

00365  
22e.



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**  
División de Estudios de Posgrado

TRAYECTORIAS MONOCROMATICAS EN  
DIGRAFICAS LINEALMENTE COLOREADAS

T E S I S  
Que para obtener el grado Académico de  
**MAESTRIA EN CIENCIAS**  
**( M A T E M A T I C A S )**  
p r e s e n t a

*PATRICIA CORTES FLORES*

Directora de Tesis: Dra. Hortensia Galeana Sánchez

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A Quique Tane y Peti cariñosamente**

Deseo expresar mi profundo agradecimiento a la Dra. Hortensia Galeana Sánchez cuyos generosos consejos y sugerencias guiaron este trabajo. Le agradezco también las muestras de amistad que me brindó.

Mi gratitud igualmente a los profesores:

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

M. en C. Virginia Abrín Batule

Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

M. en C. Ma. del Carmen Hernández Ayuso

Dra. Zenaida Elvira Ramos Zúñiga

Dr. Abdón Sánchez Arroyo

Quienes conforman la comisión dictaminadora, por su paciente revisión y valiosas sugerencias.

## I N D I C E

Introducción.....	1
Nociones preliminares.....	4
Capítulo I Panorama sobre trayectorias monocromáticas en digráficas m-coloreadas por aristas.....	11
Capítulo II Algunos casos particulares de la conjetura Sands Sauer Woodrow.....	41
Capítulo III Torneos m-coloreados por aristas.....	69
Capítulo IV Dos operaciones que preser- van propiedades relativas a núcleos.....	86
Conclusiones.....	109
Referencias.....	111

## I N T R O D U C C I O N

Después de que en 1961 C. Berge definió las gráficas perfectas se ha tratado de dar una caracterización de las mismas sin lograrlo.

Una gráfica  $G$  es perfecta si para cada subgráfica inducida  $H$  de  $G$  se tiene que  $\chi(H) = \omega(H)$ . Siendo  $\chi(H)$  el número cromático de  $H$  y  $\omega(H)$  el cardinal de la completa maximal de  $H$ .

De los resultados sobre gráficas perfectas, L. Lovász demostró un teorema que resuelve una conjetura que se había planteado con anterioridad, el resultado es el siguiente:

Teorema de gráficas perfectas: para una gráfica no orientada  $G$  las 3 condiciones siguientes son equivalentes:

1.  $\alpha(G_A) = \theta(G_A)$        $A \subset X$
2.  $\omega(G_A) = \gamma(G_A)$        $A \subset X$
3.  $\alpha(G_A) \cdot \omega(G_A) \geq |A|$        $A \subset X$

Después otros resultados se han obtenido sobre caracterización de gráficas perfectas, se sabe por ejemplo que las gráficas trianguladas y las de comparabilidad lo son. Después surgió el problema de las gráficas núcleo perfectas que tampoco se han podido caracterizar totalmente.

Para que una gráfica  $D$  sea núcleo perfecta es necesario que

toda subgráfica completa  $D$  posea un núcleo, en este caso un pozo.

Llamaremos núcleo perfectible a una gráfica no orientada que verifique que para toda orientación de  $D$  tal que toda subgráfica completa posea un pozo resulte en una gráfica núcleo-perfecta. Algunos ejemplos sencillos de este tipo de gráficas son: las completas, los ciclos de longitud par, las subgráficas bipartitas, etc.

Más adelante y profundizando más sobre el tema se encontraron otra clase de gráficas núcleo perfectibles, como las trianguladas y las de comparabilidad que como se mencionó también son perfectas.

Vemos que primero surgió un tema sobre gráficas no orientadas, después se planteó el problema de núcleo-perfectas que involucra orientación, ahora ha surgido otra inquietud en la misma dirección que los núcleos, pero con otro enfoque. En este caso se trata no sólo de orientar gráficas sino de asignar colores a las flechas. Dada una digráfica orientada y coloreada en sus flechas trataremos de encontrar un núcleo, pero dicho núcleo será un conjunto Independiente y Absorbente a la vez, no mediante flechas directas sino por trayectorias de un solo color (trayectorias monocromáticas).

En el caso de núcleos por trayectorias monocromáticas se han obtenido ya algunos resultados, especialmente para torneos.

En 1982 se propuso una conjetura interesante debida a Sands, Sauer Woodrow.

El tema de nuestro trabajo es el de núcleos en digráficas coloreadas en sus flechas (Núcleo por trayectorias monocromáticas).

Primeramente se recopiló el material sobre este tema, en este material destaca la conjetura a que se hacía mención y que dice:

Si  $T$  es un torneo 3-coloreado en aristas sin  $C_3$  tricolores entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Después se hace una primera aproximación a la conjetura mediante el Teorema de Shen Minggang, quien concluye que para torneos  $n$ -coloreados  $n \geq 5$  la conjetura fallaría y deja abierto el problema para torneos 3-coloreados y 4-coloreados.

En la segunda parte abordamos la conjetura y queda resuelta para torneos de cardinalidad  $n \leq 6$ .

Después en el capítulo III se enuncian varios teoremas, entre ellos 2 sobre existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas.

Y finalmente se amplía la clase de gráficas con núcleo por trayectorias monocromáticas mediante una operación que llamamos árbol de completas. Cabe señalar que esta operación preserva núcleo-perfectibilidad para gráficas no coloreadas, lo cual amplía también esa clase de gráficas.

## N O C I O N E S   P R E L I M I N A R E S

### Gráficas.

Una gráfica  $G$  consiste de un conjunto finito no vacío  $V=V(G)$  de puntos llamados vértices junto con un conjunto  $A$  de pares no ordenados de vértices distintos de  $V$ .

Cada par de puntos de  $A$   $[u,v]$  es una arista de  $G$  y se dice que  $u$  y  $v$  son adyacentes.

Si  $x$  es la arista  $[u,v]$  se dice que  $x$  es incidente con  $u$  y  $v$ .

Una gráfica con  $p$  vértices y  $q$  aristas se dice que es una  $(p,q)$  gráfica.

A  $p$  se le llama el orden de  $G$ .

Un camino de una gráfica es una sucesión alternada de vértices y aristas  $[v_0, x_1, v_1, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n]$  que inicia y termina por vértices y cuyas aristas son incidentes con los vértices precedente y siguiente en la lista. Este camino une  $v_0$  y  $v_n$ , se puede denotar simplemente  $[v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n]$ . También lo llamaremos  $v_0 v_n$ -camino.

Un camino será un camino cerrado si  $v_0=v_n$ .

Se llamará trayectoria a un camino cuyos puntos sean todos distintos (y por lo tanto las líneas también). La trayectoria que une a dos puntos  $u$  y  $v$  se le llamará también  $uv$ -trayectoria.

La longitud de una trayectoria  $[v_0, \dots, v_n]$  es  $n$  el número de aristas en ella.

Un circuito es un camino cerrado  $[v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, v_0]$  con  $n \geq 3$ .

Se dirá que una gráfica es conexa si todo par de puntos está unido por una trayectoria.

La relación  $xy$ -trayectoria es una relación de equivalencia cuyas clases son llamadas las componentes conexas de  $G$ . La gráfica es conexa si posee una sola componente conexa.

Un punto de corte de  $G$  es un vértice de  $G$  tal que al quitarlo la gráfica se desconecta (obviamente al quitar un vértice se quitan las aristas que eran incidentes a dicho vértice).

Un conjunto de corte de  $G$  es un subconjunto de los vértices de  $G$  tal que al quitarlo la gráfica se desconecta.

Una gráfica  $G$  se dice que es completa si  $\forall$  par de vértices  $u, v \in V(G)$   $[u, v] \in A(G)$ . Denotamos  $K_n$  a la gráfica completa con  $n$  vértices.

$G$  es una gráfica bipartita se existe una partición de los vértices de  $G$  en 2 conjuntos  $X$  y  $Y$  tales que toda arista tiene un extremo en  $X$  y otro en  $Y$ .

Un árbol es una gráfica conexa y acíclica (sin circuitos).

El complemento de una gráfica  $G$ , denotado  $G^c$  se define de la

siguiente forma:

$$V(G^c) = V(G)$$

$$[x, y] \in V(G^c) \Leftrightarrow [x, y] \notin V(G)$$

Una subgráfica de  $G$  es una gráfica con todos los vértices y aristas contenidos en  $G$ .

Dado un conjunto  $V_0$  de vértices de  $G$  la subgráfica de  $G$  inducida por  $V_0$  es la subgráfica maximal de  $G$  con conjunto de vértices  $V_0$  (2 vértices son adyacentes  $\Leftrightarrow$  son adyacentes en  $G$ ) y se denota  $G_{V_0}$ .

Una subgráfica generadora de  $G$  es una subgráfica de  $G$  que contiene a todos los vértices de  $G$ .

#### Gráficas orientadas.

Una gráfica orientada o digráfica  $D$  es una pareja  $(V, F)$  formada por un conjunto  $V$  y una familia  $F$  de elementos del producto cartesiano  $V \times V$ . Los elementos de  $V$  son los vértices de  $D$ .

A la cardinalidad de  $D$  se le llama el orden de  $D$ .

Los elementos de  $F$  son llamados flechas de  $D$ . Los vértices  $x$  y  $y$  son llamados vértice inicial y vértice final respectivamente de la flecha  $(x, y)$ .

A una flecha de la forma  $(x, x)$  se le llamará lazo de  $D$ . En el presente trabajo consideraremos digráficas sin lazos.

La multiplicidad de  $D$  es el número máximo de veces que aparece un arco dado en la familia  $F$ .

Una gráfica simple es una gráfica de multiplicidad 1 sin lazos.

Si la flecha  $(x,y) \in F$  decimos que  $x$  y  $y$  son adyacentes. Al vértice  $y$  se le llama sucesor de  $x$  y al  $x$  se le llama predecesor de  $y$ .

$\Gamma_D^+(x)$  (o  $\Gamma^+(x)$  si no hay ambigüedad), representa al conjunto de sucesores de  $x$  en  $D$ .

$\Gamma_D^-(x)$  (o  $\Gamma^-(x)$ ) representa el conjunto de vértices predecesores de  $x$  en  $D$ .

Los vecinos de  $x$  son los vértices del conjunto  $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$ .

Una subdigráfica  $D_0$  de  $D$  inducida por  $V_0 \subseteq V(D)$  se define como sigue  $V(D_0) = V_0$  y  $F(D_0) = F(D) \cap (V_0 \times V_0)$ , también se suele denotar por  $D_{V_0}$ .

Una subdigráfica de  $D$  es una digráfica cuyos vértices y flechas están contenidos en  $V(D)$  y  $F(D)$  respectivamente.

Una subdigráfica generadora es una subdigráfica de  $D$  cuyo conjunto de vértices es  $V(D)$ .

La parte asimétrica de  $D$ , que se denotará  $\text{Asim}(D)$  o  $\text{Asim}D$  es la subdigráfica generadora de  $D$  cuyas flechas son las flechas de  $D$  que no son simétricas, es decir sus flechas son las flechas asimétricas de  $D$ .  $\text{Sim}(D)$  o  $\text{Sim}D$  es la subdigráfica generadora de  $D$  cuyas flechas son las flechas simétricas de  $D$ .

Un camino es una sucesión  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  de vértices tal que

$(v_{i-1}, v_i) \in F(D)$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$  si  $v_0 = v_n$  el camino se llamará camino cerrado. La longitud del camino es  $n$ .

Una trayectoria es un camino en el cual ningún vértice se repite, una trayectoria  $(u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$ , se dice que conecta o une a  $u$  con  $v$  y la llamaremos  $uv$ -trayectoria.

Un ciclo es un camino cerrado  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  tal que cuando  $i \neq 0, n$ , se tiene que  $v_i \neq v_j$ ,  $\forall i \neq j$ .

Diremos que un ciclo es un ciclo impar si su longitud es impar y un ciclo es par cuando su longitud es par.

Sea  $D$  una digráfica, consideremos en  $V(D)$  la siguiente relación binaria  $(-)$ , para  $u, v \in V(D)$   $u-v \in \exists$  una  $uv$ -trayectoria en  $D$  y una  $vu$ -trayectoria en  $D$ . La relación es una relación de equivalencia en  $V(D)$ . Las clases de equivalencia son las componentes fuertemente conexas de  $D$ . Si  $D$  tiene una sola componente conexa se dirá que  $D$  es fuertemente conexa.

Si  $D$  es una gráfica orientada, se puede obtener la gráfica no orientada  $D^*$  reemplazando cada arco antisimétrico (o asimétrico) y cada par de arcos simétricos por una arista, a  $D^*$  se le llama gráfica subyacente.

Recíprocamente, si  $G$  es una gráfica no orientada, llamaremos una orientación de  $G$  a toda gráfica orientada  $D$  tal que  $D^* = G$ . Un punto de corte de una digráfica es un punto de corte de la gráfica subyacente.

Un torneo es una gráfica completa orientada.

## Núcleos en Digráficas.

Un vértice  $x$  de una subgráfica inducida completa de una digráfica  $D$  diremos que es un pozo si  $C-\{x\} \subseteq \Gamma^-(x)$ . Es decir si todos los vértices  $C-\{x\}$  son absorbidos por  $x$ . Diremos que un vértice  $z$  de  $C$  es una fuente si  $C-\{z\} \subseteq \Gamma^+(z)$ .

Sea  $D$  una digráfica y  $G$  su gráfica subyacente, diremos que  $D$  es una orientación por pozos u orientación normal de  $G$ , si toda subgráfica inducida completa de  $D$  tiene un pozo.

Consideremos una gráfica simple  $G$  y un conjunto  $I \subseteq V(D)$ , se dice que  $I$  es independiente si 2 vértices distintos de  $I$  nunca son adyacentes, en otras palabras, si  $\Gamma(I) \cap I = \emptyset$ .

En una digráfica un conjunto será independiente si 2 vértices distintos de  $I$  no están unidos por una flecha (en cualquier sentido).

Dada una digráfica  $D$  decimos que un conjunto  $A \subseteq V(D)$  es absorbente si  $\forall x \in A$  tenemos que  $\Gamma^+(x) \cap A = \emptyset$ .

Dada una digráfica  $D$ , un conjunto  $N \subseteq V(D)$  es un Núcleo de  $D$  si es independiente y absorbente a la vez.

Una gráfica orientada  $D$  es núcleo perfecta si tanto ella como todas sus subgráficas inducidas tienen núcleo.

Una digráfica núcleo imperfecta crítica es una digráfica  $G$  sin núcleo y tal que toda subgráfica inducida estrictamente contenida en  $G$  es núcleo perfecta.

## Digráficas Linealmente Coloreadas.

Se hablará de digráficas linealmente coloreadas o coloreadas en aristas si sus flechas tienen asignado un color (sin tener nada que ver con buena coloración).

Una trayectoria monocromática de una digráfica linealmente coloreada será una trayectoria dirigida en la que todas sus flechas tienen asignado el mismo color.

Un conjunto  $S \subseteq V(D)$  diremos que es independiente por trayectorias monocromáticas si para toda pareja  $x, y$  de vértices distintos de  $S$ , no existe trayectoria monocromática ni de  $x$  a  $y$  ni de  $y$  a  $x$ .

Un conjunto  $S \subseteq V(D)$  diremos que es absorbente por trayectorias monocromáticas si  $\forall x \in V(D-S)$  existe una  $xS$ -trayectoria monocromática.

Un conjunto  $N \subseteq V(D)$  diremos que es un núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$  si es independiente y absorbente por trayectorias monocromáticas a la vez.

## CAPITULO I

### PANORAMA SOBRE TRAYECTORIAS MONOCROMATICAS EN DIGRAFICAS m-COLOREADAS POR ARISTAS.

En la primera parte damos un panorama general del problema de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas coloreadas por aristas. Mencionando los resultados conocidos sobre el tema.

El primer resultado es muy interesante por su generalidad. Nos dice que toda digráfica coloreada con 2 colores tiene núcleo por trayectorias monocromáticas siendo la única restricción que no existan trayectorias monocromáticas infinitas a partir de un punto (trayectorias exteriores infinitas).

Un corolario inmediato es que todo torneo finito 2-coloreado tiene un vértice que es núcleo por trayectorias monocromáticas.

Después se hace notar que si el torneo es monocromático siempre existe un vértice  $v$  absorbente con la característica adicional de que siempre existe una trayectoria de longitud  $a$

los más 2 de cualquier vértice hacia v.

Para el caso del corolario, es decir de un torneo bicoloreado no puede existir una cota para la longitud de la trayectoria mínima monocromática de cualquier vértice al núcleo. Esto último se ve en un ejemplo en el que la trayectoria mínima para un punto es pasando por todos los demás vértices.

Más adelante se ve que el resultado del corolario es falso para torneos 3-coloreados.

Sin embargo bajo ciertas hipótesis extras continuará siendo válido. Por ejemplo, si el torneo es transitivo.

Otro ejemplo que se ilustra como teorema es el siguiente:

Si  $T$  torneo 3-coloreado el cual puede ser particionado en subtorneos bicoloreados y unidos mediante todas las aristas al resto de los subtorneos mediante flechas coloreadas con un mismo tercer color. Entoncens  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Después se analiza la conjetura de Sands Sauer Woodrow:

Si  $T$  torneo 3-coloreado sin  $C_3$  tricolor entonces  $T$  tiene Núcleo por trayectorias monocromáticas.

Una primera aproximación a la conjetura la da Shen Minggang:

Si  $T$  es un torneo  $m$ -coloreado sin  $C_3$  ni  $T_3$  tricolores entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Es un resultado interesante que aunque agrega una fuerte hipótesis a la conjetura, (no hay triángulos transitivos

tricolores), da más libertad para la coloración de las flechas.

Un corolario a este resultado es el siguiente:

Siendo  $T$  un torneo con vértices  $\{v_1, \dots, v_n\}$  y  $H_1, \dots, H_n$  al igual que  $T$  torneos  $m$ -coloreados (no importando si no son los mismos  $m$  colores) sin  $C_3$  ni  $T_3$  tricolores. Si se realiza la operación de sustituir  $v_i$  por  $H_i$  y después unir todo vértice de  $H_i$  con todo vértice de  $H_j$  coloreando con el color que tenía la flecha  $(v_i, v_j)$  y con direcciones arbitrarias, el torneo  $T'$  formado así, tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Para terminar se analizan 2 ejemplos:

Un torneo  $T$  con  $m=5$  sin  $C_3$  tricolor (pero sí  $T_3$  tricolor) en el que el resultado falla.

Se ve otro torneo con  $m=4$  y sin  $T_3$  tricolor para el cual el resultado falla también.

De estos dos ejemplos se deduce que para  $m \geq 5$  las hipótesis son las mejores posibles, el resultado no puede ser mejorado. Pero la conjetura continúa sin resolverse.

### 1.1. NOCIONES PRELIMINARES.

**Definición 1.1.1.** Una  $xS$ -trayectoria de  $D$  es una trayectoria del vértice  $x$  a un vértice  $s$  de  $S$ , donde  $S \subseteq V(D)$ .

**Definición 1.1.2.** Una trayectoria exterior infinita es una sucesión  $(x_1, x_2, \dots)$  infinita de vértices distintos de  $D$  tales que  $(x_i, x_{i+1})$  es una flecha de  $D$ .

**Definición 1.1.3.** Se denotará  $C_3$  al ciclo dirigido de longitud 3 y  $T_3$  al triángulo transitivo:



Para la demostración del primer teorema, que enunciaremos más adelante, tenemos las siguientes nociones y resultados preliminares:

Supongamos que 2 colores usados para colorear las flechas de una digráfica son rojo y azul

$$(x \rightarrow \text{rojo } y) \quad (x \rightarrow \text{azul } y), \quad (x \rightarrow \text{mono } y).$$

Significará que existe una trayectoria roja (respectivamente azul o monocromática) de  $x$  a  $y$ .

$(X \rightarrow \text{rojo } S) (X \rightarrow \text{azul } S), (X \rightarrow \text{mono } S)$

Significará que existe una  $xS$  trayectoria roja  
(respectivamente azul o monocromática).

$(X \not\rightarrow \text{rojo } y) (X \not\rightarrow \text{azul } y), (X \not\rightarrow \text{mono } y)$

Significará que no existe trayectoria roja de  $x$  a  $y$   
(respectivamente azul o monocromática).

**Definición 1.1.4.** Definimos la relación " $\leq$ " para subconjuntos del

conjunto de vértices de  $D$  de la siguiente manera:

Sean  $S, T \subseteq V(D)$ , diremos que  $S \leq T$  si  $\forall s \in S$  existe  $t \in T$  tal que una de las dos propiedades siguientes se cumple:

(a)  $s \in T$

(b)  $(s \rightarrow \text{azul } t)$  y  $(t \not\rightarrow \text{azul } s)$

Nótese que si  $S \leq T$  entonces  $S \leq T$ .

**Resultado 1.1.1.** Si  $D$  es una digráfica bicolorada y  $D$  no contiene trayectoria monocromática exterior infinita entonces el conjunto de todos los conjuntos independientes de  $D$  es parcialmente ordenado bajo la relación " $\leq$ ".

**Demostración:**

(a) Reflexiva. Es inmediato de (a)

(b) Transitiva:

Si  $S \leq T$  entonces de acuerdo a la definición,  $\forall s \in S$   $s \in T$  o  $\exists t \in T$  tal que  $(s \rightarrow \text{azul } t)$  y  $(t \not\rightarrow \text{azul } s)$ .

Si  $T \leq R$  entonces  $\forall t \in T \exists r \in R$  tal que  $(t \rightarrow \text{azul } r)$  y  $(r \not\rightarrow \text{azul } t)$ .

Sea  $s \in S$  si  $s \in T$  entonces para dicho  $s = t_0 \exists r \in R$  tal que  $t_0 \in R$  o  $(t_0 \rightarrow \text{azul } r)$  y  $(r \not\rightarrow \text{azul } t_0)$ , es decir,  $s \in R$  o  $(s \rightarrow \text{azul } r)$  y  $(r \not\rightarrow \text{azul } s)$ , con lo cual este caso queda probado.

Veamos ahora el caso en que para  $s \in S \exists t$  tal que  $(s \rightarrow \text{azul } t)$  y  $(t \not\rightarrow \text{azul } s)$ ; si para dicha  $t$  se tiene  $t \in R$ , digamos  $t = r_0$ , entonces  $(s \rightarrow \text{azul } r_0)$  y  $(r_0 \not\rightarrow \text{azul } s)$  para algún  $r_0 \in R$  y quedaría demostrado. Si para dicha  $t$  se tiene que  $(t \rightarrow \text{azul } r)$  y  $(r \not\rightarrow \text{azul } t)$ , entonces  $(s \rightarrow \text{azul } t \rightarrow \text{azul } r)$ , de donde  $(s \rightarrow \text{azul } r)$ , y si  $(r \rightarrow \text{azul } s)$  entonces  $(r \rightarrow \text{azul } s \rightarrow \text{azul } t)$

de donde  $(r \rightarrow \text{azul } t)$  lo cual es una contradicción, por lo que  $(r \not\rightarrow \text{azul } s)$ . De aquí se tiene que si  $S \leq T$  y  $T \leq R$  entonces  $S \leq R$ .

(c) Antisimétrica:

Queremos demostrar que si  $S \leq T$  y  $T \leq S$  entonces  $T = S$ .

Sea  $s \in S \Rightarrow s \in T$  o  $(s \rightarrow^a t_0)$  y  $(t_0 \not\rightarrow^a s)$ .

Supongamos  $s \in T$ :

Entonces  $(s \rightarrow^a t_0)$ .

Como  $T \leq S$  entonces para  $t_0$  se cumple:

$t_0 \in S$  o  $\exists s_0 \in S$  tal que  $(t_0 \rightarrow^a s_0)$  y  $(s_0 \not\rightarrow^a t_0)$ .

Si  $t_0 \in S \Rightarrow (s \rightarrow^a t_0)$ , lo cual contradice la independencia de  $S$ .

Por lo tanto si  $(s \rightarrow^a t_0) \Rightarrow \exists s_0 \in S$  tal que  $(t_0 \rightarrow^a s_0)$  y  $(s_0 \not\rightarrow^a t_0)$ .

Pero entonces  $(s \rightarrow^* t_0 \rightarrow^* s_0)$  por lo tanto  $(s \rightarrow^* s_0)$ , lo cual contradice nuevamente la independencia de  $S$ , de manera que  $s \in T \vee s \in S$  y  $S \subseteq T$ .

Análogamente comenzando con  $T \subseteq S$ , por lo tanto  $T = S$ . ■

**Definición 1.1.5.** Dada una digráfica  $D$  sin trayectorias monocromáticas infinitas, diremos que el conjunto  $S$  de  $V(D)$  es un seminúcleo rojo por trayectorias monocromáticas si:

$S = \{ s \neq \emptyset : S \text{ independiente y con la siguiente propiedad: } \forall y \in V(D-S) \text{ si } \exists S y\text{-trayectoria roja entonces existe una } yS\text{-trayectoria monocromática} \}$

**Resultado 1.1.2.**  $S \neq \emptyset$  ya que en  $D$  existe al menos un vértice  $v$  tal que si  $(v \rightarrow \text{rojo } y)$  entonces  $(y \rightarrow \text{rojo } v) \forall y$  y lo cual implica que  $\{v\} \in S$ .

**Demostración:**

Vamos a demostrar que el vértice  $v$  mencionado existe.

Primero nótese que  $\forall v \in V(D)$  existe una trayectoria de  $v$  a  $y$  roja, pues en caso contrario el vértice del cual no sale trayectoria roja sería el vértice buscado.

Podemos suponer entonces que de todo vértice sale una trayectoria roja.

Haremos la demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que  $\forall v \in V(D) \exists y \neq v$  tal que  $(v \rightarrow^* \text{rojo } y)$  y  $(y \rightarrow^* \text{rojo } v)$ . Sea  $y_0$  un vértice arbitrario de  $D$ .

De  $y_0$  salen trayectorias distintas rojas. Sea  $y_0'$  un vértice para el cual  $(y_0 \rightarrow \text{rojo } y_0')$  y  $(y_0' \rightarrow \text{rojo } y_0)$ .

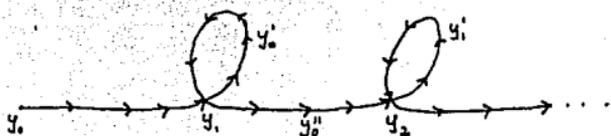
De  $y_0'$  también existe un vértice  $y_0''$  tal que  $(y_0' \rightarrow \text{rojo } y_0'')$  y  $(y_0'' \rightarrow \text{rojo } y_0')$ .

Sea  $y_1$  el primer vértice de la trayectoria  $(y_0' \rightarrow \text{rojo } y_0'')$  que se intersecta con la trayectoria  $(y_0 \rightarrow \text{rojo } y_0')$ .

Ahora, de  $y_1$  sale una trayectoria  $(y_1 \rightarrow \text{rojo } y_1')$  de vértices distintos y  $(y_1' \rightarrow \text{rojo } y_1)$ .

De  $y_1$  sale una trayectoria  $(y_1' \rightarrow \text{rojo } y_1'')$  tal que  $(y_1'' \rightarrow \text{rojo } y_1')$ .

Sea  $y_2$  el primer vértice de  $(y_1' \rightarrow \text{rojo } y_1'')$  que se intersecta con con  $(y_1 \rightarrow \text{rojo } y_1')$ .



De esta manera podemos formar la trayectoria  $(y_0, y_1, y_2, \dots)$  exterior infinita y monocromática lo cual contradice la hipótesis.

Concluimos que  $S \neq \emptyset$ . ■

**Resultado 1.1.3.** Siendo  $D$  una digráfica bicolorada, sin trayectorias exteriores infinitas, se tiene que  $(S, \leq)$  tiene elementos maximales.

Definimos para cada cadena  $\mathcal{C}$  de conjuntos de  $S$  el conjunto  $S^{\infty}$  de la siguiente manera:

$S^m = \{a \in E : \exists S \in \mathcal{E} \text{ tal que } a \in T \vee T \in \mathcal{E} \text{ y } T \geq S\}$ .

Nótese que  $S^m$  consiste de los vértices de  $D$  que pertenecen a todo conjunto de la cadena  $a$  a partir de un cierto punto.

Vamos a demostrar que  $S^m$  es cota superior de la cadena  $\mathcal{E}$ . De donde según el lemma de Zorn un orden parcial tal que toda cadena tiene una cota superior tiene elementos maximales.

Para ver que  $S^m$  es cota superior de  $\mathcal{E}$ , se tiene que ver que  $\forall S \in \mathcal{E}$  con  $S \in \mathcal{E}$  una cadena de  $(S, \leq)$ ,  $S^m \in S$  y  $S^m \geq S$ .

Sea  $S \in \mathcal{E}$  una cadena de  $(S, \leq)$  y  $a \in S$ . si  $a \in S^m$ , entonces  $S^m \neq \emptyset$ . Si para todo  $a \in S$ ,  $a \in S^m$  entonces  $S \subseteq S^m$  y por lo tanto  $S \leq S^m$ .

Así que supongamos que existe  $a \in S$  tal que  $a \notin S^m$ .

Dentro de esta demostración denotaremos por "a" un color y por "r" otro color diferente y por mono, monocromática.

Como  $a \notin S^m$ , entonces existe un conjunto  $S_1$  (de la cadena) después de  $S$  al cual  $a$  no pertenece:  $a \notin S_1$  y  $S_1 \geq S$ . Por la definición de " $\leq$ " y como  $a \notin S_1$ ,  $a \neq a_1$ ,  $\forall a_1 \in S_1$ , entonces existe  $a_1 \in S_1$  tal que  $(a \rightarrow^a a_1)$  y  $(a_1 \rightarrow^a a)$ . Si  $a_1 \in S^m$  entonces existe un conjunto  $S_2$  después de  $S_1$  al cual  $a_1$  no pertenece:  $a_1 \notin S_2$  y  $S_2 \geq S_1$ . Por la definición de " $\leq$ " para  $a_1$  existe  $a_2 \in S_2$  tal que  $(a_1 \rightarrow^a a_2)$  y  $(a_2 \rightarrow^a a_1)$ , y por lo tanto  $(a_2 \rightarrow^a a)$  (si  $(a_2 \rightarrow^a a)$  entonces  $(a_1 \rightarrow^a a_2 \rightarrow^a a)$  y entonces  $(a_1 \rightarrow^a a)$  lo cual es imposible) Por lo tanto  $(a \rightarrow^a a_1 \rightarrow^a a_2)$ .

Si  $a_2 \in S^m$  entonces podemos continuar con este mismo procedimiento, pero como por hipótesis no existen trayectorias monocromáticas infinitas, entonces el proceso

debe parar en un momento para algún elemento  $a_n \in S_n$  y  $a_n \in S^\omega$ . Esto quiere decir que dado  $s \in \mathcal{E}$  para  $a \in S$  existe  $a_n \in S^\omega$  tal que  $(a \rightarrow^s a_n)$  y  $(a_n \rightarrow^s a)$ .

Concluimos que  $S^\omega \neq \emptyset$  y  $S^\omega \geq S \forall s \in \mathcal{E}$ .

Vamos a demostrar ahora que  $S^\omega \in S$ :

Sea  $a$  y  $t$  en  $S^\omega$ , entonces existen  $U$  y  $V$  en  $\mathcal{E}$  tales que  $a \in U$  y  $U \geq S$  y  $t \in V$  y  $V \geq T$ ; supongamos sin pérdida de generalidad que  $T \geq S$ .

Entonces  $a \in T$  y como  $t \in T$  y  $T$  es independiente entonces  $a$  y  $t$  no pueden estar conectados por una trayectoria monocromática y por lo tanto  $S^\omega$  es un conjunto independiente.

Sea  $a \in S^\omega$ , entonces  $a \in S$  con  $s \in \mathcal{E}$  cadena de  $S$ . Supongamos que  $(a \rightarrow^s y)$  para  $y \in V(G)$ .

Como  $s \in S$  y  $(a \rightarrow^s y)$  entonces  $(y \rightarrow^{\text{mono}} s)$ , es decir existe  $t \in S$  tal que  $(y \rightarrow^{\text{mono}} t)$ . Si  $t \in S^\omega$  ya terminamos.

Así que supongamos que  $t \notin S^\omega$ . Entonces  $t \neq a$  y  $(y \rightarrow^s t)$  pues si  $(y \rightarrow^s t)$  entonces  $(a \rightarrow^s t)$  pero  $S$  es independiente. Por lo tanto  $(y \rightarrow^s t)$ .

Puesto que  $S^\omega \geq S$  entonces para  $t$  existe  $t^\omega \in S^\omega$  tal que  $(t \rightarrow^s t^\omega)$  y  $(t^\omega \rightarrow^s t)$ . Como  $(y \rightarrow^s t \rightarrow^s t^\omega)$  entonces  $(y \rightarrow^s t^\omega)$ .

Es decir  $\forall a \in S^\omega$  si  $(a \rightarrow^s y)$  entonces  $(y \rightarrow^s S^\omega)$ , lo cual prueba que  $S^\omega \in S$ .

Hemos demostrado que cualquier cadena de  $S$  tiene una cota superior en  $S$  y por lo tanto por el lemma de Zorn  $(S, \leq)$  tiene elementos maximales. ■

## 1.2. EXISTENCIA DE NUCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMATICAS.

**Teorema 1.2.1.** [8] Sea  $D$  una digráfica cuyas aristas están coloreadas con 2 colores y tal que  $D$  no contiene trayectorias monocromáticas exteriores infinitas. Entonces existe núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ .

**Demostración:**

Sea  $S$  un elemento maximal de  $\mathcal{S}$ . Vamos a demostrar que  $S$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ .

Se hará por reducción al absurdo. Como  $S \in \mathcal{S} \rightarrow S$  es independiente, resta ver que es absorbente.

Supongamos lo contrario, es decir,  $\exists y \in V(D-S)$  tal que  $(y \rightarrow \text{mono } S)$ . Y vamos a llegar a una contradicción.

Sea  $Y = \{y \in V(D-S) : (y \rightarrow \text{mono } S)\}$

Y sea  $x \in Y$  de tal manera que si  $(x \rightarrow \text{rojo } y)$  entonces  $(y \rightarrow \text{rojo } x) \vee y \in Y$ .

Nótese que debe existir un tal  $x$  pues si no fuera así, se podría construir una trayectoria exterior infinita roja (la demostración de esto es igual a la hecha para ver que  $S \neq \emptyset$ ).

La prueba del teorema consistirá en encontrar  $y \in S$  tal que  $y \in Y$   $y = x$  y  $(x \rightarrow \text{rojo } y)$  pero  $(y \rightarrow \text{rojo } x)$  de donde se concluirá que  $Y = \emptyset$ .

Sea  $T = \{t \in S : (t \not\rightarrow \text{azul } x)\}$

Observemos que  $(S - T \rightarrow \text{azul } x) \forall s \in S - T$ .

Notamos también que  $TU\{x\}$  es independiente: entre los vértices de  $T$  no hay aristas pues  $T$  es independiente; de  $x$  a  $T$  tampoco porque  $(x \not\rightarrow \text{mono } S)$ . De  $T$  a  $x$  no hay flechas azules por la definición y si hubiera rojas, según la definición de  $S$  habría  $(x \rightarrow \text{mono } S)$  lo cual estamos suponiendo que no sucede.

También tenemos que  $TU\{x\} > S$ :

para  $s \in T$  existe  $t$  tal que  $s = t$ .

para  $s \in S - T \exists x$  tal que  $(s \rightarrow \text{azul } x)$  y  $(x \not\rightarrow \text{azul } s)$  pues si  $(x \rightarrow \text{azul } s)$  entonces  $(x \rightarrow \text{mono } S)$ .

Pero como  $S$  es maximal entonces existe  $y$  tal que:

$$(TU\{x\} \rightarrow \text{rojo } y) \quad \text{y} \quad (y \not\rightarrow \text{mono } TU\{x\})$$

1.- Obsérvese que  $y \notin S$ :

Si  $y \in S$  entonces  $(T \rightarrow \text{rojo } y)$  o  $(x \rightarrow \text{rojo } y)$ , en el primer caso se contradice la independencia de  $S$  y en el segundo habría una  $xS$  trayectoria roja lo cual contradice nuestra suposición, por lo tanto  $y \notin S$ .

2.-  $(T \not\rightarrow \text{rojo } y)$ :

Si  $(t \rightarrow \text{rojo } y)$  entonces  $(S \rightarrow \text{rojo } y)$  lo cual implica por la definición de  $S$  que  $(y \rightarrow \text{mono } S)$ , pero como  $(y \not\rightarrow \text{mono } TU\{x\})$ , en particular  $(y \not\rightarrow \text{mono } T)$  por lo tanto  $(y \rightarrow \text{mono } S - T)$ .

(a) Si  $(y \rightarrow \text{rojo } S - T)$  entonces como  $(T \rightarrow \text{rojo } y)$  entonces  $(T \rightarrow \text{rojo } y \rightarrow \text{rojo } S - T)$  lo cual contradice la independencia de

S.

(b) Si  $(y \rightarrow \text{azul } S-T)$ , sabemos que  $(S-T \rightarrow \text{azul } x)$  entonces por transitividad  $(y \rightarrow \text{azul } x)$  lo cual es una contradicción pues  $(y \not\rightarrow \text{mono } TU\{x\})$ .

En ambos casos hay contradicción por lo que  $(T \not\rightarrow \text{rojo } y)$  concluyendo que:

$$(x \rightarrow \text{rojo } y).$$

3.-Vamos a ver que no hay trayectorias monocromáticas de  $y$  a  $S$ , es decir,  $y \in Y$

(a) Si  $(y \rightarrow \text{rojo } S)$  entonces  $(x \rightarrow \text{rojo } y \rightarrow \text{rojo } S)$  por lo tanto  $(x \rightarrow \text{mono } S)$  lo cual es una contradicción.

(b) Si  $(y \rightarrow \text{azul } S)$  como  $(y \not\rightarrow \text{mono } TU\{x\})$  en particular  $(y \not\rightarrow \text{azul } TU\{x\})$  en particular  $(y \not\rightarrow \text{azul } T)$ .

Por lo tanto si  $(y \rightarrow \text{azul } S)$  entonces  $(y \rightarrow \text{azul } S-T)$  pero  $(S-T \rightarrow \text{azul } x)$  entonces  $(y \rightarrow \text{azul } S-T \rightarrow \text{azul } x)$  entonces  $(y \rightarrow \text{azul } x)$  lo cual no puede ser pues  $(y \not\rightarrow \text{mono } TU\{x\})$ , por lo tanto:.

$(y \not\rightarrow \text{mono } S)$ , además sabíamos que  $y \in S$  por lo tanto  $y \in Y$ .

Pero de  $(y \not\rightarrow \text{mono } x)$  se concluye  $(y \not\rightarrow \text{rojo } x)$  lo cual contradice la elección de  $x$  de que  $\forall y \in Y$  si  $(x \rightarrow \text{rojo } y) \rightarrow (y \rightarrow \text{rojo } x)$ , con lo cual el teorema queda demostrado. ■

Un corolario inmediato es el siguiente:

Corolario 1.2.1. Sea  $T$  un torneo finito cuyas aristas están

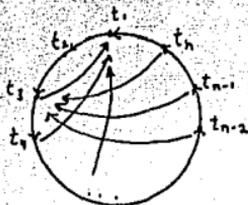
coloreadas con 2 colores. Entonces existe un vértice  $v$  de  $T$  tal que  $v$  es núcleo por trayectorias monocromáticas.

Este último resultado para torneos es conocido para torneos no coloreados, es decir, se sabe que existe un vértice  $v$  del torneo tal que para cualquier otro vértice  $x$  del torneo existe una trayectoria de  $x$  a  $v$ . Más aún se sabe que dichas trayectorias pueden ser de longitud a lo más 2.

Observación 1.2.1. En el caso de torneos bicolorados por aristas, sabemos que existe núcleo por trayectorias monocromáticas pero no existe una cota para la longitud de la trayectoria.

Aquí se presenta un ejemplo para ilustrar esta afirmación: Consideremos un torneo finito  $T$  con vértices  $V = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  y aristas bicoloradas como sigue:

- (  $t_i, t_{i+1}$  ) rojo para  $1 \leq i < n-1$
- (  $t_j, t_i$  ) azul para  $j > i+1$

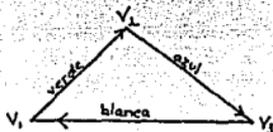


Entonces  $t_n$  es núcleo por trayectorias monocromáticas y es el único. Se observa que la única trayectoria monocromática de  $t_1$  a  $t_n$  pasa por todos los vértices y es de longitud  $n-1$ ,

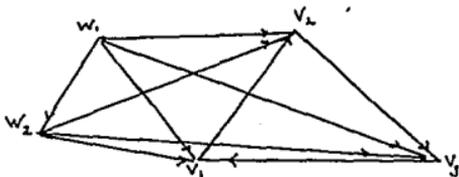
que es la máxima longitud posible.

Observación 1.2.2. Para torneos tricoloreados en aristas el corolario es falso.

Un ejemplo muy simple es el torneo con 3 vértices, para el cual ningún vértice es absorbente:



A partir de éste último ejemplo podemos construir más contraejemplos, aumentando vértices. Podemos aumentar vértices de manera que siempre las flechas de los vértices aumentados vayan hacia  $V_1, V_2, V_3$  y entre ellos en cualquier dirección y en cualquiera de los 3 colores. De esta manera no existirá ningún vértice absorbente por trayectorias monocromáticas.



El siguiente además de contraejemplo al corolario para torneos tricolores es un ejemplo de un torneo que no posee un conjunto  $S$  absorbente por trayectorias monocromáticas de cardinalidad 1 ó 2.

Ejemplo: Sea  $T$  un torneo finito con vértices:

$$V(T) = \{ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 \}$$

Y con las siguientes aristas:

$(a_1, a_2)$	$(b_1, b_2)$	$(c_1, c_2)$	color amarillo
$(a_2, a_3)$	$(b_2, b_3)$	$(c_2, c_3)$	color azul
$(a_3, a_1)$	$(b_3, b_1)$	$(c_3, c_1)$	color blanco
$(a_1, b_1)$			color amarillo
$(b_1, c_1)$			color azul
$(c_1, a_1)$			color blanco

Como se puede ver ningún vértice absorbe a los demás. además no existe un par de vértices que absorba al resto. Por ejemplo  $S=\{a_1, b_2\}$  no absorbe a  $b_3$ :

Comenzando una trayectoria por  $b_3$  sólo tenemos:

$$(b_3, b_1) \text{ y } (b_3, c_1)$$

En el primer caso de  $b_3$  a  $b_1$  tenemos trayectoria blanca, después de  $b_1$  sólo podemos seguir con trayectoria amarilla a  $b_2$  o con trayectoria azul a  $c_1$  de manera que en ese momento se acaban las trayectorias monocromáticas.

De  $b_3$  a cualquier  $c_1$  tenemos una flecha azul, luego de cada  $c_1$  hay flecha a  $a_1$  pero en color blanco lo cual rompe lo monocromático.

Erdős planteó un problema que aún sigue abierto:

Dado un torneo  $T$   $n$ -coloreado por aristas ¿Existe un entero  $f(n)$  tal que existe  $S \subseteq V(T)$  con  $S$  absorbente por trayectorias monocromáticas y  $|S| \geq f(n)$  ?

En estos términos el corolario simplemente diría que  $f(2)=1$ .

Muy particularmente Erdős planteó la siguiente pregunta: para todo torneo tricoloreado por aristas ¿existe un conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas de cardinalidad 3? , es decir ¿ $f(3)=3$ ?

En ciertos casos particulares el corolario sigue siendo válido para torneos tricoloreados como es el caso de los torneos transitivos. Enseguida veremos otro ejemplo de torneo tricoloreado en que el corolario sigue siendo válido.

**Teorema 1.2.2.** [8] Sea  $T$  un torneo cuyas aristas están coloreadas con 3 colores y cuyo conjunto de vértices puede ser partido en conjuntos ajenos de manera que :

(i) Dos vértices en diferentes conjuntos de la partición siempre están unidos por una arista roja.

(ii) Dos vértices en el mismo conjunto de la partición están siempre unidos por una arista azul o verde.

Entonces existe un vértice  $v$  de  $T$  que es núcleo por trayectorias monocromáticas.

**Demostración:** Sean  $B_1, B_2, \dots, B_r$  los elementos de la partición. Vamos primero a definir un orden para cada  $B_i$  de la siguiente manera:

Las aristas de  $B_i$  están bicoloreadas y  $B_i$  es un torneo por lo tanto de acuerdo al corolario visto existe  $v_1 \in B_i$  tal que  $x \rightarrow$  mono  $v_1 \forall x \in B_i - \{v_1\}$ .

De la misma manera,  $B_i - v_1$  es torneo bicoloreado por tanto de

acuerdo al corolario tenemos un elemento  $v_2$  tal que  $\forall x \in B_1 - \{v_1, v_2\}$  existe una trayectoria monocromática  $x \rightarrow_{\text{mono}} v_2$ .  
 Continuando así, como  $B_1$  es finito, tenemos un orden lineal y por tanto un orden parcial de sus elementos, digamos:

$$v_n < v_{n-1} < v_{n-2} < \dots < v_2 < v_1.$$

Ahora definimos  $x \rightarrow v$  de la siguiente manera:

- (i) Si  $x$  y  $v$  están en diferentes conjuntos de la partición y  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v)$ .
- (ii) Si  $x$  y  $v$  están en un mismo conjunto de la partición y  $x < v$ .
- (iii) Si  $x$  y  $v$  están en un mismo conjunto de la partición y  $v < x$  pero  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v)$  (es decir  $(x \rightarrow_{\text{mono}} v)$  por una trayectoria exterior a  $B_1$ ).

Nota: obsérvese que se  $(x \rightarrow v)$  entonces  $(x \rightarrow_{\text{mono}} v)$  pero el inverso no necesariamente es válido: si  $(x \rightarrow_{\text{verde}} v)$  pero  $v < x$  y además no existe trayectoria roja de  $x$  a  $v$ , estando  $x, v$  en un mismo  $B_i$ , entonces  $(x \rightarrow v)$  pero  $(x \rightarrow_{\text{mono}} v)$ .

Para cada vértice de la digráfica definimos  $N(x)$  como el número de vértices tales que  $(v \rightarrow x)$

Sea  $v$  un vértice tal que  $N(v)$  es lo más grande posible. Afirmamos que ese vértice satisface las condiciones del teorema.

Vamos a suponer sin pérdida de generalidad que  $v \in B_1$ .

Vamos a suponer que  $v$  no cumple las condiciones del teorema y llegaremos a una contradicción.

Si  $v$  no cumple las condiciones del teorema, entonces existe un vértice  $w$  tal que  $(w \rightarrow_{\text{mono}} v)$ .

Primero supondremos que  $w \in B_1$ , entonces existe una arista directa de  $v$  a  $w$  roja.

Nótese que  $\forall x \in V(T)$  tal que  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v)$  entonces  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} w)$  pues tendríamos  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v)$  y sabemos  $(v \rightarrow_{\text{rojo}} w)$  entonces por transitividad  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} w)$ . Es decir para todo vértice  $x$  para el cual existe una trayectoria de  $x$  a  $v$  en rojo también existe trayectoria de  $x$  a  $w$  en rojo.

Por la observación anterior, y como  $N(w) \leq N(v)$ , tenemos que entre los vértices  $x$  de  $B_1$  tales que  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v)$  donde  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v)$  debe existir  $v' \in B_1$  tal que  $(v' \rightarrow_{\text{rojo}} v)$  y  $(v' \rightarrow_{\text{rojo}} w)$ . En particular  $(v' \rightarrow_{\text{rojo}} w)$ .

De los elementos  $v'$  tales que  $v' < v$  y  $(v' \rightarrow_{\text{rojo}} w)$  elegimos aquél a partir del cual todos los siguientes vértices tengan trayectoria monocromática a  $w$ .

En  $B_1$  tenemos un orden digamos:

$$v_m < v_{m-1} < v_{m-2} < \dots < v_2 < v_1$$

Nos fijamos en los  $v'$  para los cuales  $(v' \rightarrow_{\text{rojo}} w)$  y que están antes que  $v$ . Elegimos el último (el más cercano a  $v$ ) y lo denotamos  $v_0'$ .

Vamos a demostrar que  $N(v_0') > N(v)$ .

(a)  $\forall x$  tal que  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v)$  de manera que  $v < x$  y  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v)$  tendremos que  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v_0')$ :

Si  $v < x$  como  $v_0' < v$  por transitividad  $v_0' < x$ , además si  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v)$  habíamos visto que  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} w)$  y como  $v_0'$  y  $w$  están

en diferentes  $B_1$  y como  $(v_0' \rightarrow_{\text{rojo}} w)$  entonces  $(w \rightarrow_{\text{rojo}} v_0')$  por lo tanto  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v \rightarrow_{\text{rojo}} w \rightarrow_{\text{rojo}} v_0')$  entonces  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v_0')$  y por lo tanto  $(x \rightarrow_{\text{m}} v_0')$ .

(b) Para todo  $v_1$  que está entre  $v_m$  y  $v_0'$  tenemos que  $(v_1 \rightarrow_{\text{mono}} v_0')$  y  $(v_1 \rightarrow_{\text{mono}} v)$ .

(c) Nótese que como  $(v_0' \rightarrow_{\text{rojo}} w)$  entonces  $(w \rightarrow_{\text{rojo}} v_0')$  y por la elección de  $v_0'$  tenemos que todo  $v''$  entre  $v_0'$  y  $v$  cumple:  $(v'' \rightarrow_{\text{rojo}} w)$  y como  $(w \rightarrow_{\text{rojo}} v_0')$  entonces  $(v'' \rightarrow_{\text{rojo}} v_0')$ , por lo que  $\forall v''$  entre  $v_0'$  y  $v$   $(v'' \rightarrow_{\text{m}} v_0')$ .

Por lo tanto  $\forall x$  tal que  $(x \rightarrow_{\text{m}} v)$   $(x \rightarrow_{\text{m}} v_0')$ , excepto  $v_0'$  pero además  $(w \rightarrow_{\text{m}} v_0')$  y  $(v \rightarrow_{\text{m}} v_0')$  como  $(w \rightarrow_{\text{m}} v)$  entonces  $N(v_0') > N(v)$  lo cual es una contradicción. De modo que para el caso  $w \in B_1$  se llega a una contradicción. Veamos ahora el otro caso. Supondremos ahora que existe  $w \neq v$  con  $w \in B_1$  y  $(w \rightarrow_{\text{mono}} v)$  y llegaremos a una contradicción.

Como  $(w \rightarrow_{\text{mono}} v)$  entonces  $(v \rightarrow_{\text{m}} w)$  y  $v < w$ .

Se observa que para todo vértice  $x \in B_1$  y tal que  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v)$  entonces  $(w \rightarrow_{\text{rojo}} x)$  pues si  $(w \rightarrow_{\text{rojo}} x)$  como  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v)$  entonces  $(w \rightarrow_{\text{rojo}} v)$  contrario a la suposición de que  $(w \rightarrow_{\text{mono}} v)$ , por lo tanto  $\forall x \in B_1$  si  $(x \rightarrow_{\text{r}} v)$ , entonces  $(x \rightarrow_{\text{r}} w)$ .

Por tanto como  $N(w) \leq N(v)$  debe existir  $u \in B_1$  tal que  $(u \rightarrow_{\text{m}} v)$  y por lo tanto  $u < v$  y  $(u \rightarrow_{\text{m}} w)$ . Como  $(u \rightarrow_{\text{m}} w)$  entonces  $u < w$  por lo tanto  $w < u$  y  $(u \rightarrow_{\text{rojo}} v)$ . Pero si  $(u \rightarrow_{\text{rojo}} v)$ , entonces tiene que haber una trayectoria roja de  $u$  a  $v$  que no tiene aristas en  $B_1$  por tanto existe un  $x_0$  fuera de  $B_1$  tal que  $(x_0 \rightarrow_{\text{rojo}} v)$ . Como  $\forall x$  tal que  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} v)$  entonces  $(x \rightarrow_{\text{rojo}} w)$ .

en particular para dicha  $x_0$  y como  $(u \rightarrow v) \in X_0$  entonces  $(u \rightarrow v) \in W$  con lo cual llegamos a una contradicción.

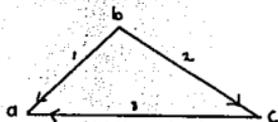
En ambos casos se llega a una contradicción por lo que  $v$  cumple las condiciones del teorema. ■

Nótese que ningún torneo con las características del teorema contiene ciclos de 3 vértices tricoloreados.

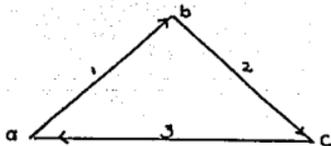
Dado un torneo  $T$  tricoloreado tal que no contenga dichos ciclos ¿tendrá un núcleo por trayectorias monocromáticas?

Veamos ahora un teorema en el que se da una respuesta parcial a esta pregunta.

Llamaremos  $T_3$  a los torneos 3-coloreados transitivos, es decir a los torneos del estilo:



Y Llamaremos  $C_3$  al ciclo 3-coloreado:



Donde  $\{1, 2, 3\}$  son los colores son los colores asignados a las flechas correspondientes.

**Teorema 1.2.3.** [9] Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado el cual no contiene ni  $T_3$  ni  $C_3$ . Entonces existe un vértice  $v$  de  $T$  que es núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración: Se hará por inducción sobre el orden  $n$  de  $T$ .

Los casos  $n=1$  y  $n=2$  son triviales.

Supongamos que el resultado es válido para  $m$  con  $2 < m < n$ .

Entonces según la hipótesis de inducción si a  $T$  le quitamos un vértice, el resultado será válido.

Tenemos entonces que  $\forall v \in T$  existe un vértice que es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $T - \{v\}$ . A dicho vértice lo llamaremos  $f(v)$ .

En adelante supondremos que  $f(v)$  es una función biyectiva para la cual se cumple que no existe trayectoria monocromática de  $v$  a  $f(v)$ , es decir  $(v \rightarrow_{\text{monof}} f(v))$  pues en caso contrario ya estaría demostrado el resultado:

Prueba:

(1) Supongamos que existe  $u$  tal que  $(u \rightarrow_{\text{monof}} f(u))$ , entonces como  $f(u)$  es núcleo de  $T - \{u\}$ ,  $\forall x \in T - \{u\}$ ,  $(x \rightarrow_{\text{monof}} f(u))$  pero también  $(u \rightarrow_{\text{monof}} f(u))$  por lo que  $\forall x \in T$   $(x \rightarrow_{\text{monof}} f(u))$  y el teorema estaría probado.

(2)  $f(v)$  es biyectiva:

$f(v)$  es inyectiva:

Si  $f(u) = f(v)$  entonces  $(x \rightarrow_{\text{monof}} f(v)) \forall x \in T - \{v\}$ , supongamos  $u \in T - \{v\}$ , entonces  $(u \rightarrow_{\text{monof}} f(v))$  pero  $f(v) = f(u)$  por lo que  $(u \rightarrow_{\text{monof}} f(u))$  contradiciendo (1), por lo tanto  $u \notin T - \{v\}$ , es decir  $u = v$

$f(v)$  es suprayectiva:

Sea  $w \in T$  arbitrario, si no existe  $v$  tal que  $f(v)=w$  entonces como  $\forall v \in T$  existe  $f(v)$  querría decir que que hay un  $f(v)$  que se repite  $f(v_i)=f(v_j)$  para  $v_i \neq v_j$ , lo cual contradice la propiedad inyectiva.

Por lo tanto  $\forall w \in T \exists v$  tal que  $w=f(v)$ .

Vamos ahora a subindexar los vértices de  $T$  de la siguiente manera:  $v_1$  lo elijo arbitrariamente, busco  $f(v_1)$  a este elemento lo llamo  $v_2$ , es decir  $f(v_1)=v_2$  enseguida busco  $f(v_2)$  y lo llamo  $v_3$ , tengo  $f(v_2)=v_3$ , etc. hasta terminar los  $n$  vértices de  $T$ .

Ordenados de esta manera los vértices de  $T$ , vamos a demostrar que existe una partición de los vértices de  $T$  en ciclos ajenos.

Prueba: comencemos con  $v_1$ , entonces  $v_1=f(v)$  para algún  $v \in T$  pues  $f$  es biyectiva, supongamos  $v_1=f(v_{n_1})$ . También tenemos que como  $(v \rightarrow_{\text{monof}}(v))$ , en particular  $(v_{n_1} \rightarrow_{\text{monof}}(v_{n_1}))$ , pero como tenemos un torneo, entonces  $f(v_{n_1})$  es adyacente a  $v_{n_1}$ , es decir  $(f(v_{n_1}), v_{n_1}) \in F(D)$ , pero  $v_{n_1}=f(v_{n_1-1})$  por lo tanto tenemos  $(v_1, f(v_{n_1-1})) \in F(D)$ , de la misma manera  $(f(v_{n_1-1}), v_{n_1-1}=f(v_{n_1-2})) \in F(D)$  teniendo así la trayectoria:

$$(v_1, f(v_{n_1-1}), f(v_{n_1-2}))$$

Continuando este procedimiento tenemos una trayectoria más larga y llega un momento en que llegamos al vértice  $f(v_1)$  y finalmente  $f(v_1)$  es adyacente a  $v_1$ , cerrando de esta manera

un ciclo, al que llamaremos  $C_1$ .

$$C_1 = (v_1, f(v_{n_1-1}), f(v_{n_1-2}), \dots, f(v_2), f(v_1), v_1)$$

$$C_1 = (v_1, v_{n_1}, v_{n_1-1}, v_{n_1-2}, \dots, v_3, v_2, v_1)$$

Tomemos ahora el vértice  $v_{n_1+1}$ , éste es un  $f(v)$ , digamos  $v_{n_1+1} = f(v_{n_2})$ . Obsérvese que  $v_{n_2}$  no es ninguno de los vértices usados en  $C_1$ , pues cada vértice tenía su correspondiente  $f(v)$  contenido en  $C_1$ . Por el razonamiento anterior  $f(v_{n_2})$  es adyacente a  $v_{n_2}$  y  $v_{n_2} = f(v_{n_2-1})$ , es decir  $(f(v_{n_2}), f(v_{n_2-1})) \in F(D)$  lo cual es lo mismo que  $(v_{n_1+1}, v_{n_2}) \in F(D)$ .

Seguimos de la misma manera que se procedió para el ciclo  $C_1$  y tendremos la trayectoria  $(f(v_{n_2}), f(v_{n_2-1}), f(v_{n_2-2}), \dots)$ .

Al igual que anteriormente llegamos a  $f(v_{n_1+1})$  y este vértice es adyacente a  $v_{n_1+1}$  con lo cual cerraremos un segundo ciclo  $C_2$ , el cual es ajeno a  $C_1$ .

$$C_2 = (v_{n_1+1}, f(v_{n_2-1}), f(v_{n_2-2}), \dots, f(v_{n_1+1}), v_{n_1+1})$$

$$C_2 = (v_{n_1+1}, v_{n_2}, v_{n_2-1}, v_{n_2-2}, \dots, v_{n_1+2}, v_{n_1+1})$$

Como se puede ver los vértices de este ciclo no se repiten con los vértices del ciclo  $C_1$ , si seguimos sucesivamente obtenemos una partición de los vértices de  $T$  en ciclos ajenos:

$$(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n_1}), (v_{n_1+1}, \dots, v_{n_2}), \dots$$

Supongamos que hay más de un ciclo, entonces el ciclo  $C_1$  tiene menos de  $n$  vértices y por hipótesis de inducción para ese conjunto se cumple el teorema. De manera que existe un vértice  $v$  de  $C_1$  tal que es núcleo por trayectorias

monocromáticas de  $C_1$ . Pero para cualquier  $v_i \in C_1$ ,  $f(v_i) \in C_1$ , por otro lado como  $f(v)$  es biyectiva, todos los  $f(v_i)$  son distintos y todo  $v_i$  es un  $f(w)$ , en particular  $v = f(w)$  para algún  $w \in C_1$  y entonces  $(w \rightarrow_{\text{mono}} f(w))$  lo que contradice nuestra suposición. Concluimos que existe un solo ciclo,  $C = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ . las aristas de dicho ciclo son:  $(v_n, v_{n-1}), (v_{n-1}, v_{n-2}), \dots, (v_3, v_2), (v_2, v_1), (v_1, v_n)$ . Supongamos que estas flechas tienen asignados colores de la siguiente manera:

Flechas	Colores
$(v_1, v_n)$ -----	$a_n$
$(v_n, v_{n-1})$ -----	$a_{n-1}$
$(v_{n-1}, v_{n-2})$ -----	$a_{n-2}$
...	
$(v_3, v_2)$ -----	$a_2$
$(v_2, v_1)$ -----	$a_1$

Si los  $a_i$   $1 \leq i \leq n$  son todos iguales, entonces  $(v_n \rightarrow_{\text{mono}} v_1)$ , siendo  $f(v_n) = v_1$  lo cual contradice la suposición (1).

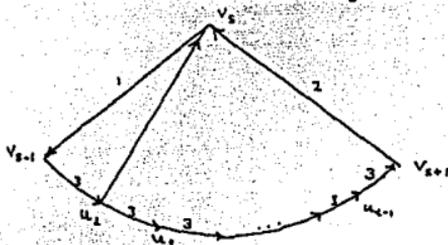
Por lo tanto hay por lo menos dos  $a_i$  diferentes.

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $a_n \neq a_{n-1}$  y supongamos también sin pérdida de generalidad que  $a_{n-1}$  es de color 1 ( $a_{n-1} = 1$ ) y  $a_n$  de color 2 ( $a_n = 2$ ).

Por otra parte  $\forall x \in T - \{v_n\}$   $(x \rightarrow_{\text{mono}} f(v_n))$  pero  $f(v_n) = v_{n+1}$  según los índices dados, por lo tanto,  $\forall$  vértice  $x$  de  $T - \{v_n\}$

$(X \rightarrow \text{monof}(v_s))$ , en particular  $v_{s-1}$ , entonces  $(v_{s-1} \rightarrow \text{monof} v_{s+1})$ . Supongamos que el color de dicha trayectoria es  $b$ . Dicho  $b$  no puede ser de color 1 ó 2. Si  $b=1$ , entonces  $(v_s \rightarrow (1)v_{s-1})$ , es decir  $(v_s \rightarrow \text{monof}(v_s))$  lo cual es una contradicción; análogamente si  $b=2$   $(v_{s-1} \rightarrow (2)f(v_{s-1}))$  que es también una contradicción por lo tanto  $b \neq 1$  y  $b \neq 2$ .

De las trayectorias monocromáticas de  $v_{s-1}$  a  $v_{s+1}$  tomemos la de longitud más corta  $T=(v_{s-1}=u_1, u_2, \dots, u_{t-1}, u_t=v_{s+1})$  y supongamos que el color  $b$  de dicha trayectoria es  $b=3$ .



Ahora vamos a fijarnos en las flechas entre  $u_i$  y  $v_s$  para  $1 < i < n$ . Como  $T$  es un torneo debe haber flechas entre dichos vértices, dichas flechas cualquiera que sea su sentido no pueden ser de color 3, pues tendríamos ya sea  $(v_{s-1} \rightarrow (3)f(v_{s-1}))$  ó  $(v_s \rightarrow (3)f(v_s))$ , lo cual contradice nuestra suposición.

Nos fijamos en la flecha entre  $u_2$  y  $v_s$ , cualquiera que sea su sentido tendría que ser de color 1 ó 3 pues la hipótesis del teorema es que no hay triángulos tricolores, ya vimos que 3 no puede ser, por lo que tiene que ser 1.

Análogamente para la flecha entre  $u_2$  y  $v_s$ . Continuando así llegamos a la flecha entre  $u_{t-1}$  y  $v_s$  ésta también tendría que

ser 1, pero entonces el triángulo  $u_{t-1}, v_s, v_{s+1}$  estaría forzado a ser un triángulo tricolor, llegando así a una contradicción. Lo cual demuestra que los  $a_i$  son iguales y por lo tanto existe un vértice que es núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

Un corolario inmediato que se había visto ya como corolario al teorema 1.2.1. es el siguiente:

**Corolario 1.2.2.** Sea  $T$  un torneo bicolorado, entonces existe un vértice que es núcleo por trayectorias monocromáticas.

Otro corolario es el siguiente:

**Corolario 1.2.3.** Supongamos que  $T, H_1, H_2, \dots, H_n$  son todos torneos  $m$ -coloreados (no necesariamente con los mismos  $m$  colores) sin  $T_3$  ni  $C_3$  tricolores con  $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

Sea  $T'$  el torneo que resulta de reemplazar cada vértice  $v_i$  de  $T$  por  $H_i$ , dejando todas las flechas entre  $H_i, H_j$  del color que había entre  $v_i$  y  $v_j$  pero con sentido arbitrario. Entonces  $T'$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

**Demostración:**  $T'$  es torneo pues así se construyó,  $T'$  es  $m$ -coloreado pues  $T$  lo es y los  $H_i$  lo son. También se tiene que  $T'$  no contiene ni  $T_3$  ni  $C_3$  tricolores. Supongamos que tenemos una terna de vértices arbitraria  $v_x, v_y, v_z$ : si los

tres pertenecen a un mismo  $H_i$  entonces no hay  $T_3$  ni  $C_3$  tricolores por la hipótesis ; si 2 pertenecen a un mismo  $H_i$  y otro a otro  $H_j$ , supongamos por ejemplo que  $v_x, v_y \in H_i$  y  $v_z \in H_j$ , entonces las flechas que unen  $v_x v_z$  y  $v_y v_z$  son del mismo color por la construcción de  $T'$  y por lo tanto no forman ni  $T_3$  ni  $C_3$  tricolores; finalmente si los 3 vértices pertenecen a 3  $H_i$  diferentes, tampoco formarán  $T_3$  o  $C_3$  tricolores ya que entonces en  $T$  habría.

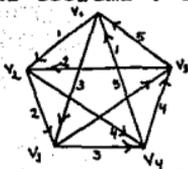
De esta manera  $T'$  cumple las hipótesis del teorema y por lo tanto existe núcleo por trayectorias monocromáticas.

Observación 1.2.3. Obsérvese que este corolario para el caso  $m=3$  implica el teorema 1.2.2..

Demostración: supongamos que tenemos las hipótesis del teorema, entonces llamaremos  $T$  a la gráfica que resulta de sustituir cada conjunto  $B_i$  por un vértice al que llamaremos  $v_i$  y a las flechas entre los  $B_i$  y  $B_j$  por una sola flecha entre  $v_i$  y  $v_j$  en cualquier dirección y del mismo color que todas las flechas entre los  $B_i$ , entonces  $T$  es monocromática. Por otro lado sabemos que  $B_i$  es completa y bicoloreada en flechas, hagamos  $H_i=B_i$ . Finalmente llamemos  $T'$  a la gráfica del teorema 1.3., entonces  $T'$  cumple las hipótesis del corolario y por lo tanto tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, lo cual muestra el teorema 1.2.2. ■

Si en el teorema 1.2.3. pedimos Únicamente que no haya  $C_3$  ó Únicamente que no haya  $T_3$ , entonces podemos encontrar contraejemplos:

El torneo  $G_5$  que se muestra en la figura no contiene  $C_3$  pero sí  $T_3$ .  $G_5$  no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas ya que  $v_{i+1} \xrightarrow{\text{mono}} v_i$  (donde  $i$  se ha tomado módulo 5) lo cual nos da un contraejemplo al teorema 4 cuando una de las hipótesis no se cumple.



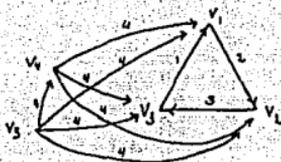
Uno de los  $T_3$  de  $G_5$  es  $v_1 v_4 v_5$ . Sin embargo revisando todos los triángulos notamos que no hay  $C_3$ .

También a partir de esta gráfica podemos construir una infinidad de contraejemplos; para ello añadimos un vértice  $v_6$  y lo unimos a todo vértice de  $G_5$  en la dirección de  $G_5$ . Podemos de esta manera seguir construyendo contraejemplos dirigiendo cada vértice nuevo en la dirección de los de índice menor, de esta manera se sigue cumpliendo que  $(v_{i+1} \xrightarrow{\text{mono}} v_i)$  y no hay  $C_3$  tricolores.

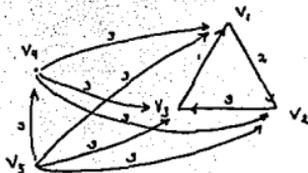
Contraejemplos para el caso en que el torneo no contiene  $T_3$  pero sí  $C_3$  tricolores:

Partimos de la base de tener un  $C_3$  tricolor, después añadimos un vértice  $v_4$  dirigido hacia  $v_1, v_2, v_3$  con color (4). Después otro vértice  $v_5$  con flecha de color (4) hacia el resto de los vértices y así sucesivamente. Este torneo no contiene  $T_3$  tricolores. A partir de  $v_4$  ningún vértice puede ser

absorbente, además  $v_1$  no absorbe a  $v_2$  en trayectoria monocroática,  $(v_3 \rightarrow \text{mono} v_2)$  y  $(v_1 \rightarrow \text{mono} v_3)$  por lo tanto ningún vértice es absorbente por trayectorias monocromáticas.



El mismo contraejemplo para  $m=3$  haciendo todas las flechas añadidas de color (3) en vez de (4). Tendríamos un torneo tricoloreado con  $C_3$  pero sin  $T_3$  tricoloreado que no satisface el teorema 1.4..



#### CONCLUSION.

La conjetura planteada no ha sido resuelta, aunque se vio un ejemplo de torneo sin  $C_m$   $m$ -coloreado con  $m \geq 5$  que no cumple la conclusión de la conjetura.. Es decir para  $m=3$  y  $m=4$  la pregunta sigue abierta aunque para  $m \geq 5$  hay contraejemplos.

## C A P I T U L O II

### ALGUNOS CASOS PARTICULARES DE LA CONJETURA DE SANDS SAUER WOODROW.

Este capítulo ilustra la validez de la conjetura de Sands Sauer Woodrof para casos pequeños. Se comprueba para  $n=6$ .

Al inicio de nuestro trabajo, demostramos "a pie" de una manera rápida que la conjetura era válida para 4 vértices.

Después tratamos de encontrar un comportamiento general analizando sucesivamente los casos  $n=5$  y  $n=6$  comprobando la conjetura pero sin llegar a ningún resultado que nos mostrara el camino para una demostración general.

Estos ejemplos permiten apreciar el grado de dificultad del problema.

Los resultados mencionados en el presente capítulo se hicieron en colaboración con la Dra. Hortensia Galeana Sánchez.

## 2.1. NOCIONES PRELIMINARES.

Analizaremos la conjetura de Sands, Sauer, Woodrow en algunos torneos particulares. Siendo  $n$  el orden de la digráfica, para  $n=1$  o  $n=2$  el resultado es trivial, veremos pues los casos  $3 \leq n \leq 6$ .

Primero anotaremos algunos conceptos que nos serán de utilidad:

**Definición 2.1.1.** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada en sus flechas,  $m \geq 2$  (Es decir, sus flechas han sido coloreadas usando  $m \geq 2$  colores) Llamaremos la cerradura transitiva por colores de  $D$  (abreviando C.T.C.) denotada  $C(D)$  a la digráfica definida como sigue:

$$V(C(D)) = V(D)$$

$F(C(D)) = F(D) \cup \{(u,v) \text{ de color } i \text{ tal que existe una } uv\text{-trayectoria monocromática de color } i \text{ en } D\}$ .

Nótese que para cualquier digráfica  $D$ , se tiene  $C(C(D)) = C(D)$ .

**Observación 2.1.1.** nótese que si  $T$  es un torneo  $m$ -coloreado, entonces:

$C(T)$  tiene núcleo  $\Leftrightarrow T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Un teorema muy útil que enunciamos sin demostración es el siguiente:

**Teorema 2.1.1.** [2] Una orientación  $D$  normal de  $T$  tiene núcleo\*todo ciclo de  $D$  tiene al menos una flecha simétrica.

Antes de ver las demostraciones de los casos particulares, recordemos la conjetura:

Si  $T$  es un torneo 3-coloreado sin  $C_3$  tricolor entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

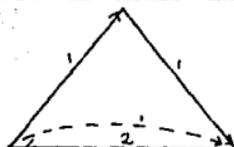
## 2.2.LOS CASOS $n=3$ Y $n=4$

### Caso $n=3$

Denotamos por  $T$  al torneo 3-coloreado con 3 vértices sin  $C_3$  tricolor.

Consideremos  $C(T)$  del torneo. Como  $T$  sólo tiene ciclos de 3 vértices entonces  $C(T)$  también, por lo que basta ver que todo ciclo dirigido de cardinalidad 3 tiene al menos una arista simétrica.

Tómese cualquier ciclo del torneo, por hipótesis dicho ciclo en  $T$  tiene que tener al menos 2 aristas del mismo color, esto implica que en  $C(T)$  existe al menos una arista simétrica (Véase la figura).



Por lo tanto todo ciclo dirigido de  $C(T)$  tiene al menos una flecha simétrica y por lo tanto  $C(T)$  tiene núcleo, lo que implica que  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas con lo cual la conjetura queda probada para el caso  $n=3$ .

### Caso $n=4$

Sea  $T_4$  un torneo con 4 vértices, 3-coloreado sin  $C_3$  tricolor.

Tómese  $C(T_4)$  y en ella un ciclo asimétrico de longitud mínima.

Dicho ciclo, si existe, tiene que tener 4 vértices, ya que se vio que todo ciclo dirigido de 3 vértices en la cerradura transitiva por colores tiene flecha simétrica.

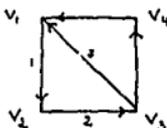
Sea  $C_4$  dicho ciclo dirigido en  $C(T_4)$ , como en  $C_4$  no hay

aristas simétricas, no puede ser un ciclo monocromático, es decir hay al menos 2 colores y por tanto hay 2 flechas consecutivas con colores distintos. Supongamos que  $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y supongamos sin pérdida de generalidad que la flecha  $(v_1, v_2)$  tiene color 1 y  $(v_2, v_3)$  tiene color 2.

Obsérvese que dado que el ciclo es mínimo asimétrico en  $C(T)$  entonces cualquier cuerda en  $C(T_4)$  es simétrica, pues en caso contrario encontraríamos un ciclo más chico asimétrico en  $C(T_4)$ .

Por la observación que se hizo anteriormente, se tiene que  $(v_3, v_1) \in F(C(T_4))$ . esta flecha no puede ser ni de color 1 ni de color 2 ya que entonces se tendría una arista simétrica en  $C_4$ .

Por lo tanto  $(v_3, v_1)$  es de otro color que designaremos 3:



Como la flecha  $(v_3, v_1)$  es de color 3 y en  $T$  no hay  $C_3$  tricolor entonces  $(v_3, v_1) \in F(C(T_4))$ . Esto último implica que existe una trayectoria monocromática de  $v_3$  a  $v_1$  en  $T$ .

Vamos a ver que posibilidades hay para dicha trayectoria.

La trayectoria debe comenzar en  $v_3$ ; de  $v_3$  puede ir a  $v_1, v_2$  o  $v_4$ . A  $v_1$  vimos que no es posible, pues habría  $C_3$  tricolor; de  $v_3$  a  $v_2$  tampoco puede haber flecha en  $T$  pues ésta sería simétrica en  $C_4$  lo cual es una contradicción.

Así que  $v_3$  va a  $v_4$  en color 3.

Es importante observar que una vez que se ha utilizado algún

vértice en la trayectoria no se puede repetir.

La trayectoria continuará de  $v_4$  a otro vértice, el cual no puede ser  $v_3$ , por la observación hecha. Tampoco puede ir a  $v_2$  porque siguiendo después la trayectoria en color  $\underline{3}$  de  $v_2$  a  $v_1$  habría flecha simétrica en  $C_4$  y de  $v_2$  a  $v_3$  se produciría  $(v_2, v_1)$  simétrica.

Por lo tanto  $v_4$  va a  $v_1$  cerrando la trayectoria monocromática en color  $\underline{3}$  y ésta es la única posibilidad para la trayectoria de  $v_3$  a  $v_1$  en  $T$ . Llamemos  $Tr$  a dicha trayectoria. Tenemos entonces:

$$Tr = \{v_3, v_4, v_1\}$$



Analicemos ahora la flecha entre  $v_2$  y  $v_4$  en  $T$ .

Primer caso: si la flecha va dirigida de  $v_2$  a  $v_4$ , entonces no puede ser de color  $\underline{3}$ , pues en tal caso  $(v_1, v_2)$  sería simétrica en  $C(T_4)$ ; no puede ser de color  $\underline{1}$  pues entonces  $(v_1, v_4)$  sería simétrica, y no puede ser de color  $\underline{2}$  porque en  $T$  habría un  $C_3$  tricolor.

Segundo caso: la arista de  $T$  es  $(v_4, v_2)$ , entonces no puede ser de color  $\underline{3}$  pues  $(v_2, v_3)$  sería simétrica en  $C(T_4)$ ; no puede ser de color  $\underline{1}$  pues habría un  $C_3$  tricolor en  $T$ ; no puede ser de color  $\underline{2}$  pues  $(v_3, v_4)$  sería simétrica en  $C(T_4)$ .

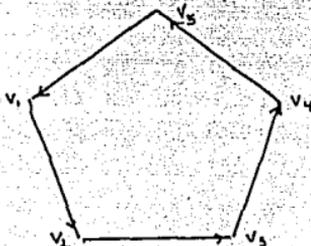
En cualquier caso se llega a una contradicción por lo que todo ciclo dirigido de  $C(T_4)$  tiene al menos una flecha simétrica.

Queda probada la conjetura para el caso  $n=4$ .

### 2.3. CASO $n=5$

Considérese ahora  $T_5$  un torneo de cardinalidad 5, 3-coloreado sin  $C_3$  tricolor.

Tomemos el ciclo de  $C(T_5)$  de cardinalidad mínima y asimétrico, vimos que tal ciclo no puede tener cardinalidad 3 o 4, necesariamente tendrá cardinalidad 5.



Sea  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1\}$  dicho ciclo como se muestra en la figura, lo denotaremos  $C_5$ .

Como  $C_5$  es asimétrico, debe haber un cambio de color en 2 flechas consecutivas, digamos que  $(v_1, v_2)$  es de color 1 y  $(v_2, v_3)$  de color 2. Siguiendo el mismo procedimiento que para  $C_4$ ,  $(v_3, v_4)$  es simétrica en  $C(T_5)$ , pues si no fuera así, existiría un ciclo más chico y asimétrico en  $C(T_5)$ .

Por lo tanto  $(v_3, v_4) \in F(C(T_5))$  y por el argumento visto para  $C_4$  tiene que ser del tercer color 3. Esto implica que en  $T_5$  hay una trayectoria monocromática de  $v_3$  a  $v_1$  en color 3.

Vamos a ver todas las posibles trayectorias monocromáticas de  $v_3$  a  $v_1$  y en cada caso llegaremos a una contradicción, lo cual implicará que  $C_5$  no puede existir y por tanto que todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica.

Primero veremos cuáles serían todas las posibles trayectorias en T para unir  $v_3$  con  $v_1$  en cocolor 1.

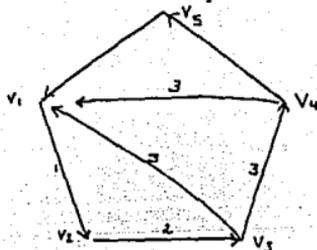
Nótese que que no se pueden repetir vértices pues en tal caso se puede suprimir el ciclo que se formó al repetir un vértice.

Obsérvese que de  $v_3$  sólo podemos salir a  $v_4$  o  $v_5$  pues si se sale a  $v_2$  habría una arista simétrica en  $C_5$  y si va a  $v_1$  habría un  $C_3$  tricolor.

Así para iniciar la trayectoria sólo hay 2 posibilidades.

1° Iniciamos por  $(v_3, v_4)$  Las posibilidades son de  $v_4$  ir a  $v_1$ ,  $v_2$  o  $v_5$ :

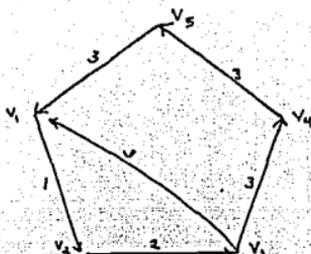
Un primer subcaso es ir a  $v_1$  con lo cual se termina la trayectoria:



Trayectoria (a) =  $\{v_3, v_4, v_1\}$ .

Un segundo subcaso: si de  $v_4$  vamos a  $v_2$  se genera la arista  $(v_3, v_2)$  simétrica en  $C_5$ , por este motivo queda descartada esta posibilidad.

Otro subcaso es ir de  $v_4$  a  $v_5$  y entonces sólo resta ir a  $v_1$  y terminar la trayectoria pues si de  $v_5$  se va a  $v_2$  entonces se genera arista simétrica en  $C_5$ , se forma entonces la trayectoria (b)

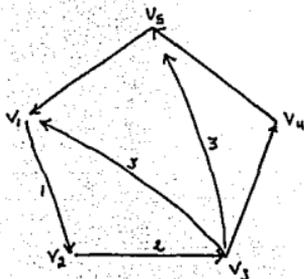


Trayectoria (b) =  $\{v_3, v_4, v_5, v_1\}$ .

2º Si iniciamos por  $(v_3, v_5)$ , tenemos varias posibilidades para continuar la trayectoria; continuar por  $v_1, v_2$  o  $v_4$ .

Si continuamos por  $v_1$  terminamos la trayectoria y la llamamos trayectoria (c)

Trayectoria (c) =  $\{v_3, v_5, v_1\}$ .

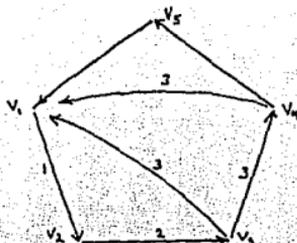


Si continuamos por  $v_2$  no se puede ir a  $v_1$  pues habría una arista simétrica, no puede ir a  $v_3$  o  $v_5$  pues ya fueron usados, así que tiene que seguir por  $v_4$ , pero entonces genera la arista  $(v_4, v_5)$  simétrica.

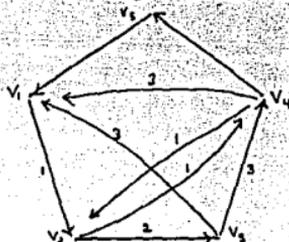
De manera que estos son todos los casos posibles para la trayectoria de  $v_3$  a  $v_1$  en T en color 3.

Ahora llegaremos a una contradicción en cada caso:

Trayectoria (a) =  $\{v_3, v_4, v_1\}$ :

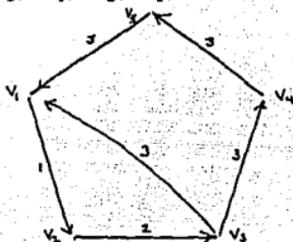


Como de  $(v_2, v_3)$  a  $(v_3, v_4)$  hay un cambio de color, la arista  $(v_4, v_2) \in C_5$  y es de color  $\underline{1}$  y la arista  $(v_2, v_4) \in T_5$ . Como no puede haber  $C_3$  tricolor entonces  $(v_2, v_4)$  es de color  $\underline{1}$ . Como  $(v_2, v_4) \in C(C_5)$  existe una trayectoria monocromática de color  $\underline{1}$  que parte de  $v_4$ .



La única posibilidad para iniciar dicha trayectoria es  $(v_4, v_5)$  en color  $\underline{1}$ . Pero entonces  $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$  es una trayectoria monocromática en color  $\underline{1}$  y por lo tanto  $(v_1, v_5)$  es flecha simétrica.

Trayectoria (b) =  $\{v_3, v_4, v_5, v_1\}$

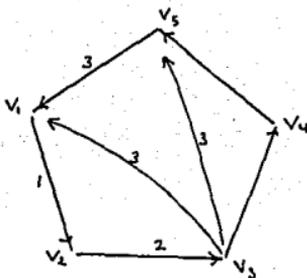


Como hay un cambio de color en 2 aristas consecutivas  $(v_2, v_3)$  es de color  $\underline{2}$  y  $(v_3, v_4)$  es de color  $\underline{3}$  entonces  $(v_4, v_2)$  debe ser de color  $\underline{1}$  en la cerradura transitiva; por lo tanto en T debe haber una trayectoria de  $v_4$  a  $v_2$  en T de color  $\underline{1}$ .

La única posibilidad para iniciar dicha trayectoria es la flecha  $(v_4, v_1)$ .

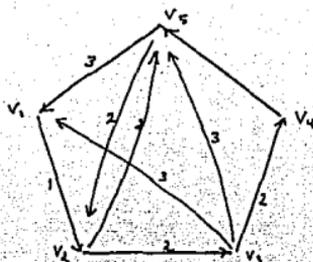
Por otro lado la flecha  $(v_1, v_3) \in T$ , dicha flecha de  $T$  no puede ser de color  $\underline{3}$  pues la flecha  $(v_1, v_5)$  sería simétrica; no puede ser de color  $\underline{2}$  porque habría un  $C_3$  tricolor en  $T$  y tampoco puede ser de color  $\underline{1}$  pues la flecha  $(v_3, v_4)$  sería simétrica. Hemos encontrado una contradicción para el caso (b)

Trayectoria (c) =  $\{v_3, v_5, v_1\}$



Teniendo esta trayectoria hay un cambio de color en las flechas del ciclo consideremos el cambio de color  $(v_5, v_1)$  de color  $\underline{3}$  a  $(v_1, v_2)$  de color  $\underline{1}$ ; por esta causa la flecha  $(v_2, v_5)$  tiene que ser de color  $\underline{2}$  en cerradura transitiva.

La arista  $(v_5, v_2)$  está en  $T$ . Esta no puede ser de color  $\underline{1}$  porque habría en  $T$  un  $C_3$  tricolor y no puede ser de color  $\underline{3}$  porque  $(v_3, v_2)$  sería simétrica en la cerradura transitiva, por lo tanto dicha arista es de color  $\underline{2}$  en  $T$ .



Como  $(v_2, v_5)$  es de color 2 en la cerradura transitiva, entonces hay en  $T$  una trayectoria monocromática en  $T$  de color 2 que une  $v_2$  con  $v_5$ . Analizando esta trayectoria vemos que la flecha forzada para comenzarla es  $(v_2, v_3)$ ; pero de aquí ya no hay manera de continuar pues dirigiéndose a  $v_1$  se produciría arista simétrica en  $C_5$ ;  $v_2$  ya se utilizó a  $v_5$  ya hay flecha y es de color 3; si va a  $v_4$  se produciría  $(v_4, v_5)$  simétrica, de esta manera llegamos a una contradicción.

Como en cada caso se llega a una contradicción, concluimos que no existe ciclo asimétrico, es decir, todo ciclo tiene al menos una arista simétrica. Ahora podemos aplicar el teorema mencionado en el comienzo de esta sección para concluir que el resultado es válido para el caso  $n=5$ .

#### 2.4. CASO $n=6$

Sea  $T_6$  un torneo 3-coloreado sin  $C_3$  tricolor y cuya cardinalidad sea 6.

Elijamos el ciclo mínimo asimétrico en  $C(T_6)$ . Como ya vimos no pueden tener menos de 6 vértices por lo tanto el ciclo mínimo debe tener 6 vértices. Lo llamamos  $C_6$ .

$C_6$  no puede ser monocromático pues no sería asimétrico por lo

tanto hay más de 2 colores en dicho ciclo dirigido. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $(v_1, v_2)$  es de color 1 y que  $(v_2, v_3)$  es de color 2.

Siguiendo el mismo razonamiento anterior la flecha  $(v_3, v_1)$  no puede estar en T y tiene que ser de color 3 en la cerradura transitiva, lo cual implica que existe una trayectoria monocromática en T de  $v_3$  a  $v_1$  en color 3.

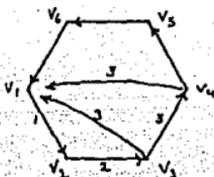
Veamos cuáles son las posibles trayectorias:

La trayectoria comienza con  $v_3$  y no puede seguir por  $v_1$  o  $v_2$  pues habría arista simétrica en  $C_6$ . Por lo tanto de  $v_3$  se puede ir a  $v_4, v_5, o v_6$ .

1º Iniciamos la trayectoria por la flecha  $(v_3, v_4)$ .

Una primera posibilidad es llegar a  $v_1$  directamente obteniendo así una primera trayectoria.

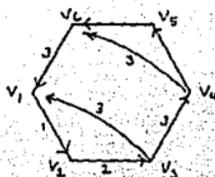
Trayectoria (a) =  $\{v_3, v_4, v_1\}$



Si de  $v_4$  ahora vamos a  $v_2$ , se produce  $(v_3, v_2)$  simétrica, por lo tanto debemos seguir por  $v_5$  o  $v_6$ .

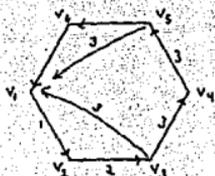
Si de  $v_4$  continuamos por  $v_6$  ya no podemos ir a  $v_3$  o  $v_2$ , tampoco a  $v_5$  pues habría arista simétrica en  $C_6$ . por lo tanto de  $v_6$ , la trayectoria necesariamente debe seguir a  $v_1$  y terminar.

Trayectoria (b) =  $\{v_3, v_4, v_6, v_1\}$

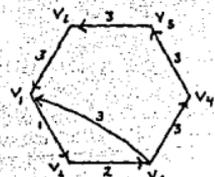


Si la trayectoria va de  $v_4$  a  $v_5$  hay 2 posibilidades ir a  $v_1$  y terminar o ir a  $v_6$  y luego a  $v_1$ , es decir hay otras 2 trayectorias posibles:

Trayectoria (c) =  $\{v_3, v_4, v_5, v_1\}$



Trayectoria (d) =  $\{v_3, v_4, v_5, v_6, v_1\}$

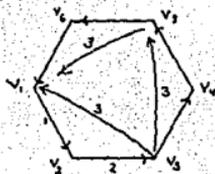


Con esta trayectoria terminamos las posibilidades al comenzar con la trayectoria con  $(v_3, v_4)$ .

2° Si iniciamos con  $(v_3, v_5)$ .

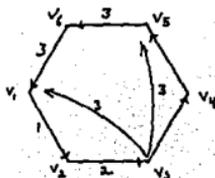
Podemos dirigirnos directamente a  $v_1$  obteniendo una primera trayectoria.

Trayectoria (e) =  $\{v_3, v_5, v_1\}$



Si ahora de  $(v_3, v_5)$  intentamos continuar, veremos que no podemos hacerlo por  $v_2$  porque la flecha  $(v_3, v_2)$  sería simétrica. Tampoco podemos continuar por  $v_3$  pues ya se usó este vértice. De la misma manera no podemos continuar por  $v_4$  pues  $(v_4, v_5)$  sería simétrica por lo tanto tiene que continuar por  $v_6$  y de  $v_6$  sólo le resta ir a  $v_1$ .

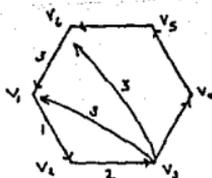
Trayectoria  $(f) = \{v_3, v_5, v_6, v_1\}$



3° Si ahora iniciamos con la flecha  $(v_3, v_6)$

Una posibilidad es ir a  $v_1$  y tenemos la trayectoria siguiente:

Trayectoria  $(g) = \{v_3, v_6, v_1\}$

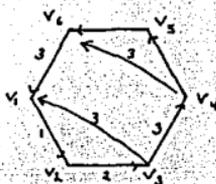


Si de  $v_6$  no se va a  $v_1$ , tampoco se puede ir a  $v_2$  o a  $v_5$  pues en  $C_6$  habría arista simétrica. Tampoco se puede ir a  $v_3$  pues ya se utilizó. Sólo quedaría ir a  $v_4$  y de  $v_4$  sólo a  $v_5$ . Ahora si de  $v_5$  voy a  $v_6$  o  $v_1$  que son las únicas posibilidades, se repetiría una de las trayectorias (e) o (f), por lo tanto no



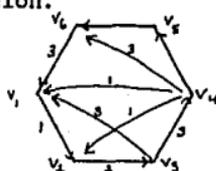
Concluimos que la trayectoria (a) nos lleva a contradicción.

Trayectoria (b):



Como en el caso anterior la flecha  $(v_4, v_2)$  de la cerradura transitiva por colores existe y es de color 1. Entonces de  $v_4$  parte en  $T$  una trayectoria monocromática en color 1.

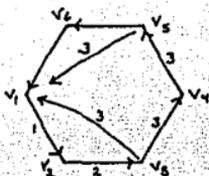
(1) Si comenzamos por  $(v_4, v_1) \in T$  entonces la flecha  $(v_1, v_3) \in T$  y no puede ser de color 1 o 3 pues se produciría flecha simétrica, ni de color 2 porque habría en  $T$  un  $C_3$  tricolor, lo cual es una contradicción.



(2) No podemos continuar por  $(v_4, v_1)$  debido a lo visto en (1), así que dicha flecha no es de color 1. Tampoco puede ser de color 3 pues tendríamos el caso de la trayectoria (a), así que tiene que ser 2.

Pero entonces la flecha de  $T$   $(v_1, v_3)$  no puede ser 1 porque habría  $C_3$  tricolor en  $T$  ni puede ser 2 o 3 por generar flechas simétricas, por lo tanto tampoco podemos partir de  $(v_4, v_5)$ . Pero eran las únicas posibilidades, así que en este caso llegamos también a una contradicción.

Trayectoria (c):

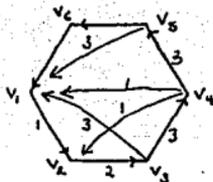


Como hay cambio de color en dos flechas consecutivas:  $(v_2, v_3)$  y  $(v_3, v_4)$  entonces existe la flecha  $(v_4, v_2)$  de color 1 en la cerradura transitiva por colores. De modo que de  $v_4$  debe salir una trayectoria monocromática en color 1 en  $T$ .

Dicha trayectoria sólo puede salir con la flecha  $(v_4, v_1)$  o con  $(v_4, v_6)$ .

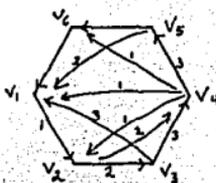
Analicemos los dos casos:

Supongamos que inicia por la flecha  $(v_4, v_1)$ . Entonces la flecha  $(v_1, v_3)$  que está en  $T$  no puede ser coloreada de ningún color. Si fuera 1 entonces  $(v_4, v_3)$  sería simétrica; si fuera 3, la misma flecha sería simétrica. Si fuera 2 habría un  $C_3$  tricolor en  $T$ . Se concluye que la trayectoria no puede iniciar por la flecha  $(v_4, v_1)$ .



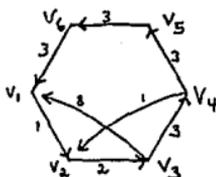
Supongamos que inicia por  $(v_4, v_6)$ . Entonces la flecha  $(v_2, v_4)$  no puede ser 1 o 3 pues se produciría una flecha simétrica, por lo tanto es de color 2. Ahora veamos la flecha  $(v_4, v_1)$ ; si fuera de color 3 tendríamos el caso de la trayectoria (a), si fuera de color 1 tendríamos el caso anterior, así que

descartamos esas posibilidades.



La flecha  $(v_4, v_1)$ , tiene pues color 2, pero entonces  $(v_1, v_2)$  sería simétrica, con lo cual llegamos a una contradicción, concluyendo que la trayectoria de T no puede ser la (c).

Trayectoria (d):

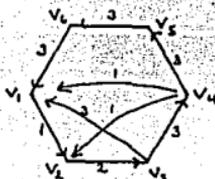


La flecha  $(v_4, v_2)$  es de color 1 en la cerradura transitiva por colores por el cambio de color de dos flechas consecutivas.

De  $v_4$  debe salir una trayectoria de color 1 en T, las únicas posibilidades para iniciarla son  $(v_4, v_1)$  y  $(v_4, v_6)$ .

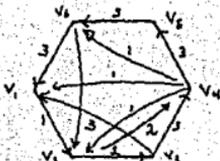
Supongamos que se inicia en  $(v_4, v_1)$ . Entonces  $(v_1, v_3) \in T$  no puede tener ningún color.

Si fuera 1 o 3 habría flecha simétrica y si fuera 2 habría  $C_3$  tricolor.



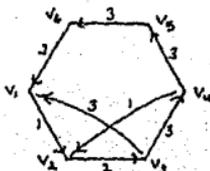
Supongamos que la trayectoria se inicia en la flecha  $(v_4, v_6)$ . Entonces la flecha  $(v_2, v_4) \in T$  y tiene que ser de color 2, pues

si no se generaría flecha simétrica.



Por otro lado la flecha  $(v_6, v_2) \in T$  pues  $(v_2, v_6)$  es de color  $\underline{2}$  en la cerradura transitiva por colores. Esta flecha tiene que ser la que cierre la trayectoria en color  $\underline{1}$ . Pero entonces la flecha  $(v_2, v_5)$  o su simétrica no pueden llevar ningún color, pues en cada caso y para cada color se llega a una contradicción. Descartamos también la trayectoria (d).

Trayectoria (g):

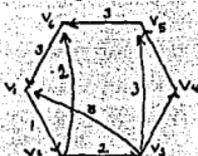


Nótese que la arista  $(v_6, v_2)$  tiene que ser  $\underline{2}$ . Por el cambio de color de las flechas  $(v_5, v_1)$  y  $(v_1, v_2)$ , la flecha  $(v_2, v_6)$  de la cerradura transitiva por colores es de color  $\underline{2}$ , entonces sale una trayectoria en  $T$  de color  $\underline{2}$  que parte de  $v_2$ . Las posibilidades para iniciarla son  $(v_2, v_3)$ ,  $(v_2, v_4)$  o  $(v_2, v_5)$ . Pero si iniciamos por  $(v_2, v_5)$  entonces  $(v_5, v_5)$  sería flecha simétrica, por lo tanto este caso no se considerará.

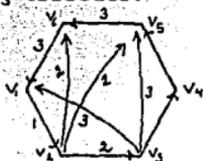
Supongamos que la trayectoria comienza por  $(v_2, v_3)$ , en tal caso tendríamos alguno de los casos ya vistos de las



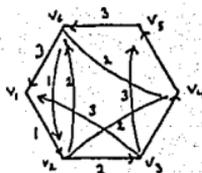
monocromática en color 2. Quedan como posibilidades para iniciarla  $(v_2, v_3)$ ,  $(v_2, v_4)$  y  $(v_2, v_5)$ . Si iniciamos con  $(v_2, v_3)$  caemos en los casos de las trayectoria (a), (b), (c) o (d) quedando descartada dicha posibilidad.



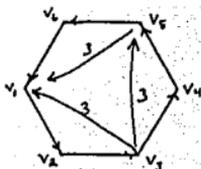
Si iniciamos con  $(v_2, v_5)$ , entonces la flecha  $(v_6, v_2)$  no puede ser de color 2 o 3 por producir flecha simétrica y no puede ser 1 porque habría  $C_3$  tricolor.



Empecemos por  $(v_2, v_4)$ , si continuamos por  $v_5$  después ya no se puede seguir por ninguna arista, así que tiene que continuar por  $v_6$  y es la única posibilidad. continuando por  $v_6$  se observa que  $(v_6, v_2)$  debe ser 1, pero entonces los vértices  $v_2$  y  $v_5$ , entre los que necesariamente existe flecha, no pueden ser unidos en ninguna dirección: si suponemos que  $(v_2, v_5) \in T$ , no puede ser de color 1 o 3 por producir flechas simétricas y no puede ser 2 porque habría  $C_3$  tricolor; si la flecha de  $T$  fuera  $(v_5, v_2)$  no podría llevar color 1 porque habría  $C_3$  tricolor ni 2 o 3 porque habría flecha simétrica.

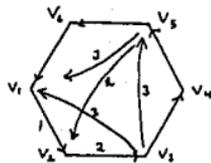
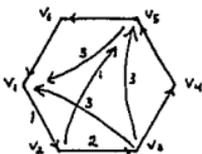


Trayectoria (e):



Obsérvese que la flecha entre  $v_2$  y  $v_5$  que pertenece a  $T$  si va en la dirección  $(v_2, v_5)$ , tiene que ser 1 y si va en la dirección  $(v_5, v_2)$  tiene forzosamente que ser 2. Consideraremos por tanto estos 2 casos.

caso (1)



caso (2)

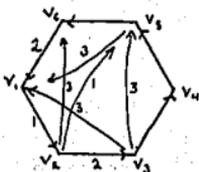
Tanto en el caso (1) como en el caso (2), abordaremos 2 subcasos:

Caso (1)-A La flecha  $(v_6, v_1)$  es de color 2

Caso (1)-B La flecha  $(v_6, v_1)$  es de color 3.

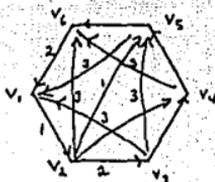
Nótese que dicha flecha no puede ser de color 1.

Caso (1)-A

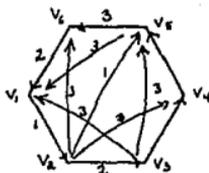


Por el cambio de color de  $(v_6, v_1)$  a  $(v_1, v_2)$ , la flecha  $(v_2, v_6)$  de la C.T.C. es de color 3. Por lo tanto existe una trayectoria en color 3 en  $T$  que sale de  $v_2$  y llega a  $v_6$ .

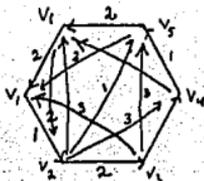
Ya se vió que con cualquier trayectoria se llega a una contradicción, excepto en la trayectoria de este caso, la trayectoria (a), de modo que la trayectoria que se mencionaba tiene que ser  $(v_2, v_4, v_6)$ .



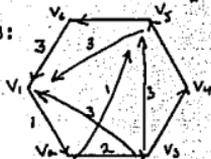
La flecha  $(v_5, v_2)$  puede ser 3 o 2 pues no puede ser 1. Suponiendo que es 3 entonces  $(v_6, v_2) \in T$  y no puede ser de color 1 o 3 porque habría flecha simétrica y no puede ser 2 porque habría  $C_3$  tricolor.



Entonces  $(v_5, v_6)$  debe ser de color 2. En tal caso  $(v_6, v_2)$  no puede ser 1 o 3, tiene que ser 2 y entonces  $(v_4, v_5)$  no puede ser 2 ni 3 está forzada a ser 1, lo cual implica que  $(v_6, v_4)$  está en la C.T.C. y es 3 y que tiene que salir una flecha de color 3 de  $v_6$ . Y entonces dicha trayectoria tendría que ser  $(v_6, v_3, v_4)$  que es un caso ya considerado en el que se llega a una contradicción.

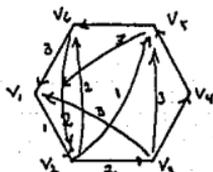


Caso (1) -B:



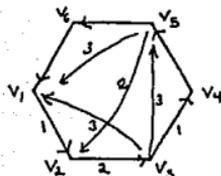
La flecha  $(v_5, v_6)$  no puede ser 1 pues habría flecha simétrica tampoco puede ser 3 pues llegaríamos a un caso ya considerado, por lo que  $(v_5, v_6)$  tiene que ser 2.

Por el cambio de color de 2 flechas consecutivas tenemos que la flecha  $(v_2, v_6)$  está en la C.T.C y tiene que ser 2. Entonces  $(v_6, v_2) \in T$  y debe ser 2. Así que de  $v_2$  debe salir una trayectoria de color 2 que pertenezca a T. La única trayectoria no analizada es  $(v_2, v_4, v_6)$ , pero si  $(v_2, v_4)$  es 2, entonces  $(v_4, v_5)$  es simétrica y llegamos a una contradicción.



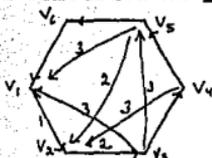
Caso (2). En este caso vemos que  $(v_3, v_4)$  no puede ser 2, tiene que ser 1 o 3.

Caso (2) -A Supongamos que  $(v_3, v_4)$  es 1

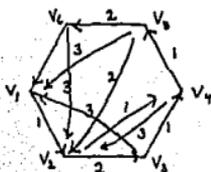


Entonces por el cambio de color de flechas consecutivas  $(v_4, v_2) \in C.T.C.$  y es de color 3 y la flecha  $(v_2, v_4) \in T$ .

Entonces la flecha  $(v_4, v_5)$  no puede ser 2, tiene que ser 1 o 3, pero si es 3 la flecha  $(v_2, v_4) \in T$  no podría ser de color 3 o 2 por producir flecha simétrica ni 1 pues habría  $C_3$  tricolor



Por lo tanto  $(v_4, v_5)$  tiene que ser 1. Como  $(v_4, v_2) \in C.T.C.$  y es 3, debe haber en  $T$  una trayectoria monocromática en color 3. La única no analizada es la trayectoria (e), así la trayectoria monocromática tendría que ser  $(v_4, v_6, v_1)$ .

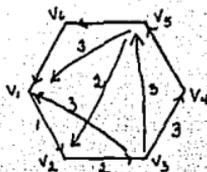


Por otra parte la flecha  $(v_2, v_4) \in T$  y no puede ser 2 por producir flecha simétrica ni puede ser 3 porque habría  $C_3$  tricolor por lo tanto tiene que ser de color 1.

La flecha  $(v_5, v_6)$  no puede ser 1 o 3 por producir en ambos casos flechas simétricas, tiene que ser 2.

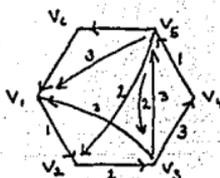
Entonces por el cambio de color de  $(v_4, v_5)$  a  $(v_5, v_6)$  la flecha  $(v_6, v_4)$  tiene que ser 3 en la C.T.C. y entonces de  $v_6$  debe salir una trayectoria en color 3, la única trayectoria posible es la análoga a la (e), que en este caso no puede ser pues las flechas ya tienen asignado otro color. Llegamos a una contradicción.

Caso (2)-B:



En este caso la flecha  $(v_4, v_5)$  no puede ser 2 por generar flecha simétrica ni 3 pues caería en un caso ya visto por lo tanto tiene que ser 1.

Por cambio de color de  $(v_3, v_4)$  a  $(v_4, v_5)$  la flecha  $(v_5, v_3) \in C.T.C.$  y es 2. Pero entonces debe haber una trayectoria monocromática en color 2 en T que sale de  $v_5$  y llega a  $v_3$ . Llegamos siempre a una contradicción de manera que la trayectoria (e) tampoco funciona.



Pero se agotaron las posibles trayectorias, de manera que para el torneo de cardinalidad 6 queda demostrada la conjetura.

De esta manera la conjetura queda probada para torneos de hasta 6 vértices.

Con los casos vistos anteriormente podemos enunciar el siguiente resultado:

**Teorema 2.3.1.** Si  $T$  es un torneo 3 coloreado, sin triángulos dirigidos tricolores entonces en la cerradura transitiva por colores, cada ciclo dirigido de 3, 4, 5 o 6 vértices tiene al menos una flecha simétrica.

## C A P I T U L O III

### TORNEOS $m$ -COLOREADOS POR ARISTAS.

Un ciclo casi-monocromático en una digráfica es aquél que tiene con a lo más una excepción todas sus flechas de un mismo color.

En este capítulo veremos algunos resultados relativos a ciclos casi-monocromáticos. Dichos resultados, importantes por sí mismos, nos llevarán también a la demostración del primer teorema sobre existencia de núcleo por trayectorias monocromáticas. Estos resultados fueron demostrados por la Dra. Hortensia Galeana Sánchez. Al final del capítulo se presenta un segundo teorema sobre existencia de núcleo por trayectorias monocromáticas, realizado en colaboración con la Dra. Galeana.

El primer resultado considera como hipótesis  $T$  un torneo  $m$ -coloreado en aristas tal que todo  $C_3$ ,  $C_4$ , y  $C_5$  es casi-monocromático. Considerando después la cerradura transitiva por colores  $C(T)$  y un  $C_3$  en ella, donde  $C_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_0\}$  tal que  $(x_0, x_1, x_2)$  es una trayectoria asimétrica de  $C_3 \in C(T)$ . Se concluye que si  $(x_0, x_1, x_2)$  es trayectoria de  $T$  es

monocromática en  $T$ .

Mas adelante y bajo las mismas hipótesis se demuestra que la flecha  $(x_2, x_0)$  está en  $T$  o sea  $C_3$  pertenece también a  $T$ .

Para demostrar esto último, previamente se ve otro resultado: Sea  $T$  torneo  $m$ -coloreado en sus flechas para el cual todo  $C_4$  y  $C_5$  son casi-monocromáticos. Considerando  $C_3 = (x_0, x_1, x_2, x_0) \in C(T)$  tal que  $(x_0, x_1, x_2)$  es trayectoria asimétrica de  $C(T)$ . Se concluye que si  $(x_0, x_1, x_2)$  es trayectoria monocromática en  $T$ , entonces  $(x_2, x_0) \in F(T)$ .

Nuestro principal resultado es el siguiente:

Si  $T$  torneo  $m$ -coloreado en sus flechas y si todo  $C_3, C_4$ , y  $C_5$  es casi-monocromático, entonces  $T$  tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Después se dan dos ejemplos, uno en el que se cumplen las hipótesis de este resultado y no las de teorema 1.4., y otro en el que se cumplen las hipótesis del teorema 1.4. y no las de nuestro resultado.

Esto nos indica que los resultados son diferentes y podemos encontrar gráficas que tienen núcleo por trayectorias monocromáticas de diferente clase.

Al final del capítulo se menciona otro teorema interesante relacionado con coloración de aristas y núcleos por trayectorias monocromáticas.

### 3.1. CONCEPTOS Y RESULTADOS PRELIMINARES.

**Definición 3.1.1.** Sea  $D$  una multidigráfica cuyas flechas han sido coloreadas con 2 o más colores. Diremos que un ciclo dirigido  $C_n = (0, 1, \dots, n-1, 0)$  es casi-monocromático si existe un conjunto de flechas  $\{f_i = (i-1) \in F(D) \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  (notación módulo  $n$ ) tal que con a lo más una excepción, todas tienen el mismo color. Si  $D$  es una digráfica y  $C_n \subseteq D$  diremos que  $C_n$  es casi-monocromático si con a lo más una excepción todas sus flechas tienen el mismo color.

**Definición 3.1.2.** Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado en sus flechas y  $C_n = (0, 1, \dots, n-1, 0)$  un ciclo dirigido contenido en  $T$ .

Diremos que  $C_n$  es  $C(T)$  casi-monocromático si  $C_n$  es casi-monocromático en  $C(T)$ .

Nótese que si  $C_n$  es casi-monocromático entonces  $C_n$  es  $C(T)$ -casi-monocromático, pero el recíproco no siempre es válido.

**Definición 3.1.3.** Una digráfica núcleo imperfecta crítica (NIC) es aquella que no tiene núcleo pero que cualquier subdigráfica inducida estrictamente contenida tiene núcleo.

### 3.2. EXISTENCIA DE NUCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMATICAS.

**Teorema 3.2.1.** Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado en sus flechas tal que todo ciclo dirigido de longitud menor o igual que 5 contenido en  $T$  es casi-monocromático. Si  $(x_0, x_1, x_2, x_0)$  es un triángulo dirigido contenido en  $C(T)$  tal que  $(x_0, x_1, x_2)$  es una trayectoria dirigida contenida en  $T$  y asimétrica en  $C(T)$ . Entonces las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_1, x_2)$  tienen el mismo color.

**Demostración:**

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un triángulo dirigido  $(x_0, x_1, x_2, x_0)$  que satisface las hipótesis del teorema y tal que las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_1, x_2)$  tienen distinto color; digamos que  $(x_0, x_1)$  es de color rojo y  $(x_1, x_2)$  es azul. Ya que  $(x_2, x_0) \in C(T)$ , existe una  $x_2 x_0$  trayectoria dirigida monocromática contenida en  $T$ ; sea  $\alpha = (x_2 = z_0, z_1, \dots, z_n = x_0)$  una  $x_2 x_0$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima. Notemos que  $\alpha$  no es de color azul, ya que si  $\alpha$  es de color azul entonces  $(x_1, x_2) \cup \alpha$  es una  $x_1 x_0$ -trayectoria azul y por lo tanto  $(x_1, x_0) \in F(C(T))$  contradiciendo que  $(x_0, x_1)$  es una flecha asimétrica de  $C(T)$ . Notemos también que  $\alpha$  no es de color rojo ya que si  $\alpha$  es de color rojo entonces  $\alpha \cup (x_0, x_1)$  es una  $x_2 x_1$  trayectoria roja por lo cual  $(x_2, x_1) \in F(C(T))$  contradiciendo que  $(x_1, x_2)$  es una flecha asimétrica de  $C(T)$ .

Digamos que  $\alpha$  es de color verde.

Analizaremos ahora algunos posibles casos para  $n$ .

Cuando  $n=3$  tenemos que  $(x_0, x_1, x_2) \cup \alpha$  es un ciclo dirigido de longitud menor o igual que 5 contenido en  $T$  cuyas flechas han sido coloreadas con 3 colores por lo cual no es casi-monocromático, contradiciendo la hipótesis.

Cuando  $n>3$  probaremos inductivamente que  $(x_1, z_{2i}) \in F(T)$  ( $2 \leq 2i < n$ ). Si  $(x_1, z_2) \in F(T)$ , entonces  $(z_2, x_1) \in F(T)$  y  $(z_2, x_1, x_2 = z_0, z_1, z_2)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 cuyas flechas han sido coloreadas con 3 colores y por lo tanto no es casi-monocromático. Una contradicción, concluimos que  $(x_1, z_2) \in F(T)$ .

Supongamos ahora que  $(x_1, z_{2i-2}) \in F(T)$  y  $2 \leq 2i < n$ . Probaremos que  $(x_1, z_{2i}) \in F(T)$ . Si  $(x_1, z_{2i}) \in F(T)$  entonces  $(z_{2i}, x_1) \in F(T)$  y  $(z_{2i}, x_1, z_{2i-2}, z_{2i-1}, z_{2i})$  es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  cuyas flechas han sido coloreadas con 3 colores por lo cual no es casi-monocromático. Una contradicción.

Analizaremos ahora los 2 posibles casos:

Cuando  $n>3$  es par. Hemos demostrado que  $(x_1, z_{n-2}) \in F(T)$ , así que  $(x_1, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n, x_1)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  cuyas flechas han sido coloreadas con 3 colores por lo cual no es casi-monocromático, contradiciendo la hipótesis del teorema 1.

Cuando  $n>3$  es impar. Hemos demostrado que  $(x_1, z_{n-3}) \in F(T)$  y por lo tanto  $(x_1, z_{n-3}, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n, x_1)$  es un ciclo dirigido de longitud 5 contenido en  $T$  cuyas flechas han sido coloreadas con 3 colores por lo cual no es casi-

monocromático, contradiciendo la hipótesis del Teorema . ■

**Teorema 3.2.2.** Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado en sus flechas tal que todo ciclo dirigido de longitud 5 contenido en  $T$  es casi-monocromático y todo ciclo de longitud 4 contenido en  $T$  es casi-monocromático.

Si  $(x_0, x_1, x_2, x_0)$  es un triángulo dirigido contenido en  $C(T)$  tal que  $(x_0, x_1, x_2)$  es una trayectoria contenida y monocromática en  $T$  y asimétrica en  $C(T)$  entonces  $(x_2, x_0) \in F(T)$ .

**Demostración:** Procedemos por reducción al absurdo.

Supongamos que  $(x_2, x_0) \notin F(T)$ . Ya que  $(x_2, x_0) \in F(C(T))$ , se sigue que existe una  $x_2x_0$ -trayectoria monocromática contenida en  $T$ . Sea  $\alpha = (x_2 = z_0, z_1, \dots, z_n = x_0)$  una  $x_2x_0$ -trayectoria monocromática de longitud mínima contenida en  $T$  y supongamos que  $\alpha$  es de color rojo ( $n \geq 2$ ). Ya que  $(x_0, x_1, x_2)$  es asimétrica en  $C(T)$  y monocromática en  $T$  es de algún color distinto del rojo, digamos que  $(x_0, x_1, x_2)$  es de color azul. Ahora analizaremos algunos posibles casos:

Cuando  $n=2$ . Tenemos  $C_4 = (z_0, z_1, z_2, x_1, x_2 = z_0)$  un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  con 2 flechas rojas y 2 azules por lo cual  $C_4$  no es casi-monocromático, lo que contradice la hipótesis.

Cuando  $n > 2$ . Probaremos inductivamente que  $(x_1, z_{2i}) \in F(T)$  ( $2 \leq 2i < n$ ). Si  $(x_1, z_2) \notin F(T)$  entonces  $(z_2, x_1) \in F(T)$  y  $C_4 = (z_2, x_1, x_2, z_1, z_2)$  es un ciclo dirigido de longitud 4

contenido en  $T$ , se sigue de la hipótesis que es casi-monocromático y como  $(z_0, z_1)$  y  $(z_1, z_2)$  son ambas rojas y  $(x_1, x_2)$  es azul se sigue que  $(z_2, x_1)$  es roja y por lo tanto  $(x_2 = z_0, z_1, z_2, x_1)$  es una  $x_2 x_1$ -trayectoria monocromática de donde tenemos  $(x_2, x_1) \in C(T)$  contradiciendo la hipótesis  $(x_2, x_1)$  es flecha asimétrica de  $C(T)$ . Concluimos que  $(x_1, z_2) \in F(T)$ .

Supongamos ahora que  $(x_1, z_{2i-2}) \in F(T)$  y  $2 \leq 2i < n$ . Probaremos que  $(x_1, z_{2i}) \in F(T)$ . Si no fuera así, entonces  $(z_{2i}, x_1) \in F(T)$  y  $C_4 = (z_{2i}, x_1, z_{2i-2}, z_{2i-1}, z_{2i})$  es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$ , se sigue de las hipótesis que es casi-monocromático y como  $(z_{2i-2}, z_{2i-1})$  y  $(z_{2i-1}, z_{2i})$  son ambas rojas, se tiene que al menos una de las dos flechas  $(z_{2i}, x_1)$  ó  $(x_1, z_{2i-2})$  debe ser roja. Si  $(z_{2i}, x_1)$  es roja, entonces  $(z_0, \alpha, z_{2i}) \cup (z_{2i}, x_1)$  es una  $z_0 x_1$ -trayectoria roja por lo cual  $(x_2, x_1) \in F(C(T))$  contradiciendo la hipótesis  $(x_1, x_2) \in \text{Asym}C(T)$ . Si  $(x_1, z_{2i-2})$  es roja entonces  $(x_1, z_{2i-2}) \cup (z_{2i-2}, \alpha, z_n = x_0)$  es una  $x_1 x_0$ -trayectoria roja por lo cual  $(x_1, x_0) \in F(C(T))$  contradiciendo la hipótesis  $(x_0, x_1) \in \text{Asym}C(T)$ . Analizaremos ahora los dos casos posibles:

Cuando  $n > 2$  es par. Hemos demostrado que  $(x_1, z_{n-2}) \in F(T)$  así que  $C_4 = (x_1, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n = x_0, x_1)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  y por lo tanto es casi-monocromático; ya que  $(z_{n-2}, z_{n-1}, z_n)$  es una trayectoria roja y  $(x_0, x_1)$  es azul, se sigue que  $(x_1, z_{n-2})$  es roja y  $(x_1, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n)$  es una  $x_1 x_0$ -trayectoria roja, luego  $(x_1, x_0) \in F(C(T))$  contradiciendo la hipótesis  $(x_0, x_1) \in \text{Asym}C(T)$ .

Cuando  $n > 2$  es impar. Hemos demostrado que  $(x_1, z_{n-3}) \in F(T)$  (nótese que posiblemente  $n-3=0$ ) así que  $(x_1, z_{n-3}, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n, x_1)$  es un ciclo dirigido de longitud 5 contenido en  $T$  así que es casi-monocromático y como  $(z_{n-3}, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n)$  es trayectoria roja y  $(z_n, x_1)$  es azul se sigue que  $(x_1, z_{n-3})$  es roja por lo cual  $(x_1, z_{n-3}, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n)$  es una  $x_1 x_0$ -trayectoria monocromática, de donde  $(x_1, x_0) \in C(T)$  contradiciendo la hipótesis  $(x_0, x_1) \in \text{Asym}C(T)$ . ■

Nota .H: Meyniel notó [ ] que si todo ciclo dirigido de longitud 3 de una digráfica tiene al menos dos flechas simétricas entonces todos sus clanes tienen núcleo.

**Teorema 3.2.3.** Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado en sus flechas tal que todo ciclo dirigido de longitud menor o igual que 5 contenido en  $T$  es casi-monocromático. Si  $(x_0, x_1, x_2, x_0)$  es un triángulo dirigido contenido en  $C(T)$  tal que  $(x_0, x_1, x_2)$  es una trayectoria dirigida contenida en  $T$  y asimétrica en  $C(T)$  entonces  $(x_2, x_0) \in F(T)$ .

**Demostración:**

Se sigue directamente del teorema 3.2.1. que las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_1, x_2)$  tienen el mismo color, por lo tanto  $(x_0, x_1, x_2)$  es una trayectoria dirigida contenida en  $T$  monocromática en  $T$  y por hipótesis asimétrica en  $C(T)$ . Se sigue del teorema 3.2.2. que  $(x_2, x_0) \in F(T)$ . ■

**Teorema 3.2.4.** Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado en sus flechas ( $m \geq 2$ ). Si cada ciclo dirigido contenido en  $T$  de longitud menor o igual que 5 es casi-monocromático (es decir cada ciclo dirigido contenido en  $T$  y de longitud 3, 4 ó 5 es casi-monocromático). Entonces  $C(T)$  es núcleo perfecta.

**Demostración:**

Procederemos por reducción al absurdo. Si  $C(T)$  no es una KP-digráfica entonces existe una subdigráfica inducida de  $C(T)$ , llamémosla  $H$  tal que  $H$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica (ver [5]).

Probaremos ahora algunas afirmaciones:

(1) Cada triángulo dirigido contenido en  $H$  tiene al menos una flecha simétrica.

Supongamos que existe un triángulo dirigido  $C_3 = (z_0, z_1, z_2, z_0)$  contenido en  $H$  que no tiene flechas simétricas. Notemos que  $C_3 \subseteq T$ . Si  $(z_1, z_{1+1}) \in F(T)$  entonces  $(z_{1+1}, z_1) \in F(T)$  entonces  $(z_{1+1}, z_1) \in F(T)$  y  $(z_1, z_{1+1}) \in \text{Sym}C(T)$  lo cual es imposible. Ya que  $C_3 \subseteq T$  se sigue que  $C_3$  es casi-monocromático por lo cual tiene al menos dos flechas del mismo color. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $(z_0, z_1)$  y  $(z_1, z_2)$  tienen el mismo color, se sigue que  $(z_0, z_1, z_2)$  es monocromática y  $(z_0, z_2) \in F(C(T))$ , por lo tanto  $(z_2, z_0) \in \text{Sym}C(T)$ . Una contradicción.

(2) Existen triángulos dirigidos en  $H$  con exactamente una flecha simétrica.

Es una consecuencia directa de la nota y de (1).

(3) Si  $C_3$  es un triángulo dirigido contenido en  $H$  con exactamente una flecha simétrica. Entonces las dos flechas asimétricas de  $C_3$  tienen el mismo color y la simétrica tiene un color distinto a las 2 asimétricas.

Sea  $C_3 = (z_0, z_1, z_2, z_0)$  un triángulo dirigido contenido en  $H$  tal que  $(z_2, z_0)$  es la única flecha simétrica de  $C_3$ .

Ya que  $H$  es una subdigráfica inducida de  $C(T)$  se sigue que  $(z_0, z_1, z_2)$  es una trayectoria dirigida contenida en  $T$  y asimétrica en  $C(T)$ . Se sigue del teorema 3.2.1. que  $(z_0, z_1)$  y  $(z_1, z_2)$  tienen el mismo color.

Vamos a ver ahora la demostración del teorema:

Sea  $C_3 = (z_0, z_1, z_2, z_0)$  un triángulo dirigido con exactamente una flecha simétrica, digamos que  $(z_2, z_0) \in \text{Sym}H$ . Se sigue de (3) que las otras dos flechas tienen asignado el mismo color, digamos, el color  $i$ .

Denotaremos por

$f(C_3) = |\{t \in V(H) : \text{Existe una flecha de } t \text{ a } z_2 \text{ de color } i\}|$ , es decir :  $f(C_3)$  es el número de vértices de  $H$  que tienen alguna flecha de color  $i$  hacia  $z_2$ .

Sea  $\gamma = (x_0, x_1, x_2, x_0)$  un triángulo dirigido contenido en  $H$  tal que  $f(\gamma) = \max\{f(C_3) \mid C_3 \text{ es un triángulo dirigido contenido en}$

H con exactamente una flecha simétrica} y supongamos que  $(x_2, x_0) \in \text{Sym } H$  y  $\{(x_0, x_1), (x_1, x_2)\} \subseteq \text{Asym } H$ .

Continuamos la demostración del teorema 4 probando algunas otras proposiciones:

(4) Las flechas  $(x_0, x_1)$  y  $(x_1, x_2)$  tienen asignado el mismo color, digamos azul y  $(x_2, x_0)$  tiene un color distinto del color azul, digamos que es de color rojo.

Se sigue directamente de (3).

(5) Para  $u, v \in V(H)$  se tiene:  $(u, v) \in \text{Asym } H$  si y sólo si  $(u, v) \in \text{Asym } C(T)$ .

Ya que H es subdigráfica inducida de C(T) tenemos:

$(u, v) \in F(H)$  si y sólo si  $(u, v) \in F(C(T))$  y  $(v, u) \in F(H)$  si y sólo si  $(v, u) \in F(C(T))$ .

(6)  $B_1 = \{z \in V(H - x_2) \mid \text{no existe una } z x_2\text{-flecha en } H\} \neq \emptyset$ .

Claramente tenemos que si  $B_1 = \emptyset$  entonces  $\{x_2\}$  es núcleo de H. Una contradicción.

(7) Existen  $z \in B_1$ ,  $w \in (V(H) - B_1)$  tales que  $(z, w) \in \text{Asym } C(T)$ .

Ya que  $\{x_0, x_1\} \subseteq (V(H) - B_1)$ , se sigue de 6 que  $(B_1, V(H) - B_1)$  es una partición de  $V(H)$  en 2 conjuntos ajenos no vacíos y como  $\text{Asym } H$  es fuertemente conexas (ver [4]); se sigue que existen  $z \in B_1$ ,  $w \in (V(H) - B_1)$  tales que  $(z, w) \in \text{Asym } H$  y se sigue de (5) que  $(z, w) \in \text{Asym } C(T)$ .

(8)  $(x_2, z) \in \text{Asym } C(T)$ .

Se sigue directamente de la definición de  $B_1$  y de (5).

(9)  $(x_1, z) \in \text{Asym } C(T)$ .

Ya que  $C(T)$  es una digráfica completa, es suficiente demostrar que  $(z, x_1) \in F(C(T))$ . Para lo cual procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que  $(z, x_1) \notin F(C(T))$ , entonces  $c_3 = (z, x_1, x_2, z)$  es un triángulo con  $\{(x_1, x_2), (x_2, z)\} \subseteq \text{Asym } C(T)$  (por la definición de  $\gamma$  y por (8)).

Se sigue de 1 que  $(z, x_1) \in \text{Sym } C(T)$ . Ahora, el teorema 1 implica que  $(x_1, x_2)$  y  $(x_2, z)$  tienen asignado el mismo color que por (4) debe ser azul.

Notemos ahora que si  $t \in V(H)$  tal que existe una  $tx_2$ -flecha de color azul en  $H$  entonces como  $(x_2, z)$  es azul, existe una  $tz$ -trayectoria de color azul en  $H$  y por lo tanto existe una  $tz$ -flecha de color azul en  $H$ . Además existe  $(x_2, z)$  flecha de color azul.

Se sigue que  $f(C_3) = 1 + f(\gamma)$ , contradiciendo la definición de  $\gamma$ .

(10)  $(x_2, x_0) \in F(T)$ .

Es una consecuencia inmediata de la definición de  $\gamma$ , la propiedad (4) y el Teorema 3.2.2.

(11) Si  $(z, x_0) \in F(C(T))$  entonces  $(z, x_0) \in F(T)$ .

Supongamos que  $(z, x_0) \notin F(C(T))$ . Considerando el triángulo

dirigido  $C_3=(z, x_0, x_1, z)$  tenemos que  $C_3$  tiene dos flechas asimétricas que son  $(x_0, x_1)$  y  $(x_1, z)$  (ver (9) y definición de  $\gamma$ ). Se sigue directamente del Teorema 3.2.3. que  $(z, x_0) \in F(T)$ .

(12)  $(w, x_2) \in F(T)$ .

Ya que  $w \in (V(H) - B_1)$  tenemos que existe una  $wx_2$ -flecha en  $H$ . Consideremos ahora el triángulo dirigido:

$C_3=(x_2, z, w, x_2)$  contenido en  $H$ . Se sigue de (7) y (8) que  $(x_2, z)$  y  $(z, w)$  son las dos flechas asimétricas en  $C(T)$  de  $C_3$ .

El Teorema 3 implica que  $(w, x_2) \in F(T)$ .

(13) Las flechas  $(x_0, x_1)$ ,  $(x_1, z)$ ,  $(z, w)$  y  $(w, x_2)$  tienen todas asignado el mismo color azul.

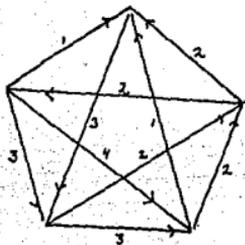
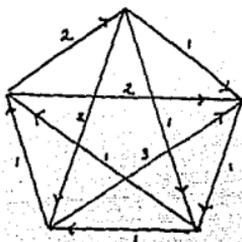
Consideremos al ciclo dirigido  $C_5=(x_0, x_1, z, w, x_2, x_0)$ . Se sigue de : la definición de  $\gamma$ , (9), (7), (13), (10) respectivamente que las flechas  $(x_0, x_1)$ ,  $(x_1, z)$ ,  $(z, w)$ ,  $(w, x_2)$  y  $(x_2, x_0)$ , pertenecen a  $T$  (sólamente nótese que como  $T$  es un torneo se tiene que  $(u, v) \in \text{Asym } C(T)$  entonces  $(u, v) \in F(T)$ ). Así que  $C_5$  está contenido en  $T$  y por hipótesis debe ser casi-monocromático. Ya que la flecha  $(x_2, x_0)$  es roja y la flecha  $(x_0, x_1)$  es azul (ver (4)); se sigue que la trayectoria dirigida  $\alpha=(x_1, z, w, x_2)$  debe ser roja o azul. Analizaremos las dos posibilidades.

Si  $\alpha$  es roja entonces  $\alpha \cup (x_2, x_0)$  es una  $x_1x_0$ -trayectoria dirigida roja, por lo cual existe una  $x_1x_0$ -flecha roja en  $C(T)$  y por lo tanto en  $H$ , contradiciendo el hecho de que  $(x_0, x_1) \in \text{Asym } C(T)$ . Se sigue que  $\alpha$  debe ser azul y por (4)

tenemos que  $(x_0, x_1)$  es azul.

(14) Dado que  $\alpha$  es azul entonces tenemos la trayectoria  $(z, w, x_2)$  azul, lo cual implica que en  $H$  existe  $(z, x_2)$  en color azul lo cual es una contradicción. ■

Enseguida damos dos ejemplos el primero ilustra el teorema 3.2.4. y se ve que no cumple con las hipótesis del teorema de Shen Ming gang. El segundo ejemplo ilustra el teorema de Shen Ming gang y sin embargo no cumple las hipótesis del teorema 3.2.4. Esto nos demuestra que los dos teoremas son diferentes



Enseguida se enunciará otro teorema con otra clase de hipótesis.

**Teorema 3.2.5.** Sea  $T$  torneo  $m$ -coloreado ( $m \geq 2$ ) fuertemente conexo sin  $C_3$  tricolor y tal que todo  $C_k$  es monocromático para  $3 \leq k \leq n$  entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Antes de pasar a la demostración enunciaremos dos lemmas.

Lemma 1 : Todo  $C_r \in C(T)$  con  $r > k$  se intersecta con algún  $C_k$  en al menos una arista.

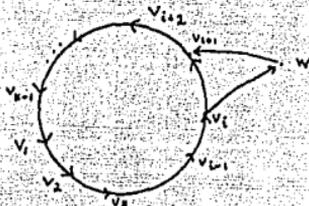
Para la demostración véase [6]

Lemma 2. Si  $\forall C_k \in T$  se tiene que  $C_k$  es monocromático con  $3 \leq k \leq n$  entonces  $\forall C_r = \{v_0, v_1, \dots, v_r\} \in C(T) \exists C_k = \{v_0, v_1, \dots, v_r\}$  monocromática tal que  $(v_i, v_{i+1}) \in F(C(T))$ .

Demostración: Para  $k$  es evidente. Tómese un ciclo dirigido  $C_{k-1}$  de  $T$  con  $k-1$  vértices. entonces existe al menos un vértice  $w \in C_{k-1}$  y  $w \in T$  y por lo tanto en  $C(T)$ .

Supongamos  $C_{k-1} = \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$  y supongamos que existe  $w \in C_{k-1}$  tal que algún  $v_i$  tenga una flecha hacia  $w$  y un  $v_j$  tal que  $w$  se dirija a  $v_j$ , entonces como se trata de un torneo todos los vértices del ciclo deben estar conectados con  $w$ , nos fijamos en 2 vértices consecutivos donde haya un cambio de dirección de las flechas, es decir  $v_i$  y  $v_{i+1}$  tales que  $(v_i, w)$  y  $(w, v_{i+1})$  existan. Tendríamos entonces un ciclo dirigido  $C_k = \{v_1, \dots, v_i, w, v_{i+1}, \dots, v_{k-1}, v_1\}$  con  $k$  vértices por lo que por hipótesis  $\exists C_k$  con los mismos  $k$  vértices de  $C_k$  en  $C(T)$  tal que es monocromática, por lo tanto son las mismas flechas que conectan todas las de  $C_{k-1}$  del mismo color a excepción quizá de  $(v_i, v_{i+1})$  pero esas flechas conectan a todos los

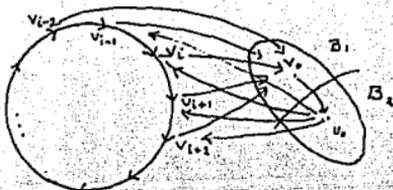
vértices de  $C_{k-1}$  excepto a  $(v_i, v_{i+1})$ . Pero  $(v_i, w, v_{i+1})$  es monocromática y del mismo color que las flechas de  $C_k$ , por lo tanto hay una flecha  $(v_i, v_{i+1})$  del mismo color que las de  $C_k$ , por lo tanto existe  $C_{(k-1), e} \in C(T)$  monocromático.



Ahora veamos el caso en que no existe un vértice  $w \in C_{k-1}$  con la propiedad vista; en tal caso tomamos  $V - C_{k-1} = B$  y  $B$  lo podremos dividir en 2 conjuntos ajenos  $B_1$  y  $B_2$  donde  $B_1 = \{v \in B \text{ tales que } (v_i, v) \in F(T) \vee v_i \in C_{k-1}\}$  y  $B_2 = \{u \in B \text{ tales que } (u, v_i) \in F(T) \vee v_i \in C_{k-1}\}$ .

Nótese que  $B_1$  y  $B_2$  son no vacíos pues si  $v \in B_1$  entonces  $(v_i, v) \in F(T)$  y como el torneo es fuertemente conexo debe haber una trayectoria de  $v$  a  $v_i$  entonces si  $B_2$  fuera vacío del vértice  $v$  no saldría ninguna flecha lo cual es una contradicción. Análogamente se ve que  $B_1$  no puede ser vacío.

Continuamos la demostración : un vértice  $u$  de  $B_2$  llega en una trayectoria a todo vértice  $v$  de  $B_1$  y como el torneo es fuertemente conexo de  $v$  debe salir una trayectoria hacia  $u$ ; dicha trayectoria no puede ir a través de un vértice de  $C_{k-1}$  pues los vértices de  $C_{k-1}$  entran a  $v$ , de manera que debe existir una flecha de algún vértice de  $B_1$  a un vértice de  $B_2$ . Sean  $u_0$  y  $v_0$  los vértices de  $B_2$  y  $B_1$  respectivamente que están conectados directamente por una flecha.



Tenemos entonces que  $\{v_i, v_0, u_0, v_{i+2}, v_{i+3}, \dots, v_{k-1}, v_1, \dots, v_i\}$  es un ciclo dirigido de longitud  $k$  y por lo tanto  $\exists C_{k_1}$ , con los mismos vértices que es monocromático en  $C(T)$ .

También tenemos que  $\{v_{i-1}, v_0, u_0, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{k-1}, v_1, \dots, v_{i-1}\}$  es un ciclo dirigido de longitud  $k$  y por lo tanto  $\exists C_{k_2}$ , monocromático en  $C(T)$  del mismo color que  $C_{k_1}$ , ya que  $(v_0, u_0)$  pertenece a ambos.

Lo mismo sucede con el ciclo  $\{v_{i-2}, v_0, u_0, v_{i-1}, \dots, v_{i-1}\}$ . Lo cual implica que para  $C_{(k-1)} \in C(T)$  que es monocromático.

Procediendo de manera análoga se puede ver que  $C_r$ , para  $3 \leq r < k-1$  es un ciclo monocromático en la cerradura transitiva por colores.

**Demostración del teorema:** de acuerdo a los 2 lemmas todo ciclo dirigido en la cerradura transitiva por colores tiene al menos una flecha simétrica y por lo tanto en la cerradura transitiva hay núcleo, de donde se tiene que el torneo tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

## C A P I T U L O IV

### DOS OPERACIONES QUE PRESERVAN PROPIEDADES RELATIVAS A NUCLEOS

En este capítulo se introducen dos operaciones; la suma parcial por completas y los árboles de completas.

La suma parcial por completas de 2 gráficas, es la gráfica que resulta al hacer lo siguiente:

Se elige una subgráfica completa inducida en cada una de las gráficas y después se unen dichas subgráficas mediante aristas que van de una a otra. Estas aristas que van de una subgráfica inducida a otra no tienen que ser necesariamente todas las posibles aristas.

Como se ve, dadas 2 gráficas hay muchas sumas parciales por completas ya que dependen de la subgráfica completa inducida elegida y de la cantidad de aristas que se agreguen. Esta peculiaridad hace que la clase de estas gráficas sea muy extensa.

Los árboles de completas consisten en lo siguiente:

Dadas  $m$  gráficas:  $G_1, \dots, G_m$  y un árbol con  $m$  vértices  $\{v_1, \dots, v_m\}$ ; se sustituye una gráfica  $G_i$  por un vértice  $v_i$ . Se

elige enseguida por cada  $G_i$  una subgráfica inducida completa, finalmente si dos vértices  $v_i, v_j$  estaban unidos mediante una arista  $[v_i, v_j]$  en el árbol, se realiza una suma parcial por completas entre las dos gráficas correspondientes  $G_i, G_j$ , (tomando siempre para  $G_i$  la misma subgráfica completa previamente elegida cada vez que se realice una suma parcial por completas con dicha gráfica).

También en este caso hay gran cantidad de árboles de completas que se pueden formar con  $m$  gráficas, pues hay más de un árbol con  $m$  vértices, más de una suma parcial por completas entre 2 gráficas y más de una forma de sustituir gráficas por vértices en un mismo árbol.

Los resultados de este capítulo se refieren a propiedades que se preservan con estas operaciones.

Supongamos que tenemos una gráfica simple y una gráfica completa y supongamos que ambas poseen una propiedad  $A$ . Si la suma parcial por completas de estas 2 preserva la propiedad  $A$ , entonces esta propiedad se preservará para cualquier suma parcial por completas o árbol de completas de esta clase de gráficas.

Así se tiene que:

La suma parcial por completas de 2 gráficas núcleo perfectibles es núcleo perfectible.

La suma parcial por completas de 2 gráficas Meyniel núcleo perfectibles es Meyniel núcleo perfectible.

Toda suma parcial por completas de 2 torneos  $m$ -coloreados en

sus flechas sin  $C_3$  ni  $T_3$  tricolores, tiene núcleo por trayectorias monocromáticas

Toda suma parcial por completas de 2 torneos  $m$ -coloreados en sus flechas donde todo  $C_3, C_4, C_5$  son casi-monocromáticos, tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Para la demostración de todos estos resultados se utilizó un importante teorema, el teorema de Jacob. El cual nos dice que si  $G$  es una gráfica orientada y  $A$  un clan de articulación de  $G$  tal que  $D-A$  posee  $n$  componentes conexas  $B_1, \dots, B_n$  ( $n \geq 2$ ). Entonces  $G$  es núcleo perfecta sí y sólo si todas las piezas de articulación son núcleo perfectas.

También en este capítulo se menciona un resultado relativo a una operación entre gráficas: la suma de  $n$  gráficas Meyniel-núcleo-perfectas es Meyniel-núcleo-perfecta.

Y finalmente una propiedad interesante enunciada por C. Berge. Los resultados de este capítulo fueron hechos en colaboración con la Dra. Hortensia Galeana Sánchez.

#### 4.1. NOCIONES PRELIMINARES.

**Definición 4.1.1.** Si  $D$  es una orientación de  $G$  de tal manera que todo triángulo dirigido de  $D$  tiene dos flechas simétricas, diremos que  $D$  es una orientación de Meyniel o una  $m$ -orientación de  $G$ .

**Definición 4.1.2.** Una gráfica  $G$  es fuertemente perfecta si toda subgráfica inducida  $G'$  de  $G$  posee un independiente que se intersecta con todos los clanes maximales (para la inclusión) de  $G'$ .

**Definición 4.1.3.** Una gráfica  $G$  diremos que es núcleo perfectible si para toda orientación por pozos  $D$  de  $G$ ,  $D$  es núcleo perfecta.

**Definición 4.1.4.** Una gráfica  $G$  diremos que es Meyniel-núcleo-perfectible ( $m$ -n.p.) si para toda  $m$ -orientación  $D$  de  $G$ ,  $D$  es núcleo perfecta.

Con respecto a estas dos clases de digráficas se conoce un resultado que a continuación mencionamos y que utilizaremos repetidas veces para demostrar propiedades de las gráficas  $m$ -núcleo perfectibles:

Teorema 4.1.1. ([7] pag 13-14) Si  $D$  es una  $m$ -orientación de una gráfica  $G$ , entonces  $D$  es una orientación por pozos de  $G$ .

Demostración: Por reducción al absurdo. Sea  $C$  un clan de  $D$  y sea  $x$  un vértice de  $C$  tal que  $x$  tiene un máximo de predecesores en  $C$ . Si  $x$  no es un pozo de  $C$ , entonces existe  $z \in C$  tal que la flecha  $(x, z)$  es asimétrica.

Se afirma que todo predecesor de  $x$  es predecesor de  $z$ : supongamos que no y sea  $y$  un predecesor de  $x$  que no es predecesor de  $z$ , entonces  $z$  y  $y$  deben ser adyacentes pero  $(y, z)$  no existe así que la flecha que sí existe es  $(z, y)$  y es asimétrica. Pero entonces tenemos el triángulo dirigido  $(y, x, z, y)$  con dos flechas asimétricas, lo cual es una contradicción: todo predecesor de  $x$  es predecesor de  $z$ . Pero también  $x$  es predecesor de  $z$ , lo cual contradice la elección de  $x$ . ■

#### 4.2. SUMAS PARCIALES POR COMPLETAS.

**Definición 4.2.1.** Si  $G_1$  y  $G_2$  son 2 gráficas simples y si en cada una de ellas tomo  $C_1$  y  $C_2$  subgráficas inducidas completas y después agrego algunas aristas entre los vértices de  $C_1$  y  $C_2$ , diremos que la gráfica  $G_6$  que se obtiene con esta operación es una Suma Parcial por Completas de  $G_1$  y  $G_2$ .

Obsérvese que una suma parcial por completas de 2 gráficas no depende únicamente de las gráficas, sino también de las completas elegidas y de las aristas agregadas.

A las completas  $C_1$  y  $C_2$  se les llamará completas de unión de la s.p.c.

Tenemos que  $G$  es una clan suma de  $G_1$  y  $G_2$  si:

$$V(G_6) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

$$F(G_6) = F(G_1) \cup F(G_2) \cup \mathcal{E}$$

Donde  $\mathcal{E} = \{(x, y) \mid x \in C_1, y \in C_2\}$

Podemos decir que la suma parcial por completas de 2 gráficas resulta de unir las mediante una subgráfica completa.

**Teorema 4.2.1.** [3] Si el complemento  $G^c$  de  $G$  es fuertemente perfecta, entonces  $G$  es núcleo perfectible.

**Demostración:** Por inducción sobre el orden de  $G$ .

Para  $n=1,2$ , el resultado es trivial.

Sea  $G$  de orden  $n$  y supongamos que el resultado es válido para

todo  $G$  de orden  $m < n$ .

Como  $G^c$  es fuertemente perfecta, entonces  $G$  posee un clan  $C$  que interseca a todo independiente maximal de  $G$ .

Sea  $D$  una orientación por pozos de  $G$ , queremos demostrar que  $D$  posee un núcleo. Dentro de  $D$ , el clan  $C$  contiene un vértice  $x$  que es una fuente.

Consideremos ahora  $D - \{x\}$ , por hipótesis de inducción posee un núcleo,  $N$ .

Si  $N$  se interseca con  $C$  entonces  $x$  es predecesor de un elemento de  $N$  y  $N$  sería núcleo de  $D$ .

Supongamos que no se interseca con  $C$ , entonces como  $N$  es un conjunto independiente,  $N$  está contenido en un independiente maximal  $I$  ( $N \subset I$ ). Como  $C$  interseca a todo independiente maximal, entonces  $C \cap I \neq \emptyset$ ; digamos que  $C \cap I = y$ . Como  $y \in I$  y  $N \subset I$ , entonces  $y$  es independiente a  $N$ . Pero  $\forall z \in C - \{x\}$   $z$  es predecesor de un elemento de  $N$ , entonces el único elemento de  $C$  con el que se interseca  $I$  debe ser  $x$  y por lo tanto  $N \cup \{x\}$  es independiente; además  $N$  absorbe a  $D - \{x\}$  por lo tanto  $N \cup \{x\}$  es núcleo de  $D$ . ■

**Corolario 4.2.1.a.** El complemento de una gráfica fuertemente perfecta es  $m$ -núcleo perfectible.

Se deduce directamente de los teoremas 4.1.1. y 4.2.1.

**Teorema 4.2.2.** Toda suma parcial por completas  $G$  de  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas completas es núcleo perfectible y  $m$ -núcleo

perfectible.

Demostración: Tenemos que el complemento de  $G$  es una gráfica bipartita.

Una gráfica bipartita es fuertemente perfecta, de donde  $G$  es el complemento de una gráfica fuertemente perfecta. De acuerdo al teorema 4.2.1.  $G$  es núcleo perfectible y por el corolario 4.2.1a. es  $m$ -núcleo perfectible. ■

Corolario 4.2.2.a. Sea  $D$  una Orientación Normal de una gráfica  $G$  que es una s.p.c. de  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas completas, entonces  $D$  núcleo perfecta.

Teorema 4.2.3. Sea  $T_s$  una digráfica cuya gráfica subyacente  $G$  que es una s.p.c. de  $G_1$  y  $G_2$  2 gráficas completas cuyas orientaciones corresponden en  $T_s$  son  $T_1$  y  $T_2$ . Entonces:

(a) Si  $T_1$  y  $T_2$  son torneos  $m$ -coloreados sin  $C_3$  ni  $T_3$  tricolores, entonces  $T_s$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

(b) Si  $T_1$  y  $T_2$  son torneos  $m$ -coloreados ( $m \geq 2$ ) donde todo  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_5$  son casi-monocromáticos, entonces  $T_s$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

(c) Si  $T_1$  y  $T_2$  son torneos  $m$ -coloreados ( $m \geq 2$ ) fuertemente conexos sin  $C_3$  tricolor y tal que todo  $C_k$  ciclo dirigido de longitud  $k$  para  $3 \leq k \leq n$  es monocromático entonces  $T_s$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas

**Demostración:** De acuerdo a los teoremas 1.2.3., 3.2.4. y 3.2.5.  $C(T_1)$  y  $C(T_2)$  son núcleo perfectas para (a), (b) o (c) respectivamente.

Además también para cualquiera de los 3 casos  $C(T_1)$  y  $C(T_2)$  quedan unidos por vértices que van de una subgráfica inducida completa a otra.

De manera que  $C(T_3)$  en cualquiera de los casos es una s.p.c. de 2 completas núcleo-perfectas y de acuerdo al corolario 4.2.2.a.  $C(T_3)$  es núcleo-perfecta.

Lo cual demuestra que  $T_3$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas en cualquiera de los casos (a), (b) o (c). ■

**Teorema 4.2.4.** (Jacob [7]): Sea  $D$  una gráfica orientada,  $A$  un conjunto de corte de  $D$  que es un clan.

Si  $B_1, \dots, B_p$  son las componentes conexas de  $D$  relativas a  $A$  y llamamos a  $D_{B_1,UA}, \dots, D_{B_p,UA}$  las piezas de articulación relativas a  $A$ , entonces:

$D$  es núcleo perfecta si y sólo si las piezas de articulación relativas a  $A$  lo son.

**Demostración:** Se hará para  $p=2$  pues inductivamente se deduce para el caso general.

Sean  $D_{B_1,UA}$  y  $D_{B_2,UA}$  las piezas de articulación relativas a  $A$  y supongamos que son núcleo perfectas.

Vamos a definir 2 sucesiones de subconjuntos de  $A$  de la

siguiente manera: Nos fijamos en la subgráfica de D inducida por  $B_1 \cup A$ ; dado que es núcleo perfecta tanto ella como toda subgráfica inducida tiene núcleo. Consideremos los posibles núcleos de  $D_{B_1 \cup A}$ , algunos de esos núcleos se van a intersectar con A (y lo harán en a lo más un vértice); consideremos los vértices de A que se intersectan con dichos núcleos y así definimos:

$$E_1 = \{ x \in A \mid x \in N \text{ para } N \text{ núcleo de } D_{B_1 \cup A} \}$$

Definimos sucesivamente:

$$E_i = \{ x \in A : x \in N \text{ para algún } N \text{ núcleo de } D_{B_1 \cup A - (E_1 \cup \dots \cup E_{i-1})} \}$$

De manera análoga se define la sucesión de subconjuntos de A  $F_1, F_2, \dots$  con relación a  $B_2$ .

Vamos a revisar 2 casos, cuando existen 2 conjuntos  $E_i, F_j$  uno de cada sucesión, que se intersectan y cuando nunca sucede esto.

Caso (1). Supongamos que existen i y j tales que  $E_i \cap F_j \neq \emptyset$ . Sea  $i_0$  el más pequeño índice tal que  $E_{i_0} \cap F_j \neq \emptyset$ . Sea  $j_0$  el más pequeño índice tal que  $E_{i_0} \cap F_{j_0} \neq \emptyset$ .

Sea  $x \in E_{i_0} \cap F_{j_0}$ . Entonces como  $x \in E_{i_0} = \{ x \in A : x \in N \text{ para } N \text{ núcleo de } D_{B_1 \cup A - (E_1 \cup \dots \cup E_{i_0-1})} \}$  está en un núcleo de la subgráfica inducida por  $B_1 \cup A - (E_1 \cup \dots \cup E_{i_0-1})$  como los conjuntos  $E_1, \dots, E_{i_0-1}$  y  $F_1, \dots, F_{j_0}$  no se intersectan entonces  $F_1 \cup \dots \cup F_{j_0-1} \subseteq B_1 \cup A - (E_1 \cup \dots \cup E_{i_0-1})$  y por lo tanto N absorbe a los vértices de  $F_1 \cup \dots \cup F_{j_0-1}$ .

Análogamente  $x \in F_{j_0} = \{ x \in A : x \in N', \text{ núcleo de}$

$D_{B_1 \cup A - (F_1 \cup \dots \cup F_{j_0-1})}$ . Por lo tanto  $x \in N'$  núcleo de la gráfica inducida por  $B_1 \cup A - (F_1 \cup \dots \cup F_{j_0-1})$ . Además los vértices de  $E_1 \cup \dots \cup E_{j_0-1}$  están contenidos en esa subgráfica inducida y por lo tanto  $N'$  los absorbe.

Como  $N$  y  $N'$  no tienen más elemento que  $x$  en  $A$  entonces  $N \cup N'$  es núcleo de  $D$ .

Caso (2). Si por el contrario nunca se tiene la condición  $E_i \cap F_j = \emptyset$ , vamos a considerar los índices más pequeños  $i, j$  tales que  $E_{i+1} \cap F_{j+1} = \emptyset$ .

Como  $D_{B_1 \cup A}$  es núcleo perfecta entonces

$A \cup B_1 - (E_1 \cup \dots \cup E_i)$  tiene núcleo  $N$  y como  $\emptyset = E_{i+1} = \{x \in A : x \in N \text{ para } N \text{ núcleo de } A \cup B_1 - (E_1 \cup \dots \cup E_i)\}$  entonces el núcleo  $N$  de la subgráfica inducida por  $B_1 \cup A - (E_1 \cup \dots \cup E_i)$  está totalmente contenido en  $B_1$  ( $N \subset B_1$ ). Pero dado que  $E_1, \dots, E_i$  y  $F_1, \dots, F_j$  no se intersectan entonces  $F_1 \cup \dots \cup F_j$  es un conjunto de vértices de  $A$  contenidos en  $B_1 \cup A - (E_1 \cup \dots \cup E_i)$  por lo que  $N$  los absorbe.

Análogamente  $N' \subset B_2$  es núcleo de la gráfica inducida por  $B_1 \cup A - F_1 \cup \dots \cup F_j$  y absorbe a los vértices de  $E_1, \dots, E_i$ .

Entonces es claro que  $N$  y  $N'$  no son adyacentes por pertenecer a diferentes componentes conexas y además absorben a todo  $D$ .

Inversamente, si  $D$  es Núcleo perfecta es inmediato que las piezas de articulación sean núcleo perfectas. ■

Corolario 4.2.4.a. Con las hipótesis del Teorema anterior

$G$  es núcleo perfectible sí y sólo si las piezas de

articulación relativas a A son núcleo perfectibles.

Corolario 4.2.4.b. Con las mismas hipótesis.

G es m-núcleo perfectible si y sólo si las piezas de articulación relativas a A lo son.

Teorema 4.2.5. Toda s.p.c. G de una gráfica  $G_1$  soluble y una gráfica completa K es núcleo perfectible.

Demostración.- Sea  $K_1$  la completa de unión de  $G_1$ ;  $K_1$  es un conjunto de corte completo de G, cuyas piezas relativas son  $G_1$  y  $G_{K_1 \cup K}$ .

De acuerdo al teorema 4.2.2.  $G_{K_1 \cup K}$  es núcleo perfectible.  $G_1$  es soluble por hipótesis. Así que de acuerdo al corolario 4.2.4.a. G es núcleo-perfectible. ■

Corolario 4.2.5.a. Toda s.p.c. de una gráfica  $G_1$  m-núcleo perfectible y una gráfica completa K, es m-núcleo perfectible. Se deduce del corolario 4.2.4.b.

Teorema 4.2.6. Toda s.p.c. de 2 gráficas núcleo perfectibles es núcleo perfectible.

Demostración:

Sea G una s.p.c. de  $G_1$  y  $G_2$  donde las completas de unión correspondientes son  $C_1$  y  $C_2$ .

Obsérvese que tanto  $C_1$  como  $C_2$  son conjuntos de corte de  $G$  y son completos.

Tomemos a  $C_1$ , las piezas relativas a dicho conjunto son  $G_1$  y  $G_2 \cup C_1$ .

$G_1$  es núcleo-perfectible por hipótesis. Se deduce directamente que  $G_1 \cup C_1$  es núcleo perfectible.

Por lo tanto las piezas de articulación relativas a  $C_1$  son núcleo-perfectibles y por el corolario 4.2.4.a. se deduce que  $G$  es núcleo perfectible. ■

#### 4.3. ARBOLES DE COMPLETAS.

Definición 4.3.1. Un árbol de completas es la gráfica  $G$  que es el resultado de la operación aplicada al árbol  $A$  de cardinalidad  $n$  de la siguiente manera:

Cada vértice  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) del árbol será sustituido por una gráfica simple  $G_i$ .

Elegimos una subgráfica inducida completa  $C_i$  para cada  $G_i$ .

Si los vértices  $i$  y  $j$  están unidos por una arista, entonces realizamos una s.p.c. entre  $G_i$  y  $G_j$ , mediante la completa elegida. Si con una gráfica  $G_i$  se realiza más de una suma parcial por completas éstas tendrán que hacerse necesariamente con la misma completa de unión..

Teorema 4.3.1. Sea  $G_A$  un árbol de completas  $G_1, \dots, G_n$  entonces:

(a) Si  $G_i$  es núcleo perfectible  $\forall 1 \leq i \leq n$  entonces  $G_A$  es núcleo perfectible.

(b) Si  $G_i$  es  $m$ -núcleo perfectible  $\forall 1 \leq i \leq n$  entonces  $G_A$  es  $m$ -núcleo perfectible.

(c) Si  $G_i$  es un torneo  $m$ -coloreado en aristas sin  $C_3$  ni  $T_3$  tricolores  $\forall 1 \leq i \leq n$  entonces  $G_A$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

(d) Si  $G_i$  es un torneo  $m$ -coloreado ( $m \geq 2$ ) donde todo  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_5$  es casi-monocromático entonces  $G$  tiene núcleo por

trayectorias monocromáticas.

(e) Si  $G_1$  es un torneo  $m$ -coloreado ( $m \geq 2$ ) fuertemente conexo sin  $C_3$  tricolor tal que todo  $C_k$  es monocromático para  $3 \leq k \leq n$  entonces  $G$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración: Por inducción sobre  $n$  la cardinalidad del árbol. Si  $i=1$  el resultado es inmediato; para  $i=2$  se deduce de los resultados relativos a s.p.c.

Supongamos el teorema válido para  $m < n$ . Sea  $G_{i_0} = G_i$  con ( $1 \leq i \leq n$ ) una gráfica que fue sustituida por un vértice terminal del árbol  $\mathcal{A}$ .

Entonces  $G - G_{i_0}$  por hipótesis de inducción es núcleo-perfectible ( $m$ -núcleo-perfectible, o tiene núcleo por trayectorias monocromáticas).

Sea  $j_0$  el único vértice adyacente a  $i_0$  en el árbol. Entonces  $G_{i_0}$  y  $G_{j_0}$  están unidos por medio de 2 completas de unión  $C_{i_0}$  y  $C_{j_0}$ .

$G - G_{i_0}$  es núcleo-perfectible ( $m$ -núcleo perfectible o tiene núcleo por trayectorias monocromáticas) y  $G_{i_0}$  también;  $G_{\mathcal{A}}$  es el resultado de hacer la s.p.c. de  $G - G_{i_0}$  y  $G_{i_0}$  con completas de unión  $C_{i_0}$  y  $C_{j_0}$ . Por los resultados de los teoremas vistos relativos a s.p.c., se tiene que  $G_{\mathcal{A}}$  es núcleo perfectible ( $m$ -núcleo-perfectible o tiene núcleo por trayectorias monocromáticas). ■

Definición 4.3.2. La suma  $G$  de  $n$  gráficas no orientadas

$G_1, \dots, G_n$  se define de la siguiente manera: el conjunto de vértices de  $G$  es la unión ajena de los vértices de las  $G_i$  ( $i=1, \dots, n$ ); dos vértices de  $G$  serán adyacentes si están en diferente  $G_i$  o bien si lo eran en una misma  $G_i$ .

**Teorema 4.3.2.** ( H. Jacob [7] ) La suma de  $n$  gráficas  $m$ -núcleo-perfectibles es  $m$ -núcleo-perfectible.

**Demostración:** Basta demostrar el resultado para 2 gráficas.

Sean  $G_1$  y  $G_2$   $m$ -núcleo perfectible y  $G$  la suma de  $G_1$  y  $G_2$ .

Sea  $D$  una orientación de Meyniel, vamos a demostrar que existe núcleo de  $D$  y sus subdigráficas inducidas.

Como  $G_1$  es  $m$ -núcleo perfectible, con la orientación  $D$ ,  $D_{G_1}$  tiene núcleo  $N_1$ . Sea  $D_1 = G_1 - N_1$ .

Sea  $A$  el conjunto de vértices de  $G_2$  que son absorbidos por  $N_1$ .

Sea  $D_2 = G_2 - A$  y  $N_2$  un núcleo de  $D_2$ .

Vamos a ver dos casos: (1) todo vértice de  $A$  es adyacente (en cualquier dirección) a  $N_2$  y (2) Existe  $a \in A$  tal que  $a$  y  $N_2$  son independientes.

En el caso (1) se afirma que  $N_2$  es núcleo de  $D$ .

$N_2$  es núcleo de  $D_2$ , así que restaría ver que  $N_2$  absorbe a  $A$ ,  $D_1$  y  $N_1$ .

$N_1$  es absorbido por  $N_2$ : en efecto, si  $n_1 \in N_1$  y  $n_2 \in N_2$  entonces  $n_2$  no es absorbido por  $n_1$  pues entonces  $n_2$  estaría en  $A$  así que no hay flecha de  $n_2$  a  $n_1$ , pero como la suma es unir toda flecha de  $G_1$  con toda de  $G_2$ , entonces  $(n_1, n_2)$  existe y es

asimétrica, por lo tanto  $n_1$  es absorbido por  $N_2$ . Y por lo tanto  $N_1$  es absorbido por  $N_2$ .

A es absorbido por  $N_2$ : sea  $a \in A$ , en este caso existe alguna flecha entre  $a$  y  $n_2 \in N_2$ , además  $(a, n_1)$  existe para algún  $n_1 \in N_1$  y  $(n_1, n_2)$  existe y es asimétrica  $\forall n_2 \in N_2$ . Si  $a$  no es absorbido por algún  $n_2 \in N_2$ , entonces existe  $n_2$  tal que  $(n_2, a)$  existe y es asimétrica lo cual es una contradicción pues el triángulo dirigido  $(a, n_1, n_2)$  tiene 2 flechas asimétricas. Lo cual prueba que  $a$  es absorbido por  $N_2$ .

$D_1$  es absorbido por  $N_2$ : sea  $v_1 \in D$  entonces  $v$  es predecesor de  $n_1 \in N_1$  y  $n_1$  es predecesor de todo  $n_2 \in N_2$ , si  $v$  es predecesor de  $n_2 \in N_2$  entonces ya acabamos.

Supongamos entonces que  $v$  no es predecesor de ningún  $n_2 \in N_2$ , entonces como en la suma todo vértice de  $G_1$  va a todo vértice de  $G_2$ , tendríamos el triángulo dirigido  $(v, n_1, n_2, v)$  y sabemos que  $(n_1, n_2)$  es asimétrica y si  $(v, n_2)$  no existe entonces tenemos un triángulo dirigido con 2 flechas asimétricas, lo cual es una contradicción.

De aquí que  $N_2$  absorbe a todo  $G - N_2$ .

Caso (2): Tenemos que  $D_1$  y  $N_1$  son absorbidos por  $N_2$  viendo la misma demostración que antes.

Ahora si  $A$  no es absorbido por  $N_2$ , se debe a que existen vértices de  $A$  para los que no hay flechas entre  $A$  y  $N_2$ . Si  $A_1$  es el conjunto de dichos vértices, entonces  $N_2 \cup A_1$  es núcleo de  $D$ . ■

Para terminar este trabajo mencionamos un resultado debido a

C. Berge que lleva la misma estructura mencionada en el primer Teorema de Jacob, pero relativo a gráficas perfectas.

**Teorema 4.3.3.** (Berge [1]) Si  $G$  es una gráfica conexa con un conjunto de articulación  $A$  que es un clan, y si cada pieza relativa a  $A$  es una gráfica  $\gamma$ -perfecta, entonces  $G$  es también  $\gamma$ -perfecta.

**Demostración:**

Basta mostrar que  $\omega(G) = \gamma(G)$ .

Sea  $\omega(G) = k$ , entonces existe un clan de  $k$  vértices en al menos una pieza  $G'$  relativa a  $A$ . Por hipótesis se tiene que  $\gamma(G') = \omega(G') = k$ .

Otra pieza  $G''$  verificará  $\gamma(G'') = \omega(G'') \leq k$ .

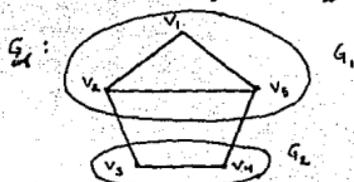
Podemos pues colorear cada pieza con  $k$  colores. Si dejamos fi colores del clan  $A$  al colorear cada pieza, tendremos una colo en  $k$  colores de todo  $G$ . De donde  $k = \omega(G) \leq \gamma(G) \leq k$ , lo cual impli  $\omega(G) = \gamma(G)$  y el teorema queda demostrado. ■

#### 4.4. UNA NUEVA CLASE DE GRAFICAS NUCLEO-PERFECTIBLES.

Como dijimos anteriormente, la clase de gráficas de árboles de completas preserva la propiedad de ser núcleo perfectible, además no está contenida en ninguna de las clases conocidas. De las clases de gráficas núcleo-perfectibles citamos a continuación las más interesantes, mostrando en cada caso un ejemplo de árbol de completas que no pertenece a esa clase:

1.-Trianguladas: Una gráfica  $G$  es triangulada si todo ciclo de  $G$  posee una cuerda.

Un ejemplo de un árbol de completas  $G_A$  no triangulado es el siguiente:

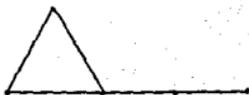


Donde el árbol que generó a  $G_A$  es:



2.- Cotrianguladas: Una gráfica  $G$  es cotriangulada si su complemento  $G^c$  es triangulada.

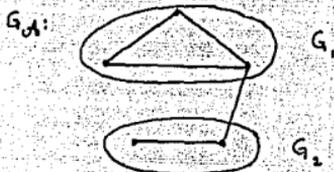
Consideremos la siguiente gráfica  $G$ :



Su complemento es el que se muestra a continuación y no es triangulada.



Sin embargo  $G$  es un árbol de completas que no es una gráfica cotriangulada.

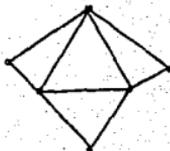


Donde  $A$  es

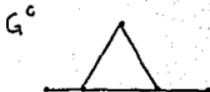


3.-Gráficas de co-comparabilidad:  $G$  es de co-comparabilidad si  $G^c$  es de comparabilidad. Y una gráfica se dice que es de comparabilidad si existe  $D$  una orientación que es transitiva y asimétrica.

Considérese  $G$ :



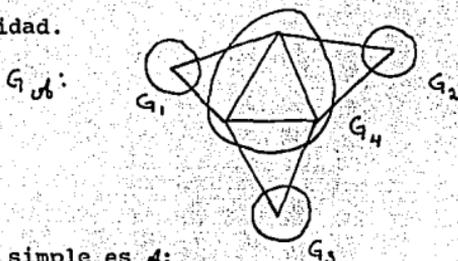
Su complemento es:



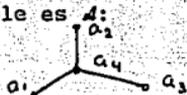
Y  $G^c$  no es de comparabilidad por lo que  $G$  no es de co-

comparabilidad.

Sin embargo  $G$  sí es un árbol de completas que no es de comparabilidad.



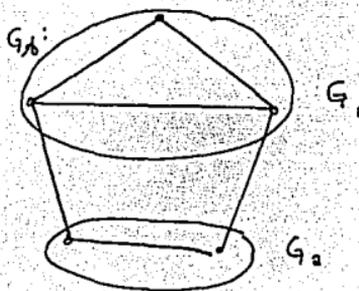
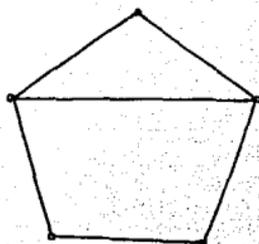
Cuyo árbol simple es  $A$ :



5.-i-trianguladas: Una gráfica tal que todo ciclo impar (de longitud al menos 5) posee 2 cuerdas no cruzadas.

La siguiente es una gráfica que no es i-triangulada y es un árbol de completas:

$G$ :



#### 4.5. UNA APLICACION.

Una aplicación interesante de los núcleos por trayectorias monocromáticas es en el problema de la toma de decisión grupal que surgió en la Teoría de Juegos.

Supongamos que  $m$  personas quieren ponerse de acuerdo para elegir una situación de un conjunto  $X$  de  $n$  situaciones  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

Vamos a representar cada situación  $x_i$  del conjunto  $X$  por un vértice.

Después a cada jugador se le asigna un color y con ese color marcará flechas de una situación a otra según sus preferencias, si la situación,  $x_j$  es preferible para un jugador que usa color rojo a la situación  $x_i$ , entonces marcará una flecha de  $x_i$  a  $x_j$  coloreándola con su color y tendremos en la gráfica la flecha  $(x_i, x_j)$  de color rojo. Si no tiene preferencia entre un par de situaciones, no se pondrá flecha entre esos vértices.

Cada jugador será congruente con sus preferencias, si prefiere  $x_1$  a  $x_2$  y  $x_2$  a  $x_3$  entonces preferirá  $x_1$  a  $x_3$ , es decir habrá transitividad por colores.

De esta manera actuará cada persona poniendo flechas de un mismo color y dicho color diferente a los colores de las otras personas.

Lo que se obtiene es una digráfica  $D$  de orden  $n$   $m$ -coloreada en

Tendremos entonces que un núcleo de la digráfica, representará una solución al problema planteado de toma de decisión grupal: Si  $N$  es un núcleo de  $D$ , la independencia nos indicará que de las situaciones obtenidas en  $N$  no hay alguna preferencial, esto es, todas esas situaciones pueden ser parte de una solución grupal. La absorción nos dirá que dada cualquier situación  $x$  fuera de  $N$  (en  $D-N$ ), siempre se puede encontrar en  $N$  una situación que es mejor que  $x$ , por lo que  $x$  no puede formar parte de la decisión grupal.

## CONCLUSIONES

Una gráfica es perfecta si y sólo si es núcleo perfectible.

La conjetura anterior conocida como la B.D. conjetura surgió del hecho de que el problema de coloración queda resuelto cuando queda resuelto para completas en gráficas perfectas y el problema de núcleos también queda resuelto cuando queda resuelto para completas orientadas por pozos.

Ahora al trabajar con torneos coloreados nos preguntamos si las gráficas perfectas tendrán núcleo por trayectorias monocromáticas, imponiendo a las subgráficas inducidas completas las condiciones de los teoremas vistos a lo largo de la tesis, como las condiciones de Shen-Minggang o las de los ciclos  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  casi-monocromáticos. O poniendo condiciones de orientación-coloración, impuestas para completas que resuelvan para núcleo-perfectibles ¿Habrá núcleo por trayectorias monocromáticas?

Podemos decir que al asignar color a las flechas de una digráfica se crea una nueva rama en la Teoría de Núcleos en la que quedan muchas posibilidades abiertas.

También presentamos dentro del trabajo realizado una aplicación en la que no se hizo énfasis pero que podría

resultar interesante profundizar más. Dicha aplicación se refiere al problema de la toma de decisión grupal, que en este caso le da un enfoque diferente a la aplicación que tiene en el caso de núcleos en digráficas no coloreadas, pues el hecho de dar colores, da menos rigidez a la solución al tener más de una trayectoria (posibilidad) de un vértice a otro (de una condición a otra) en vez de una sola flecha directa.

## REFERENCIAS.

- [1] C. Berge. Graphes. Gauthier-villars, (1983).
- [2] C. Berge and P. Duchet. Recent problems and results about kernels in directed graphs. RUTCOR RESEARCH REPORT # 21-87, (June 1987).
- [3] M. Blidia, P. Duchet and F. Maffray. On kernels in perfect graphs. Akadémiai Kiado-Springer-Verlag, (1991).
- [4] H. Galeana Sánchez. On Kernel-Perfect Critical Digraphs. Discrete Mathematics 59 257-265, (1986).
- [5] H. Galeana Sánchez, V. Neumann Lara. On Kernels and Semi-kernels of digraphs. Discrete Mathematics 48 67-76, North Holland. (1984).
- [6] H. Galeana Sánchez and Sergio Rajsbaum. Cycle-pancyclism in tournaments III. Publicaciones preliminares (301), Instituto de Matemáticas UNAM México, mayo 1993. Submitted for publication.
- [7] F. Maffray. Sur l'existence de noyaux dans les graphes parfaits. Tesis de tercer ciclo. Université Pierre et Marie Curie, Paris (1984).

- [8] B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow. On monochromatic paths in edge coloured digraphs. Journal of combinatorial Theory, Series B 33 271-275, (1982).
- [9] Shen-Minggang. On Monochromatic Paths in  $m$ -coloured Tournaments. Journal of Combinatorial Theory, Series B 48 108-111 (1988)