo pero arbitrario. Si calculamos

$$\begin{aligned}
\iota_n^m \circ \Phi(q) &= \iota_n^m(\iota_* x_1(q), ..., \iota_* x_m(q)) \\
&= \iota_n^m(x_1(\iota(q)), ..., x_m(\iota(q))) \\
&= (x_1(\iota(q)), ..., x_m(\iota(q)), \xi_{m+1}, ..., \xi_n) \\
&= (x_1(\iota(q)), ..., x_m(\iota(q)), x_{m+1}(\iota(q)), ..., x_n(\iota(q))) \\
&= \varphi(\iota(q)) = \varphi \circ \iota(q)
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\iota_n^m \circ \Phi(q) = \varphi \circ \iota(q).$$

Como q se eligió arbitrariamente en $\mathcal{H}_\xi$ se tiene la fórmula

$$\iota_n^m \circ \Phi = \varphi \circ \iota \tag{1.3}$$

sobre $\mathcal{H}_\xi$. Si q y q' son dos puntos del conjunto $\mathcal{H}_\xi$: $q, q' \in \mathcal{H}_\xi$ con la propiedad

$$\Phi(q) = \Phi(q')$$

entonces

$$\iota_n^m \circ \Phi(q) = \iota_n^m \circ \Phi(q').$$

Si ahora utilizamos la fórmula (1.1), obtenemos

$$\varphi \circ \iota(q) = \varphi \circ \iota(q')$$

y si tomamos en cuenta que φ es un homeomorfismo se obtiene

$$\iota(q) = \iota(q') \Longrightarrow q = q'.$$

En otras palabras Φ es una aplicación inyectiva.
Consideremos ahora un punto x fijo pero arbitrario del cubo I_a^m:
$x = (x_1, ..., x_m) \in I_a^m$ y la imagen de este punto bajo la aplicación ι_n^m:

$$\iota_n^m(x) = (x_1, ..., x_m, \xi_{m+1}, ..., \xi_n).$$

Las propiedades de los números reales $\xi_{m+1}, ..., \xi_n \in I\!R$ implican que el punto $\iota_n^m(x)$ está contenido en el cubo I_a^n: $\iota_n^m(x) \in I_a^n$. Si ahora tomamos en cuenta la definición del conjunto $\mathcal{H}_\xi$ podemos escribir

$$\varphi^{-1}(\iota_n^m(x)) = \iota(q) \quad con \quad q \in \mathcal{H}_\xi$$

y calcular

$$\iota_n^m(x) = \varphi(\iota(q)) = \iota_n^m(\Phi(q))$$

y obtener

$$\iota_n^m(x) = \iota_n^m(\Phi(q)).$$

Como ι_n^m es un mapeo inyectivo se obtiene

$$\Phi(q) = x$$

y como x se eligió arbitrariamente en el cubo I_a^m se tiene demostrado que la aplicación Φ es un mapeo suprayectivo. Y así la afirmación está demostrada. Esta afirmación nos permite utilizar A.II para obtener una variedad que tiene como conjunto subyacente al conjunto $\mathcal{H}_\xi$, variedad que seguiremos denotando con el símbolo $\mathcal{H}_\xi$, la cual está determinada por la propiedad de que las funciones $\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m$ forman un sistema de coordenadas:

$$\{\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m\}$$

sobre la variedad $\mathcal{H}_\xi$ en cada punto $q \in \mathcal{H}_\xi$. Se afirma que esta variedad $\mathcal{H}_\xi$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{V}$: $\mathcal{H}_\xi \subset \mathcal{V}$. En efecto, observemos en primer lugar que el conjunto subyacente a la variedad $\mathcal{H}_\xi$: $|\mathcal{H}_\xi|$ es un subconjunto del conjunto subyacente a la variedad $\mathcal{V}$: $|\mathcal{V}|$

$$|\mathcal{H}_\xi| \subset |\mathcal{V}|.$$

Si ahora tomamos en cuenta la definición de la variedad $\mathcal{H}_\xi$ podemos afirmar que

a) El mapeo identidad ι de $\mathcal{H}_\xi$ en $\mathcal{V}$ es un mapeo analítico dondequiera.

A continuación se afirma.

b) La diferencial $d\iota$ del mapeo identidad ι de $\mathcal{H}_\xi$ en $\mathcal{V}$ es un mapeo inyectivo dondequiera.

En efecto, sea q un punto de la variedad $\mathcal{H}_\xi$: $q \in \mathcal{H}_\xi$ fijo pero arbitrario y sea Y_q un vector tangente a la variedad $\mathcal{H}_\xi$ en el punto $q \in \mathcal{H}_\xi$: $Y_q \in T_q\mathcal{H}_\xi$. Supongamos que

$$d\iota_q Y_q = 0$$

o lo que es lo mismo

$$d\iota_q Y_q x_i = 0 \qquad (1 \le i \le n)$$

o también

$$Y_q \iota_* x_i = 0 \qquad (1 \le i \le n)$$

y como el sistema de funciones

$$\{\iota_* x_1, \ldots, \iota_* x_m\}$$

forma un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{H}_\xi$ se obtiene

$$Y_q = 0.$$

Es decir, la diferencial $d\iota_q$ del mapeo identidad ι de $\mathcal{H}_\xi$ en la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $q \in \mathcal{H}_\xi$ es un mapeo inyectivo y como el punto q se eligió arbitrariamente en la variedad $\mathcal{H}_\xi$ la afirmación **b)** está demostrada. Con esta afirmación se concluye la demostración de que la variedad $\mathcal{H}_\xi$ es una subvariedad de $\mathcal{V}$: $\mathcal{H}_\xi \subset \mathcal{V}$. Y así el Lema 1.3.2 está demostrado. ∎
Al referirnos a la subvariedad $\mathcal{H}_\xi$ diremos que se trata de la **hoja** $\mathcal{H}_\xi$ de la vecindad cúbica V definida por las ecuaciones

$$\mathcal{H}_\xi : x_{m+k} = \xi_{m+k} \qquad (1 \le k \le n-m).$$

Capítulo 2

Teorema Local y Global de Frobenius

2.1 Teorema Local

Teorema 2.1.1 (Frobenius) *Sean $\mathcal{V}$ una variedad de dimensión n, $\mathcal{M}$ una distribución analítica e involutiva definida sobre la variedad $\mathcal{V}$ de dimensión m. Si p es un punto arbitrario de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Entonces existe un sistema de coordenadas*

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_n\}, V, a)$$

sobre $\mathcal{V}$ en el punto p, con las siguientes propiedades:

1) $\varphi(p) = (0, ..., 0) \in I\!R^n$.

2) *Si consideramos $n - m$ números reales*

$$\xi_{m+1}, ..., \xi_n \in I\!R$$

tales que

$$|\xi_{m+k}| < a \qquad (1 \leq k \leq n - m),$$

entonces la hoja $\mathcal{H}_\xi$ de la vecindad cúbica V definida por las ecuaciones

$$\mathcal{H}_\xi : x_{m+k} = \xi_{m+k} \qquad (1 \leq k \leq n - m)$$

es una variedad integral de la distribución $\mathcal{M}$.

Prueba. Por hipótesis la distribución $\mathcal{M}$ es analítica, es decir, existe una base local de $\mathcal{M}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ constituida por un sistema de m campos vectoriales

$$\{X_1, ..., X_m\}$$

definidos y analíticos en el entorno del punto $p \in \mathcal{V}$; por consiguiente

$$X_1(p) = (X_1)_p \neq 0.$$

Esta propiedad nos permite utilizar el Lema 1.3.1 y obtener un sistema de coordenadas

$$\psi : (\{y_1, ..., y_n\}, W, b)$$

sobre $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ con las propiedades:

i) $\psi(p) = (0, ..., 0) \in I\!R^n$.

ii) $(X_1)_p = \frac{\partial}{\partial y_1}$ sobre la vecindad cúbica W.

Con W suficientemente pequeña como para que los m campos vectoriales

$$X_1, ..., X_m$$

estén definidos y sean analíticos sobre la vecindad cúbica W. Además que para todo punto $q \in W$ el sistema de vectores $\{X_1(q), ..., X_m(q)\}$ tangentes a $\mathcal{V}$ en el punto $q \in W$ sea una base del espacio vectorial $\mathcal{M}(q) = \mathcal{M}_q$. Establecidas estas consideraciones demostraremos el teorema para $m = 1$. Para este propósito consideremos $n - 1$ números reales

$$\xi_2, ..., \xi_n \in I\!R$$

con la propiedad $|\xi_{k+1}| < b$ $(1 \leq k \leq n-1)$, así como la hoja $\mathcal{H}_\xi$ de la vecindad cúbica W definida por las ecuaciones

$$\mathcal{H}_\xi : y_{k+1} = \xi_{k+1} \qquad (1 \leq k \leq n-1).$$

De acuerdo con la definición de la variedad $\mathcal{H}_\xi$ la función $\iota_* y_1$ es un sistema de coordenadas: $\{\iota_* y_1\}$ sobre la variedad $\mathcal{H}_\xi$. Si ahora consideramos el vector Y_q tangente a la variedad $\mathcal{H}_\xi$ en el punto $q \in \mathcal{H}_\xi$: $Y_q \in T_q\mathcal{H}_\xi$ determinado por la condición

$$Y_q \iota_* y_1 = 1.$$

La definición de la hoja $\mathcal{H}_\xi$ de la vecindad cúbica W permite escribir

$$Y_q \iota_* y_{k+1} = 0. \qquad (1 \leq k \leq n-1)$$

y como el símbolo del vector $d\iota_q Y_q$ en el sistema de coordenadas

$$\{y_1, ..., y_n\}$$

está dado por la expresión

$$d\iota_q Y_q = d\iota_q Y_q y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{k=1}^{n-1} d\iota_q Y_q y_{k+1} \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}$$

expresión que se reduce a la siguiente

$$d\iota_q Y_q = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Si ahora utilizamos la propiedad **ii)** del sistema de cooredenadas en cuestión podemos escribir

$$d\iota_q Y_q = (X_1)_q$$

lo cual significa

$$Imd\iota_q = \mathcal{M}_q$$

para todo punto $q \in \mathcal{H}_\xi$, donde $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}(q)$ es el espacio vectorial generado por el vector X_1 tangente a $\mathcal{V}$ en el punto q de W: $q \in W$. De esta manera el Teorema 2.1.1 está demostrado para distribuciones $\mathcal{M}$ de dimensión 1: $dim\mathcal{M} = 1$ analíticas e involutivas definidas sobre la variedad $\mathcal{V}$. Para demostrar el teorema en general se procede por inducción sobre la dimensión m de la distribución $\mathcal{M}$: $dim\mathcal{M} = m$; por tanto supongamos que $m > 1$ y que el Teorema 2.1.1 está demostrado para las distribuciones $\mathcal{M}$ analíticas e involutivas definidas sobre una cierta variedad y de dimensión $m - 1$: $dim\mathcal{M} = m - 1$.
Establecida esta hipótesis de inducción, observemos que la elección de la vecindad cúbica W del punto $p \in \mathcal{V}$ permite afirmar que las funciones

$$A_2 = X_2 y_1, ..., A_m = X_m y_1$$

están definidas y son analíticas sobre la vecindad W. Estas funciones nos permiten definir los campos vectoriales

$$X'_2 = X_2 - A_2 X_1, ..., X'_m = X_m - A_m X_1,$$

campos vectoriales que evidentemente satisfacen la siguiente condición

$$X'_2 y_1 = 0, ..., X'_m y_1 = 0.$$

Se afirma que el sistema de campos vectoriales

$$\{X_1, X_2', ..., X_m'\}$$

es una base local de la distribución $\mathcal{M}$ en cada punto $p \in W$. En efecto, ya se ha observado que los campos vectoriales de este sistema están definidos y son analíticos sobre la vecindad cúbica W del punto $p \in \mathcal{V}$; ahora consideremos un punto $q \in W$ fijo pero arbitrario y supongamos que existe una relación

$$\lambda_1 X_1(q) + \lambda_2 X_2'(q) + \cdots + \lambda_m X_m'(q) = 0 \tag{2.1}$$

con $\lambda_l \in I\!R$ $(1 \leq l \leq m)$. Evidentemente (2.1) se puede escribir como

$$\left(\lambda_1 - \sum_{i=2}^{m} \lambda_i A_i(q)\right) X_1(q) + \lambda_2 X_2(q) + \cdots + \lambda_m X_m(q) = 0$$

y como la familia de vectores

$$\{X_1(q), ..., X_m(q)\}$$

es una base del espacio $\mathcal{M}_q$, se obtiene

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

Por consiguiente el sistema de vectores

$$\{X_1(q), X_2'(q), ..., X_m'(q)\}$$

es una base del espacio $\mathcal{M}_q$. Como el punto q se eligió arbitrariamente en la vecindad W, esto último sucede para todo punto $q \in W$. Y así la afirmación está demostrada. Consideremos ahora la hoja $\mathcal{H}_0$ de la vecindad cúbica W del punto $p \in \mathcal{V}$ definida por la ecuación

$$\mathcal{H}_0 : y_1 = 0.$$

Se afirma que para todo punto $q \in \mathcal{H}_0$ los vectores

$$X_2'(\iota(q)), ..., X_m'(\iota(q))$$

son tangentes a la variedad $\mathcal{H}_0$ en el punto $q \in \mathcal{H}_0$.
En efecto, como

$$\{y_1, ..., y_n\}$$

es un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ el símbolo del vector tangente $(X_i')_{\iota(q)} \in T_{\iota(q)}\mathcal{V}$ $(2 \leq i \leq m)$ se expresa como sigue:

$$(X_i')_{\iota(q)} = (X_i')_{\iota(q)} y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\bigg|_{\iota(q)} + (X_i')_{\iota(q)} y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\bigg|_{\iota(q)} + \cdots + (X_i')_{\iota(q)} y_n \frac{\partial}{\partial y_n}\bigg|_{\iota(q)}$$

y que podemos escribir

$$(X_i')_{\iota(q)} = (X_i')_q \iota_* y_2 \frac{\partial}{\partial \iota_* y_2}\bigg|_q + \cdots + (X_i')_q \iota_* y_n \frac{\partial}{\partial \iota_* y_n}\bigg|_q .$$

Si ahora tomamos en cuenta que las contracciones

$$\{\iota_* y_2, ..., \iota_* y_n\}$$

forman un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{H}_0$ se obtiene que el vector $(X_i')_{\iota(q)}$ es tangente a la variedad $\mathcal{H}_0$ en el punto $q \in \mathcal{H}_0$, es decir,

$$(X_i')_{\iota(q)} \in Imd\iota_q = \mathcal{M}_q' \qquad (2 \leq i \leq m)$$

lo cual implica la existencia de $m-1$ campos vectoriales sobre $\mathcal{H}_0$:

$$\tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_m$$

contracciones de los $m-1$ campos vectoriales $X_2', ..., X_m'$ a la subvariedad $\mathcal{H}_0$:

$$d\iota_q(\tilde{X}_i)_q = (X_i')_{\iota(q)} \qquad (2 \leq i \leq m)$$

para todo punto $q \in \mathcal{H}_0$. Consideremos ahora para cada punto $q \in \mathcal{H}_0$ el espacio vectorial generado por los vectores $(\tilde{X}_2)_q, ..., (\tilde{X}_m)_q$ que denotaremos con el símbolo

$$\widetilde{\mathcal{M}}_q = \langle (\tilde{X}_2)_q, ..., (\tilde{X}_m)_q \rangle,$$

cuya dimensión es igual a $m-1$: $dim\widetilde{\mathcal{M}}_q = m-1$.
Este espacio vectorial así definido, está evidentemente contenido isomorficamente en el espacio vectorial $\mathcal{M}_q$. Por consiguiente podemos escribir

$$\widetilde{\mathcal{M}}_q = \mathcal{M}_q' \cap \mathcal{M}_q.$$

Consideremos ahora la aplicación

$$\widetilde{\mathcal{M}} : \mathcal{H}_0 \to \coprod_{q \in \mathcal{H}_0} T_q \mathcal{H}_0$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \widetilde{\mathcal{M}}(q) = \widetilde{\mathcal{M}}_q,$$

donde $\widetilde{\mathcal{M}}_q = \langle \tilde{X}_2(q), ..., \tilde{X}_m(q) \rangle$ es un subespacio vectorial del espacio $T_q\mathcal{H}_0$: $\widetilde{\mathcal{M}}_q \subset T_q\mathcal{H}_0$, y $dim\widetilde{\mathcal{M}}_q = m - 1$ en todo punto $q \in \mathcal{H}_0$. Esta aplicación así definida es una distribución. Se afirma que $\widetilde{\mathcal{M}}$ es una distribución analítica e involutiva definida sobre la variedad $\mathcal{H}_0$. En efecto, que $\widetilde{\mathcal{M}}$ sea una distribución analítica es consecuencia inmediata de la definición de los espacios $\widetilde{\mathcal{M}}_q$ para todo punto $q \in \mathcal{H}_0$. En cuanto a que $\widetilde{\mathcal{M}}$ sea una distribución involutiva se obtiene aplicando la Proposición 1.2.4 a la familia de campos vectoriales

$$\Sigma = \{\tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_m\}$$

definidos y analíticos sobre la variedad $\mathcal{H}_0$ como sigue, sean $\tilde{X}_i$ y $\tilde{X}_j$ dos elementos de la familia Σ; como los campos vectoriales

$$\tilde{X}_i, \;\; \tilde{X}_j \in \Sigma$$

son las contracciones a $\mathcal{H}_0$ de los campos vectoriales X_i' y X_j' la Proposición 1.1.4 afirma que el campo vectorial

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]$$

es la contracción a la variedad $\mathcal{H}_0$ del campo vectorial $[X_i', X_j']$:

$$d\iota_q[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]_q = [X_i', X_j']_{\iota(q)}$$

para toda $q \in \mathcal{H}_0$. Como por hipótesis $\mathcal{M}$ es una distribución analítica e involutiva y el sistema de m campos vectoriales

$$\{X_1, X_2', ..., X_m'\}$$

es una base local de la distribución $\mathcal{M}$ en cada punto $p \in W$ el vector $[X_i', X_j']_{\iota(q)}$ tangente a la variedad $\mathcal{V}$ en el punto $\iota(q) \in W$ se expresa como

$$[X_i', X_j']_{\iota(q)} = A_1(\iota(q))(X_1)_{\iota(q)} + \sum_{j=2}^{m} A_j(\iota(q))(X_j')_{\iota(q)}$$

para todo $q \in \mathcal{H}_0$. Por otro lado como $X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}$ sobre W y como $y_1 = 0$ sobre $\mathcal{H}_0$, esta fórmula se puede escribir como

$$d\iota_q[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]_q = \sum_{j=2}^{m} A_j(\iota(q))d\iota_q(\tilde{X}_j)_q = \sum_{j=2}^{m} d\iota_q(\iota_* A_j(q)(\tilde{X}_j)_q)$$

es decir,

$$d\iota_q[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]_q = d\iota_q\Big(\sum_{j=2}^{m} \iota_* A_j(q)(\tilde{X}_j)_q\Big)$$

y como la diferencial es un mapeo lineal inyectivo dondequiera, se obtiene

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]_q = \sum_{j=2}^{m} \iota_* A_i(q)(\tilde{X}_j)_q$$

para toda $q \in \mathcal{H}_0$ y cuyos coeficientes son funciones definidas sobre la variedad $\mathcal{H}_0$. Y así la condición ii) de la Proposición 1.2.4 está demostrada y con la misma la afirmacion.
Esta afirmación, a saber, la distribución $\widetilde{\mathcal{M}}$ de dimensión $m-1$ sobre la variedad $\mathcal{H}_0$ es analítica e involutiva, lo cual de acuerdo con la hipótesis de inducción implica que el Teorema 2.1.1 es válido para esta distribición $\widetilde{\mathcal{M}}$ definida sobre la variedad $\mathcal{H}_0$; por consiguiente existe un sistema de coordenadas en p

$$\tilde{\varphi} : (\{\tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n\}, \tilde{V}, a)$$

sobre la variedad $\mathcal{H}_0$ con las propiedades:

1) $\tilde{\varphi}(p) = (0, ..., 0) \in I\!R^{n-1}$.

2) Si se consideran $n-m$ números reales

$$\xi_{m+1}, ..., \xi_n \in I\!R$$

tales que $|\xi_{m+k}| < a$ $(1 \leq k \leq n-m)$, entonces la hoja $\tilde{\mathcal{H}}_\xi$ de la vencidad cúbica $\tilde{V}$ del punto $p \in \mathcal{H}_0$ definida por las ecuaciones

$$\tilde{\mathcal{H}}_\xi : \tilde{x}_{m+k} = \xi_{m+k} \qquad (1 \leq k \leq n-m)$$

es una variedad integral de la distribución $\widetilde{\mathcal{M}}$. Además se puede suponer que $0 < a \leq b$.

Observemos que de acuerdo con la definición de la variedad $\mathcal{H}_0$ las contracciones

$$\{\iota_* y_2, ..., \iota_* y_n\}$$

de las funciones $y_2, ..., y_n$ a la variedad $\mathcal{H}_0$ forman un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{H}_0$ en el punto $p \in \mathcal{H}_0$; y por consiguiente se tiene Proposición A.1.3

$$det\Big(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_j}\Big)_{(0,...,0)} \neq 0 \qquad (2 \leq i, j \leq n).$$

Consideremos ahora el cubo

$$I_a^1 = \{y_1 \in \mathbb{R} \mid |y_1| < a\}$$

y el cubo

$$I_a^{n-1} = \{(\tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |\tilde{x}_i| < a, \ (2 \leq i \leq n)\}$$

y su producto cartesiano

$$I_a^1 \times I_a^{n-1} = \{(y_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n \mid |y_1| < a, \ |\tilde{x}_i| < a, \ (2 \leq i \leq n)\}.$$

En seguida consideremos la aplicación

$$\iota_n^{n-1} : \tilde{\varphi}(\tilde{V}) = I_a^{n-1} \to I_b^n = \psi(W)$$

definida por la correspondencia

$$(\tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q')) \mapsto \iota_n^{n-1}(\tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q')) = (0, \tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q'))$$

aplicación que evidentemente es inyectiva. Consideremos también la aplicación

$$\iota_n^1 : I_a^1 \to I_b^n = \psi(W)$$

definida por la correspondencia

$$y_1 \mapsto \iota_n^1(y_1) = (y_1, 0, ..., 0)$$

aplicación inyectiva. Estas aplicaciones ι_n^1 y ι_n^{n-1} nos permiten definir la siguiente

$$\iota_n^1 \times \iota_n^{n-1} : I_a^1 \times I_a^{n-1} \to I_b^n = \psi(W)$$

por medio de la correspondencia

$$(y_1) \times (\tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q')) \mapsto (\iota_n^1 \times \iota_n^{n-1})((y_1) \times (\tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q')))$$

donde

$$\begin{aligned}(\iota_n^1 \times \iota_n^{n-1})((y_1) \times (\tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q'))) &= \iota_n^1(y_1) \times \iota_n^{n-1}(\tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q')) \\ &= (y_1, 0, ..., 0) \times (0, \tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q')) \\ &= (y_1, \tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q')) = \psi(q).\end{aligned}$$

Es decir,

$$(\iota_n^1 \times \iota_n^{n-1})((y_1) \times (\tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q'))) = (y_1, \tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q')).$$

Como

$$(y_1, \tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q')) = \psi(q)$$

para alguna $q \in W$ y como

$$\psi(q) = (y_1(q), y_2(q), ..., y_n(q))$$

se satisfacen las siguientes condiciones:

i) $y_1 = y_1(q) \Longrightarrow |y_1(q)| < a$.

ii) $(0, y_2(q), ..., y_n(q)) = (0, \tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q'))$.

Estas consideraciones nos permiten definir el siguiente conjunto

$$V = \psi^{-1}[(\iota_n^1 \times \iota_n^{n-1})(I_a^1 \times \tilde{\varphi}(\tilde{V}))].$$

Este conjunto así definido está evidentemente contenido en la vecindad cúbica W. Además las condiciones **i)** y **ii)** implican que el conjunto V está constituido por los puntos $q \in W$ con la siguiente propiedad, el punto q' cuyas cooredenadas están dadas por

$$(0, y_2(q), ..., y_n(q))$$

es un punto que pertenece a la vecindad cúbica $\tilde{V}$ y con $|y_1(q)| < a$. Si definimos sobre el conjunto V las funciones

$$x_1 : V \to I\!\!R$$

por medio de la correspondencia

$$q \mapsto x_1(q) = y_1(q),$$

y para $2 \leq j \leq n$

$$x_j : V \to I\!\!R$$

por medio de la correspondencia

$$q \mapsto x_j(q) = \tilde{x}_j(q').$$

Estas funciones nos permiten definir la aplicación

$$\varphi : V \to I\!\!R^n$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \varphi(q) = (x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q)) = (y_1(q), \tilde{x}_2(q'), ..., \tilde{x}_n(q')).$$

De acuerdo con la definición del conjunto V, la aplicación φ mapea homeomorficamente a este conjunto sobre el cubo I_a^n; puesto que φ no es más que la restricción del mapeo ψ al conjunto V: $\varphi = \psi|_V$

$$\varphi : V \to I_a^n$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \varphi(q) = (x_1(q), x_2(q), ..., x_n(q)).$$

Se afirma que el Jacobiano

$$det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{(0,...,0)} \neq 0 \qquad (i \leq i, j \leq n).$$

En efecto, como

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{\partial y_1}{\partial y_1} = 1$$

y como para toda $j > 1$

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_j} = \frac{\partial y_1}{\partial y_j} = 0$$

se obtiene

$$det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{(0,...,0)} = det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}_0 = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}_0$$

$$= det\left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_j}\right)_{(0,...,0)} \neq 0 \qquad (2 \leq i, j \leq n).$$

Es decir,

$$det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{(0,...,0)} \neq 0 \qquad (1 \leq i, j \leq n).$$

Y así la afirmación está demostrada. Por consiguiente de acuerdo con la Proposición A.1.3 la familia de funciones $\{x_1, ..., x_n\}$ es un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{V}$ en el punto $p \in \mathcal{V}$ cuya vecindad cúbica es el conjunto V:

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_n\}, V, a).$$

A continuación se afirma que en este sistema de coordenadas el símbolo del campo vectorial X_1 está dado por $\frac{\partial}{\partial x_1}$:

i) $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ sobre V.

y además

ii) $X_1 x_j = 0$ para $2 \leq j \leq n$.

En efecto, para todo punto $q \in V$ el símbolo del vector tangente $(X_1)_q \in T_q\mathcal{V}$ en el sistema de coordenadas $\{x_1, ..., x_n\}$ está dado por la expresión

$$(X_1)_{\iota(q)} = (X_1)_{\iota(q)} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{n} (X_1)_{\iota(q)} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{\iota(q)}.$$

Como se tiene $x_1 = y_1$ y $X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}$ sobre W se obtiene

$$(X_1)_{\iota(q)} x_1 = 1$$

y como

$$\{\iota_* y_2, ..., \iota_* y_n\}$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{H}_0$ las funciones $\widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n$ dependen analíticamente de las funciones $\iota_* y_2, ..., \iota_* y_n$ en el entorno del punto $q \in \mathcal{H}_0$, si

$$\widetilde{x}_i = F_i(\iota_* y_2, ..., \iota_* y_n) \qquad (2 \leq i \leq n)$$

es la expresión de $\widetilde{x}_i$ en las coordenadas $\{\iota_* y_2, ..., \iota_* y_n\}$. Si calculamos para $j \geq 2$

$$(X_1)_{\iota(q)} x_j = (X_1)_{\iota(q)} \widetilde{x}_j = \frac{\partial}{\partial \iota_* y_1} F_j(\iota_* y_2, ..., \iota_* y_n) = 0$$

obtenemos

$$(X_1)_{\iota(q)} x_j = 0 \qquad (2 \leq j \leq n).$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} X_1 &= \tfrac{\partial}{\partial x_1}, \\ X_1 x_j &= 0 \qquad (2 \leq j \leq n). \end{aligned}$$

Y así la afirmación está demostrada. Esta afirmación nos permite escribir

$$\frac{\partial}{\partial x_1} X_i' x_{m+k} = X_1 X_i' x_{m+k} - X_i' X_1 x_{m+k} = [X_i', X_1] x_{m+k}$$

y obtener

$$\frac{\partial}{\partial x_1} X_i' x_{m+k} = [X_i', X_1] x_{m+k}.$$

Como la distribución $\mathcal{M}$ es una distribución involutiva, tenemos

$$[X_i', X_1] = g_{i,1}X_1 + \sum_{j=2}^{m} g_{i,j}X_j'$$

donde $g_{i,1}, ..., g_{i,m}$ son funciones analíticas sobre V. Si calculamos

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(X_i' x_{m+k}) = g_{i,1}X_1 x_{m+k} + \sum_{j=2}^{m} g_{i,j}(X_j' x_{m+k})$$

obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(X_i' x_{m+k}) = \sum_{j=2}^{m} g_{i,j}(X_j' x_{m+k}) \qquad (2 \leq i \leq m).$$

Se afirma que

$$X_i' x_{m+k} = 0$$

sobre la variedad $\mathcal{H}_0$. En efecto, sea q un punto fijo pero arbitrario de la variedad $\mathcal{H}_0$: $q \in \mathcal{H}_0$ y sea $\widetilde{\mathcal{H}}_\xi$ la hoja de la vecindad cúbica $\widetilde{V}$ que contiene al punto q: $q \in \widetilde{\mathcal{H}}_\xi$. Como esta hoja por hipótesis de inducción es una variedad integral de la distribución $\widetilde{\mathcal{M}}$ se tiene

$$(X_i')_{\iota(q)} \in Im d\iota_q = \widetilde{\mathcal{M}}_q$$

tal que

$$d\iota_q(\widetilde{X}_i)_q = (X_i')_{\iota(q)}.$$

Por otro lado como

$$\{\iota_*\widetilde{x}_2, ..., \iota_*\widetilde{x}_m\}$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\widetilde{\mathcal{H}}_\xi$ el vector tangente $(\widetilde{X}_i)_q \in T_q\widetilde{\mathcal{H}}_\xi$ tiene como símbolo en este sistema de coordenadas la expresión

$$(\widetilde{X}_i)_q = (\widetilde{X}_i)_q \iota_*\widetilde{x}_2 \frac{\partial}{\partial \iota_*\widetilde{x}_2}\bigg|_q + \cdots + (\widetilde{X}_i)_q \iota_*\widetilde{x}_m \frac{\partial}{\partial \iota_*\widetilde{x}_m}\bigg|_q.$$

Si calculamos

$$(X_i')_{\iota(q)} x_{m+k} = d\iota_q(\widetilde{X}_i)_q \widetilde{x}_{m+k} = (\widetilde{X}_i)_q \iota_*\widetilde{x}_{m+k} = \sum_{j=2}^{m} (\widetilde{X}_i)_q \iota_*\widetilde{x}_j \frac{\partial \iota_*\widetilde{x}_{m+k}}{\partial \iota_*\widetilde{x}_j} = 0$$

se obtiene,

$$(X_i')_{\iota(q)}x_{m+k} = 0 \qquad \forall q \in \mathcal{H}_0.$$

Y así la afirmación está demostrada. Si ahora concebimos a las funciones $X_i'x_{m+k}$ como funciones en la variable x_1: $X_i'x_{m+k} = f_i(x_1)$, $(2 \leq i \leq m)$ y observamos que estas funciones son solución del sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas

$$\frac{\partial f_i(x_1)}{\partial x_1} = \sum_{j=2}^{m} g_{i,j} f_j(x_1) \qquad\qquad (2 \leq i \leq m).$$

De tal suerte que si aplicamos el teorema de unicidad para un sistema de ecuaciones diferenciales de esta naturaleza, obtenemos

$$X_i'x_{m+k} = 0 \qquad\qquad (2 \leq i \leq m)$$

para toda $|x_1| < a$, es decir,

$$X_i'x_{m+k} = 0 \qquad\qquad (2 \leq i \leq m)$$

sobre la vecindad cúbica V del punto $p \in \mathcal{V}$.
Se obtiene,

$$d\iota_q(\tilde{X}_1)_q = (X_1)_{\iota(q)}$$

lo cual significa que

$$(X_1)_{\iota(q)} \in Im d\iota_q = \mathcal{M}_q'.$$

Como en el sistema de coordenadas

$$\{x_1, ..., x_n\}$$

el símbolo del vector tangente $(X_i')_{\iota(q)} \in T_q\mathcal{V}$ está dado por la expresión

$$(X_i')_{\iota(q)} = (X_i')_{\iota(q)}x_1 \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{\iota(q)} + \cdots + (X_i')_{\iota(q)}x_n \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_{\iota(q)}$$

expresión que podemos escribir como

$$(X_i')_{\iota(q)} = (X_i')_{\iota(q)}x_1 \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{\iota(q)} + \cdots + (X_i')_{\iota(q)}x_m \left.\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_{\iota(q)} +$$

$$(X_i')_{\iota(q)}x_{m+1} \left.\frac{\partial}{\partial x_{m+1}}\right|_{\iota(q)} + \cdots + (X_i')_{\iota(q)}x_n \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_{\iota(q)}.$$

es decir,

$$(X_i')_{\iota(q)} = (X_i')_{\iota(q)} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\iota(q)} + \cdots + (X_i')_{\iota(q)} x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_{\iota(q)}.$$

Consideremos ahora los vectores tangentes $(\tilde{X}_i)_q$, $(2 \leq i \leq m)$ a la variedad $\mathcal{H}_\xi$ en el punto $q \in \mathcal{H}_\xi$: $(\tilde{X}_i)_q \in T_q\mathcal{H}_\xi$, variedad definida por las ecuaciones

$$\mathcal{H}_\xi : x_{m+k} = \xi_{m+k} \qquad (1 \leq k \leq n-m).$$

Como la familia de funciones $\{\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m\}$ constituye un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{H}_\xi$ en el punto $q \in \mathcal{H}_\xi$, podemos definir los vectores tangentes en cuestión.
Esta conclusión nos permite demostrar que toda hoja $\mathcal{H}_\xi$ de la vecindad cúbica V definida por las ecuaciones

$$\mathcal{H}_\xi : x_{m+k} = \xi_{m+k} \qquad (1 \leq k \leq n-m)$$

es una variedad integral de la distribución $\mathcal{M}$.
En efecto, como las contracciones

$$\{\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m\}$$

de las funciones $x_1, ..., x_m$ a la variedad $\mathcal{H}_\xi$ forman un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{H}_\xi$ en todo punto $q \in \mathcal{H}_\xi$, podemos definir el vector $\tilde{X}_1$ tangente a la variedad $\mathcal{H}_\xi$ en el punto $q \in \mathcal{H}_\xi$: $(\tilde{X}_1)_q \in T_q\mathcal{H}_\xi$ por medio de la relación

$$(\tilde{X}_1)_q \iota_* x_j = \delta_{1j} \qquad (1 \leq j \leq m)$$

relación que podemos escribir como

$$d\iota_q(\tilde{X}_1)_q x_j = \delta_{1j} \qquad (1 \leq j \leq m).$$

Por otro lado como

$$\begin{aligned}
(X_1)_{\iota(q)} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\iota(q)} = d\iota_q(\tilde{X}_1)_q x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\iota(q)} \\
&= d\iota_q(d\iota_q(\tilde{X}_1)_q x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\iota(q)}) \\
&= d\iota_q\Big((\tilde{X}_1)_q \iota_* x_1 \frac{\partial}{\partial \iota_* x_1} + (\tilde{X}_1)_q \iota_* x_2 \frac{\partial}{\partial \iota_* x_2} + \cdots + (\tilde{X}_1)_q \iota_* x_m \frac{\partial}{\partial \iota_* x_m}\Big)
\end{aligned}$$

y como el símbolo del vector tangente $(\tilde{X}_1)_q \in T_q\mathcal{H}_\xi$ está dado por la expresión

$$(\tilde{X}_1)_q = (\tilde{X}_1)_q \iota_* x_1 \frac{\partial}{\partial \iota_* x_1} + \cdots + (\tilde{X}_1)_q \iota_* x_m \frac{\partial}{\partial \iota_* x_m}$$

podemos escribir

$$(X_1)_{\iota(q)} = d\iota_q(\tilde{X}_1)_q$$

lo cual significa que

$$(X_1)_{\iota(q)} \in Im d\iota_q = \mathcal{M}'_q.$$

Definir los vectores tangentes en cuestión por medio de las relaciones

$$(\tilde{X}_1)_q \iota_* x_1 = 1,$$

$$(\tilde{X}_i)_q \iota_* x_j = X'_i x_j(\iota(q)) \quad (2 \leq i, j \leq m)$$

relaciones que podemos escribir como

$$d\iota_q(\tilde{X}_1)_q x_1 = 1,$$

$$d\iota_q(\tilde{X}_i)_q x_j = (X'_i)_{\iota(q)} x_j \quad (2 \leq i, j \leq m)$$

lo cual nos permite escribir

$$(X'_i)_{\iota(q)} = d\iota_q(\tilde{X}_i)_q x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_{\iota(q)} + \cdots + d\iota_q(\tilde{X}_i)_q x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\bigg|_{\iota(q)}$$

y como también se puede escribir

$$\begin{aligned} (X'_i)_{\iota(q)} &= d\iota_q\Big(\sum_{j=1}^{m} d\iota_q(\tilde{X}_i)_q x_j \tfrac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\iota(q)}\Big) \\ &= d\iota_q\Big(\sum_{j=1}^{m} (\tilde{X}_i)_q \iota_* x_j \tfrac{\partial}{\partial \iota_* x_j}\Big|_q\Big) \end{aligned}$$

se obtiene,

$$(X'_i)_{\iota(q)} = d\iota_q\Big(\sum_{j=1}^{m} (\tilde{X}_i)_q \iota_* x_j \frac{\partial}{\partial \iota_* x_j}\Big|_q\Big).$$

Si observamos que

$$(\tilde{X}_i)_q \iota_* x_1 \frac{\partial}{\partial \iota_* x_1}\bigg|_q + \cdots + (\tilde{X}_i)_q \iota_* x_m \frac{\partial}{\partial \iota_* x_m}\bigg|_q$$

es el símbolo del vector tangente $(\tilde{X}_i)_q \in T_q\mathcal{H}_\xi$ podemos escribir

$$d\iota_q(\tilde{X}_i)_q = (X_i')_{\iota(q)} \qquad (2 \leq i \leq m);$$

lo cual significa que

$$(X_i')_{\iota(q)} \in Imd\iota_q = \mathcal{M}_q'.$$

De esta manera se tiene demostrado que los vectores

$$(X_1)_{\iota(q)}, (X_2')_{\iota(q)}, ..., (X_m')_{\iota(q)} \in T_{\iota(q)}\mathcal{V}$$

pertenecen al espacio tangente a la variedad $\mathcal{H}_\xi$ en el punto $q \in \mathcal{H}_\xi$:

$$(X_1)_{\iota(q)}, (X_2')_{\iota(q)}, ..., (X_m')_{\iota(q)} \in Imd\iota_q = \mathcal{M}_q'$$

lo cual implica que el subespacio vectorial

$$\mathcal{M}_q = \langle (X_1)_{\iota(q)}, (X_2')_{\iota(q)}, ..., (X_m')_{\iota(q)} \rangle$$

generado por estos vectores tangentes está contenido en el espacio $\mathcal{M}_q'$: $\mathcal{M}_q \subset \mathcal{M}_q'$ y como $dim\mathcal{M}_q = m = dim\mathcal{M}_q'$, se obtiene

$$\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_q'.$$

Como el punto q se eligió arbitrariamente en la hoja $\mathcal{H}_\xi$ de la vecindad cúbica V, se tiene

$$\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_q' \qquad \forall q \in \mathcal{H}_\xi$$

lo cual significa que la hoja $\mathcal{H}_\xi$ de la vecindad cúbica V es una variedad integral de la distribución $\mathcal{M}$. Y así el Teorema de Frobenius está demostrado en su versión local. ∎

2.2 Teorema Global

Lema 2.2.1 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad, $\mathcal{M}$ una distribución involutiva, $\mathcal{W}$ una subvariedad integral de $\mathcal{M}$, y sea p un punto de $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Si U es un conjunto abierto de la variedad $\mathcal{V}$ que contiene al punto p: $p \in U$, entonces existe una variedad C que contiene al punto p y está contenida en la variedad $\mathcal{W}$ como una subvariedad abierta:*

$$p \in C \subset \mathcal{W}.$$

Además la variedad C es una variedad integral de la distribución $\mathcal{M}$.

Prueba. Se ha observado que la topología de la variedad $\mathcal{W}$ es al menos tan fina como la topología inducida sobre $\mathcal{W}$ por aquella de la variedad $\mathcal{V}$, por consiguiente $U \cap \mathcal{W}$ es un conjunto abierto en $\mathcal{W}$. Por otro lado como $\mathcal{W}$ es localmente conexa la componente conexa $C(p)$ del punto p en el abierto $U \cap \mathcal{W}$ (por supuesto en la topología de $\mathcal{W}$) es un conjunto abierto relativo de $\mathcal{W}$. Ahora A.I nos asegura la existencia de una subvariedad abierta C de $\mathcal{W}$: $C \subset \mathcal{W}$ cuyo conjunto subyacente $|C|$ es la componente conexa $C(p)$ del punto p: $| C | = C(p)$. Se afirma que C es una variedad integral de la distribución $\mathcal{M}$. En efecto, sea q un punto fijo pero arbitrario de la variedad C : $q \in C$ y sea

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_m\}, V, a)$$

un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{W}$ en el punto $q \in \mathcal{W}$. Como $C(p) = |C|$ es un conjunto abierto de la variedad $\mathcal{W}$ que contiene al punto q: $q \in C(p)$ la Observación A.1.1 afirma que existe una vecindad cúbica V_0 del punto q con respecto a este sistema de coordenadas contenida en el abierto $C(p)$: $q \in V_0 \subset C(p)$ lo cual implica que las contracciones $\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m$ de las funciones $x_1, ..., x_m$ a la variedad C forman un sistema de coordenadas

$$\varphi_0 : (\{\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m\}, V_0, a_0)$$

sobre la variedad C en el punto $q \in C$, donde ι es el mapeo identidad de C en $\mathcal{W}$:

$$\iota : C \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \iota(q) = q.$$

Como $\mathcal{C}$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{W}$: $\mathcal{C} \subset \mathcal{W}$ este mapeo identidad ι es un mapeo regular dondequiera. Si ahora consideramos una base

$$\{(Y_1)_q, ..., (Y_m)_q\}$$

del espacio tangente a la variedad $\mathcal{C}$ en el punto $q \in \mathcal{C}$:

$$(Y_i)_q \in T_q\mathcal{C} \qquad (1 \leq i \leq m)$$

donde cada vector tangente de la base está definido por la relación:

$$(Y_i)_q \iota_* x_j = \delta_{i,j} \qquad (1 \leq i \leq m)$$

y si definimos y calculamos

$$(X_i)_q x_j = d\iota_q (Y_i)_q x_j = (Y_i)_q \iota_* x_j = \delta_{i,j}$$

obtenemos que

$$(X_i)_q x_j = \delta_{i,j} \qquad (1 \leq i \leq m)$$

es decir, el conjunto

$$\{(X_1)_q, ..., X_m)_q\}$$

es una base del espacio tangente a la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $q \in \mathcal{W}$: $(X_i)_q \in T_q\mathcal{W}$ $(1 \leq i \leq m)$, lo que nos permite escribir

$$d\iota_q T_q\mathcal{C} = T_q\mathcal{W}$$

y como $\mathcal{W}$ es una variedad integral de la distribución $\mathcal{M}$ y como el punto q se eligió arbitrariamente en la variedad $\mathcal{C}$ se obtiene

$$d\iota_q T_q\mathcal{C} = \mathcal{M}_q$$

para todo punto $q \in \mathcal{C}$. En otras palabras la variedad $\mathcal{C}$ es una variedad integral de la distribución $\mathcal{M}$. Y así la afirmación está demostrada y con la misma el Lema 2.2.1. ∎

Proposición 2.2.1 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad, $\mathcal{M}$ una distribución analítica e involutiva sobre $\mathcal{V}$ tal que $dim\mathcal{M} = m \leq n = dim\mathcal{V}$, y p un punto de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Si $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son variedades integrales de la distribución $\mathcal{M}$ que contienen al punto $p \in \mathcal{V}$:*

$$p \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2,$$

entonces existe una variedad integral $\mathcal{W}$ de $\mathcal{M}$ que contiene al punto $p \in \mathcal{V}$ y está contenida en la variedad integral $\mathcal{W}_i$ $(1 \leq i \leq 2)$ como una subvariedad abierta:

$$p \in \mathcal{W} \subset \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2.$$

Prueba. De acuerdo con el Lema 2.1.1 como $p \in \mathcal{W}_i$ existe una variedad integral $\mathcal{C}_i$ de la distribución $\mathcal{M}$ que contiene al punto $p \in \mathcal{V}$ y está contenida en la variedad integral $\mathcal{W}_i$ como una subvariedad abierta:

$$p \in \mathcal{C}_i \subset \mathcal{W}_i \qquad (1 \leq i \leq 2).$$

Además está contenida como una subvariedad abierta en la hoja $\mathcal{H}_0$:

$$p \in \mathcal{C}_i \subset \mathcal{H}_0 \qquad (1 \leq i \leq 2).$$

Si denotamos con $C_i = |\mathcal{C}_i|$ al conjunto subyacente de la vartiedad $\mathcal{C}_i$, este conjunto es un conjunto abierto del espacio $\mathcal{H}_0$: $C_i \in \mho(\mathcal{H}_0)$ lo cual implica que el conjunto $C = C_1 \cap C_2$ es un conjunto abierto en el espacio $\mathcal{H}_0$: $C \in \mho(\mathcal{H}_0)$. Si escribimos

$$p \in C \cap \mathcal{H}_0 = C$$

podemos aplicar el Lema 2.2.1 y obtener una variedad integral $\mathcal{W}$ de la distribución $\mathcal{M}$ que contenga al punto $p \in \mathcal{V}$ y esté contenida en la variedad $\mathcal{H}_0$ como una subvariedad abierta: $p \in \mathcal{W} \subset \mathcal{H}_0$. Se afirma que la variedad $\mathcal{W}$ es una subvariedad abierta de la variedad $\mathcal{W}_i$ $(1 \leq i \leq 2)$. En efecto, como el conjunto subyacente $|\mathcal{W}|$ a la variedad $\mathcal{W}$ satisface la relación

$$|\mathcal{W}| \subset C \subset |\mathcal{C}_i| \qquad (1 \leq i \leq 2)$$

se obtiene la relación

i) $|\mathcal{W}| \subset |\mathcal{C}_i| \qquad (1 \leq i \leq 2).$

Recordemos ahora que la familia de funciones

$$\{\iota_* x_1, \ldots, \iota_* x_m\}$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{H}_0$ en todo punto $q \in \mathcal{H}_0$. Como la variedad $\mathcal{W}$ es una subvariedad abierta de la variedad $\mathcal{H}_0$ la Proposición 1.1.1 afirma que $\mathcal{W}$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{H}_0$; por consiguiente el mapeo identidad ι de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{H}_0$:

$$\iota : \mathcal{W} \to \mathcal{H}_0$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \iota(q) = q$$

es un mapeo regular, lo que permite aplicar la Proposición A.1.4 de tal suerte que para todo punto $q \in \mathcal{W}$ de la familia de funciones

$$\iota_*(\iota_* x_1), ..., \iota_*(\iota_* x_m) \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}}(q)$$

se puede extraer un sistema de coordenadas

$$\{\iota_*(\iota_* x_{i_1}), ..., \iota_*(\iota_* x_{i_m})\},$$

sistema de coordenadas que podemos escribir como

$$\{\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m\}$$

sobre la variedad $\mathcal{W}$ en todo punto $q \in \mathcal{W}$. Análogamente se obtiene que la familia de funciones

$$\{\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m\}$$

forma un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{C}_i$ $(1 \leq i \leq 2)$ en todo punto $q \in \mathcal{C}_i$, donde ι es el mapeo identidad de $\mathcal{C}_i$ en la variedad $\mathcal{H}_0$. Por otro lado como el mapeo identidad ι de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{C}_i$:

$$\iota : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{C}_i$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \iota(q) = q$$

es un mapeo continuo y como

$$\iota_*(\iota_* x_i) = \iota_* x_i \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}}(q) \qquad (1 \leq i \leq m)$$

la Proposición 1.1.2 afirma que el mapeo inducido ι_* por el mapeo identidad ι mapea la clase $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_i}(\iota(q))$ en la clase $\mathcal{F}_{\mathcal{W}}(q)$:

$$\iota_* : \mathcal{F}_{\mathcal{C}_i}(\iota(q)) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{W}}(q) \qquad (1 \leq i \leq 2)$$

para toda $q \in \mathcal{W}$. En otras palabras el mapeo identidad ι de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{C}_i$ es un mapeo analítico dondequiera. Además si X_q es un vector tangente a $\mathcal{W}$ en $q \in \mathcal{W}$: $X_q \in T_q\mathcal{W}$ tal que $d\iota_q X_q = 0$, es decir, $d\iota_q X_q \iota_* x_i = 0$ $(1 \leq i \leq m)$ lo cual implica

$$X_q \iota_*(\iota_* x_i) = 0 \;\Rightarrow\; X_q = 0 \qquad (1 \leq i \leq m).$$

Es decir, la diferencial $d\iota_q$ es un mapeo lineal inyectivo en el punto $q \in \mathcal{W}$ y como éste se eligió arbitrariamente en $\mathcal{W}$ se ha demostrado que se verifica la condición:

ii) El mapeo identidad ι de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{C}_i$ $(1 \leq i \leq 2)$

$$\iota : \mathcal{W} \to \mathcal{C}_i$$

es un mapeo regular dondequiera.

De esta manera se ha demostrado que la variedad $\mathcal{W}$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{C}_i$. Como la variedad $\mathcal{C}_i$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{W}_i$ se obtiene que la variedad $\mathcal{W}$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{W}_i$ $(1 \leq i \leq 2)$. Además como las restricciones

$$\{\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m\}$$

de las funciones $x_1, ..., x_m$ forman un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{W}$ en todo punto $q \in \mathcal{W}$ se obtiene que $\mathcal{W}$ es una subvariedad abierta de la variedad $\mathcal{W}_i$ $(1 \leq i \leq 2)$.
Y así la Proposición 2.2.1 está demostrada. ∎
Establecida esta proposición ya estamos en posibilidad de definir una nueva topología sobre el subconjunto subyacente $V = |\mathcal{V}|$ a la variedad $\mathcal{V}$. En efecto, consideremos la clase $\mho$ de los subconjuntos del conjunto V que se pueden expresar como unión arbitraria de variedades integrales de la distribución $\mathcal{M}$:

$$\mho = \{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{W}_\lambda | \mathcal{W}_\lambda \text{ es una variedad integral de } \mathcal{M} \; \forall \lambda \in \Lambda \}.$$

Se afirma que esta familia de conjuntos así definida satisface los siguientes axiomas:

$\mho_I$. La unión arbitraria de conjuntos de la familia $\mho$ es un conjunto de la familia $\mho$.

$\mho_{II}$. La intersección finita de conjuntos de la familia $\mho$ es un conjunto de la familia $\mho$.

La validez del primer axioma $\mho_I$, es evidente, en cuanto al segundo $\mho_{II}$ se verifica como sigue:
Sean $U_1, U_2 \in \mho$ y supongamos que

$$U_1 = \bigcup_{i \in I} \mathcal{W}_i, \; U_2 = \bigcup_{j \in J} \mathcal{W}_j.$$

Si escribimos

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{i \in I, j \in J} \mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_j$$

y si consideramos un punto p fijo pero arbitrario de la intersección: $p \in U_1 \cap U_2$ obtenemos

$$p \in \mathcal{W}_{i_0} \cap \mathcal{W}_{j_0}$$

para algún índice $i_0 \in I$ y algún índice $j_0 \in J$. Si ahora aplicamos la Proposición 2.2.1 obtenemos una variedad integral $\mathcal{W}$ de $\mathcal{M}$ que contiene al punto p y está contenida en la intersección $\mathcal{W}_{i_0} \cap \mathcal{W}_{j_0}$:

$$p \in \mathcal{W} \subset \mathcal{W}_{i_0} \cap \mathcal{W}_{j_0}$$

lo cual implica que

$$p \in \mathcal{W} \subset U_1 \cap U_2$$

y como p se eligió arbitrariamente en la intersección $U_1 \cap U_2$ se obtiene que

$$U_1 \cap U_2 \in \mho.$$

Y así el axioma $\mho_{II}$ está verificado. La topología que define la clase $\mho$ define un espacio topológico que denotaremos con el símbolo $\mathcal{B}^*$ y cuyo conjunto subyacente es el conjunto $V = |\mathcal{V}|$.

Proposición 2.2.2 *La topología del espacio $\mathcal{B}^*$ es Hausdorff y más fina que la topología del espacio $\mathcal{B}$ subyacente a la variedad $\mathcal{V}$.*

Prueba. Sea U un abierto de la topología del espacio $\mathcal{B}$: $U \in \mho(\mathcal{B})$, sea p un punto fijo pero arbitrario del abierto U: $p \in U$. El Teorema de Frobenius afirma que existe una vecindad cúbica V del punto p y una hoja de la vecindad V que es una variedad integral $\mathcal{W}$ de $\mathcal{M}$ que contiene al punto p: $p \in U \cap \mathcal{W}$ lo cual implica de acuerdo con el Lema 2.2.1 existe una variedad integral $\mathcal{W}_0$ que pasa por el punto p y está contenida en la intersección $U \cap \mathcal{W}$:

$$p \in \mathcal{W}_0 \subset U \cap \mathcal{W},$$

y como p se eligió arbitrariamente en U se obtiene que

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{W}_\lambda \in \mho$$

es decir, $U \in \mho(\mathcal{B}^*)$. Por consiguiente

$$\mho(\mathcal{B}) \subset \mho(\mathcal{B}^*).$$

Por último vemos que si $p_1 \neq p_2$ podemos hallar conjuntos U_1 y U_2 en $\mho$ tales que $p_1 \in U_1$ y $p_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Y así la Proposición 2.2.2 está demostrada. ∎

Proposición 2.2.3 *Si $\mathcal{W}$ es una variedad integral de la distribución $\mathcal{M}$, entonces $\mathcal{W}$ es un subespacio del espacio $\mathcal{B}^*$.*

Prueba. Sea p un punto fijo pero arbitrario del espacio $\mathcal{W}$: $p \in \mathcal{W}$ y sea V una vecindad fija pero arbitraria del punto $p \in \mathcal{W}$ con respecto al espacio $\mathcal{W}$: $V \in \mathcal{N}_p(\mathcal{W})$. Por definición existe un conjunto abierto U del espacio $\mathcal{W}$: $U \subset \mathcal{W}$ tal que $p \in U \subset V$. Por otro lado como $\mathcal{W}$ es una variedad integral de $\mathcal{M}$ y como se tiene:

$$p \in U \cap \mathcal{W}$$

podemos aplicar el Lema 2.2.1 para obtener una variedad integral $\mathcal{W}_0$ de la distribución $\mathcal{M}$ que contiene al punto p y está contenida en la intersección $U \cap \mathcal{W}$ lo cual implica

$$p \in \mathcal{W}_0 \subset V.$$

Por consiguiente V es una vecindad del punto $p \in \mathcal{W}$ con respecto al espacio $\mathcal{B}^*$: $V = V^* \in \mathcal{N}_p(\mathcal{B}^*)$ y como la vecindad se eligió arbitrariamente en la familia $\mathcal{N}_p(\mathcal{W})$ de las vecindades del punto $p \in \mathcal{W}$ con respecto al espacio $\mathcal{W}$ se obtiene que para toda

$$V \in \mathcal{N}_p(\mathcal{W}) \Rightarrow V \in \mathcal{N}_p(\mathcal{B}^*)$$

es decir,

$$\mathcal{N}_p(\mathcal{W}) \subset \mathcal{N}_p(\mathcal{B}^*). \tag{2.2}$$

Supongamos ahora que V^* es una vecindad fija pero arbitraria del punto $p \in \mathcal{W}$ con respecto al espacio $\mathcal{B}^*$: $V^* \in \mathcal{N}_p(\mathcal{B}^*)$. Por definición existe un conjunto abierto $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{W}_\lambda$ del espacio $\mathcal{B}^*$: $U \in \mathfrak{U}$ tal que

$$p \in U \subset V^* \Rightarrow p \in \mathcal{W}_{\lambda_0}$$

para algún índice $\lambda_0 \in \Lambda$ lo cual implica

$$p \in \mathcal{W}_{\lambda_0} \cap \mathcal{W}.$$

Esta última conclusión, de acuerdo con la Proposición 2.2.1 implica la existencia de una variedad integral $\mathcal{W}_0$ de la distribución $\mathcal{M}$ que contiene al punto $p \in \mathcal{W}$ y está contenida como una subvariedad abierta de la variedad $\mathcal{W}_{\lambda_0}$ y de la variedad $\mathcal{W}$: $p \in \mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}_{\lambda_0} \cap \mathcal{W}$ y como en particular $\mathcal{W}_{\lambda_0} \subset V^*$ podemos escribir

$$p \in \mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}_{\lambda_0} \cap \mathcal{W} \subset V^*$$

lo cual significa que V^* es una vecindad del punto p con rspecto al espacio $\mathcal{W}$:

$$V^* = V \in \mathcal{N}_p(\mathcal{W})$$

y como la vecindad V^* se eligió arbitrariamente en la familia $\mathcal{N}_p(\mathcal{B}^*)$ de las vecindades del punto $p \in \mathcal{W}$ con respecto al espacio $\mathcal{B}^*$ se obtiene

$$\forall V^* \in \mathcal{N}_p(\mathcal{B}^*) \Rightarrow V^* \in \mathcal{N}_p(\mathcal{W})$$

es decir,

$$\mathcal{N}_p(\mathcal{B}^*) \subset \mathcal{N}_p(\mathcal{W}). \tag{2.3}$$

Las contenciones (2.2) y (2.3) implican la igualdad

$$\mathcal{N}_p(\mathcal{B}^*) = \mathcal{N}_p(\mathcal{W}),$$

siguese inmediatamente que $\mathcal{W}$ es un subespacio abierto de $\mathcal{B}^*$. Así la Proposición 2.2.3 está demostrada. ∎

Sea $\mathfrak{B}$ una componente conexa del espacio $\mathcal{B}^*$: $\mathfrak{B} \subset \mathcal{B}^*$ considerada como un subespacio del espacio $\mathcal{B}^*$. Se afirma que este subespacio $\mathfrak{B}$ así definido es el espacio subyacente de una variedad integral de la distribución $\mathcal{M}$. Para demostrar esta afirmación se le asigna a todo punto p del conjunto subyacente a la variedad $\mathcal{V}$: $p \in |\mathcal{V}|$ alguna variedad integral $\mathcal{W}$ de la distribución $\mathcal{M}$ que lo contiene:

$$p \mapsto \mathcal{W} = \mathcal{W}(p)$$

tal que $p \in \mathcal{W}$. Si

$$p \in \mathfrak{B} \Rightarrow \mathcal{W} \subset \mathfrak{B}$$

y si con el símbolo

$$\mathcal{F}_{\mathcal{W}}(p)$$

denotamos la clase de funciones sobre la variedad $\mathcal{W}$ analíticas en el punto $p \in \mathcal{W}$ obtenemos para cada punto p del espacio $\mathfrak{B}$: $p \in \mathfrak{B}$ una clase de funciones $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}(p)$ definidas sobre $\mathfrak{B}$ y analíticas en el punto $p \in \mathfrak{B}$:

$$p \mapsto \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}(p)$$

para todo $p \in \mathfrak{B}$. Se afirma que esta correspondencia satisface los axiomas de la Definición A.1.2. En efecto, sea f una función fija pero arbitraria de la clase de funciones $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}(p)$: $f \in \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}(p)$, como en particular $p \in \mathcal{W}$ existe una vecindad V de punto p con respecto al espacio $\mathcal{W}$: $V \in \mathcal{N}_p(\mathcal{W})$ sobre la cual f está definida. Como $\mathcal{W}$ es un subespacio del espacio $\mathcal{B}^*$ se tiene que $\mathcal{N}_p(\mathcal{W}) = \mathcal{N}_p(\mathcal{B}^*)$ lo cual nos permite escribir

$$V = V^* \in \mathcal{N}_p(\mathcal{B}^*)$$

es decir, que V es una vecindad del punto p con respecto al espacio $\mathfrak{B}$ lo que demuestra que:

C$_I$ Para toda función $f \in \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}(p)$ existe una vecindad V del punto $p \in \mathfrak{B}$ con respecto al espacio $\mathfrak{B}$, vecindad que bien puede depender de la función f sobre la cual está definida la misma:

$$f : V \to I\!R$$

definida por la correspondencia

$$x \mapsto f(x).$$

El axioma

C$_{II}$ Toda función que depende analíticamente en el entorno del punto $p \in \mathfrak{B}$ de un número finito de funciones de la clase $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}(p)$, pertenece a la clase $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}(p)$:

$$\forall\, f \underset{p}{\sim} f_1, ..., f_m,\ f_1, ..., f_m \in \mathcal{F}(p)\ \Rightarrow\ f \in \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}(p)$$

es consecuencia inmediata de la definición de la correspondencia

$$p \mapsto \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}(p)$$

para todo punto p del espacio $\mathfrak{B}$: $p \in \mathfrak{B}$, y del hecho que $\mathfrak{B}$ es un subespacio del espacio $\mathcal{B}^*$.
Para verificar el axioma **C**$_{III}$ consideremos un sistema de coordenadas

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_m\}, V, a)$$

sobre la variedad $\mathcal{W}(p)$ que se eligió conteniendo al punto $p \in \mathfrak{B}$: $p \in \mathcal{W}(p)$. Como antes podemos suponer que la vecindad cúbica V del punto $p \in \mathcal{W}$ es una vecindad con respecto al espacio $\mathfrak{B}$ lo que implica que los incisos 1) y 2) se verifican automáticamente. En cuanto al inciso 3) se procede como sigue: sea $\mathcal{F}_{\text{ß}}(p)$ la clase de funciones reales asignada al punto $p \in$ ß:

$$p \mapsto \mathcal{F}_{\text{ß}}(p),$$

sea q un punto fijo pero arbitrario de la vecindad cúbica V del punto $p \in \mathcal{W} : q \in V$ y sea $\mathcal{W}(q)$ la variedad integral elegida para el punto $q \in$ ß que lo contiene: $q \in \mathcal{W}(q)$ y sea $\mathcal{F}_{\mathcal{W}(q)}(q)$ su correspondiente clase de funciones reales:

$$q \mapsto \mathcal{F}_{\mathcal{W}(q)}(q)$$

como $q \in \mathcal{W}(q) \cap \mathcal{W}(p)$ la Proposición 2.2.1 asegura la exitencia de una veriedad integral $\mathcal{W}_0$ que contiene al punto $q \in V$ y está contenida como una subvariedad abierta tanto en $\mathcal{W}(p)$ como en $\mathcal{W}(q)$:

$$q \in \mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}(q) \cap \mathcal{W}(q).$$

Si denotamos con el símbolo $\mathcal{F}_{\mathcal{W}_0}(q)$ la clase de funciones sobre la variedad $\mathcal{W}_0$ analíticas en el punto $q \in \mathcal{W}_0$ y si ι es el mapeo identidad de $\mathcal{W}_0$ en $\mathcal{W}(q)$ se tiene

$$\mathcal{F}_{\mathcal{W}_0}(q) = \iota_* \mathcal{F}_{\mathcal{W}(q)}(\iota(q)). \tag{2.4}$$

Análogamente si denotamos con el símbolo $\mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(q)$ la clase de funciones sobre la variedad $\mathcal{W}(p)$ analíticas en el punto $q \in \mathcal{W}(p)$ y si ι es el mapeo identidad de $\mathcal{W}_0$ en $\mathcal{W}(p)$ se tiene

$$\mathcal{F}_{\mathcal{W}_0}(q) = \iota_* \mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(\iota(q)). \tag{2.5}$$

Si $q \in V$, como $\mathcal{W}(p)$ es una variedad, entonces $x_1, ..., x_m \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(q) \Rightarrow \iota_* x_1, ..., \iota_* x_m \in \iota_* \mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(\iota(q))$ lo cual implica

$$\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}_0}(q) \;\Rightarrow\; \iota_* x_1, ..., \iota_* x_m \in \iota_* \mathcal{F}_{\mathcal{W}(q)}(\iota(q))$$

lo que a su vez implica

$$x_1, ..., x_m \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}(q)}(q).$$

Y así se tiene verificado que

a) $\forall q \in V \;\Rightarrow\; x_1, ..., x_m \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}(q)}(q)$.

Consideremos ahora una función f fija pero arbitraria de la clase $\mathcal{F}_{\mathcal{W}(q)}(q)$ de funciones reales sobre el espacio ß: $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}(q)}(q)$. De acuerdo con las igualdades (2.4) y (2.5) podemos escribir

$$\iota_* f \in \iota_* \mathcal{F}_{\mathcal{W}(q)}(\iota(q)) = \mathcal{F}_{\mathcal{W}_0}(q) = \iota_* \mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(\iota(q)),$$

es decir,

$$\iota_* f \in \iota_* \mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(\iota(q)) \Rightarrow \iota_* f = \iota_* g \text{ con } g \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(q).$$

Como $q \in V$ y $\mathcal{W}(p)$ es una variedad

$$x_1, ..., x_m \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(q) \Rightarrow g \underset{q}{\sim} x_1, ..., x_m$$

y como el mapeo identidad ι de $\mathcal{W}_0$ en $\mathcal{W}(p)$ es un mapeo analítico se tiene

$$g \underset{q}{\sim} x_1, ..., x_m \Rightarrow \iota_* g \underset{q}{\sim} \iota_* x_1, ..., \iota_* x_m.$$

Además por **a)** se tiene $x_1, ..., x_m \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}(q)}(q)$ lo que nos permite aplicar la Proposición A.1.5 y obtener una función $z \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}(q)}(q)$ tal que

$$z \underset{q}{\sim} x_1, ..., x_m \text{ con } \iota_* z = \iota_* g$$

Esto último implica que $\iota_* z = \iota_* f$ lo que a su vez implica

$$f \underset{q}{\sim} x_1, ..., x_m.$$

Y así se tiene verificado que

b) $\forall f \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}(q)}(q) \Rightarrow f \underset{q}{\sim} x_1, ..., x_m.$

Y el inciso 3) del axioma C_{III} de la Defn A.1.2 está verificado y con el mismo se completa la verificación de los axiomas C_I, C_{II}, C_{III} de la Definición A.1.2; lo cual demuestra que la asignación

$$q \mapsto \mathcal{F}(q),$$

para todo punto q en el espacio ß, define una variedad analítica real $\mathcal{W}$ cuyo espacio subyacente es el espacio topológico ß. La clase $\mathcal{F}(q)$ es la clase de funciones sobre $\mathcal{W}$ analíticas en el punto p. Si p es un punto de la variedad $\mathcal{W} : p \in \mathcal{W}$, se ha observado que la variedad integral que se le ha asignado y que lo contiene está contenida en $\mathcal{W} : p \in \mathcal{W}(p) \subset \mathcal{W}$ .Por definición de la topología del espacio $\mathcal{B}^*$ el conjunto $\mathcal{W}(p)$ es un conjunto abierto del espacio $\mathcal{B}^*$ y como ß es un subespacio del espacio $\mathcal{B}^*$ el conjunto $\mathcal{W}(p) \cap ß = \mathcal{W}(p)$ es un conjunto abierto del espacio ß, en otras palabras $\mathcal{W}(p)$ es un abierto en la variedad $\mathcal{W}$. Se afirma que $\mathcal{W}(p)$ es una subvariedad abierta de la variedad $\mathcal{W}$. En efecto, en primer lugar por definición se satisface la condición

i) $|\mathcal{W}(p)| \subset |\mathcal{W}|$.

En seguida consideremos un punto q fijo pero arbitrario de la variedad $\mathcal{W}(p)$: $q \in \mathcal{W}(p)$ y sea

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_m\}, V, a)$$

un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{W}$ en el punto $q \in \mathcal{W}$. Como $\mathcal{W}(p)$ es una vecindad del punto q la Observación A.1.1 afirma que existe una vecindad cúbica V_0 del punto q con respecto a este sistema de coordenadas contenida en el abierto $\mathcal{W}(p)$: $q \in V_0 \subset \mathcal{W}(p)$ lo cual implica que las restricciones $\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m$ de las funciones $x_1, ..., x_m$ a la variedad $\mathcal{W}(p)$ forman un sistema de coordenadas

$$\varphi_0 : (\{\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m\}, V_0, a_0)$$

sobre la variedad $\mathcal{W}(p)$ en el punto $q \in \mathcal{W}(p)$, donde ι es el mapeo identidad de $\mathcal{W}(p)$ en $\mathcal{W}$:

$$\iota : \mathcal{W}(p) \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \iota(q) = q$$

éste es un mapeo continuo. Como se tiene

$$\iota_* x_i \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(q) \quad (1 \leq i \leq m),$$

la Proposición 1.1.2 afirma que el mapeo inducido ι_* del mapeo identidad ι mapea la clase $\mathcal{F}_{\mathcal{W}}(\iota(q))$ en la clase $\mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(q)$:

$$\iota_* : \mathcal{F}_{\mathcal{W}}(\iota(q)) \to \mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(q).$$

Como el punto q se eligió arbitrariamente en $\mathcal{W}(p)$ se tiene demostrado que ι es un mapeo analítico dondequiera. Además si X_q es un vector tangente a la variedad $\mathcal{W}(p)$ en el punto $q \in \mathcal{W}(p)$: $X_q \in T_q\mathcal{W}(p)$ tal que $d\iota_q X_q = 0$, es decir, $d\iota_q X_q x_i = 0 \; (1 \leq i \leq m) \Rightarrow X_q \iota_* x_i = 0 \; (1 \leq i \leq m)$ lo cual implica que $X_q = 0$. Es decir, la diferencial $d\iota_q$ es un mapeo lineal inyectivo en el punto $q \in \mathcal{W}(p)$ y como éste se eligió arbitrariamente en $\mathcal{W}(p)$ se tiene demostrado que se satisface la condición:

ii) El mapeo identidad ι de $\mathcal{W}(p)$ en $\mathcal{W}$

$$\iota : \mathcal{W}(p) \to \mathcal{W}$$

es un mapeo regular.

De esta manera se tiene demostrado que la variedad $\mathcal{W}(p)$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{W}$ y como $\mathcal{W}(p)$ es un conjunto abierto en la variedad $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}(p)$ es una subvariedad abierta de $\mathcal{W}$. Y así la afirmación está demostrada. Esta afirmación implica la siguiente: *$\mathcal{W}$ es una variedad integral de la distribución $\mathcal{M}$* . En efecto, sea p un punto fijo pero arbitrario de la variedad $\mathcal{W}$: $p \in \mathcal{W}$ y sea $\mathcal{W}(p)$ la variedad intergral que se le ha asignado

$$p \mapsto \mathcal{W}(p)$$

tal que $p \in \mathcal{W}(p)$. Como $\mathcal{W}(p)$ es un conjunto abierto en la topología del espacio $\mathfrak{B}$, si

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_m\}, V, a)$$

es un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{W}$ en el punto $p \in \mathcal{W}$, la Observación A.1.1 afirma que existe una vecindad cúbica V_0 del punto p con respecto a este sistema de coordenadas contenida en la vecindad $\mathcal{W}(p)$ del punto $p \in \mathcal{W}$: $p \in V_0 \subset \mathcal{W}(p)$ lo cual implica que las restricciones $\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m$ de las funciones $x_1, ..., x_m$ a la variedad $\mathcal{W}(p)$ forman un sistema de coordenadas

$$\varphi_0 : (\{\iota_* x_1, ..., \iota_* x_m\}, V_0, a_0)$$

sobre $\mathcal{W}(p)$ en el punto $p \in \mathcal{W}(p)$, donde ι es el mapeo identidad de $\mathcal{W}(p)$ en $\mathcal{W}$:

$$\iota : \mathcal{W}(p) \to \mathcal{W}$$

definido por la corespondencia

$$q \mapsto \iota(q) = q.$$

Como $\mathcal{W}(p)$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{W}$: $\mathcal{W}(p) \subset \mathcal{W}$ este mapeo ι es un mapeo regular en todo punto $q \in \mathcal{W}(p)$. Si en seguida se considera una base

$$\{(Y_1)_p, ..., (Y_m)_p\}$$

del espacio tangente a la variedad $\mathcal{W}(p)$ en el punto $p \in \mathcal{W}(p)$: $(Y_i)_p \in T_p\mathcal{W}(p)$ $(1 \leq i \leq m)$ de vectores definidos por las relaciones

$$(Y_i)_p \iota_* x_j = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq m)$$

y si se define y calcula

$$(X_i)_{\iota(p)}x_j = d\iota_p(Y_i)_p x_j = (Y_i)_p \iota_* x_j = \delta_{ij} \quad (1 \leq i,j \leq m)$$

se obtiene

$$(X_i)_{\iota(p)}x_j = \delta_{ij} \quad (1 \leq i,j \leq m)$$

es decir, una base

$$\{(X_1)_{\iota(p)}, ..., (X_m)_{\iota(p)}\}$$

del espacio tangente a la variedad $\mathcal{W}$ en el punto $\iota(p) \in \mathcal{W}$: $(X_i)_{\iota(p)} \in T_{\iota(p)}\mathcal{W}$ $(1 \leq i \leq m)$ lo que permite escribir

$$d\iota_p T_p \mathcal{W}(p) = T_{\iota(p)}\mathcal{W}$$

y como $\mathcal{W}(p)$ es una variedad integral de la distribución $\mathcal{M}$ se tiene

$$d\iota_q T_q \mathcal{W}(p) = \mathcal{M}_q$$

para todo punto $q \in \mathcal{W}(p)$, en particular para $q = p$; por consiguiente

$$T_{\iota(p)}\mathcal{W} = \mathcal{M}_p.$$

Si ahora tomamos en cuenta que el punto p se eligió arbitrariamente en $\mathcal{W}$ se tiene demostrado que el espacio tangente a la variedad $\mathcal{W}$ en todo punto $p \in \mathcal{W}$ coincide con el espacio vectorial $\mathcal{M}(p) = \mathcal{M}_p$.
En otras palabras la variedad $\mathcal{W}$ es una variedad integral de la distribución $\mathcal{M}$, lo que se deseaba demostrar. Es inmediato que la variedad $\mathcal{W}$ es independiente de la elección que se haya hecho de la variedad $\mathcal{W}(p)$. En efecto, supongamos que se ha eligido otra variedad integral $\mathcal{W}'(p)$ para el punto $p \in \mathcal{W}$:

$$p \mapsto \mathcal{W}'(p)$$

tal que $p \in \mathcal{W}'(p)$; lo que da lugar a la siguiente situación:

$$p \in \mathcal{W}(p) \cap \mathcal{W}'(p)$$

la cual de acuerdo con la Proposición 2.2.1 implica la existencia de una variedad integral $\mathcal{W}_0(p)$ de $\mathcal{M}$ que contiene al punto $p \in \mathcal{W}$ y está contenida tanto en la variedad $\mathcal{W}(p)$ como en la variedad $\mathcal{W}'(p)$ como una subvariedad abierta:

$$p \in \mathcal{W}_0(p) \subset \mathcal{W}(p) \cap \mathcal{W}'(p).$$

Como $\mathcal{W}_0(p)$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{W}(p)$: $\mathcal{W}_0(p) \subset \mathcal{W}(p)$ se tiene

$$\mathcal{F}_{\mathcal{W}_0(p)}(q) = \iota_* \mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(\iota(q)) \ \forall q \in \mathcal{W}_0(p)$$

por la Proposición 1.1.2, donde ι es el mapeo identidad de $\mathcal{W}_0(p)$ en $\mathcal{W}(p)$:

$$\iota : \mathcal{W}_0(p) \to \mathcal{W}(p)$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \iota(q) = q.$$

Análogamente como $\mathcal{W}_0(p)$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{W}'(p)$: $\mathcal{W}_0(p) \subset \mathcal{W}'(p)$ se tiene

$$\mathcal{F}_{\mathcal{W}_0(p)}(q) = \iota_* \mathcal{F}_{\mathcal{W}'(p)}(q) \ \forall q \in \mathcal{W}_0(p)$$

por la Proposición 1.1.2, lo que nos permite escribir para $q = p$:

$$\iota_* \mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(p) = \mathcal{F}_{\mathcal{W}_0(p)}(p) = \iota_* \mathcal{F}_{\mathcal{W}'(p)}(p) \qquad (2.6)$$

donde ι es el mapeo identidad de $\mathcal{W}_0(p)$ en $\mathcal{W}'(p)$:

$$\iota : \mathcal{W}_0(p) \to \mathcal{W}'(p)$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \iota(q) = q.$$

La relación (2.6) implica la igualdad

$$\iota_* \mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(p) = \iota_* \mathcal{F}_{\mathcal{W}'(p)}(p)$$

por consiguiente

$$\mathcal{F}_{\mathcal{W}(p)}(p) = \mathcal{F}_{\mathcal{W}'(p)}(p).$$

Como el punto p se eligió arbitrariamente en la variedad $\mathcal{W}$ se ha demostrado que efectivamente la variedad $\mathcal{W}$ es independiente de la elección que se haga de la variedad $\mathcal{W}(p)$ para todo punto $p \in \mathcal{W}$.
Con esta última afirmación se termina la demostración del siguiente.

Teorema 2.2.1 *C. Chevalley. Sea $\mathcal{V}$ una variedad y sea $\mathcal{M}$ una distribución definida e involutiva sobre $\mathcal{V}$. Entonces por todo punto p de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ pasa una variedad integral máxima $\mathcal{W}(p)$ de la distribución $\mathcal{M}$; es decir, una variedad integral que no sea un subconjunto de cualquier otra variedad integral. Si $\mathcal{W}'$ es otra variedad integral que contiene al punto $p \in \mathcal{V}$: $p \in \mathcal{W}'$, entonces $\mathcal{W}'$ está contenida en $\mathcal{W}(p)$ como una subvariedad abierta.*

Corolario 2.2.1 *Mismas hipótesis y notación que en el Teorema (C. Chevalley). Las variedades integrales máximas $\mathcal{W}$ de la distribución involutiva $\mathcal{M}$ son únicas.*

Capítulo 3

Variedades que son 2°-contable

3.1 Definiciones y Propiedades

Definición 3.1.1 *Se dice que un espacio topológico X satisface el primer axioma de numerabilidad si todo punto $x \in X$ tiene un sistema fundamental de vecindades numerable.*

El espacio topológico B subyacente de una variedad $\mathcal{V}$ siempre satisface este axioma, puesto que $\mathcal{V}$ es localmente homeomorfa a un espacio que satisface el primer axioma de numerabilidad.

Definición 3.1.2 *Se dice que un espacio topológico X satisface el segundo axioma de numerabilidad si existe una base numerable para los abiertos de la topología de X.*

Este segundo axioma es más fuerte que el primero. El espacio B subyacente de la variedad $\mathcal{V}$ no siempre satisface el segundo axioma de numerabilidad. Sin embargo este segundo axioma lo satisfacen las variedades que se considerarán más adelante.

Definición 3.1.3 *Se dice que un espacio topológico X es σ − compacto (sigma compacto) si él mismo es localmente compacto, y si se puede expresar coma la unión de una familia a lo más numerable de subconjuntos compactos.*

Definición 3.1.4 *Si $\mathcal{V}$ es una variedad se dirá que un subconjunto V de $\mathcal{V}$: $V \subset \mathcal{V}$ es un subconjunto cúbico si él mismo es una vecindad cúbica de alguno de sus puntos, con respecto a un sistema de coordenadas convenientemente escogido.*

Se dirá que una variedad $\mathcal{V}$ satisface los axiomas de numerabilidad si el espacio B subyacente de $\mathcal{V}$ los satisface. Una consecuencia inmediata de estas convenciones es el

Lema 3.1.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad. $\mathcal{V}$ satisface los axiomas de numerabilidad, si y sólo si $\mathcal{V}$ es la unión numerable de subconjuntos cúbicos.*

Prueba. Supongamos que se satisface el segundo axioma de numerabilidad en la variedad $\mathcal{V}$. Como para todo punto $p \in \mathcal{V}$ existe una vecindad cúbica V_p correspondiente a un cierto sistema de coordenadas sobre $\mathcal{V}$ en p, se obtiene una familia de subconjuntos cúbicos $\{V_p\}_{p\in\mathcal{V}}$; esta familia es una cubierta abierta del espacio B subyacente de $\mathcal{V}$. Si se toma en cuenta la hipótesis se puede aplicar el teorema de Lindelöf (c.f. Dugundji, James: Topology Cap. VIII teorema 6.3) y así obtener una subcubierta numerable $\{V_{p_i}\}_{i\in \mathbb{N}}$ de la cubierta $\{V_p\}_{p\in\mathcal{V}}$: $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{p_i}$. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{V}$ admite una cubierta numerable $\{V_{p_i}\}_{i\in \mathbb{N}}$: $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{p_i}$, formada por subconjuntos cúbicos. Para cada índice $i \in \mathbb{N}$ consideremos el homeomorfismo

$$\varphi_i : V_{p_i} \to I^n_{a_i} \qquad (n = dim\mathcal{V})$$

correspondiente al sistema de coordenadas sobre $\mathcal{V}$ en algún punto $p_i \in V_{p_i}$, cuya vecindad cúbica es precisamente V_{p_i}. Si en seguida se toma en cuenta que el segundo axioma de numerabilidad se satisface en $\mathbb{R}^n$, se obtiene para cada cubo $I^n_{a_i} \subset \mathbb{R}^n$ de centro en $\varphi(p_i)$ y amplitud a_i, una base numerable $\{U_{i,j}\}_{j\in \mathbb{N}}$ para la familia de subconjuntos abiertos en el cubo $I^n_{a_i}$. Esto último implica que la clase de conjuntos $\{\varphi_i^{-1}(U_{i,j})\}_{i,j\in \mathbb{N}}$ es una base numerable para el espacio B subyacente de $\mathcal{V}$. De esta manera el Lema 3.1.1 está demostrado. ∎

Una variedad es siempre, por definición localmente compacta (puesto que toda variedad es localmente euclideana). Si además la variedad es localmente compacta probaremos que la condición del Lema 3.1.1 es equivalente a la condición expresada en la

Proposición 3.1.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad. $\mathcal{V}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad si y sólo si $\mathcal{V}$ es $\sigma -$ compacta.*

Prueba. Supongamos que $\mathcal{V}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad. Esta hipótesis nos permite aplicar el Lema 3.1.1 y así obtener una cubierta abierta numerable $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{V}$ constituída por subconjuntos cúbicos: $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ consideremos el homeomorfismo φ_i que mapea V_i sobre el cubo $I_{a_i}^n$ en $\mathbb{R}^n$ de dimensión n y amplitud a_i, donde $n = dim\mathcal{V}$:

$$\varphi_i : V_i \to I_{a_i}^n.$$

Como el cubo $I_{a_i}^n$ es $\sigma-compacto$, existe una familia numerable de compactos $\{K_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$I_{a_i}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{i,j}$$

y como $\varphi_i^{-1}(K_{i,j})$ es un subconjunto compacto se obtiene

$$\mathcal{V} = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} \varphi_i^{-1}(K_{i,j}),$$

es decir, $\mathcal{V}$ es la unión numerable de compactos y como además toda variedad es localmente compacta, a $\mathcal{V}$ deviene una variedad σ – *compacta*.
Recíprocamente supongamos que $\mathcal{V}$ admite una cubierta numerable $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de compactos: $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Si para todo punto $p \in K_i$ elegimos una vecindad cúbica $V_{p,i}$ de p, entonces la familia $\{V_{p,i}\}_{p\in K_i}$ de conjuntos cúbicos, forma una cubierta abierta de K_i: $K_i = \bigcup_{p\in K_i} V_{p,i}$, y como K_i es compacto de esta cubierta se puede extraer una cubierta finita:

$$K_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} V_{i,j}.$$

Por consiguiente $\mathcal{V}$ es la unión numerable de conjuntos cúbicos:

$$\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_i} V_{i,j}$$

y si en seguida se toma en cuenta el Lema 3.1.1 se obtiene que $\mathcal{V}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad. ∎

Consideremos ahora una distribución involutiva y analítica $\mathcal{M}$ sobre una variedad $\mathcal{V}$. El teorema de Frobenius asegura que cada punto p $\in \mathcal{V}$ posee una vecindad cúbica que puede expresarse como la unión de las hojas $\{\mathcal{R}_{\alpha,p}\}_{\alpha\in A_p}$ donde cada una de estas hojas es una variedad integral de $\mathcal{M}$. A estas vecindades se les llamará de Frobenius. De acuerdo con el Teorema de Frobenius-Chevalley por cada punto $p \in \mathcal{V}$ pasa una variedad integral máxima $\mathcal{W}$ de la distribución involutiva y analítica $\mathcal{M}$ de tal suerte que toda variedad integral de $\mathcal{M}$ que contenga al punto p es una subvariedad abierta de $\mathcal{W}$.

En el caso en que $\mathcal{W}$ satisfaga el segundo axioma de numerabilidad se obtendrán importantes relaciones, entre la topología de $\mathcal{V}$ y la topología de la subvariedad integral máxima.

Lema 3.1.2 *Sea $\mathcal{W}$ la variedad integral máxima de la distribución involutiva y analítica $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{V}$ que contiene al punto $p \in \mathcal{V}$. Si $\mathcal{W}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, entonces la interción de la vecindad de Frobenius V de p con $\mathcal{W}$: $V \cap \mathcal{W}$ es la unión, a lo más numerable, de hojas.*

Prueba. De acuerdo con la Proposición 3.1.1 la hipótesis sobre $\mathcal{W}$ implica que $\mathcal{W}$ es la unión numerable de subconjuntos compactos:

$$\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i,$$

K_i compacto para $i \in \mathbb{N}$, y como V es homeomorfa a un cubo $I^n_{a_i}$ en un cierto espacio euclideano $\mathbb{R}^n$, y el segundo axioma de numerabilidad se satisface en este espacio $\mathbb{R}^n$ se concluye que V también se puede expresar como la unión numerable de subconjuntos compactos:

$$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i',$$

con K_i' compacto para $i \in \mathbb{N}$. Por consiguiente la interción $V \cap \mathcal{W}$ es la unión numerable de subconjuntos compactos:

$$V \cap \mathcal{W} = \bigcup_{h=1}^{\infty} K_h'',$$

con K_h'' compacto para $h \in \mathbb{N}$. Se afirma que cada uno de estos compactos K_h'' solo tiene puntos en común a lo más con un número finito de hojas; en efecto, como el compacto K_h'' está contenido en V, él mismo está cubierto por una familia finita de hojas $\mathcal{R}_{\alpha_s,p}$ de V:

$$K_h'' \subset \bigcup_{s=1}^{m_h} \mathcal{R}_{\alpha_s,p}.$$

Sea q un punto de K_h'' contenido en una hoja $\mathcal{R}_{\alpha_s,p}$ de V: $q \in K_h'' \cap \mathcal{R}_{\alpha_s,p}$. Por otro lado $q \in \mathcal{R}_{\alpha_t,p}$ para alguna $1 \leq t \leq m_h$ por tanto $q \in \mathcal{R}_{\alpha_s,p} \cap \mathcal{R}_{\alpha_t,p}$ pero como las hojas en una vecindad de Frobenius son ajenas, se obtiene que $\mathcal{R}_{\alpha_s,p} = \mathcal{R}_{\alpha_t,p}$. Es decir, las únicas hojas que tienen puntos comunes con

K''_h son los elementos de la cubierta finita $\{\mathcal{R}_{\alpha_s,p}\}_{1\leq s\leq m_h}$. Así la afirmación está demostrada. Esta afirmación implica que

$$V \cap \mathcal{W} \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{s=1}^{m_h} \mathcal{R}_{\alpha_s,p}.$$

Pero como $\mathcal{W}$ es una variedad integral máxima se obtiene la inclución en sentido contrario y por consiguiente

$$V \cap \mathcal{W} = \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{s=1}^{m_h} \mathcal{R}_{\alpha_s,p}.$$

Así el Lema 3.1.2 está demostrado. ∎

Proposición 3.1.2 *Sea $\mathcal{W}$ la variedad integral máxima de la distribución involutiva y analítica $\mathcal{M}$ sobre la variedad $\mathcal{V}$. Si V es una vecindad de Frobenius de p y si $\mathcal{W}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, entonces las componentes conexas de $V \cap \mathcal{W}$ en el sentido de la topología de $\mathcal{V}$, son las mismas componentes conexas de $V \cap \mathcal{W}$ en el sentido de la topología de $\mathcal{W}$.*

Prueba. En el curso de la prueba de la Proposición 2.2.1 se demostró que la componente conexa C del punto p en $V \cap \mathcal{W}$, componente conexa concebida en la topología de $\mathcal{W}$, es un subconjunto de la hoja $\mathcal{R}_{\alpha_0,p}$ de V que contiene al punto p. Por otro lado como $\mathcal{W}$ es la variedad integral máxima de $\mathcal{M}$ que pasa por p, la misma contiene a $\mathcal{R}_{\alpha_0,p}$; por consiguiente C coincide con $\mathcal{R}_{\alpha_0,p}$. Esto demuestra que las componentes de $V \cap \mathcal{W}$ en la topología de $\mathcal{W}$ son precisamente las hojas de V que están en $\mathcal{W}$.

Ahora bien si $\mathcal{W}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, se afirma que estas hojas también son las componentes conexas en el sentido de la topología de $\mathcal{V}$. En efecto, sea q un punto fijo pero arbitrario de $V \cap \mathcal{W}$: $q \in V \cap \mathcal{W}$; de acuerdo con el Lema 2.1.2

$$V \cap \mathcal{W} = \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{s=1}^{m_h} \mathcal{R}_{\alpha_s,p}$$

donde $\mathcal{R}_{\alpha_s,p}$ es una hoja de V contenida en $\mathcal{W}$ para toda $s \in I\!N$. Sea $\mathcal{R}_{\alpha_s,p}$ la hoja que contiene al punto q: $q \in \mathcal{R}_{\alpha_s,p}$ y sea

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_n\}, V, a)$$

el sistema de coordenadas sobre $\mathcal{V}$ en p con respecto al cual V es la vecindad de Frobenius de p correspondiente; y tal que cada hoja $\mathcal{R}_{\alpha_s,p}$ de V está definida por las ecuaciones

$$\mathcal{R}_{\alpha_s,p} : x_{r+1} = x_{r+1}(q), ..., x_n = x_n(q).$$

Si

$$\Omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-r}$$

es la proyección natural definida por la correspondencia

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto \Omega(x_1, ..., x_n) = (x_{r+1}, ..., x_n)$$

entonces

$$\Omega \circ \varphi(V \cap \mathcal{W}) = \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{s=1}^{m_h} \Omega \circ \varphi(\mathcal{R}_{\alpha_s,p})$$

es un conjunto numerable en $\mathbb{R}^{n-r}$, y como Ω es continua, si C es una componente conexa de q en $V\cap \mathcal{W}$, concebida en la topología de $\mathcal{V}$, entonces $\Omega \circ \varphi(C)$ es un conjunto conexo de $\mathbb{R}^{n-r}$; por tanto este conjunto está constituído por un solo punto, a saber, $(x_{r+1}(q), ..., x_n(q))$:

$$\Omega \circ \varphi(C) = \{(x_{r+1}(q), ..., x_n(q))\}.$$

Esto último implica que $C \subset \mathcal{R}_{\alpha_s,p}$. Por otro lado hemos observado que la topología de $\mathcal{W}$ por ser $\mathcal{W}$ una subvariead de $\mathcal{V}$ es al menos tan fina como la topología de $\mathcal{V}$. Por consiguiente cualquier conjunto conexo en $\mathcal{W}$ sigue siendo conexo en $\mathcal{V}$; por tanto $\mathcal{R}_{\alpha_s,p} \subset C$. Esta última inclusión implica que $\mathcal{R}_{\alpha_s,p} = C$ y como q en $V\cap \mathcal{W}$ se eligió arbitrariamente se tiene demostrado que toda componente conexa de $V\cap \mathcal{W}$ coincide con una hoja. Así la Proposición 3.1.2 está demostrada. ∎

Proposición 3.1.3 *Sea $\mathcal{W}$ la variedad integral máxima de la distribución analítica e involutiva $\mathcal{M}$ sobre la variedad $\mathcal{V}$, y supongamos que Ψ es un mapeo analítico de una variedad $\mathcal{U}$ en la variedad $\mathcal{V}$*

$$\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$$

tal que la imagen bajo Ψ del conjunto $|\,\mathcal{U}\,|$ subyacente a la variedad $\mathcal{U}$ es un subconjunto del conjunto $|\mathcal{W}|$ subyacente a la variedad $\mathcal{W}$. Si $\mathcal{W}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, entonces Ψ es un mapeo analítico de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{W}$:

$$\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$$

es analítico.

Prueba. Sea r un punto fijo pero arbitrario de $\mathcal{U}$: $r \in \mathcal{U}$ la hipótesis implica que su imagen $\Psi(r) = p$ está contenida en $\mathcal{W}$: $p = \Psi(r) \in \mathcal{W}$ y elijamos un sistema de coordenadas

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_n\}, V, a)$$

sobre $\mathcal{V}$ en el punto $p = \Psi(r)$ cuya vecindad cúbica V sea de Frobenius. Puesto que Ψ es un mapeo contínuo podemos elegir una vecindad cúbica U de r en $\mathcal{U}$ (con respecto a un cierto sistema de coordenadas en r sobre $\mathcal{U}$) tal que

$$\Psi(U) \subset V$$

U siendo un conjunto conexo, $\Psi(U)$ también es conexo y como

$$p = \Psi(r) \in \Psi(U) \subset \mathcal{W}$$

el conjunto $\Psi(U)$ está contenido en la componente conexa de p en $V \cap \mathcal{W}$. Como por hipótesis $\mathcal{W}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad podemos aplicar la Proposición 3.1.2, la cual afirma que cualquier componente conexa de la intersección $V \cap \mathcal{W}$ coincide con una hoja; por tanto $\Psi(U)$ está contenida en la hoja $\mathcal{R}_{\alpha_0,p}$ de $V \cap \mathcal{W}$ que pasa por el punto p:

$$\Psi(U) \subset \mathcal{R}_{\alpha_0,p}.$$

Consideremos ahora una función f sobre $\mathcal{W}$ analítica en el punto $p \in \mathcal{W}$: $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}}(p)$; la Proposición 1.1.2 implica que f coincide en una vecindad W de p in $\mathcal{W}$, con la contracción de una cierta función f_1 sobre $\mathcal{V}$ y analítica en el punto $\iota(p) = \iota(\Psi(r))$:

$$f = \iota^* f_1 \quad con \quad f_1 \in \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\iota(p)) = \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\iota(\Psi(r))).$$

Por otro lado como $\Psi(U) \subset \mathcal{R}_{\alpha_0,p}$ podemos suponer la amplitud de la vecindad cúbica suficientemente pequeña como para que $\Psi(U)$ esté contenida en W, y por tanto $\Psi(U) \subset V \cap \mathcal{W}$. Esto significa que f coincide con $\iota^* f_1$ sobre el conjuto $\Psi(U)$, es decir,

$$f \circ \Psi(q) = \iota^* f_1 \circ \Psi(q) \qquad q \in U$$

o lo que es lo mismo

$$f \circ \Psi(q) = f_1 \circ \iota \circ \Psi(q) \qquad q \in U.$$

Si identificamos $\iota \circ \Psi(q)$ con $\Psi(q)$ con $q \in U$ y si se toma en cuenta que la aplicación

$$\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$$

es analítica, se obtiene que $\Psi^* f = \Psi^* f_1 \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(r)$. Esto significa que la aplicación

$$\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$$

es analítica en el punto r. Así se tiene la Proposición 3.1.3. ∎

Observación 3.1.1 *La hipótesis de que $\mathcal{W}$ satisfaga el segundo axioma de numerabilidad, es necesaria en la Proposición 3.1.3 ya que sin ella, dada una vecindad W de p en $\mathcal{W}$ podría muy bien suceder que no existiera una vecindad U de r en $\mathcal{U}$ con la propiedad $\Psi(U) \subset W$.*

UN TEOREMA SOBRE GRÁFICAS.

Definición 3.1.5 *Una gráfica (infinita) es una pareja (X,Y) constituída por un conjunto X no vacío cuyos elementos son llamados vértices de la gráfica, y por un conjunto Y de parejas no ordenadas de elementos de X: $Y = \{\{x,y\} | x, y \in X\}$. La gráfica así definida se denotará $G = (X,Y)$ o simplemente G si no hay lugar a confusión.*

Definición 3.1.6 *Un camino en una gráfica $G = (X,Y)$ es una sucesión (finita o no) $\{v_i\}_{i \in N}$ de vértices de $G = (X,Y)$ con la siguiente propiedad, $\{v_{n-1}, v_n\} \in Y$ para toda $n \geq 1$.*

Definición 3.1.7 *$G = (X,Y)$ es una gráfica conexa si para toda pareja de vértices $\{u,v\}$ existe un camino finito $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ en $G = (X,Y)$ tal que $v_0 = u$ y $v_n = v$.*

Teorema 3.1.1 *Sea $G = (X,Y)$ una gráfica infinita y conexa. Si para cada vértice v de $G = (X,Y)$ el conjunto*

$$\{w \in X | \{v,w\} \in Y\}$$

es a lo más numerable, entonces X es a lo más numerable.

Prueba. Consideremos un vértice fijo v_0 de la gráfica $G = (X,Y)$ y definamos por recurrencia una sucesión de conjuntos

$$\begin{aligned}
&X_0 = \{v_0\} \\
&X_1 = \{v \in X | \{v_0, v\} \in Y\} \\
&X_2 = \{w \in X | \{v,w\} \in Y, \textit{ para alguna } v \in X_1\} \\
&\vdots \\
&X_n = \{w \in X | \{v,w\} \in Y, \textit{ para alguna } v \in X_{n-1}\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Se afirma que cada conjunto X_n de esta sucesión es a lo más numerable. En efecto, para $n = 1$, X_1 lo es por hipótesis. Para demostrar la afirmación en general se procede por inducción sobre n. Supongamos que el conjunto X_{n-1} es a lo más numerable para $n > 1$; entonces habida cuenta que

$$X_n = \bigcup_{v \in X_{n-1}} \{w \in X | \{v, w\} \in Y\}$$

donde cada uno de los términos de esta unión es por hipótesis cuando mucho numerable; por hipótesis de inducción X_{n-1} es a lo más numerable, con lo cual se prueba que X_n es a lo más numerable y con ella la afirmación.
Consideremos ahora un vértice fijo pero arbitrario v de la gráfica $G = (X, Y) : v \in X$. Como por hipótesis $G = (X, Y)$ es conexa, existe un camino finito $\{v_0, ..., v_n\}$ en $G = (X, Y)$ tal que $v_0 = v_0$ y $v_n = v$. La existencia de este camino implica inmediatamente que $v \in X_n$. Por tanto $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, o lo que es lo mismo

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Lo cual implica que X es a lo más numerable. Y el Teorema 3.1.1 está demostrado[1]. ∎
Nuestro siguiente propósito es demostrar la siguiente

Proposición 3.1.4 *Si V es una variedad que satisface el segundo axioma de numerabilidad, entonces también lo cumple toda subvariedad de V .*

Para este propósito necesitamos una serie de resultados preliminares, a saber

Lema 3.1.3 *Sea $\mathtt{B}$ un espacio topológico conexo. Supongamos que existe una familia $\mathcal{F} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos abiertos de $\mathtt{B}$ con las siguientes propiedades:*

a) $\mathtt{B} = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$

b) *Cada $V_\alpha \in \mathcal{F}$ concebido como subespacio de $\mathtt{B}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad*

c) *Para toda $V_\alpha \in \mathcal{F}$ el conjunto*

$$\{V_\beta \in \mathcal{F} | V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset\}$$

es a lo más numerable.

[1] El mismo argumento sirve para demostrar este teorema para el caso de multigráficas y pseudo gráficas. También puede adaptarse fácilmente la demostración para obtener resultados análogos para otras cardinalidades de los conjuntos X_n pero esto no es necesario para nuestro propósito.

Entonces el segundo axioma de numerabilidad se satisface en el espacio B .

Prueba. Sea V_{α_0} un elemento de la familia $\mathcal{F}$ tal que $V_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Consideremos la gráfica definida por $G = (X, Y)$ donde

$$X = \{V_\alpha \in \mathcal{F} | \exists \alpha_0, \ldots, \alpha_m \in I \text{ tal que } V_{\alpha_{i-1}} \cap V_{\alpha_i} \neq \emptyset \ 1 \leq i \leq m\}$$

$$Y = \{\{V_\alpha, V_\beta\} | V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset, \ V_\alpha, V_\beta \in \mathcal{F}\}$$

Esta gráfica así definida es evidentemente conexa, y como además la hipótesis **c)** implica que para cada vértice V_α de $G = (X, Y)$ el conjunto

$$\{V_\beta \in X | \{V_\alpha, V_\beta\} \in Y\}$$

es a lo más nuemerable. Por tanto podemos aplicar el Teorema 3.1.1 y obtener que el conjunto de vértices X es a lo más numerable. Si en seguida se considera el conjunto abierto

$$V = \bigcup_{V_\alpha \in X} V_\alpha$$

se afirma que este conjunto coincide con B : B $= V$. En efecto, si q es un punto arbitrario de la cerradura de V: $q \in \overline{V}$ y si $q \in V_\beta$ para algún índice $\beta \in I$, entonces

$$V_\beta \cap V \neq \emptyset$$

lo cual implica la existencia de un elemento $V_\alpha \in X$ tal que

$$V_\beta \cap V_\alpha \neq \emptyset$$

lo cual a su vez implica que $V_\beta \in X$; por consiguiente $q \in V$, es decir, $\overline{V} \subset V$ y como $V \subset \overline{V}$ se tiene que $V = \overline{V}$, es decir, V es un conjunto cerrado y abierto del espacio B , y como por hipótesis éste es conexo, se obtiene que V es todo B : V =B . Así la afirmación está demostrada. Como esta afirmación demuestra que B es la unión a lo más numerable de espacios que satisfacen el segundo axioma de numerabilidad, síguese que B también lo satisface. De esta manera el Lema 3.1.3 está demostrado. ∎

Lema 3.1.4 *Sea $\mathcal{B}$ un espacio topológico conexo y localmente conexo. Supongamos que existe una familia numerable $\{V_n\}_{n \in N}$ de subconjuntos abiertos de $\mathcal{B}$ con las siguientes propiedades*

i) $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$

ii) *Cada componente $V_{n,\alpha}$ de cada conjunto V_n concebida como subespacio de $\mathcal{B}$, satisface el segundo axioma de numerabilidad.*

Entonces el espacio $\mathcal{B}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Prueba. Sea $\{V_{n,\alpha}\}_{\alpha\in A_n}$ la familia de componentes del conjunto V_n para toda $n \in \mathbb{N}$. La hipótesis implica que la familia

$$\mathcal{F} = \{V_{n,\alpha}\}_{n\in\mathbb{N},\, \alpha\in A_n}$$

de subconjuntos abiertos de $\mathcal{B}$ satisface las siguientes propiedades:

a) $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{\alpha\in A_n} V_{n,\alpha}$

b) Cada componente $V_{n,\alpha}$ concebida como subespacio de $\mathcal{B}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad.

De acuerdo con el Lema 3.1.3, el Lema 3.1.4 estará demostrado si se prueba la siguiente condición:

c) Para toda $V_{n,\alpha} \in \mathcal{F}$ el conjunto

$$\{V_{m,\beta} \in \mathcal{F} | V_{n,\alpha} \cap V_{m,\beta} \neq \emptyset\}$$

es a lo más numerable.

Para demostrar esta condición **c)**, se procede de la siguiente manera.
Sea $V_{m,\beta} \in \mathcal{F}$ tal que $V_{n,\alpha} \cap V_{m,\beta} \neq \emptyset$, y sea p un punto en esta intersección: $p \in V_{n,\alpha} \cap V_{m,\beta}$ por tanto $p \in V_{n,\alpha} \cap V_m$. Como $\mathcal{B}$ es un espacio localmente conexo y $V_{n,\alpha}$ es una componente de V_m que es abierto por hipótesis síguese que $V_{n,\alpha}$ es abierto así el conjunto $V_m \cap V_{n,\alpha}$ es un abierto en $V_{n,\alpha}$, por **ii)** el conjunto $V_{n,\alpha} \cap V_m$ tiene unicamente una familia numerable de componentes $\{K_r\}_{r\in\mathbb{N}}$:

$$V_{n,\alpha} \cap V_m = \bigcup_{r=1}^{\infty} K_r.$$

Por tanto $p \in K_{r_0}$ para alguna $r_0 \in \mathbb{N}$. Siendo K_{r_0} un conjunto conexo, él mismo debe estar contenido en alguna componente unívocamente determinada $V_{m,\beta(r_0)}$ de V_m: $K_{r_0} \subset V_{m,\beta(r_0)}$. Por tanto $p \in V_{m,\beta(r_0)} \cap V_{m,\beta}$ lo cual implica que $V_{m,\beta(r_0)} = V_{m,\beta}$ o lo que es lo mismo $\beta = \beta(r_0)$. De esta manera la propiedad **c)** está demostrada así como el Lema 3.1.4. ∎

Lema 3.1.5 *Sea $\mathcal{B}$ un espacio topológico conexo. Si existe un homeomorfismo local Φ de $\mathcal{B}$ en el espacio euclideano $\mathbb{R}^d$:*

$$\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^d.$$

Entonces el espacio $\mathcal{B}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Prueba. Como $\mathbb{R}^d$ admite una base numerable $\mathcal{F} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para su topología euclideana formada por conjuntos abiertos y conexos (c.f. Dugundji, James: Topology Cap.III) podemos considerar para cada $n \in \mathbb{N}$, la familia de conjuntos

$$\{V_{n,\alpha}\}_{\alpha\in A_n}$$

donde el conjunto A_n puede muy bien ser vacío, formada por conjuntos abiertos de $\mathcal{B}$ que se mapean homeomorficamente sobre el conjunto U_n:

$$V_{n,\alpha} \cong \Phi(V_{n,\alpha}) = U_n.$$

Se afirma que esta familia así definida es el conjunto de componentes del conjunto V_n:

$$V_n = \bigcup_{\alpha\in A_n} V_{n,\alpha}.$$

En efecto, consideremos dos elementos $V_{n,\alpha}$ y $V_{n,\beta}$ de la familia $\{V_{n,\alpha}\}_{\alpha\in A_n}$ tales que

$$V_{n,\alpha} \cap V_{n,\beta} \neq \emptyset \qquad \text{con} \qquad \alpha \neq \beta.$$

Denotemos con W esta intersección: $W = V_{n,\alpha} \cap V_{n,\beta}$ y supongamos por un instante que la frontera ∂W de W tiene puntos en común con $V_{n,\alpha}$:

$$\partial W \cap V_{n,\alpha} \neq \emptyset.$$

Si $p \in \partial W \cap V_{n,\alpha}$ la relación $\partial W = \overline{W} \cap \overline{W^c}$ implica la existencia de una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de W tales que

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n.$$

Si ahora definimos los homeomorfismos

$$\Psi_\alpha = (\Phi|_{U_n})^{-1} : U_n \to V_{n,\alpha}$$

$$\Psi_\beta = (\Phi|_{U_n})^{-1} : U_n \to V_{n,\beta}$$

se tiene la siguiente propiedad:

$$\Psi_\alpha \Phi(q) = q, \qquad \Psi_\beta \Phi(q) = q$$

para toda $q \in W$ y como Φ y Ψ son mapeos contínuos se obtiene

$$\Psi_\beta \Phi(p) = \lim_{n\to\infty} \Psi_\beta \Phi(p_n) = \lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

Esto último demuestra que $p \in V_{n,\beta}$ por tanto

$$p \in V_{n,\alpha} \cap V_{n,\beta} = W$$

lo que implica que $p \in \partial W \cap W$ lo que es una contradicción, por lo que se debe tener

$$\partial W \cap V_{n,\alpha} = \emptyset.$$

Si suponemos que W está propiamente contenida en $V_{n,\alpha}$:

$$W \underset{\neq}{\subset} V_{n,\alpha}$$

y como $V_{n,\alpha} = (V_{n,\alpha} - W) \cup W$, entonces podemos escribir

$$V_{n,\alpha} = (V_{n,\alpha} - (W \cup \partial W)) \cup W$$

y puesto que $\overline{W} = W \cup \partial W$ se obtiene

$$V_{n,\alpha} = (V_{n,\alpha} - \overline{W}) \cup W$$

es decir, $V_{n,\alpha}$ se puede expresar como la unión de dos conjuntos abiertos, ajenos, no vacíos lo que es una contradicción por ser $V_{n,\alpha}$ conexo (porque es homeomorfo a U_n). Por consiguiente se debe tener $V_{n,\alpha} = W$. Análogamente se demuestra que $V_{n,\beta} = W$, es decir,

$$V_{n,\alpha} = V_{n,\beta} \;\Rightarrow\; \alpha = \beta.$$

Como los conjuntos $V_{n,\alpha}$ son ajenos dos a dos y abiertos siguese que ellos son las componentes de V_n:

$$V_n = \bigcup_{\alpha \in A_n} V_{n,\alpha}$$

Si $p \in \mathcal{B}$, existe V abierto en $\mathcal{B}$ tal que $p \in V$ y $\Phi : V \cong U \subset \mathbb{R}^d$ (U abierto en $\mathbb{R}^d$). Calculando

$$\Phi(p) \in \Phi(V) = U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, \;\; U_n \in \mathcal{F}$$

lo que implica que $\Phi(p) \in U_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. A este conjunto U_n le corresponde una familia $\{V_{n,\alpha}\}_{\alpha \in A_n}$ de abiertos de $\mathcal{B}$ tal que

$$\Phi : V_{n,\alpha} \cong U_n \text{ y } V_n = \bigcup_{\alpha \in A_n} V_{n,\alpha},$$

si nos regresamos bajo el homeomorfismo Φ se tiene que $p \in V_{n,\alpha}$ para alguna $\alpha \in A_n$ y de aquí

$$p \in V_{n,\alpha} = \bigcup_{\alpha \in A_n} V_{n,\alpha},$$

es decir, cada punto de $\mathcal{B}$ pertenece a uno de los conjuntos V_n. Por lo tanto

i) $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

Como por definición $V_{n,\alpha} = \Phi^{-1}(U_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in A_n$ se tiene la siguiente propiedad.

ii) Cada componente $V_{n,\alpha}$ de cada conjunto V_n concebida como subespacio de $\mathcal{B}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad.

En efecto, sea $\mathcal{F} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la base numerable para $\mathbb{R}^d$. Como Φ es continua, $\Phi^{-1}(U_n)$ es un conjunto abierto en $\mathcal{B}$ para todo $U_n \in \mathcal{F}$. Si P es cualquier conjunto abierto de $\mathbb{R}^d$ se tiene que:

1) $\Phi^{-1}(P)$ es abierto en $\mathcal{B}$;

2) $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \;, U_k \mathcal{F}$;

3) $P \cap U_n$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^d$ para toda $n \in \mathbb{N}$;

4) $\Phi^{-1}(P \cap U_n)$ es un conjunto abierto en $\mathcal{B}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Calculando

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(P) \cap V_{n,\alpha} &= \Phi^{-1}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\Big) \cap \Phi^{-1}(U_n) \\
&= \Phi^{-1}\left(\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\Big) \cap U_n\right) \\
&= \Phi^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k \cap U_n)\right) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi^{-1}(U_k \cap U_n) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Phi^{-1}(U_k) \cap \Phi^{-1}(U_n)) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Phi^{-1}(U_k) \cap V_{n,\alpha})
\end{aligned}$$

se obtiene

$$\Phi^{-1}(P) \cap V_{n,\alpha} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Phi^{-1}(U_k) \cap V_{n,\alpha})$$

Por lo tanto, toda componente $V_{n,\alpha}$ de cada conjunto V_n concebida como subespacio de $\mathcal{B}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad. De acuerdo con el Lema 3.1.4 las propiedades (i) y (ii) implican que el espacio $\mathcal{B}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad. Así el Lema 3.1.5 está demostrado. ∎

Lema 3.1.6 *Si $\mathcal{V}$ es una subvariedad de dimensión d: $dim\mathcal{V} = d$ del espacio euclideano $I\!R^n$, entonces $\mathcal{V}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad.*

Prueba. Sea ι el mapeo identidad de la variedad $\mathcal{V}$ en la variedad $I\!R^n$. Si $\{x_1, ..., x_n\}$ es un sistema de coordenadas sobre $I\!R^n$ y si p es un punto fijo pero arbitrario de $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$, entonces la Proposición A.1.4 implica que del conjunto de contracciones $\iota_* x_1, ..., \iota_* x_n$ de las funciones $x_1, ..., x_n$ se puede extraer un sistema de coordenadas

$$(\{\iota_* x_{i_1}, ..., \iota_* x_{i_d}\}, V, a)$$

sobre $\mathcal{V}$ en p. Consideremos el conjunto V_I de todos aquellos puntos de $\mathcal{V}$ donde el conjunto de funciones $\iota_* x_{i_1}, ..., \iota_* x_{i_d}$, indicados por el subconjunto $I = \{i_1, ..., i_d\}$ del conjunto $\{1, ..., n\}$ sigue siendo un sistema de coordenadas. Este conjunto V_I así definido es abierto; puesto que por definición cada uno de sus puntos posee una vecindad cúbica V correspondiente al sistema de coordenadas $\iota_* x_{i_1}, ..., \iota_* x_{i_d}$ y totalmente contenida en V_I. Como el punto p se eligió arbitrariamente se obtiene que el espacio $\mathcal{V}$ es la unión finita de los conjuntos abiertos V_I:

i)
$$\mathcal{V} = \bigcup_I V_I$$

donde el conjunto $I = \{i_1, ..., i_d\}$ recorre el conjunto de las combinaciones de n elementos tomados de d en d. A continuación por cada combinación $I = \{i_1, ..., i_d\}$ de los n elementos $\{1, 2, ..., n\}$ consideremos una componente $V_{I,\alpha}$ de la familia $\{V_{I,\alpha}\}_{\alpha \in A_I}$ de componentes del conjunto V_I, así como la aplicación

$$\Phi : V_{I,\alpha} \to I\!R^d$$

definida por la correspondencia

$$\begin{aligned} p \mapsto \Phi(p) &= (\iota_* x_{i_1}(p), ..., \iota_* x_{i_d}(p)) \\ &= (x_{i_1} \circ \iota(p), ..., x_{i_d} \circ \iota(p)) \end{aligned}$$

$$= (x_{i_1}(\iota(p)), ..., x_{i_d}(\iota(p))).$$

Si V es una vecindad cúbica del punto $p \in V_{I,\alpha}$ correspondiente al sistema de coordenadas $\{\iota_* x_{i_1}, ..., \iota_* x_{i_d}\}$, la restricción φ de Φ a V: $\varphi = \Phi|_V$ es por definición la aplicación que mapea homeomorficamente la vecindad V sobre el cubo I_a^d de dimensión d de $I\!R^n$:

$$\Phi|_V = \varphi : V \tilde{\to} I_a^d.$$

Como $p \in V_{I,\alpha}$ se eligió arbitrariamente, esto último demuestra que Φ es un homeomorfismo local. Por consiguiente el Lema 3.1.5 implica que el espacio topológico conexo $V_{I,\alpha}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad; lo cual a su vez permite aplicar el Lema 3.1.4 y así obtener que la variedad $\mathcal{V}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad con lo cual el Lema 3.1.6 está demostrado. ■

Ahora probaremos la Proposición 3.1.4. Por hipótesis los axiomas de numerabilidad valen en la variedad $\mathcal{V}$, de acuerdo con el Lema(-) podemos cubrir a $\mathcal{V}$ por un número contable de subconjuntos abiertos V_k $(1 \leq k < \infty)$ cada uno de los cuales es una variedad cúbica de algún punto $p \in \mathcal{V}$ con respecto a un sistema de coordenadas en el punto:

$$\varphi_k : (\{x_1, ..., x_n\}, V_k, a_k).$$

Poner para toda $k \in I\!N$ $W_k = V_k \cap \mathcal{W}$, donde $\mathcal{W}$ es una subvariedad de $\mathcal{V}$: $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Los conjuntos W_k son conjuntos abiertos en $\mathcal{W}$. Si W_k' es una componente de W_k (en la topología de $\mathcal{W}$) como $\mathcal{W}$ es localmente conexo, W_k' es un conjunto abierto en $\mathcal{W}$ lo que da lugar a una subvariedad abierta $\mathcal{W}_k'$ de $\mathcal{W}$. Como también V_k es un conjunto abierto en $\mathcal{V}$, se obtiene una subvariedad abierta $\mathcal{V}_k$ de $\mathcal{V}$: $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{V}$ y como

$$\mathcal{W}_k' = \mathcal{V}_k \cap \mathcal{W}$$

se obtiene que $\mathcal{W}_k'$ es una subvariedad de $\mathcal{V}_k$:

$$\mathcal{W}_k' \subset \mathcal{V}_k.$$

Como φ_k mapea homeomorficamente V_k sobre el cubo $I_{a_k}^n$:

$$\varphi_k : V_k \cong I_{a_k}^n$$

donde $I_{a_k}^n$ es un conjunto abierto del espacio $I\!R^n$ y si $\mathcal{I}_{a_k}^n$ es la subvariedad abierta de la variedad $\mathcal{R}^n$ cuyo conjunto subyacente es $I_{a_k}^n$ es inmediato que

φ_k induce un isomorfismo analítico $\widetilde{\varphi_k}$ de la variedad $\mathcal{V}_k$ sobre la variedad $\mathcal{I}^n_{a_k}$:

$$\widetilde{\varphi_k} : \mathcal{V}_k \cong \mathcal{I}^n_{a_k}.$$

Si se identifica $\mathcal{W}'_k$ con su imagen vía este isomorfismo analítico se obtiene que $\mathcal{W}'_k$ es una subvariedad de la variedad $\mathcal{I}^n_{a_k}$: $\mathcal{W}'_k \subset \mathcal{I}^n_{a_k}$. Por el Lema 3.1.6 $\mathcal{W}'_k$ satisface los axiomas de numerabilidad. Como $\mathcal{W}'_k$ se eligío arbitrariamente en las componentes de $\mathcal{W}_k$ y como

$$\mathcal{W} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{V}_k \cap \mathcal{W}$$

por el Lema 3.1.4 $\mathcal{W}$ satisface los axiomas de numerabilidad. Y así la Proposición 3.1.4 está demostrada.

Apéndice A

Referencias

A.1

C. Chevalley introduce el siguiente concepto.

Definición A.1.1 *Sea $\mathcal{V}$ un espacio topológico, p un punto arbitrario de $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$ y sean $f, f_1, ..., f_m$ $m+1$ funciones reales definidas en alguna vecindad del punto $p \in \mathcal{V}$. Se dirá que la función f* **depende analíticamente** *de las funciones $f_1, ..., f_m$ en el entorno del punto $p \in \mathcal{V}$:*

$$f \underset{p}{\sim} f_1, ..., f_m$$

si existen una vecindad abierta V del punto $p \in \mathcal{V}$ y una función real

$$F(u_1, ..., u_m)$$

en m variables reales definida sobre un conjunto abierto U del espacio $I\!R^m$: $U \subset I\!R^m$:

$$F : U \to I\!R^m$$

con las propiedades:

i) *Las funciones $f, f_1, ..., f_m$ están definidas sobre la vecindad V del punto $p \in \mathcal{V}$*

ii) *La aplicación*

$$\varphi : V \to I\!R^m$$

definida por la correspondencia

$$q \mapsto \varphi(q) = (f_1(q), ..., f_m(q))$$

mapea a la vecindad V en el dominio U de definición de la función $F(u_1, ..., u_m)$:

$$\varphi : V \to U$$

tal que

$$Im\varphi = \varphi(V) \subset U$$

iii) *Para todo punto $q \in V$ se tiene*

$$f(q) = F(f_1(q), ..., f_m(q))$$

iv) *La función $F(u_1, ..., u_m)$ es analítica en el punto*

$$\varphi(p) = (f_1(p), ..., f_m(p)).$$

Definición A.1.2 *Sea $\mathcal{V}$ un espacio topológico conexo, y asignemos a cada punto $p \in \mathcal{V}$ una clase $\mathcal{F}(p)$ de funciones de valor real, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

C_I *Cada función en $\mathcal{F}(p)$ está definida en alguna vecindad de p (esta vecindad puede depender de la función).*

C_{II} *Cualquier función que dependa analíticamente en el entorno de p de un número finito de funciones en $\mathcal{F}(p)$ está ella misma en $\mathcal{F}(p)$.*

C_{III} *Es posible hallar un sistema ordenado $(f_1, ..., f_n)$ de funciones en $\mathcal{F}(p)$, una vecindad V del punto p, y un número $a > 0$ con las siguientes propiedades.*

1) *Las funciones $f_1, ..., f_n$ están definidas sobre V.*

2) *Si asignamos a cada punto $q \in V$ el punto $\Phi(q) \in \mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son $x_1 = f_1(q), ..., x_n = f_n(q)$, la aplicación Φ es un homeomorfismo de V con el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ compuesto de los puntos $(x_1, ..., x_n)$ tales que*

$$|x_i - f_i(p)| < a \quad (1 \leq i \leq n).$$

3) *Si $q \in V$ las funciones $f_1, ..., f_n$ pertenecen a $\mathcal{F}(q)$, y cada función en $\mathcal{F}(q)$ depende analíticamente de $f_1, ..., f_n$ en el entorno de q.*

Bajo estas condiciones diremos que hemos definido una **variedad** $\mathcal{V}$.

Definición A.1.3 *Si las propiedades* 1), 2), 3) *de la condición* C_{III} *de la Definición A.1.2 valen para el sistema* $(f_1, ..., f_n)$, *la vecindad* V, *y el número* a, *diremos que el conjunto finito* $\{f_1, ..., f_n\}$ *es un* **sistema de coordenadas** *sobre* $\mathcal{V}$ *en el punto* p, *y será denotado por*

$$\varphi : (\{f_1, ..., f_n\}, V, a)$$

y a veces simplemente por $\{f_1, ..., f_n\}$, V *es llamada* **vecindad cúbica** *de* p, *y* a *la amplitud de la vecindad* V *con respecto a este sistema de coordenadas.*

Definición A.1.4 *Sean* $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{W}$ *variedades, sea* Φ *un mapeo analítico de* $\mathcal{V}$ *en* $\mathcal{W}$:

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$p \mapsto \Phi(p).$$

Se dirá que Φ *es* **regular** *en el punto* $p \in \mathcal{V}$ *si la sucesióin*

$$0 \longrightarrow T_p\mathcal{V} \xrightarrow{d\Phi_p} T_{\Phi(p)}\mathcal{W}$$

es exacta.

A.I Sean $\mathcal{V}$ una variedad, U un subconjunto abierto conexo de $\mathcal{V}$: $U \subset \mathcal{V}$, y $\mathcal{F}(p)$ la clase de funciones analíticas en p sobre $\mathcal{V}$. Si asignamos a cada punto $p \in U$ la clase de funciones de la forma $f \circ \iota$, donde f es cualquier función en $\mathcal{F}(p)$ y ι es el mapeo identidad de U en $\mathcal{V}$, se obtiene una variedad $\mathcal{U}$ cuyo espacio subyacente es U. Tal variedad es llamada una **subvariedad abierta.**

Definición A.1.5 *Sean* $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ *variedades y sea* Φ *una aplicación de* V *en* $\mathcal{W}$, *donde* V *es alguna vecindad del punto* $p \in \mathcal{V}$. *La aplicación* Φ *es* **analítica** *en* p *si la siguiente condición es satisfecha: si* g *es cualquier función sobre* $\mathcal{W}$ *que es analítica en* $\Phi(p)$, *entonces* $g \circ \Phi$ *es analítica en* p *sobre* $\mathcal{V}$.
Suponer además que Φ *es un homcomorfismo de* $\mathcal{V}$ *con* $\mathcal{W}$. *Entonces* Φ *es llamada un* **isomorfismo analítico** *de* $\mathcal{V}$ *con* $\mathcal{W}$ *si ambos* Φ *y su aplicación inversa* Φ^{-1} *son analíticas dondequiera.*

A.II Suponer que $\mathcal{W}$ es una variedad dada, que ß es algún espacio topológico y que Φ es un homeomorfismo de ß con algún subconjunto conexo U de $\mathcal{W}$. Entonces U es el espacio subyacente de una subvariedad abierta $\mathcal{U}$ de $\mathcal{W}$. Podemos definir una variedad $\mathcal{V}$, cuyo espacio subyacente es ß, por la condición que Φ será un isomorfismo analítico de $\mathcal{V}$ con $\mathcal{U}$.

Observación A.1.1 *Si $\{x_1, ..., x_n\}$ es un sistema de coordenadas en p, cualquier vecindad de p contiene una vecindad cúbica con respecto a este sistema.*

Proposición A.1.1 *Sea Φ una aplicación de una variedad $\mathcal{V}$ en una variedad $\mathcal{W}$ regular dondequiera. Si $p \in \mathcal{V}$, sean $\mathcal{L}_p = T_p\mathcal{V}$ y $\widetilde{\mathcal{L}}_p = d\Phi_p(\mathcal{L}_p)$. Si Y es cualquier campo vectorial analítico sobre $\mathcal{W}$ tal que $Y_{\Phi(p)} \in \widetilde{\mathcal{L}}_p$ para todo $p \in \mathcal{V}$, entonces existe uno y sólo un campo vectorial analítico X sobre $\mathcal{V}$ que está Φ-relacionado a Y:*

$$d\Phi_p(X_p) = Y_{\Phi(p)}.$$

Proposición A.1.2 *Sea Φ una aplicación analítica de una variedad $\mathcal{V}$ en una variedad $\mathcal{W}$. Sean X_1, X_2 campos vectoriales analíticos sobre $\mathcal{V}$, y Y_1, Y_2 campos vectoriales analíticos sobre $\mathcal{W}$. Si X_i está Φ-relacionado a Y_i $(i = 1, 2)$, entonces $[X_1, X_2]$ está Φ-relacionado con $[Y_1, Y_2]$.*

Proposición A.1.3 *Sea $\{x_1, ..., x_n\}$ un sistema de coordenadas en el punto p sobre la variedad $\mathcal{V}$. Sean $y_1, ..., y_n$ un número finito de funciones, perteneciendo a $\mathcal{F}(p)$. $\{y_1, ..., y_n\}$ es un sistema de coordenadas en p si y sólo si*

1) *m=n.*

2) *Si $y_i = y_i^*(x_1, ..., x_n)$ es la expresión de y_i en términos de las coordenadas $x_1, ..., x_n$ y el determinante funcional*

$$\frac{D(y_1^*, ..., y_n^*)}{D(x_1, ..., x_n)} \neq 0$$

para $x_1 = x_1(p), ..., x_n = x_n(p)$.

Proposición A.1.4 *Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades, sea Φ un mapeo analítico de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$:*

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

definido por la correspondencia

$$q \mapsto \Phi(p)$$

regular en el punto p de la variedad $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. Entonces si

$$\psi : (\{y_1, ..., y_m\}, W, b)$$

es un sistema de coordenadas sobre la variedad $\mathcal{W}$ *en el punto* $\Phi(p) \in \mathcal{W}$, *del sistema de funciones*

$$\{\Phi_* y_1, ..., \Phi_* y_m\}$$

se puede extraer un sistema de coordenadas

$$\{\Phi_* y_{i_1}, ..., \Phi_* y_{i_m}\}$$

sobre la variedad $\mathcal{V}$ *en el punto* $p \in \mathcal{V}$. *Además si*

$$\varphi : (\{x_1, ..., x_n\}, V, a)$$

es un sistema de coordenadas arbitrario sobre la variedad $\mathcal{V}$, *entonces existe un sistema de coordenadas*

$$\{z_1, ..., z_n, z_{n+1}, ..., z_m\}$$

tal que las funciones $\Phi_* z_i$ *y* x_i *coinciden en la vecindad del punto* $p \in \mathcal{V}$:

$$\Phi_* z_i = x_i \quad (i \leq i \leq n).$$

Proposición A.1.5 *Sean* $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{W}$ *espacios topológicos,* Φ *un mapeo continuo de* $\mathcal{V}$ *en* $\mathcal{W}$. *Sea* p *un punto arbitrario de* $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. *Si*

$$g \underset{p}{\sim} \Phi_* f_1, ..., \Phi_* f_m,$$

entonces existe $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{W}}(\Phi(p))$ *tal que*

$$f \underset{\Phi(p)}{\sim} f_1, ..., f_m$$

y

$$\Phi_* f = g,$$

donde

$$\Phi_* f = f \circ \Phi; \quad \Phi_* f_i = f_i \circ \Phi \quad (1 \leq i \leq m),$$

y las funciones f_i *son funciones de valor real definidas sobre* $\mathcal{W}$.

Proposición A.1.6 *Sean* $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{W}$ *espacios topológicos,* Φ *un mapeo continuo de* $\mathcal{V}$ *en* $\mathcal{W}$. *Sea* p *un punto arbitrario de* $\mathcal{V}$: $p \in \mathcal{V}$. *Si*

$$f \underset{\Phi(p)}{\sim} f_1, ..., f_m,$$

entonces

$$\Phi_* f \underset{p}{\sim} \Phi_* f_1, ..., \Phi_* f_m,$$

donde

$$\Phi_* f = f \circ \Phi; \quad \Phi_* f_i = f_i \circ \Phi \quad (1 \leq i \leq m),$$

y las funciones f_i *son funciones de valor real definidas sobre* $\mathcal{W}$.