ERROR DE No.____ DE PAGINA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

SOBRE TEORIAS DE TORSION ESPECTRALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

MARIA JOSE ARROYO PANIAGUA

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE RIOS MONTES

MEXICO, D.F. 1994

A Julián, Mariajosé y Giuliana

RESUMEN DEL TRABAJO DE TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO
DE DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)
PRESENTA

María José Arroyo Paniagua

Sobre Teorías de Torsión Espectrales

En la literatura reciente han aparecido diversos trabajos que relacionan la estructura del anillo máximo de cocientes con propiedades de la Teoría de Torsión de Goldie en la retícula de las teorías de torsión hereditarias de un anillo asociativo con uno dado.

Es un hecho conocido que la Teoría de Torsión de Goldie es un elemento importante de esta retícula y que tiene entre sus propiedades el ser espectral.

Por lo anterior, es natural estudiar cuales propiedades acerca de esta teoría particular pueden generalizarse a cualquier teoría de torsión espectral, así como ahondar en el estudio de las teorías de torsión espectrales para obtener la mas amplia información sobre ellas y generar aplicaciones de los resultados obtenidos.

Los principales resultados contenidos en este trabajo son los siguientes: Se dan unas caracterizaciones de las teorías de torsión espectrales; se obtienen resultados acerca del comportamiento de éstas con respecto al cambio de anillos; se establece que la retícula de generalizaciones de una teoría de torsión espectral es una retícula de Boole completa y que tiene una copia isomorfa en las retículas de las teorías de torsión del anillo de cocientes y del cociente del anillo módulo su parte de torsión; se establecen algunas propiedades de estructura del anillo de cocientes con respecto a una teoría de torsión espectral imponiendo algunas condiciones sobre ella, estas propiedades son, el que el anillo de cocientes sea un anillo primo o un producto directo de anillos primos o que sea isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial o isomorfo al producto directo de los anillos de endomorfismos de espacios vectoriales.

También se determina que el pseudocomplemento de una teoría de torsión espectral τ dada, es la teoría de torsión generada por los modulos izquierdos simples τ-libres de torsión y que tiene como funtor de torsión al funtor zoclo relativo a esta clase de módulos simples; se dan condiciones necesarias y suficientes para que el funtor zoclo relativo a una clase de módulos simples

resulte ser un funtor exacto derecho. Se dan las condiciones necesarias y suficientes para que la teoría cogenerada por una clase no vacía de módulos simples sea espectral. Con esto se presenta una caracterización de los anillos semiartinianos. Se dan las condiciones necesarias y suficientes para que la Teoría de Torsión de Goldman, que es el pseudocomplemento de la Teoría de Torsión de Goldie, sea espectral. Se establece que dada una teoría de torsión espectral, ciertas subretículas de la retícula de generalizaciones de ésta son localmente atómicas. Por último, con estos resultados se da una caracterización de los anillos con dimensión de Gabriel.

M. en C. María José Arroyo Paniagua

José Ríos Mo

Vo.Bo. Dr. José Ríos Montes

On Spectral Torsion Theories

María José Arroyo Paniagua

Abstract

Several recent papers give some relations between the structure of the maximal ring of quotients and Goldie's Torsion Theory within the frame of all hereditary torsion theories on an associative ring with unity.

It is a well known fact that Goldie's Torsion Theory is an important element of this frame and among other properties it is spectral.

It is natural to ask which properties can be generalized to every spectral torsion theory and then, to study further the spectral torsion theories and give some applications to the Ring Theory.

The main results are as follows: First, we give some characterizations of spectral torsion theories. We prove that the lattice of generalization of a spectral torsion theory is a complete boolean lattice and has an isomorphic copy in the ring of quotients and in the quotient ring over its torsion submodule.

We give necessary and sufficient conditions for the ring to be: a) a prime ring, b) a direct product of prime rings, c) a full linear ring. d) a direct product of full linear rings.

We prove that the torsion functor associated to the pseudocomplement of a spectral torsion theory is the socle associated to a complete class of representatives of isomorphism classes of simple torsion-free modules.

Given a non-empty set C, of representatives of isomorphism classes of simple modules, we give necessary and sufficient conditions for the torsion theory cogenerated by C to be spectral.

We obtain another characterization of semiartinian rings.

We give necessary and sufficient conditions for the torsion theory generated by the simple projective modules to be spectral.

We prove that certain sublattices of the lattice of generalizations of a spectral torsion theory are atomic lattices and finally, we use the latter fact to give another characterization of rings with Gabriel dimension.

M. en C. María José Arroyo Paniagua   Vo.Bo. Dr. José Ríos Montes

Agradecimientos

En forma muy especial agradezco al Dr. José Ríos Montes el haberme dado su confianza y su tiempo. Su dirección y sus enseñanzas fueron invaluables e indispensables para que este trabajo sea una realidad.

Al Dr. Francisco Raggi Cárdenas le agradezco el haberme transmitido su interés en el estudio del álgebra, así como el apoyo que me ha brindado desde los inicios de mi carrera.

Agradezco al Dr. Mark L. Teply el apoyo que me ha dado en mis trabajos de investigación.

Indice

Introducción

La construcción de los anillos y módulos de cocientes en la teoría de anillos, dio origen al estudio de las teorías de torsión. Estas fueron presentadas bajo puntos de vista distintos por los siguientes autores: P. Gabriel [7] en 1962, J. M. Maranda [17] en 1964, K. L. Chew [4] en 1965, S. E. Dickson [6] en 1966 y posteriormente, O. Goldman [13] en 1969.

De esta manera, a cada anillo R se le asocia la retícula de todas las teorías de torsión hereditarias definidas en la categoría de módulos sobre R; las cuales han ofrecido una técnica moderna en la teoría de anillos dando información acerca de la estructura interna del anillo y de su categoría de módulos.

En [10], [11], [26] y [27], se presentan las recopilaciones mas completas sobre el estudio de las teorías de torsión.

Uno de los elementos sobresalientes de la retícula de las teorías de torsión hereditarias sobre un anillo R, es la llamada teoría de torsión de Goldie [12], introducida en 1964. Para ésta, han sido elaborados un gran número de trabajos, como por ejemplo, el de J. Alin y S. Dickson [1], los de F. Raggi y J. Ríos [18], [20] y K. Goodearl [15]; éste último presenta un estudio en profundidad de esta teoría de torsión.

Una característica de la teoría de torsión de Goldie es que la categoría cociente asociada a ella es una categoría espectral. Alguna literatura asociada a categorías espectrales puede encontrarse en el libro de B. Strenstöm [27] y en los trabajos de J. Ross [24] y su bibliografía.

En 1978, J. Zelmanowitz [30] presentó condiciones necesarias y suficientes para que una teoría de torsión hereditaria tuviera la propiedad de que el anillo de cocientes con respecto a ella fuera artiniano semisimple. Estas condiciones son: que la teoría de torsión cumpliera que la categoría cociente asociada a ella fuera espectral y que el filtro asociado tenga una base de ideales finitamente generados.

En 1985, J. L. Gómez Pardo [14] llamó a las teorías de torsión que tuvieran la propiedad de que su categoría cociente sea espectral, teorías de torsión espectrales y presentó algunos resultados acerca de su funtor localización, relacionó éstas con condiciones de finitud en la retícula de submódulos de un módulo izquierdo dado, dió además dos técnicas para la obtención de radicales de torsión espectrales y estableció que las teorías de torsión espectrales tienen la propiedad de que su anillo de cocientes es un anillo regular autoinyectivo entre otros resultados. Esta última también es característica de la teoría de torsión de Goldie en anillos no singulares.

Fué también en ese mismo año que J. L. García y J. L. Gómez Pardo

[9] estudiaron caracterizaciones de los V-anillos considerando una clase de teorías de torsión que incluyen a las teorías de torsión espectrales.

En la literatura reciente han aparecido diversos trabajos que relacionan la estructura del anillo máximo de cocientes con propiedades de la teoría de torsión de Goldie en la retícula de teorías de torsión. Por lo anterior, nos pareció natural preguntarnos si las propiedades obtenidas por otros autores podían generalizarse a cualquier teoría de torsión espectral , así como ahondar en el estudio de éstas para obtener la mas amplia información acerca de ellas y generar aplicaciones de los resultados obtenidos.

Previo al estudio de las teorías de torsión, es necesario conocer algunos aspectos de la teoría de las categorías, así como de la teoría de módulos, como el que presentan [3] y [25].

En este trabajo dedicamos el primer capítulo para exponer los conceptos básicos de las teorías de torsión que son los cimientos del marco teórico donde trabajamos y que nos son de utilidad en el material que exponemos posteriormente.

En el segundo capítulo iniciamos el estudio de las teorías de torsión espectrales, presentamos algunas de las propiedades importantes que han aparecido en la literatura y damos algunas caracterizaciones de las teorías de torsión espectrales. También, obtenemos resultados acerca del comportamiento de las teorías de torsión espectrales con respecto al cambio de anillos y presentamos algunas características del anillo de cocientes de un anillo dado con respecto a una teoría de torsión espectral.

En el tercer capítulo, estudiamos la estructura de la retícula de generalizaciones de una teoría de torsión espectral τ en un anillo R, establecemos que esta retícula tiene una copia isomorfa en las retículas de las teorías de torsión de los anillos $R/t_\tau(R)$ y R_τ. Como consecuencia, probamos que ésta es una retícula de Boole completa. Obtenemos algunas aplicaciones de estos resultados para establecer algunas propiedades de estructura adicionales a las reportadas en la literatura para el anillo R_τ, imponiendo ciertas condiciones a la teoría de torsión τ. Concretamente, damos condiciones necesarias y suficientes para que el anillo de cocientes con respecto a una teoría de torsión espectral resulte ser: a) un anillo primo, b) un producto directo de anillos primos, c) el anillo de endomorfismos de un espacio vectorial, d) el producto directo de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales.

En el cuarto capítulo consideramos en la categoría de módulos izquierdos un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismos de módulos simples. Dada una teoría de torsión espectral, probamos que su pseudocomplemento es la teoría de torsión generada por el conjunto de los módulos simples libres de torsión con respecto a la teoría de torsión de la cual partimos y que su funtor de torsión asociado es el funtor zoclo relativo a este conjunto de módulos simples libres de torsión. También, probamos que el doble pseudocomplemento de la teoría de torsión original, es la teoría de torsión cogenerada por este mismo conjunto de módulos simples y que ésta es espectral. Damos también condiciones necesarias y suficientes para que el funtor zoclo relativo a esta clase de módulos simples resulte un funtor exacto. Establecemos condiciones necesarias y suficientes para que la teoría de torsión cogenerada por cualquier conjunto no vacío de representantes de clases de isomorfismos de módulos simples sea espectral. Asímismo, damos una caracterización de los anillos semiartinianos los cuales tienen la propiedad de que el zoclo de cada módulo no trivial es un submódulo distinto de cero. Damos condiciones necesarias y suficientes para que la teoría de torsión de Goldman, que es el pseudocomplmento de la teoría de torsión de Goldie, sea una teoría de torsión espectral. Entre otras cosas, probamos que la teoría de torsión de Goldman es espectral si y sólo si el anillo es semiartiniano y el cociente del anillo módulo su parte de torsión de Goldman es un anillo artiniano semisimple. Así también, damos condiciones necesarias y suficientes para que sea espectral cualquier especialización de la teoría de torsión de Goldman. Terminamos este capítulo con una serie de ejemplos que sirven para ilustrar la teoría desarrollada.

En el útimo capítulo hacemos uso del agradable comportamiento que tienen las teorías de torsión espectrales respecto a los módulos cocríticos. Consideramos la retícula de generalizaciones de la teoría de torsión cogenerada por los módulos cocríticos libres de torsión, con respecto a una teoría de torsión espectral dada, probamos que ésta es una retícula localmente atómica. También, probamos que esta característica la posee la retícula de generalizaciones de la teoría de torsión espectral cuando ella es fuertemente semiprima. Finalmente, haciendo uso de estos resultados obtenemos caracterizaciones de los anillos seminoeterianos, también conocidos como anillos con dimensión de Gabriel. Estos resultados generalizan los reportados en la literatura para la teoría de torsión de Goldie.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

Como antecedente de este trabajo, presentamos las definiciones, la notación y los conceptos generales de las teorías de torsión que utilizaremos. Tanto las demostraciones como una mayor información de lo que aquí mencionamos pueden encontrarse en [10], [11] [26] y [27].

A lo largo de todo este trabajo, denotamos con R a un anillo asociativo con elemento unitario, utilizamos R-mod para denotar a la categoría de todos los R-módulos izquierdos; si M es un elemento de esta categoría, $E(M)$ es la cápsula inyectiva de M.

Definición 1.1 *Una teoría de torsión $\tau = (\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$ sobre R-mod es una pareja de clases de R-módulos que satisfacen los siguientes axiomas:*

1. $\mathcal{T}_\tau \cap \mathcal{F}_\tau = \{0\}$.
2. *Si $Hom_R(M, N) = 0$ para toda $N \in \mathcal{F}_\tau$ entonces $M \in \mathcal{T}_\tau$.*
3. *Si $Hom_R(M, N) = 0$ para toda $M \in \mathcal{F}_\tau$ entonces $N \in \mathcal{F}_\tau$.*

A $\mathcal{T}_\tau$ la llamamos la clase de τ-torsión y a sus módulos, los módulos de τ-torsión; mientras que a $\mathcal{F}_\tau$ la llamamos la clase τ-libre de torsión y a sus módulos, los módulos τ-libres de torsión.

Proposición 1.2 *Las siguientes propiedades son equivalentes para una clase $\mathcal{T}$ de R-módulos izquierdos:*

i) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\tau$ *para alguna teoría de torsión τ sobre R-mod.*

ii) $\mathcal{T}_\tau$ *es una clase cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones.*

Proposición 1.3 *Las siguientes propiedades son equivalentes para una clase $\mathcal{F}$ de R-módulos izquierdos:*

i) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\tau$ *para alguna teoría de torsión τ sobre R-mod.*

ii) $\mathcal{F}_\tau$ *es una clase cerrada bajo subobjetos, productos directos y extensiones.*

Definición 1.4 *Decimos que una teoría de torsión τ es hereditaria, si la clase de módulos de τ-torsión es cerrada bajo submódulos.*

Todas las teorías de torsión que consideramos en este trabajo son hereditarias.

Proposición 1.5 *Si τ es una teoría de torsión, entonces τ es hereditaria si y sólo si la clase de módulos τ-libres de torsión es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Denotamos con R-tors a la clase de todas las teorías de torsión hereditarias definidas sobre R-mod.

Para τ una teoría de torsión y M cualquier R-módulo, denotamos con $t_\tau(M)$ al mayor submódulo de M que pertenece a la clase $\mathcal{T}_\tau$, es decir, $t_\tau(M) = \sum\{N \subseteq M \mid N \in \mathcal{T}_\tau\}$. De esta forma, la asignación $M \to t_\tau(M)$ define el funtor $t_\tau(\_) : R\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod}$.

Proposición 1.6 *Sea $\tau \in R$-tors, entonces:*

i) $t_\tau(\_)$: R-mod $\longrightarrow$ R-mod es un subfuntor del funtor identidad en R-mod.

ii) $t_\tau(\_)$ es un funtor exacto izquierdo.

iii) Si $M \in R$-mod, entonces $t_\tau(M/t_\tau(M)) = 0$.

A los subfuntores del funtor identidad que satisfacen la propiedad iii), se les conoce como radicales. Al funtor $t_\tau(\_)$ lo llamamos funtor de torsión o radical de torsión.

Definición 1.7 *Un conjunto no vacío $\mathcal{L}$, de ideales izquierdos de R es llamado un filtro idempotente o un filtro de Gabriel si satisface las siguientes condiciones:*

i) Si $I \in \mathcal{L}$ y $r \in R$, entonces $(I : r) \in \mathcal{L}$.

ii) Si $I \subseteq R$ es un ideal izquierdo y existe $J \in \mathcal{L}$ tal que $(I : r) \in \mathcal{L}$ para toda $r \in J$, entonces $I \in \mathcal{L}$.

Sean $\tau \in R$-tors y $M \in R$-mod, un submódulo N de M es llamado τ-denso si $M/N \in \mathcal{T}_\tau$. Sea $\mathcal{L}_\tau(M) = \{_RN \subseteq M \mid M/N \in \mathcal{T}_\tau\}$; en particular, consideramos el conjunto de ideales izquierdos τ-densos del anillo R, $\mathcal{L}_\tau = \{_RI \subseteq R \mid R/I \in \mathcal{T}_\tau\}$.

Proposición 1.8 *Las siguientes condiciones son equivalentes para un conjunto no vacío $\mathcal{L}$ de ideales izquierdos de un anillo R:*

i) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\tau$ para alguna $\tau \in R$-tors.

ii) $\mathcal{L}$ es un filtro idempotente.

Decimos que un R-módulo M es τ-inyectivo si: Para cada sucesión exacta corta $0 \to K \to N$ con $K \in \mathcal{L}_\tau(N)$ y para cada R-morfismo $f : K \to M$, existe un morfismo $g : N \to M$ que extiende a f.

Para $\tau \in R$-tors, decimos que un submódulo $N \subseteq M$ es τ-puro si $M/N \in \mathcal{F}_\tau$. Tenemos que la intersección de cualquier familia de submódulos τ-puros de un R-módulo izquierdo es τ-puro. Además, cualquier submódulo N de un R-módulo izquierdo M está contenido en al menos un submódulo τ-puro de M, a saber M mismo. Lo anterior nos asegura que existe un elemento minimal de la familia de todos los submódulos τ-puros de M que contienen a N. A este submódulo lo llamamos la τ-purificación de N en M y lo denotamos con $N^{p(\tau)}$ y es tal que $N^{p(\tau)}/N = t_\tau(M/N)$.

Con $\mathrm{Sat}_\tau(M)$, denotamos al conjunto de submódulos τ-puros de M. De [26, IX, Proposición 4.1], tenemos que $\mathrm{Sat}_\tau(M)$ es una retícula modular completa.

Para $\tau \in R$-tors y $M \in R$-mod, el módulo de cocientes M_τ, se define como la τ-purificación de $M/t_\tau(M)$ en su cápsula inyectiva.

Con (R,τ)-mod denotamos a todos los R-módulos τ-libres de torsión y τ-puros en su cápsula inyectiva. De [26, IX, Corolario 1.10] y de [26, X, Teorema 1.6], (R,τ)-mod es una subcategoría plena de R-mod, además de ser una categoría de Grothendieck.

La asignación $M \longrightarrow M_\tau$ define un funtor $(\_)_\tau : R\text{-mod} \longrightarrow (R,\tau)\text{-mod}$ llamado funtor de localización. En particular, el R-módulo R_τ tiene estructura de anillo y los R-módulos τ-libres de torsión y τ-inyectivos adquieren estructura como R_τ-módulos izquierdos la cual extiende en forma natural su estructura de R-módulos, R_τ es llamado el anillo de cocientes de R respecto a τ. Además, de [26, IX, Corolario 4.9], existe una correspondencia uno a uno entre los objetos de $\text{Sat}_\tau(M)$ y los subobjetos de M_τ en (R,τ)-mod.

Tenemos que R-tors es un conjunto parcialmente ordenado si damos el siguiente orden: Para τ y $\sigma \in R$-tors, decimos que $\tau \leq \sigma$ si $\mathcal{T}_\tau \subseteq \mathcal{T}_\sigma$.

Proposición 1.9 *Sean $\tau, \sigma \in R$-tors. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $\tau \leq \sigma$

ii) $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$

iii) $\mathcal{L}_\tau \subseteq \mathcal{L}_\sigma$

iv) Para todo $M \in R$-mod, tenemos que $t_\tau(M) \subseteq t_\sigma(M)$.

Asimismo, R-tors adquiere estructura de retícula completa con las operaciones $\wedge$ y $\vee$ definidas a continuación:

Sea $\{\tau_\alpha\}_\Lambda \subseteq R$-tors, entonces la teoría de torsión $\wedge_\Lambda \tau_\alpha$ queda determinada como aquella cuya clase de torsión es la intersección de todas las clases de τ_α-torsión, es decir, $\mathcal{T}_{\wedge_\Lambda \tau_\alpha} = \cap_\Lambda \mathcal{T}_{\tau_\alpha}$; y $\vee_\Lambda \tau_\alpha$ esta determinada como aquella cuya clase libre de torsión es la intersección de todas las clases τ_α-libres de torsión, es decir, $\mathcal{F}_{\vee_\Lambda \tau_\alpha} = \cap_\Lambda \mathcal{F}_{\tau_\alpha}$.

Una propiedad adicional que satisface la retícula R-tors es que la operación $\wedge$ distribuye uniones arbitrarias, es decir, se cumple para τ y $\{\tau_\alpha\}_\Lambda$ en R-tors, que: $\tau \wedge (\vee_\Lambda \tau_\alpha) = \vee_\Lambda(\tau \wedge \tau_\alpha)$.

Proposición 1.10 *(R-tors, $\leq, \wedge, \vee$) es un marco.*

Consideramos una familia $\{M_\alpha\}_\Lambda$ de R-módulos izquierdos, denotamos con $\xi(\{M_\alpha\}_\Lambda)$ a la mínima teoría de torsión para la cual cada M_α es de torsión, es decir, $\xi(\{M_\alpha\}_\Lambda) = \wedge\{\tau \in R-\text{tors} | \{M_\alpha\}_\Lambda \subseteq \mathcal{T}_\tau\}$ y a ésta la llamamos la teoría de torsión generada por la familia $\{M_\alpha\}_\Lambda$.

Con $\chi(\{M_\alpha\}_\Lambda)$ denotamos al máximo elemento de R-tors para el cual cada M_α es libre de torsión, es decir, $\chi(\{M_\alpha\}_\Lambda) = \vee\{\tau \in R-\text{tors} | \{M_\alpha\}_\Lambda \subseteq \mathcal{F}_\tau\}$ y le llamamos la teoría de torsión cogenerada por la familia $\{M_\alpha\}_\Lambda$.

Con ξ y χ denotamos al elemento menor y al elemento mayor del marco R-tors.

Decimos que un R-módulo M es τ-cocrítico, si $M \in \mathcal{F}_\tau$ y todos sus submódulos distintos de cero son τ-densos. Decimos que M es cocrítico, si M es $\chi(M)$-cocrítico.

Decimos que $\tau \in R$-tors es prima, si es la teoría de torsión cogenerada por algún módulo cocrítico; τ es semiprima si es la intersección de una familia de teorías de torsión primas; τ es fuertemente semiprima si es la teoría de torsión cogenerada por todos los módulos τ-cocríticos.

De que R-tors sea un marco, se concluye la existencia de pseudocomplementos; es decir, si $\tau \in R$-tors, el pseudocomplemento de τ es un elemento de R-tors al que denotamos con $\tau^{\perp}$ que cumple con las siguientes propiedades:

i) $\tau \wedge \tau^{\perp} = \xi$

ii) Si $\sigma \in R$-tors es tal que $\tau \wedge \sigma = \xi$, entonces $\sigma \leq \tau^{\perp}$.

En este trabajo utilizamos con frecuencia la siguiente caracterización del pseudocomplemento $\tau^{\perp}$, debida a Tèbyrcè, [29].

$$\tau^{\perp} = \chi(\{{}_RS \mid S \text{ es simple y } S \in \mathcal{T}_\tau\}).$$

Dada $\tau \in R$-tors, $gen(\tau)(R) = \{\sigma \in R\text{-tors} \mid \tau \leq \sigma\}$ es la retícula de generalizaciones de τ, cuando no haya confusión sobre el anillo en el que se trabaja, usaremos solo $gen(\tau)$ por comodidad.

Para $\tau \in R$- tors, $esp(\tau)(R) = \{\sigma \in R\text{-tors} \mid \sigma \leq \tau\}$ es la retícula de especializaciones de τ.

Sea $\tau \in R$-tors, decimos que τ es una teoría de torsión TTF si la clase de módulos de τ-torsión es cerrada bajo productos directos, en este caso decimos que $\mathcal{T}_\tau$ es una clase TTF.

Es un hecho conocido que el conjunto de teorías de torsión TTF es cerrada bajo intersecciones arbitrarias. Además tenemos que χ es una teoría de torsión TTF. Por lo que podemos concluir que para cada $\tau \in R$-tors existe una mínima teoría de torsión TTF, que denotamos con $\hat{\tau}$ y es tal que $\hat{\tau} \in gen(\tau)$, de hecho, $\hat{\tau} = \wedge\{\sigma \in R\text{-tors} \mid \sigma \text{ es } TTF \text{ y } \tau \leq \sigma\}$.

Llamamos a un elemento τ de R-tors estable cuando la clase de módulos de τ-torsión es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Decimos que un ideal izquierdo I del anillo R es esencial si tenemos que $I \cap K \neq 0$ es cierta para cada ideal izquierdo $K \neq 0$ de R.

Para cada $M \in R$-mod, si $x \in M$, el anulador de x lo denotamos con $(0 : x)$. El submódulo que forman los elementos de M que tienen anulador esencial en R lo llamamos el submódulo singular de M y lo denotamos por $z(M)$, es decir, $z(M) = \{x \in M \mid (0 : x) \text{ es esencial en } R\}$. Tenemos que $z(\_)$ es un subfuntor del funtor identidad en R-mod. Si un módulo izquierdo M es tal que $z(M) = 0$, decimos que M es no singular.

Un elemento distinguido de R-tors es la teoría de torsión de Goldie, la cual denotamos con τ_g, ésta es tal que su clase libre de torsión es la clase de todos los módulos no singulares, es decir, $\mathcal{F}_{\tau_g} = \{M \in R\text{-mod} \mid M \text{ es no singular}\}$.

Sea $\psi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos, ψ induce en forma natural un funtor $\psi_* : S-\text{mod} \rightarrow R-\text{mod}$ y en consecuencia una función $\psi_\# : R-\text{tors} \rightarrow S-\text{tors}$ cuya regla de correspondencia es: Para $\sigma \in R-\text{tors}$, $\psi_\#(\sigma) = \tau$, donde τ es la teoría de torsión cuyo filtro idempotente es $\mathcal{L}_\tau = \{{}_S I \subsetneq S \mid_R I \in \mathcal{L}_\sigma\}$.

En general, no se cumple que todo S-módulo izquierdo σ-libre de torsión al ser considerado como R-módulo izquierdo sea τ-libre de torsión.

Definición 1.11 *Sean $\psi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos, $\sigma \in R$-tors y $\psi_\#(\sigma) = \tau$, decimos que σ es compatible con ψ si para cada S-módulo izquierdo N se cumple que, ${}_S N \in \mathcal{F}_\tau$ si y sólo si ${}_R N \in \mathcal{F}_\sigma$.*

Si en particular consideramos un anillo R, I un ideal bilateral de R y $\pi : R \longrightarrow R/I$ la proyección canónica, tenemos por [11, Corolario 47.8] que todo elemento de R-tors es compatible con π.

Consideremos ahora $R_1, \ldots, R_n$ anillos asociativos con uno y sea $R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ el anillo producto. Sean $\lambda_i : R_i \longrightarrow R$ y $\pi_i : R \longrightarrow R_i$, las inclusiones y proyecciones naturales; tenemos los funtores $\lambda_{i_*} : R\text{-mod} \longrightarrow R_i\text{-mod}$ y $\pi_{i_*} : R_i\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod}$, así como las funciones $\lambda_{i_\#} : R_i\text{-tors} \longrightarrow R-\text{tors}$ y $\pi_{i_\#} : R\text{-tors} \longrightarrow R_i\text{-tors}$. Sea $\sigma_i \in R_i$-tors para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces $\lambda_{i_\#}(\sigma_i) = \tau_i \in R$-tors y $\mathcal{T}_{\tau_i} = \{M \in R\text{-mod} \mid_{R_i} M \in \mathcal{T}_{\sigma_i}\}$; además, $\pi_{i_\#}(\lambda_{i_\#}(\sigma_i)) = \sigma_i$ [10, página 95]. Sea $\sigma = \wedge\tau_i$, $\sigma \in R$-tors; como para cada ideal I de R, $I = I_1 \times \cdots \times I_n$, donde I_i es un ideal izquierdo de R_i para cada i, tenemos que $\mathcal{L}_\sigma = \{I = I_1 \times \cdots \times I_n \mid I_i \in \mathcal{L}_i \,\forall\, i\} = \cap\mathcal{L}_{\tau_i}$. La teoría de torsión σ es llamada también la teoría de torsión producto y se denota por $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$.

Por último, decimos que una categoría de Grothendieck C es espectral si cualquier sucesión exacta corta en C se escinde. Gabriel y Oberst prueban en [8] que dada una categoría espectral C, ésta es equivalente a la categoría (R, τ_g)-mod, donde R es un anillo regular autoinyectivo izquierdo.

Capítulo 2

Teorías de torsión espectrales

Una de las primeras aplicaciones del uso de las teorías de torsión espectrales se dió en [30], cuando se establecieron las condiciones necesarias y suficientes para que un anillo asociativo con elemento unitario tuviera la propiedad de que el anillo de cocientes respecto a una teoría de torsión fuera un anillo artiniano semisimple. También en [9], las utilizaron cuando presentaron algunas caracterizaciones de los V-anillos. En [14], se realizó un estudio en profundidad de las teorías de torsión espectrales, de hecho, es en este trabajo donde formalmente reciben este nombre.

En gran parte del resto del capítulo presentamos algunas propiedades de las teorías de torsión espectrales, los métodos para construirlas y algunas características de los anillos de cocientes con respecto a ellas.

que aparecen en [14]. Esto lo hacemos, por un lado, con el objeto de hacer este documento autocontenido y por el otro, para ilustrar que una teoría de torsión espectral tiene la propiedad de que el radical de torsión asociado, tiene un comportamiento análogo al del funtor singular el cual juega un papel importante en la teoría de torsión de Goldie, cuyas propiedades, así como lo establecido en el artículo [14], motivaron la realización de este trabajo.

Algunas definiciones y resultados son tomados directamente de las referencias, por lo que en su encabezado aparece el número respectivo entre paréntesis.

Definición 2.1 (14) *Sea $\tau \in R-tors$. Decimos que τ es espectral si $(R,\tau)-mod$ es una categoría espectral.*

Lema 2.2 (14) *Sea $\tau \in R$-tors espectral, entonces el funtor localización $q : R\text{-}mod \longrightarrow (R,\tau)\text{-}mod$ es exacto.*

Las teorías de torsión espectrales quedan caracterizadas en la siguiente proposición

Proposición 2.3 *Sean $M \in R$-mod y $\tau \in R$-tors. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) τ es espectral.

ii) Si M es τ- inyectivo y τ- libre de torsión, entonces M es inyectivo.

iii) Si M es τ-libre de torsión y N es un submódulo de M, entonces N es τ-denso en M si y solo sí N es esencial en M.

iv) Si M es τ-inyectivo y τ-libre de torsión y N es un submódulo de M, entonces N es τ-puro en M si y solo sí N es sumando directo de M.

Demostración: i) $\Rightarrow$ ii) Sea M un R-módulo izquierdo τ-inyectivo y τ-libre de torsión. Sea $c : M \longrightarrow E(M)$ el morfismo inclusión en R-mod, y q : R-mod $\longrightarrow$ R_τ-mod el funtor localización, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad c \quad} & E(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M = M_\tau & \xrightarrow[q(c)]{} & E(M)_\tau = E(M) \end{array}$$

donde $q(c) = c$. En (R,τ)-mod, $q(c)$ se escinde y como es un monomorfismo esencial, obtenemos que $Im\, q(c) = E(M)$. Así $M = M_\tau = E(M)$ y M es un objeto inyectivo en (R,τ)-mod.

ii) $\Rightarrow$ i) Basta observar que cualquier sucesión exacta corta en (R,τ)-mod se escinde, ya que consiste de R-módulos τ-inyectivos y τ-libres de torsión que por hipótesis son inyectivos. Obtenemos así que τ es espectral.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea M un módulo τ-libre de torsión y N un submódulo de M. Supongamos que N es τ-denso en M. Si $0 \neq K \subseteq M$ es tal que $N \cap K = 0$, tenemos que $K \cong K/(N \cap K) \cong (K+N)/N \subseteq M/N$, por lo que $K \in T_\tau \cap F_\tau = 0$, lo cual es una contradicción, de donde $N \cap K \neq 0$ y N es esencial en M.

Supongamos ahora que N es esencial en M, para ver que N es τ-denso en M probaremos que $(M/N)_\tau = 0$. Sabemos por el Lema 2.2 que q es un funtor exacto. Si aplicamos el funtor q a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

obtenemos en (R, τ)-mod a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N_\tau \longrightarrow M\tau \longrightarrow (M/N)_\tau \longrightarrow 0$$

Por ii), esta última sucesión se escinde, por lo tanto N_τ es sumando directo de M_τ. Esto contradice el hecho de que N es un submódulo esencial de M_τ a menos que $N_\tau \cong M_\tau$ lo cual implica que $(M/N)_\tau = 0$.

iii) $\Rightarrow$ ii) Sea M un módulo τ-inyectivo y τ-libre de torsión y $E(M)$ su cápsula inyectiva, como M es esencial en $E(M)$ que es un módulo τ- libre de torsión, de iii) obtenemos que $E(M)/M$ es un módulo de τ-torsión; tenemos la sucesión exacta $0 \longrightarrow M \longrightarrow E(M) \longrightarrow E(M)/M \longrightarrow 0$, aplicando el funtor localización q a ésta, obtenemos la sucesión exacta $0 \longrightarrow M \longrightarrow E(M) \longrightarrow 0$, que nos dice que $M \cong E(M)$ y M resulta inyectivo que es lo que se quería probar.

ii) $\Leftrightarrow$iii) $\Rightarrow$ iv) Sean M un módulo τ- inyectivo y τ-libre de torsión y N un submódulo τ-puro de M. Por ii), M es inyectivo por lo que $E(N) \subseteq M$, así $E(N)/N \subseteq M/N$ que es τ-libre de torsión, lo cual nos dice que N es τ-puro en $E(N)$. Por otro lado, N es esencial en su cápsula inyectiva y por iii) $E(N)/N$ es de τ-torsión. De esta manera $E(N)/N = 0$, por lo que $N = E(N)$ y por lo tanto N es sumando directo de M.

Si N es un sumando directo de M, digamos $M = N \bigoplus N_1$, tenemos que $M/N \cong N_1$ es un módulo τ-libre de torsión, con lo que obtenemos que N es τ-puro en M.

iv) $\Rightarrow$ i) Sea $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ una sucesión exacta corta en (R,τ)-mod. De esta manera, $M/M_1 \cong M_2 \in \mathcal{F}_\tau$ y M_1 es τ-puro en M. Por iv) M_1 es sumando directo de M por lo que la sucesión se escinde, de donde (R,τ)-mod es una categoría espectral.

Lema 2.4 (14) *Sean $\tau \in R$-tors espectral, $E \in R$-mod $\tau-$inyectivo y τ-libre de torsión y $M \in R-$mod τ-libre de torsión. Si $f : E \to M$ es un R-epimorfismo, entonces M es inyectivo.*

En [14], se presentó como dada una teoría de torsión τ cualquiera, pueden construirse dos teorías de torsión espectrales a las que nosotros denotamos con τ^{τ_g} y τ_{τ_g}, tales que: $\tau \leq \tau^{\tau_g}$ y $\tau \leq \tau_{\tau_g}$. Entre sus resultados, establece que $\tau^{\tau_g} = \tau \vee \tau_g$ y que si $\tau \in \text{gen}(\tau_g)$, entonces $\tau^{\tau_g} = \tau_{\tau_g}$, de otra forma, éstas son diferentes.

Para esto, el define dos preradicales y considera las teorías de torsión asociadas a los radicales correspondientes.

Debido a la utilización que daremos a algunos de los resultados de [14], damos un esbozo de la construcción de τ_{τ_g}. Las demostraciones pueden consultarse en este trabajo directamente.

Definición 2.5 (14) *Sean $\tau \in R$-tors y $M \in R$-mod. Un submódulo L de M es llamado τ-esencial en M, si para cualquier submódulo N de M tal que $L \cap N$ es de τ-torsión, tenemos que N es de τ-torsión.*

Así, el concepto de ser τ-esencial coincide con el de ser esencial cuando la teoría de torsión $\tau = \xi$, el elemento mínimo de la retícula R-tors, y cuando $\tau = \chi$ todos los módulos resultan ser χ-esenciales. En [14] se caracterizó a los submódulos τ-esenciales en la proposición siguiente.

Proposición 2.6 (14) *Sean $\tau \in R$-tors, $M \in R$-mod, L un submódulo de M, $L^{p(\tau)}$ la τ-purificación de N en M y M_τ el módulo de cocientes de M con respecto a τ. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

i) L *es* τ-*esencial en* M.

ii) $L^{p(\tau)}$ *es* τ-*esencial en* M.

iii) $L^{p(\tau)}$ *es un elemento esencial en* $Sat_\tau(M)$.

iv) $(L + t_\tau(M))/t_\tau(M)$ *es esencial en* $M/t_\tau(M)$.

v) $L^{p(\tau)}/t_\tau(M)$ *es esencial en* $M/t_\tau(M)$.

vi) L_τ *es un subobjeto esencial de* M_τ *en* (R,τ)-*mod.*

Corolario 2.7 (14) *Sea L un submódulo de M con la propiedad de que $t_\tau(M) \subseteq L$. Entonces son válidas las afirmaciones siguientes:*

i) L *es* τ-*esencial en* M *si y sólo si* $L/t_\tau(M)$ *es esencial en* $M/t_\tau(M)$.

ii) Si L *es* τ-*esencial en* M, *entonces* L *es esencial en* M.

Observación 2.8 *El recíproco del Corolario 2.7 ii), no es cierto en general.*

Por ejemplo, consideremos A el anillo producto de $\aleph_0$ copias del anillo de los enteros módulo 2, es decir, $A = \mathbb{Z}_2{}^{\aleph_0}$ y sea R el subanillo de A generado por la suma directa de $\aleph_0$ copias de $\mathbb{Z}_2$ y el elemento unitario de A, es decir $R = < \mathbb{Z}_2{}^{(\aleph_0)}, 1_{\mathbb{Z}_2{}^{\aleph_0}} >$.

Consideremos la teoría de torsión de Goldman en R, la teoría generada por los módulos simples proyectivos, denotada con τ_{sp} y cuya clase de módulos de torsión consiste de los módulos semisimples proyectivos. Esta teoría de torsión ha sido estudiada extensivamente, para mayores referencias veáse [18], [19] y [2].

En el anillo R tenemos que $t_{\tau_{sp}}(R) = \mathbb{Z}_2{}^{(\aleph_0)}$ es un submódulo esencial de R que no es τ_{sp}-esencial en R. En efecto, $t_{\tau_{sp}}(R) \cap R \in T_{\tau_{sp}}$ pero $R \notin T_{\tau_{sp}}$, de aquí que $t_{\tau_{sp}}(R)$ no es τ_{sp}-esencial en R.

Sea $M \in R$-mod, denotemos con $Ess_\tau(M) = \{N \subseteq M \mid N$ es τ-esencial en $M\}$, y con $Ess(M) = \{N \subseteq M \mid N$ es esencial en $M\}$.

Observación 2.9 (14) *Son válidas para $M \in R$-mod las afirmaciones siguientes:*

i) $\mathcal{L}_\tau(M) \subseteq Ess_\tau(M)$.

ii) Si $M \in F_\tau$, *entonces* $Ess_\tau(M) = Ess(M)$.

La siguiente proposición establece que el conjunto de ideales izquierdos τ-esenciales constituyen una topología lineal del anillo R. Posteriormente, veremos que el filtro de Gabriel asociado a esta topología, corresponde al filtro asociado a una teoría de torsión hereditaria espectral.

Proposición 2.10 (14) *Sean $\tau \in R$-tors y $M \in R$-mod.*

i) Para K y L submódulos de M, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. *Si $K \subseteq L$ y $K \in Ess_\tau(M)$, entonces $L \in Ess_\tau(M)$.*
2. *Si $K \in Ess_\tau(L)$ y $L \in Ess_\tau de(M)$, entonces $K \in Ess_\tau(M)$.*
3. *Si $K \in Ess_\tau(M)$ y $L \in Ess_\tau(M)$, entonces $K \cap L \in Ess_\tau(M)$.*

ii) Si $f \in Hom(M, N)$ y $L \in Ess_\tau(N)$, entonces $f^{-1} \in Ess_\tau(M)$.

Denotamos con z_τ al preradical asociado a la topología inducida por Ess_τ. Para cada $M \in R$-mod, $z_\tau(M) = \{x \in M \mid (0 : x) \in Ess_\tau\}$. Con $\bar{z}_\tau$, denotamos al radical asociado al preradical z_τ y con τ_{r_0} a la teoría de torsión asociada a este radical.

Dado cualquier preradical r sobre R-mod, podemos definir un nuevo preradical $r : r$ sobre R-mod de la siguiente manera: Para cada $M \in R$-mod, $(r : r)(M)$ es tal que $(r : r)(M)/r(M) = r(M/r(M))$.

Lema 2.11 (14) *Para $M \in R$-mod se cumplen:*

i) $z_\tau(M/t_\tau(M)) = z_\tau(M)/t_\tau(M)$.

ii) $z_\tau(M) \in Ess_\tau(\bar{z}_\tau(M))$.

iii) $\bar{z}_\tau = z_\tau \quad z.$

Llamamos a una teoría de torsión τ estable, cuando la clase $\mathcal{T}_\tau$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas, en general, las teorías de torsión espectrales no son estables , sin embargo se tiene el siguiente

Lema 2.12 (14) *Si $M \in \mathcal{F}_\tau$ y es de τ_{τ_g}-torsión, entonces $E(M)$ es de τ_{τ_g}-torsión*

El teorema siguiente nos dice cuando el preradical z_τ es un radical.

Teorema 2.13 (14) *Sea $\tau \in R$-tors, son equivalentes:*

i) z_τ *es un radical.*

ii) $z_\tau(R) = t_\tau(R)$

iii) R_τ *es un anillo no singular izquierdo.*

iv) *Si $I \in Ess_\tau$ entonces, para cada $r \in R$ y cada $x \in R$ tal que $x \notin t_\tau(R)$ se tiene que $(I : r)x \not\subseteq t_\tau(R)$.*

v) τ_{τ_g} *está cogenerada por $E(R/t_\tau(R))$.*

Proposición 2.14 (14) *Si $\tau \in R$-tors, entonces τ_{τ_g} es una teoría de torsión espectral.*

Teorema 2.15 (14) *Sea $\tau \in R$-tors. Entonces, $z_\tau = t_\tau$, es decir, $\tau = \tau_{\tau_g}$ si y sólo si τ es espectral.*

El siguiente teorema establece las características importantes que tiene el anillo de cocientes asociado a una teoría de torsión espectral.

Teorema 2.16 (14) *Sea $\tau \in R$-tors, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *τ es espectral.*

ii) *R_τ es un anillo regular autoinyectivo izquierdo y si $\sigma \in R$-tors es tal que $R_\tau = R_\sigma$, entonces $\sigma \leq \tau$.*

iii) *R_τ es un anillo no singular y considerado R_τ como R-módulo izquierdo es cogenerador de τ.*

iv) *R_τ es un anillo no singular izquierdo y $\tau = \chi(E(R/t_\tau(R))$.*

En general, para $\tau \in R$-tors y M un R-módulo con ciertas características tenemos que la cápsula inyectiva de M no tiene porque satisfacer éstas; sin embargo, cuando τ es espectral tenemos que:

Lema 2.17 *Sea $\tau \in R$-tors espectral. Si M es un módulo τ-cocrítico, entonces $E(M)$ es τ-cocrítico.*

Demostración: Por [11, 14,Proposición 14.25], tenemos que si M es un módulo τ-cocrítico entonces es uniforme de donde $E(M)$ es inescindible además de ser libre de τ-torsión. Sea $0 \neq N \subseteq E(M)$, por lo anterior, N es esencial en $E(M)$ y como τ es espectral N es τ-denso en $E(M)$ que es lo que se deseaba probar.

Proposición 2.18 *Sea R un anillo e I un ideal bilateral de R, sea $\pi : R \longrightarrow R/I$, la proyección canónica. Si $\sigma \in R$-tors es espectral, entonces $\pi_{\#}(\sigma) = \tau$ es espectral en R/I-tors.*

Demostración: Para ver que τ es espectral utilizamos la Proposición 2.3 iii). Sea $M \in R/I$-mod tal que $M \in \mathcal{F}_\tau$, siempre $\mathcal{L}_\tau(M) \subseteq Ess(M)$, de la Observación 2.9 ii), tenemos que $Ess(M) = Ess_\tau(M)$, resta ver que $Ess(M) \subseteq \mathcal{L}_\tau(M)$. De [14, Proposición 47.8] tenemos que σ es compatible con π, la conclusión se sigue entonces de que cualquier R/I-submódulo esencial de M al ser considerado como R-módulo, también es esencial.

Teorema 2.19 *Sea R un anillo igual al producto directo de un número finito de los anillos R_i, $i = i, \dots, n$; sean $\sigma_i \in R_i$-tors, $\tau_i = \lambda_{i_\#}(\sigma_i)$ y $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n = \wedge\tau_i = \sigma \in R$-tors. Si σ_i es espectral para toda $i = 1, \dots, n$, entonces σ es espectral.*

Demostración: Observamos lo siguiente:
a) las categorías R_1-mod $\times \cdots \times R_n-$mod y $R-$mod son equivalentes y para cada $M \in R$-mod, existen $M_i \in R_i$-mod $i = 1, \dots, n$, tales que $M \cong M_1 \times \cdots \times M_n$;
b) si M_i es σ_i-inyectivo y σ_i-libre de torsión para toda $i = 1, \dots, n$, entonces la sucesión
$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(R_i/I_i, M_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R_i, M_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I_i, M_i) \longrightarrow 0$ es exacta ya que σ_i es espectral para toda i:

d) tenemos el siguiente diagrama con renglones exactos ya que los módulos son homológicamente independientes.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Hom}(R/I, M) & \to & \mathrm{Hom}(R, M) & \to & \mathrm{Hom}(I, M) & & \\ & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\ 0 & \to & \prod \mathrm{Hom}(R_i/I_i, M_i) & \to & \prod \mathrm{Hom}(R_i, M_i) & \to & \prod \mathrm{Hom}(I_i, M_i) & \to & 0 \end{array}$$

Es importante observar que en el caso que previamente presentamos consideramos la intersección de un número finito de ciertas teorías de torsión espectrales en R, de hecho, la intersección de las teorías de torsión inducidas por otras en los factores del anillo, la cual resultó ser espectral.

En general, la intersección de cualesquiera dos teorías de torsión espectrales sobre un anillo no tiene por que ser espectral, como lo muestra el siguiente:

Ejemplo 2.20 *Sea A el anillo producto de $\aleph_0$ copias del anillo de los enteros módulo 2, es decir, $A = \mathbb{Z}_2^{\aleph_0}$ y sea $R = \langle \mathbb{Z}_2^{(\aleph_0)}, 1_A \rangle$. En el anillo R, τ_g y τ_{sp} son espectrales y $\tau_g \wedge \tau_{sp} = \xi$ no es una teoría de torsión espectral.*

En cualquier anillo, cada módulo τ_g-inyectivo es inyectivo, de donde (R, τ_g)-mod es una categoría espectral. Además, en R la teoría de torsión τ_{sp} es espectral también, ya que el anillo de cocientes $R_{\tau_{sp}}$ es isomorfo al campo $\mathbb{Z}_2$.

En R tenemos que $\tau_g \wedge \tau_{sp} = \xi$ y ξ no es espectral, pues todos los módulos son ξ-inyectivos pero no todos son inyectivos.

Finalmente, observamos que si A y B son dos anillos Morita equivalentes, entonces las teorías de torsión correspondientes a teorías de torsión espectrales en cualquiera de los dos anillos resultan ser también espectrales, esto es debido a que las categorías cociente son equivalentes.

Capítulo 3

La estructura de la retícula $gen(\tau)$ y sus relaciones con la estructura del anillo $R_{\mathcal{T}}$

En este capítulo probamos que para $\tau \in R$-tors espectral, las retículas $gen(\tau)(R)$, $gen(\bar{\tau})(R/t_{\tau}(R))$ y $gen(\tau_g)(R_{\tau})$ son isomorfas, además de ser retículas de Boole completas. Por otro lado, damos algunas aplicaciones de estos resultados para obtener propiedades adicionales de estructura del anillo de cocientes R_{τ} imponiendo ciertas condiciones sobre τ.

Una de las primeras preguntas que surgen es la de determinar si las teorías de torsión espectrales constituyen una subretícula de R-tors, a esta pregunta se le responde en forma negativa, pues en general, no es cierto que la intersección de dos teorías de torsión espectrales sea una teoría de torsión espectral. Sin embargo, la unión de dos espectrales es siempre espectral como se puede ver en una forma sencilla.

Proposición 3.1 *Si $\tau \in R$-tors es espectral, entonces cada elemento de $gen(\tau)(R)$ es espectral.*

Demostración: Se sigue del hecho que si $\sigma \in gen(\tau)(R)$, entonces (R,σ)-mod es una subcategoría de (R,τ)-mod.

Proposición 3.2 *Sea $\{\tau_i\}_I$ una familia de elementos de R-tors tal que τ_i es espectral para cada $i \in I$, entonces $\vee\tau_i$ es espectral.*

*Demostración:*Se sigue del hecho de que $\tau_i \leq \vee\tau_i$ y de la Proposición 3.1.

Sabemos que la teoría de torsión de Goldie, τ_g, es un ejemplo importante de una teoría de torsión espectral para la cual se tiene que la retícula $gen(\tau_g)$ es una retícula de Boole completa, además de que coincide en los anillos R, $R/t_{\tau_g}(R)$ y $Q_{max}(R/t_{\tau_g}(R)$ [27]. Es entonces natural generalizar estos resultados para cualquier teoría de torsión espectral.

Veremos primero que la retícula $gen(\tau)$ coincide para los anillos R y $R/t_\tau(R)$.

Consideremos ahora para un anillo R y $\tau \in R$-tors, el anillo cociente $\bar{R} = R/t_\tau(R)$ y la teoría de torsión hereditaria $\bar{\tau} \in \bar{R}$-tors, cuya clase de módulos de $\bar{\tau}$-torsión son los $\bar{R}$-módulos M, que al ser considerados como R-módulos son de τ-torsión.

Proposición 3.3 *Existe una correspondencia biyectiva entre las clases* $\mathcal{F}_\tau$ *y* $\mathcal{F}_{\bar{\tau}}$.

Demostración: Sea M un R-módulo τ-libre de torsión, como $t_\tau(R)M = 0$, M es un $\bar{R}$-módulo en forma natural. Supongamos que M no es $\bar{\tau}$-libre de torsión, de esta forma, $t_{\bar{\tau}}(M) \neq 0$ y pertenece a $\mathcal{T}_{\bar{\tau}}$, por lo que es un subobjeto de M de τ-torsión, como por hipotésis M es τ-libre de torsión, tenemos que $t_\tau(M) = 0$; así M es $\bar{\tau}$-libre de torsión. Ahora, sea M un $\bar{R}$-módulo $\bar{\tau}$-libre de torsión, si considerado como módulo sobre R el submódulo de τ-torsión fuera distinto de cero, tendríamos que $t_{\bar{\tau}}(M) \neq 0$, que es una contradicción, por lo que $M \in \mathcal{F}_\tau$.

De [28] tenemos el siguente resultado:

Lema 3.4 (28) *Sean I un ideal bilateral de R y M un R-módulo para el cual $IM = 0$, entonces* $E_{R/I}(M)=\{x \in E_R(M) : Ix = 0\}$.

Proposición 3.5 *Existe una correspondencia biyectiva entre los R-módulos inyectivos τ-libres de torsión y los $\bar{R}$-módulos inyectivos $\bar{\tau}$-libres de torsión.*

Demostración: Sea Q un R-módulo inyectivo libre de τ-torsión, por la **Proposición 3.3** Q es un $\bar{R}$-módulo $\bar{\tau}$-libre de torsión, nos resta ver que es $\bar{R}$-inyectivo. Por la Proposición 3.4, siendo $t_\tau(R)$ un ideal bilateral y $E_R(Q) = Q \in \mathcal{F}_\tau$ por hipótesis, tenemos que $E_{R/t_\tau(R)}(Q) = \{x \in Q : t_\tau(R).x = 0\} = Q$.

Ahora, sea Q un $\bar{R}$-módulo inyectivo y τ-libre de torsión, Q considerado como R-módulo es τ-libre de torsión por lo que su cápsula inyectiva $E_R(Q) \in \mathcal{F}_\tau$, por lo ya demostrado, $E_R(Q)$ es τ-libre de torsión e inyectivo en $\bar{R}$-mod, donde la sucesión exacta corta

$$0 \to Q \to E_R(Q) \to E_R(Q)/Q \to 0$$

se escinde. Además, el morfismo que escinde esta sucesión en $\bar{R}$-mod escinde esta sucesión en R-mod, por lo que Q es un R-módulo inyectivo que es lo que se quería probar.

Proposición 3.6 *Existe un isomorfismo entre las retículas* $gen(\tau)(R) \cong gen(\bar{\tau})(\bar{R})$, *dado por,* $\chi(_R E) \mapsto \chi(_{\bar{R}} E)$.

Demostración: Sean $\sigma \in gen(\tau)(R)$ y E un cogenerador inyectivo de σ. Tenemos que $E \in \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$ pues $\tau \leq \sigma$, por las Proposiciones 3.3 y 3.5 tenemos que E es $\bar{\tau}$-libre de torsión y es $\bar{R}$-inyectivo, de donde $\bar{\tau} \leq \chi(_{\bar{R}} E)$.

Si $\chi(_R E_1) = \chi(_R E_2)$ entonces E_1 es equivalente a E_2 como $\bar{R}$-módulos y por ende como R-módulos, de donde $\chi(_R E_1) = \chi(_R E_2)$

Sea $\sigma \geq \bar{\tau}$, por lo que $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$. Si E es un cogenerador inyectivo de $\bar{\sigma}$, por las Proposiciones 3.3 y 3.5, E es un R-módulo inyectivo τ-libre de torsión. Si σ es la teoría de torsión cogenerada por E en R-tors, entonces $\sigma \geq \tau$ y claramente $\sigma \mapsto \sigma$.

Sean $\chi_1 \leq \chi_2$, las teorías de torsión cogeneradas por los R-módulos inyectivos libres de τ-torsión E_1 y E_2. Así E_2 está cogenerado por E_1 tanto en R-mod como en $\bar{R}$-mod, de donde $\chi_1 \leq \chi_2$ en $gen(\tau)$ y la correspondencia establecida preserva el orden.

Ahora veremos que también la retícula $gen(\tau)$ coincide en los anillos R y R_τ, antes tenemos el siguiente lema de [27].

Lema 3.7 (27) *Para $M \in R$-mod tal que M es τ-libre de torsión, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) M_τ es inyectivo sobre R_τ.

ii) M_τ es inyectivo sobre R.

iii) Para cada ideal izquierdo I de R y $\alpha : I \longrightarrow M$ existe un ideal J τ-denso de R y $\beta : J \longrightarrow M$ con la propiedad de que $I \subseteq J$ y $\beta/I = \alpha$.

Proposición 3.8 *Sea R un anillo y $\tau \in R$-tors espectral. Entonces la correspondencia $gen(\tau)(R) \longrightarrow gen(\tau_g)(R_\tau)$ definida por $\chi({}_RE) \mapsto \chi({}_{R_\tau}E)$ es un isomorfismo de retículas.*

Demostración: Observamos que si E es un R-módulo inyectivo τ-libre de torsión, el Lema 3.7 nos dice que E es un R_τ-módulo inyectivo. Además, E es no singular, ya que si la parte singular $z(E) \neq 0$; sea $0 \neq x \in z(E)$, por lo que el ideal $(0 : x)$ es esencial en R_τ y el módulo Rx es de τ-torsión ya que τ es espectral lo cual es una contradicción, por lo que ${}_{R_\tau}E$ es un módulo τ_g-libre de torsión. Recíprocamente, si ${}_{R_\tau}E$ es inyectivo y no singular tenemos que E es R-inyectivo y τ-libre de torsión. El resto de la prueba es análoga a la de la Proposición 3.6.

Denotemos con $B(R)$ al conjunto de idempotentes centrales de un anillo asociativo R. Es un hecho conocido que $B(R)$ es un álgebra de Boole y que cuando R es regular y autoinyectivo izquierdo, entonces $B(R)$ es un álgebra de Boole completa [16].

Teorema 3.9 (21) *Si R es un anillo regular autoinyectivo izquierdo, la correspondencia $\varphi : B(R) \to gen(\tau_g)(R)$ definida por*

$$\varphi(e) = \chi(R(1-e))$$

es un isomorfismo de retículas completas.

Conjuntando los hechos anteriores tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.10 *Sea R un anillo asociativo con uno y $\tau \in R-tors$ espectral, entonces son válidas las afirmaciones siguientes:*

i) $gen(\tau_g)(R_\tau)$ es una retícula de Boole completa.

ii) $gen(\tau)(R)$ es una retícula de Boole completa.

iii) $gen(\bar{\tau})(\bar{R})$ es una retícula de Boole completa.

Demostración: Del Teorema 2.16, tenemos que R_τ es un anillo regular y autoinyectivo izquierdo ya que τ es espectral por hipótesis. Así, el inciso i) se sigue del Teorema 3.9.

El inciso ii) es consecuencia de i) y de la Proposición 3.8.

El inciso iii) lo conluímos del inciso ii) y de la Proposición 3.6.

Los resultados siguientes nos dan información adicional acerca de algunas propiedades de la estructura del anillo de cocientes de R con respecto a τ, cuando τ es una teoría de torsión espectral.

Proposición 3.11 *Sea R un anillo y $\tau \in R$-tors espectral. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) R_τ *es un anillo inescindible.*

ii) τ *es un coátomo de* R*-tors.*

iii) R_τ *es un anillo primo.*

Demostración: i) $\Leftrightarrow$ (iii) es un hecho conocido si observamos que R_τ es un anillo regular autoinyectivo izquierdo [14, Proposición 9.6].

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Se sigue de la Proposición 3.8 y de [22, Proposición 9].

Si $(\Omega, \wedge, \vee)$ es una retícula completa con elemento mínimo ξ, un elemento $\tau \in \Omega$ se dice que es un átomo de Ω si $\xi < \tau$ y si para $\sigma \in \Omega$ tal que $\sigma < \tau$, se tiene que $\xi = \sigma$.

Decimos que Ω es una retícula atómica si para todo $\sigma \in \Omega$, existe un átomo $\tau \in \Omega$ tal que $\tau \leq \sigma$.

Corolario 3.12 *Sea R un anillo y $\tau \in R$-tors espectral. Entonces R_τ es un producto de anillos primos si y sólo si la retícula $gen(\tau)(R)$ es atómica.*

Demostración: Como τ es espectral el Teorema 2.16 nos dice que R_τ es un anillo regular autoinyectivo. Tenemos que R_τ es un producto de anillos primos si y sólo si la retícula $(\tau_g(R_\tau), \hat{\tau}_g(R_\tau))$ es atómica por [22, Teorema 9.2], lo cual es equivalente a que $gen(\tau_g)(R_\tau)$ lo sea también por [21, Teorema 7]. Pero esto último sucede si y sólo si $gen(\tau)(R)$ es una retícula atómica por la Proposición 3.8.

De [22, Observación 10] tenemos que los siguientes hechos son válidos;

i) Si R es un anillo regular y autoinyectivo izquierdo y si M es un R-módulo izquierdo, entonces M es τ_g-cocrítico si y solo sí M es simple y proyectivo.

ii)Debido a [18, Proposición 2.7] y a [22, Corolario 5], tenemos que $\tau_g(R)$ es una teoría de torsión prima si y solo sí $\tau_g(R)$ es una clase TTF y es un coátomo de R-tors; además, $\tau_g(R)$ es semiprima si y sólo si $\tau_g(R)$ es una clase TTF.

Proposición 3.13 *Sea $\tau \in R$-tors espectral. Entonces R_τ es isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial sobre un anillo con división si y sólo si τ es un coátomo de R-tors y τ es una teoría de torsión prima.*

Demostración: Si R_τ es isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial, entonces tenemos que R_τ es un anillo primo por [16, Teorema 9.12]. Además, τ es un coátomo debido al Corolario 3.12. Resta probar que τ es prima. De [22, Proposición 11], tenemos que $\tau_g(R_\tau)$ es prima. De esta manera existe un R_{τ_g}-módulo cocrítico S, con la propiedad de que $\tau_g(R_\tau) = \chi(S)$.

De las observaciones arriba mencionadas, tenemos que S es un R_τ-módulo simple y proyectivo el cuál es un sumando directo de R_τ, de donde S es τ-libre de torsión, por lo que $S \in \mathrm{Sat}_\tau(R_\tau)$. De [27, XI, Proposición 4.3] tenemos que para cada $M \in R$-mod, existe un isomorfismo de retículas entre

$$\mathrm{Sat}_\tau(M) \longrightarrow \mathrm{Sat}_\tau(M_\tau) \qquad (1)$$

dado por $L \longrightarrow L_\tau$. Por [27, XI, Corolario 4.4] obtenemos que S es un R-módulo $\tau-$inyectivo. Como S es un R_τ-módulo simple, $\mathrm{Sat}_\tau(S) =$

$\{0, S\}$. De (1), obtenemos que S es un R-módulo τ-cocrítico. De que $\tau \leq \chi(C) < \chi$ y de que τ es un coátomo, tenemos que $\tau = \chi(S)$ y por lo tanto τ es prima.

Supongamos ahora que τ es un coátomo y que es prima, así tenemos que $\tau = \chi(C)$ para algún R-módulo τ-cocrítico C. De (1) tenemos que C_τ es un R_τ-módulo simple τ-libre de torsión. Por la correspondencia entre la clase τ-libre de torsión en R-mod y la clase τ_g-libre de torsión en R_τ-mod establecida en la prueba de la Proposición 3.8, podemos concluir que C_τ es no singular y por lo tanto es proyectivo, por lo que soc(R_τ) es distinto de cero. Como τ es un coátomo, de la Proposición 3.11 tenemos que R_τ es un anillo primo. Por el Teorema 2.16 R_τ es un anillo regular autoinyectivo izquierdo. Por último, de [16, Teorema 9.12] obtenemos que R_τ es isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial, que era lo que se quería probar.

Corolario 3.14 *Sea* $\tau \in R$*-tors espectral. Entonces,* R_τ *es isomorfo a un producto directo de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales si y sólo si* τ *es una teoría de torsión semiprima.*

Demostración: De [22, Proposición 13] tenemos que R_τ es isomorfo a un producto directo de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales si y sólo si $\tau_g(R_\tau)$ es una teoría de torsión semiprima. De esta manera, por la Proposición 3.8 es suficiente probar que $\tau_g(R_\tau)$ es semiprima si y sólo si $\tau(R)$ lo es. Para esto ya observamos que un R_τ-módulo M es τ_g-cocrítico si y sólo si ${}_{R_\tau}M$ es simple y proyectivo, de esta manera con el mismo argumento de la prueba de la Proposición 3.13 vemos que esto es equivalente a que M pueda ser visto como el módulo de cocientes de un R-módulo τ-cocrítico.

Capítulo 4

Clases de módulos simples asociadas a teorías de torsión espectrales

En este capítulo R-simp denotará un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de R-módulos simples. Si $\mathcal{C} \subset R$-simp y si $M \in R$-mod, denotaremos con $soc_{\mathcal{C}}(M) = \sum\{S \subseteq M \mid S$ es isomorfo a algún elemento de $\mathcal{C}\}$. Entonces $soc_{\mathcal{C}}(\_)$ es un subfuntor del functor identidad en R-mod. Como siempre, $soc(M)$ denotará el zoclo izquierdo de M.

Recordamos que si $\tau \in R$-tors, entonces $\tau^{\perp}$, el pseudocomplemento de τ, tiene la siguiente caracterización, [29]:

$$\tau^{\perp} = \chi(\{S \mid S \in R - simp \cap \mathcal{T}_{\tau}\})$$

Lo primero que establecemos en este capítulo es que para una teoría de torsión espectral, su pseudocomplemento es la teoría de torsión generada por los módulos simples libres de torsión, esto nos permite identificar que para cierta clase de módulos simples el funtor zoclo relativo a ella es un funtor de torsión; aún más, el doble pseudocomplemento de la teoría de torsión de que partimos es la teoría de torsión cogenerada por esta clase de módulos y resulta ser espectral. También, establecemos que si consideramos una clase de módulos simples tal que la teoría cogenerada por ella es espectral, entonces el funtor zoclo relativo es un radical de torsión. Damos también condiciones necesarias y suficientes para que el funtor zoclo relativo sea un funtor exacto. Por último, utilizamos estos resultados para dar una caracterización de los anillos artinanos semisimples y para determinar las condiciones que deben prevalecer en el anillo para que la teoría generada por los simples proyectivos sea espectral.

Proposición 4.1 *Sea $\tau \in R$-tors espectral y $M \in R$-mod. Si $M \in \mathcal{T}_{\tau^\perp}$, entonces M es un módulo semisimple.*

Demostración: Es suficiente probar lo establecido para los R-módulos cíclicos de $\tau^\perp$-torsión . Sea I un ideal izquierdo de R tal que $R/I \in \mathcal{T}_{\tau^\perp}$, por lo que $R/I \in \mathcal{F}_\tau$.

Supongamos que J/I es un submódulo esencial de R/I. Como τ es espectral y $R/I \in \mathcal{F}_\tau$, por la Proposición 2.3 tenemos que $R/J \in \mathcal{T}_\tau$. Tenemos que $R/J \in \mathcal{T}_{\tau^\perp}$ ya que es una imagen homomorfa de R/I. Concluímos entonces que $R/J = 0$; esto implica que $J/I = R/I$. De esta manera R/I no tiene submódulos esenciales propios y por lo tanto R/I es semisimple.

Teorema 4.2 *Sea $\tau \in R$-tors espectral y $\mathcal{C} = R$-simp $\cap \mathcal{F}_\tau$. Entonces $\tau^\perp = \xi(\mathcal{C})$ y $t_{\tau^\perp}(\_) = soc_\mathcal{C}(\_)$.*

Demostración: Observemos que para cualquier $S \in R$-simp, tendremos que $S \in \mathcal{T}_{\tau^\perp}$, si y sólo si, $S \in \mathcal{C}$; lo cual implica que $\xi(\mathcal{C}) \leq \tau^\perp$.

Por otro lado, de la Proposition 4.1 y ya que τ es espectral, tenemos que $\tau^\perp \leq \xi(\mathcal{C})$. Finalmente, ya que los R-módulos de $\tau^\perp$-torsion son semisimples, podemos concluir que $t_{\tau^\perp}(M) = soc_\mathcal{C}(M)$ para cualquier $M \in R$-mod.

Denotemos con $\mathcal{P} = \{S \in R\text{-simp} \mid S \text{ es proyectivo}\}$. Como τ_g es una teoría de torsión espectral, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.3 $\tau_g^\perp = \xi(\mathcal{P})$ *y* $t_{\tau_g^\perp}(\_) = soc_\mathcal{P}(\_)$.

Observación 4.4 *El Teorema 4.2 nos muestra que, si $\tau \in R$-tors es espectral y $\mathcal{C} = R$-simp $\cap \mathcal{F}_\tau$, entonces $soc_\mathcal{C}(\_)$ es un funtor de torsión. En general, si $\mathcal{C}$ es cualquier subconjunto de R-simp, $soc_\mathcal{C}(_)$no es un funtor de torsión. En $\mathbb{Z}$, el anillo de los enteros podemos encontrar infinidad de ejemplos.*

Los siguientes resultados muestran algunas relaciones entre los conjuntos $\mathcal{C} \subset R$-simp para los cuales $soc_\mathcal{C}(\_)$ es un funtor de torsión y las teorías de torsión espectrales.

Proposición 4.5 *Sea $\mathcal{C} \subset R$-simp, $\mathcal{C} \neq \emptyset$ tal que $soc_\mathcal{C}(\_)$ es un funtor de torsión. Si $\mathcal{C}'$ es no vacío y $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ entonces $soc_{\mathcal{C}'}(\_)$ es un funtor de torsión.*

Demostración: Sea $M \in R$-mod, como $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, tenemos que $soc_{\mathcal{C}'}(M) \subset soc_{\mathcal{C}}(M)$. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow soc_{\mathcal{C}}(M)/soc_{\mathcal{C}'}(M) \longrightarrow M/soc_{\mathcal{C}'}(M) \longrightarrow M/soc_{\mathcal{C}}(M) \longrightarrow 0$$

aplicándole el funtor $soc_{\mathcal{C}'}(\_)$, obtenemos la sucesión exacta siguiente

$$0 \longrightarrow soc_{\mathcal{C}'}(soc_{\mathcal{C}}(M)/soc_{\mathcal{C}'}(M)) \longrightarrow soc_{\mathcal{C}'}(M/soc_{\mathcal{C}'}(M)) \longrightarrow soc_{\mathcal{C}'}(M/soc_{\mathcal{C}}(M))$$

cuyos extremos son iguales a cero, lo cual nos da que $soc_{\mathcal{C}'}(\_)$ es radical.

Teorema 4.6 *Si $\tau \in R$-tors es espectral, $\bar{R} = R/t_\tau(R)$ y $\mathcal{C} = R$-simp $\cap \mathcal{F}_\tau$, entonces cada $S \in \mathcal{C}$ es un $\bar{R}$-módulo proyectivo.*

Demostración: Sea $S \in \mathcal{C}$, S es en forma natural un $\bar{R}$-módulo. Sea $0 \longrightarrow K \longrightarrow \bar{R} \longrightarrow S \longrightarrow 0$ una presentación para S. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \bar{R} & \longrightarrow & S & \longrightarrow & 0 & \qquad & (1) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & K_\tau & \longrightarrow & R_\tau & \longrightarrow & S_\tau & \longrightarrow & 0 & \qquad & (2) \end{array}$$

Debido a que los módulos en la sucesión (1) son τ-libres de torsión, las flechas verticales son inclusiones naturales. Como τ es espectral, del Lema 2.2 tenemos que la sucesión (2) es exacta y se escinde. Sea $q: S_\tau \longrightarrow R_\tau$ el morfismo obtenido de la escisión. Tenemos que $i(S) = S$, $0 \neq q \cdot i(S)$, además como $\bar{R}$ es esencial en R_τ, obtenemos que $0 \neq (q \cdot i(S) \cap \bar{R}) \subseteq R_\tau$.

Tenemos también que S es simple y que $0 \neq q \cdot i(S) \cong S$, por lo que $q \cdot i(S) \cap \bar{R} \cong S$; de donde $q|_S: S \longrightarrow \bar{R}$ es un morfismo que escinde la sucesión (1) de lo cual resulta que S es un $\bar{R}$-módulo proyectivo.

Teorema 4.7 *Sean $\emptyset \neq \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C} \subseteq R$-simp tal que $soc_{\mathcal{C}}(\_)$ es un funtor de torsión y sea $\tau_{\mathcal{C}}$ la teoría de torsión asociada a este funtor. Si la teoría de torsión $\chi(\mathcal{C})$ es espectral, entonces la correspondencia $[\xi, \tau_{\mathcal{C}}] \to [\chi(\mathcal{C}), \chi]$ definida por $\tau_{\mathcal{C}'} \mapsto \chi(\mathcal{C}')$ es un antiisomorfismo de retículas.*

Demostración: Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ dos subconjuntos de $\mathcal{C} \subseteq R$-simp. Consideremos las teorías de torsión cogeneradas por ellos, $\chi(\mathcal{C}_1)$ y $\chi(\mathcal{C}_2)$, llamemos τ_i a la teoría de torsión asociada al funtor de torsión $soc_{\mathcal{C}_i}(\_)$, para $i = 1, 2$. Si $\tau_1 \leq \tau_2$ entonces $soc_{\mathcal{C}_1}(\_) \subseteq soc_{\mathcal{C}_2}(\_)$ y $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$, de aquíque $\mathcal{F}_{\chi(\mathcal{C}_2)} \subseteq \mathcal{F}_{\chi(\mathcal{C}_1)}$, por lo cual $\chi(\mathcal{C}_1) \geq \chi(\mathcal{C}_2)$, es decir, la asignación invierte el orden.

Sean τ_1, τ_2 dos teorías de torsión en $[\xi, \tau_{\mathcal{C}}]$ y sean $soc_{\mathcal{C}_1}(\_)$ y $soc_{\mathcal{C}_2}(\_)$ los funtores de torsión asociados a ellas. Supongamos que $\chi(\mathcal{C}_1) = \chi(\mathcal{C}_2)$, entonces $\mathcal{C}_1 = R$-simp $\cap \mathcal{F}_{\chi(\mathcal{C}_1)} = R$-simp $\cap \mathcal{F}_{\chi(\mathcal{C}_2)} = \mathcal{C}_2$, de donde $soc_{\mathcal{C}_1}(\_) = soc_{\mathcal{C}_2}(\_)$ por lo tanto $\tau_1 = \tau_2$, por lo que la asignación es inyectiva.

Resta ver que es sobre, si $\sigma \geq \chi(\mathcal{C})$, sea $\mathcal{C}_\sigma = R$-simp $\cap \mathcal{F}_\sigma$, tenemos que $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_{\chi(\mathcal{C})}$ y R-simp $\cap \mathcal{F}_\sigma \subseteq R$-simp $\cap \mathcal{F}_{\chi(\mathcal{C})}$, es decir, $\mathcal{C}_\sigma \subseteq \mathcal{C}$, por lo que $soc_{\mathcal{C}_\sigma}(\_) \subseteq soc_{\mathcal{C}}(\_)$, lo cual implica que $\tau_{\mathcal{C}_\sigma} \leq \tau_{\mathcal{C}}$.

Afirmamos que $\sigma = \chi(\mathcal{C}_\sigma)$. Puesto que $\mathcal{C}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\sigma$ tenemos que $\sigma \leq \chi(\mathcal{C}_\sigma)$.

Sea $0 \neq M \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\chi(\mathcal{C})}$, por lo tanto existe una sucesión exacta $0 \to M \xrightarrow{f} \prod_{\alpha \in I} E(S_\alpha)$, con $S_\alpha \in \mathcal{C}$. Sea $p_\alpha : \prod_{\alpha \in I} E(S_\alpha) \to E(S_\alpha)$ la proyección canónica, podemos suponer que $p_\alpha \circ f \neq 0$ para toda $\alpha \in I$. Por lo tanto para cada $\alpha \in I$, existen N_α un submódulo de M y un morfismo $g_\alpha : N_\alpha \to S_\alpha$, $g_\alpha \neq 0$. Tenemos que g_α es sobre, de donde la sucesión exacta $N_\alpha \to S_\alpha \to 0$ es una sucesión exacta en $R/t_{\chi(\mathcal{C})}(R)$-

mod. Como $\chi(\mathcal{C})$ es espectral, del Teorema 4.6, esta sucesión se escinde y S_α es sumando directo de N_α, por lo cual $S_\alpha \in \mathcal{F}_\sigma$ para toda $\alpha \in I$. Esto nos dice que $S_\alpha \in \mathcal{C}_\sigma$, de donde $M \in \mathcal{F}_{\chi(\mathcal{C}_\sigma)}$. Hemos probado que $\sigma = \chi(\mathcal{C}_\sigma)$, con lo que concluímos la demostración del Teorema.

Proposición 4.8 *Sea $\tau \in R$-tors espectral y $\mathcal{C} = R$-simp $\cap \mathcal{F}_\tau$. Si $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de R-módulos izquierdos τ- libres de torsión, entonces la sucesión $0 \longrightarrow soc_{\mathcal{C}}(N') \longrightarrow soc_{\mathcal{C}}(N) \longrightarrow soc_{\mathcal{C}}(N'') \longrightarrow 0$ es exacta.*

Demostración: Sea $\bar{R} = R/t_\tau(R)$, consideremos el funtor G: $\bar{R}$-mod $\longrightarrow \bar{R}$-mod tal que para cada $M \in \bar{R}$-mod, $G(M) = soc_{\mathcal{C}}(M)$. Por la Proposición 4.6, $\mathcal{C}$ consiste de $\bar{R}$-módulos proyectivos y por lo tanto G es un funtor de torsión exacto en $\bar{R}$-mod.

Hasta ahora hemos considerado una teoría de torsión τ espectral y la clase de módulos simples $\mathcal{C} = R$-simp $\cap \mathcal{F}_\tau$, obtuvimos que $soc_{\mathcal{C}}(\_)$ resulta funtor de torsión y de la Proposición 3.1, que esta clase $\mathcal{C}$ cogenera una teoría espectral. Deseamos saber entonces como deben ser los conjuntos $\mathcal{C} \subset R$-simp, para que las teorías de torsión cogeneradas por ellos resulten espectrales y tengan la propiedad de que $soc_{\mathcal{C}}(\_)$ sea un funtor de torsión. El siguiente teorema nos da las condiciones necesarias y suficientes para esto.

Teorema 4.9 *Sea $\emptyset \neq \mathcal{C} \subset R$-simp. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $\chi(\mathcal{C})$ *es espectral.*

ii) *1.* $soc_{\mathcal{C}}(\_)$ *es un funtor de torsión en R-mod.*

2. Si $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta en R-mod de módulos* $\chi(\mathcal{C})$*-libres de torsión, entonces la sucesión* $0 \longrightarrow soc_{\mathcal{C}}(N') \longrightarrow soc_{\mathcal{C}}(N) \longrightarrow soc_{\mathcal{C}}(N'') \longrightarrow 0$ *es exacta.*

Demostración: i) $\Rightarrow$ ii) Observamos que $\mathcal{C} = R\text{-simp} \cap \mathcal{F}_{\chi(\mathcal{C})}$, de donde la parte 1) se sigue del Teorema 4.2. La parte 2) se sigue de la Proposición 4.8.

ii) $\Rightarrow$ i) Sea $0 \neq M \in \mathcal{F}_{\chi(\mathcal{C})}$. Afirmamos que $soc_{\mathcal{C}}(M)$ es un submódulo $\chi(\mathcal{C})$-denso de M. Supongamos $M/soc_{\mathcal{C}}(M) \notin \mathcal{T}_{\chi(\mathcal{C})}$; entonces existe $S \in \mathcal{C}$ y un morfismo distinto de cero $f: M/soc_{\mathcal{C}}(M) \longrightarrow E(S)$, por lo tanto existe un submódulo N de M distinto de cero, tal que $soc_{\mathcal{C}}(M)$ es un submódulo propio de N y un morfismo distinto de cero $f_1: N/soc_{\mathcal{C}}(M) \longrightarrow S$.

Sea $K/soc_{\mathcal{C}}(M)$ el núcleo de f_1. Tenemos la sucesión exacta $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} N \longrightarrow S \longrightarrow 0$, donde i es la inclusión.

Observamos que N y S son módulos $\chi(\mathcal{C})$-libres de torsión, de 2) tenemos que la sucesión $0 \longrightarrow soc_{\mathcal{C}}(K) \xrightarrow{i} soc_{\mathcal{C}}(N) \longrightarrow S \longrightarrow 0$ es exacta. Pero $soc_{\mathcal{C}}(K) = soc_{\mathcal{C}}(N) = soc_{\mathcal{C}}(M)$, lo cual es una contradicción; por lo que la afirmación ha sido probada.

Siempre los submódulos $\chi(\mathcal{C})$-densos de los módulos $\chi(\mathcal{C})$-libres de torsión son esenciales. Resta probar que los submódulos esenciales de los módulos $\chi(\mathcal{C})$-libres de torsión son $\chi(\mathcal{C})$-densos. Sea $M \in \mathcal{F}_{\chi(\mathcal{C})}$ y N un submódulo esencial de M. Entonces, $soc(M) \subseteq N$. Hemos supuesto que $M \in \mathcal{F}_{\chi(\mathcal{C})}$, por lo que $soc(M) = soc_{\mathcal{C}}(M)$, por lo tanto $soc_{\mathcal{C}}(M) \subseteq N$, lo que nos dice que N es un submódulo $\chi(\mathcal{C})$-denso de M.

En el siguiente teorema damos una caracterización de los anillos semiartinianos utilizando a las teorías de torsión espectrales.

Teorema 4.10 *Sea $\tau \in R$-tors espectral, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) R es un anillo semiartiniano izquierdo.

ii) $\xi(R - simp \cap \mathcal{T}_\tau) = \tau = \chi(R - simp \cap \mathcal{F}_\tau)$.

Demostración: i) $\Rightarrow$ ii) Si R es un anillo semiartiniano izquierdo, entonces cada $\tau \in R$-tors satisface la condición ii) por [10, III, Proposición 12.10].

ii) $\Rightarrow$ i) Sea $0 \neq M \in R$-mod. Probaremos que $soc(M) \neq 0$. Observamos que para que esto suceda es suficiente que $t_\tau(M) \neq 0$. Supongamos que $M \in \mathcal{F}_\tau$, así existe $S \in R$-simp $\cap \mathcal{F}_\tau$ y un morfismo distinto de cero $f: M \to E(S)$. Ahora, $Imf \cap S \neq 0$ de donde $Imf = S$. Sea $N = f^{-1}(S)$, tenemos que $N \neq 0$. Sea $f_1 = f/_N$, entonces $0 \neq f_1 : N \to S$. Como $N \in \mathcal{F}_\tau$, entonces $f_1 \in Hom_{R/t_\tau(R)}(N, S)$, ya que τ es espectral, de la Proposición 4.6 tenemos que S es un $R/t_\tau(R)$-módulo proyectivo, por lo que existe un $R/t_\tau(R)$-morfismo distinto de cero $g: S \to N$. Claramente $g \in Hom_R(S, N)$, de donde $soc(N) \neq 0$ y por lo tanto $soc(M) \neq 0$.

Una consecuencia inmediata de lo anterior es el siguiente resultado:

Corolario 4.11 *Sea R un anillo, entonces R es un semiartiniano izquierdo si y sólo si $\tau_g = \xi$ (módulos simples singulares) $= \chi$ (módulos simples proyectivos).*

Los anillos artinianos semisimples son caracterizados en términos de teorías de torsión espectrales mediante el Teorema 4.6 como sigue

Corolario 4.12 *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) Cada $\tau \in R$-tors es espectral.

ii) ξ es espectral.

iii) R es un anillo artiniano semisimple.

En el resultado siguiente damos condiciones necesarias y suficientes sobre la teoría de torsión τ y la clase $\mathcal{C}$, para que el funtor $soc_{\mathcal{C}}(\_)$ sea exacto.

Teorema 4.13 *Sea $\tau \in R$-tors espectral y $\mathcal{C} = R$-simp $\cap \mathcal{F}_\tau$. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

i) El funtor de torsión $soc_{\mathcal{C}}(\_)$ es exacto.

ii) La clase $\mathcal{C}$ consiste de módulos proyectivos.

iii) $\tau^{\perp\perp} \geq \tau_g$.

Demostración: Probaremos primero i) $\Rightarrow$ ii). Sea $S \in \mathcal{C}$ y $0 \to J \to R \xrightarrow{\Pi} S \to 0$ una presentación para S. Por el inciso (i) la sucesión $0 \to soc_{\mathcal{C}}(J) \to soc_{\mathcal{C}}(R) \xrightarrow{\Pi} S \to 0$ es exacta. Ya que $soc_{\mathcal{C}}(R)$ es un módulo semisimple la sucesión se escinde. Por lo que existe un morfismo distinto de cero $i: S \to soc_{\mathcal{C}}(R)$ tal que $\Pi \circ i = 1_S$. Como

$\tilde{\Pi}$ es la restricción de Π a $soc_{\mathcal{C}}(R)$, tenemos que la sucesión original se escinde por lo que S es un R-módulo proyectivo.

Para probar ii) $\Leftrightarrow$ iii) observamos que $\tau^{\perp\perp} = \chi(\mathcal{C})$, lo cual nos da que $\tau^{\perp\perp} \geq \tau_g$ si y sólo si la clase $\mathcal{C}$ consiste de módulos proyectivos.

ii) $\Rightarrow$ i). Del Teorema 4.2 tenemos que $t_{\tau^\perp}(\_) = soc_{\mathcal{C}}(\_)$. El inciso ii) implica que $\mathcal{F}_{\tau^\perp}$ es una clase cerrada bajo cocientes. Por [10, I, Proposición 5.5], tenemos que $soc_{\mathcal{C}}(\_)$ es un funtor de torsión exacto.

Consideremos τ_{sp} la teoría de torsión de Goldman cuya clase de torsión consiste de los módulos semisimples proyectivos. τ_{sp} ha sido estudiada extensivamente, para mayores referencias, veáse [18], [19] y [2]. Esta teoría de torsión no siempre resulta ser espectral, en los siguientes resultados damos condiciones necesarias y suficientes para que lo sea; antes, dos lemas técnicos.

Lema 4.14 *Sea $\tau \in R$-tors espectral. Entonces $\tau^\perp \vee \tau^{\perp\perp} = \chi$.*

Demostración: Supongamos que $\tau^\perp \vee \tau^{\perp\perp} < \chi$. Sea $M \in R$-mod tal que $0 \neq M \in \mathcal{F}_{\tau^\perp \vee \tau^{\perp\perp}}$, de donde $M \in \mathcal{F}_{\tau^\perp}$ y $M \in \mathcal{F}_{\tau^{\perp\perp}}$. Sea $\mathcal{C} = R$-simp $\cap \mathcal{F}_\tau$, como τ es espectral, por el Teorema 4.2 tenemos que $soc_{\mathcal{C}}(M) = 0$. Por otro lado, $\tau^{\perp\perp} = \chi(\mathcal{C})$, de donde existe una familia $\mathcal{M}$ de R-módulos τ-libres de torsión, y un monomorfismo $M \hookrightarrow \prod_{S \in \mathcal{M}} E(S)$. En particular, existe un submódulo distinto de cero N de M y un epimorfismo $f\colon N \to S$ para algun $S \in \mathcal{M}$. Como $N \in \mathcal{F}_{\tau^{\perp\perp}} \subset \mathcal{F}_\tau$, tenemos que la sucesión $N \xrightarrow{f} S \to 0$ está en R-mod. Del Teorema 4.6, tenemos que S es isomorfo a un sumando directo de N. De esto se sigue que $0 \neq soc_{\mathcal{C}}(N) \subset soc_{\mathcal{C}}(M)$ lo cual es una contradicción, de donde $\tau^\perp \vee \tau^{\perp\perp} = \chi$.

Lema 4.15 *Sea $\tau \in R$-tors. Si τ y $\tau^{\perp}$ son espectrales, entonces R es un anillo semiartiniano izquierdo.*

Demostración: Del Teorema 4.2 y de la Proposición 3.1 tenemos que $\mathcal{T}_{\tau^{\perp}}$ y $\mathcal{T}_{\tau^{\perp\perp}}$ consisten de módulos semisimples. Sea $0 \neq M \in R$-mod. Por el Lema 4.14 $t_{\tau^{\perp}}(M) \neq 0$ ó $t_{\tau^{\perp\perp}}(M) \neq 0$; por lo que $soc(M) \neq 0$, y esto nos da que R es un anillo semiartiniano izquierdo.

Recordamos que llamamos a una teoría de torsión $\tau \in R$-tors TTF cuando la clase $\mathcal{T}_{\tau}$ es cerrada bajo productos directos, (ver [10] y [11]). Como en el Corolario 4.3, sea $\mathcal{P} = \{S \in R\text{-simp} \mid S \text{ es proyectivo}\}$.

Teorema 4.16 *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) La teoría de torsión de Goldman, τ_{sp} es espectral.

ii) El anillo $R/soc_{\mathcal{P}}(R)$ es un anillo artiniano semisimple.

iii) La teoría de torsión de Goldie, τ_g, es TTF y la clase de módulos de torsión de Goldie, $\mathcal{T}_{\tau_g}$ consiste de módulos semisimples.

iv) La teoría de torsión de Goldie, τ_g, es TTF y la clase de módulos de torsión de Goldie, $\mathcal{T}_{\tau_g}$ consiste de módulos inyectivos.

Demostración: Veamos i) $\Rightarrow$ ii). Tenemos que $\tau_g^{\perp} = \tau_{sp}$. Por el Lema 4.15, R resulta ser un anillo semiartiniano. De [18, Teorema 3.1], τ_g es TTF, y está generada por los módulos simples singulares. De [23, Corolario 2.7] tenemos que $soc_{\mathcal{P}}(R) = \bigcap_{I \in \mathcal{L}_{\tau_g}} I$, de donde $R/soc_{\mathcal{P}}(R)$ es de τ_g-torsión. De [23, Teorema 2.9] tenemos que $\tau_g = \tau_{sp}{}^{\perp}$, por lo que $R/soc_{\mathcal{P}}(R)$ es de $\tau_{sp}{}^{\perp}$-torsión. Por último, de la Proposición 4.1 obtenemos que $R/soc_{\mathcal{P}}(R)$ es un anillo artiniano semisimple.

ii) $\Rightarrow$ iii) De [18, Corolario 2.9] tenemos $soc_{\mathcal{P}}(M) = soc_{\mathcal{P}}(R)M$ para toda $M \in R$-mod. Si $soc_{\mathcal{P}}(R)M \neq 0$, entonces $soc_{\mathcal{P}}M \neq 0$ y por lo tanto $soc(M) \neq 0$. Si $soc_{\mathcal{P}}(R)M = 0$, entonces M es un $R/soc_{\mathcal{P}}(R)$-módulo. Por ii), M es semisimple, de donde $soc(M) \neq 0$. Por lo tanto R es semiartiniano izquierdo. Ses M diferente de cero, $M \in \mathcal{T}_{\tau_g}$, de donde $soc_{\mathcal{P}}(R)M = 0$. Así M es un $R/soc_{\mathcal{P}}(R)$-módulo semisimple, por lo que como R-módulo también lo es.

iii) $\Rightarrow$ iv) Sea $M \in R$-mod, $M \in \mathcal{T}_{\tau_g}$. Como τ_g es una teoría de torsión estable, $E(M) \in \mathcal{T}_{\tau_g}$. Por iii) $E(M)$ es un módulo semisimple. Como M es esencial en $E(M)$, tenemos $M = E(M)$, de donde M es inyectivo.

iv) $\Rightarrow$ i) Por la Proposición 2.3 es suficiente probar que cada módulo τ_{sp}-libre de torsión es inyectivo. Sea $M \in \mathcal{F}_{\tau_{sp}}$. Por [18, Teorema 2.2]

$$\mathcal{F}_{\tau_{sp}} = \mathcal{F}_{\tau_g^{\perp}} = \{N | N \hookrightarrow \Pi T_\alpha;\ T_\alpha \in \mathcal{T}_{\tau_g}\}.$$

El inciso iv) nos dice que $M \in \mathcal{T}_{\tau_g}$, lo que implica que M es inyectivo.

Observamos que la condición iii) del teorema anterior nos dice que el producto de módulos semisimples singulares es semisimple singular.

Corolario 4.17 *Si τ_{sp} es espectral, entonces para cada ideal izquierdo esencial I de R, el módulo R/I es semisimple e inyectivo.*

Demostración: Es consecuencia del Teorema 4.16.

Corolario 4.18 *Sea $\sigma \leq \tau_{sp}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) σ *es espectral.*

ii) El anillo $R/t_\sigma(R)$ es un anillo artiniano semisimple.

iii) $\mathcal{T}_{\sigma^\perp}$ consiste de módulos semisimples.

iv) $\mathcal{T}_{\sigma^\perp}$ consiste de módulos inyectivos.

Demostración: Sea P el conjunto de objetos proyectivos de R-simp. De [23, Teorema 2.18] la correspondencia $\varphi : [\xi, \tau_{sp}] \longrightarrow gen(\hat{\tau}_g)$ definida por $\varphi(\sigma) = \chi(\mathcal{P} - X)$ donde $\sigma = \xi(X)$ es un isomorfismo de retículas.

i)$\Rightarrow$ ii) Como $\sigma \leq \tau_{sp}$, entonces $\sigma^\perp \in gen(\hat{\tau}_g)$. Por lo tanto $\sigma^\perp$ es espectral. Por el Lema 4.15, el anillo R es semiartiniano izquierdo. De aquí que $\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{T}_{\sigma^\perp}$. Por lo tanto $R/t_\sigma(R) \in \mathcal{T}_{\sigma^\perp}$ y por la Proposición 4.1, $R/t_{\tau_\sigma}(R)$ es semisimple, con lo que obtenemos ii).

Para ver ii) $\Rightarrow$ iii) Si M es un módulo de $\sigma^\perp$-torsión tenemos que $M \in \mathcal{F}_\sigma$ y M es un $R/t_\sigma(R)$-módulo, por la hipótesis, M resulta semisimple.

iii)$\Rightarrow$ iv) Sea M un módulo de $\sigma^\perp$-torsión. Como $\sigma^\perp$ es estable, tenemos que $E(M)$ es de $\sigma^\perp$-torsión por lo que $E(M)$ es un módulo semisimple. Como M es esencial en $E(M)$, obtenemos que M es inyectivo.

iv)$\Rightarrow$ i) Afirmamos que $\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{T}_{\sigma^\perp}$. Tenemos que $\sigma^\perp = \chi(R\text{-simp} \cap \mathcal{T}_\sigma)$. Sea $0 \neq M \in \mathcal{F}_\sigma$. Supongamos que existe un morfismo $0 \neq f : M \longrightarrow E(S)$ con $S \in R\text{-simp} \cap \mathcal{T}_\sigma$. Por lo tanto existe $0 \neq M' \subseteq M$ y un morfismo $0 \neq f' : M' \longrightarrow S$. Como $S \in \mathcal{T}_\sigma$, entonces S es proyectivo. De donde existe un morfismo $0 \neq g : S \longrightarrow M'$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{T}_{\sigma^\perp}$. La otra contención es clara.

Sea $M \in \mathcal{F}_\sigma$, por iv) M es inyectivo. Si N es un submódulo de M, tenemos que también es inyectivo, luego cualquier submódulo de M es sumando directo de M. Por lo tanto cualquier submódulo τ-puro de M es sumando directo. De 2.3 iv), obtenemos que σ es espectral.

Ejemplo 4.19 *En este ejemplo vemos que si eliminamos la hipótesis de que la teoría de torsión $\chi(\mathcal{C})$ sea espectral en el Teorema 3.7, entonces este teorema es falso.*

Sea R el anillo estudiado por Cozzens en [5], este anillo tiene las siguientes propiedades:

i) R es un dominio de ideales principales izquierdo y derecho.

ii) R es un anillo simple.

iii) R es un V-anillo izquierdo.

iv) R no es un campo.

v) R tiene salvo isomorfismos un único módulo izquierdo simple.

Sea $\mathcal{C} = \{S\} = R$-simp, tenemos que S es un módulo singular, ya que si no lo fuera, sería proyectivo y por lo tanto sumando directo del anillo. Por la propiedad i), los únicos idempotentes son el 0 y el 1_R.

Además, $soc_{\mathcal{C}}(\_) = soc(\_)$ es un funtor de torsión ya que: para cada $M \in R$-mod, la propiedad iii) nos dice que todo simple es inyectivo, y de la propiedad i) resulta que $soc(M)$ es inyectivo, en consecuencia es sumando directo de M, de donde obtenemos que $soc(M/soc(M)) = 0$.

Por otro lado, $\chi(C) = \chi(S) = \xi$ que no es espectral, pues el anillo sería semisimple por el Corolario 3.12, lo cual es una contradicción.

El intervalo $[\xi, \tau_C] = [\xi, \xi(C)] = \{\xi, \xi(S)\}$. Por otro lado, el intervalo $[\chi(C), \chi] = [\chi(S), \chi] = R$-tors. Estos dos intervalos no están en correspondencia biyectiva, pues en este anillo se cumple que $\xi < \chi(R) < \chi$.

Ejemplo 4.20 *El siguiente es un ejemplo de un conjunto $C \subset R$-simp tal que $soc_C(\_)$ es un funtor de torsion y sin embargo $\chi(C)$ no es una teoría de torsión espectral, por lo que la condición 2 del inciso ii) del Teorema 4.9 es necesaria.*

Consideremos el anillo R del ejemplo anterior. Hemos probado que si $C = \{S\} = R$-simp, entonces $soc_C(\_) = soc(\_)$ es un funtor de torsión y que $\chi(C) = \chi(S) = \xi$ no es espectral.

Ejemplo 4.21 *Este ejemplo nos muestra una teoría de torsión espectral y una clase C de módulos simples en donde $soc_C(\_)$ es un funtor de torsión que no es exacto.*

Consideremos el anillo $R = \langle \mathbb{Z}_2{}^{(\aleph_0)}, 1_{\mathbb{Z}_2{}^{\aleph_0}} \rangle$. Probaremos que τ_{sp} es una teoría de torsión espectral. Por la Proposición 2.3 es suficiente ver que para los módulos τ_{sp}-libres de torsión, los submódulos τ_{sp}-puros son sumandos directos.

Sea $M \in \mathcal{F}_{\tau_{sp}}$, de donde M es un $R/t_{\tau_{sp}}(R)$-módulo, es decir, M es un $R/\mathbb{Z}_2{}^{(\aleph_0)}$-módulo y $R/\mathbb{Z}_2{}^{(\aleph_0)} \cong \mathbb{Z}_2$. Sea N un submódulo τ_{sp}-puro de M y consideremos la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$, que es una sucesión de $\mathbb{Z}_2$-módulos, es decir de módulos semisimples, por lo que la sucesión se escinde, lo que nos da que N es un sumando directo de M, que es lo que se quería.

Por otro lado, sea $\mathcal{C} = \mathcal{R}$-simp $\cap \mathcal{F}_{\tau_{sp}}$. Como τ_{sp} es espectral tenemos que $\mathcal{T}_{\tau_{sp}^{\perp}}$ consiste de módulos semisimples. Como R es semiartiniano, $\tau_g = \tau_{sp}{}^{\perp}$, de esta manera, $\mathcal{T}_{\tau_g} = \mathcal{T}_{\tau_{sp}^{\perp}}$ y el radical asociado a τ_g es $soc_{\mathcal{C}}(\_)$ que es el zoclo singular. Consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow soc_{\mathcal{P}}(R) \longrightarrow R \longrightarrow R/soc_{\mathcal{P}}(R) \longrightarrow 0$, a la que le aplicamos el funtor $soc_{\mathcal{C}}(\_)$, obtenemos la sucesión $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow R/soc_{\mathcal{C}}(R) \longrightarrow 0$ que no es exacta.

Ejemplo 4.22 *Por último, observamos que el Lema 4.14 no es válido en general.*

En $\mathbb{Z}$-mod, la categoría de grupos abelianos, consideremos la teoría de torsión $\tau = \xi(\mathbb{Z}_2)$ que no es espectral, tenemos que $\tau^{\perp} = \chi(\mathbb{Z}_2)$ y $\tau^{\perp\perp} = \chi((\mathbb{Z} - simp) - \mathbb{Z}_2)$, de donde $\tau^{\perp} \vee \tau^{\perp\perp} = \tau_g \neq \chi$.

De esto, podemos concluir que la condición de que la teoría de torsión considerada sea espectral, es suficiente, pero no es necesaria, ya que en cualquier anillo semiartiniano se cumple que $\tau^{\perp} \vee \tau^{\perp\perp} = \chi$. En un anillo semiartiniano izquierdo, la retícula R-tors es Booleana y no todos sus elementos son espectrales. Si consideramos el anillo $R = \langle \mathbb{Z}_2{}^{(\aleph_0)}, 1_{\mathbb{Z}_2{}^{\aleph_0}} \rangle$. R es un anillo semiartiniano izquierdo y ξ no es espectral.

Capítulo 5

Anillos semineterianos

El objetivo de este capítulo es dar una caracterización de los anillos semineterianos utilizando teorías de torsión espectrales, generalizando los resultados de [20], en este artículo se da una caracterización de los anillos semineterianos imponiendo condiciones a los intervalos $[\xi, \tau_g]$ y $[\tau_g, \chi]$, donde ξ, τ_g y χ, son el elemento menor, la teoría de torsión de Goldie y el elemento mayor de R-tors. Para esto, el autor define una filtración que considera el funtor singular. Nosotros obtenemos la generalización mencionada para cualquier teoría de torsión espectral y lo hacemos definiendo una filtración que considera el funtor de torsión de la teoría de torsión espectral.

Decimos que una teoría de torsión τ es propia si $\tau \neq \chi$ el elemento mayor de R-tors. Denotamos con R-prop al conjunto de todas las teorías de torsión propias sobre R-mod.

Sea $\tau \in R$-tors, un R-módulo M es llamado τ-cocrítico si $M \in \mathcal{F}_\tau$ y para todo $0 \neq N \subseteq M$ tenemos que el módulo $M/N \in \mathcal{T}_\tau$. Decimos que M es cocrítico, si es $\chi(M)$-cocrítico.

En general, no es cierto que cada $\tau \in R$-prop tenga módulos τ-cocríticos; si esto es cierto, el anillo R es llamado semineteriano. Son anillos semineterianos los anillos neterianos, los anillos semiartinianos y los anillos con dimensión de Krull, entre otros.

La filtración de Gabriel en R-tors se define como sigue: Es una cadena de teorías de torsión $\tau_{-1} \leq \tau_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_i \leq \ldots$, donde,

$$\tau_{-1} = \xi$$

Si α no es un ordinal límite

$$\tau_\alpha = \tau_{\alpha-1} \vee \xi(\{M \in R - \text{mod} \mid M \text{es } \tau_{\alpha-1} - \text{cocrítico}\})$$

Si α es un ordinal límite

$$\tau_\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} \tau_\beta.$$

Como R-tors es un conjunto, tenemos que existe un ordinal mínimo α tal que $\tau_\alpha = \tau_{\alpha+\beta}$ para todo ordinal β. Denotamos a esta teoría de torsión por γ.

Si $M \in R$-mod, decimos que M tiene dimensión de Gabriel α si y sólo si el conjunto de ordinales para el cual $M \in \mathcal{T}_{\tau_\alpha}$ es no vacío y α es el menor ordinal con esta propiedad. Decimos que el anillo R tiene dimensión de Gabriel α si y sólo si como R-módulo tiene dimensión de Gabriel α. Es inmediato que R tiene dimensión de Gabriel α si y sólo si $\tau_\alpha = \chi$ y $\tau_\beta \neq \chi$ para todo $\beta < \alpha$.

Teorema 5.1 (11) *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

i) R es un anillo seminoeteriano.

ii) R tiene dimensión de Gabriel α para algún ordinal α.

iii) Si $\tau \in R$-prop, entonces τ es una teoría de torsión fuertemente semiprima.

iv) $R \in \mathcal{T}_\gamma$.

Supongamos que $\tau \in R$-tors es espectral y consideremos las siguientes teorías de torsión:

$\tau' = \chi(\{S \mid S \in R\text{-simp} \cap \mathcal{F}_\tau\})$ y,

$\tau'' = \chi(\{M \mid M \text{ es cocrítico y } M \in \mathcal{F}_\tau\})$

Observamos que siempre se cumple que $\tau \leq \tau'' \leq \tau'$.

Lema 5.2 *Si $\tau \in R$-tors es espectral, entonces $\{M \in R\text{-mod} \mid M$ es $\tau-$ cocrítico$\} = \{M \in R - mod \mid M$ es cocrítico y $M \in \mathcal{F}_\tau\}$.*

Demostración: Si M es un módulo $\tau -$ cocrítico, entonces es cocrítico ya que todo $\tau -$ cocrítico es uniforme.

Sea M un módulo cocrítico tal que $M \in \mathcal{F}_\tau$, probaremos que M es $\tau -$ cocrítico. Sea $0 \neq N \subseteq M$, como M es cocrítico es uniforme, por lo tanto sus submódulos distintos de cero son esenciales en M. Como τ es espectral, la Proposición 2.3 nos dice que los submódulos esenciales son τ-densos; de esta forma, M resulta ser $\tau -$ cocrítico.

Lema 5.3 *Sea $\tau \in R$-tors espectral y sea $\sigma \in R$-tors tal que $\tau'' \leq \sigma$, entonces cada módulo M distinto de cero σ-libre de torsión contiene un submódulo distinto de cero $\sigma -$ cocrítico.*

Demostración. Sea M un módulo σ-libre de torsión. De $\tau'' \leq \sigma$ tenemos que $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_{\tau''}$, por lo que M es τ''-libre de torsión. De la definición de τ'', existe un módulo cocrítico C y un morfismo distinto de cero $f : E(M) \to E(C)$. Como τ es espectral, de la Proposición 3.1 tenemos que τ'' lo es también. Como $E(M) \in \mathcal{F}_{\tau''}$ y $E(C) \in \mathcal{F}_{\tau''}$ del Lema 2.12 Imf es un módulo inyectivo. Por otro lado, como C es cocrítico, C es uniforme, por lo que $E(C)$ es inescindible, de donde $Imf = E(C)$. De esta forma, $E(C) \cong E(M)/Kerf$, obtenemos así que $Kerf$ es $\tau''-$puro en $E(M)$. Tenemos que $E(M)$ es un módulo τ'' inyectivo y τ''-libre de torsión, de la Proposición 2.3 iv), obtenemos que $Kerf$ es sumando directo de $E(M)$, de esta manera, la sucesión exacta corta

$$0 \to Kerf \to E(M) \to E(C) \to 0$$

se escinde y $E(C)$ es isomorfo a un submódulo M' de $E(M)$ por lo que $E(C) \in \mathcal{F}_\sigma$

Afirmamos que $E(C)$ es $\sigma-$ cocrítico. Tenemos que C es uniforme, por lo tanto $E(C)$ es uniforme. Ya que σ es espectral, por la Proposición 2.3 tenemos que todo submódulo distinto de cero de $E(C)$ es denso.

Tenemos que $E(C) \cong M' \subseteq E(M)$. De donde $M \cap M' \neq 0$ y $M \cap M'$ es $\sigma-$ cocrítico, ya que los submódulos de los módulos σ-cocríticos son σ-cocríticos. Así, $M \cap M'$ es el submódulo de M distinto de cero $\sigma-$ cocrítico buscado, por lo que el lema queda probado.

Para $\tau \in R$-tors, denotamos con $Co_\tau = \{M \in R\text{-mod} \mid M$ es τ-cocrítico $\}$.

Teorema 5.4 *Sea R un anillo y $\tau \in R$-tors espectral tal que $\tau'' \neq \chi$, entonces:*

i) τ'' es una teoría de torsión fuertemente semiprima.

ii) Si $\sigma \in R$-tors es tal que $\tau'' \leq \sigma < \chi$, entonces σ es fuertemente semiprima.

iii) Si $\sigma \in R$-tors es tal que $\tau'' \leq \sigma$, entonces $\sigma = \tau'' \vee \xi(\{M \in R-mod \mid M$ es $\tau''-$ cocrítico y $M \in \mathcal{T}_\sigma\})$.

Demostración: De la definición de τ'' y del Lema 5.2, tenemos que $\tau'' = \chi(\{M \in R - \text{mod} \mid M \in Co_{\tau''}\})$. Así afirmamos i).

Para probar ii), veremos que σ esta cogenerada por los módulos σ – cocríticos. Si $M \in Co_\sigma$, en particular $M \in \mathcal{F}_\sigma$ de donde $\sigma \leq \chi(M)$ por lo tanto $\sigma \leq \chi(\{M \in R - \text{mod} \mid M \in Co_\sigma\})$.

Si $\sigma < \chi(\{M \in R - \text{mod} \mid M \in Co_\sigma\})$ entonces existe un módulo $N \neq 0$, tal que $N \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_{\chi(\{M \in R-\text{mod} \mid M \in Co_\sigma\})}$; por el Lema 5.3, N tiene un submódulo distinto de cero N' σ – cocrítico, concluimos que $N' \in \mathcal{F}_{\chi(\{M \in R-\text{mod} \mid M \in Co_\sigma\})} \cap \mathcal{T}_{\chi(\{M \in R-\text{mod} \mid M \in Co_\sigma\})}$, lo cual es una contradicción. Obtenemos así que $\sigma = \chi(\{M \in R - \text{mod} \mid M \in Co_\sigma\})$.

Para probar iii), consideramos $\tau'' \leq \sigma$, sea $\sigma' = \tau'' \vee \xi(\{M \in R - \text{mod} \mid M \in Co_{\tau''}$ y $M \in \mathcal{T}_\sigma\})$. De la definición de σ', es claro que $\sigma' \leq \sigma$.

Supongamos que la desigualdad es estricta, es decir, $\sigma' < \sigma$, entonces existe $0 \neq N \in \mathcal{T}_\sigma \cap \mathcal{F}_{\sigma'}$. Como además $\sigma' \geq \tau''$, del Lema 5.3, existe un módulo N' tal que $0 \neq N' \subseteq N$ y $N' \in Co_{\sigma'}$, esto nos dice que N' es cocrítico, además $N' \in \mathcal{F}_{\sigma'} \subseteq \mathcal{F}_{\tau''}$, del Lema 5.2 existe $0 \neq N'' \subseteq N'$ con N'' τ''-cocrítico y además era de σ-torsión por hipótesis, por lo tanto $N'' \in \{M \in R - \text{mod} \mid M \in Co_{\tau''} \cap \mathcal{T}_\sigma\} \subseteq \mathcal{T}_{\sigma'}$, lo que contradice el hecho de que $N \in \mathcal{F}_{\sigma'}$. Por lo tanto $\sigma = \sigma'$.

Lema 5.5 (23) *Sea $\tau \in R$-tors y sea $M \in Co_\tau$. Entonces la teoría de torsión $\tau \vee \xi(M)$ es un átomo en $gen(\tau)$.*

Decimos que una retícula es localmente atómica si todo elemento es unión de átomos.

Observación 5.6 *La retícula $[\tau'', \chi]$ es localmente atómica.*

Esto es debido a que si M es cocrítico y $M \in \mathcal{F}_\tau$, entonces $\tau'' \vee \xi(M)$ es un átomo en $gen(\tau'')$.

Lema 5.7 *Sea $\tau \in R$-tors espectral. Entonces τ es fuertemente semiprima si y sólo si $\tau = \tau''$*

Demostración: Si τ es fuertemente semiprima, entonces $\tau = \chi(\{M \in R-\text{mod} \mid M \in Co_\tau\})$. De la definición de τ'' y del Lema 5.2, tenemos que $\tau'' = \chi(\{M \in R-\text{mod} \mid M$ es cocrítico y $M \in \mathcal{F}_\tau\}) = \tau$.

Recíprocamente, si $\tau = \tau''$ la conclusión se sigue del Teorema 5.4 i).

Corolario 5.8 *Sea $\tau \in R$-tors espectral y fuertemente semiprima, entonces:*

- *i) Si $\sigma \in R$-tors es tal que $\tau \leq \sigma \neq \chi$, entonces σ es fuertemente semiprima.*
- *ii) La retícula $[\tau, \chi]$ es localmente atómica.*

Demostración: Como τ es espectral, de la Proposición 3.1 σ es espectral. Del Lema 5.7 $\tau = \tau''$. Obtenemos i) del Teorema 5.4.

El inciso ii) lo obtenemos del Lema 5.7 y de la Observación 5.6.

Para $\tau \in R$-tors espectral, definimos la siguiente filtración en $R-$tors:

$$\sigma_{-1} = \xi$$

Si α no es un ordinal límite

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha-1} \vee \xi(\{M \in R-\text{mod} \mid M \in Co_{\sigma_{\alpha-1}} \text{ y } M \in \mathcal{T}_\tau\})$$

Si α es un ordinal límite

$$\sigma_\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} \sigma_\beta$$

Tenemos que existe un ordinal mínimo α tal que $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha+\beta}$ para todo ordinal β. A esta teoría de torsión σ_α la denotamos con $\gamma(\tau)$.

Proposición 5.9 *Tenemos que para todo ordinal α,* $\sigma_\alpha = \tau \wedge \tau_\alpha$.

Demostración: Lo haremos utilizando inducción transfinita.

Si $\alpha = -1$, entonces $\tau_{-1} = \xi$ $\sigma_{-1} = \xi = \tau \wedge \xi = \tau \wedge \tau_{-1}$.

Sea $\alpha > -1$. Supongamos que el resultado es cierto para todos los ordinales β tales que $\beta < \alpha$.

Caso 1. Supongamos que α no es un ordinal límite, entonces $\sigma_{\alpha-1} = \tau \wedge \tau_{\alpha-1}$.

De la definición:

$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha-1} \vee \xi(\{M \in R-\text{mod} \mid M \in Co_{\sigma_{\alpha-1}} \text{ y } M \in \mathcal{T}_\tau\})$. Por otro lado,

$\tau_\alpha \wedge \tau = (\tau_{\alpha-1} \vee \xi(\{M \in R-mod \mid M \in Co_{\tau_{\alpha-1}}\}) \wedge \tau$.

Demostraremos primero que $\sigma_\alpha \leq \tau_\alpha \wedge \tau$.

Tenemos que $\sigma_\alpha \leq \tau$ ya que: Por hipótesis de inducción, $\sigma_{\alpha-1} = \tau_{\alpha-1} \wedge \tau \leq \tau$. Además, $\xi(\{M \in R-\text{mod} \mid M \in Co_{\sigma_{\alpha-1}} \text{ y } M \in \mathcal{T}_\tau\}) \leq \tau$, pues sus generadores son módulos de τ-torsión. Por lo tanto,
$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha-1} \vee \xi(\{M \in R-\text{mod} \mid M \in Co_{\sigma_{\alpha-1}} \text{ y } t_\tau(M) = M\}) \leq \tau$.

Veremos ahora que $\sigma_\alpha \leq \tau_\alpha$. Por la hipótesis de inducción resta ver que todo módulo $M \in Co_{\sigma_{\alpha-1}} \cap \mathcal{T}_\tau$ es $\tau_{\alpha-1}$ − cocrítico.

Sea M un módulo $\sigma_{\alpha-1}$ − cocrítico entonces $M \in \mathcal{F}_{\sigma_{\alpha-1}}$ y para todo $0 \neq M' \subseteq M$ tenemos que el módulo cociente $M/M' \in \mathcal{T}_{\sigma_{\alpha-1}} \subseteq \mathcal{T}_{\tau_{\alpha-1}}$. Resta ver que $M \in \mathcal{F}_{\tau_{\alpha-1}}$. Supongamos que $M \in \mathcal{T}_{\tau_{\alpha-1}}$, como $t_\tau(M) = M$ tenemos que $M \in \mathcal{T}_{\tau_{\alpha-1}\wedge\tau} = \mathcal{T}_{\sigma_{\alpha-1}}$ lo cual es una contradicción a que M es $\sigma_{\alpha-1}$ − cocrítico. Por lo tanto $M \notin \mathcal{T}_{\tau_{\alpha-1}}$. Si $0 \neq t_{\tau_{\alpha-1}}(M)$ es un submódulo propio de M, entonces de la sucesión exacta corta

$$0 \to t_{\tau_{\alpha-1}}(M) \to M \to M/t_{\tau_{\alpha-1}}(M) \to 0$$

como $M \in \mathcal{T}_\tau$, tenemos que, $t_{\tau_{\alpha-1}}(M) \in \mathcal{T}_{\tau\wedge\tau_{\alpha-1}} = \mathcal{T}_{\sigma_{\alpha-1}}$. Por otro lado, $M/t_{\tau_{\alpha-1}}(M) \in \mathcal{T}_{\sigma_{\alpha-1}}$ pues M es $\sigma_{\alpha-1}$ − cocrítico y como cualquier clase de torsión es cerrada bajo extensiones, concluimos que $M \in \mathcal{T}_{\sigma_{\alpha-1}}$, lo cual es una contradicción. De esta manera, tenemos que $t_{\tau_{\alpha-1}}(M) = 0$ y $M \in \mathcal{F}_{\tau_{\alpha-1}}$, que era lo que faltaba probar, de donde $\sigma_\alpha \leq \tau \wedge \tau_\alpha$.

Supongamos que $\sigma_\alpha < \tau \wedge \tau_\alpha$. De esta forma, existe $0 \neq M \in \mathcal{T}_{\tau\wedge\tau_\alpha} = \mathcal{T}_\tau \cap \mathcal{T}_{\tau_\alpha}$, tal que $M \in \mathcal{F}_{\sigma_\alpha}$.

Ahora, el que $M \in \mathcal{T}_\tau$ implica que $t_{\tau_{\alpha-1}}(M) \in \mathcal{T}_{\tau_{\alpha-1}} \cap \mathcal{T}_\tau = \mathcal{T}_{\sigma_{\alpha-1}}$. Por otro lado, $t_{\tau_{\alpha-1}}(M) \subset M \in \mathcal{F}_{\sigma_\alpha} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma_{\alpha-1}}$ de donde, $t_{\tau_{\alpha-1}}(M) = 0$.

Afirmamos lo siguiente: Si $M \in \mathcal{T}_{\tau_\alpha}$ y $M \in \mathcal{F}_{\tau_{\alpha-1}}$, entonces M tiene un submódulo distinto de cero $\tau_{\alpha-1}$ − cocrítico.

Tenemos las igualdades siguientes:

$$\mathcal{T}_{\tau_\alpha} = \mathcal{T}_{\tau_{\alpha-1} \vee \xi(\{M \in R-mod | M \in Co_{\tau_{\alpha-1}}\})}$$

$$\mathcal{F}_{\tau_\alpha} = \mathcal{F}_{\tau_{\alpha-1}} \cap \mathcal{F}_{\xi(\{M \in R-mod | M \in Co_{\tau_{\alpha-1}}\})}$$

Por lo que $M \notin \mathcal{F}_{\xi(\{N \in R-mod | N \in Co_{\tau_{\alpha-1}}\})}$ es decir, existe un módulo $K \in Co_{\tau_{\alpha-1}}$ y un morfismo distinto de cero $f : K \to M$. Sea $M' = f(K)$, como $M \in \mathcal{F}_{\tau_{\alpha-1}}$ entonces $M' \in \mathcal{F}_{\tau_{\alpha-1}}$.

Además, f es un monomorfismo, pues si ker $f \neq 0$ tendríamos que $M' \cong K/\ker f \in \mathcal{T}_{\tau_{\alpha-1}}$ ya que K es $\tau_{\alpha-1}$ − cocrítico lo cual no puede ser.

Como $K \cong M'$, entonces M' es $\tau_{\alpha-1}$ − cocrítico y además $t_\tau(M') = M'$.

Afirmamos que M' es $\sigma_{\alpha-1}$ − cocrítico. Tenemos que $M' \subset M \in \mathcal{F}_{\sigma_{\alpha-1}}$, si $0 \neq K \subset M'$, entonces $M'/K \subset M/K \in \mathcal{T}_\tau$, además, $M'/K \in \mathcal{T}_{\tau_{\alpha-1}}$, de aquí que $M'/K \in \mathcal{T}_{\tau_{\alpha-1}} \cap \mathcal{T}_\tau = \mathcal{T}_{\sigma_{\alpha-1}}$ lo que prueba la afirmación.

Como M' es $\sigma_{\alpha-1}$ − cocrítico, tenemos que $M' \in \mathcal{T}_{\sigma_\alpha}$. Por lo tanto, $0 \neq M' \subset t_{\sigma_\alpha}(M) = 0$, lo cual es una contradicción.

Por lo anterior concluimos que $\sigma_\alpha = \tau \wedge \tau_\alpha$.

Caso 2. Supongamos que α es un ordinal límite. De la hipótesis de inducción y como R-tors es un marco tenemos que:

$$\sigma_\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} \sigma_\beta = \bigvee_{\beta<\alpha} (\tau \wedge \tau_\beta) = \tau \wedge (\bigvee_{\beta<\alpha} \tau_\beta) = \tau \wedge \tau_\alpha.$$

Corolario 5.10 *Tenemos las siguientes igualdades:*

i) $\gamma(\tau) = \tau \wedge \gamma$

ii) $\gamma(\tau) = \chi$ *si y sólo si* R *tiene dimensión de Gabriel y* $R \in \mathcal{T}_\tau$.

Terminamos este trabajo dando una caracterización de los anillos con dimensión de Gabriel, en términos de teorías de torsión espectrales.

Teorema 5.11 *Sea* $\tau \in$ *R-tors espectral. Las siguientes condiciones son equivalentes*

i) R *es un anillo semineteriano izquierdo*

ii) γ *es estable y TTF*

iii) $\mathcal{F}_\gamma$ *es cerrada bajo cocientes (*γ *es cohereditaria)*

iv) $\gamma(\tau) = \tau$ *y* $\tau' = \tau \vee \xi(\{M \in R-mod \mid M \in \mathcal{T}_\tau$ y M es $\tau-$ *cocrítico*$\}$

v) $\gamma(\tau) = \tau''$

vi) $\gamma \geq \tau''$

vii) $\gamma \geq \tau'$

viii) $\gamma \geq \tau$ *y* τ *es fuertemente semiprima*

*Demostración:*i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii) se obtiene de [20, Teorema 7].

i) $\Rightarrow$ iv) Se tiene $\sigma_\alpha = \tau \wedge \tau_\alpha$ por lo tanto $\gamma_\tau = \tau \wedge \gamma = \tau \wedge \chi = \tau$

Como R es semineteriano izquierdo y $\tau \neq \chi$, por el Teorema 5.1 τ es fuertemente semiprima, del Lema 5.7 $\tau = \tau'' = \chi(\{M \in R-$

mod $|$ M es τ'' − cocrítico y $M \in \mathcal{F}_\tau\})$. Por el Teorema 5.4 iii) y de $\tau = \tau'' \leq \tau'$.

$$\begin{aligned}\tau' &= \tau'' \vee \xi(\{M \in R-\text{mod} \mid M \in Co_{\tau''} \text{ y } M \in \mathcal{T}_{\tau'}\}) \\ &= \tau \vee \xi(\{M \in R-\text{mod} \mid M \in Co_\tau \text{ y } M \in \mathcal{T}_{\tau'}\})\end{aligned}$$

iv) $\Rightarrow$ v) Basta demostrar que $\tau = \tau''$. Siempre $\tau \leq \tau''$.

Si $\tau < \tau''$, entonces existe $0 \neq M \in \mathcal{T}_{\tau''} \cap \mathcal{F}_\tau$, de donde $E(M) \in \mathcal{F}_\tau$.

Supongamos que $E(M) \notin \mathcal{T}_{\tau''}$ de esta manera, $0 \neq E(M)/t_{\tau''}(E(M)) \in \mathcal{F}_{\tau''} \subseteq \mathcal{F}_\tau$; luego, la proyección natural $E(M) \to E(M)/t_{\tau''}(E(M))$ es un epimorfismo distinto de cero. Del Lema 2.4 $E(M)/t_{\tau''}E(M))$ también es inyectivo y τ-libre de torsión de donde, $t_{\tau''}(E(M))$ es τ-puro en $E(M)$. De la Proposición 2.3 $t_{\tau''}(E(M))$ es sumando directo de $E(M)$ y $E(M) = t_{\tau''}(E(M)) \oplus K$. Como $M \in \mathcal{T}_{\tau'} \Rightarrow M \subseteq t_{\tau''}(E(M))$, por lo tanto $M \cap K = 0$ de donde $K = 0$.

De esta forma $E(M) \in \mathcal{T}_{\tau''} \cap \mathcal{F}_\tau$, de lo cual, $E(M) \in \mathcal{T}_{\tau''} \subseteq \mathcal{T}_{\tau'}$. Por iv), $\tau' = \tau \vee \xi(\{M \in R-\text{mod} \mid M \in \mathcal{T}_{\tau'}$ y M es τ − cocrítico$\})$. Por lo tanto existe un módulo $C \in \mathcal{T}_{\tau'}$ y τ − cocrítico y un morfismo distinto de cero $f : C \to E(M)$.

Sea $h : E(C) \to E(M)$, así $h : E(C) \to \text{Im } h$ es sobre. Como $E(C)$ es inyectivo y es τ-libre de torsión, y como $\text{Im } h \subseteq E(M) \in \mathcal{F}_\tau$, entonces $\text{Im } h$ es inyectivo por el Lema 2.4.

De la sucesión exacta, $0 \to Ker\ h \to E(C) \to E(C)/Ker\ h \to 0$, vemos que $E(C)/\text{Ker } h \cong \text{Im } h$, y como $\text{Im } h \in \mathcal{F}_\tau$, obtenemos que Ker h es un módulo τ-puro en $E(C)$, que a su vez es τ-inyectivo y τ-libre de torsión. Esto nos da que Ker f es sumando directo de $E(C)$ por lo que Im h también es sumando directo de $E(C)$.

Como C es τ − cocrítico, por el Lema 5.2 $t_\tau(C) = 0$ además de ser cocrítico, por lo tanto, $C \in \mathcal{F}_{\xi(\{M \in R-\text{mod} \mid M \text{ es cocrítico y } t_\tau(M)=0\})} =$

$\mathcal{F}_{\tau''}$. Podemos concluir que $E(C) \in \mathcal{F}_{\tau''}$ y en consecuencia Im $h \in \mathcal{F}_{\tau''}$, pues es sumando directo de $E(C)$.

Como Im $h \subseteq E(M)$, tenemos que $M \cap$ Im $h \neq 0$, de donde $M \cap$ Im $h \subseteq M \subseteq \mathcal{T}_{\tau''}$. Hemos obtenido así que Im $h \in \mathcal{T}_{\tau''} \cap \mathcal{F}_{\tau''}$, lo cual es una contradicción, por lo tanto la desigualdad estricta supuesta no puede darse, con lo que $\tau = \tau''$ de donde $\gamma(\tau) = \tau''$.

v) $\Rightarrow$ i) Supongamos que $\gamma(\tau) = \tau''$.

Por lo tanto, $\tau'' = \gamma(\tau) = \tau \wedge \gamma \leq \tau'' \wedge \gamma \leq \tau''$, así $\gamma(\tau) = \tau'' \wedge \gamma$.

Probaremos que para cualquier $\sigma \in R$-tors existen módulos σ-cocríticos.

Caso 1. Supongamos que $\tau'' \not\leq \sigma$, por lo tanto existe un ordinal α tal que $\sigma_\alpha \not\leq \sigma$ y α es el mínimo con esta propiedad. Este ordinal α existe pues, $\tau'' \not\leq \sigma$ y $\tau'' = \gamma(\tau)$. Tenemos que α no es un ordinal límite.

Notamos que $\alpha \geq 0$. Así, α es el mínimo ordinal tal que $\sigma_\alpha \not\leq \sigma$, por lo tanto $\sigma_{\alpha-1} \leq \sigma$, como $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha-1} \vee \xi(\{M \in R-\text{mod} \mid M \text{ es } \sigma_{\alpha-1} -$ cocrítico y $t_\tau(M) = M\})$, podemos concluir que existe un módulo M distinto de cero $\sigma_{\alpha-1}$ − cocrítico con $t_\tau(M) = M$ y tal que $M \notin \mathcal{T}_\sigma$.

Podemos suponer que $M \in \mathcal{F}_\sigma$, ya que de lo contrario tendríamos que $0 \neq t_\sigma(M) \neq M$, de donde, $0 \neq M/t_\sigma(M) \in \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_{\sigma_{\alpha-1}}$ que representa una contradicción a que M es $\sigma_{\alpha-1}$ − cocrítico, a menos que $t_\sigma(M) = 0$.

Como además para todo submódulo distinto de cero N de M, tenemos que el módulo cociente $M/N \in \mathcal{T}_{\sigma_{\alpha-1}} \subseteq \mathcal{T}_{\sigma_\alpha}$, tenemos que M es σ − cocrítico.

Caso 2. Supongamos que $\tau'' \leq \sigma$, por el Corolario 5.8 tenemos que

σ es fuertemente semiprima y por lo tanto existen módulos σ-cocríticos.

i) $\Rightarrow$ viii) Como $\gamma = \chi$, $\gamma \geq \tau$ y todas las teorías de torsión propias son fuertemente semiprimas por el Teorema 5.1.

viii) $\Rightarrow$ vi) Si $\gamma \geq \tau$ y τ es fuertemente semiprima, entonces por el Lema 5.7 $\tau = \tau''$, de donde tenemos que $\gamma \geq \tau''$.

vi) $\Rightarrow$ i) Supongamos que $\gamma \geq \tau''$; si $\gamma \neq \chi$, del Teorema 5.4 ii) tenemos que γ es fuertemente semiprima, por lo tanto $\gamma = \chi(\{M \in R-\mathbf{mod} \mid M$ es $\gamma-$cocrítico$\})$, lo cual es una contradicción a que el proceso se detiene, por lo tanto $\gamma = \chi$.

i) $\Rightarrow$ vii) Por i), tenemos que $\gamma = \chi$, por lo tanto $\gamma \geq \tau'$.

vii) $\Rightarrow$ vi) Se concluye directamente ya que siempre tenemos que $\tau' \geq \tau''$.

Bibliografía

[1] Alin, J. and Dickson S.E. *Goldie's Torsion Theory and its Derived Functor.* Pacific J. Math., 24, (1968) 195-203.

[2] Aguilar, G. and Raggi, F. *Sublattices of R-tors Induced by the Skeleton* . Comm. Algebra, 21 (4), (1993) 1347-1358.

[3] Anderson, F. W. and Fuller, K. R. *Rings and Categories of Modules.* Graduated texts in Mathematics, 13. Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York, 1974.

[4] Chew, K.L. *Closure Operators in the Study of Rings of Quotients.* Bull Math. Soc. Nanyag Univ. 1, (1965) 1-20.

[5] Cozzens, J. H. *Homological Properties of the Ring of Differential Polynomials.* Bull. Amer. Math. Soc. 76, (1970) 75-9.

[6] Dickson, S.E. *A Torsion Theory for Abelian Categories.* Trans. Amer. Math. Soc. 121, (1966) 223-235.

[7] Gabriel, P. *Des Categories Abéliennes.* Bull. Soc. Math. France, 90, (1962) 323-448.

[8] Gabriel, P. and Oberst, U. *Spektralkategorien und Reguläre Ringe im Von-Neumannschen Sinn.* Math. Z. 92, (1966) 389-395.

[9] García, J.L. and Gómez Pardo, J.L. *V-rings Relative to Gabriel Topologies.* Comm. in Alg. 13, (1), (1985) 59-83.

[10] Golan, J. *Localization of Noncommutative Rings.* Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, New York, 1975.

[11] Golan, J. *Torsion Theories.* Longman Scientific & Technical, Harlow, 1986.

[12] Goldie, A. *Torsion Free Modules and Rings.* J. Algebra. 1, (1964) 268-287.

[13] Goldman, O. *Rings and Modules of Quotients.* J. Algebra. 13, (1969) 10-47.

[14] Gómez Pardo, J. L. *Spectral Gabriel Topologies and Relative Singular Functors.* Comm. Algebra. 13 (1), (1985) 21-57.

[15] Goodearl, K. *Ring Theory. Non-singular Rings and Modules.* Marcel Dekker, New York, 1976.

[16] Goodearl, K. *Von Neumann Regular Rings.* Pitman Monographs and Studies in Mathematics 4, 1979.

[17] Maranda, J.M. *Injective Structures.* Trans. Amer. Math. Soc., 110, (1964) 98-135.

[18] Raggi, F. y Ríos, J. *Algunas Relaciones entre Anillos Semiartinianos y la Teoría de Torsión de Goldie.* An Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma. México, 23, (1983) 11-54.

[19] Raggi, F. and Ríos, J. *Sublattices of R-tors Associated to Proper Classes.* Comm. Algebra, 15 (3), (1987) 555-573.

[20] Raggi, F. and Ríos, J. *Some Relations between Gabriel Dimension and the Goldie Torsion Theory.* Comm. Algebra, 17 (11), (1989) 2801-2808.

[21] Raggi, F and Ríos J. *On the Lattice Structure of Torsion Theories.* Comm. Algebra, 19 (2), (1991) 669-674.

[22] Raggi, F and Ríos, J. *On the Structure of Selfinjective Regular Rings.* Comm. Algebra, 21 (10), (1993) 3763-3771.

[23] Ríos, J. *Algunos aspectos de la Teoría de Torsión de Goldie.* Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias, UNAM 1989.

[24] Roos, J. *Locally Distributive Spectral Categories and Strongly Regular Rings.* Lecture Notes in Mathematics 47, Reports of the Midwest Category Seminar, Springer Verlag, 1967.

[25] Rotman, J. J. *An Introduction to Homological Algebra.* Academic Press, New York, 1979.

[26] Stenström, B. *Rings and Modules of Quotients.* Lecture Notes in Math. Vol. 237, Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1971.

[27] Stenström, B. *Rings of Quotients.* Die Grundlehren der Math. Wiss. in Eizeld. 217, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[28] Sharpe, D.W. and Vámos, P. *Injective Modules.* Cambridge at the University Press, 1972.

[29] Tèbyrcè, E.I. *The Boolean Nature of the Lattice of Torsion in Modules.* Mat. Issled. 8, (1973) 92-105.

[30] Zelmanowitz, J. *Semisimple Rings of Quotients.* Bull Austral. Math. Soc. 19, (1978) 97-115.