34
126J

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LOS VALORES EN LA FRONTERA DE FUNCIONES ARMONICAS Y ANALITICAS VECTORIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

JORGE RIVERA NORIEGA

México, D.F. 1994

ii

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) RIVERA NORIEGA JORGE

con número de cuenta 8732345-2 con el Título:
"Sobre los valores en la frontera de funciones armónicas y analíticas vectoriales"

Otorgamos nuestro Voto Aprobatorio y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Matemático

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
Doctor	Salvador	Pérez Esteva	
Director de Tesis Doctor	Carlos	Bosch Giral	Carlos Bosch Giral
M. en C.	Angel Manuel	Carrillo Hoyo	
M. en C.	Martha	Guzmán Partida	
Suplente M. en C.	Armando	García Martínez	
Suplente			

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) RIVERA NORIEGA JORGE

con número de cuenta 8732345-2 con el Título: "Sobre los valores en la frontera de funciones armónicas y analíticas vectoriales"

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Matemático

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
Doctor	Salvador	Pérez Esteva	
Director de Tesis Doctor	Carlos	Bosch Giral	
M. en C.	Angel Manuel	Carrillo Hoyo	
M. en C.	Martha	Guzmán Partida	
Suplente M. en C.	Armando	García Martínez	
Suplente			

A mis padres

Introducción

Después de enunciar resultados preliminares que serán usados en la tesis, se inicia el estudio de la llamada teoría escalar (por tratarse de funciones con valores en $\mathbf{R}$ o en $\mathbf{C}$) de espacios de Hardy, y de esta teoría gran parte se dedica a las Integrales de Poisson y Poisson-Stieltjes. Se mencionan algunos resultados con el objeto de compararlos con los correspondientes de la teoría vectorial (en la que se tratan con funciones en un espacio de Banach). Esta comparación es el primer objetivo de este trabajo.

Los capítulos 3 y 4 se refieren a ciertos tópicos de la teoría vectorial para funciones armónicas y analíticas que pertenecen a los análogos vectoriales de los espacios de Hardy.

El primer tópico se refiere a que la existencia de valores en la frontera de funciones en $\mathbf{h}^p(X)$ sea independiente de la $p \in [1,\infty]$:

Es equivalente para un espacio de Banach X:

a) poseer la propiedad de Radon-Nikodým,

b) que toda $u \in \mathbf{h}^1(X)$ tenga valores en la frontera angulares casi dondequiera,

c) que toda $u \in \mathbf{h}^\infty(X)$ tenga valores en la frontera radiales casi dondequiera.

Para funciones en $\mathbf{H}^p(X)$ la independencia de la $p \in [0,\infty]$ se da gracias a la "versión vectorial" del teorema de F. y R. Nevanlinna:

Si X es un espacio de Banach y $f \in \mathrm{N}(X)$, entonces existen $g \in \mathbf{H}^\infty(X)$ y $h \in \mathbf{H}^\infty$ tales que

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

para toda $z \in \mathbf{D}$.

Luego de ésto, se muestra que para $u \in \mathrm{h}^1(X)$ la existencia de límites radiales según la topología débil de X implica la existencia de límites angulares según la norma de X.

El siguiente tópico es revisar que la hipótesis de que X sea separable implica la existencia casi dondequiera de de límites angulares de $u \in \mathrm{h}^1(X^*)$ según la topología débil* de X^*. La demostración que se da aquí es una demostración operacional. Esto mismo se hace para los valores en la frontera débil* de $f \in \mathbf{H}^\infty(\mathbf{X}^*)$.

La médula de este trabajo es al artículo de Wolfgang Hensgen "Some remarks on boundary values of vector-valued harmonic and analytic functions" aunque se apoya también en los artículos de Blasco, Bukhvalov y Danilevich y en textos tanto de la teoría escalar como de la vectorial.

Contenido

Capítulo 1

Preliminares

Además de dar la notación básica usada a través del texto, se incluyen en este capítulo los resultados del análisis complejo, del análisis funcional y de las medidas vectoriales que, sin demostración, se enuncian por la importancia que tienen para el desarrollo del presente trabajo. Se dan las referencias donde se pueden hallar las demostraciones correspondientes.

1.1 Notación y algunos ejemplos

A continuación se enlista algo de notación que será usada a lo largo del texto:

- $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$,
- $\mathbf{D}_r = \{z \in \mathbf{C} : |z| < r\}$,
- $\mathbf{T}$ denotará $\partial\mathrm{D}$,
- $\mathrm{D}_r(z_0) = \{z \in \mathrm{C} : |z - z_0| < r\}$,
- $\mathbf{H}(A) = \{f : A \longrightarrow \mathrm{C} : f \text{ es holomorfa}\}$,
- $(\mathbf{T}, \mathcal{B}, \lambda)$ es el espacio de medida que consiste de $\mathbf{T}$ con su σ–álgebra de Borel $\mathcal{B}$ y la medida de Lebesgue normalizada $d\lambda = dx/2\pi$, que denotaremos también por $dt = d\theta = d\lambda$.

Sea f una función real definida sobre un espacio topológico $\mathcal{T}$. f es **semicontinua inferiormente** sobre $\mathcal{T}$ si para todo $\alpha \in \mathbf{R}$, $f^{-1}(\alpha,\infty)$ es abierto; f es **semicontinua superiormente** sobre $\mathcal{T}$ si para todo $\alpha \in \mathbf{R}$, $f^{-1}(-\infty,\alpha)$ es abierto.

La siguiente equivalencia la enunciamos sin demostrarla. Si $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbf{R}$ entonces f es semicontinua inferiormente sobre $\mathcal{T}$ si y sólo si para toda $t_0 \in \mathcal{T}$

$$\limsup_{t\to t_0} f(t) \leq f(t_0);$$

f es semicontinua superiormente sobre $\mathcal{T}$ si y sólo si para toda $t_0 \in \mathcal{T}$

$$\liminf_{t\to t_0} f(t) \geq f(t_0).$$

1.1.1 Definición. *Sea Ω una región de $\mathbf{C}$. Sea u una función definida en Ω. Decimos que u es una* **función subarmónica** *si u cumple las siguientes propiedades:*

a) $-\infty \leq u(z) < \infty$ para toda $z \in \Omega$,

b) u es semicontinua superiormente en Ω,

c) Para $z \in \Omega$, siempre que $\mathbf{D}_r(z) \subset \Omega$ se tiene

$$u(z) \leq \int_{\mathbf{T}} u(z + re^{i\theta})\, d\theta. \ \square$$

Inmediato de la definición anterior es la siguiente

1.1.2 Proposición. *Si u es continua en Ω entonces u es subarmónica en Ω si y sólo si para toda $z \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $\mathbf{D}_r(z) \subset \Omega$ y, si $\rho \leq r$ entonces*

$$u(z) \leq \int_{\mathbf{T}} u(z + \rho e^{i\theta})\, d\theta. \ \square$$

A continuación enunciamos algunas equivalencias para funciones subarmónicas y unos ejemplos que serán usados en la siguiente sección.

1.1.3 Proposición. *Si Ω es una región acotada de $\mathbf{C}$ y u es continua en Ω, entonces u es subarmónica si y sólo si para cada región $\Omega' \subset \Omega$ tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ y cada función v armónica en Ω' y continua en $\overline{\Omega'}$ tal que $u(z) \leq v(z)$ para $z \in \Omega'$, se cunple también que $u(z) \leq v(z)$ para $z \in \Omega'$*

Demostración.

$\Longleftarrow$) Sean $z_0 \in \Omega$ y $\rho > 0$ tales que $\mathbf{D}_\rho(z_0) \subset \Omega$. Entonces, para $\rho_0 < \rho$

$$\begin{aligned} u(z_0) \leq v(z_0) &= \int_{\mathbf{T}} v(z_0 + \rho_0 e^{i\theta})\, d\theta \\ &= \int_{\mathbf{T}} u(z_0 + \rho_0 e^{i\theta})\, d\theta. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$) Supóngase que existe $\Omega' \subset \Omega$ tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ y existe v armónica tal que $u(z) \leq v(z)$ para $z \in \partial\Omega'$ pero $u(z_0) > v(z_0)$ para algún $z_0 \in \Omega'$. Sea E el conjunto de puntos de $\overline{\Omega'}$ donde la función $h(z) = u(z) - v(z)$ alcanza su máximo, llámese M. Como $h(z) \leq 0$ para $z \in \partial\Omega'$ entonces $E \subset \Omega'$. Además E es cerrado porque h es continua. Por lo tanto existe $z_0 \in E$ tal que $\mathbf{D}_\rho(z_0) \cap E^c \neq \emptyset$ para toda $\rho > 0$. Entonces existe una sucesión $\{\rho_n\}$ que tiende a 0 y tal que $\mathbf{D}_\rho(z_0) \subset \Omega'$ pero $\partial\mathbf{D}_{\rho_n}(z_0) \cap E^c \neq \emptyset$. Entonces $h(z) \leq M$ en $\partial\mathbf{D}_{\rho_n}(z_0)$ y $h(z) < M$ en un abierto de $\partial\mathbf{D}_{\rho_n}(z_0)$ y por lo tanto en un subarco. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}} u(z_0 + \rho_n e^{i\theta})\, d\theta - v(z_0) &= \int_{\mathbf{T}} h(z_0 + \rho_n e^{i\theta}) \\ &< M = h(z_0) \\ &= u(z_0) - v(z_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(z_0) > \int_{\mathbf{T}} u(z_0 + \rho_n e^{i\theta})\, d\theta$$

lo cual es una contradicción. □

1.1.4 Proposición. *Si $u(z)$ es continua y subarmónica en $\mathbf{D}$ y definimos para $0 \leq r < 1$*

$$m(r) = \int_{\mathbf{T}} u(re^{i\theta})\, d\theta$$

entonces esta función es creciente.

Demostración.

Sea $r_1 < r_2$. Si $h(z)$ es la función continua en $\overline{\mathbf{D}}_{r_2}$ que coincide con $u(z)$ en $\partial\overline{\mathbf{D}}_{r_2}$ y que es armónica en $\mathbf{D}_{r_2}$ entonces $u(z) \leq h(z)$ en $\mathbf{D}_{r_2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} m(r_1) &\leq \int_{\mathbf{T}} h(r_1 e^{i\theta})\, d\theta \\ &= h(0) \\ &= \int_{\mathbf{T}} h(r_2 e^{i\theta})\, d\theta \\ &= m(r_2). \ \Box \end{aligned}$$

- **Ejemplos.**

a) Si f es analítica en $\mathbf{D}$ y $p > 0$ entonces $|f|^p$ es subarmónica. Para demostrar ésto, tenemos que verificar lo enunciado en la Proposición 1.1.2. Sea $z_0 \in \mathbf{D}$. Si $f(z_0) = 0$ se concluye inmediatamente; supongamos pues que $f(z_0) \neq 0$. Entonces una rama de $(f(z))^p$ es analítica en cierta vecindad de z_0, así que

$$(f(z))^p = \int_{\mathbf{T}} (f(z_0 + \rho e^{i\theta}))^p\, d\theta$$

para ρ suficientemente pequeña [1, p. 134]. Tomando módulos tenemos

$$|f(z)|^p \leq \int_{\mathbf{T}} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|^p\, d\theta$$

para ρ pequeña.

b) Si $u(z)$ es armónica en $\mathbf{D}$ y $p \geq 1$ entonces $|u(z)|^p$ es subarmónica en $\mathbf{D}$. De nuevo nos auxiliamos de la Proposición 1.1.2.

Si $p = 1$, por la propiedad del valor medio, [1, pp. 165-166], que nos dice que

$$u(z) = \int_{\mathbf{T}} u(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta,$$

tenemos que

$$|u(z)| \leq \int_{\mathbf{T}} |u(z_0 + \rho e^{i\theta})|\, d\theta$$

para ρ suficientemente pequeña.

Si $p > 1$ y q es el conjugado de p, es decir, el número tal que $1/p + 1/q = 1$, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} |u(z_0)| &\leq \int_{\mathbf{T}} |u(z_0) + \rho e^{i\theta})|\, d\theta \\ &= \|u\|_1 \\ &\leq \|u\|_p \|1\|_q \\ &= \left(\int_{\mathbf{T}} |u(z_0) + \rho e^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p}; \end{aligned}$$

por lo tanto

$$|u(z_0)|^p \leq \int_{\mathbf{T}} |u(z_0) + \rho e^{i\theta})|^p \, d\theta.$$

Entonces $|u(z)|^p$ es subarmónica.

c) Si $f(z)$ es analítica, entonces $\log^+ |f(z)|$, donde

$$\log^+ t = \begin{cases} \log t & t \geq 1 \\ 0 & 0 \leq t < 1, \end{cases}$$

es subarmónica. Si $|f(z_0)| \leq 1$ entonces $\log^+ |f(z_0)| = 0$ y se concluye; supóngase entonces que $|f(z_0)| > 1$. Entonces existe una vecindad de z_0 tal que $f(z) > 1$ para toda z dentro de esa vecindad y por lo tanto $\log^+ |f(z)| = \log |f(z)|$. Esta última función es armónica y entonces procedemos como en el inciso anterior para obtener

$$|\log^+(z_0)|^p \leq \int_{\mathbf{T}} |\log^+(z_0) + \rho e^{i\theta})|^p \, d\theta.$$

1.2 Espacios de Hardy

Si $f \in \mathbf{H}(\mathbf{D})$ se define

$$\mathrm{M}_p(f, r) = \left(\int_{\mathbf{T}} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} \tag{1}$$

para $0 < p < \infty$;

$$\mathrm{M}_0(f, r) = \exp\left(\int_{\mathbf{T}} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta \right)$$

y finalmente

$$\mathbf{M}_\infty(f,r) = \sup_{\theta\in\mathbf{T}} |f(re^{i\theta})|.$$

Teniendo en cuenta lo definido anteriormente, para $f \in \mathbf{H}(\mathbf{D})$, $\mathbf{M}_p(f,r)$ es creciente como función de r.

Demostremos esta afirmación. Para $0 \leq p < \infty$, sabemos que $\log^+|f|$ y $|f|^p$ son funciones subarmónicas. Aplicamos la Proposición 1.1.4 y se tiene que $\mathbf{M}_p(f,r)$ es creciente. Para $\mathbf{M}_\infty(f,r)$ por el teorema del módulo máximo tenemos que, si $r_1 < r_2$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\infty(f,r_1) &= \sup_{\theta\in\mathbf{T}} |f(r_1e^{i\theta})| \\ &\leq \sup_{\theta\in\mathbf{T}} |f(r_2e^{i\theta})| \\ &= \mathbf{M}_\infty(f,r_2) \end{aligned}$$

Si u es una función real armónica definida sobre $\mathbf{D}$, definimos

$$\mathbf{M}_p(u,r) = \left(\int_\mathbf{T} |u(re^{i\theta})|^p \, d\theta\right)^{1/p}$$

para $1 \leq p < \infty$; y finalmente

$$\mathbf{M}_\infty(u,r) = \sup_{\theta\in\mathbf{T}} |u(re^{i\theta})|.$$

Para u como antes, $\mathbf{M}_p(u,r)$ es creciente como función de r, y la demostración también se basa en que $|u|^p$ es subarmónica y en la Proposición 1.1.4.

Para $f \in \mathbf{H}(\mathbf{D})$ y $0 \leq p \leq \infty$ se define

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{r\in[0,1)} \mathbf{M}_p(f,r).$$

De igual modo, para $u : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ armónica en $\mathbf{D}$ y $1 \leq p \leq \infty$ se define

$$\|u\|_{h_p} = \sup_{r\in[0,1)} \mathbf{M}_p(u,r).$$

Nótese que como $\mathbf{M}_p(u,r)$ es creciente, podríamos sustituir $\sup_{r\in[0,1)}$ por $\lim_{r\to 1}$.

1.2.1 Definición. *El* **espacio de Hardy $\mathbf{H^p}$ de funciones analíticas** *se define como*

$$\mathbf{H^p} = \{f \in \mathbf{H}(\mathbf{D}) : \|f\|_{H_p} < \infty\},$$

para $0 < p \leq \infty$.

Se define también la **clase de Nevanlinna N** *como*

$$\mathbf{N} = \{f \in \mathbf{H}(\mathbf{D}) : \|f\|_{H_0} < \infty\}.$$

En alguna ocasión será útil ver a la clase de Nevanlinna como el espacio $\mathbf{H^0}$.

El **espacio de Hardy $\mathbf{h^p}$ de funciones armónicas** *se define como*

$$\mathbf{h^p} = \{u : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R} : u \textit{ es armónica y } \|f\|_{h_p} < \infty\}.$$

para $1 \leq p \leq \infty$. □

De la definición anterior y con un lema que enunciamos a continuación, se tiene lo siguiente:

a) Si $1 \leq q \leq p \leq \infty$ entonces $\mathbf{h^p} \subset \mathbf{h^q}$

b) Si $0 < q \leq p \leq \infty$ entonces $\mathbf{H^p} \subset \mathbf{H^q} \subset \mathbf{N}$

1.2.2 Lema. *Si* $0 < r < s < \infty$ *y* λ *es una* **medida de probabilidad,** *en donde la medida del total es 1, entonces*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s.$$

De aquí que $\mathbf{L}^s(\lambda) \subseteq \mathbf{L}^r(\lambda)$.

Demostración.

Considerando una función medible $f \in \mathbf{L}^s(\lambda)$, tenemos que $f^r \in \mathbf{L}^{s/r}(\lambda)$ y aplicamos la desigualdad de Hölder para obtener

$$\begin{aligned}
\|f\|_r^r &= \int_{\mathbf{T}} |f|^r \, d\lambda \\
&\leq \left(\int_{\mathbf{T}} |f^r|^{s/r} \, d\lambda\right)^{r/s} \\
&= \left(\left(\int_{\mathbf{T}} |f|^s \, d\lambda\right)^{1/s}\right)^r \\
&= \|f\|_s^r. \ \square
\end{aligned}$$

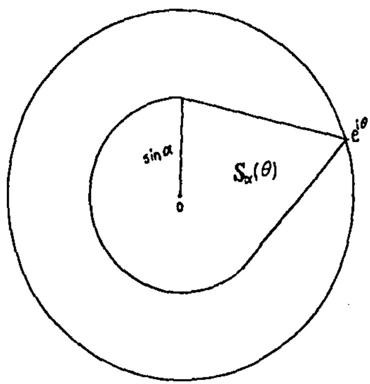
Para $f \in \mathbf{H}^p$, $0 \leq p \leq \infty$, el **límite radial de** f, que se denotará por f^*, es una función $f^* : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{C}$ dada por

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}),$$

cuando este límite existe.

También se hablará de **límite no tangencial** o **límite angular** cuando z tienda a $e^{i\theta}$ dentro de la región de Stolz que se define a continuación.

1.2.3 Definición. *La* **región de Stolz** *de ángulo* $\alpha < \pi/2$ *en el punto* $e^{i\theta} \in \mathbf{T}$, *denotada por* $\mathbf{S}_\alpha(\theta)$, *es el interior del mínimo convexo que contiene a* $e^{i\theta}$ *y* $\overline{\mathbf{D}}_{\sin\alpha}$. □



Una propiedad importante es que dada $\alpha < \pi/2$ existe $c > 0$ tal que para todo $re^{i\theta} \in \mathbf{S}_\alpha(\theta_0)$

$$|\theta - \theta_0| < c|1 - r|$$

[15, p. 15].

A continuación definimos el núcleo de Poisson y demostramos algunas de sus propiedades.

1.2.4 Definición. *El* **núcleo de Poisson** *es la función* $\mathbf{P} : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ *definida,para* $re^{i\theta} \in \mathbf{D}$ *como*

$$\mathbf{P}(r,\theta) = \mathbf{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right). \ \square$$

Nos será útil tener algunas otras representaciones del núcleo de Poisson.

1.2.5 Proposición. *Para* $re^{i\theta} \in \mathbf{D}$*, tenemos*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(r,\theta) &= \mathbf{Re}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}(re^{i\theta})^n\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta} \\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.
\end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} &= \frac{(1+re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} \\
&= \frac{1-re^{-i\theta}+re^{i\theta}-r^2}{1-re^{-i\theta}-re^{i\theta}+r^2} \\
&= \frac{1-r^2+2ir\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}.
\end{aligned}$$

De aquí que

$$\mathbf{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} &= -1+\frac{2}{1-re^{i\theta}} \\
&= -1+2\left[\frac{1}{1-z}\right],
\end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio $z = re^{i\theta}$. Desarrollamos en serie a $f(z) = 1/(1-z)$ alrededor del 0 y obtenemos

$$f(z) = 1+z+z^2+z^3+\cdots$$

porque

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$$

y entonces $f^{(n)}(0) = n!$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} &= -1+2[1+z+z^2+z^3+\cdots] \\ &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(re^{i\theta})^n\end{aligned}$$

y de aquí es inmediata la primera igualdad.

Finalmente, reescribiendo esta última serie tenemos

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}(re^{i\theta})^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta}. \square$$

Una propiedad importante del núcleo de Poisson es la que nos asegura que es **núcleo de sumabilidad o identidad aproximada.**

1.2.6 Proposición. *El núcleo de Poisson es una* **identidad aproximada**, *es decir, cumple con las siguientes propiedades:*

(S1)

$$\int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r,t)\,dt = 1.$$

(S2)

$$\int_{\mathbf{T}} |\mathbf{P}(r,t)|\,dt \leq M = 1.$$

(S3) Para $\delta < \pi$ se cumple que

$$\lim_{r\to 1}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |\mathbf{P}(r,t)|\,dt = 0.$$

Demostración. (S1):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r,t)\,dt &= \int_{\mathbf{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt}\,dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{T}} r^{|k|}e^{ikt}\,dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\int_{\mathbf{T}} e^{ikt}\,dt.\end{aligned}$$

Por otro lado, por la periodicidad de e^{ikt} tenemos

$$\int_{\mathbf{T}} e^{ikt}\,dt = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto se obtiene (S1).

(S2): Es inmediato, notando que $\mathbf{P}(r,t) \geq 0$.

(S3): De hecho, para $0 < \delta < |t| < \pi$, como $\cos\delta$ es un mínimo de la función $h(r) = 1 - 2r\cos\delta + r^2$,

$$\begin{aligned} \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} &\leq \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2} \\ &\leq \frac{1-r^2}{1-\cos^2\delta} \end{aligned}$$

y esta última cantidad tiende a cero cuando r tiende a 1. Entonces también se cumple que

$$\lim_{r\to 1} \sup_{\delta<|t|<\pi} \mathbf{P}(r,t) = 0. \ \square$$

1.3 Medidas complejas

La mayor parte de esta sección está tomada de [17] en el capítulo que dedica a las medidas complejas.

A lo largo de esta sección, $\mathcal{M}$ denotará una σ-álgebra sobre X, un conjunto no vacío y μ será una medida asignada a este conjunto.

Una **medida compleja** es una función compleja μ definida para $E \in \mathcal{M}$ como

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

para cualquier partición $\{E_i\} \subset \mathcal{M}$ de E. Nótese que si μ es medida compleja, entonces es σ-aditiva en el sentido usual.

La **variación total** de μ es una función positiva $|\mu|$ definida para $E \in \mathcal{M}$ como

$$|\mu|(E) = \sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{E\in\pi} |\mu(E)|,$$

donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de las particiones numerables de E.

Teniendo en cuenta lo definido anteriormente, no es difícil ver que la variación $|\mu|$ de una medida compleja sobre $\mathcal{M}$ es una medida positiva finita sobre $\mathcal{M}$ [17, Teorema 6.2].

Es fácil ver también que

$$|\mu(E)| \leq |\mu|(E) \leq |\mu|(X),$$

por lo que toda medida compleja resulta ser una función acotada.

Una **σ-álgebra de Borel** sobre un espacio topológico es la σ-álgebra generada por sus abiertos. A los elementos de esta σ-álgebra se les llama borelianos. Una medida definida sobre los borelianos de cierto espacio topológico de Hausdorff localmente compacto se llama **medida de Borel**.

Si tenemos una medida real μ definida sobre el espacio de medida $(X, \mathcal{M})$, decimos que μ es una **medida regular** si para todo $E \in \mathcal{M}$ se cumple que

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\{\mu(V) : E \subset V, \ \ V \text{ abierto}\} \\ &= \sup\{\mu(K) : K \subset E, \ \ K \text{ compacto}\} \end{aligned}$$

Decimos que una medida compleja μ es **regular** cuando $|\mu|$ lo es.

Sea μ una medida positiva sobre la σ-álgebra $\mathcal{M}$, y sea λ una medida (positiva o compleja) sobre $\mathcal{M}$. λ es **absolutamente continua** con respecto a μ si $\lambda(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$; ésto lo denotaremos por

$$\lambda \ll \mu.$$

Si λ_1 *y* λ_2 son medidas (positivas o complejas) sobre $\mathcal{M}$ y existen conjuntos A, B tales que $A \cup B = X$ y

$$\begin{aligned} \lambda_1(E) = 0 \quad &\text{si} \quad E \cap A = \emptyset \\ \lambda_2(E) = 0 \quad &\text{si} \quad E \cap B = \emptyset \end{aligned}$$

entonces λ_1 y λ_2 son **mutuamente singulares**, y se escribirá como

$$\lambda_1 \perp \lambda_2.$$

1.3.1 Teorema (Descomposición de Lebesgue). *Sean μ y λ medidas positivas acotadas definidas sobre la σ-álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X. Entonces existe un único par de medidas λ_c y λ_s definidas sobre $\mathcal{M}$ tales que*

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_c + \lambda_s \\ \lambda_c &\ll \mu \\ \lambda_s &\perp \mu. \square \end{aligned}$$

1.3.2 Teorema (Radon-Nikodým). *Con las hipótesis del teorema anterior, existe una única (μ-casi dondequiera) $h \in \mathrm{L}^1(\mu)$ tal que, para $E \in \mathcal{M}$*

$$\lambda_c(E) = \int_E h\, d\mu. \square$$

Estos dos teoremas siguen siendo válidos si sólo se pide que μ sea σ-finita y λ es una medida compleja. Una demostración aparece en [17, Teorema 6.9].

Por medio de este último teorema podremos definir una integral respecto a una medida compleja. Antes, deremos un teorema que aclara el modo en que se hará ésto [17, Teorema 6.12].

1.3.3 Teorema (Representación polar de una medida). *Sea μ una medida compleja. Entonces existe una función compleja medible h tal que $|h(x)| = 1$ para toda x y tal que*

$$d\mu = h\, d|\mu|. \square$$

La integral de una función medible f respecto a una medida compleja μ se define como

$$\int f\, d\mu = \int fh\, d|\mu|.$$

Ahora enunciamos el teorema de representación que nos habla sobre la dualidad de los espacios de Lebesgue $\mathrm{L}^p(\mu)$; reiteramos que la μ hace referencia de la medida que se le asigna a X con la σ-álgebra $\mathcal{M}$.

1.3.4 Teorema (de representación). *Sean $1 \leq p < \infty$, μ una medida positiva σ-finita sobre $(X, \mathcal{M})$ y Φ un funcional lineal continuo sobre $\mathrm{L}^p(\mu)$. Entonces existe* *una única $g \in \mathbf{L}^q(\mu)$, donde q es el conjugado de p, tal que se define como*

$$\Phi(f) = \int_X fg\,d\mu$$

para $f \in \mathbf{L}^p(\mu)$. Además, $\|\Phi\| = \|g\|_q$. $\square$

Este teorema de representación nos asegura que $(\mathbf{L}^p(\mu))^* = \mathbf{L}^q(\mu)$ para las p y q adecuadas. El Teorema de representación de Riesz nos da una representación para los funcionales lineales y continuos en otros espacios. Para obtener este teorema introducimos más notación y definiciones.

El **soporte** de una función $f : X \longrightarrow \mathbf{C}$ es

$$\operatorname{sop}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}},$$

es decir, la cerradura del conjunto de puntos en donde la función no se anula.

El conjunto de funciones de X a $\mathbf{C}$ con soporte compacto se denota por $C_c(X)$.

Si X es de Hausdorff, $f : X \longrightarrow \mathbf{C}$ se dice que se **anula en infinito** si para toda $\varepsilon > 0$ existe $K \subset X$ compacto tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para toda $x \notin K$.

El conjunto de funciones de X a $\mathbf{C}$ que se anulan en infinito se denota por $C_0(X)$. La siguiente proposición se demuestra en [17, Teoremas 3.16 y 3.17].

1.3.5 Proposición.

i) $C_c(X) \subset C_0(X)$

ii) Si X es compacto $C_c(X) = C_0(X)$. En este caso se denotará a cualquiera de los dos por $C(X)$.

iii) $C_c(X)$ es un subespacio denso de $C_0(X)$. $\square$

Hacemos notar que el mapeo $f \mapsto \int f\,d\mu$ es un funcional lineal acotado sobre $C_0(X)$.

Estamos ahora listos para enunciar el teorema de representación de Riesz [17, Teorema 6.11].

1.3.6 Teorema (de representación de Riesz). *A cada funcional lineal acotado Φ sobre $C_0(X)$ le corresponde una única medida compleja regular de Borel μ tal que*

$$\Phi(f) = \int_X f\, d\mu$$

para $f \in C_0(X)$. Además

$$\|\Phi\| = |\mu|(X). \ \square$$

Por lo visto en iii) de la proposición anterior, el teorema de representación de Riesz sigue siendo válido para funcionales lineales acotados sobre $C_c(X)$. Además, para los propósitos de este texto, $X = \mathbf{T}$, por lo que siempre se trabajará con $C(X)$.

1.4 Resultados del análisis funcional

Un **espacio vectorial topológico** (X, τ) es un espacio vectorial X con una topología asignada τ que hace que las operaciones vectoriales de suma y producto por escalares sean continuas.

Dado un espacio vectorial X, el **espacio dual de X** es el espacio vectorial, que se denota por X^*, formado por las funcionales lineales continuos $\Lambda : X \longrightarrow \mathbf{K}$, donde $\mathbf{K}$ es el campo escalar. El espacio dual de un espacio de Banach X es en sí un espacio normado con norma

$$\|\Lambda\| = \sup_{x \neq 0} \left| \Lambda\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right|.$$

Por otro lado, se adoptará la siguiente notación:

$$\langle x, x^* \rangle = x^*(x)$$

para $x \in X$, $x^* \in X^*$.

Una familia $\mathcal{F} \subset X^*$ se dice que **separa puntos de** X si siempre que $a \neq b$ existe $x^* \in \mathcal{F}$ tal que $\langle a, x^* \rangle \neq \langle b, x^* \rangle$. Obviamente, si $\langle a, x^* \rangle = \langle b, x^* \rangle$ para toda $x^* \in \mathcal{F}$ entonces $\langle a - b, x^* \rangle = 0$ para toda $x^* \in \mathcal{F}$, por lo que $a - b = 0$, es decir, $a = b$.

En todo espacio vectorial topológico **localmente convexo**, es decir, que tiene una base formada por convexos, se cumple que su dual separa puntos de él [16, pp.59-60]. Si X un espacio de Banach, X^* separa puntos de X pues es localmente convexo ya que una base de vecindades está formada por las bolas abiertas, que son convexos.

1.4.1 Definición. *Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de funciones $f : X \longrightarrow Y_f$, donde X es un conjunto no vacío y Y_f es un espacio topológico para cada $f \in \mathcal{F}$. Sea τ la topología en X que tiene como base a $\{f^{-1}(V) : V \subseteq Y_f \text{ abierto}, f \in \mathcal{F}\}$. A τ se le llama la* **topología débil de X inducida por $\mathcal{F}$** *o también la* **$\mathcal{F}$-topología de X**. *Nótese que esta topología es la menor (la más débil) que hace continuas a todas las f.* □

Así por ejemplo si (X, τ) es un espacio vectorial topológico hacemos $\mathcal{F} = X^*$; entonces a la X^*-topología de X se le llama la topología débil de X, y hace continuas a todos los funcionales lineales continuos de X.

Un espacio vectorial X es un **espacio vectorial metrizable** si tiene asignada una métrica que cumple que las bolas abiertas según esta métrica forman una base de la topología original; si además X es completo y localmente convexo es un **espacio de Frechét**. En algunas ocasiones se usa el adjetivo "fuerte" para hacer referencia a la topología original con el objeto de diferenciarla de la topología débil [16, p. 65].

1.4.2 Definición. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Para cada $x \in X$ sea $f_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, para $\Lambda \in X^*$, como*

$$f_x(\Lambda) = \Lambda x.$$

Consideramos a X como la familia de las f_x. La X-topología de X^* se llama **topología débil*** *de X^*.* □

Esta topología puede caracterizarse en términos de redes: Una red $\{\Lambda_t\}_{t \in T} \subset X^*$ converge si y sólo si converge puntualmente.

Existen ciertos conjuntos de X^* de los que puede afirmarse que son compactos en la topología débil*. El siguiente teorema determina algunos de éstos.

1.4.3 Teorema (de Banach-Alaoglu). *Si V es una vecindad de 0 en un espacio vectorial topológico X, y si*

$$K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x| \leq 1 \ \ \forall x \in V\},$$

entonces K es débil*-compacto. □

Para una demostración de este teorema, véase [16, p. 68-69]. También aquí puede verse que si X es separable, entonces cualquier $K \subset X^*$ débil *-compacto es metrizable en la topología débil *.

Una consecuencia de este teorema es que cualquier bola (según la norma) cerrada de X^* es débil *-compacto (ver [16, p. 94]).

1.5 Medidas vectoriales

La mayor parte de las siguientes dos secciones se basa en [6, I, 1 y 2] aunque alguna parte está tomada de [13, pp. 236-248].

Sea X un espacio de Banach. Una función F con valores en X de una álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω, un conjunto no vacío, es una **medida vectorial finitamente aditiva** (o simplemente una **medida vectorial**) si

$$F(E_1 \cup E_2) = F(E_1) + F(E_2)$$

siempre que $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ y sean disjuntos.

Si además

$$F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} F(E_i)$$

(la convergencia de la serie es según la norma $\|\cdot\|_X$), donde $\{E_i\}$ es una sucesión de conjuntos de $\mathcal{F}$ ajenos entre sí, entonces F es una **medida vectorial σ-aditiva.**

La **variación** de F, una medida vectorial, es la función real extendida definida sobre $\mathcal{F}$, $|F|$ definida, para $E \in \mathcal{F}$, como

$$|F|(E) = \sup_{\pi \in \mathcal{P}} \sum_{A \in \pi} \|F(A)\|_X,$$

donde $\mathcal{P}$ es la familia de las particiones de E. Si $|F|(\Omega) < \infty$, entonces diremos que F es de **variación acotada.** $|F|$ es una medida; de hecho es

$$|F| = \sup\{|\langle F(\cdot), x^*\rangle| : x^* \in X^* \text{ y } \|x^*\| \leq 1\},$$

donde $|\langle F(\cdot), x^*\rangle|$ es la variación de la medida $\langle F(\cdot), x^*\rangle$ [6, p. 3].

En el caso de tener una medida de variación acotada, el ser σ-aditiva es equivalente a que la variación lo sea [6, I, 1, Proposición 9].

De aquí que si Σ es la σ-álgebra generada por el álgebra $\mathcal{F}$, entonces para cada $E \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$|F_{|\mathcal{F}}|(E) = |F|(E),$$

donde $|F_{|\mathcal{F}}|$ es F restringida a $\mathcal{F}$, es decir, que $|F|$ es en la extensión de $|F_{|\mathcal{F}}|$ a la σ-álgebra Σ.

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra. La **semivariación** de F es la función real extendida $\|F\|$ cuyo valor para $E \in \mathcal{F}$ es

$$\|F\|(E) = \sup\{|\langle F(E), x^*\rangle| : x^* \in X^*, \ \|x^*\| \leq 1\},$$

donde, como anteiormente, $|\langle F(\cdot), x^*\rangle|$ es la variación de la medida $\langle F(\cdot), x^*\rangle$.

Si $\|F\|(\Omega) < \infty$ entonces se dirá que F es una medida de **semivariación acotada.**

Teniendo en cuenta que una medida real positiva μ sobre un álgebra $\mathcal{F}$ es **monótona** si siempre que $A, B \in \mathcal{F}, \ A \subset B$ se tiene que $\mu(A) \leq \mu(B)$, es inmediato que

i) $|F|$ es una función monótona y aditiva,

ii) $\|F\|$ es una función monótona y subaditiva y

iii) Para todo $E \in \mathcal{F}$,
$$\|F\|(E) \leq |F|(E).$$

Una medida vectorial $F : \mathcal{F} \longrightarrow X$, donde $\mathcal{F}$ es un álgebra de subconjuntos de Ω, es de semivariación acotada sobre Ω si y sólo si su rango es acotado en X. De aquí que una medida con semivariación acotada reciba el nombre también de **medida vectorial acotada** [6, I, 1, Proposición 11].

Sean $\mathcal{F}$ un álgebra de subconjuntos de Ω, $F : \mathcal{F} \longrightarrow X$ una medida vectorial y μ una medida real finita sobre $\mathcal{F}$. Si

$$\lim_{\mu(E)\to 0} F(E) = 0,$$

entonces F es $\mu-$**continua**, y ésto se denotará por

$$F \ll \mu.$$

Aquí se ha usado la misma notación que la usada para la continuidad absoluta. La razón es que en realidad, la μ-continuidad es como la continuidad absoluta sólo que para medidas vectoriales.

1.6 Integral de Bochner

Iniciamos ahora la teoría de integración vectorial, definiendo las funciones vectoriales medibles. Como a un esapcio de Banach X se le puede asignar, además de la topología inducida por la norma la topología débil inducida por X^* (ver la observación después de la Definición 1.4.1), entonces se definirán las funciones fuertemente medibles y las débilmente medibles.

1.6.1 Definición.

1. *Una función $g(x)$ definida en $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ con valores en un espacio de Banach X es* **simple** *si toma un número finito de valores.*

2. *La* **representación standard** *de una función simple g es*

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{S_j}(x)$$

donde $\{\alpha_1, \ldots \alpha_m\} \subset X$ son los valores (distintos entre sí) que toma $g(x)$,

$$S_j = \{x \in \Omega : g(x) = \alpha_j\}$$

que son conjuntos, disjuntos entre sí, tales que

$$\bigcup_{j=1}^{m} S_j = \Omega$$

y χ_j es la función característica de S_j.

3. *Si $g(x)$ es simple con representación standard*

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{S_j}(x),$$

entonces la integral (de Bochner) de g es

$$\int_{\Omega} g(x)\, d\mu(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(S_j). \ \square$$

1.6.2 Definición. *Sea X un espacio de Banach y $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida real o complejo. Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es* **débilmente $\mathcal{M}$-medible** *si para todo $x^* \in X^*$ la función numérica $\langle f(\cdot), x^* \rangle$ es $\mathcal{M}$-medible. f es* **fuertemente $\mathcal{M}$-medible** *si existe una sucesión de funciones simples fuertemente convergentes a f μ-casi dondequiera en Ω.* $\square$

Ahora se verá que bajo ciertas condiciones es equivalente el ser fuertemente y débilmente medible.

1.6.3 Teorema (de medibilidad de Pettis). *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es fuertemente medible si y sólo si*

i) Existe $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) = 0$ y además $f(\Omega \setminus E)$ es un conjunto separable según la norma,

ii) f es débilmente medible. $\square$

La demostración aparece en [6, **II**, 1, Teorema 2] y en [13, Teorema 7.5.10].

Aclaramos que se hablará de funciones μ-medibles (omitiendo la μ cuando no pueda haber confusión) para referirnos a las fuertemente medibles.

Una vez hecha la definición para las funciones simples, el paso natural es definir la integral de Bochner para las funciones medibles.

1.6.4 Definición. *Sea X un espacio de Banach. Una función vectorial $f : \Omega \longrightarrow X$ es* **Bochner integrable** *si existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples tal que*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\|_X \, d\mu = 0.$$

En este caso se tiene que

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}. \ \square$$

Una equivalencia útil es la siguiente [6, **II**, 2, Teorema 2], [13, Teorema 7.5.10]:

1.6.5 Teorema. *Sea X un espacio de Banach. Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ medible es Bochner-Integrable si y sólo si*

$$\int_\Omega \|f\|_X \, d\mu < \infty. \square$$

Para $1 \leq p < \infty$, $\mathbf{L}^p(X,\mu)$ (o bien cuando no pueda haber confusión $\mathbf{L}^p(\mu)$), representa al conjunto de clases de equivalençia de funciones μ-medibles tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f\|_X^p \, d\mu\right)^{1/p} < \infty.$$

Se tiene, como en el caso escalar, que $(\mathbf{L}^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach [6, p. 50].

$\mathbf{L}^\infty(X,\mu)$ representa el conjunto de las clases de equivalencia de funciones Bochner medibles y esencialmente acotadas. La norma

$$\|f\|_\infty = \sup \text{es} \, \|f\|_X$$

hace a $\mathbf{L}^\infty(X,\mu)$ un espacio de Banach.

Muchas cosas de la teoría escalar de Integración se conservan para la integral de Bochner. Una de ellas es el siguiente teorema, cuya demostración aparece en [6, **II**, 2, Teorema 3].

1.6.6 Teorema (Convergencia Dominada). *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y f_n una sucesión de funciones Bochner-integrables con valores en X, un espacio de Banach. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \varepsilon\} = 0$$

para toda $\varepsilon > 0$, y si existe una función real Lebesgue integrable g tal que $\|f_n\| \leq g$ casi dondequiera, entonces f es Bochner integrable y además

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

para cada $E \in \Sigma$. $\square$

Al igual que en la teoría escalar, se demuestra que si una sucesión de funciones converge casi dondequiera entonces, dada $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Entonces la hipótesis sobre convergencia del teorema se puede cambiar por convergencia casi dondequiera cuando se tenga un espacio de medida finita.

El siguiente es un resultado muy importante pues dice que la composición de una función Bochner integrable con una transformación lineal es integrable y además aporta su valor; aparece demostrado en [13, p. 247].

1.6.7 Teorema. *Sea $\Lambda : X \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado de un espacio de Banach X a otro espacio de Banach Y. Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es Bochner integrable entonces $\Lambda f : \Omega \longrightarrow Y$ es Bochner integrable y además*

$$\int \Lambda f \, d\mu = \Lambda \int f \, d\mu. \;\square$$

El siguiente resultado muestra que las integrales indefinidas de Bochner comparten una muy importante propiedad con las integrales indefinidas de Lebesgue [6, **II**, 2, Teorema 9].

1.6.8 Teorema. *Sea f una función Bochner integrable sobre $[0,1]$ con respecto a la medida de Lebesgue. Entonces ppara casi toda $s \in [0,1]$ se tiene*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(e^{it}) - f(e^{is})\| \, dt = 0.$$

En consecuencia, para casi toda $s \in [0,1]$ se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} f(e^{it}) \, dt = f(e^{is}). \;\square$$

Este teorema será usado en el espacio $(\mathbf{T}, \mathcal{B}, \lambda)$, el cual no es difícil ver que puede ser identificado con $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$, el intervalo $[0,1]$ con sus borelianos y la medida de Lebesgue.

1.7 Otros conceptos sobre medidas vectoriales

A lo largo de esta sección, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ denotará un espacio de medida, con Ω espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. En algún momento se supondrán más hipótesis sobre este espacio medible, pero en todo caso se mencionarán explícitamente.

Denotaremos por $\mathcal{C}(E, X)$ al espacio de funciones continuas del conjunto E al espacio de Banach X. El soporte de una función f en este espacio es $\overline{\{t \in E : f(t) \neq 0\}}$, es decir, la cerrradura del conjunto de puntos en los que f no se anula. Al conjunto de funciones de $\mathcal{C}(E, X)$ con soporte compacto lo denotaremos con $\mathcal{C}_c(E, X)$.

Un funcional lineal U definido en $\mathcal{C}(\Omega, E)$ con valores en el espacio vectorial F es **dominado** si existe una medida positiva σ-aditiva de Borel ν tal que

$$|U(f)| \leq \int_\Omega |f| \, d\nu$$

para todo $f \in \mathcal{C}(\Omega, E)$; en este caso se dirá que ν domina a U, o bien, que U es dominada por ν. A la mínima medida σ-finita positiva que domina a U la denotaremos por ν_U.

En [7, Corolario 1 p. 387] se demuestra que un funcional lineal continuo $\Lambda \in \mathrm{C}_c(\mathbf{T}, X)^*$ es dominado si y sólo si

$$\|\Lambda_B\| < \infty$$

para todo boreliano B, donde

$$\|\Lambda_B\| = \sup\{|\Lambda(f)| : f \in \mathrm{C}_c(\mathbf{T}, X) \text{ se anula fuera de B y } \sup_{x \in \mathbf{T}} \|f(x)\| \leq 1\}.$$

La generalización del teorema de representación de Riesz ya es mencionado en [18, p. 398ss.] y generalizado en [6, p.182]. La versión que aquí daremos se restringe a la situación particular en que es usada.

Al conjunto de medidas vectoriales de variación acotada definidas sobre los borelianos de $\mathbf{T}$ y con valores en X lo denotaremos por $\mathrm{M}(\mathbf{T}, X)$. Nótese que se puede dotar a este espacio de la norma definida por

$$\|G\| = |G|(\mathbf{T}).$$

Para definir una integral para una función continua en $\mathbf{T}$ con valores en X^* respecto a la medida $G \in \mathrm{M}(\mathbf{T}, X^*)$ definimos al conjunto $\mathcal{C}^+(\mathbf{T}) \otimes X^*$ de sumas finitas de la forma $\sum_{i=1}^m \phi_i(t)x_i$ donde $x_i \in X^*$ y $\phi_i(t) \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$ y es positiva. Este conjunto es denso en el conjunto $\mathcal{C}(\mathbf{T}, X^*)$ [7, Corolario de la Proposición 1 p. 375].

Para $g \in \mathcal{C}^+(\mathbf{T}) \otimes X^*$ con

$$g(t) = \sum_{i=1}^m \phi_i(t)x_i$$

definimos

$$\int_{\mathbf{T}} g(t)\, dG(t) = \sum_{i=1}^m \int_{\mathbf{T}} \phi_i(t)\, d\langle x_i, G(t)\rangle.$$

Nótese que en el lado derecho de la igualdad se tiene una integral de una función escalar continua respecto a la medida escalar $\langle x_i, G(t)\rangle$. Además esta definición no depende de la representación para g como elemento de $\mathcal{C}(\mathbf{T}) \otimes X^*$.

Para $f \in \mathcal{C}(\mathbf{T}, X^*)$ definimos

$$\int_{\mathbf{T}} f(t)\, dG(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{T}} f_n(t)\, dG(t)$$

donde la sucesión $\{f_n\}$ de elementos de $\mathcal{C}(\mathbf{T}) \otimes X^*$ converge a f uniformemente. De nuevo, esta definición es independiente de la sucesión elegida que converja a f.

Una proposición que será usada más adelante es la siguiente.

1.7.1 Proposición. *Sean $\psi \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$, $x \in X^*$ y $\phi(t) = \psi(t)x$. Sea además $u \in \mathrm{L}^1(X, \lambda)$. Si tenemos la medida vectorial*

$$G(E) = \int_E u(t)\, dt,$$

donde esta integral es de Bochner, entonces

$$\int_{\mathbf{T}} \phi(t)\, dG(t) = \int_{\mathbf{T}} \psi(t)\, d\langle x, G(t)\rangle = \int_{\mathbf{T}} \psi(t)\langle u(t), x\rangle\, dt.$$

Demostración.

La primera igualdad es directa de la definición. La segunda notando que la función escalar $\langle u(t), x\rangle$ es la derivada de Radon-Nikodým de la medida $\langle G(\cdot), x\rangle$respecto a la medida de lebesgue sobre $\mathbf{T}$. □

Enunciamos ahora la generalización del teorema de Riesz que será utilizada más adelante [7, Teorema 2, p. 380 y Corolario 2, p. 387].

1.7.2 Teorema. *La igualdad*

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbf{T}} f\, dG$$

para $f \in \mathrm{C}_c(\mathbf{T}, X)$ *nos proporciona un isomorfismo entre* $\mathrm{C}_c(\mathbf{T}, X)^*$ *y las medidas* σ*-finitas* $G \in \mathrm{M}(\mathbf{T}, X^*)$ *de variación acotada. Además*

$$\nu_U = |G|. \square$$

En la teoría de la medida compleja hay dos teoremas importantes: el de descomposición de Lebesgue y el de Radon-Nikodým. Ahora introduciremos los análogos en el caso vectorial (ver [6, I, 5, Teorema 9]).

Sea $F : \mathcal{F} \longrightarrow X$ una medida vectorial. F es **fuertemente aditiva** si dada $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)$ converge en norma. Obviamente, si F es σ-aditiva entonces es fuertemente aditiva; en la definición de fuertemente aditiva no se está pidiendo que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}.$$

1.7.3 Teorema (de descomposición de Lebesgue). *Sea* F *una medida vectorial fuertemente aditiva. Sea* λ *una medida positiva finita y aditiva sobre* $\mathcal{F}$*. Entonces existen medidas vectoriales fuertemente aditivas únicas* F_c *y* F_s *sobre* $\mathcal{F}$ *tales que:*

i) F_c *es* λ*-continua,*

ii) $\langle F_s, x^* \rangle$ *y* λ *son mutuamente singulares para toda* $x^* \in X^*$,

iii) $F = F_c + F_s$.

Si además F *es* σ*-aditiva y* λ *también, entonces* F_c *y* F_s *son* σ*-aditivas. Si* F *es de variación acotada entonces* F_c *y* F_s *también lo son, y además*

$$|F|(E) = |F_c|(E) + |F_s|(E) \quad \forall E \in \mathcal{F}$$

y $|F_s|$ *y* λ *son mutuamente singulares.* $\square$

1.7.4 Definición. *Un espacio de Banach X tiene la* **propiedad de Radon-Nikodým con respecto al espacio de medida** $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *si para cada medida vectorial F definida sobre $\mathcal{F}$ con valores en X, μ-continua y de variación acotada, existe una función $f \in \mathbf{L}^1(X, \mu)$ tal que*

$$F(E) = \int_E f \, d\mu \quad \forall \, E \in \mathcal{F}.$$

Un espacio de Banach X tiene la **propiedad de Radon-Nikodým** *si tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a cualquier espacio de medida finito.* □

Recuérdese que una medida de probabilidad es aquella en que la $\mu(\Omega) = 1$. Cualquier espacio de medida finito puede normalizarse de manera que quede convertido en **espacio de probabilidad** (aquél donde la medida es una medida de probabilidad).

Una medida de probabilidad μ se llama **puramente atómica** si existe $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de subconjuntos de $\mathcal{F}$ disjuntos dos a dos tales que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n\right) = 1$$

y los E_n son μ-átomos (es decir, si $F \in \mathcal{F}$, $F \subseteq E_n$ entonces $\mu(F) = 0$ o bien $\mu(F) = \mu(E_n)$).

Como se verá a continuación, cualquier medida de probabilidad puede escribirse, de manera esencialmente única como $tP_1 + (1-t)P_2$, para alguna $0 \leq t \leq 1$, y donde P_1 es puramente atómica y P_2 es **no atómica** (no tiene átomos). Esto se basa en un teorema que se enuncia a continuación [8, p. 82].

1.7.5 Teorema. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ σ-finito. Entonces existen medidas ν y ρ sobre $\mathcal{F}$ esencialmente únicas tales que ν es puramente atómica, ρ es no atómica y*

$$\mu = \nu + \rho. \; \square$$

Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es espacio de probabilidad entonces ponemos $t = \nu(\Omega)$, $1 - t = \rho(\Omega)$,

$$\begin{aligned} P_1(E) &= \frac{\nu(E)}{\nu(\Omega)}, \\ P_2(E) &= \frac{\rho(E)}{\rho(\Omega)} \quad E \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

y obtenemos la descomposición que se quería.

Con esta descomposición para medidas de probabilidad, la observación hecha sobre espacios de medida finitos y el siguiente teorema demostrado en [5, p. 26] tenemos que la propiedad de Radon-Nikodým es independiente del espacio de probabilidad y puede considerarse enteramente en relación con $(\mathbf{T}, \mathcal{B}, \lambda)$.

1.7.6 Teorema.

a) Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es puramente atómico, entonces todo espacio de Banach tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a él.

b) Si μ no es puramente atómico entonces un espacio de Banach tiene la propiedad de Radon-Nikodým respecto a $(\mathbf{T}, \mathcal{B}, \lambda)$ si y sólo si tiene la propiedad de Radon-Nikodým respecto a $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. □

Así como en el caso escalar hay una gran relación entre el teorema de Radon-Nikodým y el teorema de representación de Riesz (uno se desprende del otro), en el caso vectorial esta relación se conserva y podríamos decir que se acentúa.

1.7.7 Definición. *Un funcional lineal acotado $\Lambda : \mathbf{L}^1(\mu) \longrightarrow X$ es* **Riesz-representable** *(o bien* **representable***) si existe $g \in \mathbf{L}^\infty(X, \mu)$ tal que*

$$\Lambda f = \int_\Omega fg \, d\mu \quad \forall f \in \mathbf{L}^1(\mu). \ \square$$

Para una demostración del siguiente teorema véase [6, **III**, 1, Teorema 5].

1.7.8 Teorema. *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodým si y sólo si cada funcional lineal acotado $\Lambda : \mathbf{L}^1(\mu) \longrightarrow X$ es representable sobre todo espacio de medida finita $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.* □

Por lo visto después del Teorema 1.7.6, el anterior teorema puede reescribirse como:

> *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodým si y sólo si cada funcional lineal acotado $\Lambda : \mathbf{L}^1(\lambda) \longrightarrow X$ es representable.*

Capítulo 2

Primeros resultados

Mediante la Integral de Poisson es posible representar en $\mathbf{D}$ a una función armónica en un disco de radio mayor que 1 con sólo conocer sus valores en la frontera. Usando algunas técnicas del análisis funcional se demuestra que una función en $\mathbf{h}^{\mathbf{p}}$ se puede representar como la Integral de Poisson de una función en $\mathbf{L}^{\mathbf{p}}(\lambda)$. Se demuestra también que una integral de Poisson-Stieltjes es un elemento de $\mathbf{h}^{\mathbf{1}}$.

El primer resultado sobre la existencia de límites angulares que se incluye es el que se refiere a las funciones que son Integrales de Poisson. Algo digno de mención es que para el caso de funciones con valores vectoriales la demostración que aquí se da puede repetirse.

2.1 Representaciones de Poisson

En esta sección se dará una representación de Poisson para funciones en $\mathbf{h}^{\mathbf{p}}$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Sea $u : \mathbf{D}_R \longrightarrow \mathbf{R}$ con $R > 0$. Como $u = \mathbf{Re}\ F$ para alguna $F : \mathbf{D}_R \longrightarrow \mathbf{C}$ analítica, si F tiene representación en serie de potencias

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

entonces podemos obtener una representación análoga para u. Sabemos que

$$u(z) = \frac{F(z) + \overline{F(z)}}{2}, \qquad |z| < R.$$

Tomamos a z en coordenadas polares como $z = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta}$, donde $r = |z| < R$. Entonces

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_k} r^k e^{-ik\theta}\right)$$

Ésto lo podemos unificar en una sola suma como

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta} \tag{2}$$

donde

$$a_k = \begin{cases} c_k/2 & k > 0 \\ \mathbf{Re}\, a_0 & k = 0 \\ \overline{c_k}/2 & k < 0 \end{cases}$$

Tomando $R > 1$, se tiene que para r=1 la serie (2) converge uniformemente, por lo que

$$\begin{aligned} \widehat{u}(k) &= \int_{\mathbf{T}} u(e^{it}) e^{-ikt}\, d\theta \\ &= \int_{\mathbf{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} e^{-ik\theta}\, d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{T}} a_n r^{|n|} e^{(n-k)\theta}\, d\theta \\ &= a_k, \end{aligned}$$

es decir, que las a_k son los coeficientes de Fourier de $u(e^{i\theta})$. En concreto

$$a_k = \int_{\mathbf{T}} u(e^{it}) e^{-ikt}\, dt.$$

Sustituyendo en (2) obtenemos

$$u(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} u(e^{it}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)}\, dt.$$

Para $r < 1$ se tiene que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt} = \mathbf{Re}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(re^{it})^k\right)$$

que, finalmente es el núcleo de Poisson (Definición 1.2.4).

Hemos demostrado el siguiente

2.1.1 Teorema. *Sean $R > 1$ y $u : \mathbf{D}_R \longrightarrow \mathbf{R}$ armónica. Entonces*

$$u(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t)u(e^{it})\, dt$$

con $0 \leq r < 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$. □

La representación de Poisson recién obtenida también se tiene para funciones en los espacios $\mathbf{h}^\mathbf{p}$.

2.1.2 Teorema. *Sea $u \in \mathbf{h}^\mathbf{p}$, $1 < p \leq \infty$. Entonces existe $f \in \mathbf{L}^\mathbf{p}(\lambda)$ tal que*

$$u(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} f(e^{it})\mathbf{P}(r, \theta - t)\, dt.$$

Demostración.

Sean $1 < p < \infty$ y q su conjugado. Sea $\{r_n\}$ una sucesión tal que crece a 1. Considérese la familia

$$\mathcal{F} = \{f_n(e^{it}) = u(r_n e^{it}) : n \in \mathbf{N}\}$$

Como $u \in \mathbf{h}^\mathbf{p}$ entonces la familia $\mathcal{F}$ es acotada como subconjunto de $\mathbf{L}^\mathbf{p}(\lambda) = \mathbf{L}^\mathbf{q}(\lambda)^*$, por lo que está en una bola cerrada de $\mathbf{L}^\mathbf{q}(\lambda)^*$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\subset \{\Lambda \in \mathbf{L}^\mathbf{q}(\lambda) : \|\Lambda\| \leq \|f\|_{h_p}\} \\ &= \{f \in \mathbf{L}^\mathbf{p}(\lambda) : \|f\|_p \leq \|f\|_{h_p}\}. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Banach-Alaoglu 1.4.3, esta bola es débil*-compacto. Además $\mathbf{L}^\mathbf{q}(\lambda)$ es separable, por lo que esa bola es también metrizable. Se sigue entonces que f_n tiene una subsucesión f_{n_k} que converge según la topología débil* a cierta $f \in \mathbf{L}^p(\lambda)$. Ésto quiere decir que para toda $g \in \mathbf{L}^q(\lambda)$ se tiene

$$\langle g, f_{n_k}\rangle = \int_{\mathbf{T}} g(e^{it}) f_{n_k}(e^{it})\, dt \to \int_{\mathbf{T}} g(e^{it}) f(e^{it})\, dt = \langle g, f\rangle. \tag{3}$$

Notamos ahora que f_{n_k} es armónica en $\mathbf{D}_{1/r_{n_k}}$ por definición. Además para toda $n \in \mathbf{N}$, $1/r_{n_k} > 1$. Tenemos pues una representación de Poisson para f_{n_k} y $r < 1$:

$$f_{n_k}(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t) f_{n_k}(e^{it})\, dt$$

Por lo visto en (3), tomando $g = \mathbf{P}(r, \theta - \cdot)$

$$f_{n_k}(re^{i\theta}) \to \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t) f(e^{it})\, dt$$

Por otro lado $f_{n_k}(z) \to u(z)$ para toda $z \in \mathbf{D}$. Por lo tanto

$$u(z) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t) f(e^{it})\, dt.$$

Esta era la representación buscada. Hasta ahora sólo lo hemos hecho para $1 < p < \infty$. Para $p = \infty$, nótese que $\mathbf{L}^\infty(\lambda) = \mathbf{L}^1(\lambda)^*$. Ahora se aplica un argumento análogo al precedente y completamos la prueba. □

Para estudiar el caso de $\mathbf{h}^1$, nótese que

$$\mathbf{L}^1(\lambda) \subset \mathbf{M}(\mathbf{T})$$

donde $\mathbf{M}(\mathbf{T})$ es el conjunto de medidas de Borel sobre $\mathbf{T}$, que es un espacio de Banach dotado con la norma

$$\|\mu\| = |\mu|(\mathbf{T}).$$

Esta inclusión se da asignando a $f \in \mathbf{L}^1(\lambda)$ la medida

$$\mu_f(\cdot) = \int_{(\cdot)} f\, d\lambda.$$

Por otro lado, por el Teorema de Riesz 1.3.6

$$\mathbf{M}(\mathbf{T}) = \mathcal{C}(\mathbf{T})^*.$$

Entonces estamos en condiciones de aplicar el método del Teorema 2.1.2.

2.1.3 Teorema. *Sea $u \in \mathbf{h}^1$. Entonces existe m medida de Borel sobre $\mathbf{T}$ tal que*

$$u(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t)\, dm(t).$$

Demostración.

Dada una sucesión $\{r_n\}$ que converja a 1, la familia

$$\mathcal{F} = \{f_n(e^{it}) = u(r_n e^{it}) : n \in \mathbf{N}\}$$

forma un conjunto acotado en $\mathbf{L}^1(\lambda) \subset \mathbf{M}(\mathbf{T})$; entonces está en una bola cerrada de $\mathbf{M}(\mathbf{T}) = \mathcal{C}(\mathbf{T})^*$ que resultará débil*-compacto por el Teorema de Banach-Alaoglu 1.4.3. Como $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ es separable, entonces esta bola resultará metrizable; existe pues una subsucesión f_{n_k} que converge en la topología débil* a cierta $m \in \mathcal{C}(\mathbf{T})^* = \mathbf{M}(\mathbf{T})$. O sea que para toda $g \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$

$$\int_{\mathbf{T}} g(e^{it}) f_{n_k}(e^{it})\, dt \to \int_{\mathbf{T}} g(e^{it})\, dm(t).$$

De nuevo tenemos que f_{n_k} es armónica en $\mathbf{D}_{1/r_{n_k}}$ y $1/r_{n_k} > 1$, por lo que la podemos representar con el núcleo de Poisson para $r < 1$:

$$f_{n_k}(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t) f_{n_k}(e^{it})\, dt$$

Poniendo $g = \mathbf{P}(r, \theta - \cdot)$, que es una función en $\mathcal{C}(\mathbf{T})$,

$$f_{n_k}(re^{i\theta}) \to \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t)\, dm(t)$$

y también $f_{n_k}(z) \to u(z)$ para toda $z \in \mathbf{D}$. Por lo tanto

$$u(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t)\, dm(t). \quad \square$$

Las funciones u que son integrales de Poisson respecto a una medida regular de Borel μ se llaman **integrales de Poisson** y se representan por $u = P[d\mu]$.

2.1.4 Teorema. *Si $\mu \in \mathbf{M}(\mathbf{T})$ entonces $u = P[d\mu] \in \mathbf{h}^1$.*

Demostración.

Consideramos la serie de Fourier de μ:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta},$$

donde

$$a_k = \int_{\mathbf{T}} e^{-ikt}\, d\mu(t).$$

Entonces, usando la convergencia uniforme de la serie que representa al núcleo de Poisson, tenemos que

$$\begin{aligned}
u(re^{i\theta}) &= \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(\rho, \theta - t)\, d\mu(t) \\
&= \int_{\mathbf{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)}\, d\mu(t) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta}.
\end{aligned}$$

Basados en la forma polar de la ecuación de Laplace [1, p. 162], obtenemos, al hacer $u(re^{i\theta}) = r^{|n|}e^{in\theta}$:

$$\begin{aligned}
\Delta a_n r^{|n|} e^{in\theta} &= a_n \Delta r^{|n|} e^{in\theta} \\
&= a_n \frac{1}{r^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right\} \\
&= a_n \frac{1}{r^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(r(e^{in\theta}|n| r^{|n|-1}) \right) + r^{|n|} e^{in\theta}(-n^2) \right\} \\
&= a_n \frac{1}{r^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} (e^{in\theta}|n| r^{|n|}) - n^2 r^{|n|} e^{in\theta} \right\} \\
&= a_n \frac{1}{r^2} \left\{ r e^{in\theta} |n|^2 r^{|n|-1} - n^2 r^{|n|} e^{in\theta} \right\} \\
&= a_n \frac{1}{r^2} \{0\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto u es armónica.

Por otro lado

$$\int_{\mathbf{T}} |u(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t)\, d|\mu|(t)\, d\theta.$$

Por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{T}}\int_{\mathbf{T}} \mathrm{P}(r,\theta-t)\,d|\mu|(t)\,d\theta &= \int_{\mathbf{T}}\int_{\mathbf{T}} \mathrm{P}(r,\theta-t)\,d\theta\,d|\mu|(t) \\ &= \int_{\mathbf{T}} d|\mu|(t) \\ &= \|\mu\| < \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto $u \in \mathbf{h}^1$. □

2.2 Integral de Poisson-Stieltjes

Iniciamos el estudio de los valores en la frontera para integrales de Poisson-Stieltjes. Definimos la **integral de Poisson-Stieltjes** de $\phi \in \mathbf{L}^1(\lambda)$ como $P[d\phi] = P[\phi\, d\lambda]$, donde, como se dijo antes, λ denota la medida de Lebesgue en $\mathbf{T}$.

Veamos un teorema que nos permitirá afirmar que el límite angular de una integral de Poisson-Stieltjes existe casi dondequiera [10, pp. 12-14] o [15, p. 14].

2.2.1 Teorema. *Sea μ una medida de Borel sobre $\mathbf{T}$ y*

$$F(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t).$$

Sea $u = P[d\mu]$. Entonces para casi toda $\theta \in \mathbf{T}$ se tiene que $u(z)$ converge a $F'(\theta)$ cuando z tiende a $e^{i\theta}$ dentro de la región $\mathbf{S}_\alpha(\theta)$, $\alpha < \pi/2$.

Demostración.

Sabemos que F es de variación acotada, de aquí que tiene derivada finita para casi toda $\theta \in \mathbf{T}$. Sea θ_1 que cumpla esta propiedad.

Podemos suponer, para simplificar, que $\theta_1 = 0$, pues mediante una rotación lo podemos lograr. Además podemos suponer que $F'(0) = 0$; de no ser así en los siguientes razonamientos evaluaríamos $u(re^{i\theta}) - F'(0)$, acotaríamos a

$$\left|\frac{F(t)}{t} - F'(0)\right|$$

y consideraríamos la medida dada por $d\mu(t) - F'(0)\,dt$. En otras palabras, el no suponer que $F'(0) = 0$ implica que hay que añadir este sumando.

Sea $\varepsilon > 0$. Como F es diferenciable en 0 y $F'(0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{F(t)}{t}\right| < \varepsilon \text{ si } |t| < \delta.$$

Tomando $re^{i\theta} \in \mathbf{S}_\alpha(\theta_1)$ podemos hacer $|r-1|$ suficientemente pequeño de manera que $|\theta| < \delta/4$. Por ser u armónica

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t)\, d\mu(t) \\ &= \left[\int_{\delta<|t|<\pi} + \int_{[-\delta,\delta]}\right] \mathbf{P}(r, \theta - t)\, d\mu(t). \end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \int_{\delta<|t|<\pi} \mathbf{P}(r, \theta - t)\, d\mu(t) &\leq \int_{\delta/2<|t|<\pi} \mathbf{P}(r, \theta - t)\, d\mu(t) \\ &\leq M_r \int_{\mathbf{T}} d|\mu|(t) \end{aligned}$$

donde

$$M_r = \sup_{|t|>\delta/2} \mathbf{P}(r, t).$$

Obsérvese además que si $|\theta| < \delta/4$ y $|t| > \delta/2$ entonces

$$|\theta - t| \geq |t| - |\theta| > \delta/2 + \delta/4 \geq \delta/2.$$

De aquí que $\cos(\theta - t) > 0$. Por lo visto en la demostración de $(S3)$ del Teorema 1.2.6 tenemos que

$$\mathbf{P}(r, t) \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\delta + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - \cos^2\delta};$$

entonces M_r tiende a 0 cuando r tiende a 1.

Ahora integramos por partes lo que restaba.

$$\int_{-\delta}^{\delta} \mathbf{P}(r, \theta - t)\, d\mu(t) = [\mathbf{P}(r, \theta - t)F(t)]_{-\delta}^{\delta} - \int_{-\delta}^{\delta} F(t)\frac{\partial \mathbf{P}(r, \theta - t)}{\partial t}\, dt.$$

Observamos que

$$[\mathbf{P}(r, \theta - t)F(t)]_{-\delta}^{\delta} = \mathbf{P}(r, \theta - \delta)F(\delta) - \mathbf{P}(r, \theta + \delta)F(-\delta).$$

Pero $|\theta \pm \delta| \geq |\delta| - |\theta| > \delta/2 + \delta/4 > \delta/2$. Por lo tanto

$$\mathbf{P}(r, \theta \pm \delta) \leq M_r$$

el cual ya se vió que tiende a 0 si r tiende a 1.

Por otro lado

$$\frac{\partial \mathbf{P}(r, \theta - t)}{\partial t} = \frac{2(1-r^2) r \operatorname{sen}(\theta - t)}{|1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2|^2}.$$

Tenemos que estudiar entonces a

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{2(1-r^2) r \operatorname{sen}(\theta - t)}{|1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2|^2} F(t)\, dt.$$

Podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $\theta > 0$ y dividir a esta integral en

$$\left[\int_{-\delta}^{0} + \int_{0}^{2\theta} + \int_{2\theta}^{\delta}\right] \frac{2(1-r^2) r \operatorname{sen}(\theta - t)}{|1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2|^2} F(t)\, dt.$$

1. Para el primer sumando:

$$|F(t)| < \varepsilon|t| = \varepsilon(-t) \leq \varepsilon(\theta - t).$$

Haciendo el cambio de t por $\theta - t$ se acota el valor absoluto:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\delta}^{0} \frac{2(1-r^2) r \operatorname{sen}(t)}{|1 - 2r\cos(t) + r^2|^2} F(t)\, dt\right| &\leq \varepsilon \int_{\theta}^{\theta+\delta} \frac{2(1-r^2) r \operatorname{sen}(t)}{(1 - 2r\cos(t) + r^2)^2} t\, dt \\
&\leq \varepsilon \int_{0}^{\pi} \frac{2(1-r^2) r \operatorname{sen}(t)}{(1 - 2r\cos(t) + r^2)^2} t\, dt.
\end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\int_{0}^{\pi} \frac{2(1-r^2) r \operatorname{sen}(t)}{(1 - 2r\cos(t) + r^2)^2} t\, dt = [t\mathbf{P}(r,t)]_0^{\pi} - \int_{o}^{\pi} \mathbf{P}(r,t)\, dt.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\delta}^{0} \frac{2(1-r^2) r \operatorname{sen}(t)}{|1 - 2r\cos(t) + r^2|^2} F(t)\, dt\right| &\leq \varepsilon \int_{0}^{\pi} \frac{2(1-r^2) r \operatorname{sen}(t)}{(1 - 2r\cos(t) + r^2)^2} t\, dt \\
&\leq \frac{\pi(1-r)\varepsilon}{(1+r)} - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon\left(\frac{\pi(1-r)}{1+r} - \frac{1}{2}\right) \\
&\leq \varepsilon\left(\pi - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

2. Para el segundo sumando:

$$|F(t)| < \varepsilon t \quad \text{y} \quad |\theta - t| < \theta.$$

(Obsérvese que ésto último implica que $\sin(\theta - t) < \theta$).

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{2\theta} \frac{2(1-r^2)r\sin(\theta-t)}{|1-2r\cos(\theta-t)+r^2|^2}F(t)\,dt\right| &\leq \varepsilon\int_0^{2\theta}\frac{2(1-r)(1+r)r\theta}{(1-r)^4}t\,dt \\
&= \frac{2\varepsilon(1+r)r\theta}{(1-r)^3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\theta} \\
&= \frac{2\varepsilon(1+r)r\theta}{(1-r)^3}\frac{4\theta^2}{2} \\
&\leq \frac{16\varepsilon\theta^3}{2(1-r)^3} \\
&\leq 8\varepsilon c^3,
\end{aligned}$$

donde $c > 0$ existe por la propiedad de la región $\mathbf{S}_\alpha(\theta)$ (Definición 1.2.3).

3. Para el tercer sumando:

$$|F(t)| < \varepsilon t \leq 2\varepsilon(t - \theta).$$

Hacemos lo mismo que se hizo con el primer sumando con el cambio de t por $t - \theta$.
□

2.2.2 Teorema. *Sea $f \in \mathbf{L}^1(\lambda)$ y $u = P[df]$. Entonces el límite no tangencial existe y es*

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} u(z) = f(e^{i\theta})$$

para casi toda $\theta \in \mathbf{T}$.

Demostración.

Este es realmente un corolario del teorema anterior. Tomemos

$$F(\theta) = \int_0^\theta f(t)\,dt$$

teniendo en cuenta que para casi toda θ

$$\frac{1}{t}\int_0^t |f(\theta+s) - f(\theta)|\,ds \longrightarrow 0$$

cuando $t \to 0$. Esto implica que $F'(\theta)$ exista (Teorema de diferenciación de Lebesgue, [17, Teorema 8.6 y Corolario]). □

2.3 Teorema de Hardy-Littlewood

El resultado que aparece a continuación está basado en el teorema maximal de Hardy-Littlewood [9, p. 11].

2.3.1 Teorema (Hardy-Littlewood). *Sea $u = P[d\phi]$ con $\phi \in \mathbf{L}^p(\lambda)$ y $1 < p \leq \infty$. Sea*

$$U(e^{i\theta}) = \sup_{r<1} |u(re^{i\theta})|$$

la **función maximal de Hardy-Littlewood.** *Entonces $U \in \mathbf{L}^p(\lambda)$ y existe $A_p > 0$ tal que*

$$\|U\|_p \leq A_p \|\phi\|_p. \ \square$$

Para $p = 1$ este teorema falla [9, p. 12]. Sin embargo, en el caso de tener funciones analíticas, el rango se puede extender a $0 < p \leq \infty$.

Apoyados en este teorema demostraremos lo siguiente.

2.3.2 Teorema (Hardy-Littlewood). *Sea $f \in \mathbf{H}^p$, $0 < p \leq \infty$. Definimos*

$$F(e^{i\theta}) = \sup_{r<1} |f(re^{i\theta})|.$$

Entonces $F \in \mathbf{L}^p(\lambda)$ y existe $B_p > 0$ tal que

$$\|F\|_p \leq B_p \|f\|_p.$$

Demostración.

Para cada R tal que $0 < R < 1$ la función $g(z) = |f(Rz)|^{p/2}$ es armónica en $\mathbf{D}$. Como

$$g(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t) g(e^{it})\, dt$$

y $g(e^{it}) \in \mathbf{L}^2(\lambda)$, entonces, por el Teorema 2.3.1, la función

$$G(e^{i\theta}) = \sup_{r<1} |g(re^{i\theta})|$$

pertenece a $\mathbf{L}^2(\lambda)$ y además existe $A_2 > 0$ tal que

$$\|G\|_2 \leq A_2 \|g\|_2 = A_2 \mathrm{M}_2(g, 1)$$

(ver la sección 1.1 (1)). Notemos que

$$\begin{aligned}\|G\|_2 &= \left(\int_{\mathbf{T}}\left(\sup_{r<1}|g(re^{i\theta})|\right)^2 d\theta\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{\mathbf{T}}\sup_{r<1}|f(rRe^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{\mathbf{T}}\sup_{r<R}|f(re^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{1/2}\\ &= \|F_R\|_p^{2/p}\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_2(g,1) &= \left(\int_{\mathbf{T}}|g(e^{it})|^2\, dt\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{\mathbf{T}}|f(Re^{it})|^p\, dt\right)^{1/2}\\ &= \mathbf{M}_p(f,R)^{2/p},\end{aligned}$$

donde

$$F_R(e^{i\theta}) = \sup_{r<R}|f(re^{i\theta})|.$$

Es decir que tenemos

$$\|F_R\|_p^{2/p} \leq A_2\mathbf{M}_p(R,f)^{2/p}$$

o equivalentemente

$$\|F_R\|_p \leq A_2^{p/2}\mathbf{M}_p(R,f).$$

Aplicamos el Teorema de Convergencia Monótona y como

$$\lim_{R\to 1} F_R(e^{it}) = F(e^{it})$$

entonces

$$\lim_{R\to 1}\mathbf{M}_p(R,f) = \|f\|_p.$$

Por lo tanto $\|F\|_p \leq B_p\|f\|_p$ donde $B_p = A_2^{p/2}$ □

Con la ayuda de este teorema demostramos un resultado sobre la convergencia en $\mathbf{L}^p(\lambda)$ de una función en $\mathbf{H}^p$ a sus valores en la frontera. La existencia casi dondequiera de estos valores la enunciamos, sin demostrarla, a continuación [10, p. 46].

2.3.3 Teorema. *Sea $F \in \mathbf{H}^p$ con $0 < p < \infty$. Entonces el límite angular*

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{z \to e^{i\theta}} F(z)$$

existe casi dondequiera y además, como función definida en $\mathbf{T}$, es una función que pertenece a $\mathbf{L}^p(\lambda)$. □

2.3.4 Teorema. *Si $f \in \mathbf{H}^p$, con $0 < p < \infty$, entonces*

$$\lim_{r \to 1} \int_{\mathbf{T}} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p \, d\theta = 0.$$

Demostración.

Sabemos por el teorema anterior que

$$\lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$$

casi dondequiera y que $f(e^{i\theta}) \in \mathbf{L}^p(\lambda)$. Por el Teorema 2.3.2, para $r < 1$

$$|f(re^{i\theta})| \leq F(e^{i\theta})$$

con

$$F(e^{it}) = \sup_{r<1} |f(re^{it})| \in \mathbf{L}^p(\lambda).$$

Por lo tanto

$$|f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p < |2F(e^{i\theta})|^p;$$

esta última función pertenece a $\mathbf{L}^1(\lambda)$ pues $F^p \in \mathbf{L}^1(\lambda)$. Como

$$\lim_{r \to 1} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p = 0$$

entonces por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{r \to 1} \int_{\mathbf{T}} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p \, d\theta = 0. \ \square$$

En esta sección incluimos un resultado que no tiene que ver con los teoremas de Hardy-Littlewood, pero que será usado más adelante.

Una función g definida en Ω, un abierto de $\mathbf{C}$, tiene un **mayorante armónico** en Ω si existe u armónica en Ω tal que $g(z) \leq u(z)$ para toda $z \in \Omega$.

2.3.5 Proposición. *Sea $f \geq 0$ una función subarmónica continua sobre* $\mathbf{D}$. *Entonces*

$$\sup_{r<1} \int_{\mathbf{T}} f(re^{i\theta})\, d\theta < \infty$$

si y sólo si f admite un mayorante armónico sobre $\mathbf{D}$.

Demostración.

Sea u un mayorante armónico de f. Entonces

$$\int_{\mathbf{T}} f(re^{i\theta})\, d\theta \leq \int_{\mathbf{T}} u(re^{i\theta})\, d\theta = 0.$$

Por lo tanto

$$\sup_{r<1} \int_{\mathbf{T}} f(re^{i\theta})\, d\theta < \infty.$$

Por otro lado, sean

$$\begin{aligned} g_r(e^{i\theta}) &= f(re^{i\theta}) \;\; 0 < r < 1, \;\; \theta \in \mathbf{T} \\ f_\rho(z) &= f(\rho z) \;\; 0 \leq \rho \leq 1 \;\; z \in \mathbf{D} \end{aligned}$$

Por hipótesis, $\{g_r\}$ es una sucesión en una bola cerrada y acotada de $\mathbf{L}^1(\lambda)$; por el teorema de Banach-Alaoglu (Teorema 1.4.3) esta bola es un compacto en la topología débil* de $C(\mathbf{T})^* = \mathbf{M}(\mathbf{T})$. Entonces existe $\mu \in \mathbf{M}(\mathbf{T})$ tal que

$$\lim_{r\to 1} \int_{(\cdot)} g_r(e^{i\theta})\, d\theta = \mu(\cdot).$$

Entonces, por el Teorema de Convergencia Dominada,

$$\begin{aligned} P[dg](\rho e^{i\theta}) &= \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(\rho, \theta - t)\, d\mu(t) \\ &= \lim_{r\to 1} \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(\rho, \theta - t) g_r(e^{it})\, dt \\ &= \lim_{r\to 1} f_r(\rho e^{i\theta}). \end{aligned}$$

Esta última función f_r es una función armónica que coincide con $g_r(e^{it}) = f(re^{it})$ en $\mathbf{T}$, por lo que, por ser f subarmónica

$$\int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(\rho, \theta - t) g_r(e^{it})\, dt \geq f(r\rho e^{i\theta}) = f_r(\rho e^{i\theta}).$$

Sacando límites

$$P[dg](\rho e^{i\theta}) \geq \lim_{r\to 1} f_r(\rho e^{i\theta}) = f(\rho e^{it}).$$

Por lo tanto f admite un mayorante armónico. □

Capítulo 3

El caso de funciones armónicas

En este capítulo se demuestra la existencia casi dondequiera de límites angulares de Integrales de Poisson de funciones de $\mathbf{L}^1(X,\lambda)$. El espacio de medidas vectoriales de variación acotada resulta ser isomorfo a $\mathbf{h}^1$, isomorfismo dado por medio de la Integral de Poisson.

En la última sección se estudia la existencia casi dondequiera de los límites angulares según la topología fuerte de operadores de funciones armónicas con valores en espacios de Banach de operadores lineales de $\mathcal{L}(X,Y)$. Se ve que esta existencia se da con las hipótesis de que X sea separable y Y tenga la propiedad de Radon-Nikodým.

Concluiremos en este capítulo que el tener límites angulares casi dondequiera para una función armónica del espacio $\mathbf{h}^1(X)$, donde X es un espacio de Banach, es equivalente a que X tenga la propiedad de Radon-Nikodým.

3.1 Funciones armónicas vectoriales

En esta sección definimos distintas clases de funciones y demostramos una equivalencia sobre funciones armónicas vectoriales.

3.1.1 Definiciones. *Para $u : \mathbf{D} \longrightarrow Y$, donde Y es un espacio de Banach, tenemos:*

1. *u es* **fuertemente continua** *en $x_0 \in \mathbf{D}$ si*

$$\lim_{x \to x_0} \|u(x) - u(x_0)\|_Y = 0.$$

Observemos que se está calculando el límite según la norma.

2. u *es* **fuertemente diferenciable** *en* $x_0 \in \mathbf{D}$ *si existe* $u'(x_0) \in Y$ *tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} = u'(x_0),$$

donde se está tomando el límite fuerte. $u'(x_0)$ *es la* **derivada fuerte** *de* u *en* x_0.

3. u *es* **(fuertemente) armónica** *si es de clase* $C^2(\mathbf{D}, Y)$, *es decir, fuertemente continua con segundas derivadas fuertemente continuas cumpliendo la ecuación de Laplace* $\Delta u = 0$.

4. u *es* **débilmente continua** *en* $x_0 \in \mathbf{D}$ *si*

$$\lim_{x \to x_0} |\langle u(x), y^* \rangle - \langle u(x_0), y^* \rangle| = 0$$

para toda $y^* \in Y^*$.

5. u *es* **débilmente diferenciable** *en* $x_0 \in \mathbf{D}$ *si existe* $u'(x_0) \in Y$ *tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} = u'(x_0),$$

donde se está tomando el límite débil. $u'(x_0)$ *es la* **derivada débil** *de* u *en* x_0.

6. u *es* **débilmente armónica** *si* $\langle u(\cdot), y^* \rangle$ *es armónica para toda* $y^* \in Y^*$.

7. u *es* **holomorfa o analítica** *en* $\mathbf{D}$ *si* $\langle u(\cdot), y^* \rangle$ *es holomorfa en* $\mathbf{D}$ *para toda* $y^* \in Y^*$. □

La definición de función analítica parecería que se restringe a que la función sea solamente débilmente diferenciable. Como se verá a continuación esto no es así. Una demostración de la siguiente proposición aparece en [13, p.251].

3.1.2 Proposición. *Si* f *es una función vectorial holomorfa definida sobre* $\mathbf{D}$ *entonces* f *es fuertemente continua y fuertemente diferenciable en* $\mathbf{D}$. *Esta continuidad y diferenciabilidad se dan de manera uniforme en cualquier subconjunto compacto de* $\mathbf{D}$. □

Antes de demostrar una proposición que será usada en repetidas ocasiones, nos interesa mostrar que la derivación tiene cierto comportamiento al aplicarse a $\langle u(\cdot), x^*\rangle$, donde $x^* \in X^*$ y $u : \mathbf{D} \longrightarrow X$.

3.1.3 Proposición. *Sea $u : \mathbf{D} \longrightarrow X$, X espacio de Banach, y supóngase que*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \mathbf{D} \longrightarrow X$$

existe. Entonces, para toda $x^* \in X^*$ se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\langle u(z), x^*\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} u(z), x^* \right\rangle.$$

Demostración.

$$\frac{\langle u(z+h), x^*\rangle - \langle u(z), x^*\rangle}{h} = \left\langle \frac{u(z+h) - u(z)}{h}, x^* \right\rangle.$$

Como x^* es continua, concluimos que

$$\lim_{h\to 0} \left\langle \frac{u(z+h) - u(z)}{h}, x^* \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u(z)}{\partial x_1}, x^* \right\rangle. \ \square$$

3.1.4 Corolario. *Si u es de clase $C^2(\mathbf{D}, X)$, entonces para todo $x^* \in X^*$*

$$\Delta\langle u(z), x^*\rangle = \langle \Delta u(z), x^*\rangle. \ \square$$

Para concluir esta sección, demostramos una equivalencia para funciones armónicas vectoriales.

3.1.5 Proposición. *Sea Y un espacio de Banach, $u : \mathbf{D} \longrightarrow Y$. Son equivalentes*

i) u es (fuertemente) armónica,

ii) u es débilmente armónica,

iii) Para $n \in \mathbf{Z}$ existen $c_n \in Y$ tales que

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

donde la serie es absolutamente convergente según la topología de Y; la convergencia es uniforme sobre compactos de $\mathbf{D}$.

Demostración.

i) $\Longrightarrow$ ii). Si u es fuertemente armónica y $y^* \in Y^*$. Nótese que

$$\Delta\langle u(\cdot), y^*\rangle = \langle \Delta u(\cdot), y^*\rangle = 0.$$

ii) $\Longrightarrow$ iii). Sea $re^{i\theta} \in \mathbf{D}$; sea $r < r_1 < 1$. Por la representación usual de Poisson tenemos que

$$\begin{aligned}\langle u(\rho e^{i\theta}), y^*\rangle &= \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(\rho, \theta - t)\langle u(r_1 e^{it}), y^*\rangle\, dt \\ &= \int_{\mathbf{T}} \langle \mathbf{P}(\rho, \theta - t) u(r_1 e^{it}), y^*\rangle\, dt \\ &= \left\langle \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(\rho, \theta - t) u(r_1 e^{it})\, dt, y^* \right\rangle\end{aligned}$$

para $\rho < r_1$; hemos aplicado el Teorema 1.6.7. Por lo tanto

$$\langle u(\rho e^{i\theta}), y^*\rangle = \left\langle \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(\rho, \theta - t) u(r_1 e^{it})\, dt, y^* \right\rangle.$$

para toda $y^* \in Y^*$ y $\rho < r_1$. Se tiene entonces que

$$u(\rho e^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(\rho, \theta - t) u(r_1 e^{it})\, dt.$$

Veamos ahora que si $r < r_2$, con $r_2 \neq r_1$ entonces

$$\langle u(\rho e^{i\theta}), y^*\rangle = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(\rho, \theta - t)\langle u(r_2 e^{it}), y^*\rangle\, dt$$

para $\rho < r_2$, por lo que siguiendo el procedimiento anterior llegamos a la igualdad

$$\int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(\rho, \theta - t) u(r_1 e^{it})\, dt = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(\rho, \theta - t) u(r_2 e^{it})\, dt, \tag{4}$$

de manera que no varía la integral eligiendo cualquier $R > r$.

Escribimos la representación en serie del núcleo de Poisson y obtenemos

$$u(\rho e^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in(\theta - t)} \right) u(r_1 e^{it})\, dt.$$

Por la convergencia absoluta en $\mathbf{D}_{r_1}$ y uniforme en $\overline{\mathbf{D}}_{r_1}$ de la serie se tiene

$$\int_{\mathbf{T}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in(\theta - t)} \right) u(r_1 e^{it})\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbf{T}} u(r_1 e^{it}) e^{-int}\, dt \right) \rho^{|n|} e^{in\theta}.$$

Hacemos

$$c_n = \int_{\mathbf{T}} u(r_1 e^{it}) e^{-int}\, dt.$$

Como se vió anteriormente, *estos coeficientes están determinados de manera única para cada* $z \in \mathbf{D}$ (4). Además, si $B \subset \mathbf{D}$ es acotado entonces $B \subset \mathbf{D_R}$, para alguna $0 < R < 1$. Entonces la serie converge uniformemente sobre B.

iii) $\Longrightarrow$ i). Sea $re^{i\theta} \in \mathbf{D}$.

$$\Delta u(re^{i\theta}) = \Delta \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n e^{in\theta} \right).$$

Como la serie es fuertemente convergente tenemos

$$\Delta \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta(c_n r^{|n|} e^{in\theta}).$$

De nuevo aplicamos la forma polar de la ecuación de Laplace [1, p. 162], haciendo $u(re^{i\theta}) = r^{|n|}e^{in\theta}$ para obtener

$$\begin{aligned}
\Delta c_n r^{|n|} e^{in\theta} &= c_n \Delta r^{|n|} e^{in\theta} \\
&= c_n \frac{1}{r^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right\} \\
&= c_n \frac{1}{r^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(r(e^{in\theta} |n| r^{|n|-1}) \right) + r^{|n|} e^{in\theta}(-n^2) \right\} \\
&= c_n \frac{1}{r^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} (e^{in\theta} |n| r^{|n|}) - n^2 r^{|n|} e^{in\theta} \right\} \\
&= c_n \frac{1}{r^2} \left\{ r e^{in\theta} |n|^2 r^{|n|-1} - n^2 r^{|n|} e^{in\theta} \right\} \\
&= c_n \frac{1}{r^2} \{0\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto u es fuertemente armónica. □

3.2 Espacios de Hardy vectoriales

Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio real o complejo de Banach. Al conjunto de funciones $f : \mathbf{D} \longrightarrow X$ analíticas en $\mathbf{D}$ también lo denotaremos por $\mathbf{H}(\mathbf{D})$ o bien por $\mathbf{H}(\mathbf{D}, X)$

cuando pueda haber confusión. Hemos adoptado la misma notación que fue usada para el caso escalar en lo que se refiere a algunas cantidades que sirven para definir a los espacios de Hardy (en este caso vectoriales). Se debe adoptar el enfoque necesario en cada caso.

Para $f \in \mathbf{H}(\mathbf{D})$ se define

$$\mathbf{M}_p(f,r) = \left(\int_{\mathbf{T}} \|f(re^{i\theta})\|_X^p \, d\theta\right)^{1/p}$$

para $0 < p < \infty$;

$$\mathbf{M}_0(f,r) = \exp\left(\int_{\mathbf{T}} \log^+ \|f(re^{i\theta})\|_X \, d\theta\right)$$

y también

$$\mathbf{M}_\infty(f,r) = \sup_{\theta\in\mathbf{T}} \|f(re^{i\theta})\|_X.$$

Para $f \in \mathbf{H}(\mathbf{D})$ y $0 \leq p \leq \infty$ se define

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{r\in[0,1)} \mathbf{M}_p(f,r); \tag{5}$$

para $u : \mathbf{D} \longrightarrow X$ armónica en $\mathbf{D}$ y $1 \leq p < \infty$ se define

$$\mathbf{M}_p(u,r) = \left(\int_{\mathbf{T}} \|u(re^{i\theta})\|_X^p \, d\theta\right)^{1/p},$$

y también

$$\mathbf{M}_\infty(u,r) = \sup_{\theta\in\mathbf{T}} \|u(re^{i\theta})\|_X.$$

Finalmente

$$\|u\|_{h_p} = \sup_{r\in[0,1)} \mathbf{M}_p(u,r).$$

3.2.1 Definición. *Definimos espacios de funciones analíticas vectoriales análogos a los espacios de Hardy escalares y a la clase de Nevanlinna.*

$$\mathbf{H}^p(X) = \{f \in \mathbf{H}(\mathbf{D}) : \|f\|_{H_p} < \infty\}$$

$$\mathbf{N}(X) = \{f \in \mathbf{H}(\mathbf{D}) : \|f\|_{H_0} < \infty\}.$$

Para funciones armónicas se tiene

$$\mathbf{h}^p(X) = \{u : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R} : u \text{ es armónica y } \|f\|_{h_p} < \infty\}. \ \square$$

Como en el caso escalar se tiene la siguiente proposición.

3.2.2 Proposición.

a) Si $1 \leq q \leq p \leq \infty$ *entonces* $\mathrm{h}^{\mathrm{p}}(X) \subset \mathrm{h}^{\mathrm{q}}(X)$.

b) Si $0 < q \leq p \leq \infty$ *entonces* $\mathrm{H}^{\mathrm{p}}(X) \subset \mathrm{H}^{\mathrm{q}}(X) \subset \mathrm{N}(X)$.

c) Si $1 \leq p \leq \infty$ *entonces* $\mathbf{H}^{\mathrm{p}}(X) \subset \mathrm{h}^{\mathrm{p}}(X)$.

Demostración.

Mostraremos sólo la última contención, pues las otras dos se demuestran igual que en el caso escalar. Dada $f \in \mathbf{H}^{\mathrm{p}}(X)$ se tiene que para toda $x^* \in X^*$, $\langle f(\cdot), x^* \rangle \in \mathbf{H}(\mathbf{D})$. Entonces, por ser x^* lineal y continua, como $\langle f(\cdot), x^* \rangle \in C^\infty$ se tiene que $f \in C^\infty$; de hecho admite un desarrollo en serie de Taylor [11, Teorema 1, pp 37-38]. Por otro lado $\Delta \langle f(\cdot), x^* \rangle = 0$, pues toda función con valores en $\mathbf{C}$ holomorfa es armónica. Además, por el Corolario 3.1.4

$$\Delta \langle f(\cdot), x^* \rangle = \langle \Delta f(\cdot), x^* \rangle = 0$$

para toda $x^* \in X^*$. Por lo tanto $\Delta f = 0$. Por la Proposición 3.1.5 concluimos que $f \in \mathrm{h}^{\mathrm{p}}(X)$. □

3.2.3 Definición. *Para* $0 < p < \infty$ *y* $f \in \mathrm{H}^{\mathrm{p}}(X)$, *donde* X *es un espacio de Banach, se define la* **función maximal de Hardy-Littlewood** *como*

$$F^*(t) = \sup_{r<1} \|f(re^{i\theta})\|_X. \ \square$$

Concluimos esta sección con el teorema maximal de Hardy-Littlewood.

3.2.4 Proposición. *Sean* $0 < p < \infty$ *y* $f \in \mathrm{H}^{\mathrm{p}}(X)$. *Entonces* $F^* \in \mathbf{L}^{\mathrm{p}}(X, \mu)$ *y además*

$$\|F^*\| \leq C\|f\|_{H_p},$$

donde $\|\cdot\|_{H_p}$ *se definió en* (5). □

3.3 Integrales vectoriales de Poisson-Stieltjes

Para $\phi \in \mathbf{L}^1(X, \lambda)$, al igual que en el caso escalar, definimos $P[d\phi] = P[\phi\, d\lambda]$ a la **integral de Poisson-Stieltjes** de ϕ. Con el objeto de definir la integral de Poisson de una medida vectorial, introducimos una integral vectorial de una función con valores en $\mathbf{C}$.

Sea X un espacio de Banach y sea $G : \mathcal{B} \longrightarrow X$ una medida vectorial sobre $(\mathbf{T}, \mathcal{B})$ de variación acotada σ-finita. Recuérdese que esto es equivalente a que la variación lo sea [6, **I**, 1, Proposición 9]. Para $\phi \in C(\mathbf{T}, \mathbf{C})$ definimos

$$\int_{\mathbf{T}} \phi(t)\, dG(t) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \phi(\xi_i) G((t_{i-1}, t_i])$$

donde $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 2\pi\}$, $t_{i-1} < \xi_i \leq t_i$ y $\|P\| = \max_i |t_i - t_{i-1}|$.

La existencia de este límite se discute a continuación.

Consideremos la sucesión de particiones

$$P_n = \left\{0, \frac{2\pi}{2^n}, \frac{2 \cdot 2\pi}{2^n}, \frac{3 \cdot 2\pi}{2^n}, \ldots, \pi, \ldots, \frac{(2^n - 1) \cdot 2\pi}{2^n}, 2\pi\right\}.$$

Si verificamos que la sucesión de sumas

$$S(\phi, P_n) = \sum_{t_i \in P_n} \phi(t_i) G([t_{i-1}, t_i))$$

forma una sucesión de Cauchy (por tanto convergente a cierto número real S), tendríamos que para P partición de $\mathbf{T}$ con $\|P\|$ pequeña, dada $\varepsilon > 0$ existe P_n tal que

$$|S(\phi, P) - S| \leq |S(\phi, P_n) - S(\phi, P)| + |S(\phi, P_n) - S| < \varepsilon$$

y entonces el límite existe.

Supóngase que $m > n$.

$$|S(\phi, P_n) - S(\phi, P_m)| \leq \sum_{j \in F} |\phi(y_j) - \phi(y_{j-1})| G(J_j)$$

donde F es un conjunto finito de índices y J_j son algunos de los intervalos correspondientes a P_m, o sea,$(t_{i-1}^m, t_i^m]$; de hecho éstos son los que no se eliminaron con los correspondientes intervalos de P_n.

Por continuidad de ϕ, eligiendo a n (y por tanto, también a m) suficientemente grande tenemos

$$\sum_{j \in F} |\phi(y_j) - \phi(y_{j-1})| G(J_j) \leq \varepsilon |G|(\mathbf{T})$$

y por tanto

$$|S(\phi, P_n) - S(\phi, P_m)| \leq \varepsilon |G|(\mathbf{T}).$$

Ahora podemos hablar, para $G \in \mathbf{M}(X)$, de la **integral de Poisson de una medida vectorial** G

$$P[dG](re^{i\theta}) = P(G)(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t)\, dG(t),$$

y de los coeficientes de Fourier de G

$$\widehat{G}(n) = \int_{\mathbf{T}} e^{-int}\, dG(t), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

3.3.1 Teorema. *Para cualquier espacio de Banach Y, el mapeo $P : \mathbf{M}(Y) \longrightarrow \mathbf{h}^1(Y)$ tal que $m \mapsto P[dm]$ es un isomorfismo.*

Para la demostración de este teorema, se necesitará el siguiente

Lema. *Sean Y, Z espacios de Banach tales que $Y \subset Z$ y $m \in \mathbf{M}(Z)$. Son equivalentes:*

i) $m \in \mathbf{M}(Y)$,

ii) $\widehat{m}(n) \in Y$ para toda $n \in \mathbf{Z}$ y

iii) $P[dm] : \mathbf{D} \longrightarrow Y$.

Demostración.

i) $\Longrightarrow$ iii). Es trivial.

iii) $\Longrightarrow$ ii). Como $P[d\mu]$ toma valores en el espacio de Banach Y, tenemos que

$$\begin{aligned} P[d\mu] &= \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t)\, d\mu \\ &= \int_{\mathbf{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}\, d\mu \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{T}} e^{-int}\, d\mu r^{|n|} e^{in\theta} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{m}(n) r^{|n|} e^{in\theta} \in Y. \end{aligned}$$

Así que para toda n se tiene $\widehat{m}(n) \in Y$

ii) $\Longrightarrow$ i). Si se cumple ii) entonces, dado p un polinomio trigonométrico

$$\int_{\mathbf{T}} p\, dm \in Y.$$

Por la densidad de los polinomios trigonométricos en $\mathbf{L}^1(|m|)$, entonces también se cumple esto para $f \in \mathbf{L}^1(|m|)$; lo mismo podemos decir para $f \in \mathbf{L}^1(m)$. Tomando $f = \chi_E$ con $E \in \mathcal{G}$, se tiene

$$m(E) = \int \chi_E\, dm \in Y \ \square$$

Demostración (del teorema)

Supóngase que $Y = X^*$ para algún espacio de Banach X. Sea $u \in \mathbf{h}^1(Y)$. Considérese la familia

$$\mathcal{F} = \{f_n(e^{it}) = u(r_n e^{it}) : n \in \mathbf{N}\}$$

donde $\{r_n\}$ es una sucesión arbitraria que converge a 1. Como

$$\int_{\mathbf{T}} \|f_n(e^{it})\|\, dt \leq \|u\|_{h_1} < \infty$$

entonces $\mathcal{F}$ está contenida en una bola cerrada de $\mathbf{L}^1(X^*, \mu) \subset \mathbf{M}(X^*)$; esta contención se da por el mapeo

$$f \mapsto \int_{(\cdot)} f\, d\lambda$$

siendo ésta última una integral de Bochner. Por el Teorema 1.7.2 tenemos que

$$\mathbf{M}(X^*) = \mathcal{C}(\mathbf{T}, X)^*$$

y entonces, por el Teorema de Banach-Alaoglu (1.4.3), la bola resultará débil*-compacto. De nuevo $\mathcal{C}(\mathbf{T}, X)$ es separable y entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge según la topología débil* a un elemento $m \in \mathbf{M}(X^*)$. Lo anterior quiere decir que para toda $\phi \in \mathcal{C}(\mathbf{T}, X)$

$$\langle \phi, f_{n_k} \rangle = \int_{\mathbf{T}} \phi(e^{it}) f_{n_k}(e^{it})\, dt \to \int_{\mathbf{T}} \phi(e^{it})\, dm(t) = \langle \phi, G \rangle. \tag{6}$$

Escribimos a f_{n_k} en su representación de Poisson

$$f_{n_k}(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t) f_{n_k}(e^{it})\, dt$$

y tomamos $\phi(e^{it}) = \mathbf{P}(r, \theta - t)$ en 6 para obtener

$$f_{n_k}(re^{i\theta}) \to \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t)\, dm(t),$$

al mismo tiempo que

$$f_{n_k}(z) \to u(z) \quad \forall z \in \mathbf{D}.$$

Por lo tanto

$$u(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t)\, dm(t).$$

Esto quiere decir que $u = \mathbf{P}[dm]$. De aquí que el mapeo sea *suprayectivo.*

Para ver que es inyectivo, supóngase que $P[dm] = 0$. Entonces

$$\langle P[dm], x^* \rangle(z) = 0$$

para toda $z \in \mathbf{D}$. Veamos ahora que

$$\langle P[dm], x^* \rangle = P[d\langle m(\cdot), x^* \rangle].$$

Esto es cierto porque

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(r, \xi_i - t) m((t_{i-1}, t_i]), x^* \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(r, \xi_i - t) \langle m((t_{i-1}, t_i]), x^* \rangle.$$

Por continuidad de x^* y $\mathbf{P}(r, \cdot - t)$, podemos sacar límites y obtener

$$\langle P[dm], x^* \rangle = P[d\langle m(\cdot), x^* \rangle].$$

Tenemos pues

$$P[d\langle m(\cdot), x^* \rangle](z) = 0$$

para toda $z \in \mathbf{D}$, es decir,

$$\int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t)\, d\langle m(t), x^* \rangle = 0$$

para toda $re^{i\theta} \in \mathbf{D}$. Entonces

$$\langle m(\cdot), x^* \rangle = 0$$

para toda $x^* \in X^*$. Por lo tanto m es la medida idénticamente cero, es decir, el mapeo es *inyectivo.*

Finalmente, se demuestra igual que en el caso escalar que si $m \in \mathbf{M}(X)$ entonces $\mathbf{P}[dm] \in \mathbf{h}^1(Y)$ (Teorema 2.1.4).

En el caso general, podemos suponer que $Y \subset X^*$, para cierto X espacio de Banach, (una manera de hacerlo es haciendo $X = Y^*$). Dada $u \in \mathbf{h}^1(Y)$, con el método anterior $u = P[dm]$ para una medida $m \in \mathbf{M}(X^*)$. Pero u toma valores en Y, por lo que, aplicando el lema $m \in \mathbf{M}(Y)$. Entonces repetimos el argumento anterior para ver que es isomorfismo. □

Como se dijo en el Capítulo 2, el siguiente teorema se demuestra como el análogo escalar (Teorema 2.2.1).

3.3.2 Teorema. *Sea $\phi \in \mathbf{L}^1(X, \lambda)$, donde X es un espacio de Banach, y sea $u = P[d\phi]$. Entonces el límite no tangencial*

$$\phi(e^{i\theta}) = \lim_{z \to e^{i\theta}} u(z)$$

existe para casi toda $\theta \in \mathbf{T}$. □

Demostración.

Por el Teorema 1.6.8, la derivada fuerte de

$$\Phi(\theta) = \int_0^\theta \phi(e^{it})\, dt$$

es $\phi(e^{it})$ casi dondequiera. Tomando un punto θ_1 donde se cumpla ésto, podemos suponer $\theta_1 = 0$ y $\phi(e^{i\theta_1}) = 0$ (por las mismas razones que se dieron en el caso escalar) y proseguir como en el Teorema 2.2.1:

Para $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ tal que, si $|t| < \delta$ entonces

$$\left\|\frac{1}{h}\Phi(t)\right\| < \varepsilon$$

Por otro lado, por la propiedad de la región $\mathbf{S}_\alpha(\theta)$ podemos acercar $|r-1|$ a 0 de manera que $|\theta| < \delta/4$.

Representando a u como Integral de Poisson

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r,\theta-t)\phi(e^{it})\,dt \\ &= \left[\int_{\delta<|t|<\pi} + \int_{[-\delta,\delta]}\right] \mathbf{P}(r,\theta-t)\phi(e^{it})\,dt \end{aligned}$$

Como en el caso escalar

$$\int_{\delta<|t|<\pi} \mathbf{P}(r,\theta-t)\phi(e^{it})\,dt \leq \sup_{\delta/2<|t|} \mathbf{P}(r,t)\|\phi\|_1$$

que tiende a 0 si r tiende a 1; además

$$\int_{-\delta}^{\delta} \mathbf{P}(r,\theta-t)\phi(e^{it})\,dt = [\mathbf{P}(r,\theta-t)\Phi(t)]_{-\delta}^{\delta} - \int_{-\delta}^{\delta} \Phi(t)\frac{\partial \mathbf{P}(r,\theta-t)}{\partial t}\,dt.$$

El primer sumando tiende a 0 y el segundo es igual a

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{2(1-r^2)r\sin(\theta-t)}{|1-2r\cos(\theta-t)+r^2|^2}\Phi(t)\,dt$$

que, suponiendo $\theta > 0$, dividimos como

$$\left[\int_{-\delta}^{0} + \int_{0}^{2\theta} + \int_{2\theta}^{\delta}\right] \frac{2(1-r^2)r\sin(\theta-t)}{|1-2r\cos(\theta-t)+r^2|^2}\Phi(t)\,dt.$$

Para el primer y tercer sumandos hacemos

$$\|\Phi(t)\| < \varepsilon|t| = \varepsilon(-t) \leq \varepsilon(\theta-t) \text{ y}$$

$$\|\Phi(t)\| < \varepsilon t \leq 2\varepsilon(t-\theta)$$

respectivamente; haciendo los cambios t por $\theta - t$ en el primer sumando y t por $t - \theta$ en el segundo, acotamos

$$\left\| \int_{-\delta}^{0} \frac{2(1-r^2) r \sin(\theta - t)}{|1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2|^2} \Phi(t)\, dt \right\| \leq \varepsilon \left(\pi - \frac{1}{2} \right)$$

en el primer sumando y análogamente para el tercero.

Para el segundo sumando

$$\|\Phi(t)\| < \varepsilon t \quad \text{y} \quad |\theta - t| < \theta$$

y entonces, como en Teorema 2.2.1,

$$\left\| \int_{0}^{2\pi} \frac{2(1-r^2) r \sin(\theta - t)}{|1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2|^2} \Phi(t)\, dt \right\| \leq 8\varepsilon c^3$$

donde la c es la constante de la región de Stolz (Definición 1.2.3). □

3.4 Relación con la propiedad de Radon-Nikodým

Como se ha dicho varias veces, se demostrará la relación entre la propiedad de Radon-Nikodým de X y la existencia de límites angulares casi dondequiera de funciones en $\mathbf{h}^1(X)$.

3.4.1 Teorema. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1) X posee la propiedad de Radon-Nikodým,

2) Toda $u \in \mathbf{h}^1(X)$ posee valores en la frontera no tangenciales casi dondequiera en $\mathbf{T}$,

3) Toda $u \in \mathbf{h}^\infty(X)$ tiene valores en la frontera radiales casi dondequiera en $\mathbf{T}$.

Demostración.

1) $\Longrightarrow$ 2). Sea $u \in \mathbf{h}^1(X)$. Entonces $u = P[d\mu]$ para alguna $\mu \in M(X)$. Sea $\mu = \mu_c + \mu_s$ la descomposición de Lebesgue de μ respecto a la medida de Lebesgue λ

(válida para medidas vectoriales por Teorema 1.7.3). Entonces $u = P[d\mu_c] + P[d\mu_s]$. Por 1) sabemos que existe

$$\phi = \frac{d\mu_c}{d\lambda} \in \mathbf{L}^1(\lambda).$$

Entonces tenemos que $u = P[d\phi] + P[d\mu_s]$. Por el Teorema 2.2.2 $P[d\phi]$ tiene valores en la frontera no tangenciales casi dondequiera en $\mathbf{T}$. Por otro lado,

$$\|P[d\mu_s](z)\|_X \leq P[d|\mu_s|](z)$$

para toda $z \in \mathbf{D}$. Esto es cierto porque

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(r, t-\xi_i)\mu_s([t_{i-1}, t_i])\right\|_X &\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(r, t-\xi_i)\|\mu_s([t_{i-1}, t_i])\|_X \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(r, t-\xi_i)|\mu|([t_{i-1}, t_i]);\end{aligned}$$

sacando límites, se obtiene la desigualdad requerida.

Como $|\mu_s| \perp \lambda$ entonces $P[d|\mu_s|]$ tiene límites angulares igual a cero λ-casi dondequiera, por [17, Teorema 8.6].

2) $\Longrightarrow$ 3). Recuérdese que $\mathbf{h}^\infty(X) \subset \mathbf{h}^1(X)$ y que el hecho de tener límite no tangencial implica en particular el tener límite radial.

3) $\Longrightarrow$ 1). El tener la propiedad de Radon-Nikodým es equivalente a que todo operador $T : \mathbf{L}^1(\lambda) \longrightarrow X$ sea representable por lo observado después del Teorema 1.7.8. Dado T como antes sea $F(z) = T(\mathbf{P}_z)$ donde $z = re^{i\theta}$ y $\mathbf{P}_z(t) = \mathbf{P}(r, \theta - t)$. F es una función armónica porque

$$\begin{aligned}\Delta F(re^{i\theta}) &= \Delta T(\mathbf{P}_z(\cdot)) \\ &= \Delta T(\mathbf{P}(r, \theta - \cdot)) \\ &= T(\Delta \mathbf{P}(r, \theta - \cdot)) \\ &= 0\end{aligned}$$

y es acotada en $\mathbf{D}$ porque

$$\begin{aligned}\|F(z)\| &= \|T(\mathbf{P}_z)\| \\ &\leq \|T\|\|\mathbf{P}_z\|_1.\end{aligned}$$

Nótese que

$$\|\mathbf{P}_z\|_1 = \int_{\mathbf{T}} |\mathbf{P}(r,\theta - t)|\,dt = 1.$$

Por lo tanto

$$\|F(z)\| \leq \|T\|\|\mathbf{P}_z\|_{\mathbf{L}^1(\mu)} < \infty,$$

es decir, $F \in \mathrm{h}^\infty(X)$. Por lo tanto existe

$$f(\theta) = \lim_{r \to 1} F(re^{i\theta})$$

para casi toda θ. A continuación demostraremos que f representa a T.

Para $g \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$, el mapeo $\psi_g : \mathbf{T} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{T})$ definido como $\psi_g(t) = \mathbf{P}(r,t-\cdot)g(t)$ es continuo, porque

$$\begin{aligned}
\|\psi_g(s) - \psi_g(t)\| &= \|\mathbf{P}(r,s-\cdot)g(s) - \mathbf{P}(r,t-\cdot)g(t)\| \\
&\leq \|g(t)(\mathbf{P}(r,t-\cdot) - \mathbf{P}(r,s-\cdot))\| + \|\mathbf{P}(r,t-\cdot)(g(t) - g(s))\|,
\end{aligned}$$

y ésto lo podemos hacer pequeño si $|s-t|$ lo es gracias a a la continuidad de g y de $\mathbf{P}(t-\cdot)$. Además la inclusión $\mathcal{C}(\mathbf{T}) \hookrightarrow \mathbf{L}^1(\lambda)$ es continua por lo que $\psi_g : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{L}^1(\lambda)$ es continua; entonces es una función Bochner integrable respecto a la medida de Lebesgue y para $T : \mathbf{L}^1(\mu) \longrightarrow X$ lineal y continua, se tiene

$$T\int_{\mathbf{T}} \psi_g(t)\,dt = \int_{\mathbf{T}} T\psi_g(t)\,dt$$

por el Teorema 1.6.7. Lo anterior fue tomando $g \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$ arbitraria.

Por otro lado, con f definida anteriormente,

$$\int_{\mathbf{T}} f(t)g(t)\,dt = \int_{\mathbf{T}} \left[\lim_{r\to 1} F(re^{it})\right] g(t)\,dt.$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada y teniendo en cuenta la Proposición 1.2.6 y lo que se acaba de hacer

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{T}} \left[\lim_{r\to 1} F(re^{it})\right] g(t)\,dt &= \lim_{r\to 1} \int_{\mathbf{T}} F(re^{it})g(t)\,dt \\
&= \lim_{r\to 1} \int_{\mathbf{T}} T(\mathbf{P}(r,t-\cdot))g(t)\,dt \\
&= \lim_{r\to 1} \int_{\mathbf{T}} T(\mathbf{P}(r,t-\cdot)g(t))\,dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{r\to 1} T\left(\int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r,t-\cdot)g(t)\,dt\right) \\
&= T\left(\lim_{r\to 1}\int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r,t-\cdot)g(t)\,dt\right) \\
&= T(g). \ \square
\end{aligned}$$

Entonces, la existencia de los límites depende sólo de el hecho de que el espacio de Banach del contradominio tenga la propiedad de Radon-Nikodým.

3.4.2 Corolario. *La condición*

"Toda $u \in \mathrm{h}^p(X)$ tiene límites radiales casi dondequiera"

es independiente de $p \in [1,\infty]$ y equivalente a que X tenga la propiedad de Radon-Nikodým. $\square$

3.4.3 Teorema. *Sea $u \in \mathrm{h}^1(X)$. Si u tiene límites radiales débilmente casi dondequiera, entonces tiene también límites angulares fuertemente casi dondequiera.*

Demostración.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que X es separable pues $u : \mathbf{D} \longrightarrow X$ es continua y la imagen de un conjunto separable bajo una función continua es separable. A partir de $u(\mathbf{D})$ separable obtenemos $Y = \overline{\bigvee u(\mathbf{D})}$, la cerradura del espacio lineal generado por $u(\mathbf{D})$, y podríamos usar a Y en lugar de X; Y es claramente separable.

Sea $u^*(e^{i\theta})$ el límite radial débil que existe casi dondequiera. Mostraremos que $u^* \in \mathbf{L}^1(\lambda)$; usando un resultado antes demostrado tomaremos $u = \mathbf{P}[dm]$, para cierta $m \in \mathbf{M}(\mathbf{T})$. Con la descomposición de Lebesgue de esta medida tomaremos $u = \mathbf{P}[dm_c] + \mathbf{P}[dm_s]$ y analizaremos los límites fuertes angulares de estas integrales de Poisson.

Aplicamos el Teorema de medibilidad de Pettis (1.6.3) y entonces tenemos que u^*, al ser débilmente medible, y al ser X separable, es fuertemente medible.

Observemos ahora que $\|\cdot\|_X$ es semicontinua inferiormente:

Definimos para $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$ el operador lineal $\Lambda : X \longrightarrow X$

$$\Lambda_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}x.$$

Esta función lineal cumple que

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha^{-1}\{x \in X : \|x\|_X > 1\} &= \left\{x \in X : \left\|\frac{1}{\alpha}x\right\|_X > 1\right\} \\ &= \{x \in X : \|x\|_X > \alpha\} \end{aligned}$$

Entonces, al ser Λ_α continua, tenemos que $\{x : \|x\|_X > \alpha\}$ es un abierto; para $\alpha \leq 0$

$$\{x \in X : \|x\|_X > \alpha\} = X$$

que es abierto mostrándose así que $\|\cdot\|_X$ es semicontinua inferiormente.

Por lo tanto, usando la equivalencia de semicontinuidad inferior

$$\|u^*(e^{i\theta})\|_X \leq \liminf_{r\to 1} \|u(re^{i\theta})\|_X.$$

Por el Lema de Fatou

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}} \|u^*(e^{i\theta})\|_X \, d\theta &\leq \liminf_{r\to 1} \int_{\mathbf{T}} \|u(re^{i\theta})\|_X \, d\theta \\ &\leq \|u\|_1 < \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto $u^* \in \mathbf{L}^1(\lambda)$. Ahora tomemos la descomposición de Lebesgue de m

$$u = P[dm] = P[dm_c] + P[dm_s],$$

donde, como se vió en la demostración de 1) $\Longrightarrow$ 2) del Teorema 3.4.1, $P[dm_s]$ tiene límite angular fuerte igual a 0 casi dondequiera. Por el Teorema 3.3.2, si demostramos que

$$u^* = \frac{dm_c}{d\lambda}$$

entonces tendremos que la función $v(z)$ definida como

$$v(z) = \mathbf{P}[dm_c](z) = \mathbf{P}[u^* d\lambda]$$

tiene como límite fuerte angular a u^*, y de aquí que u^* sea también el límite fuerte de u.

Sea $x^* \in X^*$. Entonces

$$\langle u^*(\cdot), x^* \rangle = \lim_{r \to 1} \langle u(\cdot), x^* \rangle$$

donde se está tomando el límite radial y la función escalar $\langle u(\cdot), x^* \rangle \in \mathbf{h}^1$. Además

$$\langle u(\cdot), x^* \rangle = P[d\langle m(\cdot), x^* \rangle],$$

esto es, es la integral de Poisson respecto a la medida indicada. Esta medida compleja tiene descomposición de Lebesgue

$$\langle u^*(\cdot), x^* \rangle = \langle m_c(\cdot), x^* \rangle + \langle m_s(\cdot), x^* \rangle.$$

Tenemos entonces por [17, Teorema 8.6] que

$$\langle u^*(\cdot), x^* \rangle = \frac{d\langle m_c(\cdot), x^* \rangle}{d\lambda}$$

casi dondequiera para toda $x^* \in X^*$. Esto quiere decir que

$$\begin{aligned} \langle m_c(\cdot), x^* \rangle &= \int_{(\cdot)} \langle u^*(t), x^* \rangle \, dt \\ &= \left\langle \int_{(\cdot)} u^*(t)\, dt, x^* \right\rangle \end{aligned}$$

para toda $x^* \in X^*$ usando el Teorema 1.6.7 en la segunda igualdad. Por lo tanto

$$u^* = \frac{dm_c}{d\lambda}$$

quedando demostrado lo que queríamos. □

3.5 Valores en espacios de operadores

3.5.1 Definición. *Sean X y Y espacios de Banach. Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ al espacio de las transformaciones lineales continuas de X a Y. La* **topología fuerte**

de operadores de X **a** Y *(o bien, cuando no pueda haber confusión, la* **topología fuerte de operadores***) es aquella que tiene como subbase a*

$$V(x,n) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : \|Tx\|_Y < 1/n\},$$

es decir, una base de esta topología es la familia de intersecciones finitas de conjuntos $V(x,n)$. □

Una interpretación para esta topología está dada por el hecho de que una red de elementos de $\mathcal{L}(X,Y)$ converge si y sólo si converge puntualmente. Nótese que para $Y = \mathbf{C}$, tenemos que la topología fuerte de operadores coincide con la topología débil* de X^*.

3.5.2 Teorema. *Sea X un espacio de Banach separable y Y un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodým. Entonces toda $u \in \mathrm{h}^1(\mathcal{L}(X,Y))$ tiene valores en la frontera no tangenciales casi dondequiera según la topología fuerte de operadores de $\mathcal{L}(X,Y)$*

Para demostrar este teorema, enunciamos antes algunos lemas.

3.5.3 Lema. *Sea Z un espacio de Banach cualquiera y $u \in \mathrm{h}^1(Z)$. Entonces para casi toda $\theta \in \mathbf{T}$*

$$\sup_{\alpha<\pi/2} \left(\limsup_{\substack{z\to e^{i\theta} \\ z\in S_\alpha(\theta)}} \|u(z)\| \right) < \infty.$$

Demostración.

Por ser u armónica,

$$u(z) = \int_{\mathbf{T}} u(z+\rho e^{it})\, dt$$

eligiendo la ρ adecuada de manera que $z+\rho e^{it} \in \mathbf{D}$ para $t \in \mathbf{T}$. Por lo tanto

$$\|u(z)\| \leq \int_{\mathbf{T}} \|u(z+\rho e^{it})\|\, dt$$

lo cual nos dice que $\|u(\cdot)\|$ es una función subarmónica. Además

$$\sup_{r<1} \int_{\mathbf{T}} \|u(re^{it})\|\, dt = \|u\|_{h_1} < \infty.$$

Por la Proposición 2.3.5, $\|u(z)\|$ admite un mayorante armónico $v(z)$ sobre $\mathbf{D}$. Esta función $v(z)$ es una función armónica positiva, por lo que dado $z \in \mathbf{D}$, elegimos $\rho > 0$ tal que $|z| < \rho < 1$ y tenemos que

$$|v(z)| \leq \int_{\mathbf{T}} v(\rho e^{it})\, dt = v(0).$$

Por lo tanto $v \in \mathbf{h}^1$.

Por lo visto en la teoría escalar (ver [17, Teorema 11.10]), v tiene límites angulares casi dondequiera. Como $\|u(z)\| \leq v(z)$, entonces se tiene lo que se quería probar. □

3.5.4 Lema. *Sea $V \subseteq X$ es un subespacio vectorial de X tal que $V = \bigvee\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, es decir, V es el subespacio generado por el conjunto $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y sea $u \in \mathbf{h}^1(\mathcal{L}(X,Y))$. Si definimos*

$$T(a_n) = \lim_{z\to e^{i\theta}} u(z)(a_n)$$

entonces podemos obtener un operador bien definido $\widetilde{T} : V \longrightarrow Y$ dado por

$$\widetilde{T}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lim_{z\to e^{i\theta}} u(z)(a_i), \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i.$$

Demostración.

Es consecuencia inmediata de la linealidad del límite. □

3.5.5 Lema. *Sean $u : \mathbf{D} \longrightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ y $x \in X$. Si $\partial u/\partial x_1$ existe entonces*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \in \mathcal{L}(X,Y),$$

y además

$$\frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}(u(\cdot)(x)).$$

Demostración.

Es inmediato a partir de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{u(z+h)(x) - u(z)(x)}{h} &= \frac{[u(z+h) - u(z)](x)}{h} \\ &= \left[\frac{u(z+h) - u(z)}{h}\right](x). \ \square \end{aligned}$$

Demostración (del teorema)

Sea $u \in \mathrm{h}^1(\mathcal{L}(X,Y))$. Sea $x \in X$. Tenemos que la función $u(\cdot)(x) : \mathbf{D} \longrightarrow Y$ es armónica porque, por el Lema 3.5.5

$$\Delta[u(\rho e^{i\theta})(x)] = [\Delta u(\rho e^{i\theta})](x) = 0.$$

Además, por ser $u(z)(\cdot)$ lineal y continua, tenemos que

$$\|u(z)(x)\|_Y \leq \|u(z)(\cdot)\|\|x\|_X.$$

Como $u \in \mathrm{h}^1(\mathcal{L}(X,Y))$ entonces $u(\cdot)(x) \in \mathrm{h}^1(Y)$. Ahora, por tener Y la propiedad de Radon-Nikodým, $u(\cdot)(x)$ tiene límites angulares casi dondequiera.

Sea $\mathcal{D} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso numerable de X. Definimos

$$A_n = \{\theta \in \mathbf{T} : \lim_{z \to e^{i\theta}} u(z)(x_n) \text{ existe}\}.$$

Nótese que $\lambda(A_n^c) = 0$ porque el límite existe casi dondequiera. Sea $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$; tenemos que

$$\lambda(A^c) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n^c) = 0.$$

Por lo tanto $\lambda(A^c) = 0$. Sea $V = \bigvee\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Definimos, para $\theta \in A$

$$v(x_n) = \lim_{z \to e^{i\theta}} u(z)(x_n).$$

Por el Lema 3.5.4, v puede extenderse a todo V. Pero también puede extenderse a todo X, como se verá a continuación. Si $x \in X$ entonces existe una sucesión $\{x_{n_k}\} \subset \mathcal{D}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x;$$

en particular, es una sucesión de Cauchy. Además, para $x \in V$ y usando el Lema 3.5.3

$$\begin{aligned}
\|v(x)\|_Y &\leq \lim_{z \to e^{i\theta}} \|u(z)(x)\| \\
&\leq \limsup_{z \to e^{i\theta}} \|u(z)(x)\| \\
&\leq C\|x\|_X.
\end{aligned}$$

Definimos entonces

$$v(x) = \lim_{k\to\infty} v(x_{n_k})$$

que resulta ser una función en $\mathcal{L}(X,Y)$. Por lo tanto, para toda $x \in X$ y para casi toda $\theta \in \mathbf{T}$ existe

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} u(z)(x) = v(x)$$

lo cual quiere decir que existe casi dondequiera el límite angular según la topología fuerte de los operadores de X a Y. □

Como corolario se tiene:

3.5.6 Teorema. *Sea X un espacio de Banach separable y $u \in \mathrm{h}^1(X^*)$. Entonces los límites no tangenciales de u según la topología débil* de X^* existen casi dondequiera.* □

Esto es consecuencia inmediata de lo observado después de definir la topología fuerte de operadores.

Capítulo 4

El caso de funciones analíticas

Gracias a la generalización para funciones analíticas vectoriales del Teorema de F. y R. Nivenlinna, basta estudiar al espacio $\mathbf{H}^\infty(X)$ para el análisis de la existencia de los valores en la frontera de funciones en $\mathbf{H}^\mathbf{p}(X)$. Después de definir la propiedad Analítica de Radon-Nikodým, se ve la equivalencia de que $\phi \in \mathbf{L}^\mathbf{p}(X,\lambda)$ sea la función de valores en la frontera de $f \in \mathbf{H}^\mathbf{p}(X)$ con la convergencia de $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$ a $\phi(e^{i\theta})$ según la norma de $\mathbf{L}^\mathbf{p}(X,\lambda)$.

Finalmente, de nuevo con la hipótesis de X separable y Y ahora con la propiedad analítica de Radon-Nikodým, se demuestra que toda función en $\mathrm{N}(\mathcal{L}(X,Y))$ tiene límites angulares casi dondequiera según la topología fuerte de operadores.

4.1 Teorema vectorial de F. y R. Nevanlinna

4.1.1 Teorema. *Sea X un espacio de Banach y $f \in \mathrm{N}(X)$. Entonces existe un par de funciones $g \in \mathrm{H}^\infty(X)$ y $h \in \mathrm{H}^\infty$ tales que h no tiene ceros y*

$$f = \frac{g}{h}.$$

Demostración.

La función

$$\log^+ \|f(z)\|_X = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \log^+ |\langle f(z), x^* \rangle|$$

Definimos entonces

$$v(x) = \lim_{k\to\infty} v(x_{n_k})$$

que resulta ser una función en $\mathcal{L}(X,Y)$. Por lo tanto, para toda $x \in X$ y para casi toda $\theta \in \mathbf{T}$ existe

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} u(z)(x) = v(x)$$

lo cual quiere decir que existe casi dondequiera el límite angular según la topología fuerte de los operadores de X a Y. □

Como corolario se tiene:

3.5.6 Teorema. *Sea X un espacio de Banach separable y $u \in \mathrm{h}^1(X^*)$. Entonces los límites no tangenciales de u según la topología débil* de X^* existen casi dondequiera.* □

Esto es consecuencia inmediata de lo observado después de definir la topología fuerte de operadores.

Capítulo 4

El caso de funciones analíticas

Gracias a la generalización para funciones analíticas vectoriales del Teorema de F. y R. Nivenlinna, basta estudiar al espacio $\mathbf{H}^{\infty}(X)$ para el análisis de la existencia de los valores en la frontera de funciones en $\mathbf{H}^{\mathbf{p}}(X)$. Después de definir la propiedad Analítica de Radon-Nikodým, se ve la equivalencia de que $\phi \in \mathbf{L}^{\mathbf{p}}(X, \lambda)$ sea la función de valores en la frontera de $f \in \mathbf{H}^{\mathbf{p}}(X)$ con la convergencia de $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$ a $\phi(e^{i\theta})$ según la norma de $\mathbf{L}^{\mathbf{p}}(X, \lambda)$.

Finalmente, de nuevo con la hipótesis de X separable y Y ahora con la propiedad analítica de Radon-Nikodým, se demuestra que toda función en $\mathbf{N}(\mathcal{L}(X, Y))$ tiene límites angulares casi dondequiera según la topología fuerte de operadores.

4.1 Teorema vectorial de F. y R. Nevanlinna

4.1.1 Teorema. *Sea X un espacio de Banach y $f \in \mathrm{N}(X)$. Entonces existe un par de funciones $g \in \mathrm{H}^{\infty}(X)$ y $h \in \mathrm{H}^{\infty}$ tales que h no tiene ceros y*

$$f = \frac{g}{h}.$$

Demostración.

La función

$$\log^{+} \|f(z)\|_X = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \log^{+} |\langle f(z), x^* \rangle|$$

es subarmónica en $\mathbf{D}$ porque $\langle f(z), x^*\rangle$ es analítica para toda $x^* \in X^*$ y $\log^+|g(z)|$ es subarmónica siempre que g sea analítica. Así que

$$\log^+|\langle f(z), x^*\rangle| \leq \int_{\mathbf{T}} \log^+|\langle f(z+\rho e^{i\theta}), x^*\rangle|\, d\theta;$$

sacando el supremo se tiene

$$\log^+\|f(z)\|_X \leq \int_{\mathbf{T}} \log^+\|f(z+\rho e^{i\theta})\|_X\, d\theta.$$

Como $f \in \mathbf{N}(X)$

$$\sup_{r<1} \int_{\mathbf{T}} \log^+\|f(re^{i\theta})\|_X\, d\theta < \infty.$$

Por la Proposición 2.3.5, sabemos que existe u armónica tal que es mayorante armónico de $\log^+\|f(z)\|_X$:

$$0 \leq \log^+\|f(z)\|_X \leq u(z).$$

Por lo tanto $\|f(z)\| \leq e^{u(z)}$, y entonces $\|e^{-u(z)}f(z)\| \leq 1$. Tomamos v, la conjugada armónica de u, y definimos

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z)\exp(-u(z) - iv(z)) \\ h(z) &= \exp(-u(z) - iv(z)). \end{aligned}$$

Tenemos que $g \in \mathbf{H}^\infty(X)$ porque

$$\sup_{z\in\mathbf{D}} \|g(z)\|_X = \sup_{z\in\mathbf{D}} \|f(z)e^{-u(z)}\|_X |e^{-iv(z)}| < 1$$

y obviamente es analítica pues f y $\exp(-u(z) - iv(z))$ lo son.

Además $h \in \mathbf{H}^\infty$ porque

$$\begin{aligned} \sup_{z\in\mathbf{D}} |h(z)| &= \sup_{z\in\mathbf{D}} |e^{-u(z)}||e^{-iv(z)}| \\ &\leq \sup_{z\in\mathbf{D}} |e^{-u(z)}| < \infty \end{aligned}$$

y también es analítica; además no tiene ceros.

Finalmente, de manera obvia $f = g/h$. □

Entonces, para que existan los límites no tangenciales de $\mathbf{H}^p(X)$ basta revisar al espacio $\mathbf{H}^\infty(X)$. Tenemos entonces lo siguiente

4.1.2 Corolario. *Denotando* $\mathrm{N}(X) = \mathrm{H}^0(X)$, *la condición*

"Toda $f \in \mathrm{H}^p(X)$ *tiene límites radiales casi dondequiera"*

es independiente de $p \in [0, \infty]$ □

Otro corolario del Teorema 4.1.1, aplicando el Teorema 3.4.3 es el siguiente

4.1.3 Proposición. *Si* $f \in \mathrm{N}(X)$ *tiene límites débiles radiales casi dondequiera, entonces también tiene límites fuertes angulares casi dondequiera.*

Demostración.

Sea $f \in \mathrm{N}(X)$. Como $f = g/h$ con $g \in \mathrm{H}^\infty(X)$ y $h \in \mathrm{H}^\infty$, entonces g y h tienen límites débiles radiales casi dondequiera. Pero

$$g \in \mathrm{H}^\infty(X) \subset \mathrm{H}^1(X) \subset \mathrm{h}^1(X)$$

y el tener límites radiales débiles casi dondequiera para funciones en $\mathrm{h}^1(X)$ implica el tener límites angulares fuertes casi dondequiera (Teorema 3.4.3).

Igualmente

$$h \in \mathrm{H}^\infty \subset \mathrm{H}^1 \subset \mathrm{h}^1$$

y toda función en h^1 es una integral de Poisson-Stieltjes, que tiene límites angulares casi dondequiera por el Teorema 2.2.1.

Por lo tanto f tiene límites angulares fuertes casi dondequiera. □

En el artículo de Bukhvalov y Danilevich [4, p.105] se define la propiedad analítica de Radon-Nikodým de la siguiente manera:

4.1.4 Definición. *Un espacio de Banach* X *tiene la* **propiedad analítica de Radon-Nikodým** *si para toda* $1 \leq p \leq \infty$, *dada una función en* $\mathrm{H}^p(X)$, *ésta tiene límites radiales casi dondequiera.* □

De hecho, como afirma la siguiente proposición, cuya demostración aparece en [4, Proposition 2], basta con que fijemos la p.

4.1.5 Proposición. *Si para alguna $p \in [1,\infty]$ toda función en $\mathbf{H}^p(X)$ tiene límites radiales casi dondequiera, entonces X tiene la propiedad analítica de Radon-Nikodým.* $\square$

Incluimos ahora lo que es una generalización vectorial del Teorema 2.3.4. Este resultado está demostrado para los valores $1 \leq p < \infty$ en el citado artículo de Bukhvalov y Danilevich y lo incluimos a continuación [4, Proposición 1].

4.1.6 Proposición. *Sean X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Para $F \in \mathbf{H}^p(X)$ definimos $F_r(e^{it}) = F(re^{it})$. Son equivalentes*

1) Existe $f \in \mathbf{L}^p(X,\lambda)$ tal que

$$F(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r,\theta - t) f(e^{it})\, dt.$$

2) La función $F_r(e^{it})$ converge casi dondequiera a cierta $f \in \mathbf{L}^p(X,\lambda)$, según la norma de X, cuando r tiende a 1.

3) F_r converge a $f \in \mathbf{L}^p(X,\lambda)$ según la norma de $\mathbf{L}^p(X,\lambda)$. $\square$

4.1.7 Teorema. *Sean X un espacio de Banach, $0 < p < \infty$, $f \in \mathbf{H}^p(X)$ y $\phi \in \mathbf{L}^p(X,\lambda)$. Definimos $f_r(e^{it}) = f(re^{it})$. Son equivalentes:*

1) $\lim_{r\to 1} f(re^{it}) = \phi(t)$ *casi dondequiera,*

2) $\lim_{r\to 1} f_r = \phi$ *según la norma* $\mathbf{L}^p(X,\lambda)$.

Demostración.

1) $\Longrightarrow$ 2). Por la Proposición 3.2.4, la función

$$F(t) = \sup_{r<1} \|f(re^{it})\|$$

petenece a $\mathbf{L}^p(X,\lambda)$. Se aplica entonces el Teorema de Convergencia Dominada (1.6.6), ya que se tiene convergencia casi dondequiera.

2) $\Longrightarrow$ 1). Sean $g \in \mathbf{H}^\infty(X)$ y $h \in \mathbf{H}^\infty$ tales que $f = g/h$. Para una sucesión $\{r_n\}$ tal que $r_n \to 1$ y tal que $f_{r_n} \to \phi$ casi dondequiera. Entonces $g_{r_n} = h_{r_n} f_{r_n} \to h^*\phi$ casi dondequiera.

Sea $\psi = h^*\phi$. Como $h^* \in \mathbf{L}^\infty(\lambda)$ y $\phi \in \mathbf{L}^p(X,\lambda)$, entonces $\psi \in \mathbf{L}^\infty(X,\lambda)$.

Si mostramos que $g_r \to \psi$ según la norma $\mathbf{L}^1(X,\lambda)$, tendríamos que también se da la convergencia casi dondequiera por lo visto en la Proposición 4.1.6, y entonces

$$f_r = \frac{g_r}{h_r} \to \frac{\psi}{h^*} = \phi$$

casi dondequiera.

Veamos pues que $g_r \to \psi$ en $\mathbf{L}^1(X,\lambda)$:

Dada una sucesión $\{r_n\}$ tal que $r_n \to 1$ basta hallar r_{n_k} subsucesión de r_n tal que $g_{r_{n_k}} \to \psi$. Como $f_{r_n} \to \phi$ en $\mathbf{L}^p(X,\lambda)$, entonces existe $\{r_{n_k}\}$ subsucesión de $\{r_n\}$ tal que $f_{r_{n_k}} \to \phi$ casi dondequiera. Entonces $g_{r_{n_k}} = h_{r_{n_k}} f_{r_{n_k}} \to h^*\phi = \psi$ casi dondequiera y por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{T}} \|g_{r_{n_k}} - \psi\|\, d\lambda = 0. \ \square$$

4.2 Valores en espacios de operadores

4.2.1 Teorema. *Sean X un espacio de Banach separable y Y un espacio de Banach con la propiedad anlítica de Radon-Nikodým. Entonces toda $f \in \mathbf{N}(\mathcal{L}(X,Y))$ admite límites angulares casi dondequiera según la topología fuerte de operadores de X a Y.*

Demostración.

Usamos el Teorema 4.1.1 y entonces basta mostrar que cualquier $f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{L}(X,Y))$ tiene límites angulares casi dondequiera. Nótese que

$$\mathbf{H}^\infty(\mathcal{L}(X,Y)) \subset \mathbf{H}^1(\mathcal{L}(X,Y)) \subset \mathbf{h}^1(\mathcal{L}(X,Y)).$$

Entonces la existencia casi dondequiera de límites angulares se demuestra del mismo modo en que se demostró el Teorema 3.5.2 y aún más fácil porque f es acotada no sólo en cierta región de $\mathbf{D}$ sino en todo $\mathbf{D}$ y entonces el Lema 3.5.3 es inmediato. $\square$

Como corolario tenemos lo siguiente.

4.2.2 Teorema. *Sea X un espacio de Banach separable y $f \in \mathbf{H}^1(X^*)$. Entonces los límites no tangenciales de u según la topología débil* de X^* existen casi dondequiera.*
$\square$

Capítulo 5

Valores en la frontera de funciones en $H^p(X)$

Tanto para el caso escalar como para el caso vectorial sabemos que el límite angular de una función analítica en un espacio $\mathbf{H^p}$ (resp. $\mathbf{H^p}(X)$) pertenece a $\mathbf{L^p}(\lambda)$ (resp. $\mathbf{L^p}(X,\lambda)$). En este capítulo estudiamos al subespacio de $\mathbf{L^p}(\lambda)$ (resp. $\mathbf{L^p}(X,\lambda)$) cuyos elementos son valores en la frontera de funciones en $\mathbf{H^p}$ (resp. $\mathbf{H^p}(X)$). La analogía que hay entre ambos casos, el escalar y el vectorial, es muy grande, como se verá a continuación.

5.1 El resultado del caso escalar

5.1.1 Teorema. *Sea $f \in \mathbf{H}(\mathbf{D})$. Entonces existe $\phi \in \mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ tal que $f = P[d\phi]$ si y sólo si $f \in \mathbf{H}^1$. En este caso ϕ coincide con función de valores en la frontera de f casi dondequiera.*

Demostración.

Si $f = P[d\phi]$ para alguna $\phi \in \mathbf{L}^1(\lambda)$ entonces, aplicando el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{T}} |f(re^{i\theta})|\,d\theta &\leq \int_{\mathbf{T}}\int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r,\theta - t)|\phi(e^{it})|\,dt\,d\theta \\ &= \int_{\mathbf{T}} |\phi(e^{it})| \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r,\theta - t)\,d\theta\,dt\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbf{T}} |\phi(e^{it})|\, dt < \infty.$$

Por lo tanto $f \in \mathbf{H}^1$.

Por otro lado, sean $f \in \mathbf{H}^1$ y

$$\Phi(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t) f(e^{i\theta})\, dt.$$

Para $\rho < 1$ fija

$$f(\rho e^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}(r, \theta - t) f(\rho e^{it})\, dt.$$

Pero por el Teorema 2.3.4

$$\lim_{\rho \to 1} \int_{\mathbf{T}} |f(\rho e^{it}) - f(e^{it})| = 0.$$

Así que

$$\lim_{\rho \to 1} f(\rho z) = \Phi(z).$$

Por lo tanto $f(e^{it}) = \Phi(e^{it})$. □

5.1.2 Corolario. *Sea $f \in \mathbf{H}(\mathbf{D})$. Entonces para $1 \leq p \leq \infty$ existe $\phi \in \mathbf{L}^p(\lambda)$ tal que $f = P[d\phi]$ si y sólo si $f \in \mathbf{H}^p$.* □

5.1.3 Teorema. *Sea*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

tal que $f \in \mathbf{H}^1$ y sean c_n los coeficientes de Fourier de la función de valores en la frontera. Entonces $c_n = a_n$ para toda $n \geq 0$ y $c_n = 0$ para toda $n < 0$. Más aún, definiendo

$$\mathcal{H}^p = \{f \in \mathbf{L}^p(\lambda) : f \text{ es la función de valores en la frontera de alguna } g \in \mathbf{H}^p\}$$

para $1 \leq p \leq \infty$, tenemos que

$$\mathcal{H}^p = \{f \in \mathbf{L}^p(\lambda) : \hat{f}(n) = 0 \quad n < 0\}.$$

Demostración.

Para $r < 1$, los coeficientes de Taylor de f se pueden poner como

$$a_n = \frac{1}{r^n} \int_{\mathbf{T}} e^{-int} f(re^{it})\, dt.$$

Entonces, poniendo $f_r(z) = f(rz)$,

$$|r^n a_n - c_n| \leq \|f_r - f\|_1.$$

Pero se tiene que

$$\lim_{r \to 1} \|f_r - f\|_1 = 0.$$

Por lo tanto $a_n = c_n$ para $n \geq 0$. Con un argumento análogo obtenemos que $c_n = 0$ para $n < 0$.

Si ahora suponemos que $\phi \in \mathrm{L^p}(\lambda)$ y $\widehat{\phi}(n) = 0$ para toda $n < 0$, entonces ponemos

$$f(re^{i\theta}) = \int_{\mathbf{T}} \mathrm{P}(r, \theta - t)\phi(t)\, dt,$$

es decir, $f = P[d\phi]$. Recordando que

$$\mathrm{P}(r, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{int} + e^{-int})$$

tenemos que

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$$

con $0 < r < 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por lo tanto $f \in \mathbf{H}(\mathbf{D})$. Por el corolario anterior $f \in \mathbf{H^p}$. Pero $\phi(t) = f(e^{it})$ casi dondequiera. Por lo tanto $f \in \mathcal{H}^p$. □

5.2 El resultado del caso vectorial

5.2.1 Definición.

1. Dada $1 < p < \infty$ y $G : \mathcal{B} \longrightarrow X$ medida vectorial, la p-variación *de G es*

$$|G|_p = \sup_{\pi \in \mathcal{P}} \left(\sum_{E \in \pi} \frac{\|G(E)\|^p}{\lambda(E)^{p-1}} \right)^{1/p},$$

donde $\mathcal{P}$ es la familia de particiones finitas de $\mathbf{T}$.

2. Para $p = \infty$ se define

$$|G|_\infty = \inf\{C \geq 0 : \|G(E)\| \leq C\lambda(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}\}.$$

Denotamos por $V^p(X)$ a los espacios de medidas de p-variación acotada para $1 < p \leq \infty$ □

5.2.2 Proposición. *Sea $1 < p \leq \infty$ y sea $G : \mathcal{B} \longrightarrow X$ una medida vectorial. $G \in V^p(X)$ si y sólo si existe $g \in L^p(\lambda)$ tal que $\|g\| = |G|_p$ y además, para $\phi \in \mathbf{L}^q(\lambda)$, con $1/p + 1/q = 1$, se tiene*

$$\left\| \int_{\mathbf{T}} \phi(t)\, dG(t) \right\|_X \leq \int_{\mathbf{T}} g(t)|\phi(t)|\, dt. \ \square$$

Una demostración se da en [3, §1., Proposición 3].

En [2, Teorema 1.1]se demuestra el siguiente teorema.

5.2.3 Teorema. *Sea $1 < p \leq \infty$. Entonces*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^1(X) &= \{G \in \mathbf{M}(X) : \widehat{G}(n) = 0 \quad n < 0\} \\ \mathbf{H}^p(X) &= \{G \in V^p(X) : \widehat{G}(n) = 0 \quad n < 0\} \end{aligned}$$

Ambas identificaciones son por medio de la integral de Poisson.

Con este teorema, Blasco demuestra una equivalencia para la definición de la Propiedad Analítica de Radon-Nikodým ver [2, Corolario 1.2].

5.2.4 Teorema. *Son equivalentes, para un espacio de Banach:*

a) X tiene la propiedad analítica de Radon-Nikodým,

b) Para $1 < p \leq \infty$, toda medida vectorial G de p-variación acotada tal que $\widehat{G}(n) = 0$ para $n < 0$ es representable,

c) Para alguna $1 < p \leq \infty$, toda medida vectorial G de p-variación acotada tal que $\widehat{G}(n) = 0$ para $n < 0$ es representable, y

d) Toda medida en $V^\infty(X)$ tal que $\widehat{G}(n) = 0$ para $n < 0$ es representable. □

Bibliografía

[1] Ahlfors, Lars V.: *Complex Analysis*, 3a. edición, McGraw-Hill, New York.

[2] Blasco, Oscar: *Boundary values of functions in vector-valued Hardy Spaces and geometry of Banach spaces*, J. Funct. Anal., **78** (1988), 346-364.

[3] Blasco, Oscar: *Boundary values of vector-valued harmonic functions considered as operators*, Studia Math., **86** (1987), 19-33.

[4] Bukhvalov A. V., A. A. Danilevich: *Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach space*, Mat. Zametki, **31** (1982), 203-214; la referencia que se usa aquí es la traducción al inglés que aparece en Math. Notes, **32** (1982), 104-110.

[5] Chatterji, S. D.: *Martingale convergence and the Radon-Nicodým theorem in Banach spaces*, Math. Scand., **22**, (1968), 21-41.

[6] Diestel J., J. J. Uhl Jr.: *Vector Measures*, American Mathematical Society, Providence, 1977.

[7] Dinculeanu, Nicolae: *Vector Measures*, Pergamon, Oxford, 1967.

[8] Dudley, Richard M.. *Real Analysis and Probability*, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, 1989.

[9] Duren, Peter L.: *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York, 1970.

[10] García Cuerva J, J. L. Rubio de Francia: *Weighted Norm Inequalities and related topics*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1985.

[11] Grothendieck, Alexandre: *Sur certains espaces de fonctions holomorphes I*, J. Reine und Angewandte Math., **192** (1953), 35-64.

[12] Hensgen, Wolfgang: *Some remarks on boundary values of vector-valued harmonic and analytic functions*, Arch. Math., **57** (1991), 88-96.

[13] Hille, Einar: *Methods in Classical and Functional Analysis*, Addison-Wesley, New York, 1972.

[14] Katznelson, Yitzhak: *An Introduction to Harmonic Analysis*, 2a. edición, Dover, New York, 1976.

[15] Koosis, Paul: *Introduction to H^p spaces*, "London Mathematical Society Lecture Note Series" **40**, Cambridge, 1980.

[16] Rudin, Walter: *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Singapore, 1991.

[17] Rudin, Walter: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New Delhi, 1982.

[18] Singer, I.: *Sur les applications linéares integrales des espaces fonctions continues*, Rev. Roumaine Math. Pures. Appl. **4** (1959), 391-401.