3
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA FUNCION LINEAL COMO LUGAR GEOMETRICO EN DIFERENTES SISTEMAS DE REFERENCIA.

UNA PROPUESTA DIDACTICA PARA EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

GUADALUPE XOCHITL CHAVEZ PEREZ

México, D. F. Agosto, 1994

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron la pasante(s) Guadalupe Xóchitl Chávez Pérez

con número de cuenta 8053299-4 con el Título: "La función lineal como lugar geométrico en diferentes sistemas de referencia. Una propuesta didáctica para el nivel medio superior".

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Matemático

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
M. en E. Mat.	Patricia Esperanza	Balderas Cañas	
Director de Tesis M. en C.	Francisco	Struck Chávez	
Mat.	Rosa María	Hernández Trejo	
M. en C.	Jefferson	King Dávalos	
Suplente Mat.	Julieta	Verdugo Díaz	
Suplente			

Dedico este trabajo a mi mamá por su esfuerzo y apoyo hacia toda la familia.

Al recuerdo de mi papá.

A mis hermanos.

Y a mis sobrinos como un testimonio para que perseveren y alcancen una a una todas sus metas.

AGRADECIMIENTOS

Gracias Paty, por dirigir este trabajo y por el tiempo dedicado al mismo.

Gracias Paco, primero por la paciencia que me tuviste, por los intentos fallidos. Y segundo por aceptar asesorar mi trabajo.

Gracias Julieta, por tu buena disposición para leer el trabajo y por las ideas que me diste no nada más ahora sino desde antes.

Gracias a los tres, por las observaciones, recomendaciones y sobre todo por lo que me han enseñado en este tiempo que hemos compartido durante la elaboración de este trabajo, a pesar de ser personas con multiples actividades. De nuevo, gracias.

Gracias a mi mamá a Mary y a Magaly, ellas saben porque.

Gracias a Rosa y a Jeff por aceptar ser mi sinodales.

INDICE

INTRODUCCION

Cuando estudié en la Facultad de Ciencias en 1985, tuve la oportunidad de dar clases al ser ayudante de profesor. Al concluir mis estudios decidí continuar en el área de la enseñanza y empecé a trabajar en el Colegio de Bachilleres.

Al paso de los años el trabajar con estudiantes de nivel medio superior me ha permitido ver, desafortunadamente, que la enseñanza-aprendizaje está mal porque los alumnos llegan a este nivel sin saber leer, tienen mala ortografía, no ubican lugares, ni fechas, ni personajes, ni las estapas de la historia misma; y sobre todo están mal en Matemáticas ya que no saben operar con números enteros y racionales, el traducir los problemas al lenguaje algebraico para obtener su solución les cuesta mucho trabajo, los productos y factorizaciones inmediatas no las aplican; con esto no estoy culpando a los profesores anteriores de mis alumnos, porque si hay algún culpable, éste es el sistema.

Comienzo este trabajo con el capítulo que describe el modelo educativo del Colegio de Bachilleres, en él se ven los objetivos generales, la estructura académica, el plan y los programas de estudio, el perfil del egresado y la concepción pedagógica. En esta última se habla acerca de las líneas orientadoras de la práctica educativa (planteamiento de problemas; ejercitación de los métodos; apropiación constructiva y producción de conocimientos; relaciones, utilidad y aplicaciones actuales; consolidación integración y retroalimentación).

Pienso que la forma tradicional de presentar una clase no es la adecuada, puesto que todo lo visto en primaria y secundaria no lo han aprendido como se quisiera, por lo cual me sumo a la propuesta de que el aprendizaje debe ser a partir de construir el conocimiento y no únicamente memorístico como hasta ahora. Esto implica un cambio para el estudiante y también para el profesor, por ello considero importante planear nuestra clase, en estos términos surgen materiales como el que propongo en el capítulo tres, que es una forma diferente de ver las cuestiones cognocitivas en el tema: "La función lineal como lugar geométrico en diferentes sistemas de referencia".

Para orientarnos de cómo escribir (planear) dichos materiales el capítulo dos habla del modelo didáctico para la elaboración de éstos, basandose en que el aprendizaje se concibe como constructivo, integral y evolutivo, considerando las fases por las que teóricamente debe pasar un estudiante en su aprendizaje: inducción, estructuración, consolidación y retroalimentación. Con este propósito se incluyen algunos elementos didácticos que permitirán al estudiante la construcción del conocimiento. Todo esto siguiendo las líneas orientadoras de la práctica educativa.

El capítulo cuatro es una breve discusión de los conceptos matemáticos planteados en el fascículo (capítulo tres) y está escrito principalmente para los profesores de bachillerato ya que debemos de tener claro los temas a tratar, no olvidar la formalidad; esto no quiere decir que debemos tratar los temas a nivel superior pero si tenerlos bien claros como dije antes.

Las sugerencias de como hacer uso del fascículo para un mejor aprovechamiento tanto para profesores como para estudiantes las hago en el capitulo cinco.

Al final del trabajo doy algunas conclusiones de lo expuesto anteriormente, aunque éstas no son conclusiones acabadas pues la última palabra la dará la puesta en práctica del fascículo y de las sugerencias metodológicas para el manejo de éste.

I. MODELO EDUCATIVO DEL COLEGIO DE BACHILLERES

El Colegio de Bachilleres surge en el área metropolitana de la Ciudad de México en Febrero de 1974 como parte de las estrategias para enfrentar la creciente demanda de servicios educativos a nivel medio superior, concebido como una institución educativa que hiciera frente a los modelos tradicionales del Bachillerato, adquiere un carácter formativo más que informativo o enciclopédico, organizando sus actividades de aprendizaje en tres áreas de trabajo: actividades escolares, capacitación para el trabajo y actividades paraescolares. Tiene como propósito fundamental difundir la cultura en general, fomentar el estudio básico de las ciencias y formar un pensamiento crítico, reflexivo y comprometido con la sociedad.

El modelo educativo del Colegio de Bachilleres está constituido por el conjunto de normas, valores, concepciones teóricas y metodológicas que, en lo social, científico y pedagógico, dan identidad y dirección a la práctica educativa de la Institución y determinan tanto su interacción con la sociedad como su estructura organizativa y sus formas de operación.

La idea que en la actualidad se tiene del modelo es producto de un proceso de desarrollo en el que, a lo largo de la historia de la Institución, se han incorporado concepciones e influencias intra y extrainstitucionales. En otras palabras, siendo el Colegio una Institución dinámica, su modelo educativo a la par que la cultura, se nutre de nuevas concepciones y, en respuesta a su circunstancia histórica y social, está en permanente revisión de sí mismo, desde una perspectiva Institucional, que tiene como base sus antecedentes y los lineamientos normativos vigentes.

Los elementos que definen al modelo educativo se encuentran plasmados en los objetivos generales del Colegio, en la estructura académica, el plan y los programas de estudio, en el perfil del egresado que de ellos se desprende y en la concepción pedagógica del Colegio de Bachilleres.

1. OBJETIVOS GENERALES DEL COLEGIO DE BACHILLERES

Los objetivos generales del Colegio de bachilleres establecen la intencionalidad educativa de la Institución. En el Estatuto General del Colegio[1] están contenidos los objetivos generales de la Institución los cuales se listan a continuación:

a) Desarrollar la capacidad intelectual del alumno, mediante la obtención y aplicación de conocimientos.

El estudiante podrá desarrollar su capacidad intelectual en el ejercicio y la aplicación permanente de las habilidades lógicas y metodológicas necesarias, tanto para la búsqueda activa y crítica de información, como para la apropiación constructiva de contenidos básicos de diversas disciplinas que le darán posibilidades de acceder a niveles superiores en los diversos

[1]Colegio de Bachilleres, Estatuto General p.ii.

campos del conocimiento. Asimismo, integrará estos contenidos en el análisis y comprensión de problemáticas contemporáneas que lo afectan como sujeto social y como miembro de una comunidad determinada, en la búsqueda de posibles soluciones que favorezcan el desarrollo y en la transformación de su medio natural y social.

b) Conceder la misma importancia a la enseñanza que al aprendizaje.

De este objetivo se desprende una perspectiva sobre el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, en donde profesor y estudiantes son corresponsables de dicho proceso, lo que implica compartir la interacción educativa y establecer una relación basada en la cooperación y la comunicación, en donde el profesor orienta y promueve la actividad en la construcción del conocimiento, considerando la participación de los estudiantes.

c) Crear en el alumno una conciencia crítica que le permita adoptar una actitud responsable ante la sociedad.

La conciencia crítica sólo puede ser desarrollada a través de la crítica, por ello el proceso de enseñanza-aprendizaje debe efectuarse en un ambiente de libertad y respeto mutuo, que abra espacio para que la formación se dé como un ejercicio permanente de reflexión en los diversos campos del conocimiento -en un contexto de comprensión de la realidad como un todo complejo y multideterminado- lo que generará en los estudiantes la necesidad de conocer y de participar en la solución de algunos de los problemas de su medio.

d) Proporcionar al alumno capacitación y adiestrramiento en una técnica o especialidad determinada.

Este objetivo expresa la intención de que el estudiante cuente, con una formación que le permita valorar la importancia del trabajo, experimentar la responsabilidad que éste implica y conocer las condiciones en que se desarrolla. Asimismo, esta formación debe brindar a los estudiantes los elementos suficientes para que, si así lo requieren, puedan desempeñarse en procesos de trabajo específicos.

2. ESTUCTURA ACADEMICA DEL COLEGIO DE BACHILLERES

Para cumplir con los objetivos que se ha propuesto, el Colegio posee una estructura académica constituida por tres áreas: Area de formación Propedéutica, Area de Capacitación para el trabajo y Area Paraescolar.

a) Area de formación Propedéutica

El área propedéutica o de formación básica abarca cinco campos de conocimiento: Matemáticas, Ciencias Naturales, Ciencias Histórico-sociales, Metodología-filosofía y Lenguaje-comunicación. Su finalidad es propiciar que el alumno desarrolle las habilidades lógicas y metodológicas necesarias para la producción del conocimiento, además de tener la posibilidad de incorporarse a cualquiera de las carreras profesionales que se imparten en la educación superior.

b) Area de Capacitación para el trabajo

Esta está constituida por una serie de capacitaciones cuya finalidad es proporcionar al estudiante los conocimientos, habilidades y actitudes que le posibiliten el desempeño de procesos de trabajo en una área específica.

c) Area de formación Paraescolar

Esta área está constituida por actividades agrupadas en tres subáreas: Educación Artística (Artes Plásticas, Danza, Música y Teatro), Educación Física (Deportes y Actividades Recreativas) y Acción Social (actividades de servicio a la comunidad interna y externa). El estudiante puede desempeñar cualquiera de ellas voluntariamente, de acuerdo son sus intereses particulares; en virtud de lo anterior, las actividades de esta área no están sujetas a acreditación. Las finalidades de esta área son: promover el trabajo cooperativo y comunitario, por medio de la acción social, favorecer el desarrollo de la sensibilidad estética y plástica, promover el cuidado y desarrollo óptimo del propio cuerpo, como una condición necesaria para una vida de calidad.

3. PLAN DE ESTUDIOS DEL COLEGIO DE BACHILLERES

El plan de estudios es el elemento curricular que organiza los contenidos que están sujetos a acreditación; como tal, es el instrumento rector y el eje de operación del proceso de enseñanza-aprendizaje en el Colegio de Bachilleres, ya que determina y norma:

- los contenidos a enseñar, su ubicación, secuencia, distribución, dosificación y certificación.
- los enfoques metodológicos con que se abordarán las actividades de enseñanza.
- los recursos y condiciones materiales necesarios para la concreción del proyecto educativo del Colegio.

El plan de estudios está integrado por las áreas de formación Propedéutica, y de formación para el trabajo.

a) Área de formación Propedéutica

El área propedéutica está organizada en cinco campos de conocimiento, los cuales son una ordenación convencional que agrupa a aquellos saberes o haceres que comparten entre si determinadas características. Cada uno de los campos de conocimiento está regido por una intención que lo delimita, establece los criterios de organización de sus contenidos, delinea las posibles variedades de su enseñanza y define la razón de ser del mismo. Paralelamente, el área propedéutica se divide en dos núcleos: uno básico u obligatorio y otro complementario u optativo.

El núcleo básico u obligatorio está constituido por aquellas materias que cumplen una función esencial en la formación de todo estudiante de bachillerato, ya que presentan la metodología básica del conocimiento científico de la naturaleza y de la sociedad, así como del lenguaje y de las matemáticas, y contienen los elementos informativos básicos de estos mismos campos de conocimiento.

El núcleo complementario u optativo está integrado por un conjunto de materias optativas -de entre las cuales cada estudiante debe elegir tres, que cursará en los semestres 5to. y 6to.- cuya función es ampliar o profundizar los aprendizajes logrados en el núcleo básico, aplicándolos y relacioándolos con conocimientos nuevos o planteando de manera diferente los ya expuestos, lo que promueve la integración del conocimiento y complementa la formación propedéutica general.

Los campos de conocimientos buscan romper la visión parcializada y enciclopédica del conocimiento y ofrecer al estudiante una perspectiva integral, que organiza a las diversas disciplinas a partir de sus elementos comunes y le permite reconocer las semejanzas y diferencias, las fronteras, las problemáticas compartidas y los campos de aplicación de las mismas.

Los campos del conocimiento se organizan en agrupaciones más específicas que son las materias. Una materia es un conjunto de contenidos, organizado para ser enseñado en uno, o dos o más cursos semestrales; cada curso semestral se denomina asignatura.

Las materias están regidas por una intención derivada de la finalidad del campo de conocimiento en la que se inserta. Cada asignatura se rige por una intención derivada de la intención de la materia. Asimismo, se rige por el enfoque de la materia, que especifica la perspectiva teórica, metodológica y pedagógica que organizará a los contenidos y que orientará su enseñanza.

b) Area de formación para el trabajo

El área de formación para el trabajo busca que, como parte de su formación propedéutica general, el estudiante reconozca el valor del trabajo productivo las responsabilidades que éste implica y las condiciones en que se desarrolla. Para ello se ofrece un conjunto de capacitaciones que permitirán al estudiante, en caso de que así lo requiera, incorporarse al mundo del trabajo sin que por ello quede cancelada su opción por la educación superior. En este sentido, las finalidades del área de formación para el trabajo son: brindarle al alumno la preparación que lo dote de conocimientos, habilidades, y actitudes en torno a una actividad productiva de bienes o servicios, ofrecer la oportunidad de explorar, en el sentido vocacional un ámbito de trabajo y ofrecer una primera aproximación a lo que puede ser el ejercicio profesional del estudiante.

El área de formación para el trabajo está constituida por un conjunto de capacitaciones orientadas a procesos de trabajo específicos. Cada capacitación constituye en sí misma una totalidad que integra entre 6 y 10 asignaturas que comparten la finalidad de lograr en el estudiante una serie de competencias que lo identifican con el campo laboral que ésta aborde y orienta la estructuración y dosificación de sus contenidos en función de las necesidades de dicho campo.

4. PROGRAMA DE ESTUDIO DEL COLEGIO DE BACHILLERES

El programa de estudio tiene la finalidad de informar a los profesores sobre los aprenizajes que se espera lograr en el estudiante, asi como sobre la perspectiva teórico-metodológica y pedagógica desde la que deberán ser enseñados. El programa se constituye así, en el instrumento de trabajo que le brinda al profesor elementos para planear, operar y evaluar el curso.

El programa contiene los siguientes sectores:

a) Marco de referencia el cual está integrado por: Ubicación, Intención y Enfoque.

La ubicación proporciona información sobre el lugar que ocupa la asignatura al interior del plan de estudios, y sobre sus relaciones horizontal y vertical con otras asignaturas.

Las intenciones de materia y asignatura informan el papel que desempeña cada una de ellas para el logro de los propósitos educativos del Colegio de Bachilleres.

El enfoque informa sobre la organización y el manejo de los contenidos de su enseñanza.

b) Base del programa en él se concretan las perspectivas educativas señaladas en el marco de referencia a través de los objetivos de unidad y los objetivos de operación para temas y subtemas.

Los objetivos de unidad expresan, de manera general, los conocimientos, habilidades, valores y actitudes que constituyen los aprendizajes propuestos; los objetivos de operación para temas y subtemas precisan los límites de amplitud y profundidad con que los contenidos serán abordados y orientan el proceso de interacción entre contenidos, profesor y estudiantes; es decir, señalan los aprendizajes a obtener (el "qué"), los conocimientos, habilidades o medios que se requerirán para lograrlos (el "como") y la utilidad de tales aprendizajes en la formación del estudiante (el "para qué").

c) <u>Elementos de instrumentación</u> incluyen las estrategias didácticas, las sugerencias de evaluación, la bibliografía y la retícula.

Las estrategias didácticas, derivadas del enfoque, son sugerencias de actividades que el profesor y los estudiantes pueden desarrollar durante el curso para lograr los aprendizajes establecidos con los objetivos de operación.

Las sugerencias de evaluación son orientaciones respecto a la forma en que se puede planear y realizar la evaluación de sus modalidades diagnóstica, formativa y sumativa.

La bibliografía se presenta por unidad y está constituida por textos, libros y publicaciones de divulgación científica que se requieren para apoyar y/o complementar el aprendizaje de los distintos temas por parte del estudiante y para orientar al profesor en la planeación de sus actividades.

La retícula es un modelo gráfico que muestra las relaciones entre los objetivos y la trayectoria propuesta para su enseñanza.

5. PERFIL DEL EGRESADO DEL COLEGIO DE BACHILLERES

El tipo de hombre que se quiere formar considerando los objetivos del Colegio y los campos en que se desenvolverá el egresado: los estudios superiores, el ambiente laboral y la vida cotidiana, determina el contenido del perfil terminal del estudiante.

A continuación se mencionan los aspectos del perfil que tienen relación con el aprendizaje de las matemáticas:

Para integrarse a la educación superior el egresado debe:

-Contar con los contenidos temáticos que son antecedentes para la formación universitaria.
-Poseer las habilidades propias del razonamiento lógico.
-Manejar la metodología científica y los lenguajes español y matemático.
-Conjugar sus habilidades lógicas y metodológicas tanto en la investigación como en la organización y aplicación de conceptos

y reglas aprendidos previamente, en la solución de problemas y en la construcción de aprendizajes más complejos.

-Contar con las capacidades de abstracción y simbolización necesarias para la formalización de problemas de la realidad y para el desarrollo del razonamiento.

-Tener una actitud de investigación que lo impulse a la búsqueda constante de información y a la crítica de los contenidos propios del medio con el cual interactúa.

-Poseer una actitud de compromiso y participación en la solución de algunas de las necesidades de la sociedad.

Para integrarse al mundo del trabajo el egresado debe:

-Contar con iniciativa y creatividad para aplicar sus conocimientos y habilidades en la realización de un trabajo y en la solución de problemas inherentes al mismo.

-Aplicar los conocimientos, métodos, técnicas y procedimientos aprendidos, tanto en el área propedéutica como en la de capacitación para el trabajo, en el ámbito laboral.

Para enriquecer su inserción en la vida cotidiana el egresado debe:

-Analizar, valorar, discriminar y reelaborar la diversidad de mensajes informativos que le presenta su medio, de manera que pueda asumir una postura propia en el intercambio de información.

-Aplicar los conocimientos adquiridos en la comprensión y solución de situaciones de su vida cotidiana, en la interacción con su medio social y en la conservación utilización racional de su medio natural.

6. CONCEPCION PEDAGOGICA DEL COLEGIO DE BACHILLERES

El marco conceptual sirve como base para la definición de criterios de carácter general que deben normar el proceso educativo. Estos criterios se han concretado a través de un Modelo Pentagonal, que oriente la práctica educativa en el Colegio de Bachilleres.

Es necesario comprender el Modelo Pentagonal como una concepción pedagógica, que a través de las cinco líneas que lo conforman funge como organizador de la enseñanza y del aprendizaje. El perfil que el egresado del Colegio de Bachilleres tendrá deseablemente al culminar el ciclo se constituye como el parámetro fundamental para determinar las características de los programas de estudio. Con esa finalidad, del perfil se extraen las líneas orientadoras de la práctica educativa, que involucran las actividades del profesor y los estudiantes y que definen los aspectos que necesariamente deben ser tocados en todos y cada uno de los programas para arribar a dicho perfil. Aunque estos aspectos deben ser considerados en los programas de todas las asignaturas, su magnitud y forma de implementarse podrá variar de acuerdo con las características propias de cada una de ellas.

Las cinco lineas son herramientas pedagógicas para la organización y explicitación de los marcos de referencia, de las bases de los programas y de los elementos de instrumentación de los mismos. Dichas líneas están organizadas conforme a una secuencia que expresa la forma en que se da el aprendizaje y que deberá ser retomada en cada una de las asignaturas en congruencia con la lógica de organización de la disciplina a la que correspondan.

a) Planteamiento de problemas o explicación de fenómenos
La ejercitación de las habilidades de pensamiento y el manejo de la metodología científica se desarrollan de mejor manera con el planteamiento y la solución de problemas, de la misma forma, la construcción de conocimientos es consecuencia de la interacción con situaciones y objetos problemáticos, cuyo nivel de complejidad exige trascender los saberes y las estructuras de pensamiento previos o integrarlos en otros más complejos al resolver el problema planteado.

El planteamiento de problemas abarca dos dimensiones: Por un lado la realidad misma del estudiante, lo que implica tomar a su esquema referencial (sus saberes y haceres, sus referentes personales, familiares y sociales, sus expectativas, inquietudes, intereses y necesidades) como punto de partida para llegar a saberes científicos o humanísticos o como punto de llegada y lugar en el que se aplican los saberes surgidos de las ciencias o las humanidades. Por otro lado, la necesidad de poner al estudiante en contacto con los problemas más cercanos a la realidad.

Se recomienda que el profesor plantee problemas o fenómenos a explicar como forma de iniciar (preferentemente) o concluir el tratamiento de contenidos temáticos.

b) Ejercitación de los métodos

Se entiende a los métodos como medios para la producción del conocimiento; en ese sentido su uso adecuado no se reduce al seguimiento puntual de una sucesión de pasos para obtener un producto, sino que la combinación de las capacidades de análisis, síntesis, contrastación, abstracción y aplicación con las habilidades propias del manejo de los métodos y con los conocimientos, permite que el estudiante integre y aplique, además de generar su propia metodología de estudio y acercarse constructivamente a aquellos conocimientos que requiera para su desempeño en la vida universitaria, laboral, o en la relación con su comunidad.

Desde esta perspectiva, el mètodo pude ser considerado como un elemento organizador de los contenidos del programa y, sobre todo, como una postura pedagógica respecto a la forma en que debe conducirse el proceso de enseñanza-aprendizaje, el cual debe promover que se dé un proceso de razonamiento en lugar de una memorización acrítica de coocimientos o la utilización mecánica de los mismos.

El profesor debe propiciar que el estudiante observe, busque información, formule hipótesis, experimente o haga investigaciones de campo y exprese correctamente sus conclusiones.

c) Apropiación constructiva y producción de conocimientos

El estudiante debe apropiarse de conocimientos ya dados, cuyo estado actual es producto de una larga historia de construcción de conocimientos. Para que la apropiación y producción de éstos se dé, es necesario que al enfrentarse a un conocimiento ya dado produzca una fractura en el que ya posee, para que en ésta se incorpore lo que se quiere que aprenda y se cree una estructura de pensamiento nueva, como un producto propio, mismo que le permite ser conciente de que está aprendiendo y puede asumirse como un sujeto cognoscente.

Es necesario que el estudiante aprenda a reconocer los objetos de estudio de las diversas disciplinas y que comprenda las conexiones lógicas en las que se fundamentan para la construcción de sus principios, acciones y leyes. Asimismo, es necesario que el estudiante conozca los principios básicos, las categorías de análisis o los conceptos que organizan a los contenidos, de acuerdo con la estructura lógica de las disciplinas.

El profesor propiciará que el estudiante reconozca al objeto de estudio de cada disciplina, conozca los principios básicos de ésta y se ejercite de las habilidades que le permitan dar a los contenidos temáticos un significado propio.

d) Relaciones, utilidad y aplicaciones actuales

Esta línea se vincula directamente con la necesidad de que el estudatne integre el conocimiento construido y conozca en qué forma se ha aplicado, cuál ha sido su utilidad, sus relaciones y sus efectos. Una de las causas que más frecuentemente argumentan los estudiantes para explicar su falta de aprendizaje o su olvido de temas escolares es que desconocen para qué habrán de servirles dichos aprendizajes. Estos contenidos temáticos tienen utilidades en por lo menos tres dimensiones: a) como propedéuticos, es decir, como bases para aprenizajes más complejos que habrán de ser incluidos en el mismo programa, en otros programas de asignaturas consecuentes o en la formación universitaria; b) como contenidos para el ejercicio de habilidades lógicas y/o metodológicas, es decir, aquellos en los que lo verdaderamente relevante es el desarrollo de la habilidad; y c) en aplicaciones directas para la explicación de situaciones y objetos del medio inmediato o para la solución de problemas.

El profesor debe propiciar que el estudiante conozca la utilidad y las aplicaciones de su aprendizaje, haciendo referencia a su realidad inmediata y buscando que el proceso de abstracción siempre implique un retorno a lo concreto.

e) Consolidación, integración y retroalimentación

La consolidación es la función de ejercitar y aplicar conocimientos construidos para que el estudiante logre afirmar los aprendizajes logrados.

La consolidación y la integración de lo aprendido encuentran su complemento en la retroalimentación, entendida ésta como la

superación de vacios y la reafirmación de conocimientos.
Si bien la retroalimentación tiene una relación directa con la evaluación del aprendizaje -particularmente en sus modalidades diagóstica y formativa- excede sus limites y se convierte en campo priviligiado para la generación de actitudes, y se incidirá de manera decisiva en su motivación, lo que deberá complementarse con la generación de un clima de libertad y respeto mutuo, en el que los estudiantes puedan desplegar sus opiniones, saberes y habilidades de manera franca y espontánea, y en el que, inclusive, puedan aprender sus equivocaciones. Esto implica una concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje en el que el profesor y los estudiantes son corresponsables del mismo.

El profesor debe propiciar que lo aprendido sea aplicado en otros campos y que el estudiante observe que el éxito en la solución de problemas simples permite el abordaje de problemas cada vez más complejos a través de investigaciones multidisciplinarias.

Recapitulación del Capitulo 1

En éste capitulo se describe el modelo educativo del Colegio de Bachilleres y está dividido en seis partes:

1) Objetivos generales del Colegio de Bachilleres
   - Desarrollar la capacidad intelectual del alumno, mediante la obtención y aplicación de los conocimientos.
   - Conceder la misma importancia a la enseñanza que al aprendizaje.

- Crear en el alumno una conciencia crítica que le permita adoptar una actitud responsable ante la sociedad.
- Proporcionar al alumno capacitación y adiestramiento en una técnica o especialidad determinada.

2) Estructura académica
   - Area de formación propedéutica.
   - Area de capacitación para el trabajo.
   - Area paraescolar.

3) Plan de estudios
   - Area de formación propedéutica.
   - Area de formación para el trabajo.

4) Programa de estudio
   - Marco de referencia: Ubicación, intención y enfoque.
   - Base del programa: Objetivos de operación (el qué, el cómo y el para qué)
   - Elementos de instrumentación: Estrategias didácticas, sugerencias de evaluación, bibliografía y retícula.

5) Perfil del egresado
   - Para integrarse a la educación superior.
   - Para integrarse al mundo del trabajo.
   - Para enriquecer su inserción en la vida cotidiana.

6) Concepción pedagógica
   - Planteamiento de problemas o explicación de fenómenos.
   - Ejercitación de los métodos.
   - Apropiación constructiva y producción de conocimientos.
   - Relación, utilidad y aplicaciones actuales.
   - Consolidación, integración y retroalimentación.

II. MODELO DIDACTICO PARA LA ELABORACION DE MATERIALES

En la elaboración de materiales se debe vincular y aplicar simultáneamente dos puntos de vista: el disciplinario y el didáctico.

El aspecto disciplinario, hace referencia a la formación del docente y a las características especiales de cada asignatura, éstas últimas se plantean en el programa.

En cambio, en el aspecto didáctico es necesario partir de las mismas bases, de aquellas que según el modelo educativo del Colegio de Bachilleres permitirán la apropiación constructiva del conocimiento, pero ¿qué significa ésto?

Para contestar la pregunta es necesario partir de un concepto homogéneo de aprendizaje.

1. BASES PEDAGOGICAS

El aprendizaje se concibe como constructivo, integral y evolutivo (desarrollo).

CONSTRUCTIVO: Porque el sujeto en su acción cognoscitiva estructura un objeto al identificar sus características y nuevas relaciones respecto a ese objeto, pero a la vez el objeto estructura al sujeto dependiendo de la naturaleza de éste. De aquí que el proceso de aprendizaje sea una interacción estrictamente entre el sujeto y el objeto de conocimiento, lo cual le da su carácter de construcción. El <u>aprendizaje</u> entonces no es acumulativo, ya que la propia acción del sujeto para aprender ante una nueva situación o problematización creará las condiciones necesarias para elaborar, reelaborar, ampliar y corregir sus propias concepciones respecto a los objetos de conocimiento.

INTEGRAL: Porque en la acción de aprender se involucran dimensiones de diferente nivel que impactan dicha acción, tales como lo <u>socio-cultural</u> y particularmente las creencias, costumbres y convicciones que ha desarrollado el individuo en su interacción con la cultura y la historia de su época. También lo referente a su <u>individualidad</u>, conformada por su personalidad; particularmente sus mecanismos emocionales, afectivos y motivacionales ante la necesidad de crecimiento intelectual y de satisfacción por conocer, comprender e interpretar su propia realidad.

EVOLUTIVO (desarrollo): Porque el estudiante, fortalece en la acción de aprender sus instrumentos cognoscitivos, sean estas habilidades lógico metodológicas, esquemas de acción y estructuras de abstracción y reflexión, las cuales posibilitan al sujeto para acceder a nuevas situaciones de aprendizaje, en el sentido de considerar al aprendizaje como producto de una relación entre la estructuración del sujeto y los objetos.

2. FASES DEL APRENDIZAJE

El aprendizaje debe ser significativo, entonces da lugar a un modelo didáctico conformado por cuatro fases: Inducción, Estructuración, Consolidación y Retroalimentación.

INDUCCION: Su objetivo es poner en contacto al estudiante con lo que va a aprender incorporándolo a una situación general de aprendizaje problematizadora. La situación de aprendizaje que deseamos ofrecer al estudiante debe posibilitarle su participación activa dentro del proceso. Asimismo, la iducción tiene como función iniciar un proceso de aprendizaje en el cual el propio sujeto tenga una necesidad de ir construyendo y complementando su actividad cognoscitiva.

ESTRUCTURACION: Durante esta fase se lleva a cabo la revisión, coordinación y construcción de esquemas de conocmimiento, estas actividades son el resultado de un proceso complejo que se inicia de alguna forma con la identificación de una problematización y de la movilización de esquemas de conocimientos que el sujeto posee y que pueden ayudarle a resolverla. Ambas actividades (identificación y movilización) pueden considerarse como abordadas durante la inducción una vez que el sujeto ha movilizado (evocado y relacionado) algunos esquemas de conocimiento, tratará de aplicarlos para resolver el problema o situación de aprendizaje. Deberá entonces buscar una forma de compensación para poder resolver la dificultad y reestablecer el equilibrio cognoscitivo alterado por el planteamiento de un problema. Precisamente esto último, se refiere al sentido más general en que puede entenderse el papel activo del sujeto en la construcción.

Se da una aproximación sistemática, del sujeto (estudiante) al objeto de conocimiento (estudio).

CONSOLIDACION: Tiene la función de reafirmar lo aprendido, a un nivel mayor que los alcances de la fase anterior, debido a que establece relaciones y comparaciones de todos los temas y conceptos estudiados en la fase de estructuración. En este sentido el conocimiento debe ser aplicado y generalizado ya que la consolidación que se da en la fase de estructuración se circunscribe al tema estudiado. Por otra parte en esta fase de consolidación la reafirmación pone el énfasis en la posibilidad de que el estudiante profundice en el conocimiento científico que se retoma para la tecnología y la vida cotidiana en general, relacionando los temas estudiados de una manera global y en sentido de estructura conceptual.

RETROALIMENTACION: Aquí el estudiante reconoce el procedimiento que ha seguido para construir su conocimiento, así como de las diferencias entre su modo de pensar inicial y final.

Por una parte debe realizarse a través de la contrastación entre el nivel de conocimientos con el que inició el proceso de aprendizaje y al que finalmente llegó; los productos obtenidos (conceptos) lo guiarán hacia nuevas preguntas de un nivel superior. Por otro lado, mediante el análisis del proceso que siguió -proceso que ha seguido un camino lógico- sin descartarse el factor afectivo que obviamente estuvo involucrado, llevará al estudiante a descubrir los errores y aciertos en el procedimiento que siguió, de ahí que la función fundamental del material sea orientar al estudiante en estos dos aspectos.

3. ELEMENTOS DIDACTICOS DE LOS MATERIALES

Las fases del aprendizaje mencionadas deben ser retomadas en la elaboración de materiales impresos, con este propósito se incluyen algunos elementos didácticos que permitirán al estudiante la construcción del conocimiento en lugar de fomentar sólo un aprendizaje de tipo memorístico.

Así tenemos:

INDUCCION	___________	Motivar y Contextualizar.
ESTRUCTURACION	___________	Hacer reflexionar.
CONSOLIDACION	___________	Reafirmar lo aprendido.
RETROALIMENTACION	___________	Aplicar lo aprendido.

A continuación se explican las características de cada uno de estos elementos didácticos.

Fase de Inducción

En esta fase los elementos didácticos son: Indice, Propósito, Introducción y Cuestionamiento Guía.

Indice: Es el desglose del contenido del material, especificado en páginas.

Propósito: Está redactado en forma general, integra los conocimientos, habilidades, valores, etc. que deberá poseer el estudiante al finalizar el estudio del material.

Introducción: Ubica al estudiante en el tema que va a estudiar.

Cuestionamiento Guía: Elemento esencial que sirve de orientación para el desarrollo del contenido. Es una situación problemática reelevante para el estudiante, incluye preguntas o problemas que pueden contestarse parcialmente con lo que conoce y lo posibilita para detectar la necesidad de adquirir nuevos conocimientos y habilidades a fin de poder resolverla totalmente.

Fase de Estructuración

En esta fase los elementos didácticos son: Desarrollo de Contenido, Actividades de Regulación y Explicaciones Integradoras.

Desarrollo de Contenido: Como punto de partida se establece una red conceptual o esquema que oriente el desarrollo del contenido. Identificando los elementos de un concepto y exponiendo sus relaciones. Se deben manejar conceptos sencillos e ir progresivamente hacia los más complejos.

Actividades de Regulación: Se incluyen en el desarrollo del contenido donde es necesario elaborar preguntas que propicien la reflexión o actividades que permitan aplicar, comprender o construir el conocimiento. Deben permitir la participación activa del estudiante.

Explicaciones Integradoras: Deben incluirse preferentemente al finalizar cada tema. Son síntesis de la relación y vinculación a los conceptos ejes, integrados en una totalidad.

Fase de Consolidación

Los elementos didácticos de la Fase de Consolidación son Actividades de Consolidación y Actividades de Generalización.

Actividades de Consolidación:

* Son actividades integrales que posibilitan que el estudiante relacione los temas tratados en el material.
* Son de carácter práctico y constructivo a partir del contenido o estudio, para obtener una explicación del estudiante.
* Permiten al estudiante dar respuestas globales y congruentes de lo estudiado.
* Promueven el pensamiento abstracto, así como las operaciones mentales de tipo formal.
* Permiten aplicar lo que aprendió el estudiante a situaciones concretas.
* Ayudan a observar las relaciones y la utilidad de lo aprendido.
* Actividades donde se consolide, apliquen o ejerciten varios conceptos en una sola, con el fin de que el estudiante integre

lo aprendido.

Actividades de Generalización:

* Se proponen al final de cada material.

* Promueven la profundización de lo aprendido a través de otros contenidos que no se encuentren en el material.

* Enriquecen lo aprendido al ser generalizado el conocimiento a otras situaciones.

* Actividades tales como leer un articulo (ciencia y tecnología, etc.) o asistir a eventos culturales, conferencias museos, etc.

Fase de Retroalimentación

Los elementos didácticos de ésta última fase son: Recapitulación, Lineamientos de Autoevaluación y Bibliografía.

Recapitulación: Es un esquema o cuadro sinóptico que contiene los aspectos relevantes del contenido, presentado como un breve análisis del proceso lógico que siguió el estudiante durante su aprendizaje con el texto, posibilita que él haga una sitesis reflexiva de los contenidos vistos.

Lineamientos de Autoevaluación: Son las respuestas a las actividades de consolidación que le permiten al estudiante verificar sus propias respuestas, éstas pueden ser de dos tipos dependiendo de la intención de los autores. Se pueden bosquejar las respuestas, explicando algunos de los elementos que debió considerar, o bien, dar respuestas detalladas y concretas.

Bibliografía: Incluye las referencias donde el estudiante puede profundizar o ampliar los temas tratados a lo largo del material. Estas referencias deben ser adecuadas al nivel de Bachillerato y de fácil acceso para él (acervo de Bibliotecas o de costo accesible).

Recapitulación del Capítulo 2

El capítulo dos habla del modelo didáctico para la elaboración de materiales impresos y se divide en tres partes:

1) Bases pedagógicas

   El aprendizaje se concibe como constructivo, integral y evolutivo.

2) Fases del aprendizaje

   - Inducción.
   - Estructuración.
   - Consolidación.
   - Rettroalimentación.

3) Elementos didácticos

   - Fase de Inducción: Indice, propósito, introducción y cuestionamiento guía
   - Fase de Estructuración: Desarrollo del contenido, actividades de regularización y explicaciones integradoras.
   - Fase de Consolidación: Actividades de consolidación y actividades de generalización.
   - Fase de retroalimentación: Recapitulación, lineamientos de autoevaluación y bibliografía.

III. UNA PROPUESTA DIDACTICA PARA EL TEMA DE LA FUNCION LINEAL

La finalidad en el Colegio de Bachilleres del campo de conocimiento de las matemáticas es: "Que el estudiante adquiera los elementos que conforman la cultura básica de las matemáticas (Aritmética, Geometría Euclidiana, Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial e Integral y Estadística Descriptiva e Inferencial), de manera que desarrolle las capacidades y habilidades propias del razonamiento lógico y del pensamiento inductivo-deductivo, indispensable en la comprensión y la aplicación de los diferentes métodos y conceptos matemáticos, así como el dominio del lenguaje de las Matemáticas y de los modelos que esta disciplina desarrolla conjuntamente con sus diversos procedimientos de elaboración."[1]

El núcleo básico u obligatorio del campo de matemáticas está constituido por la materia de matemáticas organizada para su estudio en las asignaturas siguientes:

-Matemáticas I, (Aritmética, y Algebra).

-Matemáticas II, (Funciones).

-Matemáticas III, (Geometría Euclidiana y Trigonometría).

-Matemáticas IV, (Geometría Analítica).

El núcleo optativo está integrado por las materias de Cálculo Diferencial e Integral y Estadística Descriptiva e Inferencial.

---

[1]Colegio de Bachilleres, programa de matemáticas IV, p. 5.

El material que propongo es un fascículo destinado a los estudiantes de cuarto semestre del Colegio de Bachilleres en su modalidad abierta o escolarizada, la asignatura de Matemáticas IV se imparte en éste semestre del Plan de Estudios y su intención es: "Que el estudiante integre sus aprendizajes y habilidades, previamente desarrolladas, respecto al álgebra y a la geometría, aplicándolos al estudio de la geometría analítica, orientándose fundamentalmente a la asociación de las características geométricas de las figuras cónicas con ciertos modelos algebraicos, con la finalidad de perfeccionar tanto el dominio de dichos modelos como del lenguaje matemático, mejorar su habilidad para plantear y solucionar problemas, así como establecer las bases necesarias que le permitan acceder al estudio del cálculo y la estadística; además de obtener elementos suficientes que le sirvan de apoyo en otras disciplinas y en sus actividades cotidianas."[1]

El programa de la asignatura de Matemáticas IV está formado por dos unidades:

1. La relación entre función lineal, lugar geométrico y sistemas de referencia.
2. Cónicas: Un caso general.

El tema 1.2, "Función lineal como lugar geométrico en diferentes sitemas de referencia", es del que se ocupa esta propuesta y está ubicado en la primara unidad, pero antes de éste se ve el

---

[1]Colegio de Bachilleres, programa de matemáticas IV p.11.

tema "El lugar geométrico en diferentes sitemas de referencia".

Para la elaboración de este fascículo se han considerado las etapas por las que teóricamente pasa un estudiante en su aprendizaje: Inducción, Estructuración, Consolidación y Retroalimentación.

Durante el desarrollo del tema se plantean cuestiones que el estudiante debe resolver antes de seguir adelante, con la intención de que reflexione, investigue y participe en la construcción del conocimiento. La solución en algunos casos se presenta enseguida y en otros no. El estudiante no es entonces pasivo sino que interactúa con el texto.

Guadalupe Xóchitl Chávez Pérez

FUNCION LINEAL COMO LUGAR GEOMETRICO EN DIFERENTES SISTEMAS DE REFERENCIA

México, 1994.

INDICE DEL FASCICULO

PROPOSITO

A lo largo de este fascículo encontrarás problemas de la vida real cuya resolución requiere de razonamientos lógicos, observación, simbologia matemática y abstracción, que te conducirán al planteamiento de una función lineal.

Se trató de usar un lenguaje sencillo, claro y preciso con la intención de que aprendieras de manera fácil que una función lineal se puede expresar de diferentes formas y en diferentes sistemas de referencia.

La finalidad de este trabajo es que al enfrentarte con un problema que para resolverlo requiera de un modelo lineal con dos variables, seas capaz de establecerlo algebraicamente, dar su gráfica e interpretarlo en términos prácticos para algunos valores. Así como dar las bases para aplicaciones más complejas de la función lineal.

INTRODUCCION

Como decía René Descartes:

"Espero que la posteridad me juzgue con benevolencia no sólo por las cosas que he explicado, sino también por las que he omitido intencionadamente para dejar a otros el placer del descubrimiento", en este fascículo también omití algunas cosas para dejarte el placer de descubrirlas; lo que muy probablemente lograrás teniendo una actitud entusiasta, crítica y trabajadora.

Y no olvides que:

"La perseverancia torna los anhelos en realidades. Los escollos sólo sirven para forjar el espíritu". (I.Ch.P.)

La autora

CUESTIONAMIENTO GUIA

En muchas activdades de nuestra vida cotidiana usamos a la función lineal pero no nos percatamos de ello.

Por ejemplo:

Robert viajará la próxima semana a México y necesita cambiar sus ahorros que es un monto de 1800 dólares.

Si el dólar anda alrededor de N$ 3. ¿Cuántos pesos mexicanos le darán?

Aproximadamente le darán 3(1800) = 5400 pesos, en general

$3d = p$ donde p = cantidad de pesos

d = cantidad de dólares.

La correspondencia establecida en el modelo anterior es una función en la que a cada cantidad de dólares le corresponde una cantidad de pesos, por lo que se tiene que p es una función de d.

Y si hubiera tenido que cambiar únicamente 800 dólares, ¿cuántos pesos, aproximadamente, le hubieran dado?____________

¿Qué correspondencia establecerías si tuvieras necesidad de cambiar pesos a dólares?____________

¿Crees que sea de utilidad saber lo anterior?____________

¿Por qué?____________

Investiga a cuánto exactamente equivale un dólar en pesos y di cuánto dinero le darán, exactamente, a Robert.

1. PENDIENTE DE UNA RECTA

Un peso de 10 libras hace que un resorte se alargue 1" (una pulgada), con 20 libras se alarga 2", con 5 libras se alarga 1/2 pulgada y sin carga, el alargamiento del resorte es cero (figura 1).

La siguiente gráfica muestra la información anterior, de la cual observamos que a cada peso le corresponde un alargamiento (y sólo uno) del resorte (p,a), por lo que tenemos una función de p.

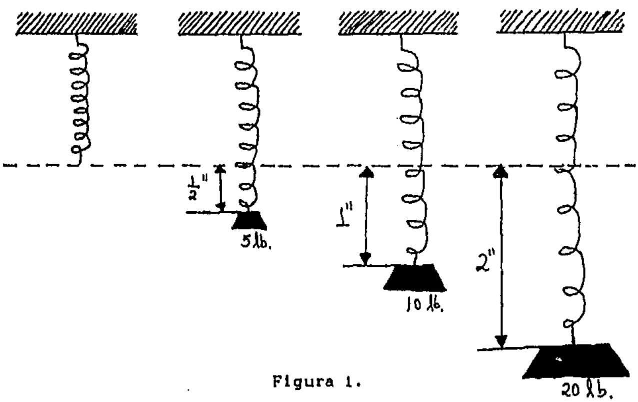


Figura 1.

			(p,a)
Si con el peso	p = 0 se tiene que	a = 0	(0,0)
	p = 5	a = 1/2	(5,1/2)
	p = 10	a = 1	(10,1)
	p = 20	a = 2	(20,2)

Localicemos las coordenadas anteriores en el plano cartesiano.

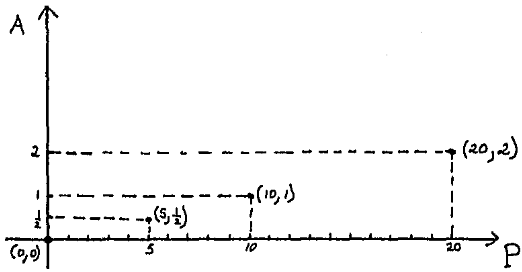


Figura 2.

¿Qué comportamiento siguen los puntos?

Como te puedes dar cuenta los puntos son colineales (es decir, pertenecen a la misma recta).

Ya habíamos mencionado que la relación entre el peso y el alargamiento del resorte es una función y además los puntos son colineales, a este tipo de funciones se les conoce como función lineal.

A continuación calcularemos la razón entre el incremento del alargamiento y el incremento del peso para algunas parejas (p,a).

Para las parejas:

(0,0) y (5,1/2) se tiene que:

el incremento del alargamiento o diferencia entre los alargamientos es $1/2 - 0 = 1/2$

y el incremento del peso o diferencia entre los pesos es

$5 - 0 = 5$.

Simbolicemos por **m** a la razón entre el incremento del alargamiento y el incremento del peso.

Entonces

$$m = \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10}$$

De igual modo, para las parejas:

(5,1/2) y (10,1) se tiene que:

el incremento del alargamiento es 1- 1/2 = 1/2

y el incremento del peso es 10 - 5 = 5

entonces

$$m = \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10}$$

y para:

(10, 1) y (20, 2) se tiene que:

el incremento del alargamiento es 2 - 1 = 1

el incremento del peso es 20 - 10 = 10

entonces

$$m = \frac{1}{10}$$

Pero también para las parejas :

(5,1/2) y (20,2) se tiene que:

el incremento del alargamiento es 2 - 1/2 = 3/2

el incremento del peso es 20 - 5 = 15

Entonces

$$m = \frac{\frac{3}{2}}{15} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

¿Cómo es la razón en cada caso?

Es la misma para todos los casos que hemos hecho, es decir,

$$m = \frac{1}{10}$$

La razón indica el cambio del alargamiento del resorte por cada libra de aumento de la carga.

Condición de función lineal y definición de pendiente de una recta

> Concluimos que para que una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ sea lineal se necesita que la razón entre el incremento de la ordenada y el incremento de la abscisa sea constante. Si esta condición se cumple, la gráfica de esa función es una recta y la razón m recibe el nombre de pendiente de la recta.

2. ANGULO DE INCLINACION DE UNA RECTA

Para cada una de las siguientes gráficas mide con el transportador los ángulos ϕ, β y θ.

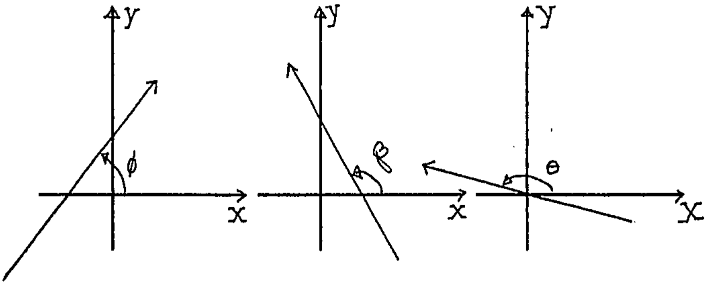


Figura 3.

ϕ es el ángulo de inclinación de l_1,

β es el ángulo de inclinación de l_2,

θ es el ángulo de inclinación de l_3

¿Cuál crees que sea el menor valor que puede tomar un ángulo de inclinación?

¡Efectivamente!, el menor valor es cero grados.

¿Crees que un ángulo de inclinación pueda medir 180° ó más?

Si fuera de 180° la recta coincidiría con el eje X y es el mismo cuando el ángulo de inclinación es 0°. Y si fuera más de 180° coincidiría con la posición de un ángulo comprendido entre 0° y 180°.

Por lo tanto si μ denota el ángulo de inclinación de una recta, entonces:

$$0^\circ \leqslant \mu < 180^\circ$$

Definimos el *ángulo de inclinación* de una recta L, no paralela al eje X, como el ángulo a través del cual debería de hacerse girar el eje X, en sentido contrario a las manecillas del reloj y apoyado sobre su punto de intersección con L, hasta hacer que este eje coincida con ella, cuando L se considera dirigida hacia arriba. Si la recta es paralela al eje X, su ángulo de inclinación es igual a cero.

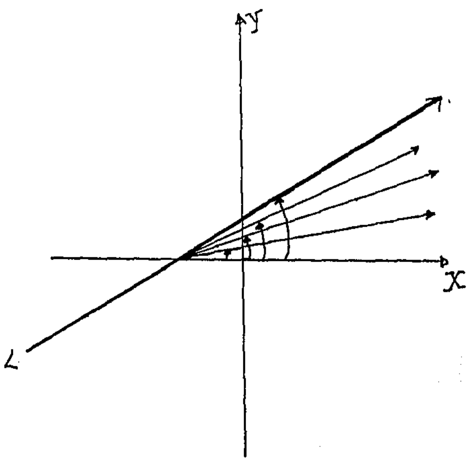


Figura 4.

Completa la siguiente tabla usando la definición de pendiente y tu calculadora.

Puntos que estan sobre la recta	Pendiente m	Angulo de inclinación	tan μ
a) (2,2), (5,5)		$\mu = 45°$	
b) (-4,4), (3,-3)		$\mu = 135°$	
c) (0,-1), (3,5)		$\mu = 63°26'6'$	
d) (0,1), (3,2)		$\mu = 30°$	

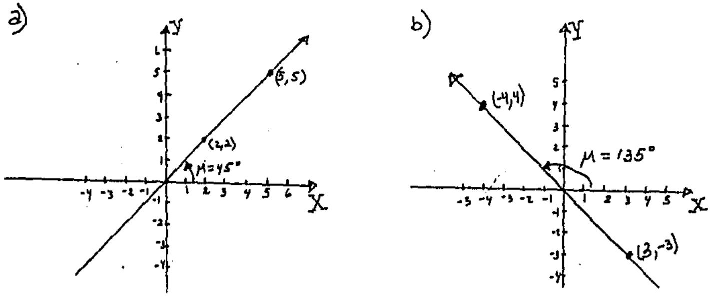


Figura 5.

¿Qué observas para cada par de puntos en cuanto a la pendiente y la tan μ?

Estarás de acuerdo en que m = tan μ para todos los casos vistos aquí.

Pero, ¿Cuál es la pendiente de la recta que determiman los puntos (0,2) y (0,-3)?. ¿Existe dicha pendiente?

¿Cuál es el ángulo de inclinación de esa recta?

Cuando intentaste calcular el valor de la pendiente con la fórmula vista aquí, el denominador es cero y por lo tanto no está definida, esto es, la recta que coincide con el eje Y no tiene pendiente. Sin embargo, el ángulo de inclinación es de 90°

3. FUNCION LINEAL EN FORMA SIMPLIFICADA

Jorge invierte en una caja de ahorro de su trabajo un capital de N$ 6000, el cual le pagará el 20% de <u>interés anual</u> sobre el capital original. El desea encontrar una expresión que relacione el dinero que recibiría si invirtiera su dinero en un tiempo de 0, 1, 2, 3, 4, 5 años. Para lo cual hizo lo siguiente:
Simbolizó al tiempo por "x"; y por f(x) al dinero que recibiría si invirtiera su dinero x años.

Pensó,
si invierto mi dinero 1 año recibiré:
$f(1) = 6000(.20)(1) + 6000 = 1200(1) + 6000 = 7200$ y
si invierto mi dinero 2 años recibiré:
$f(2) = 6000(.20)(2) + 6000 = 1200(2) + 6000 = 2400 + 6000 = 8400$

Análogamente:
$f(3) = 6000(.20)(3) + 6000 = 1200(3) + 6000 = 3600 + 6000 = 9600$
$f(4) = 6000(.20)(4) + 6000 = 1200(4) + 6000 = 4800 + 6000 = 10800$
$f(5) = 6000(.20)(5) + 6000 = 1200(5) + 6000 = 6000 + 6000 = 12000$
Si invierto mi dinero cero años recibiré:
$f(0) = 6000(.20)(0) + 6000 = 1200(0) + 6000 = 0 + 6000 = 6000$
Después de un cierto número de años x el dinero que recibiré será:
$f(x) = 6000(.20)(x) + 6000 = 1200(x) + 6000$

Lo anterior lo podemos ilustrar con la siguiente tabla.

x	f(x) = 1200(x) + 6000	(x,f(x))
0	f(0) = 1200(0) + 6000 = 0 + 6000 = 6000	(0,6000)
1	f(1) = 1200(1) + 6000 = 1200 + 6000 = 7200	(1,7200)
2	f(2) = 1200(2) + 6000 = 2400 + 6000 = 8400	(2,8400)
3	f(3) = 1200(3) + 6000 = 3600 + 6000 = 9600	(3,9600)
4	f(4) = 1200(4) + 6000 = 4800 + 6000 = 10800	(4,10800)
5	f(5) = 1200(5) + 6000 = 6000 + 6000 = 12000	(5,12000)

Los valores de f(x) dependen del valor de x, en consecuencia f(x) es función de x.

Al valor que toma f(x) cuando x = 0 se le llama ordenada al origen y lo denotaremos por b, esto es, f(0) = b; en este caso f(0) = 6000 = b.

Podemos graficar las parejas (x,f(x)) en el plano cartesiano[1].

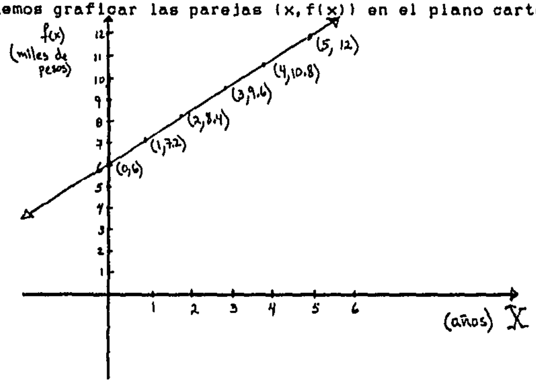


Figura 6.

[1]Es usual elegir la misma unidad de medida en los dos ejes. Sin embargo, en algunos casos conviene utilizar unidades de medida diferentes para los ejes coordenados.

Si te fijas los puntos están sobre una misma recta. Calcula su pendiente.

¿Qué relación hay entre la pendiente que acabas de calcular y la expresión $f(x) = 1200(x) + 6000$?

¡Efectivamente!, el valor que multiplica a la x en $f(x) = 1200(x) + 6000$ es el mismo de la pendiente, es decir,

$$\boxed{f(x) = mx + b}$$

Representa una Función Lineal en Forma Simplificada

Siendo m la pendiente de la recta que pasa por (0,b).

Si el valor de f(x) es y, la expresión anterior toma la forma:

$$\boxed{y = mx + b}$$

Que también representa a la función lineal en Forma Simplificada.

ACTIVIDAD.

Resuelve el siguiente ejercicio.

Hace seis años se compró una casa por N$ 59,000 (nuevos pesos). Este año fue valuada en N$ 95,000. Suponiendo que el valor de la casa está relacionado linealmente con el tiempo, encuentra una fórmula que especifique el valor de la casa para cualquier tiempo después de la fecha de compra.

4. GRAFICA DE UNA FUNCION LINEAL CONOCIENDO SU PENDIENTE Y SU ORDENADA AL ORIGEN

Supongamos que:

a) $f(x) = 2x + 3$ es la función lineal que queremos graficar.

Observemos que en este caso la pendiente $m = 2$ y la ordenada al origen $b = 3$.

Se marca sobre el eje Y el valor de la ordenada al origen, (0,3) (primer punto que marcaremos), a partir de este punto marcamos sobre una recta paralela al eje X una unidad, llegando a un segundo punto auxiliar (1,3), a partir de este último, marcamos sobre una recta paralela al eje Y el valor de la pendiente en este caso 2, llegando a un tercer punto (1,5). Finalmente se traza la recta que pasa por el primer y tercer punto, es decir, por (0,3) y (1,5).

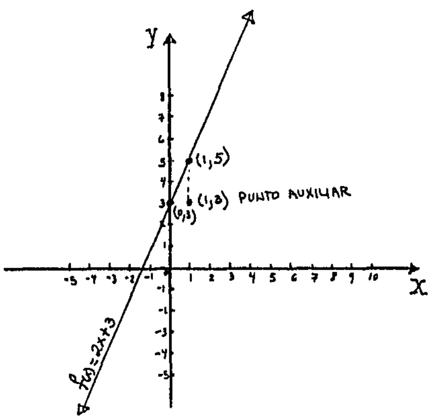


Figura 7.

b) Ahora, si

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 5$$

de la misma manera que en el inciso a) podemos trazar la gráfica con los datos:

Pendiente	Ordenada al origen	Primer punto	Segundo punto	Tercer punto
m = 3/4	b = -5	(0,-5)	(1,-5)	(1,-17/4)

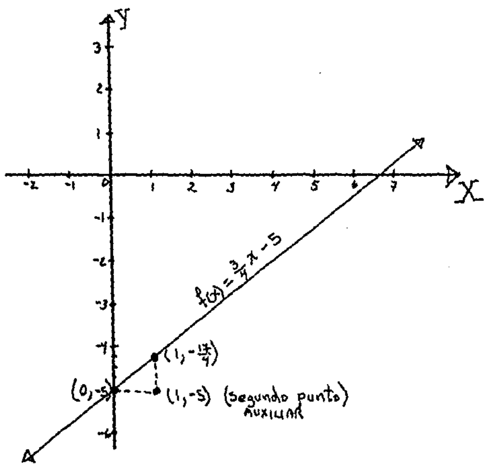


Figura 8.

En este caso la pendiente es 3/4. Si a partir de la ordenada al origen avanzas 4 unidades a la derecha y 3 hacia arriba, el nuevo punto ¿queda sobre la misma recta?

¿Por qué?

c) Otro ejemplo es: $g(x) = -3x + 2/5$

Pendiente	Ordenada al origen	Primer punto	Segundo punto	Tercer punto
m = -3	b = 2/5	(0,2/5)	(1,2/5)	(1,-13/5)

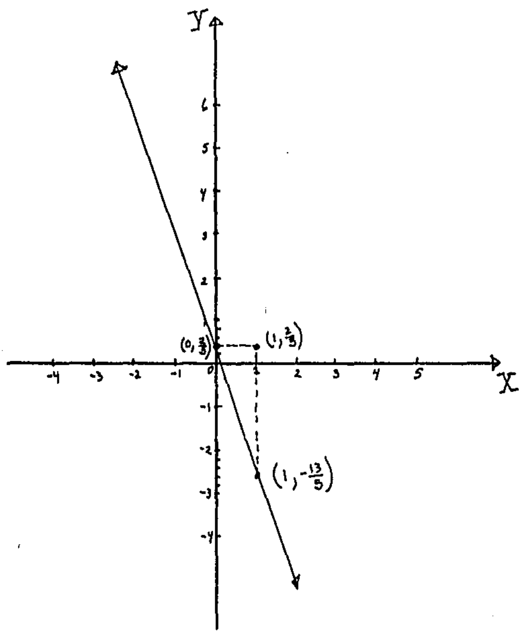


Figura 9.

d) Por último, h(x) = -1/2 x - 7/2

Pendiente	Ordenada al origen	Primer punto	Segundo punto	Tercer punto
m = -1/2	b = -1/2	(0,-7/2)	(1,-7/2)	(1,-4)

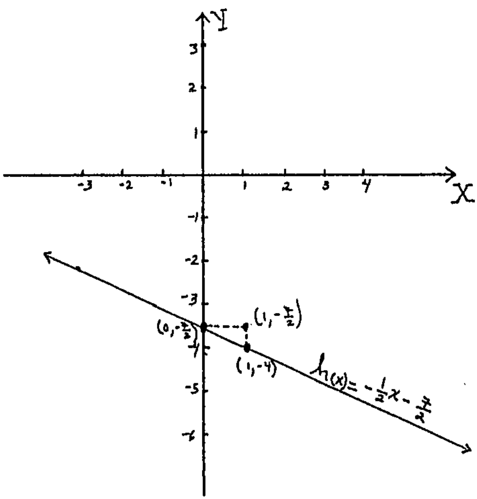


Figura 10.

En este caso la pendiente es -1/2. Si a partir de la ordenada al origen avanzas 2 unidades a la derecha y 1 hacia abajo, el nuevo punto ¿queda sobre la recta?

ACTIVIDAD.

Completa las siguientes tablas y haz la gráfica correspondiente.

a) $f(x) = 3x - 2$

Pendiente	Ordenada al origen	Primer punto	Segundo punto	Tercer punto

b) $g(x) = 7/3\ x + 1$

Pendiente	Ordenada al origen	Primer punto	Segundo punto	Tercer punto

c) $h(x) = -\ 1/2\ x - 1/2$

Pendiente	Ordenada al origen	Primer punto	Segundo punto	Tercer punto

5. DIFERENTES FORMAS DE REPRESENTACION ALGEBRAICA DE UNA FUNCION LINEAL

5.1 Punto-Pendiente

Una tienda de articulos deportivos vende una raqueta de tenis y un "sleeping-bag" cuyo precio de manufactura es de N$ 60 y N$ 80, en N$ 82 y N$ 106 respectivamente.

a) Si la politica de la tienda en la venta de los artículos cuyo precio de manufactura es más de N$ 30 se expresa por medio de una función lineal y se refleja en los precios de estos dos artículos, escribe una ecuación que relacione el precio P (que se grafica en el eje Y) con el costo C (en el eje X).

b) ¿En cuánto venderá la tienda unos tenis para correr cuyo precio de manufactura es de N$ 40?

La situación que se expresa en a) se ilustra en la gráfica:

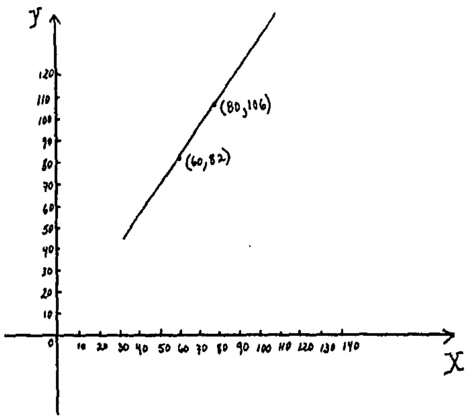


Figura 11.

Para encontrar el precio de los tenis es necesario hallar primero la expresión que relaciona el precio P (que denotaremos por costumbre y) con el costo C (que denotaremos por x).
Con los datos podemos calcular la pendiente de la recta que se forma al unir los puntos. ¿Cómo calcularías el valor de m?
¡Muy bien! $m = 6/5$
La ecuación de la recta en forma simplificada es

$$y = \frac{6}{5}x+b$$

Si sustituimos los valores de x e y de cualesquiera de los dos puntos en la ecuación anterior encontraremos el valor de b, ocupemos el punto (60,82), entonces

$$82 = \frac{6}{5}(60) + b$$

$$82 = 72 + b$$

$$82 - 72 = b$$

$$b = 10$$

Por lo tanto la ecuación de la recta es:

$$y = \frac{6}{5}x + 10$$

Ahora veamos otro camino.

¿Qué condición algebraica debe cumplir un punto variable (x,y) para pertenecer a una recta?

Para que el punto esté sobre la recta (por condición de función lineal) se necesita que:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$ (donde (x_1,y_1) es un punto conocido de la recta)

o bien

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Ecuación Punto-Pendiente de la Recta

Entonces la ecuación que relaciona el precio P con el costo C es:

$$y - 82 = m(x - 60)$$

¿Porqué?

$$\boxed{y - 82 = \frac{6}{5}(x - 60)}$$

Ecuación Punto-pendiente de la recta de costo-precio.

La ecuación anterior de la recta que está escrita en forma Punto-pendiente la podemos pasar a escribir, por ejemplo, en forma simplificada, usando un poco de algebra:

$$y - 82 = \frac{6}{5}x - \frac{360}{5}$$

$$y = \frac{6}{5}x - 72 + 82$$

$$\boxed{y = \frac{6}{5}x + 10}$$

Esta última ecuación es la misma ecuación que se obtuvo al principio con otro procedimiento, con esto mostramos que si tenemos la ecuación escrita en forma Punto-pendiente se puede pasar a la forma simplificada.

¿Se podrá pasar de forma simplificada a la forma Punto-pendiente?

5.2 Simétrica

Un tinaco contiene 2500 litros (lts.) de agua, por medio de una llave se desalojan 20 lts. cada minuto.

Antes de abrir la llave (en el minuto cero) hay 2500 lts. y si la abrieran durante 125 minutos el tinaco se vaciaría (quedarían cero lts.).

¿Qué expresión relaciona el agua que hay en un cierto momento en el tinaco con el tiempo que permaneció abierta la llave?

Si se abre la llave durante un cierto tiempo x y el agua restante en el tinaco la representamos por y, entonces:

$$y = 2500 - 20x$$

es la relación entre el agua existente en el tinaco con el tiempo transcurrido.

$y = -20x + 2500$ Expresión equivalente a la anterior

Su gráfica es:

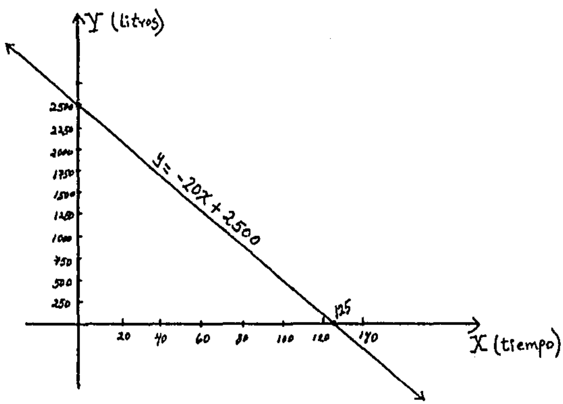


Figura 12.

Observa la gráfica anterior

¿Qué coordenadas tienen los puntos donde la recta intersecta a los ejes coordenados?____________________

Un punto de intersección con el eje X tiene coordenadas de la forma

$$(a,0), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Un punto de intersección con el eje Y tiene coordenadas de la forma

$$(0,b), \quad b \in \mathbb{R}.$$

Definición	A a la llameremos abscisa al origen y a b ordenada al origen.

Luego, para este caso particular, la abscisa al origen es $a = 125$ y la ordenada al origen es $b = 2500$.

Tomemos ahora, un punto P cualquiera de coordenadas (x,y) sobre la recta, trasemos una recta paralela al eje X que pase por P, llamemos C el punto de intersección de esta paralela con el eje Y por lo tanto C tiene coordenadas $(0,y)$.

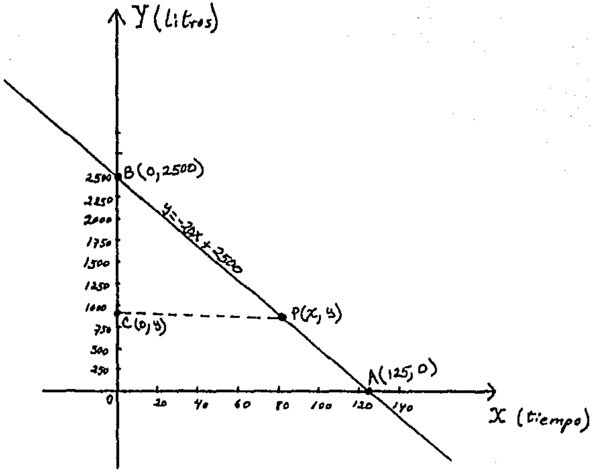


Figura 13.

Como el segmento PC es paralelo a el segmento OA se tiene que el triángulo AOB es semejante al triángulo PCB, por lo tanto

$$\frac{x}{125} = \frac{2500 - y}{2500}$$

$$\frac{x}{125} = \frac{2500}{2500} - \frac{y}{2500}$$

$$\frac{x}{125} = 1 - \frac{y}{125}$$

$$\frac{x}{125} + \frac{y}{2500} = 1$$

esta ecuación corresponde a

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

llamada Forma Simétrica de la Recta.

De la forma simétrica podemos regresar a la simplificada de la siguiente manera.

$$\frac{x}{125} + \frac{y}{2500} = 1$$

$$2500[\frac{x}{125} + \frac{y}{2500}] = 2500[1$$

$$20x + y = 2500$$

$$y = 2500 - 20x$$

$$\boxed{y = -20x + 2500}$$

Si tenemos la ecuación de una recta escrita en forma Punto-pendiente ¿se podrá escribir en forma simétrica?

5.3 General

Sabemos que el agua se congela a 0°C (grados Celsius) ó 32°F (grados Fahrenheit) y que hierve a 100°C ó 212°F. La relación entre las temperaturas en grados centígrados y Fahrenheit se observa en la figura 14.

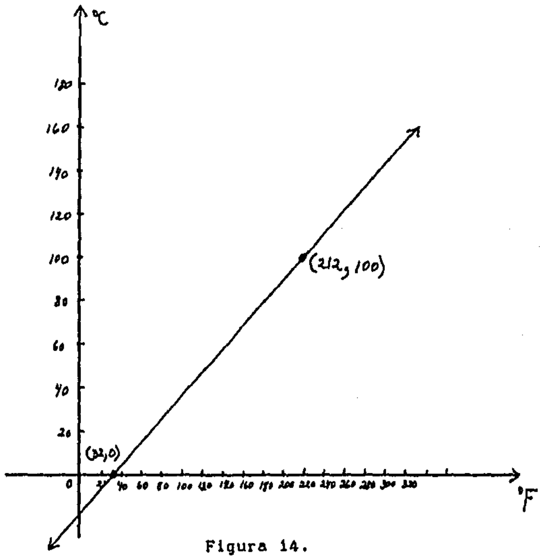


Figura 14.

¿Cómo le harías para calcular el valor en grados centígrados de 68°F?

Para contestar la pregunta anterior necesitamos saber cuál es la ecuación de la recta.

¿Qué pendiente tiene la recta?

La pendiente es

$$\boxed{m = \frac{100 - 0}{212 - 32} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}}$$

y sabemos que la recta pasa por el punto (32,0), usando la forma punto-pendiente la ecuación de la recta es:

$$C - 0 = 5/9(F - 32)$$

o bien, $C = 5/9(F - 32)$

Utiliza esta expresión para completar la igualdad 68°F = _____°C

De la ecuación anterior obtendremos la que llamaremos ecuación general.

$$9C = 5(F - 32)$$

$$9C = 5F - 160$$

$$9C - 5F + 160 = 0$$

$$-5F + 9C + 160 = 0$$

$$\boxed{5F - 9C - 160 = 0}$$

La expresión anterior es de la forma:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

llamada forma General de la Ecuación de una Recta

donde: A, B y C son números reales constantes;

x , y son las variables.

En nuestro problema de las temperaturas las constantes son:

$A = 5$, $B = -9$, $C = -160$ y las variables $x = F$, $y = C$.

Si tenemos la ecuación de la recta escrita en forma general $Ax + By + C = 0$ podemos pasarla a la forma simplificada, simplemente despejando a y, entonces tenemos

$$\boxed{y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}}$$

de la cual concluimos que

$$\boxed{m = -\frac{A}{B} \quad ; \quad b = -\frac{C}{B}.}$$

Asimismo, la ecuación Ax + By + C = 0, se puede escribir en forma simétrica de la siguiente manera:

$$\boxed{Ax + By = -C}$$

$$\boxed{\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = \frac{-C}{-C}}$$

$$\boxed{\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1}$$

de la cual concluios que

$$\boxed{a = -\frac{C}{A} \quad ; \quad b = -\frac{C}{B}}$$

Date cuenta que al escribir la ecuación general en forma simplificada o simétrica, b en ambos casos da como resultado el mismo valor, que era de esperarse.

ACTIVIDAD.

Resuelve los siguientes ejercicios antes de continuar con la lectura del fascículo.

1) Para cada uno de los siguientes incisos halla la ecuación de la recta y grafícala.

a) $m = 3$, $b = 0$

b) $m = -2/3$, $b = -2$

c) $m = 0$, $b = 0$

2) Halla la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente que pasa por los puntos (4,1) y (-2,2).

3) Escribe la ecuación de la recta del ejercicio anterior en forma simplificada, simétrica y general.

4) Los vértices de un triángulo son A(4,3), B(0,5) y C(-4,1). Encuentra la ecuación en forma general de la mediana que pasa por el vértice A

5) Indica cuál es la ecuación de la recta cuyas coordenadas al origen son:

i) $a = 4$, $b = 3$

ii) $a = -2$, $b = 5$

Usando la abscisa y la ordenada al origen grafica las rectas de los incisos i) y ii).

6) ¿Cuál es la abscisa en el origen de $2x + 3y - 4 = 0$?

7) ¿Cuál es la ordenada en el origen de $5x - 3y + 9 = 0$?

Sugerencia para los ejercicios 6 y 7. Pasa la ecuación de la recta a su forma simétrica.

8) Una recta cuya ordenada en el origen es una unidad menor que su abscisa en el origen forma un triángulo con los ejes coordenados cuya área es 6. ¿Cuál es su ecuación?.

9) La abscisa en el origen de una recta es el recíproco de su ordenada en el origen y la recta pasa por el punto (2,-1). Encuentra su ecuación (hay dos soluciones posibles).

6. PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Observa cuidadosamente la siguiente gráfica.

a)

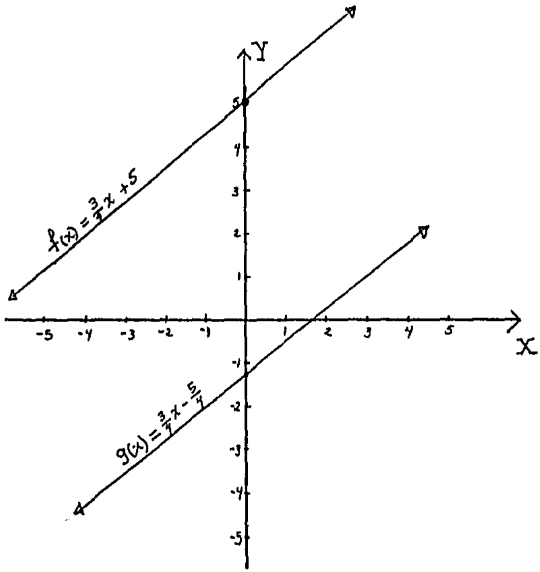


Figura 15.

Como se advierte las rectas son paralelas.

Sea m_1 la pendiente de f(x), m_1 =

Sea m_2 la pendiente de g(x), m_2 =

¿Cómo son estas pendientes?

____

b) Considera las siguientes funciones lineales.

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 3, \qquad g(x) = \frac{2}{3}x + 4$$

Si m_1 es la pendiente de $f(x)$, m_1 =

Si m_2 es la pendiente de $g(x)$, m_2 =

¿Cómo son dichas pendientes?

____

Grafica las rectas.

¿Cómo son las rectas?

¡Efectivamente! las rectas son paralelas.

De los ejercicios anteriores concluimos el siguiente

Teorema	Si dos rectas son paralelas entonces sus pendientes son iguales, y viceversa.

Observa la siguiente gráfica.

c)

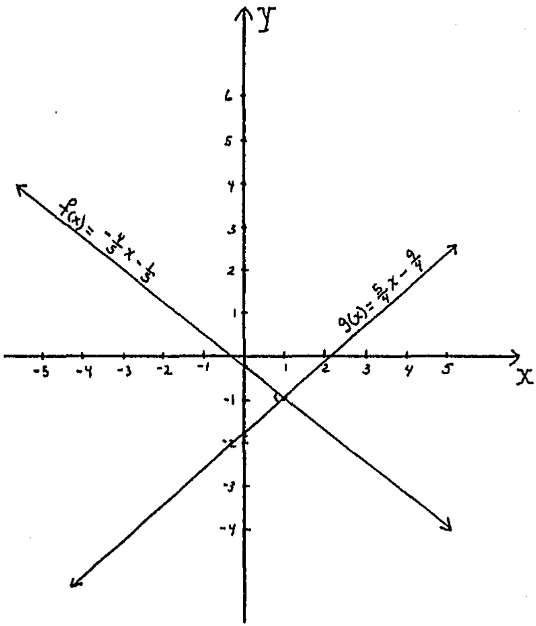


Figura 16.

Las rectas son perpendiculares.

m_1 es la pendiente de f(x), m_1 =

m_2 es la pendiente de g(x), m_2 =

¿A cuánto es igual el producto m_1m_2

____

d) Considera las siguientes funciones lineales.

$$f(x) = -2x - 6, \qquad g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

m_1 es la pendiente de f(x) , m_1 =

m_2 es la pendiente de g(x) , m_2 =

¿A cuánto es igual el producto de las pendientes?

____

Grafica las rectas.

¿Las rectas son, paralelas ó perpendiculares?

____

De los ejercicios anteriores concluimos el siguiente

Teorema

> Si dos rectas son perpendiculares entonces el producto de sus pendientes es −1 o equivalentemente sus pendientes son recíprocas y de signo contrario, y viceversa.

EJEMPLOS.

1) Demuestra que los segmentos que unen los puntos medios de dos de los tres lados del triángulo cuyos vértices son A(4,5), B(-2,1) y C(2,-3) son siempre paralelos al tercer lado.

Demostración.

Vamos a empezar por graficar el triángulo.

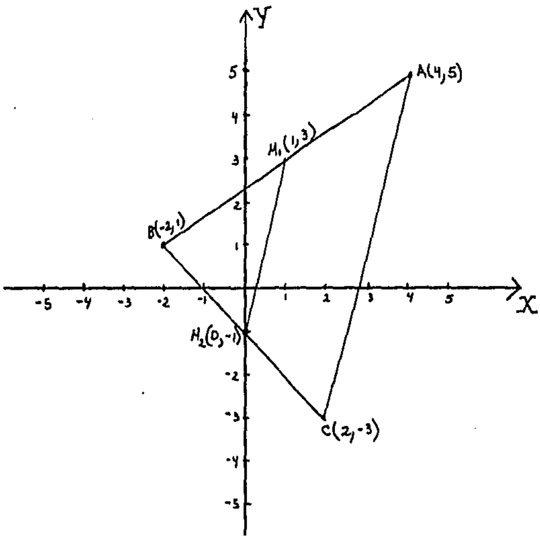


Figura 17.

Seleccionemos dos lados AB y BC.

1') Obtengamos el punto medio del segmento AB,

$$x = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1, \qquad y = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Por lo tanto el punto medio del segmento AB es $M_1(1,3)$.

2°) Ahora obtengamos el punto medio del segmento BC,

$$x = \frac{2 - 2}{2} = \frac{0}{2} = 0, \qquad y = \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Por lo tanto el punto medio del segmento BC es $M_2(0,-1)$.

3°) Ahora, lo que tenemos que demostrar es que el segmento M_1M_2 es paralelo al segmento AC (M_1M_2 AC), mediante la comparación de sus pendientes.

La pendiente de M_1M_2 es

$$m_{M_1M_2} = \frac{-1 - 3}{0 - 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

La pendiente de AC es

$$m_{AC} = \frac{-3 - 5}{2 - 4} = \frac{-8}{-2} = 4$$

De lo anterior tenemos que

$$m_{M_1M_2} = m_{AC}$$

por lo tanto el segmento M_1M_2 es paralelo al lado AC.

Hasta aquí hemos demostrado que el segmento M_1M_2 es paralelo al lado AC, pero aún no concluimos la demostración, ¿Por qué?.

2) Verifica que las diagonales del rombo con vértices A(3,2), B(6,1), C(7,-2) y D(4,-1) son perpendiculares.

Recuerda que una diagonal es el segmento que une dos vértices no consecutivos.

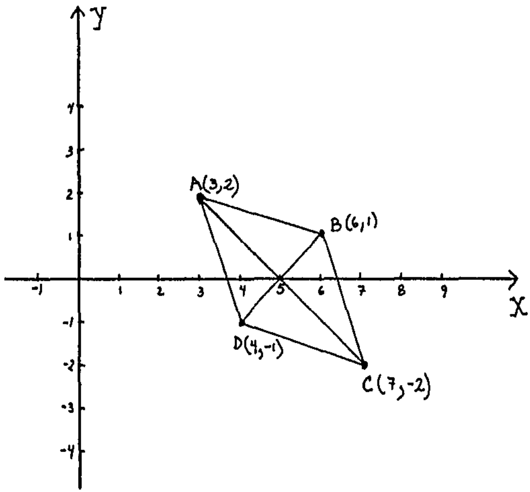


Figura 18.

Como lo que queremos demostrar es que las diagonales del rombo son perpendiculares, esto es BD   AC, entonces calculemos sus pendientes,

$$m_{\overline{BD}} = \frac{-1 - 1}{4 - 6} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$m_{\overline{AC}} = \frac{-2 - 2}{7 - 3} = \frac{-4}{4} = -1$$

Vemos que

$$(m_{\overline{BD}})(m_{\overline{AC}}) = -1$$

es decir, el producto de las pendientes es -1, por lo tanto

$$\overline{BD} \perp \overline{AC}.$$

ACTIVIDAD.

Resuelve los siguientes ejercicios antes de continuar con la lectura del fascículo.

1) Verifica que el cuadrilátero de vértices A(-4,2), B(-1,-2), C(7,4) y D(0,5) es un trapecio.

Sugerencia. Recordar que un trapecio es un cuadrilátero con sólo un par de lados paralelos.

2) Concluye la demostración del problema del ejemplo 1.

3) Usando pendientes muestra que los puntos A(-5,4), B(-1,-4) y C(11,2) son vértices de un triángulo rectángulo.

4) ¿Qué pendiente tiene la mediatriz del segmento que une los siguientes puntos A(-7,4) y B(1,-2).

7. LA FUNCION LINEAL EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

¿Te has preguntado alguna vez qué es un radar, cómo funciona y para qué sirve?

El radar es un dispositivo para detectar la presencia de objetos y determinar la dirección y distancia a que se encuentran, utilizando ondas de radio.

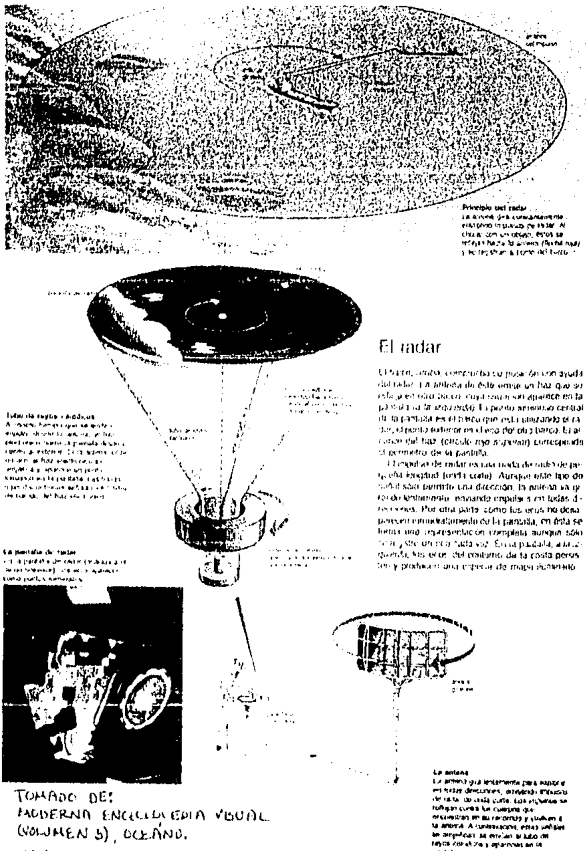
La antena gira constantemente emitiendo impulsos. Al chocar con un objeto, éstos se reflejan hacia la antena, a continuación, estas señales se amplifican y aparecen en la pantalla.

El tiempo transcurrido entre la transmisión y la recepción del impulso permite deducir la distancia a la que se halla el objeto, mientras que la orientación de la antena indica en qué dirección se encuentra.

El radar de impulsos se emplea como ayuda a la navegación en barcos y aviones, en meteorologia y con fines militares para la localización de blancos.

¿Habrá otro tipo de radares?
¿Será importante comprender los datos que aparecen en la pantalla?
Seguramente tu respuesta es que sí. Sí es importante comprender, conocer e interpretar los datos emitidos por la pantalla del radar ya que de éso dependen las acciones a seguir.

Los datos emitidos por la pantalla de un radar estan escritos en lo que llamaremos coordenadas polares (r,θ), donde r es la distancia a la que se encuentra el objeto y θ nos indica en que dirección se encuentra.



TOMADO DE:
MODERNA ENCICLOPEDIA VISUAL
(VOLUMEN 5), OCÉANO.

Figura 19.

Recuerda que en el fascículo 1 estudiaste que entre las coordenadas cartesianas y las polares de un mismo punto del plano se pueden establecer las siguientes relaciones.

$$x = r \cos \mu \qquad (1)$$

$$y = r \operatorname{sen} \mu \qquad (2)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (3)$$

$$\mu = \arctan \frac{y}{x} \qquad (4)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (5)$$

$$\operatorname{sen} \mu = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (6)$$

$$\cos \mu = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (7)$$

La aplicación de estas relaciones permite la transformación de las coordenadas polares en coordenadas rectangulares y viceversa.

ACTIVIDAD.

Usando las relaciones convenientes transforma las siguientes coordenadas a polares o rectangulares según corresponda.

a) $(6, 45^0)$

b) $(8, \frac{\pi}{6} rad)$

c) $(3, -4)$

Ya vimos la función lineal en el sistema de coordenadas rectangulares, a continuación la expresaremos en forma polar.

EJEMPLOS.

1) $y = x$

Como puedes observar se trata de la ecuación de una recta en forma simplificada cuya pendiente es $m = 1$; y ordenada al origen es $b = 0$, por lo tanto la recta pasa por el origen. Su gráfica es la siguiente.

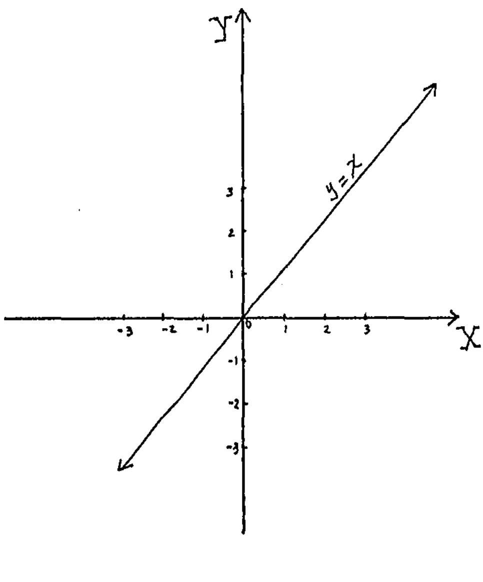


Figura 20.

Para hallar la ecuación en forma polar usaremos las relaciones (1) y (2).

$$y = x$$

$$r \operatorname{sen} \mu = r \cos \mu$$

$$r \operatorname{sen} \mu - r \cos \mu = 0$$

Ecuación Polar $$\boxed{r\,(\operatorname{sen} \mu - \cos \mu) = 0}$$

2) $2x - 4y + 3 = 0$

La ecuación está en forma general $A = 2$, $B = -4$, $C = 3$, para graficarla vamos a calcular su abscisa y ordenada al origen.

Si $x = 0$ tenemos que $2(0) - 4y + 3 = 0$ entonces $y = 3/4$.

Si $y = 0$ tenemos que $2x - 4(0) + 3 = 0$ entonces $x = -3/2$.

Por lo tanto las intersecciones con los ejes son:

$(-3/2,0)$, por lo que la abscisa al origen es $3/2$;

$(0,3/4)$, por lo que la ordenada al origen es $3/4$.

La gráfica de ésta función está representada en la figura 21 y vemos que la recta no pasa por el origen.

En lo sucesivo, al igual que en el ejemplo 1, usaremos las relaciones (1) y (2) para obtener la ecuación en forma polar.

$$2x - 4y + 3 = 0$$

Ecuación Polar $$\boxed{2r \cos \mu - 4r \operatorname{sen} \mu + 3 = 0}$$

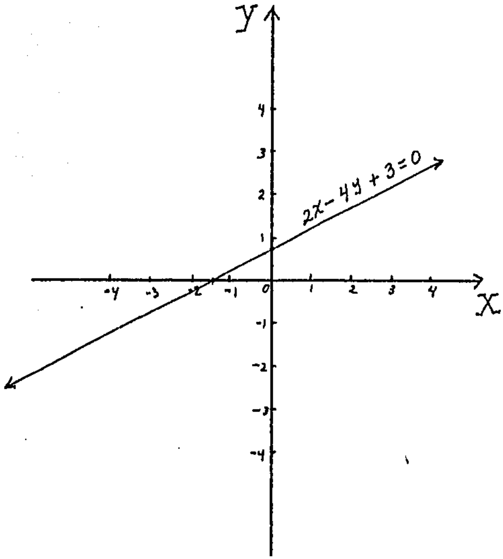


Figura 21.

Podemos escribir a r en función de μ

$$2r\,(\cos\mu - 2sen\,\mu) + 3 = 0$$

$$2r\,(\cos\mu - 2sen\,\mu) = -3$$

$$2r = \frac{-3}{\cos\mu - 2sen\,\mu}$$

$$\boxed{r = \frac{-3}{2(\cos\mu - 2sen\,\mu)}}$$

Los valores de μ que satisfacen la ecuación anterior son de tal forma que el denominador debe ser distinto de cero, es decir,

$$(\cos \mu - 2 sen\, \mu) \neq 0.$$

porque la división entre cero no esta definida.

3) La siguiente ecuación está escrita en forma punto-pendiente.

$$y + 7 = \frac{1}{2}(x - 5)$$

Su forma polar es:

$$\boxed{r\, sen\, \mu + 7 = \frac{1}{2}(r \cos \mu - 5)}$$ Ecuación Polar

Escribiendo a r en función de μ:

$$2(r\, sen\, \mu + 7) = r \cos \mu - 5$$

$$2r\, sen\, \mu + 14 = r \cos \mu - 5$$

$$2r\, sen\, \mu - r \cos \mu = -5 - 14$$

$$r(2\, sen\, \mu - \cos \mu) = -19$$

$$\boxed{r = \frac{-19}{2\, sen\, \mu - \cos \mu}}$$

Los valores de μ que satisfacen a la ecuación anterior son tales que

$$(2\ sen\ \mu - \cos \mu) \neq 0.$$

4) Si tuvieramos Ax + By + C = 0 que es la forma general de la ecuación de una recta en el sistema cartesiano y queremos escribirla en el sistema polar nos queda:

$$Ar \cos \mu + Br\ sen\ \mu + C = 0$$

$$r(A \cos \mu + B\ sen\ \mu) = -C$$

$$\boxed{r = \frac{-C}{A \cos \mu + B\ sen\ \mu}}$$

Usando directamente esta fórmula escribe la ecuación del ejemplo 2 en forma polar.

ACTIVIDAD.

Transforma las siguientes funciones lineales a su forma polar y escribe a r en función de μ.

1) $y = 3x + 3$

2) $2x - 3y - 12 = 0$

3) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$

8. GRAFICA DE UNA RECTA EN FORMA POLAR

Para graficar $r(\text{sen}\ \mu - \cos\mu) = 0$ se tiene que encontrar los valores (r,μ) que satisfacen la ecuación.

Se tienen dos casos:

1) Si $r = 0$, entonces tenemos que $(r,\mu) = (0,\mu)$ es solución de la ecuación para cualquier μ. Por lo tanto la recta pasa por el polo.

2) Si r es distinto de 0, entonces los valores que satisfacen a

$$r(\text{sen}\ \mu - \cos\mu) = 0$$

independientemente del valor de r, son los mismos valores que satisfacen a

$$\text{sen}\ \mu - \cos\mu = 0$$

$$\text{sen}\ \mu = \cos\mu$$

$$\frac{\text{sen}\ \mu}{\cos\mu} = 1$$

$$\tan\mu = 1$$

Los valores que satisfacen a $\tan\mu = 1$ son de la forma

$$\mu = \frac{\pi}{4} + n\pi,\quad n\in Z.$$

La siguiente tabla nos muestra algunas coordenadas que satisfacen la ecuación $r(\operatorname{sen}\mu - \cos\mu) = 0$.

	r	μ	(r,μ)
caso 1)	0	μ	$(0,\mu)$
caso 2)	2	$\frac{\pi}{4}$	$(2,\frac{\pi}{4})$
	3	$\frac{5}{4}\pi$	$(3,\frac{5}{4}\pi)$

Por lo tanto, la gráfica es:

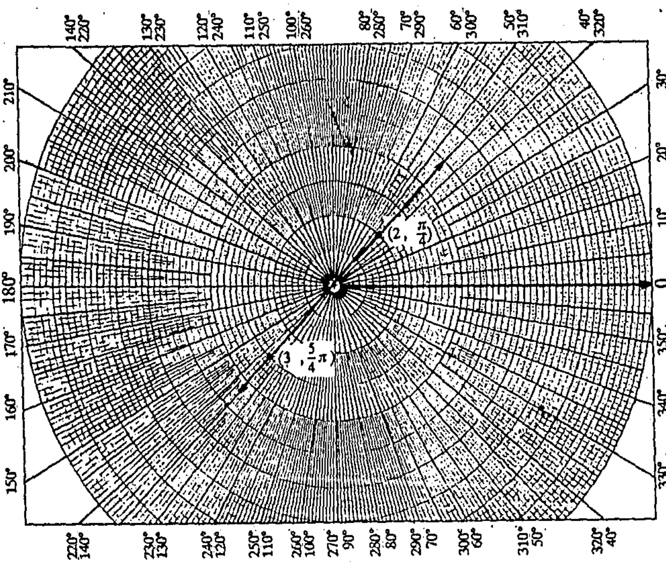


Figura 22.

En la figura 22 se advierte que la función pasa por el polo y es simétrica respecto de él.

"Se acostumbra considerar a las coordenadas polares como cantidades con signo. El ángulo vectorial, como en trigonometría, se define como positivo o negativo, según se mida en el sentido contrario al que giran las manecillas del reloj o en el sentido en que giran las manecillas del reloj a partir del eje polar. La coordenada r se define como positiva, si se mide desde el polo a lo largo del lado terminal de μ y negativa, si se mide a lo largo del lado terminal extendido al otro lado del polo"[4].

2) Grafica la ecuación polar

$$r = \frac{5}{2\cos\mu + sen\,\mu}$$

donde el denominador es distinto de cero, porque la división entre cero no está definida.

Para comprender el comportamiento de la gráfica, primero tabularemos:

μ	sen μ	cos μ	2cos μ	r	(r,μ)
0	0	1	2	$\frac{5}{2}$	$(\frac{5}{2},0)$
$\frac{\pi}{6}$	0.5	0.86	1.73	1.26	$(1.26,\frac{\pi}{6})$
$\frac{\pi}{3}$	0.86	0.5	1	2.68	$(2.68,\frac{\pi}{3})$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	0	5	$(5,\frac{\pi}{2})$
$\frac{3}{4}\pi$	0.70	-0.70	-1.40	-7.14	$(-7.14,\frac{3\pi}{4})$

[4]Fuller, Geometría Analítica, p.193.

Grafiquemos las coordenadas (r,μ).

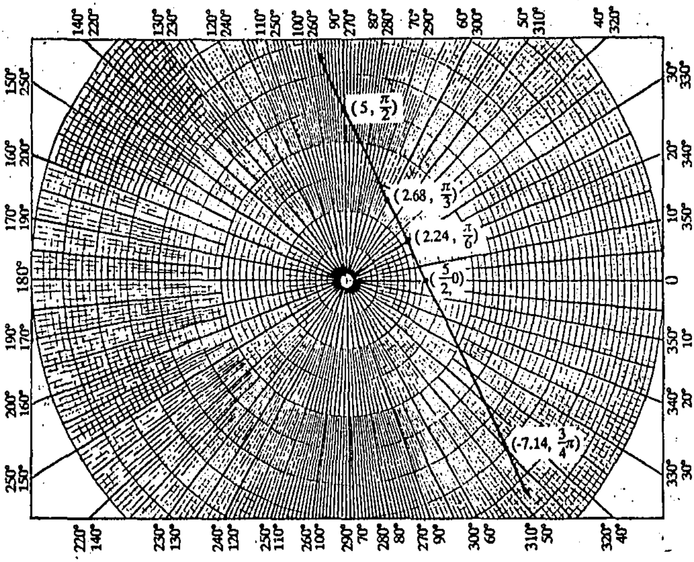
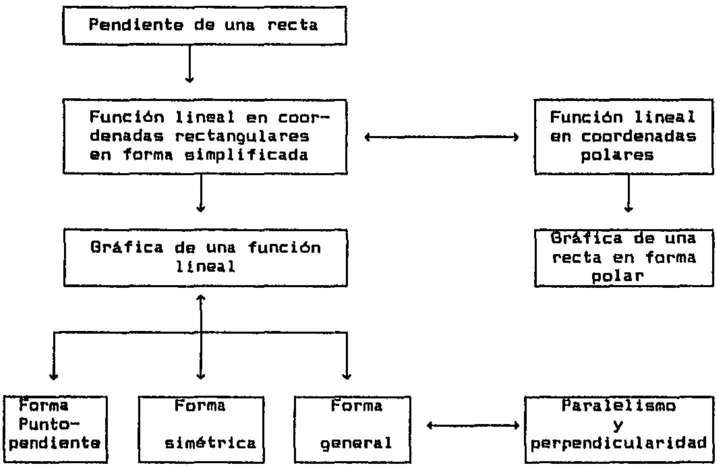


Figura 23.

Observa que es una recta que no pasa por el polo.

RECAPITULACIÓN

Analiza cuidadosamente el siguiente esquema:



¿Explica por qué las flechas y rectángulos se distribuyen de esta forma?____

¿Detectaste la relación entre todos los temas?____________________

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACION

A continuación te presentamos algunos problemas que te permitirán reafirmar tus conocimientos, si tienes alguna duda para encontrar la solución consulta a tu profesor o asesor.

1) El teatro "Del Sur" tiene 500 asientos y exhibe la obra "Papito Querido", el boleto cuesta N$ 30. ¿Qué ingreso obtendrían si un día lograran vender

a) todos los boletos?

b) 200 boletos?

c) x boletos?

2) Merry desea hornear un pastel a 135°C y el horno que va a utilizar marca sólo grados Fahrenheit. ¿En cuántos grados debe graduar el horno?

3) Un fabricante de bicicletas decide que el precio de venta por bicicleta sea el triple del costo del material que se usó para fabricarla más N$ 20 de impuestos.

a) Expresa esta situación por medio de una función y su gráfica.

b) Si el costo de material de una bicicleta "AMX" es de N$700. ¿Cuál será su precio de venta?

c) Si el costo de material de una bicicleta "Benotto" es de N$1000 ¿Cuál será su precio de venta?

d) Transforma la función del inciso a) a su forma simétrica.

e) ¿Qué interpretación práctica tienen la abscisa y la ordenada al origen?

4) Los vértices de un triángulo son A(5,4), B(-3,2) y C(2,-6). Obtén las ecuaciones de las rectas alturas en su forma general.

5) Escribe las ecuaciones de las rectas alturas del ejercicio anterior en forma polar.

6) Grafica las siguientes funciones lineales:

a) $r \, sen \, \mu = 3(r \cos \mu) + 3$

b) $2(r \cos \mu) - 3(r \, sen \, \mu) - 12 = 0$

c) $\dfrac{r \, sen \, \mu}{4} - \dfrac{r \cos \mu}{2} = 1$

LINEAMIENTOS DE AUTOEVALUACION

A continuación te presentamos las respuestas a las actividades de consolidación, compáralas con las tuyas. Si encuentras alguna diferencia revisa el procedimiento que seguiste para encontrar la solución.

1)

a) (500)30 = N$ 15000

b) (200)30 = N$ 6000

c) $I(x) = 30x$ $\qquad I$ = ingresos

2) 275°F

3)

a) $p = 3c + 20$

b) N$ 2120

c) N$ 3020

d) $\dfrac{c}{-\frac{20}{3}} + \dfrac{p}{20} = 1$

e) Que la abscisa al origen sea de −20/3 significa que el costo de material de una bicicleta de determinada marca es un valor negativo lo cual en la práctica no tiene sentido.

Que la ordenada al origen sea de N$ 20 querría decir que el costo de material de una bicicleta es de N$ 0, lo que en la práctica no sucede.

4)

$5x - 8y + 7 = 0$

$3x + 10y - 11 = 0$

$4x + y - 2 = 0$

5)

$$r = \frac{-7}{5\cos\mu - 8\,sen\,\mu}$$

$$r = \frac{11}{3\cos\mu + 10\,sen\,\mu}$$

$$r = \frac{2}{sen\,\mu + 4\cos\mu}$$

6) Sugerencia: Escribe a r en función de μ

a) $r = \dfrac{3}{sen\,\mu - 3\cos\mu}$

b) $r = \dfrac{12}{2\cos\mu - 3\,sen\,\mu}$

c) $r(2\,sen\,\mu - 4\cos\mu) = 8$

ACTIVIDADES DE GENERALIZACION

- Te recomiendo visitar el museo de las ciencias "UNIVERSUM" ubicado en la zona cultural de Ciudad Universitaria. En donde encontrarás diferentes apoyos para la comprensión de las matemáticas y de otras ciencias.

- También te sugiero que, en cuanto puedas, veas la película "CON GANAS DE TRIUNFAR", la cual te apoyará en la adquisición de una actitud crítica y reflexiva.

BIBLIOGRAFIA DEL FASCICULO

-Barnett Raymond A., (1992). Precálculo: Algebra, Geometría Analítica y trigonometría. Traducc. Habacuc Pérez Castillo. México, LIMUSA, 781 p.

-Caballero C. Arquímides, Martínez C. Lorenzo, Bernardez G. Jesús, (1987). Geometría Analítica. México, ESINGE, 303 p.

-Fuller G., Tarwater D., (1988). Geometría Analítica. México, Addison-Wesley Iberoamericana,382 p.

-Guzmán Herrera Abelardo, (1987). Cien Problemas de Geometría Analítica. México, Publicaciones Cultural, 143 p.

-Hockett Shirley O. y Sternstein Martin, (1985). Cálculo por Objetivos y Aplicaciones. Traducc. Andres Sestier Bouclier. México, CECSA, 671 p.

-Larson Roland E. y Hostetler Robert P., (1986). Cálculo y Geometría Analítica. Traducc. Fco. Javier Chinea Trujillo, Fco. Guil Guerrero. México, McGraw-Hill, 959 p.

-Santamaría Borja Armando, (1991). Geometría Analítica. México, UACH, (Volumen 1) 171 p.

-Steen Frederick H., Ballou Donald H., (1987). Geometría Analítica. Traducc. Enrique Daltabuit Godas. México, Publicaciones Cultural, 260 p.

-Swokowski Earl W., (1998). Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México, Iberoamericana.

IV. CONTEXTO MATEMATICO

Una función de un conjunto S en otro conjunto T es una "regla" que asocia a cada elemento s en S un elemento *único* t en T.

Sin exageración, ésta es probablemente la noción más importante y universal presente siempre a través de todas las matemáticas. Es difícil que sea algo nuevo para cualquiera de nosotros, pues hemos estado considerando funciones desde los primeros días de nuestra educación en matemáticas.

Escribamos la definición de función lineal, son las funciones que nos interesan puesto que en el fascículo (capítulo III) hablamos de ellas.

La definición de función lineal es:

"Sean V y V' espacios vectoriales sobre el campo K. Una **función lineal**

$$f: V \to V'$$

es una función que satisfase las siguientes dos propiedades.

1. Para cualesquiera elementos u y v en V, se tiene

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

2. Para todo c en K y todo v en V, se tiene

$$f(cv) = cf(v)."[1]$$

---

[1]Lang, Algebra Lineal, pag. 91.

En particular, si

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

las funciones lineales son líneas rectas que pasan por el origen.

Por otro lado en la primera parte del fascículo manejamos, como convencionalmente se maneja a nivel bachillerato, la definición de función lineal como una recta que no necesariamente pasa por el origen, es decir, una función lineal tiene una ecuación de la forma y = mx + b, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen. Si b es cero tenemos que las dos definiciones dicen prácticamente lo mismo, pero cuando b es distinto de cero parecería que hay contradicción porque no pasa por el origen, en efecto, formalmente no debería llamarse función lineal pero convensionalmente como ya dije se hace así, en virtud de que sus gráficas son líneas rectas. Pero además el comportamiento de las rectas que no pasan por el origen es semejante a las que pasan por él, es decir, están en subespacios afines y podemos hacer una "traslación" de un subespacio a otro.

También hay que aclarar que en el problema del resorte que se le pone un peso (p) y se alarga una cierta medida (a), ley de Hooke (pag. 37) en la cual hay una variación directamente proporcional, únicamente utilizamos cuatro datos y después concluimos haciendo referencia a una función de los reales a los reales, es decir, de una función discreta pasamos a una función continua sin aclarar la interpretación en el fenómeno. Lo que sucede es que si consideramos un valor cualquiera[1] sobre el eje p (peso) y calculamos cuánto se alarga el resorte con dicho peso, vemos que el punto (p,a) está sobre la recta que pasa por los puntos iniciales, uno de ellos (10,1) en el plano PA. Esto lo podemos hacer de la siguiente forma: tomemos por ejemplo un peso de 7 libras; nos da un alargamiento y el cual determinamos con la relación directamente proporcional

$$\frac{10}{1} = \frac{7}{y} \rightarrow 10y = 7 \rightarrow y = \frac{7}{10}$$

Es decir, si ponemos un peso de 7 libras el resorte se alarga 7/10 de pulgada, el punto correspondiente es (7, 7/10). Lo mismo podemos hacer para cualquier otro valor, pero recordemos que no debe ser un peso exageradamente grande porque llegará el momento en que el resorte ya no se pueda alargar más, es decir, se llegó a su límite elástico. En resumen, dado $p \in [0,l] \subset \mathbb{R}$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a = \frac{1}{10}p$$

Ahora veamos que para todo (p,a) que pertenece a la recta, p "va a dar a" a, es decir,

$$a = \frac{1}{10}p$$

[1]La posibilidad de que p tome un valor real: $p \in [0,l]$, donde l es el límite elástico del resorte.

Por ejemplo, tomemos el punto (15,3/2) que está sobre la recta, sucede que

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{1}{10}\right)(15)$$

Otra propiedad importante que debemos observar es que la razón entre el incremento del alargamiento y el incremento del peso para otras parejas (7,7/10) y (5,1/2)

$$m = \frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{10}}{5 - 7} = \frac{\frac{5 - 7}{10}}{-2} = \frac{-\frac{2}{10}}{-2} = \frac{-2}{-20} = \frac{1}{10}$$

es siempre la misma.

En relación a la forma de graficar una función lineal, en el fascículo dimos una alternativa a partir de su pendiente y ordenada al origen, pero podemos hacer referencia a otra, por ejemplo, a partir de encontrar dos de sus puntos, para lo cual elegimos dos valores distintos de x, y encontramos los respectivos valores de y.

Un caso particular de la alternativa anterior es hallar dónde se intersecta con los ejes coordenados, esto es, determinar los puntos (x,0) y (0,y).

V. SUGERENCIAS METODOLOGICAS PARA EL MANEJO DEL FASCICULO

El material ha sido diseñado para ser usado por los estudiantes del sistema de enseñanza abierto, porque se puede llevar a cabo el estudio del texto de manera individual u organizando circulos de estudio y si el alumno tiene alguna duda puede recurrir al asesor de contenido de matemáticas. Aunque, podria usarse en el sistema escolarizado de las siguientes maneras.

La propuesta de este fasciculo, considera el trabajo individual y colectivo para la construcción del conocimiento. El trabajo individual consistirá en el estudio del material y la realización de las actividades indicadas dentro de él, el trabajo colectivo consistirá en el intecambio de experiencias, discusión de la lectura del fasciculo, análisis de los temas y elaboración de los productos especificos tanto en equipos como de grupo. Asimismo, el profesor retroalimentará al inicio de cada sesión.

El profesor podria trabajar el material poniendo a los alumnos en equipos los cuales analizarán el texto deteniéndose para contestar a las preguntas o llevar a cabo las actividades indicadas, antes de continuar con la lectura del mismo. Una vez analizado el texto por equipos, pasarian a una plenaria para dejar claro los conceptos que se manejan en él.

Se recomienda que el profesor elabore problemas parecidos a los planteados aqui, para enriquecer la discusión del curso y de esa manera podrá darse cuenta si han entendido o no los alumnos.

Si en alguna ocasión el profesor prefiere utilizar el método expositivo podría emplear el material como guía para la conducción de su exposición indicando a los alumnos las actividades que se sugieren en el fascículo.

También hay quienes pueden manejarlo con ayuda de calculadoras o computadoras, pero ésto lo podrán hacer sólo personas que tienen otros conocimientos.

Tanto los estudiantes del Sistema de Enseñanza Abierta como los del Escolarizado pueden y deben utilizar la bibliografía dada, para un mayor aprendizaje y profundización de los contenidos del fascículo.

CONCLUSIONES

Una ventaja por las que los profesores debemos elaborar nuestro material de estudio es que lo podemos adecuar al tipo de estudiante al que lo dirigimos, porque mientras mayor sea la relación que el alumno vea entre aquello que estudia y su vida (presente, pasada y/o futura), mayor será su empeño y dedicación al estudio, y los aprendizajes que logre serán más profundos y duraderos.

Otra parte importante es que como hay que investigar, revisar varios libros, articulos, estudiar, etc., confirmamos nuestros conocimientos y aprendemos más sobre el tema, en pocas palabras nos actualizamos.

La situación económica que vivimos los profesores de todos los niveles especialmente los de nivel medio superior (bachillerato) nos obliga a tener dos o tres incluso hasta cuatro trabajos. Sin embargo realizando un esfuerzo se elaboran dichos materiales.

La validación del fasciculo que propongo se verá a lo largo de varios cursos semestrales en los cuales se implemente, viendo cómo repercute en los estudiantes.

Las opiniones de los alumnos vertidas en entrevistas o cuestionarios serán también de utilidad para juzgar la pertinencia de la propuesta, por supuesto los resultados de sus exámenes serán un indicador más de la eficacia del material, aunque ellos son influidos por varios factores.

Los profesores debemos, para desarrollar cualquier tema no empezar por la axiomatización que son conceptos que engloban todo un conocimiento, sino precisamente, para comprender un tema se propone utilizar las lineas orientadoras de la práctica educativa.

Ahora se reconoce la inadecuación del aprendizaje memoristico como único enfoque del aprendizaje y se admite que es deseable buscar una signifación a todo lo que se aprenda. Desde luego, para que la memoria opere de un modo eficientte son importantes la repetición y el repaso, pero se retiene mejor el conocimiento si se almacena como parte de una red de otros conocimientos.

Del modelo pedagógico del Colegio de Bachilleres se desprenden las lineas de la práctica educativa como elementos que fundamentan la orientación disciplinaria y didáctica de las actividades académicas. Con base en estas lineas, el modelo didáctico del Colegio retoma la propuesta de aprendizaje bajo un enfoque constructivista, donde se considera que para aprender el sujeto atraviesa por cuatro fases: Inducción, Estructuración, Consolidación y Retroalimentación.

Las lineas mencionadas y las cuatro fases que delimitan el modelo didáctico del Colegio, son las bases teóricas que fundamentan el diseño de los materiales didácticos (fascículos).

Por lo señalado anteriormente considero que es necesario complementar los libros de texto con materiales como el que se propone.

BIBLIOGRAFIA

-Barnett Raymond A., (1992). Precálculo: Algebra, Geometría Analítica y trigonometría. Traducc. Habacuc Pérez Castillo. México, LIMUSA, 781 p.

-Caballero C. Arquímides, Martínez C. Lorenzo, Bernardez G. Jesús, (1987). Geometría Analítica. México, ESINGE, 303 p.

-Cárdenas Humberto, Lluis Emilio, Raggi Francisco, Tomás Francisco, (1986). Algebra Superior. México, Trillas, 323 p.

-Colegio de Bachilleres, (1975). Decreto de Creación y Estatuto General. México, 34 p.

-Colegio de Bachilleres, (1992). La Concepción Pedagógica del Colegio de Bachilleres. México, 20 p.

-Colegio de Bachilleres, (1993). Material de Apoyo para la Elaboración de Fascículos. México, 36 p.

-Colegio de Bachilleres, (1993). Modelo Educativo del Colegio de Bachilleres. México, 52 p.

-Colegio de Bachilleres, (1991). Modelo para la actualización de Programas. México, 19 p.

-Colegio de Bachilleres, (1994). Programa de la asignatura de Matemáticas IV. México, 45 p.

-Fuller G., Tarwater D., (1988). Geometría Analítica. México, Addison-Wesley Iberoamericana, 382 p.

-Guzmán Herrera Abelardo, (1987). Cien Problemas de Geometría Analítica. México, Publicaciones Cultural, 143 p.

-Hockett Shirley O. y Sternstein Martin, (1985). Cálculo por Objetivos y Aplicaciones. Traducc. Andres Sestier Bouclier. México, CECSA, 671 p.

-Lang Serge, (1976). Algebra Lineal. Traducc. Miguel Lara Aparicio. México, Fondo Educativo Interamericcano, 400 p.

-Larson Roland E. y Hostetler Robert P., (1986). Cálculo y Geometría Analítica. Traducc. Fco. Javier Chinea Trujillo, Fco. Guil Guerrero. México, McGraw-Hill, 959 p.

-Moderna Enciclopedia Visual, (1983). (Volumen 5). España, Océano.

-Santamaría Borja Armando, (1991). Geometría Analítica. México, UACH, (Volumen 1) 171 p.

-Steen Frederick H., Ballou Donald H., (1987). Geometría Analítica. Traducc. Enrique Daltabuit Godas. México, Publicaciones Cultural, 260 p.

-Swokowski Earl W., (1998). Algebra y Trigonometría con Geometría Analitica. Traducc. María Trigueros, Balmaceda Pérez, Carlos Muñoz Abogado, Leticia Quintero de Pinto y Sergio Vargas Galindo.Segunda Edición. México, Iberoamericana, 644 p.

-Tippens Paul E., (1992). Física Conceptos y Aplicación. Traducc. Eduardo Ramirez Grycuk, Andrés Soler Aguilar. Segunda Edición. México, McGraw-Hill, 926 p.