

00362
4^a
2^o eje.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**SOLUCION NUMERICA DE PROBLEMAS
BIDIMENSIONALES DE TRANSFERENCIA
DE CALOR POR CONDUCCION**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

P R E S E N T A :

Fis. MARIO FRANCISCO ROSALES GONZALEZ

Andrés

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALIPIO GUSTAVO CALLES MARTINEZ**

MEXICO, D. F.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

1994



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres por quien soy

A Mayra y mi hermana por su amor

Para mis hijas como un recuerdo

Indice

Introducción	4
Resumen	5
Capítulo I.- Modelación térmica	7
I.1 Introducción	7
I.2 Antecedentes de Termostática	8
I.3 Termostática en medios con movimiento	17
I.4 Transferencia de calor por conducción	21
I.5 Simplificación bidimensional	27
I.6 Líneas de flujo e isotermas	30
Capítulo II.- Algoritmos y métodos numéricos	32
II.1 Introducción	32
II.2 Antecedentes de solución de ecuaciones diferenciales parciales	34
II.3 Algoritmos para problemas estacionarios	38
II.3.1 Problemas con simetría traslacional	39
II.3.2 Problemas con simetría axial	43
II.4 Algoritmos para problemas no estacionarios	46
II.4.1 Problemas con simetría traslacional	47
II.4.2 Problemas con simetría axial	51
II.5 Ensamble y métodos numéricos de solución	54
Capítulo III.- Implantación computacional	63
III.1 Introducción	63
III.2 Descripción de la implantación computacional	64
III.3 Procedimiento de aplicación	66
III.4 Necesidades computacionales	70

III.5 Validación de la implantación computacional	70
III.5.1 Problemas analizados	71
III.5.2 Confrontación de resultados	72
Comentarios finales	78
Apéndice I.- Procedimiento general para la transformación de operadores diferenciales ante cambios de coordenadas	80
AI.1 Introducción	80
AI.2 Desarrollo teórico	82
AI.3 El gradiente	85
AI.4 El rotacional	87
AI.5 El laplaciano escalar	90
AI.6 El laplaciano vectorial	91
AI.7 La divergencia	94
AI.8 Simbología	95
Apéndice II.- Cambio de coordenadas para el método cilíndrico	97
Apéndice III.- Integración de funciones de aproximación de elementos trian- gulares de primer orden	100
AIII.1 Introducción	100
AIII.2 Antecedentes	101
AIII.3 Desarrollo	102
AIII.4 Algunos resultados	105
Referencias bibliográficas	107

Introducción

En esta tesis se presenta un procedimiento para la solución de problemas bidimensionales de transferencia de calor por conducción, concebido para apoyar el análisis y el diseño de máquinas eléctricas y térmicas. Esta tesis contiene un sector de la documentación realizada por el autor [1, 2, 3 y 4] como investigador del Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE).

Este procedimiento fué el objetivo principal del proyecto "Infraestructura en Transferencia de Calor" del IIE dirigido por el autor. Se buscaba un procedimiento que brindara claridad en su alcance teórico, confiabilidad en sus procesos numéricos, y apertura en su implantación computacional para la incorporación de adecuaciones o nuevos procedimientos. A la vez, se pretendía generar cierta infraestructura y autonomía nacional en este campo de actividad tecnológica internacional. La aplicación del procedimiento no sólo consideró su uso en proyectos internos del IIE o en servicios de asesoría para la industria nacional, también se pensó en el apoyo que podría dar a la docencia en Ciencias e Ingeniería.

Se trabajó intensamente en lograr un producto tecnológico sólido y profesional, revisando y documentando ampliamente los fundamentos teóricos, físicos y numéricos, para delimitar los alcances y aclarar los métodos de solución del procedimiento. También se buscó un producto comercialmente competitivo, por lo que se implantó un funcionamiento computacional amistoso y bien presentado, modular y altamente interactivo (con interfaz gráfica) en la definición de problemas y en el análisis de soluciones.

Por dificultades numéricas, en la implantación computacional* se limita severamente el movimiento de los medios, incorporando sólo parcialmente al procedimiento de solución presentado. Sin embargo, permite el cálculo de campos de temperatura y flujo de calor en problemas bidimensionales en régimen estacionario o transitorio de transferencia de calor por conducción. Acepta la consideración de fuentes de calor internas en medios homogéneos, isotrópicos y lineales, y admite condiciones a la frontera del tipo Dirichlet, Neumann y convección forzada (condición mixta).

* Es un producto del IIE llamado CALIIE.2D-T. En su desarrollo se contó con la colaboración de diversos investigadores y becarios del IIE, debiéndose mencionar en especial al M.I. Octavio De la Torre quien elaboró los programas de cómputo de interfaz gráfica.

Resumen

En el capítulo I se revisan los fundamentos de la transferencia de calor, buscando aclarar sus conceptos e hipótesis, para delimitar la aplicabilidad del procedimiento de solución numérica desarrollado en esta tesis. Para ello se trata brevemente a la Termostática, con una presentación postulacional, y se desarrolla la Termostática en medios continuos con movimiento. Se particulariza en el fenómeno de conducción, obteniendo su ecuación diferencial parcial, cuya solución determina el campo de temperatura. Se mencionan los requisitos para la obtención de soluciones, identificando los diversos tipos de condiciones a la frontera y su conjugación para la existencia y unicidad de soluciones. Se revisan dos métodos descriptivos del flujo de calor en la interface de un fluido con un sólido, la convección natural y la convección forzada, estableciendo su vínculo con condiciones a la frontera.

Posteriormente, con la introducción de las hipótesis de simetría (traslacional y axial) y las hipótesis bidimensionales, se obtiene la simplificación bidimensional para hacer accesible la solución (numérica) de ciertos problemas de transferencia de calor por conducción. Se finaliza con una discusión de los conceptos de líneas de flujo e isoterms, debido a su importancia para el análisis cualitativo de los resultados numéricos.

En el capítulo II se obtienen los algoritmos que llevan los problemas a términos algebraicos; utilizando el método de Crank-Nicolson-Galerkin en la discretización espacial de elemento finito con elementos triangulares de primer orden. También se establece el procedimiento de ensamble de los sistemas de ecuaciones elementales y se plantean los métodos para la obtención de soluciones de sistemas de ecuaciones.

En el capítulo III se mencionan las características de la implantación computacional del procedimiento desarrollado en los capítulos anteriores. Se explica brevemente el método de aplicación de la implantación y las necesidades computacionales para su ejecución en computadora personal. Por último, se presenta cierta evidencia para la validación de los algoritmos y la implantación computacional; confrontando resultados numéricos de problemas simples, con otros obtenidos en forma independiente y directa.

Los apéndices de esta tesis no sólo presentan un material complementario, dado que contienen planteamientos rigurosos y autoconsistentes de aplicación general. Podrían ser considerados como trabajos independientes con extensión reducida, que fueron incluidos en su versión original con el deseo de agruparlos en un sitio útil.

En el apéndice I se desarrollan rigurosamente los elementos necesarios para efectuar "cambios de coordenadas" de operadores diferenciales, planteando un procedimiento general. Es decir, se obtienen resultados generales que pueden particularizarse al elegir un operador diferencial y un método específico de descripción del espacio. Posteriormente, como ejemplificación, se aplica el procedimiento expresando el gradiente, el rotacional, el laplaciano vectorial, el laplaciano escalar y la divergencia, de observables descritas mediante cualquier método. La simbología utilizada (se incluye un breviario) tiene características originales y fué desarrollada con la intención de explayar, lo mas íntegramente posible, los conceptos involucrados.

En el apéndice II se plantean los elementos para utilizar los procedimientos generales del apéndice I en el caso del método coordenado cilíndrico. Los resultados son utilizados al considerar la ecuación de transferencia de calor por conducción (TC-C, §I.4) en términos de la descripción cilíndrica del espacio de eventos.

En el apéndice III se establecen ciertos procedimientos de cálculo, necesarios en la aplicación del método de Galerkin en discretizaciones de elemento finito con elementos triangulares de primer orden. Estos procedimientos se refieren a la integración, en un elemento de malla o en su frontera, de diversas funciones constituidas por las funciones de aproximación (o de forma) del elemento. Posteriormente se exhiben algunos resultados de la aplicación de los procedimientos planteados, al calcular las integrales que emanan del tratamiento de problemas bidimensionales de transferencia de calor por conducción con el método de Galerkin.

Capítulo I.- Modelación térmica

Resumen

En este capítulo se revisan los fundamentos de la transferencia de calor, buscando aclarar sus conceptos e hipótesis, para delimitar la aplicabilidad del procedimiento de solución. Para ello se trata brevemente a la Termostática, con una presentación postulacional, y se desarrolla la Termostática en medios continuos con movimiento. Se particulariza en el fenómeno de conducción, obteniendo su ecuación diferencial parcial, cuya solución determina el campo de temperatura.

Se mencionan los requisitos para la obtención de soluciones, identificando los diversos tipos de condiciones a la frontera y su conjugación para la existencia y unicidad de soluciones. Se revisan dos métodos descriptivos del flujo de calor en la interface de un fluido con un sólido, la convección natural y la convección forzada, estableciendo su vínculo con condiciones a la frontera.

Posteriormente, con la introducción de las hipótesis de simetría (traslacional y axial) y las hipótesis bidimensionales, se obtiene la simplificación bidimensional para hacer accesible la solución (numérica) de ciertos problemas de transferencia de calor por conducción. Se finaliza con una discusión de los conceptos de líneas de flujo e isoterma, debido a su importancia para el análisis cualitativo de los resultados numéricos.

§I.1 Introducción

Para lograr claridad y confiabilidad en un procedimiento de solución de problemas de transferencia de calor, es indispensable una revisión de los fundamentos de la teoría física que la sustenta, buscando aclarar sus conceptos e hipótesis para "definir" el alcance de la teoría física. De esta manera, en principio un problema específico estaría en el dominio de la teoría física cuando es caracterizable o modelable con los elementos de dicha teoría, incluyendo la especificación de condiciones iniciales y a la frontera para la existencia y unicidad de solución del problema.

La obtención de la solución de un problema de transferencia de calor por conducción requiere generalmente de la solución de una ecuación diferencial parcial, que las más de las veces resulta inaccesible en forma directa, por lo que se desarrollan procedimientos que utilizan métodos numéricos. Pero aún así, la complejidad de los sistemas de ecuaciones resultantes obliga a la adopción de hipótesis físicas simplificadoras y a la especificación de ciertas opciones para las condiciones a la frontera, caracterizando las modelaciones térmicas formulables en un procedimiento de solución de problemas de transferencia de calor, lo cual es el objetivo de este capítulo.

§I.2 Antecedentes

El deseo de lograr una presentación coherente del fenómeno de transferencia de calor, obliga a una breve exposición de algunos aspectos de la Termostática (Termodinámica de sistemas en equilibrio o Termodinámica Clásica) que son relevantes al fenómeno.

La Termostática es una teoría física macroscópica y no probabilista, con la que se describen algunas observables de ciertos sistemas físicos. Los sistemas físicos de la Termostática son definidos por un observador mediante la consideración de uno o varios volúmenes de control. Los valores de las observables del sistema, se refieren a la substancia contenida en el volumen de control considerado y caracterizan el estado del sistema. Estos valores están relacionados con el comportamiento del volumen de control: estático o con movimiento, con volumen constante o no, permeable a la materia o no, permeable al flujo de energía o no, etc. La asignación del comportamiento del volumen de control para un fenómeno específico la efectúa el observador y constituye un aspecto importante de la modelación del fenómeno.

La interrelación volumen de control-substancia-fenómeno, no es trivial y existen limitaciones para que un sistema físico pueda ser considerado como un sistema termodinámico. La naturaleza macroscópica de la Termostática, plantea una dependencia entre el tamaño del volumen de control y la substancia contenida en él; en términos burdos, debe cumplirse que el volumen de control sea lo "suficientemente" grande como para que no se manifieste el carácter molecular (microscópico) de la substancia contenida. La condición macroscópica también tiene relación con el lapso utilizado para efectuar las observaciones; éste debe tener una amplitud "suficiente" como para ocultar ("promediar") las fluctuaciones moleculares propias de la materia.

El carácter no probabilista de la Termostática se refiere al tipo de descripción de los sistemas; los valores de las observables no incluyen información probabilista o estadística

del error¹ intrínseco en los sistemas físicos. Este error es natural, proviene de la inexistencia de sistemas realmente aislados y de la impotencia a construir sistemas estrictamente iguales; por lo que toda teoría física², independientemente a si es o no probabilista, pretende describir a conjuntos finitos de sistemas físicos "equivalentes". Es decir, la información experimental debe provenir de un conjunto de sistemas físicos "equivalentes" y las predicciones de una teoría física se asocian a un conjunto de sistemas físicos "equivalentes", aunque se mantenga el uso del término sistema.

Frecuentemente, para simplificar la presentación de la Termostática, inicialmente se consideran sistemas físicos simples. Estos sistemas son homogéneos³, isotrópicos, químicamente inertes y exentos de interacciones electromagnéticas y gravitacionales. Otro aspecto fundamental de los sistemas termodinámicos, dentro de la Termostática, se refiere al comportamiento admisible de los sistemas: deben encontrarse en estado de equilibrio. La definición de estado de equilibrio es definitivamente circular⁴ y sólo puede plantearse como una condición necesaria mas no suficiente⁵ para su presencia: la permanencia de los valores de las observables cuando el sistema esta "aislado". La carencia de una condición suficiente, conduce a la incertidumbre de si ciertos sistemas son descriptibles mediante la Termostática, lo cual sólo puede ser aclarado al confrontar las predicciones de la teoría con los resultados experimentales...

La condición de estado de equilibrio incluso es incompleta, pues se requiere la identificación de las observables (variables de estado) que lo caracterizan completamente. Esta situación es delicada y conviene enfrentarla en términos postulacionales [6], con lo que se enfatiza el sentido y limitaciones de la teoría.

Postulado I.- Para los sistemas termodinámicos simples existen los estados de equilibrio, quienes están completamente caracterizados por la energía interna u , el volumen v y los números molares N_k de las k sustancias⁶ que constituyen el sistema.

¹ Del latín *errare* que se asocia a vagar o fluctuar, por ello no debe interpretarse como el efecto de una equivocación.

² De hecho es una posición filosófica que ha dado lugar a muchas controversias en la Física, manifestándose especialmente en la Mecánica Cuántica [5].

³ Debe tenerse que la substancia se encuentre uniformemente distribuida en el volumen de control adoptado, aún cuando la substancia sea una mezcla de diversas substancias.

⁴ Dado que la definición de las observables de un sistema termodinámico exige que el sistema se encuentre en estado de equilibrio; i.e. estrictamente las observables termodinámicas sólo tienen sentido cuando el sistema esta en equilibrio.

⁵ Como ejemplo de la no suficiencia se plantean ciertos aceros sujetos a procesos de preparación diferentes.

⁶ Puede utilizarse cualquier término descriptivo de la dimensión de la substancia: el

Este postulado explicita las observables que resultan suficientes para describir el estado de cualquier sistema termodinámico (simple) dentro de la Termostática, independientemente de la sustancia contenida en los sistemas termodinámicos. Existen otras observables de los sistemas termodinámicos en estado de equilibrio, su descripción se dá en términos de funciones definidas en las observables declaradas en el postulado I, por lo que se les llama funciones de estado. Estas funciones describen el comportamiento de dichas observables en cualquier sistema termodinámico constituido por la misma sustancia; están vinculadas a la naturaleza de la sustancia considerada y su forma depende de ella, por ello son utilizables en la descripción de cualquier sistema termodinámico que contenga esa sustancia.

El postulado I no hace referencia a la naturaleza topológica del conjunto de estados de equilibrio accesibles a un sistema; al que se le conoce como espacio de configuración del sistema EC . Tradicionalmente se utiliza al cálculo diferencial usual (diferencial de Frechet), por lo que sólo se debe considerar al interior del espacio de configuración EC° , suponiéndolo como un subconjunto de \mathfrak{R}^{2+k} no vacío⁷.

Es conveniente mencionar que este postulado no excluye la posibilidad de considerar sistemas compuestos de subsistemas, siempre y cuando cada uno de los subsistemas satisfaga ser un sistema termodinámico (simple). En este caso, un estado de equilibrio del sistema compuesto con m subsistemas, estaría caracterizado por las energías internas u_1, \dots, u_m , los volúmenes de los subsistemas v_1, \dots, v_m y los números molares $N_{11}, \dots, N_{1k(1)}, \dots, N_{m1}, \dots, N_{mk(m)}$. El espacio de configuración (del sistema compuesto) estaría contenido en $\mathfrak{R}^{2m + \sum_{i \in \mathfrak{n}} k(i)}$, en donde $\tilde{m} \equiv \{1, \dots, m\} \subset \mathcal{N}$.

Al hablar de la energía interna de un sistema, se entiende que se utiliza algún estado de equilibrio A , en el que se fija arbitrariamente un valor para la energía interna. La energía interna en otro estado de equilibrio B , es la energía transferida (o extraída) al sistema para el cambio de estado $A \rightarrow B$; i.e. el estado inicial es A y B es el estado final. Este planteamiento exige la capacidad de medir dicha transferencia de energía, para lo cual se podría elegir un proceso en el que únicamente se realice trabajo mecánico para

número de moléculas n_k o la masa M_k . Nótese que

$$N_k \equiv \frac{n_k}{N_0} \quad \text{y} \quad N_0 \equiv \frac{M_{0k}}{m_k} = 6.024 \times 10^{23}$$

en donde N_0 es el número de Avogadro, m_k la masa molecular y M_{0k} la masa molar.

⁷ Existe la opción, definitivamente más apropiada pero altamente sofisticada, de considerar al espacio de configuración como una variedad diferenciable y utilizar al cálculo exterior [7].

dicho cambio de estado; garantizando ésto con el uso de aislamientos apropiados (paredes adiabáticas) para el volumen de control.

Esta presentación de la energía interna resulta operativa, si se acepta la "demostración" experimental (el trabajo de Joule es relevante) de que siempre existe un proceso puramente mecánico para el cambio de estado $A \rightarrow B$ o bien $B \rightarrow A$, cuando se mantienen los números molares de un sistema termodinámico. Sin embargo, implícitamente se presupone la posibilidad de identificar y calificar estados de un sistema como de equilibrio, en forma independiente a la energía interna, aún cuando el postulado I exige su conocimiento para caracterizar un estado. Esta objeción sólo es parcialmente superable, mediante la consideración de estados muy tipificados de ciertos sistemas, por ejemplo los estados asociados a los cambios de fase...

El postulado I plantea la energía interna como una variable de estado, presentando una forma favorable para introducir la entropía como una función de estado; por ello se dice que este postulado establece la representación entrópica de la Termostática. Existen otras representaciones de la Termostática [6], todas ellas diferentes y en principio equivalentes, de hecho su existencia se debe a que cada una de ellas facilita ciertos desarrollos. Sin embargo, propician confusiones y serias dificultades matemáticas.

La Termostática busca identificar el estado de equilibrio final de un sistema termodinámico para un proceso real y un estado de equilibrio inicial conocidos; generalmente se consideran sistemas termodinámicos compuestos y los procesos se provocan con la remoción de alguna constricción interna. En un proceso real se presentan algunos estados de equilibrio intermedios, los cuales son utilizados para modelar el proceso con un proceso en el espacio de configuración del sistema; conocido como proceso casi-estático. En la representación entrópica, la función de estado entropía es quien permite introducir el criterio para la determinación de estados finales ante procesos casi-estáticos conocidos, y se establece en los términos siguientes:

Postulado II.- Existe una función de estado S (definida en los estados de equilibrio), llamada entropía, cuyo máximo en una subvariedad⁸ (contenida en el espacio de configuración) corresponde al estado final del proceso casi-estático que define la subvariedad.

⁸ El concepto general de subvariedad de un espacio normado [7 Cap.3 §12] es algo complicado. Para disponer de un procedimiento que permita la determinación de máximos o mínimos relativos, resulta conveniente una definición limitada de subvariedad:

Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es una subvariedad n -dimensional, si existe una función $G : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable con continuidad en un conjunto abierto E (i.e. $G \in C^1(E)$ con $E \in \tau$), tal que $X = G^{-1}(\{0\}) \subseteq E$ y $G'(x)$ suprayectiva $\forall x \in X$.

En los términos de esta definición se puede plantear fácilmente el método de los

Este postulado, conocido como el principio de máxima entropía, establece la capacidad predictiva de la Termostática en su representación entrópica, y el conocimiento de la función S de un sistema brinda toda la información termodinámica del sistema. Conviene enfatizar que el postulado no permite definir la trayectoria seguida por un sistema ante un proceso cuasi-estático, y menos aún la descripción temporal de dicha trayectoria... se trata de una limitación intrínseca de la Termostática.

La entropía posee otras propiedades que son presentadas en el postulado III, pero para ello es necesario establecer una identificación de las observables físicas de un sistema termodinámico simple con el espacio \mathfrak{R}^{2+k} haciendo: $x_1 \leftrightarrow$ con la energía interna, $x_2 \leftrightarrow$ con el volumen y $x_3 \dots x_{2+k} \leftrightarrow$ con los números molares; en donde $x \in \mathfrak{R}^{2+k}$ describe un estado de equilibrio.

Postulado III.- La entropía es una función diferenciable con continuidad ($S \in C^1(EC^0)$) y en un sistema compuesto es aditiva. Además, es monótona creciente con la energía interna; i.e. $D_1 S = \frac{\partial S}{\partial z_1} > 0$.

Es necesario aclarar la propiedad aditiva de la entropía en un sistema compuesto; si se supone que está constituido por los subsistemas A y B , entonces⁹:

$$S_{A \cup B} = S_A \circ (p_1^{(4+k_A+k_B)}, \dots, p_{2+k_A}^{(4+k_A+k_B)}) + S_B \circ (p_{3+k_A}^{(4+k_A+k_B)}, \dots, p_{4+k_A+k_B}^{(4+k_A+k_B)}) \quad (I.2.1)$$

En términos de un sólo sistema se complementa el postulado III diciendo que la entropía se comporta como sigue¹⁰

$$S \circ \lambda I_{\mathfrak{R}^{2+k}} = \lambda S \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R}$$

en donde se explicita que los valores de la función dependen de la extensión (tamaño) del sistema¹¹. Estrictamente este planteamiento no es una consecuencia de la propiedad

multiplicadores de Lagrange, el cual brinda una condición necesaria (más no suficiente) para la determinación de máximos (o mínimos) relativos:

Si $F : B \subseteq \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R}$ es diferenciable y posee un máximo (o mínimo) en la subvariedad $X \subseteq B$ en el punto x_0 , entonces existe una funcional $g \in \mathcal{L}(\mathfrak{R}^m, \mathfrak{R})$, tal que x_0 es un punto crítico de $F - g \circ G$; i.e. $(F - g \circ G)'(x_0) = 0$, en donde el símbolo \circ se refiere a la composición de funciones.

⁹ Para $m, n \in \mathcal{N}$ tal que $m \leq n$, se define la función $p_m^{(n)} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ haciendo $p_m^{(n)}(x) = x_m \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n$, y se le llama función proyectiva m -ésima de \mathfrak{R}^n .

¹⁰ Para un conjunto A , se define la función $I_A : A \rightarrow A$ haciendo $I_A(a) \equiv a \quad \forall a \in A$, y se le llama función identidad en A .

¹¹ En la Termostática a una función con este comportamiento se le llama función extensiva.

aditiva para sistemas compuestos, sin embargo (I.2.1) lo hace plausible con un sistema constituido por dos subsistemas iguales en el mismo estado.

La representación entrópica es conveniente para una presentación coherente de la Termostática. Sin embargo, para el objetivo de esta tesis será necesario incorporar la representación energética, en donde resulta que la energía interna es una función de estado y la entropía una variable de estado. En la literatura se asegura que las condiciones $S \in C^1(EC^0)$ y $D_1S > 0$, son suficientes para la existencia de una función U , con la propiedad¹²

$$p_1^{(2+k)} = U \circ (S, p_2^{(2+k)}, \dots, p_{2+k}^{(2+k)}) \quad (S \rightarrow U)$$

manifestando que U es la función energía interna, y con el postulado I, que los estados de equilibrio también pueden estar caracterizados por la entropía s , el volumen v y los números molares N_k ; luego U es una función de estado y su espacio de configuración es el antes mencionado. Pero también se dice que la función U es idempotente a la función S , pues aseguran que el principio de máxima entropía permite inferir al principio de mínima energía; en donde se sustituye "máximo de la función S " por "mínimo de la función U ".

En otros términos, se dice que el postulado III permite la inferencia de la representación energética de la Termostática, en la cual la energía interna es una función de estado y la entropía una variable de estado. La capacidad predictiva de esta representación la establece el principio de mínima energía y el conocimiento de la función U de un sistema brinda toda la información termodinámica del sistema. De la propiedad $S \rightarrow U$ y de (I.2.1) se sigue que la energía interna es aditiva en un sistema compuesto y de esto también se dice que es una función extensiva.

Aceptando la "inferencia" de la representación energética, la propiedad $(S \rightarrow U)$ establece que sus observables físicas están identificadas con el espacio \mathfrak{R}^{2+k} como sigue: Si $x \in \mathfrak{R}^{2+k}$ describe un estado de equilibrio, entonces: $x_1 \leftrightarrow$ con la entropía, $x_2 \leftrightarrow$ con el volumen y $x_3 \dots x_{2+k} \leftrightarrow$ con los números molares. En estos términos y sólo por completéz, se presenta el último postulado de la Termostática (3a. Ley de la Termodinámica):

Postulado IV.- Si para un estado de equilibrio x se tiene que $D_1U(x) = 0$, entonces $x_1 = 0$; i.e. la entropía del sistema es nula.

En la representación energética es posible introducir otras funciones de estado, que resultan ser variables de estado en otras representaciones, y se definen como sigue:

¹² El postulado permite la aplicación del teorema de la función implícita [7 Cap.3 §11], pero esto no basta para deducir la propiedad $(S \rightarrow U)$...

— La función temperatura $T \equiv D_1 U$.

— La función presión $P \equiv -D_2 U$.

— Para $j \in \bar{k}$, la función potencial electroquímico j -ésimo $\mu_j \equiv D_{j+2} U$.

Estas definiciones son compatibles con el comportamiento cualitativo que se espera de dichas funciones [6 Cap.2], haciendo aceptable el enfoque postulacional adoptado. Es frecuente que se les conozca como "ecuaciones" de estado, posiblemente con el ánimo de enfatizar que el conocimiento de todas ellas permite (mediante la relación de Euler) la determinación de U ; que brinda, como ya se dijo, toda la información termodinámica de un sistema.

Con la representación energética es sencillo introducir el concepto de calor transferido (extraído) a (de) un sistema termodinámico simple en un cambio de estado con un proceso cuasi-estático dado, haciendo¹³

$$Q(g) \equiv \int_0^1 T \circ g \, Dg_1 \quad (\text{I.2.2})$$

en donde $g : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}^{2k}$, posee derivada continua y $g([0, 1]) \subseteq EC^0$. Se trata de una función cuyo dominio es el conjunto de curvas suaves en el espacio de configuración del sistema (procesos cuasi-estáticos), por lo cual el calor no es una función de estado; dicho en otros términos, no es algo que "posea" el sistema aún con estados inicial y final definidos, pues es una función que depende del proceso. Cuando ante un proceso cuasi-estático dado, descrito por la función g , se tiene que $Q(g) \geq 0$ se dice que $Q(g)$ es el calor transferido al sistema en el proceso, y cuando $Q(g) < 0$ se dice que $Q(g)$ es el calor extraído del sistema en el proceso.

En la literatura se plantean frecuentemente procesos cuasi-estáticos "suficientemente" pequeños, llamados procesos infinitesimales. Para tratar el calor se consideran procesos infinitesimales descritos por funciones del tipo $g = x_0 + \lambda I_{\mathfrak{R}}$ en donde $x_0 \in EC^0$, y $\lambda \in \mathfrak{R}^{2+k}$ es lo suficientemente pequeño como para que $T(x_0) \approx T(x_0 + \lambda x) \forall x \in [0, 1]$. Ante estos procesos se adopta la notación $dQ \equiv Q(g)$ y de (I.2.2) se tiene

$$dQ = \lambda_1 \int_0^1 T \circ (x_0 + \lambda I_{\mathfrak{R}}) \approx \lambda_1 T(x_0) \int_0^1 1 = T(x_0) \lambda_1 \quad (\text{I.2.3})$$

es decir $dQ \approx T ds$ al hacer $\lambda = (ds, dv, dn_1, \dots, dn_k)$ enfatizando el carácter infinitesimal del proceso.

¹³ Para $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}^n$ se define su función componente i -ésima $f_i : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ haciendo $f_i \equiv p_i^n \circ f$.

Para interpretar la función Q en un proceso infinitesimal, es necesario considerar la diferencial de U [7 Cap.3]; para un sistema termodinámico simple, se tiene¹⁴

$$U' = \sum_{i=1}^{2+k} D_i U \overline{p_i^{(2+k)}} = T \overline{p_1^{(2+k)}} - P \overline{p_2^{(2+k)}} + \sum_{i \in k} \mu_i \overline{p_{2+i}^{(2+k)}}$$

luego, de la definición de la diferencial, para $x_0 \in EC^0$ y un $\lambda \in \mathbb{R}^{2+k}$ suficientemente pequeño se sigue que

$$\Delta U_{x_0 \rightarrow x_0 + \lambda} \equiv U(x_0 + \lambda) - U(x_0) \approx [U'(x_0)](\lambda)$$

y de (I.2.3)

$$\Delta U_{x_0 \rightarrow x_0 + \lambda} \approx dQ - P(x_0) \lambda_2 + \sum_{i \in k} \mu_i(x_0) \lambda_{2+i}$$

en donde $dU \equiv \Delta U_{x_0 \rightarrow x_0 + \lambda}$ es la energía transferida al sistema en el cambio de estado infinitesimal. Ahora, como $W(g) \equiv -P(x_0) \lambda_2$ es el trabajo mecánico realizado sobre el sistema (en un proceso infinitesimal también se hace $dW \equiv W(g)$), cuando se tiene que $\lambda_{2+i} = 0 \quad \forall i \in \bar{k}$, se sigue que dQ es la porción de energía no mecánica transferida al sistema en el proceso infinitesimal. Nótese que el trabajo y el cambio de números molares son observables macroscópicas de un proceso, a diferencia del calor, por ello, se dice que el calor está asociado a cambios en observables ocultas para la Termostática cuyo efecto se manifiesta en dU .

En un proceso arbitrario la situación es semejante, pues del teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\Delta U_{g(0) \rightarrow g(1)} = \int_0^1 D(U \circ g) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{2+k} D_i U \circ g \, Dg_i$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \Delta U_{g(0) \rightarrow g(1)} &= \int_0^1 \left(T \circ g \, Dg_1 - P \circ g \, Dg_2 + \sum_{i \in k} \mu_i \circ g \, Dg_{2+i} \right) \\ &= Q(g) + W(g) + \sum_{i \in k} \int_0^1 \mu_i \circ g \, Dg_{2+i} \end{aligned}$$

en los términos de los párrafos anteriores, estableciéndose que el calor en el cambio de estado descrito por g depende del proceso e incide en el cambio de energía del sistema.

¹⁴ Para una función $f: A \rightarrow B$, se define la función \bar{f} haciendo $\bar{f}(x) = f \quad \forall x \in C$, estando definido el conjunto C por el contexto.

Un atributo de las sustancias, importante para el estudio de la transferencia de calor, es el calor específico. Su definición se basa en la consideración de un sistema termodinámico simple constituido únicamente por una sustancia, en el que se conserva su masa M . En el contexto de la representación energética, el calor específico c [$J/(kg \text{ } ^\circ C)$] se define en términos de procesos haciendo

$$c(g) \equiv \frac{1}{M} \frac{Q(g)}{T(g(1)) - T(g(0))} \quad (I.2.4)$$

en donde g describe un proceso cuasi-estático. En la práctica se consideran dos tipos de calores específicos:

- El calor específico a presión constante c_p ; definido con un proceso en el que la presión del sistema se mantiene constante.
- El calor específico a volumen constante c_v ; definido con un proceso en el que el volumen del sistema se mantiene constante.

Es claro que en ambos casos se presenta una dependencia con el proceso, pero aún así se tratan como funciones asociando su valor al estado inicial del proceso...

Para finalizar esta sección, es conveniente aclarar las dimensiones físicas de la temperatura y la entropía. El postulado II omite este aspecto y de la definición de la temperatura, sólo se sigue que el producto de las dimensiones de la entropía y la temperatura coincide con la dimensión de la energía interna [J]. La asignación más simple consiste en hacer adimensional alguno de los factores, asociándole la dimensión de energía al otro factor. En efecto esto es lo que se hace, el cómo es cuestión de preferencia, pues resulta intrascendente la elección, siempre y cuando se proceda en forma consistente¹⁵.

La medición de la temperatura se efectúa en forma indirecta, de hecho lo que se mide directamente y sin ambigüedades es el cociente de las temperaturas de dos sistemas (la eficiencia termodinámica), lo cual define las escalas termodinámicas o absolutas de temperatura hasta una constante multiplicativa arbitraria. La adopción de una escala proviene de la elección de una temperatura específica para un cierto sistema en un estado plenamente tipificado: La escala absoluta Kelvin se obtiene asignando la temperatura de 273.16 al punto triple del agua y a la unidad se le llama grado Kelvin $^\circ K$. Análogamente, se define la escala absoluta Fahrenheit asignándole 491.688 al mismo sistema en el punto triple y a la unidad de esta escala se le llama grado Rankine $^\circ R$, por lo que $x \text{ } ^\circ R \leftrightarrow \frac{5}{9}x \text{ } ^\circ K \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Existen otras escalas de temperatura, llamadas escalas prácticas, tales como la Celsius $^\circ C$ y la Fahrenheit $^\circ F$, en las que se tiene:

$$x \text{ } ^\circ C \leftrightarrow (x + 273.15) \text{ } ^\circ K \quad \text{y} \quad x \text{ } ^\circ F \leftrightarrow (x + 459.67) \text{ } ^\circ R$$

¹⁵ Usualmente se hace adimensional la entropía, por lo que la temperatura tendría la misma dimensión que la energía.

por lo tanto $x^{\circ}F \leftrightarrow \frac{5}{9}(x - 32)^{\circ}C$ y $x^{\circ}F \leftrightarrow \frac{5}{9}(x + 459.67)^{\circ}K$. Los cocientes de temperatura en estas escalas son diferentes a los correspondientes en las escalas absolutas, por ello, deben transformarse las temperaturas prácticas a temperaturas absolutas antes de utilizarlas en expresiones termodinámicas.

§I.3 Termostática en medios con movimiento

El concepto de medio continuo se aplica a una sustancia en la que es definible un volumen, llamado crítico, cuya dimensión es lo "suficientemente" pequeña como para ser considerado como "puntual" con respecto al tamaño global del sistema físico, pero también es lo "suficientemente" grande como para que no se manifieste el carácter molecular de la sustancia que contiene. El volumen crítico permite la definición de subsistemas en el medio, con volumen de control igual al volumen crítico, y el comportamiento de las observables en dichos subsistemas es "continuo" (de hecho suave) en el espacio de eventos.

Las características de un sistema termodinámico, en especial la condición de homogeneidad de las variables de estado, hacen que la Termostática sea inaplicable en forma directa en la mayoría de los sistemas físicos constituidos por medios continuos. Sin embargo, la existencia del volumen crítico implícito en un medio continuo [8], permite la construcción de campos escalares asociados a las funciones de estado de la representación utilizada, dado que el volumen crítico tiene la dimensión mínima de un volumen de control que cumple con las propiedades de un sistema termodinámico.

La metodología expresada para incorporar los medios continuos a la Termostática requiere de una explicación más amplia. La determinación del volumen crítico de un medio continuo se efectúa mediante la consideración de diferentes volúmenes de control en un conjunto de sistemas físicos "equivalentes". En cada elemento del conjunto de sistemas se define un subsistema con un volumen de control y se procede a la medición de alguna observable intensiva (independiente del tamaño del sistema) en todos los subsistemas. Por tratarse de una observable intensiva en principio debía presentarse una uniformidad, pero en general no es así; la falta de homogeneidad en el medio da lugar a sólo una tendencia hacia cierto valor conforme disminuye la dimensión del volumen de control, y si se continua esta disminución se presentan cambios abruptos por alcanzar la escala molecular de la sustancia. El volumen crítico, se define con la dimensión del volumen mínimo del "intervalo" de volúmenes en donde se observa la aproximación a la estabilización de la observable intensiva utilizada.

Respecto a la construcción de campos escalares asociados a las funciones de estado, el proceso es como sigue. Una vez determinado el volumen crítico de un medio continuo,

con un número finito de eventos (puntos en el espacio-tiempo) es posible generar sus correspondientes subsistemas termodinámicos; utilizando en cada instante a volúmenes de control con la dimensión del volumen crítico y ubicándolos en la parte espacial de los eventos asociados al instante considerado. De esta manera, se identifican los eventos elegidos¹⁶ con subsistemas termodinámicos, aprovechando la propiedad "puntual" del volumen crítico. El estado de dichos subsistemas termodinámicos y el conocimiento de las funciones de estado para la substancia que constituye al medio continuo, permite definir campos escalares (finitos) asociados las funciones de estado de la representación considerada, y en principio se puede proceder a una complementación de ellos en la descripción cartesiana del espacio de eventos $E \subseteq \mathfrak{R}^4$, de modo tal que los campos resultantes sean funciones diferenciables con continuidad (clase C^1).

La posibilidad de definir campos asociados a las funciones de estado es independiente al movimiento del medio, al menos conceptualmente¹⁷. Sin embargo, el movimiento del medio provoca dificultad en la identidad de los subsistemas generados en el espacio de eventos a partir del volumen crítico. La identidad de estos subsistemas puede lograrse de dos maneras:

- Con un volumen de control fijo en el espacio e indeformable; dando lugar a subsistemas con paredes permeables al flujo de materia.
- Con un volumen de control móvil y deformable, inicialmente con la dimensión del volumen crítico y de modo tal, que durante cierto lapso se pueda suponer que no hay flujo de materia en sus paredes; i.e. subsistemas de masa constante, con volumen variable y vida efímera.

La segunda opción es la tradicionalmente aceptada y es la adoptada en esta tesis. Permite proponer que $EC \subseteq \mathfrak{R}^2$, suponiendo que los subsistemas pueden ser tratados como sistemas termodinámicos simples en donde se omite la descripción de la masa, dado que la masa de cada subsistema es constante durante los lapsos en los que conservan su identidad (sin que ésto signifique que la masa es la misma en todos los subsistemas).

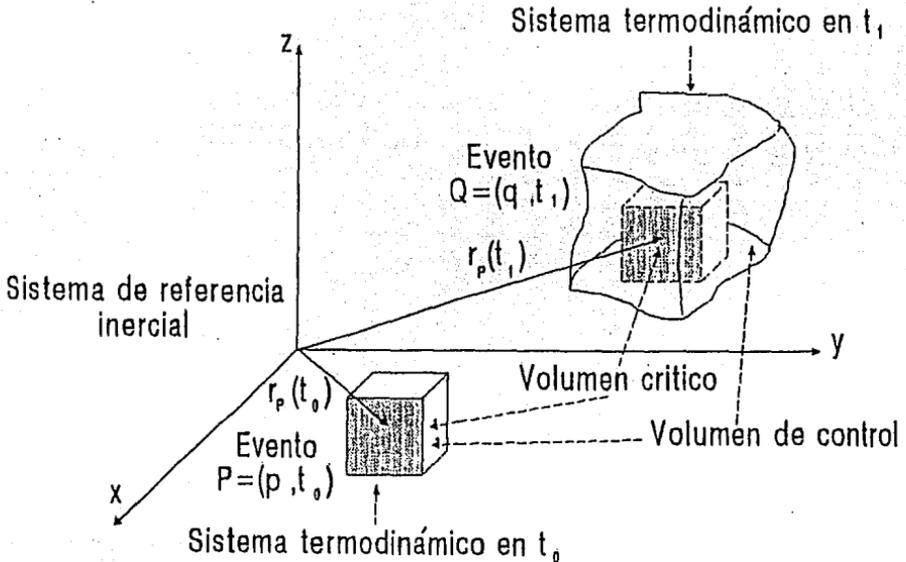
La opción seguida está íntimamente relacionada con el campo de velocidad del medio \mathbf{V} , el cual se obtiene mediante la observación de la posición de los subsistemas en los breves lapsos en los que mantienen su identidad. En efecto, para un evento P cualquiera, el comportamiento de \mathbf{V} es el siguiente:

$$\mathbf{V} \circ (r_P, I_{\mathfrak{R}}) = D r_P = \frac{dr_P}{dt} \quad \text{en } [t_0, t_0 + \delta_P] \quad (\text{I.3.1})$$

¹⁶ La adopción de un sistema de referencia con la intención de describir un fenómeno físico, con las teorías físicas establecidas, exige la consideración de un sistema de referencia inercial [10 Cap.3].

¹⁷ Se dice [9 §49] que el planteamiento sólo es aplicable en medios con pequeñas velocidades y "gradientes" de temperatura.

en donde se establece la identificación $P \leftrightarrow (p, t_0) \in \mathbb{R}^4$ mediante el método cartesiano, $[t_0, t_0 + \delta_p] \subset \mathbb{R}$ es el intervalo correspondiente al lapso en el que mantiene su identidad el subsistema asociado a P , y $r_p : [t_0, t_0 + \delta_p] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $r_p(t_0) = p$ es la función de posición (cartesiana) del subsistema desde el sistema de referencia utilizado.



Evolución del sistema termodinámico asociado al evento $P \leftrightarrow (p, t_0)$

Con los elementos dados, para cada evento es aceptable proponer la existencia de una función puramente conceptual $f_p : [t_0, t_0 + \delta_p] \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuyos valores describan el estado termodinámico específico¹⁸ del subsistema asociado al evento P . En la representación energética se tendría que $f_p([t_0, t_0 + \delta_p]) \subseteq EC^\dagger$ en donde la primera componente corresponde a la entropía específica y la segunda al volumen específico del subsistema para cada instante $t \in [t_0, t_0 + \delta_p]$.

¹⁸ El término específico se aplica al cociente del valor de una observable entre la masa del sistema; notando al espacio de configuración "específico" con $EC^\dagger \subseteq \mathbb{R}^2$.

La función f_p no se infiere de la Termostática, pues no puede brindar la evolución temporal de un sistema. Sin embargo, f_p describe el proceso cuasi-estático "seguido" por el subsistema en el lapso $[t_0, t_0 + \delta_p]$ y este proceso es afín a la Termostática, es decir está regido por el principio de mínima energía en la representación energética.

La utilidad de f_p radica en que permite establecer el vínculo entre los campos asociados a las funciones de estado y las funciones de estado de los subsistemas¹⁹. En efecto, para la temperatura se tendría que

$$T(r_p(t), t) = T^\dagger(M_p, f_p(t)) = T^\dagger(f_p(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_p] \quad (\text{I.3.2})$$

para la función densidad (volumétrica) de masa ρ^\dagger se tiene

$$\rho(r_p(t), t) = \rho^\dagger(M_p, f_p(t)) = \frac{1}{p_2^{(2)}(f_p(t))} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_p] \quad (\text{I.3.3})$$

y para el calor específico a presión constante²⁰

$$c_p(p, t_0) \equiv c_p^\dagger(M_p, f_p) \quad (\text{I.3.4})$$

en donde, en el instante t el subsistema con el que se define a f_p no es necesariamente igual al subsistema asociado a $(r_p(t), t)$, pues el primero podría modificar su volumen de control para mantener la substancia original; sin embargo, cuando se consideran funciones de estado intensivas (independientes de la extensión del subsistema) se presenta la igualdad. Estas expresiones muestran la metodología para desarrollar la Termostática de medios con movimiento, en la que se explicita los términos en los que se puede y debe introducir la Termostática para describir dichos sistemas.

Otro ejemplo de la metodología, importante para la transferencia de calor, es la razón de cambio de la temperatura de subsistemas asociados a eventos; $D(T^\dagger \circ f_p)$. A partir de (I.3.2) se obtiene que

$$D(T^\dagger \circ f_p) = \left(\langle \mathbf{V}, \nabla T \rangle + \frac{\partial T}{\partial t} \right) \circ (r_p, I_{\mathbb{R}}) \quad \text{en } [t_0, t_0 + \delta_p] \quad (\text{I.3.5})$$

debido a (I.3.1), en donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar usual de \mathbb{R}^3 y ∇ se refiere al gradiente. En la literatura es frecuente que al operador $\langle \mathbf{V}, \nabla \rangle + \frac{\partial}{\partial t}$ se le llame derivada substancial; esto se debe a (I.3.5), pues el miembro izquierdo proviene del seguimiento de un subsistema cuyo contenido (substancia) se mantiene.

¹⁹ De aquí en adelante se utiliza el superíndice \dagger para las funciones de estado.

²⁰ En los subsistemas considerados el volumen puede ser variable, por lo que en general no tiene sentido el calor específico a volumen constante c_v^\dagger .

§I.4 Transferencia de calor por conducción

La ecuación general de transferencia de calor es una ecuación diferencial parcial para el campo de temperatura T en un medio continuo, que puede expresarse en los términos siguientes²¹

$$\rho c_p \left(\langle \mathbf{V}, \nabla T \rangle + \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q_{int} \quad (\text{TC})$$

en la cual se considera al movimiento del medio con el campo de velocidad \mathbf{V} e incorpora dos campos ajenos a la Termostática; el flujo de calor \mathbf{q} y el calor interno Q_{int} que están relacionados al cómo ocurre la transferencia de calor en el medio.

La obtención de esta ecuación se hará con la metodología de la sección anterior, y para ello basta proponer que los procesos en los que los subsistemas mantienen su identidad corresponden a procesos "suficientemente" pequeños y a presión constante, lo cual es una condición razonable para los subsistemas asociados a eventos en un medio continuo. Sin embargo, su obtención también puede darse [9] en términos de la energía interna y la entalpía \hat{H} en la representación energética²², la cual no debe confundirse con la entalpía H en la representación entálpica de la Termostática²³.

En efecto, en los términos de la sección anterior para un evento cualquiera P

²¹ No hay uniformidad en la ecuación asignada a este nombre. En [9 §50] plantean a (I.4.1) como una simplificación para fluidos cuya velocidad sea pequeña comparada con la velocidad del sonido, sin embargo, su ecuación general se refiere al caso de transferencia de calor por conducción. Análogamente, en [11 §7.8] obtienen una ecuación similar (para conducción) omitiendo la condición anterior para la velocidad, pero la llaman ecuación general de energía...

²² Este último planteamiento brinda un resultado más general, ya que establece la ecuación general de energía que puede reducirse a la ecuación general de transferencia de calor, pero su obtención resulta bastante complicada por requerir del tensor de esfuerzos (cuya forma depende de la naturaleza del medio continuo).

²³ La función de estado fundamental en la representación entálpica de la Termostática es la entalpía H , que puede definirse en forma implícita con la entalpía en la representación energética $\hat{H} \equiv U + P p_2^{(2+k)}$, haciendo

$$\hat{H} = H \circ (p_1^{(2+k)}, P, p_3^{(2+k)}, \dots, p_{2+k}^{(2+k)})$$

por lo que la segunda componente del espacio de configuración de la representación entálpica se identifica con la presión.

identificado con $(p, t_0) \in \mathfrak{R}^4$ se tiene

$$\begin{aligned} [\rho c_p](p, t_0) &= \rho^\dagger(M_P, f_P(t_0)) c_p^\dagger(M_P, f_P) \\ &= \frac{1}{p_2^2(f_P(t_0))} \frac{Q_P(M_P, f_P)}{M_P (T^\dagger(M_P, f_P(t_0 + \delta_P)) - T^\dagger(M_P, f_P(t_0)))} \\ &= \frac{Q_P(M_P, f_P)}{M_P p_2^2(f_P(t_0)) (T^\dagger(f_P(t_0 + \delta_P)) - T^\dagger(f_P(t_0)))} \end{aligned}$$

debido a (I.3.3), (I.3.4), (I.2.4) y (I.3.2). Al suponer el proceso "suficientemente" pequeño se puede decir que

$$T^\dagger(f_P(t_0 + \delta_P)) - T^\dagger(f_P(t_0)) \approx \delta_P [D(T^\dagger \circ f_P)](t_0) = \delta_P \left[(\mathbf{V}, \nabla T) + \frac{\partial T}{\partial t} \right] (p, t_0)$$

considerando (I.3.5) en la última igualdad, por lo cual

$$\left[\rho c_p \left((\mathbf{V}, \nabla T) + \frac{\partial T}{\partial t} \right) \right] (p, t_0) \approx \frac{Q_P(M_P, f_P)}{\delta_P M_P p_2^2(f_P(t_0))} \quad (\text{I.4.1})$$

en donde M_P, f_P es la descripción del proceso a presión constante ocurrido en lapso δ_P , y $M_P, p_2^2(f_P(t_0))$ es el volumen del subsistema en el instante inicial t_0 del proceso. Entonces, el miembro derecho de (I.4.1) es el calor por unidad de tiempo y unidad de volumen, transferido (si es positivo) al subsistema asociado al evento P en el proceso en el que mantiene su identidad.

Este planteamiento permite la introducción de los campos \mathbf{q} y Q_{int} antes mencionados. La idea es que $\mathbf{q}(p, t_0)$ describa el flujo volumétrico de calor hacia el exterior (si es positivo) del subsistema asociado al evento P , y que $Q_{int}(p, t_0)$ describa la generación volumétrica de calor en el interior del sistema²⁴. Este comportamiento de los campos se logra definiéndolos como sigue; para cualquier evento P se hace

$$[Q_{int} - \nabla \cdot \mathbf{q}](r_P(t_0), t_0) \equiv \frac{Q_P(M_P, f_P)}{\delta_P M_P p_2^2(f_P(t_0))} \quad (\text{I.4.2})$$

en donde implícitamente se establece que las dimensiones físicas de Q_{int} y \mathbf{q} son $[\text{W}/\text{m}^3]$ y $[\text{W}/\text{m}^2]$ respectivamente. Al considerar que el proceso es "suficientemente" pequeño se enfatiza el comportamiento mencionado, pues permite decir que

$$\int_{t_0}^{t_0 + \delta_P} (Q_{int} - \nabla \cdot \mathbf{q}) \circ (r_P, I_{\mathfrak{R}}) \approx \delta_P [Q_{int} - \nabla \cdot \mathbf{q}](r_P(t_0), t_0) = \delta_P [Q_{int} - \nabla \cdot \mathbf{q}](p, t_0)$$

²⁴ El campo Q_{int} puede deberse [12 §I.6] a diferentes causas: corriente eléctrica (incluyendo la inducida), absorción de radiación electromagnética, decaimiento radioactivo, fricción interna (medios viscosos o plásticos) y reacciones químicas. La determinación de este campo concierne a diversas teorías físicas: teoría electromagnética, física atómica, mecánica de medios continuos, etc.

en donde la integral, con la interpretación dada a los campos, expresa el calor volumétrico transferido al subsistema asociado al evento P en el proceso en el que mantiene su identidad. Así entonces, al reunir (I.4.1) y (I.4.2) se hace plausible que

$$\left[\rho c_p \left(\langle \mathbf{V}, \nabla T \rangle + \frac{\partial T}{\partial t} \right) \right] (p, t_0) = [Q_{int} - \nabla \cdot \mathbf{q}] (p, t_0)$$

en donde P es un evento cualquiera con $(p, t_0) \leftrightarrow P$, de lo cual se obtiene finalmente la ecuación (TC).

Al interpretar a la ecuación (TC) como una ecuación diferencial parcial para el campo de temperatura, se modela a $\nabla \cdot \mathbf{q}$ en términos del campo de temperatura y se supone a los campos \mathbf{V} y Q_{int} como conocidos; esto quiere decir que la solución (el campo T) se adecua a los campos dados. Esta observación es importante para aclarar lo que algunos autores llaman, equivocadamente, transferencia de calor por convección. Es sabido que la diferencia de temperatura en un fluido dá lugar a cambios en la densidad, lo cual plantea diferencias de presión que provocan movimiento en el fluido; fenómeno conocido como movimiento convectivo. Este movimiento, aunque provocado por diferencias de temperatura, no involucra una transferencia de calor. En caso dado, cuando está presente este movimiento existe convección, y debe incluirse ese movimiento (modelado con el campo de temperatura) como una componente del campo de velocidad \mathbf{V} del fluido para la obtención acertada del campo de temperatura mediante la solución de (TC).

El flujo de calor \mathbf{q} puede darse únicamente [11 §5.1] en la forma de conducción o radiación, sin que sean excluyentes en un problema dado. En términos microscópicos la conducción se refiere a la transmisión, mediante colisiones moleculares, de la agitación molecular²⁵ entre regiones vecinas con niveles diferentes de agitación, y la radiación proviene de la radiación electromagnética debida a la excitación atómica.

La descripción macroscópica de la radiación se basa [11 §5.1 y Cap.13] en la ley de Stefan-Boltzmann para cuerpos negros, adoptando usualmente coeficientes empíricos para adecuarla a la superficie de otros cuerpos. Para la conducción se tiene a la ley de Fourier (también atribuida a Boit), que plantea el siguiente comportamiento para el flujo de calor

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (\text{I.4.3})$$

en donde k es la conductividad térmica del medio [$W/(m \text{ } ^\circ C)$], para la cual se tiene $k = \hat{k}_0(T, I_{\text{R}^4})$ en medios isotrópicos, o bien $k = \hat{k}_0 T$ en medios isotrópicos y homogéneos.

²⁵ Se trata de un movimiento caótico que no se manifiesta en el campo de velocidad \mathbf{V} del medio continuo.

Aunque es frecuente que se presenten simultáneamente los dos tipos de flujo de calor, usualmente alguno es despreciable frente al otro. Generalmente la conducción es significativa en materiales sólidos y líquidos, pero la radiación puede ser importante [12 §1.6] en materiales fibrosos, transparentes o porosos; sobre todo cuando se encuentran a alta temperatura. En esta tesis se considera solamente al flujo de calor por conducción, por lo cual (TC) toma la forma²⁶

$$\rho c_p \left((\mathbf{V}, \nabla T) + \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q_{int} \quad (\text{TC}_C)$$

debido a (I.4.3), llamándola ecuación de transferencia de calor por conducción. Esta ecuación se refiere a sólo un medio continuo, y establece un comportamiento puntual de las observables (campos) en la descripción cartesiana del espacio de eventos de un observador inercial. Esto no excluye la consideración "simultánea" de otros medios, con sus respectivas ecuaciones (TC_C), siempre y cuando se efectue el acoplamiento de las mismas. La condición de acoplamiento para dos medios A y B se plantea en términos del flujo de calor, estipulando que

$$\langle \mathbf{q}_A, \mathbf{n}_A \rangle = -\langle \mathbf{q}_B, \mathbf{n}_B \rangle = \langle \mathbf{q}_B, \mathbf{n}_A \rangle \quad \text{en } \partial A \cap \partial B \quad (\text{I.4.4})$$

para la interface de los medios, siendo \mathbf{n}_A y \mathbf{n}_B las funciones ortonormales hacia "afuera" de las superficies de los medios A y B respectivamente.

Al considerar la descripción cilíndrica del espacio de eventos y del campo \mathbf{V} , la ecuación (TC_C) toma la forma

$$\begin{aligned} Q_{int} = & \rho c_p \left(\mathbf{V}_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{V}_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \mathbf{V}_z \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t} \right) \\ & - \left(\frac{\partial k}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) - k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{TC}_C)'$$

basándose en los apéndices I y II. Cabe mencionar, que aunque las funciones en (TC_C) y (TC_C)' utilizan los mismos símbolos, éstas no iguales, pues se basan en métodos diferentes de coordenalización del espacio, aún con el mismo sistema de referencia.

Para proceder a la solución de estas ecuaciones, es necesario considerar [13] una región conexas compacta en reposito y con frontera Lipschitziana, en la cual se introducen condiciones iniciales y a la frontera. La existencia y unicidad de la solución depende de la naturaleza de las condiciones asignadas, el tema es bastante sofisticado [14 Cap.5 y

²⁶ En medios lineales (k es constante) a veces se utiliza $\alpha \equiv k/(\rho c_p)$ y se le llama difusividad térmica o conductividad termométrica [m^2/s].

13] y concierne al Análisis Funcional. El estudio de este aspecto, aunque definitivamente importante e interesante, se omite en esta tesis por su complejidad y extensión. Aquí se aceptará la existencia y unicidad de la solución de (TC.C) para el tipo de condiciones que a continuación serán presentadas.

Al considerar una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ compacta conexa y en reposo, con frontera $\partial\Omega$ Lipschitziana, se debe asignar la condición inicial para la solución de (TC.C) proponiendo una función $f \in C^0(\Omega)$ y la condición:

$$T \text{ tal que } T \circ (I_{\mathbb{R}^3}, t_{in}) = f \text{ en } \Omega. \quad (\text{I.4.5})$$

en el instante inicial t_{in} . Además es indispensable introducir las condiciones a la frontera, tomando una partición $\{\partial\Omega_i | i \in \delta\}$ de $\partial\Omega$, se propone una familia de funciones $\{g_i \in C^0(\partial\Omega_i)\}$ y las condiciones:

$$T \text{ tal que } \begin{cases} T = g_i & \text{en } \partial\Omega_i \forall i \in s_1 \quad (\text{Dirichlet}) \\ \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = g_i & \text{en } \partial\Omega_i \forall i \in s_2 \quad (\text{Neumann}) \\ \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} + \lambda_i T = g_i & \text{en } \partial\Omega_i \text{ con } 0 \neq \lambda_i \in C^0(\partial\Omega_i) \forall i \in s_3 \quad (\text{Mixta}) \end{cases} \quad (\text{I.4.6})$$

en donde se debe cumplir [14 y 15]

$$\begin{cases} \cup_{i \in \delta} \partial\Omega_i = \partial\Omega \quad \text{y} \quad \mu(\cap_{i \in \delta} \partial\Omega_i) = 0, \\ s_1 \cup s_2 \cup s_3 = s, \quad s_1 \cup s_3 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad s_1 \cap s_2 \cap s_3 = \emptyset \end{cases} \quad (\text{I.4.7})$$

para garantizar la existencia y unicidad de la solución, siendo μ el contenido de conjuntos en \mathbb{R}^3 (véase [7 Cap.8]).

El planteamiento de condiciones a la frontera presenta fuertes dificultades y el acierto en su asignación depende de la experiencia del modelador. Frecuentemente se utilizan expresiones empíricas para el flujo de calor en la frontera, que dan lugar a la especificación de condiciones a la frontera si se acepta (I.4.4) en la interface de dos medios A y B . En efecto, si la transferencia de calor en A es por conducción, de (I.4.3) se sigue

$$\langle \mathbf{q}_A, \mathbf{n}_A \rangle = -k_A \langle \nabla T_A, \mathbf{n}_A \rangle = -k_A \frac{\partial T_A}{\partial \mathbf{n}_A} \text{ en } \partial A$$

y de (I.4.4)

$$\frac{\partial T_A}{\partial \mathbf{n}_A} = -\frac{1}{k_A} \langle \mathbf{q}_B, \mathbf{n}_A \rangle \text{ en } \partial A \cap \partial B \quad (\text{I.4.8})$$

obteniendo una condición a la frontera para A en términos del flujo de calor en B .

Para materiales sólidos rodeados por fluidos se plantean dos comportamientos para el flujo de calor, asociados al movimiento del fluido en la cercanía de la superficie del sólido:

- Cuando se tiene únicamente movimiento convectivo, se dice que hay convección natural en la frontera del sólido y se propone [12 §1.9] que

$$\langle \mathbf{q}_F, \mathbf{n}_S \rangle = h(T - T_F)^{5/4} \quad \text{en } \partial S \cap \partial F. \quad (\text{I.4.9})$$

- Cuando no sólo existe movimiento convectivo, se dice que hay convección forzada en la frontera del sólido y se propone

$$\langle \mathbf{q}_F, \mathbf{n}_S \rangle = h(T - T_F) \quad \text{en } \partial S \cap \partial F. \quad (\text{I.4.10})$$

Los subíndices F y S se refieren al fluido y al sólido respectivamente, T_F es la temperatura en la frontera de la capa límite²⁷. El coeficiente h se le conoce como coeficiente de transferencia de calor superficial o conductancia superficial [$W/(m^2 \text{ } ^\circ C)$].

El aprovechamiento de estos comportamientos del flujo de calor es inmediato. De (I.4.8) y (I.4.9), para un sólido S con convección natural se tiene

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{h}{k}(T - T_F)^{5/4} \quad \text{en } \partial S \cap \partial F. \quad (\text{I.4.11})$$

y de (I.4.8) con (I.4.10), para un sólido S con convección forzada²⁸

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{h}{k}(T - T_F) \quad \text{en } \partial S \cap \partial F. \quad (\text{I.4.12})$$

La expresión (I.4.12) plantea una condición a la frontera mixta para S muy utilizada, sin embargo el caso de (I.4.11) es diferente, el exponente del segundo miembro hace que no estipule alguna condición a la frontera de los tipos mencionados en (I.4.6). Usualmente se trata esta situación adecuando h de modo tal, que (I.4.12) constituya una buena aproximación al comportamiento de $\partial T / \partial \mathbf{n}$ en $\partial S \cap \partial F$.

²⁷ La región en donde se presenta la transición entre el movimiento dominante del fluido y el sólido se le llama capa límite. Su determinación es complicada y se utilizan algunos criterios [11 §2.2] un tanto arbitrarios para el cálculo del grosor δ , por ejemplo, en un flujo estacionario se plantea la condición: δ tal que $\mathbf{V}(x + \delta \mathbf{n}_S, t) = 0.99 \mathbf{V}_\infty$ con $x \in \partial S$, siendo \mathbf{V}_∞ la velocidad dominante del fluido.

²⁸ Algunos autores la llaman ley de enfriamiento de Newton, dado que Newton la propuso para describir el "enfriamiento" de un cuerpo mediante el flujo de agua en su frontera; i.e. con convección forzada.

Para finalizar esta sección, es conveniente mencionar una suposición usualmente adoptada en las modelaciones. Un cuerpo S radia energía electromagnética hacia el medio F en cual este inmerso, cuando su temperatura superficial es mayor que la del medio²⁹. Si el comportamiento del medio envolvente puede suponerse como la de un cuerpo negro, el flujo de calor en su superficie se aproxima [12 §1.9] con $\langle \mathbf{q}_S, \mathbf{n}_S \rangle = \sigma E(T^4 - T_F^4)$ en $\partial S \cap \partial F$, en donde $\sigma = 0.3 \times 10^{-8}$ [W/(m² °K⁴)] es la constante de Stefan-Boltzmann y E es la emisividad del cuerpo. Dado que E es pequeño³⁰, generalmente es válido suponer despreciable al flujo de calor debido a la radiación superficial.

§1.5 Simplificación bidimensional

En esta sección se introducen las hipótesis usualmente utilizadas para simplificar (TC.C) y (TC.C)', haciéndolas accesibles a una solución numérica, basada en procedimientos computacionales con un uso moderado de memoria y en tiempos razonables. La adopción de estas hipótesis en un problema dado establecen condiciones importantes de su modelación y se refieren a dos aspectos: El primero, la simetría traslacional y la simetría axial, estipulan condiciones geométricas para la región en análisis, así como ciertas propiedades materiales y limitaciones en el movimiento para el medio que la ocupa; el segundo, las hipótesis bidimensionales, establecen un comportamiento bidimensional para el flujo de calor y cierta homogeneidad para el calor interno.

En los textos tradicionalmente extienden las hipótesis de simetría, incorporando el comportamiento para el flujo de calor, sin embargo es conveniente hacer la distinción con la introducción de las hipótesis bidimensionales que incluyen los aspectos térmicos del problema. Para asignar las hipótesis de simetría a un problema, el observador debe definir una región en reposo y analizar el medio que la ocupa, atribuyendo la hipótesis de:

- Simetría traslacional (ST), cuando la región en análisis es un cilindro recto (con generatrices paralelas), y en cada instante las propiedades materiales del medio en la sección transversal del cilindro son invariantes ante traslaciones en la dirección de las generatrices.
- Simetría axial (SA), cuando la región en análisis es un volumen de revolución³¹, y en cada instante las propiedades materiales del medio en una sección axial (que contenga al eje de rotación) son invariantes ante rotaciones.

²⁹ Cuando la temperatura superficial es significativamente mayor que la del medio ambiente, se aprovecha la radiación para determinar dicha temperatura, brindando un procedimiento telemétrico conocido como pirometría.

³⁰ Se dice [12 §1.9] que el valor de E varía de: 0.02 a 0.05 para metales pulidos, de 0.6 a 0.7 para metales oxidados, para papel y madera puede llegar a 0.98.

³¹ Por la naturaleza de la ecuación (TC.C)', en principio la región no debe contener al eje de revolución.

Estrictamente estas hipótesis sólo involucran las observables vinculadas con las propiedades materiales del medio, pero también se incorporan limitaciones en su movimiento; orientando el sistema de referencia de modo tal, que el eje z sea paralelo a las generatrices en el caso ST o que coincida con el eje de revolución en el caso SA, se debe tener:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = 0 \quad \text{para ST} \quad (I.5.1)$$

o bien

$$\frac{\partial V_z}{\partial \theta} = \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = 0 \quad \text{para SA} \quad (I.5.2)$$

en donde se ha utilizado la descripción cilíndrica del espacio de eventos y del campo de velocidad.

Las hipótesis de simetría están basadas en características bastante objetivas, cuya adjudicación a un problema específico no requiere de una experiencia vasta. A diferencia de estas hipótesis, la asignación de una hipótesis bidimensional a un problema específico no es trivial, el acierto depende en gran medida de la experiencia del modelador. Su planteamiento se hace en conjunción con las hipótesis de simetría³², estableciendo que:

$$\frac{\partial Q_{int}}{\partial z} = q_z = 0 \quad \text{para ST} \quad (I.5.3)$$

y

$$\frac{\partial Q_{int}}{\partial \theta} = q_\theta = 0 \quad \text{para SA.} \quad (I.5.4)$$

Cuando el medio es lineal (k es constante) las hipótesis bidimensionales brindan otras condiciones para el flujo de calor. En efecto, si se supone que $T \in C^2$ se sigue que $\nabla \times (\nabla T) = 0$, luego $\nabla \times \mathbf{q} = 0$ debido a (I.4.3), por lo cual

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} = \frac{\partial q_\theta}{\partial z} = 0 \quad \text{para ST}$$

y de (AII.10)

$$\frac{\partial q_r}{\partial \theta} = \frac{\partial q_z}{\partial \theta} = 0 \quad \text{para SA}$$

que establecen condiciones necesarias, más no suficientes, para que un medio sea lineal.

³² Generalmente asocian la ST a la idea de cuerpos "infinitamente" largos en la dirección de las generatrices, "infriendo" la necesidad de que el flujo de calor sea nulo en esa dirección.

Las simplificaciones que generan estas hipótesis son importantes³³, llevando (I.5.3) y (I.4.3) a (TC_C) se obtiene

$$\rho c_p \left((\mathbf{V}, \nabla, T) + \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \nabla_z \cdot (k \nabla_z T) = Q_{int} \quad (I.5.5)$$

en donde

$$\nabla_z \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right) \quad (I.5.6)$$

y de (TC_C)' con (I.5.4) y (I.4.3)

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\mathbf{V}_r \frac{\partial T}{\partial r} + \mathbf{V}_z \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial k}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ - k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = Q_{int}. \end{aligned}$$

que también puede ser escrita en forma sintética, favorable a un planteamiento integral bidimensional

$$\rho c_p r \left((\mathbf{V}, \nabla, T) + \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \nabla_z \cdot (r k \nabla_z T) = r Q_{int} \quad (I.5.7)$$

en donde se ut: a estrictamente (I.5.6) con la identificación $x \leftrightarrow z$ y $y \leftrightarrow r$.

Obsérvese, que cuando se usa la descripción cilíndrica en una sección axial, la identificación $x \leftrightarrow z$ y $y \leftrightarrow r$ hace afines las descripciones cartesiana y cilíndrica del espacio de eventos. En las ecuaciones diferenciales obtenidas, las funciones están definidas en la descripción (cartesiana o cilíndrica) del espacio de eventos, contenido en \mathbb{R}^4 . Sin embargo, dadas las características de las hipótesis introducidas, todas las funciones son identificadas con funciones definidas en \mathbb{R}^3 haciendo:

$$\rho \leftrightarrow \rho \circ B, \quad c_p \leftrightarrow c_p \circ B, \quad \mathbf{V} \leftrightarrow \mathbf{V} \circ B, \quad k \leftrightarrow k \circ B, \quad T \leftrightarrow T \circ B, \quad Q_{int} \leftrightarrow Q_{int} \circ B \quad (I.5.8)$$

en donde $B \equiv (p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, \xi, p_3^{(3)})$ con la identificación $1 \leftrightarrow x$, $2 \leftrightarrow y$ y $3 \leftrightarrow t$, siendo $\xi \in \mathbb{R}$ la coordenada de alguna sección transversal o axial, dependiendo del caso de simetría. Es decir, las ecuaciones diferenciales (I.5.5) y (I.5.7) son analizadas y resueltas en el contexto de las identificaciones anteriores, tratándolas como si en ambas ecuaciones se utilizase la descripción cartesiana del espacio de eventos.

En el desarrollo implícitamente se ha tomado una región con un medio, pero frecuentemente se presenta el que contenga varios medios. En este caso, se considera una

³³ Nótese que no se ha introducido modelación alguna para la conductividad, dejándola abierta para mayor generalidad.

partición de la región, dando lugar a una subregión para cada medio, las cuales deben poseer la misma simetría para adjudicar esa simetría a la región original. Aplicando en cada subregión su correspondiente ecuación diferencial, se obtiene un sistema acoplado mediante la introducción de la condición (I.4.4) en las interfaces. Apropiadamente aplicado, este procedimiento es afín al método de elemento finito para la solución numérica de las ecuaciones obtenidas.

§1.6 Líneas de flujo e isotermas

Cuando un campo vectorial permite la consideración de "potenciales", como es el caso del flujo de calor por conducción, es posible introducir el concepto de línea equipotencial, en la cual el potencial tiene valor constante. Es decir, para un potencial g y un instante t , una función $h : Y \subset \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3$, es la parametrización cartesiana de una línea equipotencial de g en el instante t , si $D(g \circ (h, t)) = 0$, suponiendo que Y es un intervalo. Para estas líneas es viable la idea de una "concentración" de líneas, pues poseen una característica cuantitativa del potencial, lo que a su vez, permite establecer una relación con la intensidad del campo.

La consideración de las líneas de campo resulta conveniente para apreciar el comportamiento de un campo vectorial. Esta apreciación es cualitativa y se refiere únicamente a la dirección del campo, pues en un instante dado y en cada punto de la línea, establece que su dirección es paralela a la tangente a la curva³⁴. Las líneas de campo, por si mismas, son totalmente independientes de la intensidad del campo, por lo que resulta absurdo esperar que una "concentración" de líneas de campo se relacione con su intensidad.

Bajo ciertas condiciones, se plantea un vínculo entre las líneas equipotenciales y las de campo, con lo cual, las líneas equipotenciales pueden exhibir el comportamiento direccional del campo y su intensidad, esto último, en términos de la concentración de líneas equipotenciales. Otro aspecto favorable del vínculo mencionado, consiste en que posibilita la introducción de las condiciones a la frontera para el potencial, en base al comportamiento del campo.

³⁴ En términos precisos, para un campo vectorial G y un instante t , se dice que $f : Y \subset \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3$ y tal que $Df \neq 0$, es la parametrización cartesiana de una línea de campo de G en el instante t , si

$$\frac{\|G \circ (f, t)\|}{\|Df\|} Df = G \circ (f, t)$$

lo cual es equivalente a $Df_j G_i \circ (f, t) = Df_i G_j \circ (f, t) \forall i, j \in \bar{3}$ como es fácil de verificar.

En la transferencia de calor por conducción el campo vectorial es el flujo de calor y su potencial es la temperatura, debido a (I.4.3). Por ello, se acostumbra llamar a las líneas de campo y líneas equipotenciales como líneas de flujo e isoterms respectivamente. Este caso es sencillo, pues el potencial es un potencial escalar. En efecto, para un instante t dado, y una línea suave contenida en dicho instante en la región de interés, cuya parametrización cartesiana este dada por una función $f: Y \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y derivable, se tiene que

$$k \circ (f, t) D(T \circ (f, t)) = k \circ (f, t) \langle \nabla T \circ (f, t), Df \rangle = -\langle \mathbf{q} \circ (f, t), Df \rangle \quad (\text{I.6.1})$$

luego:

- Si f es una isoterma en t , se sigue que f es ortogonal a $\mathbf{q} \circ (f, t)$.
- Si $\mathbf{q} \circ (f, t)$ es ortogonal³⁵ a f y $k \circ (f, t) \neq 0$, se sigue que f es una isoterma.

Dada la validéz de (I.6.1) ante el método cilíndrico, estos resultados también son aplicables cuando se describe un problema con dicho método de coordenalización; por ejemplo, cuando presenta simetría axial.

³⁵ Es conveniente observar que $\mathbf{q} \circ (f, t) = 0$ implica la ortogonalidad con f ; por ejemplo cuando $f(Y)$ esta contenida en una superficie adiabática.

Capítulo II.— Algoritmos y métodos numéricos

Resumen

En este capítulo se obtienen ciertos algoritmos para transformar problemas bidimensionales de transferencia de calor a términos algebraicos; utilizando el método de Crank–Nicolson–Galerkin en la discretización espacial de elemento finito con elementos triangulares de primer orden. También se establece el procedimiento de ensamble de los sistemas de ecuaciones elementales y se plantean los métodos para la obtención de soluciones de sistemas de ecuaciones.

§II.1 Introducción

Este capítulo se basa en el capítulo anterior, en donde se desarrolla un procedimiento para la determinación del campo de temperatura en problemas bidimensionales (simetría traslacional o axial) de transferencia de calor por conducción. Para ello, se suponen conocidas las propiedades materiales de los medios y su condición de movimiento, así como las fuentes de calor interno.

De la modelación térmica considerada, se siguen las ecuaciones diferenciales parciales para los problemas bidimensionales planteados: haciendo

$$\nabla_2 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right) \quad (\text{II.1.1})$$

se tiene para la simetría traslacional

$$\rho c_p \left(\langle \mathbf{V}, \nabla_2 T \rangle + \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \nabla_2 \cdot (k \nabla_2 T) = Q_{int} \quad (\text{II.1.2})$$

y para la simetría axial

$$\rho c_p r \left(\langle \mathbf{V}, \nabla_2 T \rangle + \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \nabla_2 \cdot (r k \nabla_2 T) = r Q_{int} \quad (\text{II.1.3})$$

en donde se utiliza estrictamente (II.1.1) con la identificación $x \leftrightarrow z$ y $y \leftrightarrow r$.

En estas ecuaciones diferenciales, las funciones están definidas en la descripción del espacio de eventos (cartesiana o cilíndrica), contenida en \mathfrak{R}^4 . Sin embargo, dadas las características de las hipótesis introducidas, todas las funciones son identificadas con funciones definidas en \mathfrak{R}^3 haciendo:

$$\rho \leftrightarrow \rho \circ B, c_p \leftrightarrow c_p \circ B, \mathbf{V} \leftrightarrow \mathbf{V} \circ B, k \leftrightarrow k \circ B, T \leftrightarrow T \circ B, Q_{int} \leftrightarrow Q_{int} \circ B \quad (\text{II.1.4})$$

en donde $B \equiv (p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, \xi, p_3^{(3)})$ con la identificación $1 \leftrightarrow x \leftrightarrow z$, $2 \leftrightarrow y \leftrightarrow r$ y $3 \leftrightarrow t$, siendo $\xi \in \mathfrak{R}$ la coordenada de alguna sección transversal o axial, dependiendo del caso de simetría. Es decir, las ecuaciones diferenciales (II.1.2) y (II.1.3) son analizadas y resueltas en el contexto de las identificaciones anteriores, tratándolas como si en ambas ecuaciones se utilizase la descripción cartesiana del espacio de eventos.

En el desarrollo de estas ecuaciones, implícitamente se ha tomado una región con un medio, pero frecuentemente se presenta el que contenga varios medios. En este caso, se considera una partición de la región, dando lugar a una subregión para cada medio. Debe tenerse que todas las subregiones poseen la misma simetría, para adjudicar esa simetría a la región original. Aplicando en cada subregión su correspondiente ecuación diferencial, se obtiene un sistema acoplado mediante introducción la condición:

$$\langle \mathbf{q}_A, \mathbf{n}_A \rangle = -\langle \mathbf{q}_B, \mathbf{n}_B \rangle = \langle \mathbf{q}_B, \mathbf{n}_A \rangle \quad \text{en } \partial A \cap \partial B \quad (\text{II.1.5})$$

para el flujo de calor en la interface de dos medios A y B .

Para la solución de las ecuaciones diferenciales (II.1.2) y (II.1.3), se emplea un método indirecto de solución, el método de Crank-Nicolson-Galerkin, en la discretización espacial de elemento finito con elementos triangulares de primer orden. Este procedimiento transforma al problema en uno de tipo algebraico, cuya solución genera una aproximación a la solución de la ecuación diferencial parcial con las condiciones a la frontera e iniciales que se consideren.

En este capítulo se obtienen los algoritmos que establecen al problema en términos algebraicos y se plantean los métodos numéricos para la solución de sistemas de ecuaciones.

§II.2 Antecedentes

La elección del método de Crank-Nicolson-Galerkin [16] para la solución de las ecuaciones diferenciales antes enunciadas es bastante frecuente³⁶ y es apropiado para los problemas no estacionarios (transitorios) considerados. En esta sección se plantea brevemente al método de Galerkin [17], por ser un antecedente del método de Crank-Nicolson-Galerkin y por utilizarse en los problemas estacionarios de transferencia de calor.

El método de Galerkin es un caso particular del método de residuos pesados, por lo que tiene la gran ventaja [17] de ser aplicables a operadores diferenciales no lineales o no autoadjuntos³⁷. La característica del método de Galerkin consiste en que las funciones de aproximación también son utilizadas como funciones de peso, lo cual brinda sencillez en su implementación.

En método de Galerkin es apropiado para problemas estacionarios, en donde no se presenta una dependencia explícita en el tiempo, lo cual conduce a problemas de valores a la frontera cuyo tratamiento es como sigue:

- Se considera al espacio³⁸ $C(\Omega, \mathfrak{R})$ de las funciones continuas en una región compacta $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^2$, y una familia de funciones $\{\phi_i | i \in I\}$ conocidas como funciones de aproximación o de forma.
- La solución de una ecuación diferencial parcial $L(\psi) = h$, en donde L es un operador diferencial y $h \in C(\Omega, \mathfrak{R})$, con condiciones a la frontera CF para la región Ω , es buscada en la generación lineal de la familia propuesta³⁹ $\mathcal{L}_{\{\phi_i\}}$, determinando los coeficientes de la combinación lineal asociada a la solución mediante la condición (de Galerkin):

$$\langle \phi_i, R(\psi) \rangle = 0 \quad \forall i \in I \quad \text{con} \quad R(\psi) \equiv L(\psi) - h \quad \text{y} \quad \psi \in \mathcal{L}_{\{\phi_i\}}$$

³⁶ Aunque también lo es el método variacional "energético" [18].

³⁷ Un operador lineal \mathcal{A} en un espacio pre-Hilbertiano V es autoadjunto, si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, siendo \mathcal{A}^* el operador adjunto de \mathcal{A} , que puede definirse como un operador que cumple con la condición $\langle \mathcal{A}^*(q), s \rangle = \langle q, \mathcal{A}(s) \rangle \quad \forall q, s \in V$.

³⁸ Se trata con el espacio pre-Hilbertiano [7 y 19] asociado a la norma dos, en donde:

$$\|f\|_2 \equiv \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad \text{con} \quad \langle f, g \rangle \equiv \int_{\Omega} fg \quad \forall f, g \in C(\Omega, \mathfrak{R}).$$

³⁹ Para un $m \in \mathcal{Z}^+$, en donde \mathcal{Z}^+ es el conjunto de los enteros positivos, se conviene en hacer $\bar{m} \equiv \{s \in \mathcal{Z}^+ | s \leq m\}$. Considerando un subconjunto finito de un espacio vectorial V sobre el campo \mathfrak{R} , $\{v_i \in V | i \in \bar{m}\}$, se define a su generación lineal haciendo $\mathcal{L}_{\{v_i\}} \equiv \{\sum_{i \in \bar{m}} x_i v_i \in V | x \in \mathfrak{R}^m\}$.

en donde a R se le llama residuo de la ecuación diferencial ⁴⁰.

Se requieren algunas aclaraciones respecto a la relación entre la condición de Galerkin y la determinación de la solución. Naturalmente, cuando $\bar{\psi}$ es solución de la ecuación diferencial se sigue el cumplimiento de la condición (dado que el residuo es nulo), sin embargo, el inverso no es evidente; es decir

$$\bar{\psi} \in CF \cap \mathcal{L}_{\{\phi_i\}} \quad \text{y} \quad (\phi_i, R(\bar{\psi})) = 0 \quad \forall i \in I \quad \stackrel{?}{\implies} \quad L(\bar{\psi}) = h \quad \text{y} \quad \bar{\psi} \in CF.$$

En general esta proposición es falsa, pero condicionando la familia $\{\phi_i\}$ puede hacerse verdadera. En efecto, se dice [17] que cuando la familia $\{\phi_i\}$ constituye un "sistema completo" de funciones ⁴¹ y $f \in C(\Omega, \mathfrak{R})$ se tiene que

$$(\phi_i, f) = 0 \quad \forall i \in I \quad \implies \quad f = 0$$

lo cual "valida" al método de Galerkin para la obtención de soluciones analíticas de problemas con valores a la frontera.

En la práctica se ignora la condición de sistema completo para la familia de funciones de aproximación, descartándose la posibilidad de obtener soluciones exactas. Esto establece una gran dependencia del "grado" de aproximación de la "solución" con la elección de la familia de funciones de aproximación.

Para el cálculo de campos de temperatura mediante elemento finito se consideran familias finitas de polinomios, cuyo número y orden esta relacionado con el tipo de elemento que se utilice en la discretización espacial de la región de interés, debido a la necesidad de satisfacer las condiciones a la frontera propuestas. En este trabajo se emplean elementos triangulares de primer orden (un nodo en cada vértice), por lo que se plantea una familia con tres polinomios de primer orden (polinomios de interpolación de Lagrange) como funciones de aproximación.

La implantación del método de Galerkin con el método de elemento finito, se da en los términos siguientes: si la región de interés es $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$, es necesario aproximarse a una

⁴⁰ Nótese que el operador diferencial L debe condicionarse de tal modo que su contradominio sea $C(\Omega, \mathfrak{R})$.

⁴¹ El significado de este término [17 y 20] no es del todo preciso, tal vez lo apropiado sería pedir que la familia sea ortogonal y que $\mathcal{L}_{\{\phi_i\}}$ sea densa en $C(\Omega, \mathfrak{R})$ con la norma dos, pues esto aproxima (falta la completez de $C(\Omega, \mathfrak{R})$) a la proposición enunciada [19, teorema 6.5.3]

“partición” de ella (malla) mediante la consideración de una familia finita de triángulos $\{\Delta_s^\dagger \subset \mathbb{R}^2 \mid s \in \bar{m}\}$ conocidos como elementos de malla, tal que

$$\bigcup_{s \in \bar{m}} \Delta_s^\dagger \approx \Omega \quad \text{y} \quad (\Delta_i^\dagger)^{int} \cap (\Delta_j^\dagger)^{int} = \emptyset \quad \forall i, s \in \bar{m} \quad \cdot t \cdot \quad i \neq s$$

en donde $(\Delta_s^\dagger)^{int}$ se refiere al interior del conjunto Δ_s^\dagger .

La descripción de los triángulos puede hacerse en términos de una matriz Δ de orden $m \times 3$, en donde $\Delta_{s,j} \in \mathbb{R}^2$ corresponde a las coordenadas (cartesianas o cilíndricas) del vértice (nodo) j -ésimo del triángulo s -ésimo, desde el sistema de referencia utilizado para la descripción del fenómeno. Para mayor simplicidad en los desarrollos de los algoritmos, es conveniente definir las siguientes matrices

$$\mathbf{a}_s \equiv \begin{pmatrix} \Delta_{s,21} \Delta_{s,32} - \Delta_{s,31} \Delta_{s,22} \\ \Delta_{s,31} \Delta_{s,12} - \Delta_{s,11} \Delta_{s,32} \\ \Delta_{s,11} \Delta_{s,22} - \Delta_{s,21} \Delta_{s,12} \end{pmatrix} \quad \forall s \in \bar{m} \quad (\text{II.2.1})$$

y

$$\mathbf{b}_s \equiv \begin{pmatrix} \Delta_{s,22} - \Delta_{s,32} & \Delta_{s,31} - \Delta_{s,21} \\ \Delta_{s,32} - \Delta_{s,12} & \Delta_{s,11} - \Delta_{s,31} \\ \Delta_{s,12} - \Delta_{s,22} & \Delta_{s,21} - \Delta_{s,11} \end{pmatrix} \quad \forall s \in \bar{m} \quad (\text{II.2.2})$$

en donde Δ_{s,j_i} es la componente i -ésima del par $\Delta_{s,j}$.

Ante la elección de cualquier elemento de malla Δ_s^\dagger con $s \in \bar{m}$, se considera su familia de funciones de aproximación $\{\phi_{s,i} \mid i \in \bar{3}\}$ en términos de los polinomios de Lagrange asociados a Δ_s^\dagger , obteniendo con (II.2.1) y (II.2.2) que⁴²

$$\phi_{s,i}(x,y) \equiv \frac{1}{2\mu_s(\Delta_s^\dagger)} (\mathbf{a}_{s,i} + \mathbf{b}_{s,i1}x + \mathbf{b}_{s,i2}y) \quad \forall (x,y) \in \Delta_s^\dagger \quad \text{y} \quad \forall i \in \bar{3} \quad (\text{II.2.3})$$

para la descripción cartesiana, con la descripción cilíndrica simplemente se hace la identificación $x \leftrightarrow z$ y $y \leftrightarrow r$.

Estos polinomios tienen un comportamiento muy favorable, pues en cualquier elemento de malla s , toda solución ψ_s en dicho elemento debe cumplir el que $\psi_s \in \mathcal{L}_{\phi_i}$, por lo que se trata de una transformación afín; i.e. se tiene que $\psi_s = c_s + \eta_s$ siendo c_s una

⁴² El símbolo $\mu_s(\Delta_s^\dagger)$ se refiere al área de Δ_s^\dagger .

constante y $\eta_s \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Además, se puede verificar que $\phi_{s,i}(\Delta_{s,j}) = \delta_{ij} \forall i, j \in \bar{3}$, por lo cual

$$\psi_s = \sum_{i \in \bar{3}} N_{s,i} \phi_{s,i} \quad \text{con } N_s \in \mathbb{R}^3 \iff \psi_s \in \mathcal{L}_{\phi_{s,i}} \quad \text{y } \psi_s(\Delta_{s,j}) = N_{s,j} \quad \forall j \in \bar{3}.$$

Este resultado establece que las condiciones de Dirichlet pueden incorporarse con sólo asignar sus valores en los correspondientes vértices (nodos) del elemento de malla. También permite reconocer el procedimiento para lograr la "continuidad" de las soluciones asociadas a elementos con frontera común, pues basta igualar los coeficientes de combinación lineal de acuerdo a la condición:

$$\Delta_{s,j} = \Delta_{l,i} \implies N_{s,j} = N_{l,i}. \quad (\text{II.2.4})$$

En efecto, si se tiene que $\Delta_s^\dagger \cap \Delta_l^\dagger \neq \emptyset$, se sigue que

$$\exists i, j, r, k \in \bar{3} \quad \cdot \cdot \quad \Delta_{s,j} = \Delta_{l,r} \quad \text{y} \quad \Delta_{s,i} = \Delta_{l,k}$$

además

$$\Delta_s^\dagger \cap \Delta_l^\dagger = [I_{\mathbb{R}} \Delta_{s,r} + (1 - I_{\mathbb{R}}) \Delta_{s,i}] \cup ([0, 1]).$$

Entonces, si

$$(x_1, x_2) \in \Delta_s^\dagger \cap \Delta_l^\dagger \quad \exists \lambda \in [0, 1] \quad \cdot \cdot \quad (x_1, x_2) = \lambda \Delta_{s,i} + (1 - \lambda) \Delta_{s,j} = \lambda \Delta_{l,k} + (1 - \lambda) \Delta_{l,r}$$

obteniéndose

$$\psi_s(x_1, x_2) = \lambda \psi_s(\Delta_{s,i}) + (1 - \lambda) \psi_s(\Delta_{s,j})$$

y

$$\psi_l(x_1, x_2) = \lambda \psi_l(\Delta_{l,k}) + (1 - \lambda) \psi_l(\Delta_{l,r})$$

por tratarse de transformaciones afines. Por lo tanto, al incorporar la condición (II.2.4) se tiene que

$$\psi_s(x_1, x_2) = \psi_l(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Delta_s^\dagger \cap \Delta_l^\dagger$$

lo cual permite la continuidad para la solución global ψ , haciendo⁴³

$$\psi \equiv \bigcup_{s \in \bar{m}} \psi_s \circ i_{(\Delta_s^\dagger)_{i_n}}$$

desde luego, con la definición apropiada de ψ en $\bigcup_{s \in \bar{m}} \delta \Delta_s^\dagger$.

⁴³ Para la función $f : A \rightarrow B$ y un conjunto E , se define [21] la restricción de f en E con $f \circ i_E : E \cap A \rightarrow B$, en donde i_E es la función inclusión en E ; i.e. $i_E \equiv \{(x, x) | x \in E\}$.

La proposición de la partición no es del todo arbitraria, debe seleccionarse de modo que el interior de cada triángulo este totalmente contenido en algún medio, es decir, no es válido que un triángulo posea sectores en diferentes medios (excepto en su frontera). Esto permite hacer una simplificación en la modelación térmica, fundamental para la obtención de soluciones, pues hace accesible la reducción de la modelación a los elementos de malla, asociando el medio con el índice que identifique al elemento.

De este modo, es posible considerar una familia de funciones de aproximación para cada elemento de malla. La aplicación del método de Galerkin en cada elemento de malla, genera un sistema de ecuaciones con tantas ecuaciones como número de nodos, cada ecuación posee tres incógnitas; los coeficientes de la combinación lineal de la familia de funciones de aproximación. Este sistema inicial, resulta acoplado (no independiente); al introducir la condición de "continuidad" (II.2.4) para las soluciones asociadas a elementos con frontera común.

§II.3 Algoritmos para problemas estacionarios

Los antecedentes presentados son suficientes para el desarrollo de los algoritmos para la generación de sistemas de ecuaciones algebraicas, asociados a la modelación térmica de los problemas planteados. Como ya se dijo, el método de Galerkin excluye al tiempo, por ello sólo es aplicable en los problemas estacionarios de transferencia de calor, en cuales se tiene

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial Q_{int}}{\partial t} = \frac{\partial \rho c_p}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial t} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V_i}{\partial t} = 0 \quad \forall i \in \bar{3}$$

obteniendo, para la simetría traslacional

$$\rho c_p \langle \mathbf{V}, \nabla_2 T \rangle - \nabla_2 \cdot (k \nabla_2 T) = Q_{int} \quad (\text{II.3.1})$$

y para la simetría axial

$$\rho c_p r \langle \mathbf{V}, \nabla_2 T \rangle - \nabla_2 \cdot (r k \nabla_2 T) = r Q_{int}. \quad (\text{II.3.2})$$

De las hipótesis introducidas, todas las funciones son identificables en los términos de (II.1.4) con funciones definidas en \mathcal{R}^2 , haciendo $B \equiv (p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, \xi, t_0)$ con la identificación $1 \leftrightarrow x \leftrightarrow z$ y $2 \leftrightarrow y \leftrightarrow r$, siendo $t_0 \in \mathcal{R}$ algún instante en el lapso de descripción. Es decir, los problemas bidimensionales y estacionarios de transferencia de calor por conducción, son descritos con las ecuaciones diferenciales (II.3.1) y (II.3.2), las cuales son analizadas y resueltas en el contexto de las identificaciones anteriores.

Estas ecuaciones diferenciales, permiten reconocer a sus operadores diferenciales para la aplicación del método de Galerkin en cada elemento de malla. En efecto, para la simetría traslacional se tiene

$$L_{T_s}(\psi_s) = \rho_s c_{p_s} \langle \mathbf{V}_s, \nabla_s \psi_s \rangle - \nabla_s \cdot (k_s \nabla_s \psi_s)$$

y para la simetría axial

$$L_{A_s}(\psi_s) = \rho_s c_{p_s} p_2^{(2)} \langle \mathbf{V}_s, \nabla_s \psi_s \rangle - \nabla_s \cdot (k_s p_2^{(2)} \nabla_s \psi_s)$$

en donde, en ambos casos $\psi_s \in C^2(\Delta_s^\dagger, \mathfrak{R})$ y $s \in \bar{m}$.

En los desarrollos que siguen, se supone una región $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$ y una "partición" de ella, $\{\Delta_s^\dagger \subset \mathfrak{R}^2 \mid s \in \bar{m}\}$, con las características planteadas en la sección anterior. La presentación de los desarrollos se organiza en dos subsecciones; una para los problemas con simetría traslacional y la otra para los que poseen simetría axial.

§II.3.1 Problemas con simetría traslacional

Al aplicar la condición de Galerkin en el elemento s-ésimo de la malla, se tiene

$$\int_{\Delta_s^\dagger} R_{T_s}(\psi_s) \phi_{s,i} = \int_{\Delta_s^\dagger} (L_{T_s}(\psi_s) - Q_{int_s}) \phi_{s,i} = 0 \quad \forall i \in \bar{3}$$

por lo tanto

$$\int_{\Delta_s^\dagger} (\rho_s c_{p_s} \langle \mathbf{V}_s, \nabla_s \psi_s \rangle - \nabla_s \cdot (k_s \nabla_s \psi_s)) \phi_{s,i} = \int_{\Delta_s^\dagger} Q_{int_s} \phi_{s,i} \quad \forall i \in \bar{3}$$

en donde $\nabla_s \cdot (k_s \nabla_s \psi_s) \phi_{s,i} = \nabla_s \cdot (k_s \phi_{s,i} \nabla_s \psi_s) - k_s \langle \nabla_s \phi_{s,i}, \nabla_s \psi_s \rangle$. Luego, del teorema de la divergencia⁴⁴

$$\begin{aligned} \rho_s c_{p_s} \int_{\Delta_s^\dagger} \langle \mathbf{V}_s, \nabla_s \psi_s \rangle \phi_{s,i} - \int_{\partial \Delta_s^\dagger} k_s \phi_{s,i} \langle \nabla_s \psi_s, \mathbf{n}_s \rangle \\ + \int_{\Delta_s^\dagger} k_s \langle \nabla_s \phi_{s,i}, \nabla_s \psi_s \rangle = Q_{int_s} \int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{s,i} \quad \forall i \in \bar{3} \end{aligned} \quad (\text{II.3.3})$$

dado que ρ_s , c_{p_s} y Q_{int_s} son constantes en Δ_s^\dagger .

⁴⁴ Se considera una versión del teorema [7 Cap.10, teorema 7.1] aplicable a dominios con frontera casi regular, dado que la frontera de un triángulo no es regular.

La introducción de las condiciones a la frontera del problema, planteadas en en la frontera global $\partial\Omega$, se realiza con el segundo sumando de (II.3.3) y considerando que⁴⁵

$$-\int_{\partial\Delta_i^\dagger} k_s \phi_{s,i} \langle \nabla_i \psi_s, \mathbf{n}_s \rangle = \sum_{i \in \bar{3}} \int_{\partial\Delta_i^\dagger} \phi_{s,i} \langle \mathbf{q}_s, \mathbf{n}_s \rangle \quad (\text{II.3.4})$$

pues

$$-\frac{1}{k_s} \langle \mathbf{q}_s, \mathbf{n}_s \rangle = \langle \nabla_i \psi_s, \mathbf{n}_s \rangle = \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{n}_s} \quad \text{en } \partial\Delta_i^\dagger.$$

En efecto, cuando se tiene que $\mu_i(\partial\Omega \cap \partial\Delta_i^\dagger) = 0$, el sumando i -ésimo de (II.3.4) se cancelaría en el proceso de ensamblaje de las ecuaciones algebraicas⁴⁶. Por ello, con la condición

$$\mu_i(\partial\Omega \cap \partial\Delta_i^\dagger) = 0 \implies h_{s,i} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{q}_s = 0 \quad \text{en } \partial\Delta_i^\dagger,$$

para la conductividad térmica superficial y el flujo de calor respectivamente, es posible decir que

$$-\int_{\partial\Delta_i^\dagger} k_s \phi_{s,i} \langle \nabla_i \psi_s, \mathbf{n}_s \rangle = \sum_{i \in \bar{3}} \int_{\partial\Delta_i^\dagger} \phi_{s,i} (\langle \mathbf{q}_s, \mathbf{n}_s \rangle + h_{s,i} (\psi_s - T_{s,i})) \quad (\text{II.3.5})$$

siendo $T_{s,i}$ la temperatura externa en el lado i -ésimo, con lo cual se incorporan las condiciones de Neumann o de convección forzada, que sólo pueden presentarse cuando $\mu_i(\partial\Omega \cap \partial\Delta_i^\dagger) \neq 0$.

Ahora es necesario procesar (II.3.3), para ello se debe recordar que

$$\psi_s = \sum_{i \in \bar{3}} N_{s,i} \phi_{s,i} \quad \text{con} \quad N_{s,i} \in \mathbb{R}^3$$

estando expresada $\phi_{s,i}$ en (II.2.3). Para cada $i \in \bar{3}$, se tiene:

$$Q_{int,s} \int_{\Delta_i^\dagger} \phi_{s,i} = Q_{int,s} \frac{\mu_2(\Delta_i^\dagger)}{3}$$

⁴⁵ Se conviene en que el lado i -ésimo del triángulo corresponde al cateto opuesto al vértice i -ésimo.

⁴⁶ Esto se debe a (II.2.3) y (II.1.5), dado que en dicho proceso se considera al triángulo vecino y se suma el término de (II.3.4) que corresponda al lado i -ésimo de Δ_i^\dagger mencionado. En la literatura se dice que el sumando es cero, argumentando que se presenta la "condición natural"; i.e. la condición Neumann homogénea. Aunque el efecto es equivalente, la razón de su anulación es diferente...

dato que

$$\int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{si} = \frac{\mu_2(\Delta_s^\dagger)}{3} \quad (\text{II.3.6})$$

del apéndice III, también

$$\begin{aligned} \rho_s c_{ps} \int_{\Delta_s^\dagger} \langle \mathbf{V}_s, \nabla, \psi_s \rangle \phi_{si} &\approx \rho_s c_{ps} \sum_{k \in \bar{2}} \mathbf{V}_{sk}(c_s) \int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{si} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_k} \\ &= \frac{\rho_s c_{ps}}{2\mu_2(\Delta_s^\dagger)} \sum_{k \in \bar{2}} \mathbf{V}_{sk}(c_s) \sum_{j \in \bar{3}} N_{sj} \mathbf{b}_{sjk} \int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{si} \\ &= \frac{\rho_s c_{ps}}{6} \sum_{k \in \bar{2}} \mathbf{V}_{sk}(c_s) \sum_{j \in \bar{3}} N_{sj} \mathbf{b}_{sjk} \end{aligned}$$

haciendo la aproximación $\mathbf{V}_s \approx \mathbf{V}_s(c_s)$, siendo c_s el centroide de Δ_s^\dagger con coordenadas

$$c_s = \frac{1}{\mu_2(\Delta_s^\dagger)} \int_{\Delta_s^\dagger} I_{\mathbb{R}^2} = \frac{1}{3} \left(\sum_{j \in \bar{3}} \Delta_{sj1}, \sum_{j \in \bar{3}} \Delta_{sj2} \right). \quad (\text{II.3.7})$$

De modo análogo, con la aproximación $k_s \approx k_s(c_s)$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_s^\dagger} k_s \langle \nabla_s \phi_{si}, \nabla_s \psi_s \rangle &\approx k_s(c_s) \int_{\Delta_s^\dagger} \langle \nabla_s \phi_{si}, \nabla_s \psi_s \rangle \\ &= \frac{k_s(c_s)}{4\mu_2(\Delta_s^\dagger)} \sum_{j \in \bar{3}} N_{sj} (\mathbf{b}_{sj}, \mathbf{b}_{si}). \end{aligned}$$

Para (II.3.5) con $l \in \bar{3}$ y suponiendo que h_{sl} y T_{sl} son constantes en $\partial\Delta_{sl}^\dagger$

$$\int_{\partial\Delta_{sl}^\dagger} \phi_{si} h_{sl} (\psi_s - T_{sl}) = h_{sl} \left(\sum_{j \in \bar{3}} N_{sj} \int_{\partial\Delta_{sl}^\dagger} \phi_{si} \phi_{sj} - T_{sl} \int_{\partial\Delta_{sl}^\dagger} \phi_{si} \right)$$

en donde, del apéndice III se tiene

$$\int_{\partial\Delta_{sl}^\dagger} \phi_{si} \phi_{sj} = \frac{L_{sl}}{6} (1 - \delta_{ii})(1 - \delta_{ij})(1 + \delta_{ij}) \quad (\text{II.3.8})$$

y

$$\int_{\partial\Delta_{sl}^\dagger} \phi_{si} = \frac{L_{sl}}{2} (1 - \delta_{il}) \quad (\text{II.3.9})$$

siendo $L_{s,l}$ la longitud del lado l -ésimo. Finalmente, para el otro sumando de (II.3.5) y cualquier $l \in \bar{3}$

$$\int_{\theta_{\Delta_s^{\dagger,l}}} \phi_{s,i}(\mathbf{q}_s, \mathbf{n}_s) = q_{s,l} \alpha_{s,l} \int_{\theta_{\Delta_s^{\dagger,l}}} \phi_{s,i}$$

en donde $\alpha_{s,l} \equiv \cos \angle(\mathbf{q}_{s,l}, \mathbf{n}_{s,l})$ con $\mathbf{q}_{s,l} \equiv \mathbf{q}_s \circ \iota_{\theta_{\Delta_s^{\dagger,l}}}$ y $\mathbf{n}_{s,l} \equiv \mathbf{n}_s \circ \iota_{\theta_{\Delta_s^{\dagger,l}}}$, además $q_{s,l} \equiv \|\mathbf{q}_{s,l}\|$ se ha supuesto constante.

Al llevar estos resultados a (II.3.3) para cada $i \in \bar{3}$ y adoptar una notación matricial para el sistema de ecuaciones, se obtiene⁴⁷

$$\left(\frac{\rho_s c_{ps}}{6} V_s + \frac{1}{6} C_s + \frac{h_s(c_s)}{4\mu_2(\Delta_s^{\dagger})} M_s \right) \times N_s = \frac{\mu_2(\Delta_s^{\dagger}) Q_{int,s}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} E_s - \frac{1}{2} F_k \quad (\text{II.3.10})$$

para cada $s \in \bar{m}$, en donde la matriz V_s esta asociada con la velocidad del medio

$$V_s \equiv \begin{pmatrix} \langle \mathbf{V}_s(c_s), \mathbf{b}_{s,1} \rangle & \langle \mathbf{V}_s(c_s), \mathbf{b}_{s,2} \rangle & \langle \mathbf{V}_s(c_s), \mathbf{b}_{s,3} \rangle \\ \langle \mathbf{V}_s(c_s), \mathbf{b}_{s,1} \rangle & \langle \mathbf{V}_s(c_s), \mathbf{b}_{s,2} \rangle & \langle \mathbf{V}_s(c_s), \mathbf{b}_{s,3} \rangle \\ \langle \mathbf{V}_s(c_s), \mathbf{b}_{s,1} \rangle & \langle \mathbf{V}_s(c_s), \mathbf{b}_{s,2} \rangle & \langle \mathbf{V}_s(c_s), \mathbf{b}_{s,3} \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.11})$$

la matriz C_s esta relacionada con la convección forzada

$$C_s \equiv \begin{pmatrix} 2(h_{s,2} L_{s,2} + h_{s,3} L_{s,3}) & h_{s,3} L_{s,3} & h_{s,2} L_{s,2} \\ h_{s,3} L_{s,3} & 2(h_{s,1} L_{s,1} + h_{s,3} L_{s,3}) & h_{s,1} L_{s,1} \\ h_{s,2} L_{s,2} & h_{s,1} L_{s,1} & 2(h_{s,1} L_{s,1} + h_{s,2} L_{s,2}) \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.12})$$

la matriz M_s esta asociada a la geometría y se le conoce como matriz de rigidez

$$M_s \equiv \begin{pmatrix} \langle \mathbf{b}_{s,1}, \mathbf{b}_{s,1} \rangle & \langle \mathbf{b}_{s,2}, \mathbf{b}_{s,1} \rangle & \langle \mathbf{b}_{s,3}, \mathbf{b}_{s,1} \rangle \\ \langle \mathbf{b}_{s,1}, \mathbf{b}_{s,2} \rangle & \langle \mathbf{b}_{s,2}, \mathbf{b}_{s,2} \rangle & \langle \mathbf{b}_{s,3}, \mathbf{b}_{s,2} \rangle \\ \langle \mathbf{b}_{s,1}, \mathbf{b}_{s,3} \rangle & \langle \mathbf{b}_{s,2}, \mathbf{b}_{s,3} \rangle & \langle \mathbf{b}_{s,3}, \mathbf{b}_{s,3} \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.13})$$

la matriz N_s con los coeficientes de la expansión lineal de las funciones de aproximación (las incógnitas a determinar)

$$N_s \equiv \begin{pmatrix} N_{s,1} \\ N_{s,2} \\ N_{s,3} \end{pmatrix}$$

⁴⁷ La matriz resultante del primer factor del sistema de ecuaciones se le llama matriz elemental y la matriz resultante del segundo miembro se le conoce como vector elemental. En la implantación computacional se les agrupa en una matriz de 3×4 , incorporando el vector global en la cuarta columna.

la matriz E_s para la temperatura externa en la convección forzada

$$E_s \equiv \begin{pmatrix} h_{s2} T_{s2} L_{s2} + h_{s3} T_{s3} L_{s3} \\ h_{s1} T_{s1} L_{s1} + h_{s3} T_{s3} L_{s3} \\ h_{s1} T_{s1} L_{s1} + h_{s2} T_{s2} L_{s2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.14})$$

y la matriz F_s para el flujo de calor de la condición Neumann

$$F_s \equiv \begin{pmatrix} q_{s2} \alpha_{s2} L_{s2} + q_{s3} \alpha_{s3} L_{s3} \\ q_{s1} \alpha_{s1} L_{s1} + q_{s3} \alpha_{s3} L_{s3} \\ q_{s1} \alpha_{s1} L_{s1} + q_{s2} \alpha_{s2} L_{s2} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.3.15})$$

El sistema de ecuaciones (II.3.10) se refiere a un cualquier elemento de malla; para "cubrir" la región Ω se requiere del acoplamiento de los m sistemas de ecuaciones elementales. Dicho acoplamiento se basa en la condición de "continuidad" (II.2.4) y da lugar a un proceso de ensamblaje de los sistemas de ecuaciones elementales que genera al sistema global de ecuaciones. Este proceso debe incorporar las condiciones de Dirichlet que se consideren, reduciendo la dimensión original del sistema global de ecuaciones.

§II.3.2 Problemas con simetría axial

La aplicación de la condición de Galerkin en un elemento de malla es muy similar al caso traslacional. En efecto, al considerar el elemento s -ésimo se tiene

$$\int_{\Delta_s^\dagger} R_{A_s}(\psi_s) \phi_{si} = \int_{\Delta_s^\dagger} (L_{A_s}(\psi_s) - r Q_{int_s}) \phi_{si} = 0 \quad \forall i \in \bar{3}$$

por lo tanto

$$\int_{\Delta_s^\dagger} \left(\rho_s c_{ps} r \mathbf{V}_{sz} \frac{\partial \psi_s}{\partial z} - \nabla_z \cdot (k_s r \nabla_z \psi_s) \right) \phi_{si} = \int_{\Delta_s^\dagger} r Q_{int_s} \phi_{si} \quad \forall i \in \bar{3}$$

en donde

$$\nabla_z \cdot (k_s r \nabla_z \psi_s) \phi_{si} = \nabla_z \cdot (k_s r \phi_{si} \nabla_z \psi_s) - k_s r \langle \nabla_z \phi_{si}, \nabla_z \psi_s \rangle \quad \text{ya que} \quad \nabla_z \equiv \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Luego, del teorema de la divergencia (véase pag. 39 nota 44)

$$\begin{aligned} & \rho_s c_{ps} \int_{\Delta_s^\dagger} r \phi_{si} \mathbf{V}_{sz} \frac{\partial \psi_s}{\partial z} - \int_{\partial \Delta_s^\dagger} k_s r \phi_{si} \langle \nabla_z \psi_s, \mathbf{n}_s \rangle \\ & + \int_{\Delta_s^\dagger} k_s r \langle \nabla_z \phi_{si}, \nabla_z \psi_s \rangle = Q_{int_s} \int_{\Delta_s^\dagger} r \phi_{si} \quad \forall i \in \bar{3} \end{aligned} \quad (\text{II.3.16})$$

dado que ρ_s , c_{ps} y $Q_{int,s}$ son constantes en Δ_s^\dagger .

La introducción de las condiciones a la frontera del problema, planteadas en en la frontera global $\partial\Omega$, se realiza con el segundo sumando de (II.3.13). Utilizando el mismo razonamiento que en el caso traslacional, esto es, con la condición

$$\mu_1(\partial\Omega \cap \partial\Delta_{s,l}^\dagger) = 0 \implies h_{s,l} = 0 \text{ y } q_s = 0 \text{ en } \partial\Delta_{s,l}^\dagger$$

para la conductividad térmica superficial y el flujo de calor respectivamente, es posible decir que

$$-\int_{\partial\Delta_s^\dagger} k_s r \phi_{s,i} \langle \nabla_2 \psi_s, \mathbf{n}_s \rangle = \sum_{i \in \bar{3}} \int_{\partial\Delta_{s,i}^\dagger} r \phi_{s,i} (\langle \mathbf{q}_s, \mathbf{n}_s \rangle + h_{s,i}(\psi_s - T_{s,i})) \quad (\text{II.3.17})$$

siendo $T_{s,i}$ la temperatura externa en el lado l -ésimo, con lo cual se incorporan las condiciones de Neumann o de convección forzada, que sólo pueden presentarse cuando $\mu_1(\partial\Omega \cap \partial\Delta_{s,i}^\dagger) \neq 0$.

Procesando (II.3.16) para cada $i \in \bar{3}$ y haciendo la aproximación $\mathbf{V}_s \approx \mathbf{V}_s(c_s)$, siendo c_s el centroide de Δ_s^\dagger con coordenadas expresadas en (II.3.7), se tiene

$$\begin{aligned} \rho_s c_{ps} \int_{\Delta_s^\dagger} r \mathbf{V}_{s,z} \frac{\partial \psi_s}{\partial z} \phi_{s,i} &\approx \rho_s c_{ps} \mathbf{V}_{s,z}(c_s) \int_{\Delta_s^\dagger} r \phi_{s,i} \frac{\partial \psi_s}{\partial z} \\ &= \frac{\rho_s c_{ps}}{2\mu_2(\Delta_s^\dagger)} \mathbf{V}_{s,z}(c_s) \sum_{j \in \bar{3}} N_{s,j} \mathbf{b}_{s,j,1} \int_{\Delta_s^\dagger} r \phi_{s,i} \end{aligned}$$

en donde, del apéndice III

$$\int_{\Delta_s^\dagger} r \phi_{s,i} = \frac{\mu_2(\Delta_s^\dagger)}{12} \sum_{q \in \bar{3}} (1 + \delta_{qi}) \Delta_{s,q,2} \quad (\text{II.3.18})$$

el cual es un resultado que también debe aplicarse al segundo miembro de (II.3.16). De modo análogo, con la aproximación $k_s \approx k_s(c_s)$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_s^\dagger} k_s r \langle \nabla_2 \phi_{s,i}, \nabla_2 \psi_s \rangle &\approx k_s(c_s) \int_{\Delta_s^\dagger} r \langle \nabla_2 \phi_{s,i}, \nabla_2 \psi_s \rangle \\ &= \frac{k_s(c_s)}{4\mu_2(\Delta_s^\dagger)^2} \sum_{j \in \bar{3}} N_{s,j} (\mathbf{b}_{s,j}, \mathbf{b}_{s,i}) \int_{\Delta_s^\dagger} r \\ &= \frac{c_{s,2} k_s(c_s)}{4\mu_2(\Delta_s^\dagger)} \sum_{j \in \bar{3}} N_{s,j} (\mathbf{b}_{s,j}, \mathbf{b}_{s,i}) \end{aligned}$$

debido a (II.3.7). Para (3.17) con $l \in \bar{3}$ y suponiendo constantes a $h_{s,l}$ y $T_{s,l}$ en $\partial\Delta_{s,l}^\dagger$

$$\int_{\partial\Delta_{s,l}^\dagger} r \phi_{s,i} h_{s,l} (\psi_s - T_{s,i}) = h_{s,l} \left(\sum_{k \in \bar{3}} N_{s,k} \int_{\partial\Delta_{s,l}^\dagger} r \phi_{s,i} \phi_{s,k} - T_{s,l} \int_{\partial\Delta_{s,l}^\dagger} r \phi_{s,i} \right)$$

en donde, del apéndice III

$$\int_{\partial\Delta_{s,l}^\dagger} r \phi_{s,i} \phi_{s,k} = \frac{L_{s,l}}{12} (1 - \delta_{i,l})(1 - \delta_{k,l}) \sum_{q \in \bar{3}} (2\delta_{i,q} \delta_{k,q} + 1)(1 - \delta_{q,l}) \Delta_{s,q,2} \quad (\text{II.3.19})$$

y

$$\int_{\partial\Delta_{s,l}^\dagger} r \phi_{s,i} = \frac{L_{s,l}}{6} (1 - \delta_{i,l}) \sum_{q \in \bar{3}} (1 + \delta_{i,q})(1 - \delta_{q,l}) \Delta_{s,q,2} \quad (\text{II.3.20})$$

siendo $L_{s,l}$ la longitud del lado l -ésimo. Para el otro sumando de (II.3.17) se tiene

$$\int_{\partial\Delta_{s,l}^\dagger} r \phi_{s,i} \langle \mathbf{q}_{s,l}, \mathbf{n}_{s,i} \rangle = q_{s,l} \alpha_{s,l} \int_{\partial\Delta_{s,l}^\dagger} r \phi_{s,i}$$

haciendo $\alpha_{s,l} \equiv \cos \angle(\mathbf{q}_{s,l}, \mathbf{n}_{s,i})$ con $\mathbf{q}_{s,l} \equiv \mathbf{q}_s \circ \iota_{\partial\Delta_{s,l}^\dagger}$ y $\mathbf{n}_{s,i} \equiv \mathbf{n}_s \circ \iota_{\partial\Delta_{s,l}^\dagger}$, además $q_{s,l} \equiv \|\mathbf{q}_{s,l}\|$ se ha supuesto constante.

Entonces, al considerar cada $i \in \bar{3}$ y adoptar una notación matricial para el sistema de ecuaciones, se obtiene

$$\left(\frac{\rho_s c_{p,s} V_{s,2}(c_s)}{24} A_s + \frac{1}{12} C_s + \frac{c_{s,2} k_s(c_s)}{4\mu_2(\Delta_s^\dagger)} M_s \right) \times N_s = \frac{Q_{int,s} \mu_2(\Delta_s^\dagger)}{12} D_s + \frac{1}{6} E_s - \frac{1}{6} F_s \quad (\text{II.3.21})$$

en donde

$$A_s \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{s,11} D_{s,1} & \mathbf{b}_{s,21} D_{s,1} & \mathbf{b}_{s,31} D_{s,1} \\ \mathbf{b}_{s,11} D_{s,2} & \mathbf{b}_{s,21} D_{s,2} & \mathbf{b}_{s,31} D_{s,2} \\ \mathbf{b}_{s,11} D_{s,3} & \mathbf{b}_{s,21} D_{s,3} & \mathbf{b}_{s,31} D_{s,3} \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.22})$$

y

$$D_s \equiv \begin{pmatrix} 2\Delta_{s,12} + \Delta_{s,22} + \Delta_{s,32} \\ \Delta_{s,12} + 2\Delta_{s,22} + \Delta_{s,32} \\ \Delta_{s,12} + \Delta_{s,22} + 2\Delta_{s,32} \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.23})$$

la matriz C_s esta relacionada con la convección forzada

$$C_s \equiv \begin{pmatrix} \beta_{s,1} & h_{s,3} L_{s,3}(\Delta_{s,12} + \Delta_{s,22}) & h_{s,2} L_{s,2}(\Delta_{s,32} + \Delta_{s,12}) \\ h_{s,3} L_{s,3}(\Delta_{s,12} + \Delta_{s,22}) & \beta_{s,2} & h_{s,1} L_{s,1}(\Delta_{s,32} + \Delta_{s,22}) \\ h_{s,2} L_{s,2}(\Delta_{s,32} + \Delta_{s,12}) & h_{s,1} L_{s,1}(\Delta_{s,32} + \Delta_{s,22}) & \beta_{s,3} \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.24})$$

y

$$\beta_s \equiv \begin{pmatrix} h_{s2} L_{s2} (3\Delta_{s12} + \Delta_{s32}) + h_{s3} L_{s3} (3\Delta_{s12} + \Delta_{s22}) \\ h_{s1} L_{s1} (3\Delta_{s22} + \Delta_{s32}) + h_{s3} L_{s3} (3\Delta_{s22} + \Delta_{s12}) \\ h_{s1} L_{s1} (3\Delta_{s32} + \Delta_{s22}) + h_{s2} L_{s2} (3\Delta_{s32} + \Delta_{s12}) \end{pmatrix}.$$

La matriz M_s esta dada en (II.3.13) y esta asociada a la geometría, la matriz N_s con los coeficientes de la expansión lineal de las funciones de aproximación (las incógnitas a determinar)

$$N_s \equiv \begin{pmatrix} N_{s1} \\ N_{s2} \\ N_{s3} \end{pmatrix}$$

la matriz E_s para la temperatura externa en la convección forzada

$$E_s \equiv \begin{pmatrix} h_{s2} T_{s2} L_{s2} (2\Delta_{s12} + \Delta_{s32}) + h_{s3} T_{s3} L_{s3} (2\Delta_{s12} + \Delta_{s22}) \\ h_{s1} T_{s1} L_{s1} (2\Delta_{s22} + \Delta_{s32}) + h_{s3} T_{s3} L_{s3} (2\Delta_{s22} + \Delta_{s12}) \\ h_{s1} T_{s1} L_{s1} (2\Delta_{s32} + \Delta_{s22}) + h_{s2} T_{s2} L_{s2} (2\Delta_{s32} + \Delta_{s12}) \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.25})$$

y la matriz F_s para el flujo de calor de la condición Neumann

$$F_s \equiv \begin{pmatrix} q_{s2} \alpha_{s2} (2\Delta_{s12} + \Delta_{s32}) + q_{s3} \alpha_{s3} (2\Delta_{s12} + \Delta_{s22}) \\ q_{s1} \alpha_{s1} (2\Delta_{s32} + \Delta_{s22}) + q_{s3} \alpha_{s3} (2\Delta_{s22} + \Delta_{s12}) \\ q_{s1} \alpha_{s1} (2\Delta_{s32} + \Delta_{s22}) + q_{s2} \alpha_{s2} (2\Delta_{s32} + \Delta_{s12}) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.3.26})$$

Al igual que en el caso traslacional, el sistema de ecuaciones (II.3.21) se refiere a un cualquier elemento de malla; para "cubrir" la región Ω se requiere del acoplamiento de los m sistemas de ecuaciones elementales. Dicho acoplamiento se basa en la condición de "continuidad" (II.2.4) y da lugar a un proceso de ensamblaje de los sistemas de ecuaciones elementales que genera al sistema global de ecuaciones. Este proceso debe incorporar las condiciones de Dirichlet que se consideren, reduciendo la dimensión original del sistema global de ecuaciones.

§II.4 Algoritmos para problemas no estacionarios

Para los problemas de transferencia de calor no estacionarios y bidimensionales, modelados con (II.1.2) y (II.1.3), se utiliza el método de Crank-Nicolson-Galerkin [16]. Para ello se considera una partición finita del lapso de descripción del fenómeno

$$\mathcal{T} \equiv \{j \Delta T \mid \Delta T > 0 \text{ y } j \in \bar{p} \cup \{0\}\}$$

mediante la especificación del paso ΔT y del número de intervalos $p \in \mathcal{N}$. En cada instante $t_j \in \mathcal{T}$ se plantean los operadores diferenciales

$$L_{T_s t_j}(\psi_s) \equiv \left(\rho_s c_{p_s} \left(\langle \mathbf{V}_s, \nabla_s \psi_s \rangle + \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \right) - \nabla_s \cdot (k_s \nabla_s \psi_s) \right) \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)$$

y

$$L_{A_s t_j}(\psi_s) \equiv \left(\rho_s c_p s p_2^{(3)} \left((\nabla_s, \nabla_s \psi_s) + \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \right) - \nabla_s \cdot (p_2^{(3)} k_s \nabla_s \psi_s) \right) \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)$$

asociados a problemas con simetría traslacional y simetría axial respectivamente. En ambos casos $\psi_s \in C^2(\Delta_s^\dagger \times \mathcal{R}, \mathcal{R})$ y $s \in \tilde{m}$, suponiendo una región $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ y una "partición" de ella, $\{\Delta_s^\dagger \subset \mathcal{R}^2 | s \in \tilde{m}\}$, con las características planteadas en la sección 2.

Con estos operadores se aplica la condición de Galerkin en los términos de la sección 2, generando $p + 1$ sistemas de ecuaciones paramétricas asociadas a la partición \mathcal{T} , las cuales se transforman en p sistemas acoplados de ecuaciones algebraicas con la aproximación⁴⁸ de Crank-Nicolson-Galerkin. Los desarrollos son presentados en dos subsecciones; una para los problemas con simetría traslacional y la otra para los que poseen simetría axial.

§II.4.1 Problemas con simetría traslacional

Al considerar el instante $t_j \in \mathcal{T}$ y aplicar la condición de Galerkin en el elemento s -ésimo de malla, se tiene

$$\int_{\Delta_s^\dagger} R_{T_s t_j}(\psi_s) \phi_{s,i} = \int_{\Delta_s^\dagger} (L_{T_s t_j}(\psi_s) - Q_{int_s} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)) \phi_{s,i} = 0 \quad \forall i \in \bar{3}$$

por lo tanto, $\forall i \in \bar{3}$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_s^\dagger} \left(\left(\rho_s c_p s p_2^{(3)} \left((\nabla_s, \nabla_s \psi_s) + \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \right) - \nabla_s \cdot (k_s \nabla_s \psi_s) \right) \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \right) \phi_{s,i} \\ = \int_{\Delta_s^\dagger} (Q_{int_s} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)) \phi_{s,i} \end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned} (\nabla_s \cdot (k_s \nabla_s \psi_s) \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)) \phi_{s,i} = \nabla_s \cdot (k_{s t_j} \phi_{s,i} \nabla_s \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)) \\ - k_{s t_j} (\nabla_s \phi_{s,i}, \nabla_s \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)) \end{aligned}$$

⁴⁸ Existen diversas aproximaciones [16], cuyo efecto se manifiesta en la convergencia y estabilidad de las soluciones. Por simplicidad, en la implantación computacional se consideró la aproximación de Crank-Nicolson-Galerkin.

con $k_{s t_j} \equiv k_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)$. Haciendo

$$\begin{aligned} \rho_{s t_j} &\equiv \rho_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) & c_{p s t_j} &\equiv c_{p s} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \\ \mathbf{V}_{s t_j} &\equiv \mathbf{V}_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) & Q_{int s t_j} &\equiv Q_{int s} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \end{aligned}$$

y del teorema de la divergencia (véase pag. 39 nota 44)

$$\begin{aligned} &\rho_{s t_j} c_{p s t_j} \int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{s i} \left(\langle \mathbf{V}_{s t_j}, \nabla \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \rangle + \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \right) \\ &- \int_{\partial \Delta_s^\dagger} k_{s t_j} \phi_{s i} \langle \nabla_3 \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j), \mathbf{n}_s \rangle \\ &+ \int_{\Delta_s^\dagger} k_{s t_j} \langle \nabla_3 \phi_{s i}, \nabla_3 \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \rangle = Q_{int s t_j} \int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{s i} \quad \forall i \in \bar{3} \end{aligned} \quad (\text{II.4.1})$$

dado que $\rho_{s t_j}$, $c_{p s t_j}$ y $Q_{int s t_j}$ son constantes en Δ_s^\dagger .

La introducción de las condiciones a la frontera del problema en el instante t_j , planteadas en la frontera global $\partial\Omega$, se realiza con el segundo sumando de (II.4.1). Con el razonamiento del caso traslacional estacionario, esto es, con la condición

$$\mu_1(\partial\Omega \cap \partial\Delta_{s l}^\dagger) = 0 \implies \begin{cases} h_{s t_j l} \equiv h_{s l} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) = 0 \\ \mathbf{q}_{s t_j} \equiv \mathbf{q}_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) = 0 \end{cases} \quad \text{en } \partial\Delta_{s l}^\dagger$$

para la conductividad térmica superficial y el flujo de calor respectivamente, es posible decir que

$$\begin{aligned} &- \int_{\partial \Delta_s^\dagger} k_{s t_j} \phi_{s i} \langle \nabla_3 \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j), \mathbf{n}_s \rangle \\ &= \sum_{i \in \bar{3}} \int_{\partial \Delta_s^\dagger} \phi_{s i} \langle (\mathbf{q}_{s t_j}, \mathbf{n}_s) + h_{s t_j l} (\psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) - T_{s t_j l}) \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.4.2})$$

siendo $T_{s t_j l}$ la temperatura externa del lado l -ésimo en t_j , con lo cual se incorporan las condiciones de Neumann o de convección forzada, que sólo pueden presentarse cuando $\mu_1(\partial\Omega \cap \partial\Delta_{s l}^\dagger) \neq 0$.

Procesando (II.4.1) para cada $i \in \bar{3}$, pero con $\psi_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue

$$\psi_s = \sum_{i \in \bar{3}} N_{s i} \circ p_3^{(3)} \phi_{s i} \circ (p_1^{(3)}, p_2^{(3)}) \quad (\text{II.4.3})$$

en donde $\phi_{s,i}$ esta expresada en (II.2.3) y haciendo la aproximación $\mathbf{V}_{s,t_j} \approx \mathbf{V}_{s,t_j}(c_s)$, siendo c_s el centroide de Δ_s^\dagger , con coordenadas expresadas en (II.3.7), se tiene

$$\begin{aligned} & \rho_{s,t_j} c_{p_{s,t_j}} \int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{s,i} \left(\langle \mathbf{V}_{s,t_j}, \nabla \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \rangle + \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \right) \approx \\ & \rho_{s,t_j} c_{p_{s,t_j}} \left(\sum_{r \in \bar{3}} \mathbf{V}_{s,t_j,r}(c_s) \int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{s,i} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_r} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) + \int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{s,i} \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \right) \\ & = \rho_{s,t_j} c_{p_{s,t_j}} \left(\sum_{r \in \bar{3}} \frac{\mathbf{V}_{s,t_j,r}(c_s)}{2\mu_2(\Delta_s^\dagger)} \sum_{k \in \bar{3}} N_{s,k}(t_j) \mathbf{b}_{s,k,r} \int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{s,i} + \sum_{k \in \bar{3}} \mathcal{D}N_{s,k}(t_j) \int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{s,i} \phi_{s,k} \right) \end{aligned}$$

en donde, del apéndice III

$$\int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{s,i} \phi_{s,k} = \frac{\mu_2(\Delta_s^\dagger)}{12} (1 + \delta_{ik}) \quad (\text{II.4.4})$$

y la otra integral esta expresada en (II.3.6), que también debe aplicarse al segundo miembro de (II.4.1). De modo análogo, con la aproximación $k_{s,t_j} \approx k_{s,t_j}(c_s)$

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta_s^\dagger} k_{s,t_j} \langle \nabla_2 \phi_{s,i}, \nabla_2 \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \rangle \\ & \approx k_{s,t_j}(c_s) \int_{\Delta_s^\dagger} \langle \nabla_2 \phi_{s,i}, \nabla_2 \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \rangle \\ & = \frac{k_{s,t_j}(c_s)}{4\mu_2(\Delta_s^\dagger)^2} \sum_{k \in \bar{3}} N_{s,k}(t_j) \langle \mathbf{b}_{s,k}, \mathbf{b}_{s,i} \rangle \int_{\Delta_s^\dagger} 1 \\ & = \frac{k_{s,t_j}(c_s)}{4\mu_2(\Delta_s^\dagger)} \sum_{k \in \bar{3}} N_{s,k}(t_j) \langle \mathbf{b}_{s,k}, \mathbf{b}_{s,i} \rangle. \end{aligned}$$

Para (II.4.2) con $l \in \bar{3}$ y suponiendo constantes a $h_{s,t_j,l}$ y $T_{s,t_j,l}$ en $\partial \Delta_{s,l}^\dagger$,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \Delta_{s,l}^\dagger} \phi_{s,i} (h_{s,t_j,l} (\psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) - T_{s,t_j,l})) \\ & = h_{s,t_j,l} \left(\sum_{k \in \bar{3}} N_{s,k}(t_j) \int_{\partial \Delta_{s,l}^\dagger} \phi_{s,i} \phi_{s,k} - T_{s,t_j,l} \int_{\partial \Delta_{s,l}^\dagger} \phi_{s,i} \right) \end{aligned}$$

en donde las integrales están expresadas en (II.3.8) y (II.3.9). Para el otro sumando de (II.4.2) se tiene

$$\int_{\partial \Delta_{s,l}^\dagger} r \phi_{s,i} \langle \mathbf{q}_{s,t_j}, \mathbf{n}_s \rangle = q_{s,t_j,l} \alpha_{s,l} \int_{\partial \Delta_{s,l}^\dagger} r \phi_{s,i}$$

haciendo $\alpha_{s i} \equiv \cos \angle(\mathbf{q}_{s i}, \mathbf{n}_{s i})$ con $\mathbf{q}_{s i} \equiv \mathbf{q}_{s i} \circ \mathbf{l}_{\partial \Delta_{s i}^{\dagger}}$ y $\mathbf{n}_{s i} \equiv \mathbf{n}_{s i} \circ \mathbf{l}_{\partial \Delta_{s i}^{\dagger}}$, además $q_{s i} \equiv \|\mathbf{q}_{s i}\|$ se ha supuesto constante.

Entonces, al considerar cada $i \in \bar{3}$ y adoptar una notación matricial para el sistema de ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{s i} c_{p s i} \mu_2(\Delta_{s i}^{\dagger})}{12} B_s \times DN_s(t_j) + \left(\frac{\rho_{s i} c_{p s i}}{6} V_{s i} + \frac{1}{6} C_{s i} + \frac{k_{s i}(c_s)}{4 \mu_2(\Delta_{s i}^{\dagger})} M_s \right) \times N_s(t_j) \\ = \frac{Q_{int s i} \mu_2(\Delta_{s i}^{\dagger})}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} E_{s i} - \frac{1}{2} F_{s i} \end{aligned} \quad (\text{II.4.5})$$

en donde

$$B_s \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y las matrices $V_{s i}$, M_s , $C_{s i}$, $E_{s i}$ y $F_{s i}$ están expresadas en (II.3.11), (II.3.13), (II.3.12), (II.3.14) y (II.3.15) respectivamente, aunque en las cuatro últimas expresiones deben hacerse las sustituciones inherentes al instante t_j considerado.

El sistema de ecuaciones (II.4.5) esta asociado al instante $t_j \in \mathcal{T}$, por ello, este procedimiento genera $p+1$ sistemas de ecuaciones paramétricas, dado que se consideraron p intervalos en el lapso de descripción del fenómeno. Estos sistemas se transforman en p sistemas acoplados de ecuaciones algebraicas con la aproximación de Crank-Nicolson-Galerkin

$$DN_s(t_j) \approx \frac{N_s(t_j) - N_s(t_{j-1})}{\Delta t} \quad \text{y} \quad N_s(t_j) \approx \frac{N_s(t_j) + N_s(t_{j-1})}{2} \quad \forall j \in \bar{p}. \quad (\text{II.4.6})$$

En efecto, al llevar la aproximación a (II.4.5), para cada $j \in \bar{p}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_{s i} c_{p s i}}{12} \left(\frac{\mu_2(\Delta_{s i}^{\dagger})}{\Delta t} B_s + V_{s i} \right) + \frac{1}{12} C_{s i} + \frac{k_{s i}(c_s)}{8 \mu_2(\Delta_{s i}^{\dagger})} M_s \right) \times N_s(t_j) = \\ \left(\frac{\rho_{s i} c_{p s i}}{12} \left(\frac{\mu_2(\Delta_{s i}^{\dagger})}{\Delta t} B_s - V_{s i} \right) - \frac{1}{12} C_{s i} - \frac{k_{s i}(c_s)}{8 \mu_2(\Delta_{s i}^{\dagger})} M_s \right) \times N_s(t_{j-1}) \\ + \frac{Q_{int s i} \mu_2(\Delta_{s i}^{\dagger})}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} E_{s i} - \frac{1}{2} F_{s i} \end{aligned} \quad (\text{II.4.7})$$

el cual es un sistema de ecuaciones que depende de la especificación de las condiciones iniciales $(N_s(t_0) \forall s \in \bar{m})$ que se fijan, incluyendo las condiciones a la frontera para cada instante de \mathcal{T} .

Los p sistemas de ecuaciones (II.4.7) se refieren a un cualquier elemento de malla; para "cubrir" la región Ω , se requiere del acoplamiento de los m sistemas de ecuaciones elementales asociados a cada instante. Dicho acoplamiento se basa en la condición de "continuidad" (II.2.4) y da lugar a un proceso de ensamblaje de los sistemas de ecuaciones elementales que genera un sistema global de ecuaciones para cada instante. Este proceso debe incorporar las condiciones de Dirichlet que se consideren, reduciendo la dimensión original de los sistemas globales de ecuaciones.

§II.4.2 Problemas con simetría axial

La aplicación de la condición de Galerkin en un elemento de malla es muy similar al caso traslacional. En efecto, al considerar el elemento s -ésimo y el instante $t_j \in \mathcal{T}$ se tiene

$$\int_{\Delta_s^\dagger} R_{A_s t_j}(\psi_s) \phi_{s i} = \int_{\Delta_s^\dagger} (L_{A_s t_j}(\psi_s) - (p_2^{(3)} Q_{int s}) \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)) \phi_{s i} = 0 \quad \forall i \in \bar{3}$$

por lo tanto, $\forall i \in \bar{3}$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_s^\dagger} \left(\left(\rho_s c_{p_s} p_2^{(3)} \left(\mathbf{V}_{s z} \frac{\partial \psi_s}{\partial z} + \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \right) - \nabla_z \cdot (k_s p_2^{(3)} \nabla_z \psi_s) \right) \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \right) \phi_{s i} \\ = \int_{\Delta_s^\dagger} \left((p_2^{(3)} Q_{int s}) \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \right) \phi_{s i} \end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned} (\nabla_z \cdot (k_s p_2^{(3)} \nabla_z \psi_s) \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)) \phi_{s i} = \nabla_z \cdot (k_{s t_j} r \phi_{s i} \nabla_z \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)) \\ - k_{s t_j} r (\nabla_z \phi_{s i} \nabla_z \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)) \end{aligned}$$

con $k_{s t_j} \equiv k_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)$, ya que

$$\nabla_z \equiv \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

Haciendo

$$\begin{aligned} \rho_{s t_j} &\equiv \rho_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) & c_{p_s t_j} &\equiv c_{p_s} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \\ \mathbf{V}_{s t_j} &\equiv \mathbf{V}_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) & Q_{int s t_j} &\equiv Q_{int s} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \end{aligned}$$

y del teorema de la divergencia (véase pag. 39 nota 44)

$$\begin{aligned} \rho_{s t_j} c_{p_s t_j} \int_{\Delta_s^\dagger} r \phi_{s i} \left(\mathbf{V}_{s t_j z} \frac{\partial \psi_s}{\partial z} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) + \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \right) \\ - \int_{\partial \Delta_s^\dagger} k_{s t_j} r \phi_{s i} (\nabla_z \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j), \mathbf{n}_s) \\ + \int_{\Delta_s^\dagger} k_{s t_j} r (\nabla_z \phi_{s i} \nabla_z \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j)) = Q_{int s t_j} \int_{\Delta_s^\dagger} r \phi_{s i} \quad \forall i \in \bar{3} \end{aligned} \tag{II.4.8}$$

dado que ρ_{s,t_j} , c_{p,s,t_j} y Q_{int,s,t_j} son constantes en Δ_s^\dagger .

La introducción de las condiciones a la frontera del problema en el instante t_j , planteadas en en la frontera global $\partial\Omega$, se realiza con el segundo sumando de (II.4.8). Utilizando el mismo razonamiento que en el caso traslacional estacionario, esto es, con la condición

$$\mu_i(\partial\Omega \cap \partial\Delta_{s,i}^\dagger) = 0 \implies \begin{cases} h_{s,t_j,l} \equiv h_{s,l} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) = 0 \\ \mathbf{q}_{s,t_j} \equiv \mathbf{q}_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) = 0 \end{cases} \text{ en } \partial\Delta_{s,i}^\dagger$$

para la conductividad térmica superficial y el flujo de calor respectivamente, es posible decir que

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial\Delta_s^\dagger} h_{s,t_j,l} \tau \phi_{s,i} (\nabla_z \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j), \mathbf{n}_s) \\ & = \sum_{l \in \bar{3}} \int_{\partial\Delta_{s,i}^\dagger} \tau \phi_{s,i} ((\mathbf{q}_{s,t_j}, \mathbf{n}_s) + h_{s,t_j,l} (\psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) - T_{s,t_j,l})) \end{aligned} \quad (\text{II.4.9})$$

siendo $T_{s,t_j,l}$ la temperatura externa del lado l -ésimo en t_j , con lo cual se incorporan las condiciones de Neumann o de convección forzada, que sólo pueden presentarse cuando $\mu_i(\partial\Omega \cap \partial\Delta_{s,i}^\dagger) \neq 0$.

Procesando (II.4.8) para cada $i \in \bar{3}$ con $\psi_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida en (II.4.3) y haciendo la aproximación $\mathbf{V}_{s,t_j} \approx \mathbf{V}_{s,t_j}(c_s)$, siendo c_s el centroide de Δ_s^\dagger con coordenadas expresadas en (II.3.7), se tiene

$$\begin{aligned} & \rho_{s,t_j} c_{p,s,t_j} \int_{\Delta_s^\dagger} \tau \phi_{s,i} \left(\mathbf{V}_{s,t_j,z} \frac{\partial \psi_s}{\partial z} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) + \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \right) \approx \\ & \rho_{s,t_j} c_{p,s,t_j} \left(\mathbf{V}_{s,t_j,z}(c_s) \int_{\Delta_s^\dagger} \tau \phi_{s,i} \frac{\partial \psi_s}{\partial z} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) + \int_{\Delta_s^\dagger} \tau \phi_{s,i} \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, t_j) \right) \\ & = \rho_{s,t_j} c_{p,s,t_j} \left(\frac{\mathbf{V}_{s,t_j,z}(c_s)}{2\mu_2(\Delta_s^\dagger)} \sum_{k \in \bar{3}} N_{s,k}(t_j) \mathbf{b}_{s,k,1} \int_{\Delta_s^\dagger} \tau \phi_{s,i} + \sum_{k \in \bar{3}} \mathcal{D}N_{s,k}(t_j) \int_{\Delta_s^\dagger} \tau \phi_{s,i} \phi_{s,k} \right) \end{aligned}$$

en donde, del apéndice III

$$\int_{\Delta_s^\dagger} \tau \phi_{s,i} \phi_{s,k} = \frac{\mu_2(\Delta_s^\dagger)}{60} \sum_{q \in \bar{3}} (1 + \delta_{qi} + \delta_{qk}) (1 + \delta_{ik}) \Delta_{s,q,2} \quad (\text{II.4.10})$$

y la otra integral esta expresada en (II.3.18), que también debe aplicarse al segundo miembro de (II.4.8). De modo análogo, con la aproximación $k_{s,t_j} \approx k_{s,t_j}(c_s)$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_s^\dagger} k_{s,t_j} r (\nabla_s \phi_{s,i}; \nabla_s \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}; t_j)) \\ \approx k_{s,t_j}(c_s) \int_{\Delta_s^\dagger} r (\nabla_s \phi_{s,i}; \nabla_s \psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}; t_j)) \\ = \frac{k_{s,t_j}(c_s)}{4 \mu_2(\Delta_s^\dagger)^2} \sum_{k \in \bar{3}} N_{s,k}(t_j) (b_{s,k}, b_{s,i}) \int_{\Delta_s^\dagger} r \\ = \frac{c_{s,2} k_{s,t_j}(c_s)}{4 \mu_2(\Delta_s^\dagger)} \sum_{k \in \bar{3}} N_{s,k}(t_j) (b_{s,k}, b_{s,i}) \end{aligned}$$

debido a (II.3.7). Para (II.4.9) con $l \in \bar{3}$ y suponiendo constantes a $h_{s,t_j,l}$ y $T_{s,t_j,l}$ en $\theta_{\Delta_s^\dagger,l}$.

$$\begin{aligned} \int_{\theta_{\Delta_s^\dagger,l}} r \phi_{s,i} (h_{s,t_j,l} (\psi_s \circ (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}; t_j) - T_{s,t_j,l})) \\ = h_{s,t_j,l} \left(\sum_{k \in \bar{3}} N_{s,k}(t_j) \int_{\theta_{\Delta_s^\dagger,l}} r \phi_{s,i} \phi_{s,k} - T_{s,t_j,l} \int_{\theta_{\Delta_s^\dagger,l}} r \phi_{s,i} \right) \end{aligned}$$

en donde las integrales están expresadas en (II.3.19) y (II.3.20). Para el otro sumando de (II.4.9) se tiene

$$\int_{\theta_{\Delta_s^\dagger,l}} r \phi_{s,i} (q_{s,t_j,l} \mathbf{n}_s) = q_{s,t_j,l} \alpha_{s,l} \int_{\theta_{\Delta_s^\dagger,l}} r \phi_{s,i}$$

haciendo $\alpha_{s,l} \equiv \cos \angle(\mathbf{q}_{s,t_j,l}, \mathbf{n}_s)$ con $\mathbf{q}_{s,t_j,l} \equiv \mathbf{q}_{s,t_j} \circ \iota_{\theta_{\Delta_s^\dagger,l}}$ y $\mathbf{n}_{s,l} \equiv \mathbf{n}_s \circ \iota_{\theta_{\Delta_s^\dagger,l}}$, además $q_{s,t_j,l} \equiv \|\mathbf{q}_{s,t_j,l}\|$ se ha supuesto constante.

Entonces, al considerar cada $i \in \bar{3}$ y adoptar una notación matricial para el sistema de ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{s,t_j} c_{p_s,t_j} \mu_2(\Delta_s^\dagger)}{60} B_s \times \mathcal{D}N_s(t_j) + \left(\frac{\rho_{s,t_j} c_{p_s,t_j} \mathbf{V}_{s,t_j,z}(c_s)}{24} A_s + \frac{1}{12} C_{s,t_j} \right. \\ \left. + \frac{c_{s,2} k_{s,t_j}(c_s)}{4 \mu_2(\Delta_s^\dagger)} M_s \right) \times N_s(t_j) = \frac{Q_{int,s,t_j} \mu_2(\Delta_s^\dagger)}{12} D_s + \frac{1}{6} E_{s,t_j} - \frac{1}{6} F_{s,t_j} \end{aligned} \quad (II.4.11)$$

en donde

$$B_s \equiv$$

$$\begin{pmatrix} 6\Delta_{s,12} + 2(\Delta_{s,22} + \Delta_{s,32}) & 2(\Delta_{s,12} + \Delta_{s,22}) + \Delta_{s,32} & 2(\Delta_{s,12} + \Delta_{s,32}) + \Delta_{s,22} \\ 2(\Delta_{s,12} + \Delta_{s,22}) + \Delta_{s,32} & 6\Delta_{s,22} + 2(\Delta_{s,12} + \Delta_{s,32}) & \Delta_{s,12} + 2(\Delta_{s,22} + \Delta_{s,32}) \\ 2(\Delta_{s,12} + \Delta_{s,32}) + \Delta_{s,22} & \Delta_{s,12} + 2(\Delta_{s,22} + \Delta_{s,32}) & 6\Delta_{s,32} + 2(\Delta_{s,12} + \Delta_{s,22}) \end{pmatrix}$$

y las matrices A_s , D_s , M_s , C_{s,t_j} , E_{s,t_j} y F_{s,t_j} están expresadas en (II.3.22), (II.3.23), (II.3.13), (II.3.24), (II.3.25) y (II.3.26) respectivamente, aunque en las tres últimas expresiones deben hacerse las sustituciones inherentes al instante t_j considerado.

El sistema de ecuaciones (II.4.11) esta asociado al instante $t_j \in T$, por ello, este procedimiento genera $p+1$ sistemas de ecuaciones paramétricas, dado que se consideraron p intervalos en el lapso de descripción del fenómeno. Estos sistemas se transforman en p sistemas acoplados de ecuaciones algebraicas con la aproximación de Crank-Nicolson-Galerkin expresada en (II.4.6). En efecto, al llevar la aproximación a (II.4.11), para cada $j \in \bar{p}$ se obtiene

$$\begin{aligned} & \left(\rho_{s,t_j} c_{p,s,t_j} \left(\frac{\mu_2(\Delta_s^\dagger)}{60 \Delta t} B_s + \frac{V_{s,t_j,z}(c_s)}{48} A_s \right) + \frac{1}{24} C_{s,t_j} + \frac{c_{s2} k_{s,t_j}(c_s)}{8 \mu_2(\Delta_s^\dagger)} M_s \right) \times N_s(t_j) = \\ & \left(\rho_{s,t_j} c_{p,s,t_j} \left(\frac{\mu_2(\Delta_s^\dagger)}{60 \Delta t} B_s - \frac{V_{s,t_j,z}(c_s)}{48} A_s \right) - \frac{1}{24} C_{s,t_j} - \frac{c_{s2} k_{s,t_j}(c_s)}{8 \mu_2(\Delta_s^\dagger)} M_s \right) \times N_s(t_{j-1}) \\ & + \frac{Q_{int,s,t_j} \mu_2(\Delta_s^\dagger)}{12} D_s + \frac{1}{6} E_{s,t_j} - \frac{1}{6} F_{s,t_j} \end{aligned} \quad (\text{II.4.12})$$

el cual es un sistema de ecuaciones que depende de la especificación de las condiciones iniciales $(N_s(t_0) \forall s \in \bar{m})$ que se fijen, incluyendo las condiciones a la frontera para cada instante de T .

Al igual que en el caso traslacional, los p sistemas de ecuaciones (II.4.12) se refieren a un cualquier elemento de malla; para "cubrir" la región Ω , se requiere del acoplamiento de los m sistemas de ecuaciones elementales asociados a cada instante. Dicho acoplamiento se basa en la condición de "continuidad" (II.2.4) y da lugar a un proceso de ensamblaje de los sistema de ecuaciones elementales que genera un sistema global de ecuaciones para cada instante. Este proceso debe incorporar las condiciones de Dirichlet que se consideren, reduciendo la dimensión original de los sistemas globales de ecuaciones.

§II.5 Ensamble y métodos numéricos de solución

Los sistemas de ecuaciones obtenidos se refieren a un cualquier elemento de malla, por lo que se requiere de un proceso de ensamble que de lugar a un sistema de ecuaciones, cuya solución genere una aproximación a la solución del problema, que satisfaga las condiciones de Dirichlet que se introduzcan y constituya una solución global "continua". Para el planteamiento del procedimiento se considera genéricamente a sistemas de ecuaciones de la forma

$$A_s \times N_s = B_s, \quad \forall s \in \bar{m}$$

asociables a cualquiera de los sistemas obtenidos.

El procedimiento se basa en la asignación de nuevos identificadores a los vértices de todos los elementos de malla. Partiendo de la existencia de la matriz Δ , que identifica los vértices de cada elemento de malla mediante pares ordenados en $\bar{m} \times \bar{3}$, es posible proponer una función $\mathcal{N}: \bar{m} \times \bar{3} \rightarrow \bar{3m}$ biyectiva⁴⁹, la cual establece una nueva identificación de los $3m$ vértices de la malla.

Al considerar a $\mathcal{N}_s \equiv \mathcal{N} \circ (s, \cdot) \quad \forall s \in \bar{m}$, se definen las matrices C_s de orden $3 \times 3m$ haciendo

$$C_{s,ij} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin \mathcal{N}_s(\bar{3}) \\ \delta_{i, \mathcal{N}_s^{-1}(j)} & \text{si } j \in \mathcal{N}_s(\bar{3}) \end{cases} \quad \forall i \in \bar{3}, \forall j \in \bar{3m} \text{ y } \forall s \in \bar{m}$$

Con estas matrices se transforma a los m sistemas de 3 ecuaciones en un sistema equivalente de $3m$ ecuaciones, quien resulta ser

$$\left(\sum_{s \in \bar{m}} C_s^t \times A_s \times C_s \right) \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C_s^t \times N_s \right) = \sum_{s \in \bar{m}} C_s^t \times B_s \quad (\text{II.5.1})$$

pues

$$C_s^t \times C_l = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq l; \\ \delta & \text{si } s = l. \end{cases}$$

Para la incorporación de la condición (II.2.4) es necesaria la consideración de la siguiente relación de equivalencia en $\bar{3m}$

$$r \sim k \iff \Delta_{\mathcal{N}^{-1}(r)} = \Delta_{\mathcal{N}^{-1}(k)}$$

que da lugar a una partición de $\bar{3m}$, \mathcal{P} , cuyo número de elementos (subconjuntos de $\bar{3m}$), por ejemplo n , depende de la malla. Esta relación permite la construcción de una función $\mathcal{E}: \bar{3m} \rightarrow \mathcal{P}$ en términos de la clase de equivalencia de cada elemento de $\bar{3m}$, es decir

$$\mathcal{E}(r) = \{k \in \bar{3m} | k \sim r\} \quad \forall r \in \bar{3m}.$$

Ahora se considera una función $\mathcal{M}: \mathcal{P} \rightarrow \bar{3m}$ haciendo

$$\mathcal{M}(\beta) \equiv \min(\beta) \quad \forall \beta \in \mathcal{P}$$

⁴⁹ Usualmente se evita la signación externa de \mathcal{N} , por ejemplo haciendo $\mathcal{N}(s, l) \equiv 3(s-1) + l \quad \forall (s, l) \in \bar{m} \times \bar{3}$.

y a una matriz de orden $3m \times 3m$

$$D_{i,j} \equiv \begin{cases} \sum_{s \in \mathcal{E}(j)} \delta_{is} & \text{si } j \in \mathcal{M}(\mathcal{P}); \\ 0 & \text{si } j \notin \mathcal{M}(\mathcal{P}) \end{cases}$$

con la que se transforma a (II.5.1) como sigue

$$D^t \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C'_s \times A_s \times C_s \right) \times D \times D^t \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C'_s \times N_s \right) = D^t \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C'_s \times B_s \right)$$

expresión válida debido a que $D \times D^t = \delta$. Este sistema de ecuaciones posee $3m - n$ columnas- renglones con ceros, quienes son removidos al hacer

$$\begin{aligned} E^t \times D^t \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C'_s \times A_s \times C_s \right) \times D \times E \times E^t \times D^t \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C'_s \times N_s \right) \\ = E^t \times D^t \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C'_s \times B_s \right) \end{aligned} \quad (\text{II.5.2})$$

en donde E es una matriz de orden $3m \times n$ definida como sigue

$$E_{i,j} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin \mathcal{M}(\mathcal{P}); \\ \delta_{j\mathcal{O}^{-1}(i)} & \text{si } j \in \mathcal{M}(\mathcal{P}); \end{cases} \quad \forall i \in \bar{3m}$$

siendo \mathcal{O} la única función creciente de \bar{m} a $\mathcal{M}(\mathcal{P})$. Finalmente, la condición (II.2.4) se incorpora al sustituir (II.5.2) por el sistema de ecuaciones

$$E^t \times D^t \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C'_s \times A_s \times C_s \right) \times D \times E \times F = E^t \times D^t \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C'_s \times B_s \right) \quad (\text{II.5.3})$$

cuya solución involucra la determinación de F . Este resultado debe procesarse para obtener la solución del problema, en los términos que siguen

$$N_{s,i} = \frac{1}{\#[\mathcal{E} \circ \mathcal{N}](s,i)} F_{[\mathcal{O}^{-1} \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{N}](s,i)} \quad \forall (s,i) \in \bar{m} \times \bar{3} \quad (\text{II.5.4})$$

siendo $\#[\mathcal{E} \circ \mathcal{N}](s,i)$ el número de elementos del conjunto $[\mathcal{E} \circ \mathcal{N}](s,i)$.

En los programas de cómputo de elemento finito es frecuente una organización modular. En el módulo inicial de la implantación computacional se genera la malla, cuya información geométrica esta contenida en dos funciones: la primera, $f: \bar{m} \times \bar{3} \rightarrow \bar{n}$, es identificable con $\mathcal{O}^{-1} \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{N}$ y expresa la concatenación de los triángulos de la

mallá. La segunda, $g: \bar{n} \rightarrow \mathbb{R}^2$, describe las coordenadas de los vértices "finales"; i.e. los identificados con los valores de f . Aunque el conocimiento de f no basta para la aplicación literal del procedimiento de ensamblaje presentado, si es suficiente para realizar el ensamblaje omitiendo los pasos intermedios que son necesarios para justificar el proceso.

La introducción de condiciones de Dirichlet da lugar a una reducción del sistema de ecuaciones (II.5.3), pues como se había visto, los valores se asignan a los nodos elegidos. En efecto, al suponer que $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}(\mathcal{P})$ representa los nodos condicionados, se define la matriz

$$G_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \mathcal{O}(\mathcal{D}); \\ \delta_{i(j-Q(j))} & \text{si } j \in \bar{n} \setminus \mathcal{O}(\mathcal{D}) \end{cases} \quad \forall i \leq n - \#\mathcal{D}$$

en donde

$$Q: \bar{n} \rightarrow \bar{n} \quad \cdot \cdot \cdot \quad Q(j) \equiv \#\{r < j \mid r \in \mathcal{O}(\mathcal{D})\}$$

y las matrices⁵⁰

$$H_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \mathcal{O}(\mathcal{D}); \\ \delta_{ij} & \text{si } j \in \bar{n} \setminus \mathcal{O}(\mathcal{D}); \end{cases} \quad \forall i \in \bar{n}$$

$$I_{ij} \equiv \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } j \in \mathcal{O}(\mathcal{D}); \\ 0 & \text{si } j \in \bar{n} \setminus \mathcal{O}(\mathcal{D}) \end{cases} \quad \forall i \in \bar{n}$$

con las que se transforma a (II.5.3) como sigue

$$\begin{aligned} G \times E^t \times D^t \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C_s^t \times A_s \times C_s \right) \times D \times E \times (H + I) \times F \\ = G \times E^t \times D^t \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C_s^t \times B_s \right) \end{aligned}$$

obteniendo un sistema de $n - \#\mathcal{D}$ ecuaciones, que permite ubicar a las incógnitas en el miembro izquierdo

$$\begin{aligned} G \times E^t \times D^t \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C_s^t \times A_s \times C_s \right) \times D \times E \times H \times F \\ = G \times E^t \times D^t \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C_s^t \times B_s \right) \\ - G \times E^t \times D^t \times \left(\sum_{s \in \bar{m}} C_s^t \times A_s \times C_s \right) \times D \times E \times I \times F. \end{aligned} \quad (\text{II.5.5})$$

⁵⁰ Nótese que $H + I = \delta$.

Este sistema de ecuaciones posee columnas con ceros que deben ser removidas; para ello se considera a la única función creciente $\mathcal{R}: \overline{\#D} \rightarrow \mathcal{O}(D)$, y se sustituye (II.5.3) por el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} & \mathbf{G} \times \mathbf{E}^t \times \mathbf{D}^t \times \left(\sum_{s \in \overline{m}} \mathbf{C}_s^t \times \mathbf{A}_s \times \mathbf{C}_s \right) \times \mathbf{D} \times \mathbf{E} \times \mathbf{H} \times \mathbf{G}^t \times \mathbf{K} \\ & = \mathbf{G} \times \mathbf{E}^t \times \mathbf{D}^t \times \left(\sum_{s \in \overline{m}} \mathbf{C}_s^t \times \mathbf{B}_s \right) \\ & \quad - \mathbf{G} \times \mathbf{E}^t \times \mathbf{D}^t \times \left(\sum_{s \in \overline{m}} \mathbf{C}_s^t \times \mathbf{A}_s \times \mathbf{C}_s \right) \times \mathbf{D} \times \mathbf{E} \times \mathbf{I} \times \mathbf{J} \times \mathbf{J}^t \times \mathbf{F} \end{aligned} \quad (\text{II.5.6})$$

siendo $\mathbf{J} \equiv \delta_i \mathcal{R}(j)$ con $i \in \overline{n}$ y $j \leq \#D$. En este sistema la matriz $\mathbf{J}^t \times \mathbf{F}$ es conocida, pues resulta de los valores asignados al introducir las condiciones de Dirichlet. La solución de este sistema de ecuaciones involucra la determinación de \mathbf{K} , pero para utilizar (II.5.4) debe reconocerse que $\mathbf{F} = \mathbf{G}^t \times \mathbf{K}$, con lo cual quedaría resuelto el problema.

El procedimiento de ensamblaje presentado se aplica a todos los sistemas de ecuaciones desarrollados en las secciones 3 y 4. La elección del método numérico para la obtención de soluciones depende de la naturaleza de los sistemas de ecuaciones resultantes, íntimamente relacionados a las características de los sistemas de ecuaciones elementales y a la malla considerada.

Una característica común del método de elemento finito es que la matriz generada con el proceso de ensamblaje

$$\mathbf{G} \times \mathbf{E}^t \times \mathbf{D}^t \times \left(\sum_{k \in \overline{n}} \mathbf{C}_k^t \times \mathbf{A}_k \times \mathbf{C}_k \right) \times \mathbf{D} \times \mathbf{E} \times \mathbf{H} \times \mathbf{G}^t \quad (\text{II.5.7})$$

es una matriz rala (hueca). La ocupación en problemas grandes (2000 nodos sin condición de Dirichlet) es del orden del 0.4%, en problemas chicos el grado de ocupación aumenta significativamente llegando al 12%, sin que esto signifique que no pueda ser mayor. Respecto a los sistemas de ecuaciones elementales, se debe mencionar que:

- La asimetría de las matrices V_s y V_{s,t_j} de los sistemas de ecuaciones (II.3.10) y (II.4.7) originan severas dificultades numéricas, por ello, en las implantaciones computacionales se excluyen los problemas con medios en movimiento.
- La asimetría de la matriz A_s de los sistemas de ecuaciones (II.3.21) y (II.4.12) origina severas dificultades numéricas, por ello, en las implantaciones computacionales

se excluyen los problemas con medios con movimiento en la dirección "z". Obsérvese que se admite un movimiento rotacional puro en los medios, dado que en este caso $V_{,z} = 0$, obteniendo cierta aplicabilidad en problemas con medios en movimiento.

Estas simplificaciones hacen que la matriz (II.5.7) sea simétrica⁵¹. Se puede verificar que los elementos de su diagonal principal son positivos, lo cual constituye una condición necesaria (más no suficiente) para que la matriz sea definida positiva⁵².

Por la rareza y tamaño de los sistemas de ecuaciones, así como por las consecuencias de utilizar la aritmética de punto flotante inherente a la interrelación de los lenguajes de alto nivel con las computadoras digitales [22], se prefieren los métodos iterativos de solución de sistemas de ecuaciones lineales [23 p.536 y 24 p.352], sobre todo cuando no se presentan matrices "bandadas". Este es el caso en la implantación computacional, pues por razones prácticas el ordenamiento nodal es asignado mediante un proceso semi-automático incorporado en la generación de mallas, lo cual dificulta la consideración de un ordenamiento que provoque "bandas" en la matriz⁵³.

Para los sistemas de ecuaciones obtenidos, sistemas simétricos y definidos positivos, se utiliza el método iterativo de gradiente conjugado. En términos del campo algebraico real \mathcal{R} —excluyendo momentáneamente la aritmética de punto flotante— el método de gradiente conjugado posee cualidades muy apropiadas:

- a) Procedimientos de cálculo sencillos.
- b) No altera la matriz original, pudiéndose aprovechar la rareza.
- c) Se alcanza la solución en un número de iteraciones menor o igual al orden del sistema.
- d) Es elegible el punto de inicio del proceso iterativo.
- e) Disminuye el residuo en cada iteración.
- f) Los resultados intermedios requieren de poca memoria.

⁵¹ Una matriz A es simétrica cuando $A = A^t$. Esto es equivalente [7 §5.3] a que su operador lineal asociado (con respecto a la base canónica δ) sea autoadjunto.

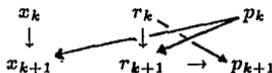
⁵² Una matriz A es definida positiva si $q^t \times A \times q > 0 \quad \forall q \neq 0$, lo cual es equivalente a que su operador asociado, \mathcal{A} , satisfaga el que $(q, \mathcal{A}(q)) > 0 \quad \forall q \neq 0$. Es fácil demostrar que

$$A \text{ definido positivo} \implies ((q, \mathcal{A}(q)) = 0 \iff q = 0) \implies (\mathcal{A}(q) = 0 \iff q = 0)$$

por lo tanto: \mathcal{A} definido positivo $\implies \mathcal{A}$ invertible (A no singular).

⁵³ En los programas de cómputo de la década pasada se utilizaban métodos directos de solución, generalmente eliminación Gaussiana.

En esencia, este método genera en cada iteración un residuo ortogonal a los previos, por lo que el proceso esta acotado por la dimensión del espacio de soluciones (orden del sistema), alcanzando la solución cuando el residuo es nulo. Para el sistema de ecuaciones $\mathcal{A}(x) = b$, con $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ autoadjunto y definido positivo, se puede esquematizar la iteración $k + 1$ como sigue



en donde x_{k+1} es la aproximación a la solución generada en la iteración, y r_{k+1} es el residuo de esa aproximación. El método [23 p.573] consiste en el siguiente proceso:

- 1) Elegir algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y hacer $r_0 \equiv b - \mathcal{A}(x_0)$ y $p_0 \equiv r_0$.
- 2) Para $k = 0, 1, \dots$ se considera la validez de la relación $p_k = 0$.
 - a) Cuando $p_k = 0$ se suspende el proceso y se tiene que x_k es la solución.
 - b) Cuando $p_k \neq 0$ se procede a la iteración $k + 1$ haciendo

$$\left. \begin{array}{ll}
 1. a_k \equiv \frac{\langle r_k, r_k \rangle}{\langle p_k, \mathcal{A}(p_k) \rangle} & 2. x_{k+1} \equiv x_k + a_k p_k \\
 3. r_{k+1} \equiv r_k - a_k \mathcal{A}(p_k) & 4. b_k \equiv \frac{\langle r_{k+1}, r_{k+1} \rangle}{\langle r_k, r_k \rangle} \\
 5. p_{k+1} \equiv r_{k+1} + b_k p_k &
 \end{array} \right\} \quad (GC)$$

El proceso es consistente, pero puede resultar extremadamente lento (demasiadas iteraciones), especialmente cuando la solución difiere mucho del valor inicial propuesto, lo cual es frecuente al tratar con un problema nuevo (no se posee información para aproximarse a la solución).

Este comportamiento podría empeorar con la implementación del método en un programa de cómputo, pues es posible que el número de iteraciones incluso rebase el orden del sistema, debido a la aritmética de punto flotante. Ante esta situación, en años recientes se ha mostrado preferencia por una modificación al método de gradiente conjugado, basada en un preconditionamiento con una descomposición incompleta de Cholesky [25 y 26].

La descomposición (completa) de Cholesky [24 §5.2] se aplica a una matriz simétrica y definida positiva, \mathbf{A} , quien es expresada en términos del producto de una matriz triangular inferior, \mathbf{L} , con su matriz traspuesta; i.e. $\mathbf{A} = \mathbf{L} \times \mathbf{L}^t$ (con sus operadores asociados se tendría $\mathcal{A} = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*$). La determinación de la matriz \mathbf{L} puede efectuarse como sigue:

Para $k \in \bar{n}$ se hace

$$L_{kk} \equiv + \sqrt{A_{kk} - \sum_{j \in \bar{k}-1} L_{kj}^2}$$

en donde

$$L_{ik} \equiv \frac{A_{ik} - \sum_{j \in \bar{k}-1} L_{ij} L_{kj}}{L_{kk}} \quad (CC)$$

con $i \in \bar{n} \setminus \bar{k}$.

Para simplificar este cálculo de L , y para facilitar la solución de sistemas de ecuaciones inherentes al preconditionamiento, se efectúa una descomposición incompleta de A , la cual utiliza su rareza. Consiste en "aproximar" a la matriz A haciendo

$$L_{kk} \equiv + \sqrt{A_{kk} - \sum_{j \in \bar{k}-1} L_{kj}^2}$$

en donde

$$L_{ik} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } A_{ik} = 0; \\ \left(A_{ik} - \sum_{j \in \bar{k}-1} L_{ij} L_{kj} \right) / L_{kk} & \text{si } A_{ik} \neq 0 \end{cases} \quad (CI(0))$$

con $i \in \bar{n} \setminus \bar{k}$, por lo que $A \simeq L \times L^t$, siguiendo la idea de la descomposición completa de Cholesky. Este método podría presentar dificultades, pues puede ocurrir⁵⁴ que exista algún $k \in \bar{n}$ para el cual $L_{kk}^2 \leq 0$, sin embargo, se dice [27] que esta situación puede tratarse apropiadamente con un procedimiento de "corrimento" [28]...

El preconditionamiento [24 §10.3] se realiza con el resultado anterior (CI(0)); utilizando a $L \times L^t$ como preconditionador del método de gradiente conjugado. Para ello, se sustituye el problema original $A(x) = b$ por $\bar{A}(\bar{x}) = \bar{b}$, en donde $\bar{A} \equiv L^{-1} \circ A \circ L^{*-1}$, que resultarían equivalentes si se hace $\bar{x} \equiv L^*(x)$ y $\bar{b} \equiv L^{-1}(b)$. Al nuevo sistema se le aplica el método de gradiente conjugado, luego entonces, de (GC) con un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario y $\bar{x}_0 \equiv L^*(x_0)$, se tendría para la iteración $k+1$ que

$$\begin{aligned} 1. a_k &\equiv \frac{\langle \bar{r}_k, \bar{r}_k \rangle}{\langle \bar{p}_k, \bar{A}(\bar{p}_k) \rangle} & 2. \bar{x}_{k+1} &\equiv \bar{x}_k + a_k \bar{p}_k \\ 3. \bar{r}_{k+1} &\equiv \bar{r}_k - a_k \bar{A}(\bar{p}_k) & 4. b_k &\equiv \frac{\langle \bar{r}_{k+1}, \bar{r}_{k+1} \rangle}{\langle \bar{r}_k, \bar{r}_k \rangle} \\ 5. \bar{p}_{k+1} &\equiv \bar{r}_{k+1} + b_k \bar{p}_k \end{aligned}$$

⁵⁴ Con la matriz

$$A \equiv \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

se obtiene que $L_{33}^2 = -1$.

y al efectuar los siguientes "cambios de variable"

$$p_k \equiv \mathcal{L}^{*-1}(\bar{p}_k) \quad x_k \equiv \mathcal{L}^{*-1}(\bar{x}_k) \quad r_k \equiv \mathcal{L}(\bar{r}_k) \quad \forall k \in \bar{n}$$

se obtiene

$$r_0 = b - \mathcal{A}(x_0) \quad p_0 = (\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*)^{-1}(r_0)$$

y además

$$\left. \begin{array}{l} 1. a_k = \frac{\langle r_k, (\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*)^{-1}(r_k) \rangle}{\langle p_k, \mathcal{A}(p_k) \rangle} \quad 2. x_{k+1} = x_k + a_k p_k \\ 3. r_{k+1} = r_k - a_k \mathcal{A}(p_k) \quad 4. b_k = \frac{\langle r_{k+1}, (\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*)^{-1}(r_{k+1}) \rangle}{\langle r_k, (\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*)^{-1}(r_k) \rangle} \\ 5. p_{k+1} = (\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*)^{-1}(r_{k+1}) + b_k p_k \end{array} \right\} \quad (\text{GCCCI}(0))$$

para la iteración $k+1$, por lo cual, cuando $p_k = 0$ se tiene que x_k es solución del problema original: $\mathcal{A}(x) = b$.

Para iniciar la aplicación de este método se requiere la solución de $[\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*](p_0) = r_0$; i.e. resolver por sustitución a $\mathcal{L}(h) = r_0$ y después a $\mathcal{L}^*(p_0) = h$. Posteriormente, en cada iteración se debe calcular, también por sustitución, a $(\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*)^{-1}(r_{k+1})$, de lo cual se sigue la importancia de la forma dada a la matriz L .

Capítulo III.- Implantación computacional

Resumen

En este capítulo se mencionan las características de la implantación computacional del procedimiento desarrollado en los capítulos anteriores. Se explica brevemente el método de aplicación de la implantación y las necesidades computacionales para su ejecución en computadora personal. Por último se presenta cierta evidencia para la validación de los algoritmos y la implantación computacional, confrontando sus resultados numéricos de problemas simples, con otros obtenidos en forma independiente y directa.

§III.1 Introducción

La implantación computacional del procedimiento desarrollado para la solución de problemas bidimensionales de transferencia de calor por conducción, es un paquete de cómputo modular con interfaz gráfica llamado CALIE-2D.T. Este paquete es un producto del Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE México), concebido para apoyar el análisis y el diseño de máquinas eléctricas y térmicas.

Se trabajó intensamente en lograr un producto comercialmente competitivo, por lo que se implantó un funcionamiento computacional amistoso y bien presentado, modular y altamente interactivo (con interfaz gráfica) en la definición de problemas y en el análisis de soluciones.

Por dificultades numéricas, en la implantación computacional se limita severamente el movimiento de los medios, incorporando sólo parcialmente al procedimiento de solución presentado en los capítulos previos. Sin embargo, permite el cálculo de campos de temperatura y flujo de calor en problemas bidimensionales en régimen estacionario o transitorio de transferencia de calor por conducción. Acepta la consideración de fuentes de calor internas en medios homogéneos, isotrópicos y lineales, y admite condiciones a la frontera del tipo Dirichlet, Neumann y convección forzada (condición mixta).

§III.2 Descripción de la implantación computacional

La implantación computacional es modular y altamente interactiva con interfaz gráfica [29], orientada a satisfacer las necesidades inherentes al diseño y el análisis de máquinas. Esto lo clasifica como un programa en la ingeniería apoyada por computadora (CAE) para el análisis de la transferencia de calor por conducción, y a la vez, como un programa en el diseño apoyado por computadora (CAD) para el diseño de máquinas.

La caracterización de los fenómenos térmicos susceptibles ha ser descritos con la implantación computacional del sistema, emana de la modelación basada en la transferencia de calor por conducción desarrollada en el capítulo I. Permite el tratamiento de problemas en régimen estacionario o transitorio, con simetría axial o traslacional (para incorporar un comportamiento bidimensional del flujo de calor). Acepta condiciones a la frontera del tipo Dirichlet, Neumann, y convección forzada (condición mixta). Es posible considerar fuentes de calor internas en medios (sólidos o fluidos) homogéneos, isotrópicos y lineales. Esto hace factible la determinación del campo de temperatura y flujo de calor en un amplio rango de aplicaciones, tales como: transformadores, generadores, motores, intercambiadores de calor, rotores de turbinas, etc.

La implantación computacional fué desarrollada para resolver los problemas térmicos antes mencionados en computadoras personales (con sistema operativo MSDOS). Sin embargo, para la solución numérica de problemas grandes existe la opción de utilizar minicomputadoras (MC), lo cual es especialmente útil en problemas transitorios. Esta opción disminuye sustancialmente el lapso de solución, pero su aplicabilidad depende de las facilidades en la comunicación PC ↔ MC.

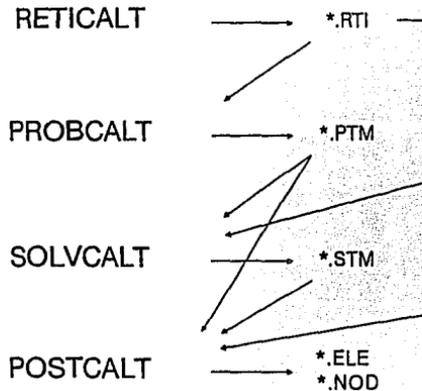
La implantación computacional está compuesta por los siguientes módulos⁵⁵ (véase esquema en la página siguiente):

- RETICALT*: Es un programa interactivo con interfaz gráfica para la generación de mallas triangulares de primer orden. En este programa se plantean los aspectos geométricos del problema térmico, se identifican los sectores de la frontera global en donde se introducirán las condiciones a la frontera. También se especifica la distribución de los materiales presentes y las fuentes de calor internas.
- PROBCALT*: Es un programa interactivo con interfaz gráfica para la definición de la modelación térmica del problema. Se declara el tipo de simetría y si es

⁵⁵ Los módulos señalados con * sólo son ejecutables en PC.

estacionario o transitorio⁵⁶. Se especifican las condiciones a la frontera⁵⁷, las características de los materiales empleados y las fuentes de calor internas³.

CALIIE_2D_T



Interrelación entre los módulos de la implantación computacional

- SOLVCALT: Es el programa que genera y soluciona los sistemas de ecuaciones algebraicas originadas con el método de elemento finito. Existen las versiones PC y HP, ejecutables en computadoras personales y minicomputadoras HP⁵⁸ respectivamente.
- POSTCALT*: Es un programa interactivo con interfaz gráfica para el análisis de la solución numérica. Despliega isothermas, flujos de calor y permite la generación de archivos con información numérica seleccionada interactivamente. Esta capacidad informativa también se presenta en problemas transitorios, pero en los instantes predefinidos por el usuario.

⁵⁶ En problemas transitorios se plantean los parámetros temporales de la descripción e información sobre la temperatura inicial.

⁵⁷ En problemas transitorios pueden variar linealmente en el tiempo.

⁵⁸ Es posible desarrollar versiones para otras minicomputadoras que posean compilador del lenguaje Pascal.

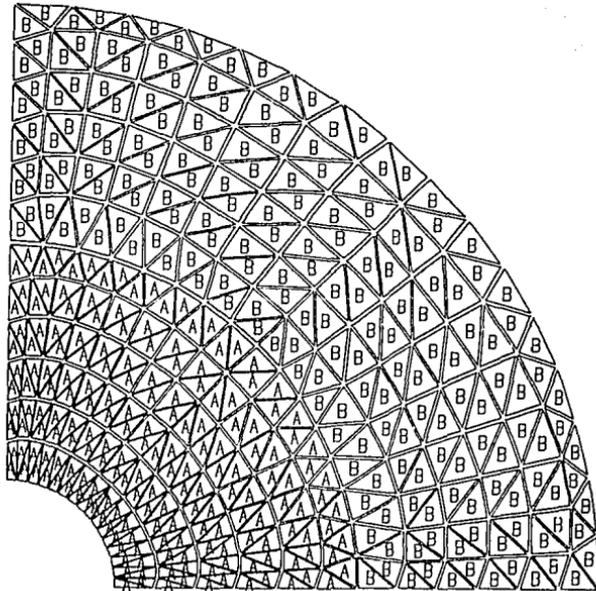
§III.3 Procedimiento de aplicación

La solución de un problema de transferencia de calor por conducción con el paquete de cómputo antes descrito involucra las siguientes tres etapas⁵⁹:

- 1a.- Se define el problema, iniciando el proceso con la ejecución de RETICALT.COM. En este programa se especifica la geometría de la región, se construye la malla y se asignan etiquetas para la posterior introducción de las características de los materiales y las condiciones a la frontera (véase figuras anexas). Al finalizar, se genera un archivo ASCII con la extensión RTI que contiene la información introducida.

```
CALIE_2D_T :: POSTCALT : CIL_T  
Validación de código traslacional
```

Malla para la modelación traslacional de dos cilindros coaxiales.

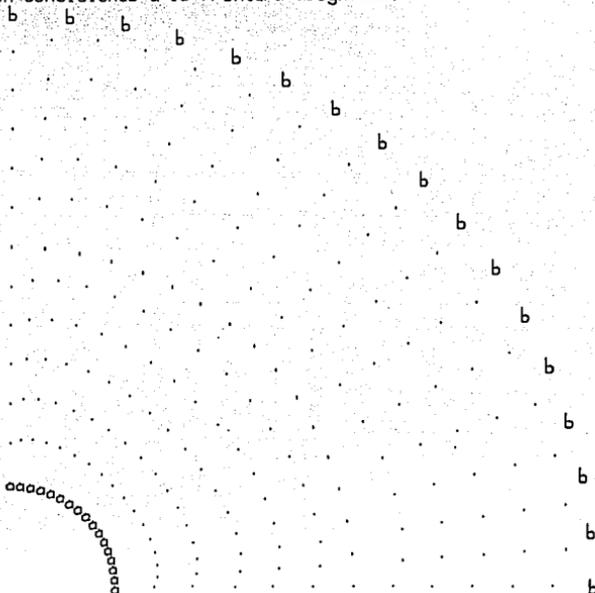


Ejemplo de partición de una región con malla triangular

⁵⁹ Estas etapas son comunes en los paquetes interactivos con interfaz gráfica de elemento finito; se les conoce como preprocesamiento, solución y postprocesamiento.

```
CALIE_2D_I :: POSTCALT : CIL_I
Validación de código traslacional
```

Nodos de la modelación traslacional de dos cilindros coaxiales.
Superficies con condiciones a la frontera asignadas.



Ejemplo de asignación de condiciones a la frontera

A continuación se ejecuta PROBCALT.COM, con el cual se incorpora la modelación térmica del problema, definiendo el tipo de simetría (axial o traslacional), el régimen del sistema (estacionario o transitorio), los valores para las características de los materiales (conductividad térmica, calor específico⁶⁰, densidad de masa⁶¹ y calor interno), los tipos de condiciones a la frontera (Dirichlet, Neumann o convección forzada) y sus correspondientes valores. En problemas transitorios se introduce la información del campo (nodal) de temperatura inicial y se declaran los parámetros para la descripción temporal: el paso de escritura de soluciones [min], el número de pasos de escritura de soluciones (define el lapso descriptivo), el paso interno de

⁶⁰ Sólo en problemas transitorios.

solución [seg]. La modelación térmica introducida es guardada en un archivo ASCII con la extensión PTM.

- 2a.- Se procede a resolver el problema en términos numéricos, ejecutando el programa SOLVCALT. En este programa se especifica la tolerancia aceptable para el residuo, dato necesario para la interrupción del proceso iterativo del método de gradiente conjugado. En problemas estacionarios se obtiene una solución, la cual es guardada en un archivo ASCII con la extensión STM. En problemas transitorios se escriben $n + 1$ archivos ASCII, suponiendo que se declaran n pasos de escritura: inicialmente se guarda el campo (nodal) de temperatura inicial usando la extensión 0, posteriormente (en orden cronológico) se guardan n soluciones; la primera usa la extensión 1, y así sucesivamente hasta la $(n - 1)$ -ésima con la extensión $n - 1$, la última solución utiliza la extensión STM.

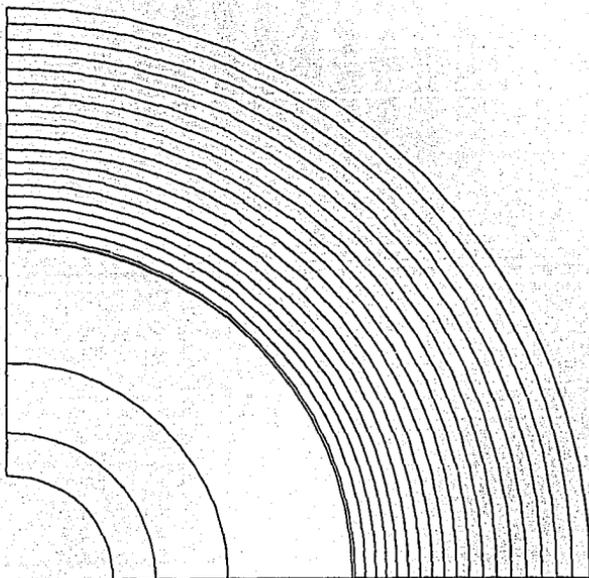
```
CALITE_2D_T :: POSTCALT : CIL_TDDO
```

```
Validación de código traslacional
```

```
Calor interno = 50000.00 W/m3.
```

```
Etqta. a: Dirichlet (300.0 C); Etqta. b: Dirichlet (520.0 C).
```

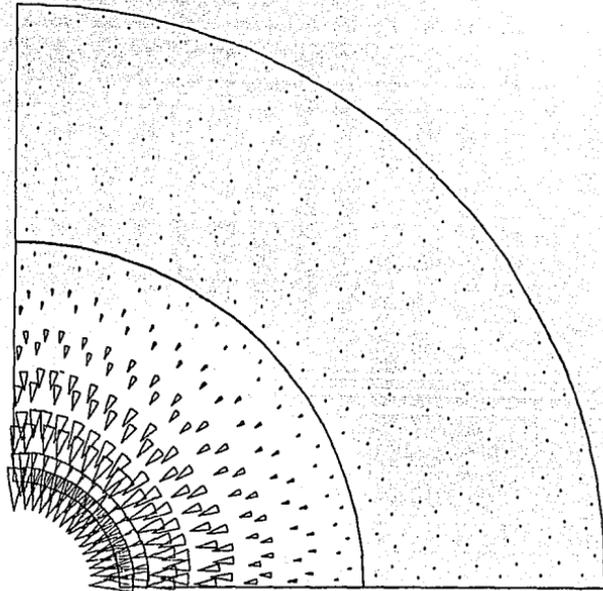
```
Temp. min. = 300.0 C; Temp. max. = 520.0 C; No. isotermas 20.
```



Ejemplo de isotermas en el análisis de soluciones

3a.- Se analiza la solución con la ejecución de POSTCALT.COM. Este programa permite la observación y copia en papel de isotermas y del campo de flujo de calor (véase figuras anexas). También es posible generar archivos ASCII con información numérica seleccionada gráficamente, con estos archivos que poseen la extensión ELE o NOD, se facilita la realización de los cálculos y las gráficas que el usuario requiera, utilizando elementos (externos al paquete) que le sean familiares. Estas facilidades también se presentan en problemas transitorios, pero sólo en los instantes predefinidos por el usuario; que corresponden a la declaración del paso de escritura.

```
CALIE_2D_T :: POSTCALT : CIL_TDDQ
Validación de código traslacional
Calor interno = 50000.00 W/m3.
Etqta. a: Dirichlet (300.0 C); Etqta. b: Dirichlet (520.0 C).
Flujo max. = 16791.17 W/m2; Flujo min. = 720.89 W/m2.
```



Ejemplo de flujo de calor en el análisis de soluciones

§III.4 Necesidades computacionales

La implantación computacional es configurada para una tarjeta gráfica, dentro de las opciones abajo mencionadas. De igual manera, es compilado seleccionando la existencia o ausencia de coprocesador numérico. Por ello, sólo es utilizable en sistemas con la configuración implantada.

Las características gráficas e interactivas del paquete hacen recomendable un sistema de alta resolución (monitor y tarjeta). Es indispensable contar con un digitalizador ("mouse") para la entrada de información y es conveniente el coprocesador numérico. Por tal, se sugiere la siguiente configuración:

- Computadora personal XT o AT con 640 Kb en RAM y acceso a un mínimo de 5 Mb en disco duro.
- Sistema operativo MS-DOS versión 2.11 o posterior.
- Tarjeta gráfica Hércules (720 x 348 pxl) con monitor monocromático TTL (en el modo "FULL" y "NOSAVE"), tarjeta gráfica EGA-PLUS (640 x 400 pxl) de las computadoras Olivetti (M24, M240 o M280). En su defecto, la tarjeta gráfica CGA (640 x 200 pxl).
- Coprocesador numérico 8087 u 80287.
- Digitalizador de Microsoft o compatible.
- Graficador de plumas Gould 6120 (opcional)
- Impresora de matriz (opcional).

Las versiones para minicomputadora se desarrollan con el compilador del lenguaje Pascal que tenga el usuario. Su funcionamiento depende del "hardware" y "software" implantado en el sistema para la comunicación PC ↔ MC, por ello, el procedimiento para utilizar esta versión es específico al sistema en el que se instala.

§III.5 Validación de la implantación computacional

La validación de un paquete de cómputo se limita a confrontar sus resultados numéricos con otros, obtenidos en forma independiente y directa. Esto obliga a considerar problemas sencillos, que sean susceptibles a ser resueltos mediante la solución analítica de sus ecuaciones diferenciales asociadas, pero a la vez, que involucren todas las variantes incorporadas en el paquete de cómputo.

Debe quedar claro que las soluciones numéricas son sólo aproximaciones, las cuales dependen de la información estipulada por el usuario. Por ello, es natural la existencia de discrepancias, las cuales deben evaluarse para la validación del paquete de cómputo. Este proceso es complejo y laborioso, pues en principio debía ser "exhaustivo"... en la práctica sólo se considera un número muy limitado de casos.

Cuando la confrontación de resultados es favorable, se establece confiabilidad en el procedimiento utilizado para transformar un problema analítico en uno algebraico, en los algoritmos desarrollados, en el método de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas adoptado, y en la implantación computacional (programas de cómputo del paquete). La validación de un paquete de cómputo no lo hace infalible, eventualmente pueden presentarse fuertes discrepancias cuantitativas en sus cálculos⁶¹, aunque frecuentemente se deben al planteamiento del problema: datos, condiciones a la frontera, malla, etc.

La validación mencionada es ajena a la aplicabilidad del paquete de cómputo a un problema real específico; esto depende del dominio o alcance de la teoría física en la que se apoya el paquete de cómputo, incluyendo las simplificaciones incorporadas y los tipos de condiciones a la frontera considerados. Intentar relacionar la validación de un paquete de cómputo con la confrontación de resultados numéricos y experimentales es absurdo, ya que incorpora la modelación del problema realizada por el usuario, la cual puede no ser acertada, y además, introduce la duda sobre la veracidad de los datos e información experimental.

§III.5.1 Problemas analizados

Para la validación de la implantación computacional del sistema se resuelven varios problemas estacionarios de transferencia de calor, que resultan del planteamiento de diversas condiciones a la frontera con un mismo arreglo de materiales con la característica de poseer simetría axial y traslacional.

Se consideran dos cilindros, A y B , de pared delgada y con materiales de conductividad térmica diferente, $k_A = 44.5 \text{ W/(m }^\circ\text{C)}$ y $k_B = 0.77 \text{ W/(m }^\circ\text{C)}$. Sus radios, $r_{A_i} = 0.07 \text{ m}$, $r_{A_e} = r_{B_i} = 0.2275 \text{ m}$ y $r_{B_e} = 0.385 \text{ m}$, permiten un arreglo concéntrico y en contacto íntimo, siendo el cilindro A el interior. Para mayor generalidad, se supone que el cilindro A tiene una fuente homogénea de calor interno $Q_{int A} = 50000 \text{ W/m}^3$. En las tablas y gráficas anexas se muestra la confrontación de los resultados analíticos

⁶¹ En general estas fallas sólo son apreciables en términos cualitativos, observando las isotermas o el flujo de calor.

(temperatura y flujo directos) con los numéricos (temperatura y flujo obtenidos con la implantación computacional), de la modelación axial (Ax) y traslacional (Tr) de los siguientes problemas:

DDQ Condición de Dirichlet en el interior y el exterior:

$$T(r_{A_i}) = 300.0 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ y } T(r_{B_e}) = 520.0 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

CCQ Convección forzada en el interior y el exterior:

$$T_A = 280.0 \text{ } ^\circ\text{C}, h_A = 210.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}), T_B = 540.0 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ y} \\ h_B = 2000.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}).$$

DCQ Condición de Dirichlet en el interior y convección forzada en el exterior:

$$T(r_{A_i}) = 300.0 \text{ } ^\circ\text{C}, T_B = 540.0 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ y } h_B = 2000.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}).$$

DNQ Condición de Dirichlet en el interior y condición de Neumann en el exterior:

$$T(r_{A_i}) = 300.0 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ y } q(r_{B_e}) = -730.0 \text{ W}/\text{m}^2.$$

CNQ Convección forzada en el interior y condición de Neumann en el exterior:

$$T_A = 280.0 \text{ } ^\circ\text{C}, h_A = 210.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}) \text{ y } q(r_{B_e}) = -730.0 \text{ W}/\text{m}^2.$$

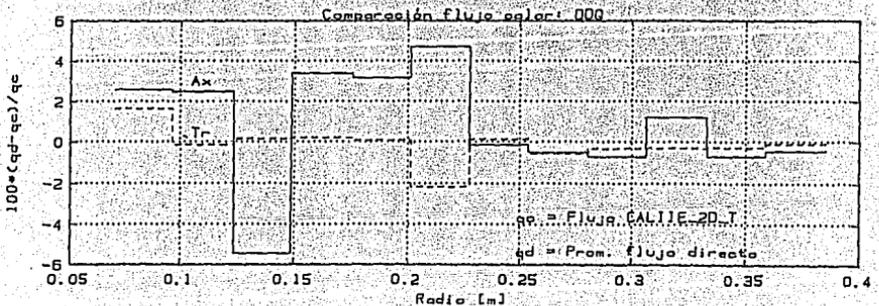
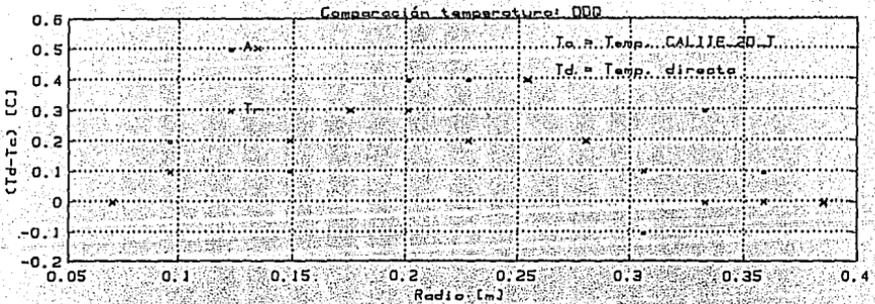
§III.5.2 Confrontación de resultados

Los resultados que se muestran⁶² en las páginas que siguen son satisfactorios, especialmente para el campo de temperatura, en donde la desviación es menor a un grado Centígrado, lo cual es afín a la precisión termométrica con termopares. Para el campo de flujo de calor, se tiene un comportamiento aceptable para muchas aplicaciones, ya que la desviación es menor al cinco por ciento del promedio (espacial) del flujo directo. Con estas confrontaciones se ilustra la confiabilidad numérica del paquete de cómputo y se establece cierta evidencia para su validación.

⁶² El significado de los encabezados de las tablas es el siguiente: R ↔ Radio [m], T ↔ Temperatura directa [°C], q ↔ Flujo de calor directo [W/m²], P_q ↔ Promedio espacial del flujo directo [W/m²], T^{Ax} ↔ Temperatura numérica (mod. axial) [°C], q_r^{Ax} ↔ Flujo de calor axial numérico (mod. axial) [W/m²], q_r^{Ax} ↔ Flujo de calor radial numérico (mod. axial) [W/m²], T^{Tr} ↔ Temperatura numérica (mod. traslacional) [°C], q_h^{Tr} ↔ Flujo de calor horizontal numérico (mod. traslacional) [W/m²], q_v^{Tr} ↔ Flujo de calor vertical numérico (mod. traslacional) [W/m²].

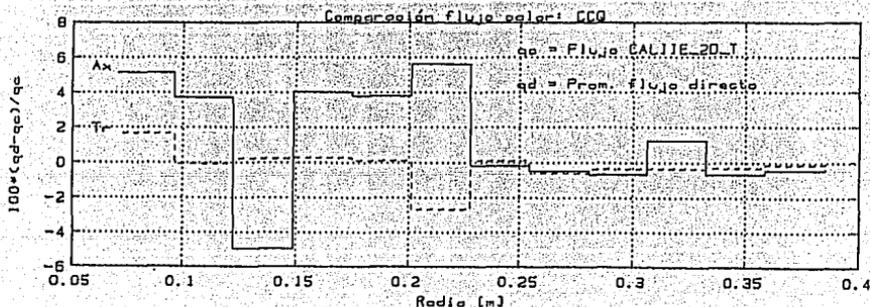
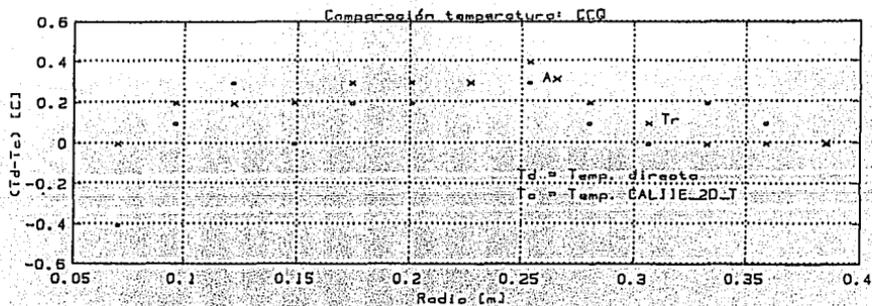
R	T	$q_x \times 10^2$	$Pq \times 10^2$	T^{Ax}	q_r^{Ax}	$q_r^{Ax} \times 10^2$	T^{Tr}	$q_h^{Tr} \times 10^2$	$q_v^{Tr} \times 10^2$
0.385	520.0	-7.2789	-7.5389	520.0	0.8000	-7.5713	520.0	-7.5402	-0.3395
0.359	494.3	-7.8115	-8.1120	494.2	3.7000	-8.1677	494.3	-8.1286	-0.3632
0.332	466.6	-8.4282	-8.7795	466.3	3.7000	-8.6730	466.6	-8.7992	-0.4025
0.306	436.7	-9.1506	-9.5667	436.8	-2.2100	-9.6352	436.6	-9.5892	-0.4561
0.280	404.1	-10.008	-10.509	403.9	-3.3800	-10.559	403.9	-10.556	-0.5549
0.254	368.3	-11.044	-11.658	367.9	3.7900	-11.671	367.9	-11.630	-0.5616
0.227	328.5	-12.318	-19.928	328.1	218.98	-18.898	328.3	-20.159	-2.9593
0.201	327.4	-27.906	-36.780	327.0	8.7200	-35.647	327.1	-36.499	-4.2981
0.175	325.2	-46.201	-56.989	324.9	-18.700	-55.107	324.9	-56.561	-5.9163
0.149	321.8	-68.637	-82.524	321.7	238.34	-87.236	321.6	-81.982	-8.3402
0.122	317.0	-97.876	-117.27	316.5	238.34	-114.39	316.7	-116.73	-13.020
0.096	310.0	-139.48	-170.19	309.8	110.14	-165.84	309.9	-167.20	-8.2141
0.070	300.0	-207.38	0.0000	300.0	0.0000	0.0000	300.0	0.0000	0.0000

Soluciones del problema DDQ



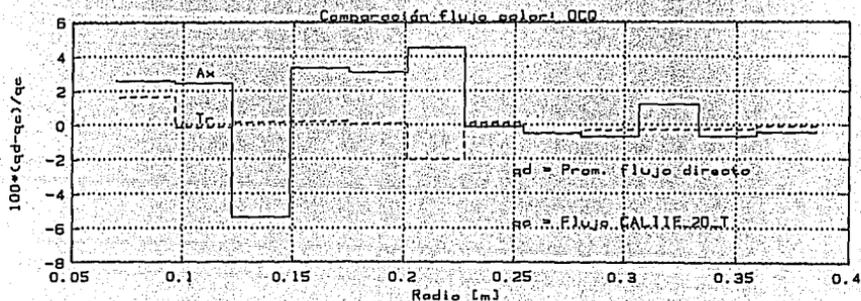
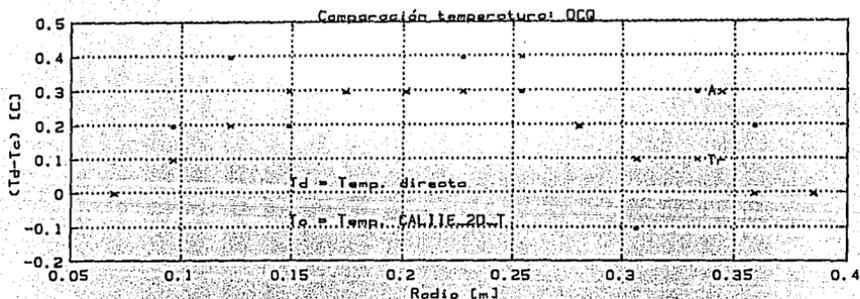
R	T	$q_x \times 10^2$	$Pq_x \times 10^2$	T^{Ax}	q_b^{Ax}	$q_r^{Ax} \times 10^2$	T^{Tr}	$q_h^{Tr} \times 10^2$	$q_v^{Tr} \times 10^2$
0.385	539.7	-5.3079	-5.4976	539.7	0.5400	-5.5221	539.7	-5.5026	-0.2477
0.359	521.0	-5.6963	-5.9155	520.9	2.6900	-5.9565	521.0	-5.9319	-0.2650
0.332	500.8	-6.1460	-6.4022	500.6	2.6900	-6.3248	500.8	-6.4213	-0.2937
0.306	479.0	-6.6728	-6.9763	479.0	-1.5800	-7.0265	478.9	-6.9978	-0.3328
0.280	455.2	-7.2984	-7.6635	455.1	-2.2900	-7.7009	455.0	-7.7030	-0.4046
0.254	429.1	-8.0534	-8.5011	428.8	3.5500	-8.5152	428.7	-8.4857	-0.4071
0.227	400.1	-8.9827	-16.383	399.8	205.24	-15.371	399.8	-16.620	-2.7653
0.201	399.1	-24.135	-32.740	398.9	3.3700	-31.547	398.8	-32.460	-4.0610
0.175	397.2	-41.865	-52.292	397.0	-24.560	-50.254	396.9	-51.862	-5.6141
0.149	394.1	-63.536	-76.911	394.1	192.77	-80.930	393.9	-76.361	-7.9294
0.122	389.6	-91.682	-110.30	389.3	192.77	-106.29	389.4	-109.72	-12.391
0.096	383.1	-131.60	-160.98	383.0	-10.370	-153.08	382.9	-158.16	-8.8197
0.070	373.6	-196.54	0.0000	374.0	0.0000	0.0000	373.6	0.0000	0.0000

Soluciones del problema CCQ



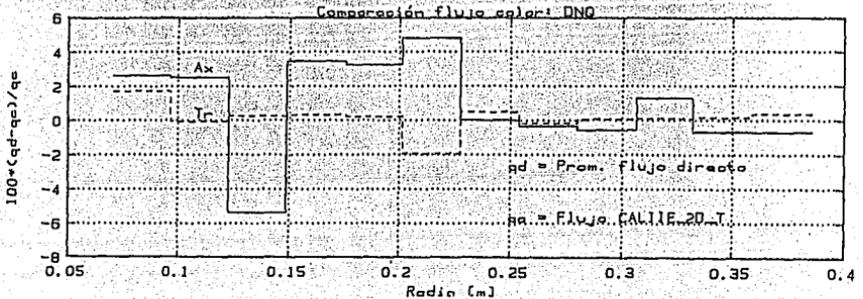
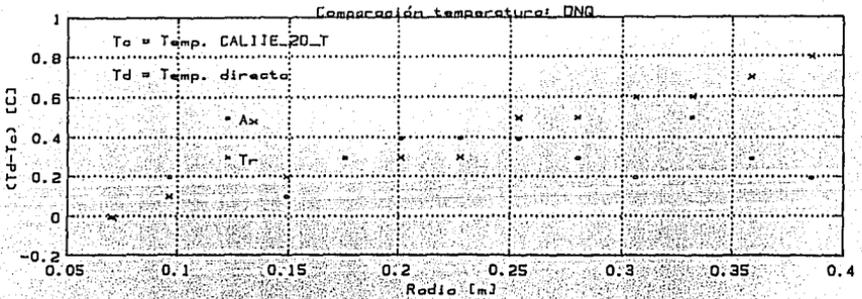
R.	T	$q \times 10^2$	$Pq \times 10^2$	T^{Ax}	q_w^{Ax}	$q_r^{Ax} \times 10^2$	T^{Tr}	$q_h^{Tr} \times 10^2$	$q_v^{Tr} \times 10^2$
0.385	539.6	-7.9962	-8.2818	539.6	0.8200	-8.3178	539.6	-8.2823	-0.3728
0.359	511.4	-8.5813	-8.9114	511.2	4.0500	-8.9719	511.4	-8.9285	-0.3989
0.332	481.0	-9.2587	-9.6447	480.7	4.0500	-9.5267	480.9	-9.6651	-0.4421
0.306	448.1	-10.052	-10.509	448.2	-2.4500	-10.583	448.0	-10.533	-0.5010
0.280	412.3	-10.995	-11.545	412.1	-3.7900	-11.598	412.1	-11.595	-0.6097
0.254	372.9	-12.132	-12.807	372.6	3.8600	-12.818	372.5	-12.775	-0.6179
0.227	329.3	-13.532	-21.217	328.9	222.86	-20.169	329.0	-21.448	-3.0297
0.201	328.0	-29.278	-38.251	327.7	9.3600	-37.104	327.7	-37.968	-4.3838
0.175	325.8	-47.779	-58.699	325.5	-18.670	-56.793	325.5	-58.270	-6.0251
0.149	322.3	-70.494	-84.567	322.1	241.91	-89.344	322.0	-84.022	-8.4867
0.122	317.3	-100.13	-119.81	316.9	241.91	-116.89	317.1	-119.26	-13.246
0.096	310.2	-142.35	-173.54	310.0	111.99	-169.12	310.1	-170.51	-8.3766
0.070	300.0	-211.32	0.0000	300.0	0.0000	0.0000	300.0	0.0000	0.0000

Soluciones del problema DCQ



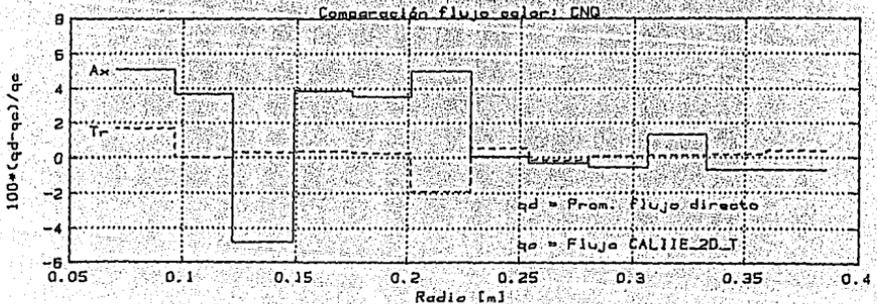
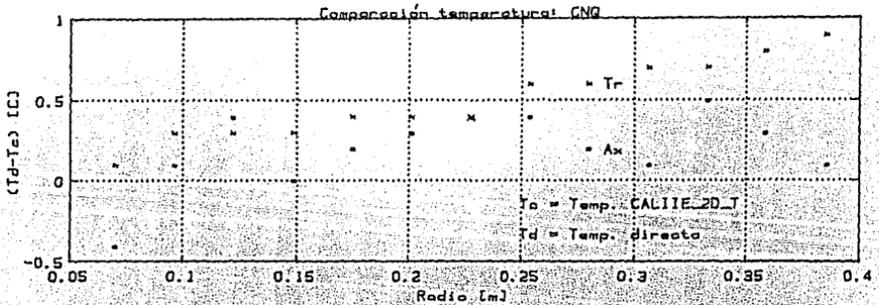
R	T	$q \times 10^2$	$Pq \times 10^2$	T^{Ax}	q_s^{Ax}	$q_r^{Ax} \times 10^2$	T^{Tr}	$q_h^{Tr} \times 10^2$	$q_v^{Tr} \times 10^2$
0.385	520.6	-7.3000	-7.5608	520.4	-0.4700	-7.6127	519.8	-7.5278	-0.3397
0.359	494.8	-7.8341	-8.1356	494.5	3.2600	-8.1900	494.1	-8.1170	-0.3641
0.332	467.1	-8.4526	-8.8050	466.6	3.2600	-8.6890	466.5	-8.7891	-0.4031
0.306	437.1	-9.1771	-9.5945	436.9	-2.2900	-9.6499	436.5	-9.5800	-0.4563
0.280	404.3	-10.037	-10.540	404.0	-3.4200	-10.574	403.8	-10.547	-0.5548
0.254	368.4	-11.076	-11.692	368.0	3.7900	-11.687	367.9	-11.620	-0.5612
0.227	328.6	-12.354	-19.966	328.2	218.97	-18.914	328.3	-20.150	-2.9591
0.201	327.4	-27.946	-36.824	327.0	8.6900	-35.666	327.1	-36.488	-4.2977
0.175	325.2	-46.247	-57.040	324.9	-18.720	-55.127	324.9	-56.550	-5.9157
0.149	321.8	-68.692	-82.584	321.7	238.38	-87.261	321.6	-81.969	-8.3393
0.122	317.0	-97.943	-117.30	316.5	238.38	-114.42	316.7	-116.71	-13.019
0.096	310.0	-139.57	-170.28	309.8	110.16	-165.88	309.9	-167.18	-8.2130
0.070	300.0	-207.49	0.0000	300.0	0.0000	0.0000	300.0	0.0000	0.0000

Soluciones del problema DNQ



R	T	$q_x \times 10^2$	$Pq \times 10^2$	T^{Ax}	q_s^{Ax}	$q_r^{Ax} \times 10^2$	T^{Tr}	$q_h^{Tr} \times 10^2$	$q_v^{Tr} \times 10^2$
0.385	599.4	-7.3000	-7.5608	599.3	-0.4800	-7.6126	598.5	-7.5278	-0.3397
0.359	573.6	-7.8341	-8.1356	573.3	3.2500	-8.1896	572.8	-8.1170	-0.3641
0.332	545.9	-8.4526	-8.8050	545.4	3.2500	-8.6884	545.2	-8.7891	-0.4031
0.306	515.9	-9.1771	-9.5945	515.8	-2.3200	-9.6488	515.2	-9.5800	-0.4562
0.280	483.1	-10.037	-10.540	482.9	-3.4500	-10.572	482.5	-10.547	-0.5548
0.254	447.2	-11.076	-11.692	446.8	3.7300	-11.684	446.6	-11.620	-0.5612
0.227	407.4	-12.354	-19.966	407.0	215.74	-18.884	407.0	-20.149	-2.9582
0.201	406.2	-27.946	-36.824	405.9	4.9200	-35.565	405.8	-36.485	-4.2960
0.175	404.0	-46.247	-57.040	403.8	-24.810	-54.903	403.6	-56.541	-5.9121
0.149	400.6	-68.692	-82.584	400.6	200.97	-86.731	400.3	-81.948	-8.3306
0.122	395.8	-97.943	-117.35	395.4	200.97	-113.13	395.5	-116.06	-13.008
0.096	388.9	-139.57	-170.28	388.8	-10.490	-161.97	388.6	-167.22	-9.2806
0.070	378.8	-207.49	0.0000	379.2	0.0000	0.0000	378.7	0.0000	0.0000

Soluciones del problema CNQ



Comentarios finales

El desarrollo del procedimiento presentado en esta tesis, llevado hasta un producto tecnológico terminado, resultó ser una actividad formativa y creativa. Incluyó temas y habilidades que usualmente no forman parte del currículo de un Físico, y permitió aportar resultados, con las peculiaridades propias de su profesión, en la producción de una tecnología con posibilidades de aplicación inmediata.

La formación de un Físico obliga a una revisión seria de los fundamentos teóricos utilizados para incluirla en la documentación del producto tecnológico, sustentando profesionalmente su participación, y estableciendo los antecedentes para la formación de los usuarios del producto. Por ello se hizo una revisión crítica de las teorías físicas involucradas, buscando consistencia y la aportación de elementos para la reconsideración y reflexión de algunos conceptos y planteamientos. Al adoptar una presentación postulacional de la Termostática se enfatiza la existencia de sus diversas representaciones y sus diferencias, a la vez se muestran algunas deficiencias inherentes al uso del cálculo usual basado en la diferencial de Frechet, por lo que se sugiere su reformulación en términos del Cálculo Exterior (variedades diferenciables). Los aspectos numéricos también fueron revisados con la misma actitud, presentando un desarrollo autoconsistente de un método de solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales aplicado al fenómeno físico considerado.

La implantación computacional, que es la concretización del procedimiento desarrollado en esta tesis, fué validada con la confrontación de soluciones de problemas sencillos, estableciendo a la vez, cierta confiabilidad en los métodos numéricos adoptados. La implantación computacional permite el tratamiento de problemas en régimen estacionario o transitorio, con simetría axial o traslacional, acepta condiciones a la frontera del tipo Dirichlet, Neumann, y convección forzada (condición mixta), y es posible considerar fuentes de calor internas en medios (sólidos o fluidos) homogéneos, isotrópicos y lineales. Sin embargo, por dificultades numéricas se limitó severamente el movimiento de los medios, incorporando sólo parcialmente al procedimiento de solución presentado en la tesis. La implantación computacional, aún con sus limitaciones, hace factible la determinación del campo de temperatura y flujo de calor en un rango amplio de aplicaciones*.

Las dificultades numéricas mencionadas provienen de la asimetría de las matrices relacionadas con el campo de velocidad del medio. La adopción de métodos numéricos

* En el IIE se ha utilizado para el análisis de un prototipo de transformador eléctrico [30], permitiendo estimar sus límites de operación y evaluar modificaciones en su diseño.

alternativos para tratar la asimetría sólo resuelve parcialmente al problema, pues existen severas dificultades teóricas en la modelación de campo de velocidad, en especial las relacionadas con el movimiento convectivo. Estas dificultades son tema actual de investigación [31] y el abocarse a esta tarea sería la continuación natural de esta tesis.

En síntesis, esta tesis sustenta un producto tecnológico totalmente concluido y disponible para su aplicación en la industria y la docencia. Por sus características, es un trabajo de buen nivel con un resultado concreto, que colabora en la generación de infraestructura y autonomía nacional en este campo de actividad tecnológica internacional.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Apéndice I.- Procedimiento general para la transformación de operadores diferenciales ante cambios de coordenadas

Resumen

En este apéndice se desarrollan rigurosamente los elementos necesarios para efectuar "cambios de coordenadas" de operadores diferenciales, planteando un procedimiento general. Posteriormente, como ejemplificación se aplica el procedimiento, expresando el gradiente, el rotacional, el laplaciano vectorial, el laplaciano escalar y la divergencia, de observables descritas mediante cualquier método. Es decir, se obtienen resultados generales que pueden particularizarse al elegir un operador diferencial y un método específico de descripción del espacio.

§AI.1 Introducción

El contenido de este apéndice se apoya en los resultados obtenidos en un seminario sobre Cálculo Exterior realizado en la Facultad de Ciencias de la UNAM durante 1977-1978, dirigido por el autor y el que participaron de manera excepcionalmente constructiva: Alberto Aldama, Raúl Rueda y Francisco Uribe. La metodología posee innovaciones, con las cuáles se logran presentaciones mas armoniosas respecto a las estructuras matemáticas utilizadas, de igual manera, provee elementos para distinguir con mayor claridad y rigor a los procedimientos implícitos en la descripción de una observable física. Este planteamiento se basa en [7] y [32], la simbología (se incluye un breviario) tiene características originales y fué desarrollada con la intención de explayar, lo mas íntegramente posible, los conceptos involucrados.

Un campo vectorial en la física esta asociado a una observable, por ejemplo $f \in (\mathbb{R}^3)^{A \times T}$ siendo $A \times T$ el espacio de eventos accesible al observador, teniéndose en general que el valor de la observable en un evento P , $f(P) \in \mathbb{R}^3$, se asocia a los tres ejes perpendiculares elegidos por el observador para describir al espacio. También es frecuente coordinar al espacio de eventos con el método cartesiano, generándose la función $C^\dagger \in (\mathbb{R}^4)^{A \times T}$ que describe al espacio de eventos, pudiéndose entonces considerar a $f \circ C^{\dagger-1} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}^4}$ que es la descripción cartesiana de la observable f . Nótese que puede darse, el que

$f \circ C^{\dagger-1}$ sea el resultado de algún proceso analítico para alguna observable, por ejemplo $f \circ C^{\dagger-1} = \nabla \times (g \circ C^{\dagger-1})$, siendo g alguna observable física con las características antes mencionadas para f , es decir, tanto $[g \circ C^{\dagger-1}](p)$ como $[\nabla \times (g \circ C^{\dagger-1})](p)$ están vinculados con las direcciones de los tres ejes perpendiculares del observador.

Al utilizar otro método para coordenalizar al espacio de eventos se genera otra función, digamos $X^{\dagger} \in (\mathbb{R}^4)^{A \times T}$, que describe al espacio de eventos. Análogamente, la función $f \circ X^{\dagger-1} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}^4}$ es la descripción de la observable según el método elegido, y $\{f \circ X^{\dagger-1}\}(p)$ se mantiene vinculado a las direcciones de los tres ejes perpendiculares del observador.

La razón de utilizar otro método de descripción del espacio de eventos, proviene del deseo de aprovechar alguna simetría que se presente. Para ésto, conviene determinar a la observable según ciertas direcciones asociadas al método utilizado, las cuales son perpendiculares y a veces dependen del evento considerado.

Usualmente las leyes de las teorías físicas, involucran la descripción cartesiana de las observables físicas. Así entonces, para utilizar otro método de descripción del espacio de eventos $X^{\dagger} \in (\mathbb{R}^4)^{A \times T}$, se hace necesario algunas modificaciones para efectuar el "cambio de coordenadas".

Para fijar ideas supóngase que se trata con el campo $f \in (\mathbb{R}^3)^{A \times T}$, y que en cierta expresión a utilizar, aparece $f \circ C^{\dagger-1} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}^4}$. Claramente, para el "cambio de coordenadas" lo que se requiere es considerar a $(f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}$ pues es igual a $f \circ X^{\dagger-1}$, además de determinar a las observables según las direcciones asociadas al método utilizado.

Este procedimiento no es tan simple como parece, supóngase, a modo de ejemplo, que $(f \circ C^{\dagger-1}) = \nabla \times (g \circ C^{\dagger-1})$. Como evidentemente

$$(\nabla \times (g \circ C^{\dagger-1})) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1} \neq \nabla \times (g \circ X^{\dagger-1})$$

y lo deseado es que aparezca $g \circ X^{\dagger-1}$ para aprovechar las simetrías, son indispensables algunos desarrollos, lo cual, aunado al deseo de expresar a la observable con otras direcciones dependientes del evento, hacen que el "cambio de coordenadas" sea un problema bastante complicado.

En la sección que sigue se desarrollan los elementos necesarios para agilizar los "cambios de variable", independientemente del método que se elija. Posteriormente, serán aplicados estos resultados para expresar el gradiente, el rotacional, el laplaciano vectorial, el laplaciano escalar y la divergencia de observables descritas mediante cualquier método,

es decir, se obtendrán resultados generales que pueden particularizarse al elegir un método específico de descripción del espacio, siempre que utilicen bases ortonormales puntuales.

§AI.2 Desarrollo teórico

Es conveniente "separar" la parte espacial y temporal de los eventos, introduciendo a las funciones $C, X \in (\mathfrak{R}^3)^A$ y $T^\dagger \in \mathfrak{R}^T$, vinculadas con el método espacial y el método temporal elegidos para describir al espacio de eventos, así entonces

$$X^\dagger = H \circ (X \times T^\dagger) \in (\mathfrak{R}^4)^{A \times T}$$

con $H \equiv \sum_{i \in \bar{3}} p_i^3 \circ p_1^{\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}} \bar{\delta}_i^4 + p_2^{\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}} \bar{\delta}_4^4 \in L(\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}, \mathfrak{R}^4)$, quien es el isomorfismo canónico entre $\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}$ y \mathfrak{R}^4 .

En los desarrollos antes mencionados, que generalmente involucran a la diferenciación, aparece sistemáticamente la función $(X^\dagger \circ C^{\dagger-1})' \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1}$, la cual debe expresarse en términos de la función $(X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1}$. Es fácil verificar que

$$X^\dagger \circ C^{\dagger-1} = H \circ (X \times T^\dagger) \circ (C \times T^\dagger)^{-1} \circ H^{-1}$$

donde

$$H^{-1} = \theta_1^{\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}} \circ \sum_{i \in \bar{3}} p_i^4 \bar{\delta}_i^3 + \theta_2^{\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}} \circ p_4^4$$

luego entonces

$$X^\dagger \circ C^{\dagger-1} = \sum_{i \in \bar{3}} p_i^3 \circ X \circ C^{-1} \circ T_{4 \rightarrow 3} \bar{\delta}_i^4 + p_4^4 \bar{\delta}_4^4$$

con $T_{4 \rightarrow 3} \equiv \sum_{i \in \bar{3}} p_i^4 \bar{\delta}_i^3$. Al diferenciar, se obtiene que

$$\begin{aligned} (X^\dagger \circ C^{\dagger-1})' \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1} = \\ \sum_{i \in \bar{3}} \bar{p}_i^3 \bullet ((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4 \rightarrow 3}) \bullet \overline{T_{4 \rightarrow 3}} \bar{\delta}_i^4 + \overline{p_4^4} \bar{\delta}_4^4 \end{aligned} \quad (\text{AI.1})$$

por lo cual, $\forall n \in \bar{3}$

$$\begin{aligned} ((X^\dagger \circ C^{\dagger-1})' \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_n^4 = \\ \sum_{i \in \bar{3}} p_i^3 \circ (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{\delta}_n^3) \bar{\delta}_i^4 \end{aligned} \quad (\text{AI.1})'$$

y de (AI.1), con una proposición sobre diferenciación [32 pag.14], también se tiene

$$\begin{aligned} & (((X^\dagger \circ C^{\dagger-1})^{(2)} \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_n^2) * \bar{\delta}_n^4 = \\ & \sum_{i \in \mathfrak{I}} p_i^3 \circ (((X \circ C^{-1})^{(2)} \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{\delta}_n^3) * \bar{\delta}_n^3 \bar{\delta}_i^4 \end{aligned} \quad (\text{AI.2})$$

los cuales son resultados de mucha utilidad.

Para expresar a la observable con otras direcciones dependientes del evento, se requiere de un cambio de base "puntual", lo cual no altera a f , sino a los coeficientes de su expansión lineal asociada a la nueva base dependiente de la parte espacial del evento considerado.

Para tratar el problema, se supone la existencia de $\mathcal{B} \in ((\mathfrak{R}^3)^3)^{X^{id}(A)}$, donde $\mathcal{B}(p) \in (\mathfrak{R}^3)^3$ es una base ortonormal de \mathfrak{R}^3 para cada $p \in X^{id}(A)$. Nótese que \mathcal{B} depende del método elegido, y generalmente es una familia infinita de bases ortonormales (a excepción del método cartesiano).

Además se requiere de una función $h_{X^\dagger} \in ((\mathfrak{R}^3)^{\mathfrak{R}^3})^{X^{id}(A)}$ que permita la expresión de f en términos de cada base, para lo cual debe tener el siguiente comportamiento

$$(L \circ \mathcal{B} \circ X \circ p_1^{A \times T}) * ((h_{X^\dagger} \circ X \circ p_1^{A \times T}) * f) = f \quad (\text{AI.3})$$

donde $L(\alpha) = L_\alpha \equiv \sum_{i \in \mathfrak{I}} p_i^3 \bar{\alpha}(i)$ para cada $\alpha \in (\mathfrak{R}^3)^3$. La expresión (AI.3) puede re-expresarse como sigue

$$f = (((L \circ \mathcal{B}) * h_{X^\dagger}) \circ X \circ p_1^{A \times T}) * f$$

haciéndose claro que $L_{\mathcal{B}(p)} \circ h_{X^\dagger}(p) = I_{\mathfrak{R}^3}$ para cada $p \in X^{id}(A)$, y como $\mathcal{B}(p)$ es base, se sigue que $h_{X^\dagger}(p) = L_{\mathcal{B}(p)}^{-1}$ donde $h_{X^\dagger}(p)$ es la "incognita". Entonces es fundamental la determinación de $(L_{\mathcal{B}(p)})^{-1}$, para lo cual no hay un método canónico, excepto, afortunadamente con $(\mathfrak{R}^n)^n$. En efecto, dado que

$$L_{\mathcal{B}(p)} \circ (L_{\mathcal{B}(p)})^{-1} = I_{\mathfrak{R}^3} \quad y \quad (L_{\mathcal{B}(p)})^{-1} \circ L_{\mathcal{B}(p)} = I_{\mathfrak{R}^3}$$

se tiene que

$$L_{\mathcal{B}(p)} \circ \delta^3 \times (L_{\mathcal{B}(p)})^{-1} \circ \delta^3 = \mathcal{B}(p) \times ((L_{\mathcal{B}(p)})^{-1})_{\delta^3}^{\delta^3} \circ \delta^3 = \delta^3$$

y también

$$(L_{\mathcal{B}(p)})^{-1} \circ \delta^3 \times L_{\mathcal{B}(p)} \circ \delta^3 = ((L_{\mathcal{B}(p)})^{-1})_{\delta^3}^{\delta^3} \circ \delta^3 \times \mathcal{B}(p) = \delta^3$$

por lo tanto $B(p) \in (\mathcal{R}^3)^3$ es invertible y además

$$B(p)^{-1} = (L_{B(p)})^{-1} \circ \delta^3 = ((L_{B(p)})^{-1})_{\delta^3}^{\delta^3} \circ \delta^3$$

luego

$$L_{B(p)^{-1}} = L_{(L_{B(p)})^{-1} \circ \delta^3} = (L_{B(p)})^{-1} \circ L_{\delta^3} = (L_{B(p)})^{-1}$$

es decir $(L_{B(p)})^{-1} = L_{B(p)^{-1}}$, por lo tanto

$$h_{X^\dagger}(p) = L_{B(p)^{-1}}$$

para cada $p \in X^{id}(A)$. Llevando este resultado a (AI.3), se obtiene que

$$f \circ X^{\dagger-1} = (L \circ B) * ((L \circ inv \circ B \circ \sum_{k \in \mathfrak{I}} p_k^4 \delta_k^3) * (f \circ X^{\dagger-1}))$$

es decir

$$[f \circ X^{\dagger-1}](p, t) = \sum_{i \in \mathfrak{I}} \sum_{j \in \mathfrak{I}} [B(p)^{-1}(j)](i) [(f \circ X^{\dagger-1})(p, t)](j) [B(p)](i) \quad (AI.4)$$

para cada $p \in X^{id}(A)$ y $t \in T^{\dagger id}(T)$.

Ahora es necesario determinar a $B(p)^{-1}$, para ello se hace un planteamiento general considerando a dos espacios Euclideos V y W de dimensión finita. Tomando a $\alpha \in V^n$ y $\beta \in W^n$ bases de V y W respectivamente, y haciendo

$$T \equiv L_\beta \circ (L_\alpha)^{-1} \in L(V, W)$$

se sigue que $T \circ \alpha = \beta$ y $T_\alpha^\beta \circ \delta^n = (L_\beta)^{-1} \circ T \circ L_\alpha \circ \delta^n = \delta^n$, nótese que

$$\beta = L_\alpha \circ (L_\alpha)^{-1} \circ T \circ \alpha = L_\alpha \circ (L_\alpha)^{-1} \circ T \circ L_\alpha \circ \delta^n = L_\alpha \circ T_\alpha^\alpha \circ \delta^n \quad (AI.5)$$

Si β es una base ortonormal se tiene que

$$\delta_i(j) = \langle \beta(i), \beta(j) \rangle = \langle L_\alpha([T_\alpha^\alpha \circ \delta^n](i)), L_\alpha([T_\alpha^\alpha \circ \delta^n](j)) \rangle$$

luego entonces

$$\delta_i(j) = \sum_{l \in \mathfrak{N}} \sum_{k \in \mathfrak{N}} [[T_\alpha^\alpha \circ \delta^n](i)](l) [[T_\alpha^\alpha \circ \delta^n](j)](k) \langle \alpha(l), \alpha(k) \rangle$$

y si α también es ortonormal, se sigue que

$$\sum_{l \in \mathfrak{N}} [[T_\alpha^\alpha \circ \delta^n](i)](l) [[T_\alpha^\alpha \circ \delta^n](j)](l) = \delta_i(j)$$

obteniendo que la matriz $T_\alpha^\alpha \circ \delta^n \in (\mathbb{R}^n)^n$ es ortonormal, es decir

$$(T_\alpha^\alpha \circ \delta^n)^t \times T_\alpha^\alpha \circ \delta^n = \delta^n \quad (\text{AI.6})$$

ya que

$$\sum_{i \in \mathfrak{h}} [(T_\alpha^\alpha \circ \delta^n)(i)](l) [(T_\alpha^\alpha \circ \delta^n)(j)](l) = \sum_{i \in \mathfrak{h}} [((T_\alpha^\alpha \circ \delta^n)^t)(l)](i) [(T_\alpha^\alpha \circ \delta^n)(j)](l)$$

Pero como

$$\text{Det}((T_\alpha^\alpha \circ \delta^n)^t \times T_\alpha^\alpha \circ \delta^n) = \text{Det}((T_\alpha^\alpha \circ \delta^n)^t) \text{Det}(T_\alpha^\alpha \circ \delta^n) = \text{Det}(\delta^n) = 1$$

la matriz $T_\alpha^\alpha \circ \delta^n$ es invertible, y además de (6)

$$(T_\alpha^\alpha \circ \delta^n)^{-1} = (T_\alpha^\alpha \circ \delta^n)^t$$

En particular, para el caso que aquí se trata, se hace $\alpha \equiv \delta^n$ y $\beta \equiv B(p)$, luego $T = L_{B(p)}$, y de (AI.5) se obtiene que $B(p) = T_{\delta^n}^{\delta^n} \circ \delta^n$, por lo tanto

$$B(p)^{-1} = B(p)^t$$

Finalmente, al llevar este resultado a (AI.4) se tiene que

$$f \circ X^{\dagger-1} = \sum_{i \in \mathfrak{h}} (f \circ X^{\dagger-1})_{B_i} (B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{i} \quad (\text{AI.7})$$

en donde

$$(f \circ X^{-1})_{B_i} \equiv \sum_{j \in \mathfrak{h}} ((B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{i}) * \bar{j} (f \circ X^{\dagger-1}) * \bar{j} \quad (\text{AI.7})'$$

obteniendo la expresión fundamental para realizar cualquier "cambio de coordenadas" utilizando las direcciones asociadas al método de descripción del espacio que se elija.

§AI.3 El gradiente

En los textos matemáticos, para una función $g \in \mathbb{R}^E$ con $E \in \mathbb{R}^n$, se define a su gradiente como

$$\nabla g \equiv \sum_{i \in \mathfrak{h}} \frac{\partial g}{\partial x_i} \delta_i^E \in (\mathbb{R}^n)^{E^\dagger}$$

suponiendo la existencia de todas las derivadas parciales de g en el conjunto $E^\dagger \subset E$.

Esta presentación, aunque no la única, es matemáticamente aplicable en $f \circ C^{\dagger-1}$ y $f \circ X^{\dagger-1}$ pues ambas funciones están en $\mathfrak{R}(\mathfrak{R}^4)$, pensando que $f \in \mathfrak{R}^{A \times T}$ es un campo escalar. Sin embargo, en las teorías físicas provoca serias confusiones, pues en ellas el "gradiente" tiene características muy especiales, dado que trata solamente con $f \circ C^{\dagger-1} \in \mathfrak{R}(\mathfrak{R}^4)$, y se define como

$$\nabla(f \circ C^{\dagger-1}) \equiv \sum_{i \in \bar{3}} \frac{\partial(f \circ C^{\dagger-1})}{\partial x_i} \bar{\delta}_i^3$$

omitiendo a la derivada parcial temporal (asociada a la 4a. componente). Es decir, sólo se consideran a las derivadas parciales correspondientes a la parte espacial de la descripción cartesiana del evento espacio-temporal, y la definición sólo es válida para una observable descrita con el método cartesiano.

Para tratar con la descripción de la observable según algún otro método, se requieren de los resultados obtenidos en la sección anterior. Es conveniente utilizar a la diferenciación en vez de las derivadas parciales, quedando expresado el gradiente como sigue

$$\nabla(f \circ C^{\dagger-1}) \equiv \sum_{i \in \bar{3}} (f \circ C^{\dagger-1})' * \bar{\delta}_i^4 \bar{\delta}_i^3 \in (\mathfrak{R}^3) C^{\dagger 4(A \times T)}$$

dado que para cada $i \in \bar{4}$, se tiene

$$\frac{\partial(f \circ C^{\dagger-1})}{\partial x_i} = (f \circ C^{\dagger-1})' * \bar{\delta}_i^4 \quad (\text{AI.8})$$

De la expresión (AI.7) y (AI.7)' se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla(f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1} &= \\ \sum_{i \in \bar{3}} \sum_{j \in \bar{3}} ((B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{i}) * \bar{j} (\nabla(f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{j} (B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{i} \end{aligned}$$

y de la definición del "gradiente"

$$(\nabla(f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{j} = ((f \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_j^4$$

pero

$$f \circ C^{\dagger-1} = (f \circ X^{\dagger-1}) \circ X^{\dagger} \circ C^{\dagger-1}$$

luego

$$\begin{aligned} (\nabla(f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{j} &= \\ (f \circ X^{\dagger-1})' * ((X^{\dagger} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_j^4 \end{aligned}$$

De este resultado y de (AI.1) se sigue finalmente que

$$\begin{aligned} \nabla(f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1} &= \sum_{i \in \bar{3}} \sum_{j \in \bar{3}} ((B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{i}) * \bar{j} \\ &\sum_{i \in \bar{3}} p_i^3 \circ (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{\delta}_i^3) \\ &(f \circ X^{\dagger-1})' * \bar{\delta}_i^4 (B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{i} \end{aligned} \quad (\text{AI.9})$$

expresión general que incorpora a cualquier "cambio de coordenadas" en sus dos aspectos; se expresa al "gradiente" con las direcciones asociadas al método elegido, y se considera a la descripción de la observable bajo dicho método. Se puede hacer

$$\nabla f_{X^{\dagger}} \equiv \nabla(f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}$$

para acercarse a la notación usual del "gradiente".

§AI.4 El rotacional

Para una función $g \in (\mathbb{R}^3)^E$ con $E \in \mathbb{R}^3$, se define a su rotacional como

$$\begin{aligned} \nabla \times g &\equiv \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right) \bar{\delta}_1^3 - \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \right) \bar{\delta}_2^3 \\ &+ \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) \bar{\delta}_3^3 \in (\mathbb{R}^3)^{E^{\dagger}} \end{aligned}$$

suponiendo la existencia de todas las derivadas parciales de g en el conjunto $E^{\dagger} \subset E$. Es conveniente reexpresar al gradiente utilizando a las permutaciones en $\bar{3}$, obteniendo

$$\nabla \times g = \sum_{i \in \bar{3}} sgn(\alpha(i)) \left(\frac{\partial g_{[\alpha(i)](2)}}{\partial x_{[\alpha(i)](1)}} - \frac{\partial g_{[\alpha(i)](1)}}{\partial x_{[\alpha(i)](2)}} \right) \bar{\delta}_{[\alpha(i)](3)}^3$$

en donde

$$\alpha \equiv \{(1, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}), (2, \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}), (3, I_{\bar{3}})\} \in (\bar{3}^{\bar{3}})^{\bar{3}} \quad (\text{AI.10})$$

que constituye la familia de permutaciones en $\bar{3}$, teniéndose para la función signo que

$$sgn(\alpha(1)) = 1 \quad sgn(\alpha(2)) = -1 \quad sgn(\alpha(3)) = 1 \quad (\text{AI.11})$$

debido a su definición [7 pag.309].

En las teorías físicas, el "rotacional" de un campo vectorial $f \in (\mathbb{R}^3)^{A \times T}$ presenta cierta analogía con el gradiente, pues también se trata con $f \circ C^{\dagger-1} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}^4}$ y se define como

$$\nabla \times (f \circ C^{\dagger-1}) \equiv \sum_{i \in \mathbb{3}} \text{sgn}(\alpha(i)) ((f_{[\alpha(i)](2)} \circ C^{\dagger-1})' * \overline{\delta_{[\alpha(i)](1)}^4} - (f_{[\alpha(i)](1)} \circ C^{\dagger-1})' * \overline{\delta_{[\alpha(i)](2)}^4}) \delta_{[\alpha(i)](3)}^3$$

en donde se omite la derivada parcial temporal y se utiliza a (AI.7) para reexpresar a las derivadas parciales en términos de la diferencial. Los valores de $f \circ C^{\dagger-1}$ y de $\nabla \times (f \circ C^{\dagger-1})$ se asocian a las direcciones de los ejes perpendiculares elegidos por el observador para implementar el método cartesiano.

Para tratar con la descripción del espacio de eventos mediante otro método, se utiliza a (AI.7), obteniendo que

$$\nabla \times (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1} = \sum_{i \in \mathbb{3}} \sum_{j \in \mathbb{3}} ((B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{i}) * \bar{j} (\nabla \times (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{j} (B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{i}$$

pero de la definición del "rotacional"

$$(\nabla \times (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{j} = \text{sgn}(\alpha(j)) (((f_{[\alpha(j)](2)} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \overline{\delta_{[\alpha(j)](1)}^4} - ((f_{[\alpha(j)](1)} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \overline{\delta_{[\alpha(j)](2)}^4})$$

pues $(\alpha * \bar{\mathbb{3}})^{\#} \{j\} = \{j\}$ para cada $j \in \mathbb{3}$, por lo cual

$$\nabla \times (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1} = \sum_{i \in \mathbb{3}} \sum_{j \in \mathbb{3}} \text{sgn}(\alpha(j)) ((B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{i}) * \bar{j} (((f_{[\alpha(j)](2)} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \overline{\delta_{[\alpha(j)](1)}^4} - ((f_{[\alpha(j)](1)} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \overline{\delta_{[\alpha(j)](2)}^4}) (B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{i} \tag{AI.12}$$

en donde

$$((f_{[\alpha(j)](m)} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \overline{\delta_{[\alpha(j)](n)}^4} = (f_{[\alpha(j)](m)} \circ X^{\dagger-1})' * (((X^{\dagger} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \overline{\delta_{[\alpha(j)](n)}^4})$$

para cada $m, n \in \bar{2}$, pero de (AI.1)

$$((f_{[\alpha(j)](m)} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \overline{\delta_{[\alpha(j)](n)}^4} = \sum_{i \in \mathbb{3}} p_i^3 (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \overline{\delta_{[\alpha(j)](n)}^3}) (f_{[\alpha(j)](m)} \circ X^{\dagger-1})' * \overline{\delta_i^4} \tag{AI.13}$$

Ahora se requiere reexpresar a $f \circ X^{\dagger-1}$ en términos de las direcciones del nuevo método, para ello se utiliza nuevamente a (AI.7). Para $m \in \bar{2}$ se tiene que

$$f_{[\alpha(j)](m)} \circ X^{\dagger-1} = p_{[\alpha(j)](m)} \circ \left(\sum_{k \in \bar{3}} \sum_{n \in \bar{3}} ((B \circ T_{4-3}) * \bar{k}) * \bar{n} (f \circ X^{\dagger-1}) * \bar{n} (B \circ T_{4-3}) * \bar{k} \right)$$

luego

$$f_{[\alpha(j)](m)} \circ X^{\dagger-1} = \sum_{k \in \bar{3}} (f \circ X^{\dagger-1})_{B_k} p_{[\alpha(j)](m)} \circ ((B \circ T_{4-3}) * \bar{k}) \quad (\text{rm AI.14})$$

debido a (AI.7)'. Al diferenciar (AI.14) se obtiene

$$(f_{[\alpha(j)](m)} \circ X^{\dagger-1})' * \bar{\delta}_i^{\dagger} = \sum_{k \in \bar{3}} ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_k})' * \bar{\delta}_i^{\dagger} p_{[\alpha(j)](m)} \circ ((B \circ T_{4-3}) * \bar{k}) + (f \circ X^{\dagger-1})_{B_k} p_{[\alpha(j)](m)} \circ ((B \circ T_{4-3}) * \bar{k})' * \bar{\delta}_i^{\dagger}$$

Finalmente, al levar esta última expresión a (AI.13), y al sustituir el resultado en (AI.12), resulta que

$$\nabla \times (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1} = \sum_{i \in \bar{3}} \sum_{j \in \bar{3}} \text{sgn}(\alpha(j)) ((B \circ T_{4-3}) * \bar{i}) * \bar{j} \sum_{i \in \bar{3}} \sum_{k \in \bar{3}} (a_{ji} c_{jki} - b_{ji} d_{jki}) (B \circ T_{4-3}) * \bar{i} \quad (\text{AI.15})$$

en donde

$$\begin{aligned} a_{ji} &\equiv (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_{[\alpha(j)](1)}^3) * \bar{i} \\ b_{ji} &\equiv (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_{[\alpha(j)](2)}^3) * \bar{i} \\ c_{jki} &\equiv ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_k})' * \bar{\delta}_i^{\dagger} ((B \circ T_{4-3}) * \bar{k}) * [\alpha(j)](2) \\ &\quad + (f \circ X^{\dagger-1})_{B_k} (((B \circ T_{4-3}) * \bar{k})' * \bar{\delta}_i^{\dagger}) * [\alpha(j)](2) \\ d_{jki} &\equiv ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_k})' * \bar{\delta}_i^{\dagger} ((B \circ T_{4-3}) * \bar{k}) * [\alpha(j)](1) \\ &\quad + (f \circ X^{\dagger-1})_{B_k} (((B \circ T_{4-3}) * \bar{k})' * \bar{\delta}_i^{\dagger}) * [\alpha(j)](1) \end{aligned}$$

expresión general para el "rotacional" de un campo vectorial, en donde se asocian sus valores a las direcciones del método de descripción utilizado para describir al campo, siendo las funciones $(f \circ X^{\dagger-1})_{B_k}$ sus componentes en dichas direcciones. Para lograr cierta afinidad con la literatura, se puede hacer

$$\nabla \times f_{X^{\dagger}} \equiv \nabla \times (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}$$

haciendo uso de (AI.15) en miembro derecho.

§AI.5 El laplaciano escalar

Para una función $g \in \mathfrak{R}^E$ con $E \subset \mathfrak{R}^n$, se define al laplaciano (escalar) como

$$\nabla^2 g \equiv \sum_{k \in \bar{n}} \frac{\partial^2 g}{\partial x_k} \in \mathfrak{R}^{E^\dagger}$$

suponiendo la existencia de las derivadas parciales de segundo orden en $E^\dagger \subset E$. Reexpresando al laplaciano en términos de la diferencial, se obtiene que

$$\nabla^2 g = \sum_{k \in \bar{n}} (g' * \bar{\delta}_k^n)' * \bar{\delta}_k^n$$

debido a al uso iterativo de (AI.8).

Como en los casos anteriores, al tratar en las teorías físicas con un campo escalar $f \in \mathfrak{R}^{A \times T}$, se define a su "laplaciano" omitiendo al término temporal, haciendo

$$\nabla^2 (f \circ C^{\dagger-1}) \equiv \sum_{k \in \bar{3}} ((f \circ C^{\dagger-1})' * \bar{\delta}_k^4)' * \bar{\delta}_k^4 \quad (\text{AI.16})$$

considerando a la descripción cartesiana de la observable f .

Para considerar a otro método de descripción del espacio de eventos, se compone por la derecha con la función $C^\dagger \circ X^{\dagger-1}$, obteniéndose que

$$\begin{aligned} &\nabla^2 (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1} = \\ &\sum_{k \in \bar{n}} (((f \circ X^{\dagger-1})' \circ X^\dagger \circ C^{\dagger-1}) * ((X^\dagger \circ C^{\dagger-1})' * \bar{\delta}_k^4))' * \bar{\delta}_k^4 \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1} \end{aligned}$$

y de una proposición sobre diferenciación [32 pag.16], se sigue que

$$\begin{aligned} &(((f \circ X^{\dagger-1})' \circ X^\dagger \circ C^{\dagger-1}) * ((X^\dagger \circ C^{\dagger-1})' * \bar{\delta}_k^4))' * \bar{\delta}_k^4 \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1} = \\ &((f \circ X^{\dagger-1})^{(2)} * (((X^\dagger \circ C^{\dagger-1})' \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_k^4)) * (((X^\dagger \circ C^{\dagger-1})' \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_k^4) \\ &\quad + (f \circ X^{\dagger-1})' * (((X^\dagger \circ C^{\dagger-1})^{(2)} \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_k^4) * \bar{\delta}_k^4 \end{aligned}$$

Finalmente, de (AI.1)' y (AI.2) se sigue que

$$\nabla^2 (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1} = \sum_{k \in \bar{3}} \sum_{l \in \bar{3}} a_{kl} + b_{kl} \sum_{j \in \bar{3}} c_{jkl} \quad (\text{AI.17})$$

en donde

$$a_{k\ell} \equiv (((X \circ C^{-1})^{(2)} \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_k^2) * \bar{\delta}_\ell^2 * \bar{l} (f \circ X^{\dagger-1})' * \bar{\delta}_j^4$$

$$b_{k\ell} \equiv (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_k^2) * \bar{l}$$

$$c_{jkl} \equiv (((X \circ C^{\dagger-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_k^2) * \bar{j} ((f \circ X^{\dagger-1})^{(2)} * \bar{\delta}_l^4) * \bar{\delta}_j^4$$

quien es la expresión general para el laplaciano (escalar) ante cualquier "cambio de coordenadas". Para acercarse a la notación usual se puede decir que

$$\nabla^2 f_{X^\dagger} \equiv \nabla^2 (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1}$$

haciendo uso del segundo miembro de (AI.19).

§AI.6 El laplaciano vectorial

Para una función $g \in (\mathfrak{R}^n)^E$ con $E \subset \mathfrak{R}^n$, se define a su laplaciano (vectorial) como

$$\nabla^2 g \equiv \sum_{k \in \bar{n}} \nabla^2 g_k \bar{\delta}_k^n$$

utilizando al laplaciano (escalar) para cada función componente (AI.16). Al reexpresar al laplaciano en términos de la diferencial se obtiene que

$$\nabla^2 g = \sum_{k \in \bar{n}} \sum_{\ell \in \bar{n}} ((g_k)' * \bar{\delta}_\ell^n)' * \bar{\delta}_\ell^n \bar{\delta}_k^n$$

en donde se ha utilizado iterativamente a (AI.8).

Análogamente a los casos anteriores, al tratar en las teorías físicas con un campo vectorial $f \in (\mathfrak{R}^3)^{A \times T}$, se define a su "laplaciano" omitiendo al término temporal haciendo

$$\nabla^2 (f \circ C^{\dagger-1}) \equiv \sum_{k \in \bar{3}} \sum_{\ell \in \bar{3}} ((f_k \circ C^{\dagger-1})' * \bar{\delta}_\ell^3)' * \bar{\delta}_\ell^3 \bar{\delta}_k^3$$

en donde se considera a la descripción cartesiana de la observable, asociando los valores del laplaciano a las direcciones de los ejes perpendiculares elegidos por el observador para implementar el método cartesiano.

Para tratar con la descripción del espacio de eventos mediante otro método, se utiliza a (AI.7), obteniendo que

$$\begin{aligned} \nabla^2(f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1} &= \sum_{i \in \mathfrak{B}} \sum_{j \in \mathfrak{B}} ((B \circ T_{4-3}) * \bar{i}) * \bar{j} \\ &\sum_{i \in \mathfrak{B}} (((f_j \circ C^{\dagger-1})' * \bar{\delta}_i^{\dagger})' * \bar{\delta}_i^{\dagger}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1} (B \circ T_{4-3}) * \bar{i} \end{aligned} \quad (\text{AI.18})$$

Ahora, de una proposición sobre diferenciación [32 pag.16], y al considerar que

$$f_k \circ C^{\dagger-1} = (f_k \circ X^{\dagger-1}) \circ X^{\dagger} \circ C^{\dagger-1}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} &(((f_j \circ C^{\dagger-1})' * \bar{\delta}_i^{\dagger})' * \bar{\delta}_i^{\dagger}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1} = \\ &(f_j \circ X^{\dagger-1})' * (((X^{\dagger} \circ C^{\dagger-1})^{(2)} \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_i^{\dagger}) * \bar{\delta}_i^{\dagger} \\ &+ ((f_j \circ X^{\dagger-1})^{(2)}) * (((X^{\dagger} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_i^{\dagger}) \\ &* (((X^{\dagger} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_i^{\dagger}) \end{aligned} \quad (\text{AI.19})$$

Al reexpresar a $f \circ X^{\dagger}$ en términos de las direcciones del nuevo método, mediante (AI.7) se obtiene que

$$\begin{aligned} &(f_j \circ X^{\dagger-1})' = \\ &\sum_{r \in \mathfrak{B}} (f \circ X^{\dagger-1})_{B_r} \cdot \bar{p}_j^{\mathfrak{B}} * ((B \circ T_{4-3}) * \bar{r})' + p_k^{\mathfrak{B}} \circ ((B \circ T_{4-3}) * \bar{r}) ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r})' \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} &(f_j \circ X^{\dagger-1})^{(2)} = \\ &\sum_{r \in \mathfrak{B}} (f \circ X^{\dagger-1})_{B_r} \cdot \bar{p}_j^{\mathfrak{B}} * ((B \circ T_{4-3}) * \bar{r})^{(2)} + \overline{p_j^{\mathfrak{B}} * ((B \circ T_{4-3}) * \bar{r})} \cdot ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r})' \\ &+ p_j^{\mathfrak{B}} \circ ((B \circ T_{4-3}) * \bar{r}) ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r})^{(2)} + \overline{((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r})'} \cdot p_j^{\mathfrak{B}} * ((B \circ T_{4-3}) * \bar{r})' \end{aligned}$$

Llevando estos resultados a (AI.19)

$$\begin{aligned} &(((f_j \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_i^{\dagger})' * \bar{\delta}_i^{\dagger} = \sum_{r \in \mathfrak{B}} (f \circ X^{\dagger-1})_{B_r} \cdot p_j^{\mathfrak{B}} \circ ((B \circ T_{4-3}) * \bar{r})' \\ &+ p_j^{\mathfrak{B}} \circ ((B \circ T_{4-3}) * \bar{r}) ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r})' * (((X^{\dagger} \circ C^{\dagger-1})^{(2)} \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_i^{\dagger}) * \bar{\delta}_i^{\dagger} \\ &\quad + (f \circ X^{\dagger-1})_{B_r} \cdot p_j^{\mathfrak{B}} \circ (((X^{\dagger} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_i^{\dagger}) \\ &+ (2p_j^{\mathfrak{B}} \circ ((B \circ T_{4-3}) * \bar{r})' + ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r})') * (((X^{\dagger} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_i^{\dagger}) \\ &\quad + p_j^{\mathfrak{B}} \circ ((B \circ T_{4-3}) * \bar{r}) ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r})^{(2)} * (((X^{\dagger} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_i^{\dagger}) \\ &\quad * (((X^{\dagger} \circ C^{\dagger-1})' \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_i^{\dagger}) \end{aligned}$$

y con (AI.1)' y (AI.2) se sigue que

$$\begin{aligned}
 &(((f_j \circ C^{\dagger-1})' \circ (C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1})) * \bar{\delta}_i^4)' * \bar{\delta}_i^4 = \\
 &\sum_{r \in \mathfrak{I}} (f \circ X^{\dagger-1})_{B_r} \sum_{n \in \mathfrak{I}} \{p_n^3 \circ (((X \circ C^{\dagger})^{(2)} \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_i^3)' * \bar{\delta}_i^3) \\
 &\quad p_j^3 \circ (((B \circ T_{4-3}) * \bar{\tau})' * \bar{\delta}_n^4) + p_j^3 \circ ((B \circ T_{4-3}) * \bar{\tau}) \\
 &\sum_{n \in \mathfrak{I}} p_n^3 \circ (((X \circ C^{\dagger})^{(2)} \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_i^3)' * \bar{\delta}_i^3) ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r})' * \bar{\delta}_n^4 \\
 &\quad + (f \circ X^{\dagger-1})_{B_r} p_j^3 \circ (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_i^3) \\
 + 2 \sum_{n \in \mathfrak{I}} p_n^3 \circ (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_i^3) p_j^3 \circ (((B \circ T_{4-3}) * \bar{\tau})' * \bar{\delta}_n^4) \\
 &\quad \sum_{m \in \mathfrak{I}} p_m^3 \circ (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_i^3) ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r})' * \bar{\delta}_m^4 \\
 &\quad + p_j^3 \circ ((B \circ T_{4-3}) * \bar{\tau}) \sum_{n \in \mathfrak{I}} p_n^3 \circ (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_i^3) \\
 &\sum_{m \in \mathfrak{I}} p_m^3 \circ (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_i^3) ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r})^{(2)} * \bar{\delta}_n^4 * \bar{\delta}_m^4
 \end{aligned}$$

Finalmente, al sustituir este resultado en (AI.18) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \nabla^2(f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1} &= \sum_{i \in \mathfrak{I}} \sum_{j \in \mathfrak{I}} ((B \circ T_{4-3}) * \bar{i}) * \bar{j} \\
 \sum_{i \in \mathfrak{I}} \sum_{r \in \mathfrak{I}} \sum_{n \in \mathfrak{I}} a_{jnr} + b_{jlnr} + c_{jlr} &+ \sum_{m \in \mathfrak{I}} (d_{jmnr} + e_{jlmnr}) (B \circ T_{4-3}) * \bar{i}
 \end{aligned} \tag{AI.20}$$

en donde

$$\begin{aligned}
 a_{jnr} &\equiv ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r} \circ (((B \circ T_{4-3}) * \bar{\tau})' * \bar{\delta}_n^4) * \bar{j} \\
 b_{jlnr} &\equiv ((B \circ T_{4-3}) * \bar{\tau}) * \bar{j} \circ ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r})' * \bar{\delta}_n^4) \\
 &\quad (((X \circ C^{-1})^{(2)} \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_i^3)' * \bar{\delta}_i^3) * \bar{n} \\
 c_{jlr} &\equiv (f \circ X^{\dagger-1})_{B_r} \circ (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_i^3) * \bar{j} \\
 d_{jmnr} &\equiv 2((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r})' * \bar{\delta}_n^4 \circ (((B \circ T_{4-3}) * \bar{\tau})' * \bar{\delta}_n^4) * \bar{j} \\
 e_{jlmnr} &\equiv ((B \circ T_{4-3}) * \bar{\tau}) * \bar{j} \circ (((f \circ X^{\dagger-1})_{B_r})^{(2)} * \bar{\delta}_n^4) * \bar{\delta}_m^4) \\
 &\quad (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_i^3) * \bar{n} \\
 &\quad (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_i^3) * \bar{m}
 \end{aligned}$$

expresión general del laplaciano vectorial ante cualquier "cambio de coordenadas", en donde se consideran las direcciones asociadas al método elegido y la descripción de la observable

bajo dicho método. Análogamente a los casos anteriores, para acercarse a la notación usual se puede decir

$$\nabla^2 f_{X^\dagger} \equiv \nabla^2 (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1}$$

haciendo uso de (AI.20) en el miembro derecho.

§AI.7 La divergencia

Para una función $g \in (\mathfrak{R}^n)^E$ con $E \subset \mathfrak{R}^n$, se define a su divergencia como

$$\nabla \cdot g \equiv \sum_{k \in \bar{n}} \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \in (\mathfrak{R})^{E^\dagger}$$

suponiendo la existencia de las correspondientes derivadas parciales de g en $E^\dagger \subset E$. Al reexpresar a la divergencia en términos de la diferencial se obtiene que

$$\nabla \cdot g = \sum_{k \in \bar{3}} (g_k)' * \bar{\delta}_k^n$$

debido a (AI.8).

Al igual que en los casos anteriores, al tratar en las teorías físicas con un campo vectorial $f \in (\mathfrak{R}^3)^{A \times T}$, se define a su "divergencia" omitiendo al término temporal haciendo

$$\nabla \cdot (f \circ C^{\dagger-1}) \equiv \sum_{k \in \bar{3}} (f_k \circ C^{\dagger-1})' * \bar{\delta}_k^3$$

en donde se considera a la descripción cartesiana de la observable f .

Para considerar a otro método de descripción del espacio de eventos, se utiliza a (AI.7), y se tiene que

$$f_k \circ X^{\dagger-1} = \sum_{i \in \bar{3}} (f \circ X^{\dagger-1})_{B_i} p_k^3 \circ ((B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{i})$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1} = \\ \sum_{k \in \bar{3}} \sum_{i \in \bar{3}} ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_i} p_k^3 \circ ((B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{i}))' * (((X^\dagger \circ C^{\dagger-1})' \circ C^\dagger \circ X^{\dagger-1}) * \bar{\delta}_k^3) \end{aligned}$$

y de (AI.1)' se sigue que

$$\nabla \cdot (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1} = \sum_{k \in \mathbb{I}^3} \sum_{i \in \mathbb{I}^3} \sum_{l \in \mathbb{I}^3} (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_k^3) * \bar{i} \\ ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_i} p_k^3 \circ ((B \circ T_{4-3}) * \bar{i}))' * \bar{\delta}_l^4$$

por lo cual

$$\nabla \cdot (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1} = \sum_{k \in \mathbb{I}^3} \sum_{i \in \mathbb{I}^3} \sum_{l \in \mathbb{I}^3} a_{kli} (b_{ikl} + c_{ikl}) \quad (\text{AI.21})$$

en donde

$$a_{kli} \equiv (((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4-3}) * \bar{\delta}_k^3) * \bar{i}$$

$$b_{ikl} \equiv (((B \circ T_{4-3}) * \bar{i}) * \bar{k} ((f \circ X^{\dagger-1})_{B_i})' * \bar{\delta}_l^4)$$

$$c_{ikl} \equiv (f \circ X^{\dagger-1})_{B_i} (((B \circ T_{4-3}) * \bar{i})' * \bar{\delta}_l^4) * \bar{k}$$

quien es la expresión general para la divergencia ante cualquier "cambio de coordenadas". Al igual que antes, se puede hacer

$$\nabla \cdot f_{X^{\dagger}} \equiv \nabla \cdot (f \circ C^{\dagger-1}) \circ C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}$$

para acercarse a la notación usual, el la cual debe considerarse al miembro derecho de (AI.18).

§AI.8 Simbología

$f \in B^A$. Una función $f: A \rightarrow B$.

$f^{ii}(E)$. Para $f \in B^A$ y un conjunto E , se hace $f^{ii}(E) \equiv \{a \in A \mid f(a) \in E\}$.

$f \circ g$. Para $g \in B^A$ y $f \in D^C$, se tiene que $f \circ g \in D^{(g^{ii}(C))}$, en donde $[f \circ g](a) \equiv f(g(a)) \forall a \in g^{ii}(C)$.

$L(V, W)$. Para dos espacios vectoriales V y W , se tiene $L(V, W) \equiv \{f \in W^V \mid f \text{ lineal}\}$.

p_i^m . Para $m \in \mathcal{N}$, siendo \mathcal{N} el conjunto de los números naturales, se tiene que $p_i^m \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}^m)$ con $p_i^m(x) = x(i) \forall x \in \mathbb{R}^m$, siendo $\bar{m} \equiv \{n \in \mathcal{N} \mid n \leq m\}$.

A° . Para un conjunto $A \subseteq V$ siendo V un espacio normado, se define $A^\circ \equiv \{a \in V \mid \exists B_\delta(a) \subset A\}$, en donde $B_\delta(a) \equiv \{x \in V \mid \|x - a\| \leq \delta\}$.

f' . Para $f \in W^A$ con $A \subseteq V$, siendo V y W espacios normados, $f' \in L(V, W)^E$ es la diferencial (de Frechet) de f , suponiendo que es diferenciable en $E \subseteq A^\circ$.

δ^m . Para $m \in \mathcal{N}$, se tiene que $\delta^m \in (\mathfrak{R}^{\bar{m}})^{\bar{m}}$ es la base canónica de $\mathfrak{R}^{\bar{m}}$, en donde

$$[\delta^m(j)](i) \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

$\theta_i^{(V^{\bar{m}})}$. Para $m \in \mathcal{N}$ y V un espacio vectorial, se tiene que $\theta_i^{(V^{\bar{m}})} \in (V^{\bar{m}})^V$ con $[\theta_i^{(V^{\bar{m}})}(x)](j) \equiv [\delta^m(i)](j) x \forall j \in \bar{m} \forall x \in V$.

\bar{f} . Para $f \in B^A$, se define $\bar{f} \in (B^A)^C$ con $\bar{f}(x) = f \forall x \in C$, en donde el conjunto C esta definido por el contexto.

$f \bullet g$. Para $g \in (C^B)^A$ y $f \in (D^C)^A$, se tiene que $f \bullet g \in (D^B)^A$ con $[f \bullet g](a) \equiv f(a) \circ g(a) \forall a \in A$.

$f * g$. Para $f \in (C^B)^A$ y $g \in B^A$, se tiene que $f * g \in C^A$ con $[f * g](a) \equiv [f(a)](g(a)) \forall a \in A$.

$f^{id}(E)$. Para $f \in B^A$ y un conjunto E , se tiene que $f^{id}(E) \equiv \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ tal que } f(a) \in E\}$.

I_A . Para un conjunto A , se define $I_A \in A^A$ con $I_A(a) \equiv a \forall a \in A$.

Apéndice II.- Cambio de coordenadas para el método cilíndrico

Resumen

En el apéndice I se desarrolla el procedimiento general para transformar la descripción del espacio de eventos, campos vectoriales y operadores diferenciales, cuando se basan en métodos con bases ortonormales puntuales. Este apéndice plantea los elementos para utilizar dicho procedimiento con el caso del método cilíndrico, la simbología (se incluye un breviario en el apéndice I) tiene características originales y fué desarrollada con la intención de explicar, lo mas íntegramente posible, los conceptos involucrados.

Desarrollo

En los términos del apéndice I e identificando a $X^\dagger \in (\mathfrak{R}^4)^{4 \times T}$ con la "función" que establece la descripción del espacio de eventos mediante el método cilíndrico, se tiene que

$$X \circ C^{-1} = \sqrt{(p_1^3)^2 + (p_2^3)^2} \bar{\delta}_1^3 + \tan^{-1} \circ \frac{p_2^3}{p_1^3} \bar{\delta}_2^3 + p_3^3 \bar{\delta}_3^3$$

para el "cambio de coordenadas" de cartesianas a cilíndricas, e inversamente

$$C \circ X^{-1} = p_1^3 \cos \circ p_2^3 \bar{\delta}_1^3 + p_1^3 \sin \circ p_2^3 \bar{\delta}_2^3 + p_3^3 \bar{\delta}_3^3$$

De las expresiones anteriores se obtiene que

$$\begin{aligned} ((X \circ C^{-1})' \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{\delta}_i^3 = & \\ & (\delta_i^3(1) \cos \circ p_2^4 + \delta_i^3(2) \sin \circ p_2^4) \bar{\delta}_1^3 \\ & + \frac{1}{p_1^4} (\delta_i^3(2) \cos \circ p_2^4 - \delta_i^3(1) \sin \circ p_2^4) \bar{\delta}_2^3 + \delta_i^3(3) \bar{\delta}_3^3 \end{aligned} \quad (\text{AII.1})$$

asi como también

$$\begin{aligned} (((X \circ C^{-1})^{(2)} \circ C \circ X^{-1} \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{\delta}_i^3) * \bar{\delta}_j^3 = & \\ & \frac{1}{p_1^4} (\delta_i^3(1) \sin^2 \circ p_2^4 + \delta_i^3(2) \cos^2 \circ p_2^4) \bar{\delta}_1^3 \\ & + \frac{2}{(p_1^4)^2} (\delta_i^3(1) - \delta_i^3(2)) \sin \circ p_2^4 \cos \circ p_2^4 \bar{\delta}_2^3 \end{aligned} \quad (\text{AII.2})$$

las cuales son expresiones indispensables para lograr la descripción cilíndrica de la transferencia de calor por conducción.

La base ortonormal puntual B asociada al método cilíndrico tiene la forma que sigue

$$\begin{aligned}(B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{1} &= \cos op_2^4 \bar{\delta}_1^3 + \sin op_2^4 \bar{\delta}_2^3 \\(B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{2} &= -\sin op_2^4 \bar{\delta}_1^3 + \cos op_2^4 \bar{\delta}_2^3 \\(B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{3} &= \bar{\delta}_3^3\end{aligned}\quad (\text{AII.3})$$

por lo cual, para cada $l \in \bar{3}$ se tiene

$$\begin{aligned}((B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{1})' * \bar{\delta}_l^3 &= -\delta_l^4(2) \sin op_2^4 \bar{\delta}_1^3 + \delta_l^4(2) \cos op_2^4 \bar{\delta}_2^3 \\((B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{2})' * \bar{\delta}_l^3 &= -\delta_l^4(2) \cos op_2^4 \bar{\delta}_1^3 - \delta_l^4(2) \sin op_2^4 \bar{\delta}_2^3 \\((B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{3})' * \bar{\delta}_l^3 &= 0.\end{aligned}\quad (\text{AII.4})$$

Las cuales pueden reexpresarse para acercarse a la notación usual, haciendo uso de los términos que siguen

$$a_r \equiv (B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{1}, \quad a_\theta \equiv (B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{2}, \quad a_z \equiv (B \circ T_{4 \rightarrow 3}) * \bar{3} \quad (\text{AII.5})$$

asi como

$$r \equiv p_1^4, \quad \theta \equiv p_2^4, \quad z \equiv p_3^4 \quad (\text{AII.6})$$

quien debe utilizarse con mucho cuidado, dado que puede ocasionar serias confusiones.

El proceso que sigue consiste en la sustitución de las funciones previas en las obtenidas en el apéndice I, lo cual resulta bastante laborioso debido a la cantidad de términos involucrados. Para lograr la generalidad necesaria para el objetivo que se persigue, se considera genericamente a un campo escalar $f \in \mathfrak{R}^{A \times T}$ y a un campo vectorial $F \in (\mathfrak{R}^3)^{A \times T}$. Se conviene introducir una notación *ad hoc* para las componentes de la descripción cilíndrica de F asociadas a la base ortonormal B , haciendo

$$F_r \equiv (F \circ X^{\dagger-1})_{B_1}, \quad F_\theta \equiv (F \circ X^{\dagger-1})_{B_2}, \quad F_z \equiv (F \circ X^{\dagger-1})_{B_3} \quad (\text{AII.7})$$

lo cual es coherente con (AII.5).

Para obtener al "gradiente cilíndrico" de f , se sustituye en (AI.9) a (AII.1), (AII.3), (AII.5), y (AII.6), obteniéndose que

$$\begin{aligned}\nabla(f \circ C^{\dagger-1}) \circ (C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) &= \frac{\partial(f \circ X^{\dagger-1})}{\partial r} a_r \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial(f \circ X^{\dagger-1})}{\partial \theta} a_\theta + \frac{\partial(f \circ X^{\dagger-1})}{\partial z} a_z\end{aligned}\quad (\text{AII.8})$$

pues se conviene en hacer

$$\frac{\partial(f \circ X^{\dagger-1})}{\partial r} \equiv (f \circ X^{\dagger-1})' * \delta_1^4, \quad \frac{\partial(f \circ X^{\dagger-1})}{\partial \theta} \equiv (f \circ X^{\dagger-1})' * \delta_2^4$$

$$\frac{\partial(f \circ X^{\dagger-1})}{\partial z} \equiv (f \circ X^{\dagger-1})' * \delta_3^4$$

para afinidad con la notación usual.

Para el "laplaciano (escalar) cilíndrico" de f , se utiliza en (AI.17) a las expresiones (AII.1), (AII.2), y (AII.6), obteniéndose que

$$\nabla^2(f \circ C^{\dagger-1}) \circ (C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(f \circ X^{\dagger-1})}{\partial r} + \frac{\partial^2(f \circ X^{\dagger-1})}{\partial r^2}$$

$$+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(f \circ X^{\dagger-1})}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2(f \circ X^{\dagger-1})}{\partial z^2} \quad (\text{AII.9})$$

debido a la convención para las derivadas parciales.

Para el "rotacional cilíndrico" de F , se sustituye en (AI.15) a (AII.1), (AII.3), (AII.4), (AII.5), (AII.6), así como (AI.10) y (AI.11), obteniéndose que

$$\nabla \times (F \circ C^{\dagger-1}) \circ (C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) a_r$$

$$+ \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) a_\theta + \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} F_\theta \right) a_z \quad (\text{AII.10})$$

debido a (AII.6) y a la convención para las derivadas parciales.

Con estos antecedentes se puede obtener la descripción cilíndrica de la transferencia de calor por conducción. Para ello, en la expresión (TC-C) debe considerarse el que $\nabla \cdot (k \nabla T) = \nabla k \cdot \nabla T + k \nabla^2 T$ y posteriormente ser compuesta por la derecha con la función $C^{\dagger} \circ X^{\dagger-1}$ asociada a un sistema de referencia inercial. De este modo, pueden emplearse las expresiones (AII.7), (AII.8) y (AII.9), en donde sea apropiado.

Apéndice III.- Integración de funciones de aproximación de elementos triangulares de primer orden

Resumen

En este apéndice se establecen ciertos procedimientos de cálculo, necesarios en la aplicación del método de Galerkin en discretizaciones de elemento finito con elementos triangulares de primer orden. Estos procedimientos se refieren a la integración, en un elemento de malla o en su frontera, de diversas funciones constituidas por las funciones de aproximación (o de forma) del elemento. Posteriormente se exhiben algunos resultados de la aplicación de los procedimientos planteados. Estos resultados se refieren al cálculo de las integrales que emanan del tratamiento (con el método de Galerkin) de problemas bidimensionales de transferencia de calor por conducción.

§AIII.1 Introducción

En la literatura de elemento finito se encuentran procedimientos para integrar las funciones mencionadas, el argumento que utilizan se basa en la adopción de coordenadas diferentes a las cartesianas. El proceso de "cambio de coordenadas" involucra la consideración de una observable física y de procedimientos de coordenalización implementados por un observador. En este caso la observable es la posición y se trata con un sólo método de coordenalización: el cartesiano¹... Esta situación hace confusa la argumentación de la literatura, lleva a que dichos procedimientos sean sólo reglas operativas y hace necesaria una revisión del planteamiento.

Los procedimientos de integración de este apéndice, se basan en el teorema de cambio de variable para las integrales en elementos triangulares y en la integral con una parametrización para las integrales en la frontera de los elementos. El primer caso exige una transformación favorable a la integración, sin que esto implique un "cambio de coordenadas". El segundo caso, sólo requiere de una parametrización apropiada de la frontera. Estos procedimientos son claros y sólidos, logrando una fundamentación aceptable para su utilización.

¹ La simetría axial permite el tratamiento bidimensional, considerando una sección axial; en donde esencialmente se usa al método cartesiano.

§AIII.2 Antecedentes

La implantación del método de Galerkin con el método de elemento finito [Cap. II y 17], involucra la consideración de una región conexa y compacta (cerrada y acotada). Si la región de interés es $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$, es necesario aproximarse a una "partición" de ella (malla) mediante la consideración de una familia finita de triángulos² $\{\Delta_s^\dagger \subset \mathfrak{R}^2 \mid s \in \bar{m}\}$ conocidos como elementos de malla, tal que

$$\bigcup_{s \in \bar{m}} \Delta_s^\dagger \approx \Omega \quad \text{y} \quad (\Delta_s^\dagger)^{int} \cap (\Delta_t^\dagger)^{int} = \emptyset \quad \forall i, s \in \bar{m} \quad \cdot t \quad i \neq s$$

en donde $(\Delta_s^\dagger)^{int}$ se refiere al interior del conjunto Δ_s^\dagger .

La descripción de los triángulos puede hacerse en términos de una matriz Δ de orden $m \times 3$, en donde $\Delta_{s,j} \in \mathfrak{R}^2$ corresponde a las coordenadas (cartesianas o cilíndricas) del vértice (nodo) j -ésimo del triángulo s -ésimo, desde el sistema de referencia utilizado para la descripción del fenómeno. Para mayor simplicidad, es conveniente definir las siguientes matrices, en donde $\Delta_{s,i}$ es la componente i -ésima del par $\Delta_{s,j}$

$$\mathbf{a}_s \equiv \begin{pmatrix} \Delta_{s,21} & \Delta_{s,32} - \Delta_{s,31} & \Delta_{s,22} \\ \Delta_{s,31} & \Delta_{s,12} - \Delta_{s,11} & \Delta_{s,32} \\ \Delta_{s,11} & \Delta_{s,22} - \Delta_{s,21} & \Delta_{s,12} \end{pmatrix} \quad \forall s \in \bar{m} \quad (\text{AIII.1})$$

y

$$\mathbf{b}_s \equiv \begin{pmatrix} \Delta_{s,22} - \Delta_{s,32} & \Delta_{s,31} - \Delta_{s,21} \\ \Delta_{s,32} - \Delta_{s,12} & \Delta_{s,11} - \Delta_{s,31} \\ \Delta_{s,12} - \Delta_{s,22} & \Delta_{s,21} - \Delta_{s,11} \end{pmatrix} \quad \forall s \in \bar{m} \quad (\text{AIII.2})$$

de lo cual se sigue^{3,4}

$$\begin{aligned} 2\mu_s &= \|(\Delta_{s,2} - \Delta_{s,1}) \times (\Delta_{s,3} - \Delta_{s,1})\| \\ &= \mathbf{b}_{s,32} \mathbf{b}_{s,21} - \mathbf{b}_{s,22} \mathbf{b}_{s,31} = \mathbf{b}_{s,11} \mathbf{b}_{s,22} - \mathbf{b}_{s,12} \mathbf{b}_{s,21} \end{aligned} \quad (\text{AIII.3})$$

² Para un $m \in \mathcal{N}$, se conviene en hacer $\bar{m} \equiv \{s \in \mathcal{N} \mid s \leq m\}$, en donde \mathcal{N} representa al conjunto de los números naturales.

³ El símbolo μ_s se refiere al área de Δ_s^\dagger .

⁴ Obsérvese en el esquema de §AIII.3, que la identificación de los vértices de Δ_s^\dagger tiene la orientación contraria al movimiento de un reloj. De este modo se cumple que

$$2\mu_s = (\Delta_{s,21} - \Delta_{s,11})(\Delta_{s,32} - \Delta_{s,12}) - (\Delta_{s,31} - \Delta_{s,11})(\Delta_{s,22} - \Delta_{s,12}).$$

ya que

$$-b_{s,31} = b_{s,11} + b_{s,21} \quad \text{y} \quad -b_{s,32} = b_{s,12} + b_{s,22}.$$

Ante la elección de cualquier elemento de malla Δ_s^\dagger con $s \in \bar{m}$, se considera su familia de funciones de aproximación $\{\phi_{s,i} | i \in \bar{3}\}$ en términos de los polinomios de Lagrange asociados a Δ_s^\dagger , obteniendo con (AIII.1) y (AIII.2) que⁵

$$\phi_{s,i} \equiv \frac{1}{2\mu_s} (a_{s,i} + b_{s,i1} p_1^{(2)} + b_{s,i2} p_2^{(2)}) \quad \forall i \in \bar{3} \quad (\text{AIII.4})$$

para la descripción cartesiana o cilíndrica.

§AIII.3 Desarrollo

En la aplicación del método de Galerkin en discretizaciones de elemento finito con elementos triangulares de primer orden, resulta necesaria la integración, en un elemento de malla o en su frontera, de diversas funciones constituidas por las funciones de aproximación del elemento. Aunque las funciones de aproximación son muy sencillas, el cálculo directo de las integrales en los elementos resulta inasequible, dado que la forma de los elementos imposibilita una integración iterada. Por ello, es necesario transformar apropiadamente la región de integración y aplicar el teorema de cambio de variable, para obtener una integral que pueda ser calculada con una integración iterada.

Para un elemento cualquiera, digamos el s -ésimo, debe considerarse una transformación $T_s: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ que modifique convenientemente al conjunto Δ_s^\dagger , lo cual no involucra un "cambio de coordenadas". Una transformación favorable al proceso mencionado es la siguiente⁶

$$T_s^{-1} \equiv \left(b_{s,22} p_1^{(2)} - b_{s,12} p_2^{(2)} + \frac{1}{2\mu_s} (a_{s,2} b_{s,12} - a_{s,1} b_{s,22}), \right. \\ \left. b_{s,11} p_2^{(2)} - b_{s,21} p_1^{(2)} + \frac{1}{2\mu_s} (a_{s,1} b_{s,21} - a_{s,2} b_{s,11}) \right) \quad (\text{AIII.5})$$

⁵ Para $m, n \in \mathcal{N}$ tal que $m \leq n$, se define la función $p_m^{(n)}: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ haciendo $p_m^{(n)}(x) = x_m \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n$ y se le llama función proyectiva m -ésima de \mathfrak{R}^n .

⁶ Para utilizar el teorema de cambio de variable es apropiado explicitar la función inversa de T_s ; i.e. T_s^{-1} .

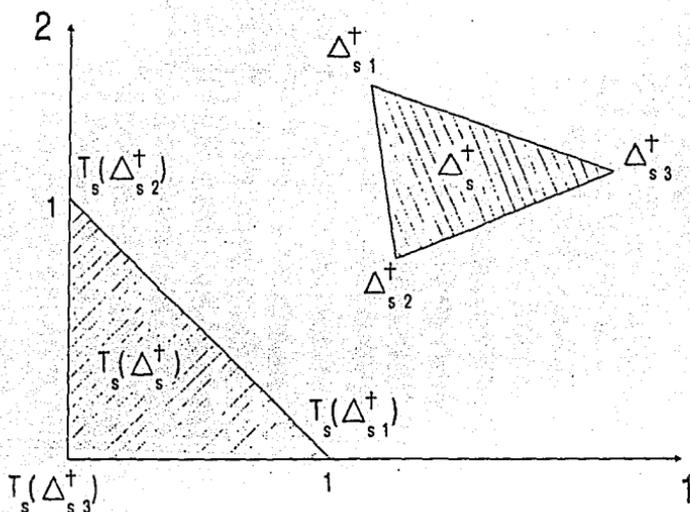
resultando que T_s es una transformación afín en \mathbb{R}^2 , con la propiedad⁷

$$T_s(\Delta_{s,i}) = (\delta_{1i}, \delta_{2i}) \quad \forall i \in \bar{3}$$

ya que

$$T_s^{-1}(\delta_{1i}, \delta_{2i}) = \Delta_{s,i} \quad \forall i \in \bar{3}$$

como es fácil de verificar. Esto provoca que la descripción cartesiana de $T_s(\Delta_s^+)$ sea un triángulo recto con catetos unitarios, lo cual puede visualizarse como sigue



Transformación de triángulos para la integración

En estas condiciones ya es favorable la aplicación del teorema de cambio de variable [7 Cap.8 §11]. Para una función f Riemann integrable con soporte [7 pag.336] contenido

⁷ Se utiliza la delta de Kronecker, δ_{ik} , definida como sigue:

$$\delta_{ik} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } i = k; \\ 0 & \text{si } i \neq k; \end{cases}$$

en donde i y k son enteros positivos. Aunque tiene semejanza con las funciones de Kronecker [7 pag 74], estrictamente son diferentes.

en Δ_s^\dagger , se tiene^{8, 9}

$$\int_{\Delta_s^\dagger} f = \int_{T_s(\Delta_s^\dagger)} f \circ T_s^{-1} |Det \circ (T_s^{-1})'| = 2\mu_s \int_{T_s(\Delta_s^\dagger)} f \circ T_s^{-1}$$

ya que

$$(T_s^{-1})'(x) = (b_{s,22} p_1^{(2)} - b_{s,12} p_2^{(2)}, b_{s,11} p_2^{(2)} - b_{s,21} p_1^{(2)}) \quad \forall x \in \mathfrak{R}^2$$

por lo cual

$$[Det \circ (T_s^{-1})'](x) = b_{s,12} b_{s,21} - b_{s,11} b_{s,22} = 2\mu_s \quad \forall x \in \mathfrak{R}^2.$$

Ahora, como el conjunto $T_s(\Delta_s^\dagger)$ permite utilizar la integración iterada [7 Cap.8 §12], se obtiene¹⁰

$$\int_{\Delta_s^\dagger} f = 2\mu_s \int_0^1 F \quad \text{con} \quad F(q) = \int_0^{1-q} f \circ T_s^{-1} \circ (q, I_{\mathfrak{R}}) \quad \forall q \in [0, 1]$$

que establece el procedimiento para integrar en elementos triangulares.

Para aplicar este procedimiento, son convenientes otros resultados. Se puede ver, de (AIII.3) y (AIII.4), que las funciones de aproximación tienen el siguiente comportamiento

$$\phi_{s,1} \circ T_s^{-1} = p_1^{(2)}, \quad \phi_{s,2} \circ T_s^{-1} = p_2^{(2)}, \quad \phi_{s,3} \circ T_s^{-1} = 1 - (p_1^{(2)} + p_2^{(2)})$$

dado que $\phi_{s,3} = 1 - (\phi_{s,1} + \phi_{s,2})$.

En cuanto a las integrales en la frontera de un elemento, digamos el s -ésimo, se considera una función f continua en $\partial\Delta_s^\dagger$ y se tiene^{11, 12}

$$\int_{\partial\Delta_s^\dagger} f = \sum_{l \in \mathfrak{S}} \int_{\partial\Delta_{s,l}^\dagger} f \equiv \sum_{l \in \mathfrak{S}} \int_{a_l}^{b_l} f \circ g_l \|Dg_l\|$$

⁸ La función Det se aplica a transformaciones lineales, su valor es el que se obtiene con el determinante usual aplicado a la matriz asociada de la transformación lineal.

⁹ La función $(T_s^{-1})'$ se refiere a la diferencial [7 y 33] de la función T_s^{-1} .

¹⁰ Para un conjunto A , se define la función $I_A : A \rightarrow A$ haciendo $I_A(a) \equiv a \quad \forall a \in A$, y se le llama función identidad en A .

¹¹ El símbolo $\partial\Delta_{s,l}^\dagger$ se refiere al lado l -ésimo del elemento s -ésimo. Se conviene en que el lado l -ésimo corresponde al cateto opuesto al vértice l -ésimo del triángulo.

¹² La función Dg_l representa la derivada de la función g_l .

siendo $g_l : [a_l, b_l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización con derivada continua, del sector l -ésimo de la frontera. Con las parametrizaciones siguientes

$$\left. \begin{aligned} g_1 &\equiv \Delta_{s,2} + I_{\mathbb{R}}(b_{s,12}, -b_{s,11}) \\ g_2 &\equiv \Delta_{s,3} + I_{\mathbb{R}}(b_{s,22}, -b_{s,21}) \\ g_3 &\equiv \Delta_{s,1} + I_{\mathbb{R}}(b_{s,32}, -b_{s,31}) \end{aligned} \right\} \quad \text{y } [a_l, b_l] = [0, 1] \quad \forall l \in \bar{3} \quad (\text{AIII.6})$$

se obtiene

$$\int_{\partial\Delta_{s,l}^\dagger} f = L_{s,l} \int_0^1 f \circ g_l \quad \forall l \in \bar{3}$$

en donde $L_{s,l}$ es la longitud del lado l -ésimo (véase nota 11) del elemento s -ésimo, estableciendo el procedimiento para integrar en la frontera de elementos triangulares.

Para aplicar este procedimiento, son convenientes otros resultados. De (AIII.3), (AIII.4) y (AIII.6), se sigue

$$\phi_{s,i} \circ g_l = G_{il} \quad \text{con} \quad G \equiv \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathbb{R}} & 1 - I_{\mathbb{R}} \\ 1 - I_{\mathbb{R}} & 0 & I_{\mathbb{R}} \\ I_{\mathbb{R}} & 1 - I_{\mathbb{R}} & 0 \end{pmatrix}$$

que es un comportamiento muy favorable de las funciones de aproximación.

§AIII.4 Algunos resultados

En problemas bidimensionales (simetría traslacional o axial) de transferencia de calor por conducción, ocurren las siguientes integrales, las cuales fueron calculadas con los procedimientos presentados:

$$\int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{s,i} = \frac{\mu_2(\Delta_s^\dagger)}{3}$$

$$\int_{\partial\Delta_{s,l}^\dagger} \phi_{s,i} \phi_{s,k} = \frac{L_{s,l}}{6} (1 - \delta_{il})(1 - \delta_{kl})(1 + \delta_{ik})$$

$$\int_{\partial\Delta_{s,l}^\dagger} \phi_{s,i} = \frac{L_{s,l}}{2} (1 - \delta_{il})$$

$$\int_{\Delta_s^\dagger} \phi_{s,i} \phi_{s,k} = \frac{\mu_2(\Delta_s^\dagger)}{12} (1 + \delta_{ik})$$

$$\int_{\Delta_i^\dagger} r \phi_{si} = \frac{\mu_2(\Delta_i^\dagger)}{12} \sum_{q \in \mathfrak{S}} (1 + \delta_{qi}) \Delta_{sq2}$$

$$\int_{\theta \Delta_i^\dagger} r \phi_{si} \phi_{sk} = \frac{L_{s1}}{12} (1 - \delta_{ii})(1 - \delta_{ki}) \sum_{q \in \mathfrak{S}} (2 \delta_{iq} \delta_{kq} + 1)(1 - \delta_{qi}) \Delta_{sq2}$$

$$\int_{\theta \Delta_i^\dagger} r \phi_{si} = \frac{L_{s1}}{6} (1 - \delta_{ii}) \sum_{q \in \mathfrak{S}} (1 + \delta_{iq})(1 - \delta_{qi}) \Delta_{sq2}$$

$$\int_{\Delta_i^\dagger} r \phi_{si} \phi_{sk} = \frac{\mu_2(\Delta_i^\dagger)}{60} \sum_{q \in \mathfrak{S}} (1 + \delta_{qi} + \delta_{qk})(1 + \delta_{ik}) \Delta_{sq2}$$

Referencias bibliográficas

- [1] M.F. Rosales, *Modelación térmica para el paquete de cómputo CALIIE-2D-T*; Estudio interno IIE/34/2476/012/I, México (1990).
- [2] M.F. Rosales, *Algoritmos para el paquete de cómputo CALIIE-2D-T*; Reporte técnico IIE/43/2476/016/T, México (1991).
- [3] M.F. Rosales, *Procedimiento general para la transformación de operadores diferenciales ante cambios de coordenadas*; Estudio interno IIE/34/2476/013/1, México (1990).
- [4] M.F. Rosales, *Integración de funciones de aproximación de elementos triangulares de primer orden*; Reporte técnico IIE/43/2476/015/I, México (1991).
- [5] T.A. Brody, et al, *La mecánica cuántica y sus interpretaciones*; Rev. Mex. de Física, Vol.25 (1976).
- [6] H.B. Callen, *Thermodynamics*; Wiley (1960).
- [7] L.H. Loomis y S. Sternberg, *Advanced Calculus*; Addison-Wesley (1968).
- [8] L. Prandtl y O.G. Tietjens, *Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics*; Dover (1957).
- [9] L.D. Landau y M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*; Addison-Wesley (1959).
- [10] C. Kittel, W. Knight y M. Ruderman, *Mecánica, Berkeley Physics Course Vol.1*; Reverté (1968).
- [11] W.M. Rohsenow y H.Y. Choi, *Heat, mass, and momentum transfer*; Prentice-Hall (1961).
- [12] H.S. Carslaw y J.C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*; Oxford University Press (1959).
- [13] I. Babuška y A.K. Aziz, *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method*, en *Mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*; A.K. Aziz, ed., Academic Press (1972).
- [14] J.N. Reddy, *Applied Functional Analysis and variational methods in engineering*; McGraw-Hill (1986).
- [15] V.P. Mijailov, *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*; Mir (1978).
- [16] J. Douglas y T. Dupont, *Galerkin methods for parabolic equations*; SIAM J. Numer. Anal., Vol.7, No.4 (1970).

- [17] B.A. Finlayson y L.E. Scriven, *The method of weighted residuals—a review*; Appl. Mech. Rev., Vol.19, No.9 (1966).
- [18] S.S. Rao, *The Finite Element Method in Engineering*; Pergamon Press (1982).
- [19] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*; Academic Press (1969).
- [20] R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*; Vol.1, Interscience (1953).
- [21] S.T. Hu, *Introduction to General Topology*; Holden-Day (1966).
- [22] U.K. Kulisch y W.L. Miranker, *The Arithmetic of the Digital Computer: A New Approach*; SIAM Review, Vol.28, No.1 (1986).
- [23] J. Stoer y R. Bulisch, *Introduction to Numerical Analysis*; Springer-Verlag (1980).
- [24] G.H. Golub y C.F. van Loan, *Matrix Computations*; John Hopkins University Press (1985).
- [25] D.S. Kershaw, *The Incomplete Cholesky-Conjugate Gradient Method for the Iterative Solution of Systems of Linear Equations*; J. of Computational Physics, No.26 (1978).
- [26] G. Gambolati, *Fast Solution to Finite Element Flow Equations by Newton Iteration and Modified Conjugate Gradient Method*; Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol.15 (1980).
- [27] Z.J. Csendes, E.M. Freeman, D.A. Lowther y P.P. Silvester, *Interactive Computer Graphics in Magnetic Field Analysis and Electric Machine Design*; IEEE Trans. PAS, Vol.PAS 100, No.6 (1981).
- [28] T.A. Manteuffel, *The Shifted Incomplete Cholesky Factorization*; Report SAND-78-8226, Albuquerque N.M., USA: Sandia Laboratories (1978).
- [29] M.F. Rosales, *Manual de usuario de CALIIE-2D-T; versiones PC-2.0 y HP-1.0*; Reporte técnico IIE/43/2476/019/T, México (1991).
- [30] M. del R. Nava, *Estudio térmico de transformadores eléctricos encapsulados en resina epóxica*; Tesis de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias, UNAM, México (1991).
- [31] S.V. Patankar, *Recent Developments in Computational Heat Transfer*; Journal of Heat Transfer, Vol. 110 (1988).
- [32] M.F. Rosales, *Diferenciación en espacios normados de dimensión arbitraria*; Com. Int. Dpto. Mat. FCUNAM, Serie Monografías, México (1985).