

01163

1

2 ejem.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE: INGENIERIA

TITULO: INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ DEL TERRENO DE CIMENTACION
EN LOS RESULTADOS DE LA INTERACCION ESTATICA SUELO
ESTRUCTURA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
MAESTRO EN INGENIERIA (MECANICA DE SUELOS)

P R E S E N T A :

HUMBERTO PUEBLA CADENA

MEXICO D.F. 1994

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ DEL TERRENO DE CIMENTACION EN LOS
RESULTADOS DE LA INTERACCION ESTATICA SUELO ESTRUCTURA**

INDICE

I. INTRODUCCION	1
II. OBJETIVOS	3
III. ANTECEDENTES	5
IV. METODO DE ANALISIS DE INTERACCION ESTATICA SUELO-ESTRUCTURA	11
IV.1. ANALISIS ESTRUCTURAL	13
IV.2. DEFORMACIONES DEL TERRENO DE CIMENTACION	17
IV.3. COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES	19
IV.4. ELEMENTOS MECANICOS	20
IV.5. EJEMPLO ILUSTRATIVO RESUELTO PASO A PASO	22
IV.6. COMPARACION DE RESULTADOS ENTRE ESTE METODO Y LA SOLUCION DE BROWN PARA UNA ZAPATA CORRIDA	59
V. CASOS ESTUDIADOS	64
V.1. DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA	64
V.2. DESCRIPCION DE LOS TERRENOS DE CIMENTACION Y SUS PROPIEDADES DE DEFORMACION	67
VI. RESULTADOS OBTENIDOS	78
VI.1. REPRESENTACION Y COMPARACION GRAFICA DE RESULTADOS	80
VI.1.a. HUNDIMIENTOS EN LOS NUDOS DE LAS RETICULAS DE CIMENTACION	80
VI.1.b. REACCIONES DEL TERRENO SOBRE LA CIMENTACION	88
VI.1.c. MOMENTOS FLEXIONANTES EN LOS NUDOS DE LAS RETICULAS DE CIMENTACION	99

VII. CONCLUSIONES	119
ANEXO 1. PROGRAMA DE COMPUTADORA ISEMCCVL	123
ANEXO 2. OBTENCION DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ Y DE LOS VECTORES DE CARGAS DE EMPOTRAMIENTO UTILIZADOS EN EL PROCEDIMIENTO DE CALCULO	145
REFERENCIAS	166

I.INTRODUCCION

El diseño de cimentaciones ha captado la atención y esfuerzo del ingeniero civil con el objetivo de proporcionar a las construcciones una base de sustentación segura y económica.

Las estructuras de cimentación son aquellos elementos estructurales que sirven para transmitir el peso de la estructura al terreno natural, llamado terreno de cimentación, con el propósito de no sobrepasar la capacidad de carga admisible del suelo, así como evitar que se presenten asentamientos totales o diferenciales cuyas magnitudes afecten la seguridad o el funcionamiento tanto de la estructura de cimentación, como de la superestructura, y que al mismo tiempo el aspecto de la obra sea seguro y confiable.

En otras palabras, la cimentación de una estructura debe ser tal que satisfaga los estados límite de falla y de servicio, además de contemplar el lograr estos objetivos a un costo razonable.

Dependiendo de las características y propiedades del subsuelo, así como las de la obra en cuestión y sus requerimientos, los principales tipos de cimentación son: zapatas aisladas, zapatas continuas, losas de cimentación, cimentaciones compensadas, cimentaciones compensadas con pilotes de fricción, cimentaciones con pilotes de punta y pilas de cimentación.

Para el cálculo y diseño de estas estructuras existen diferentes métodos basados en hipótesis que van desde considerar que la cimentación es infinitamente flexible y que la reacción del terreno sobre ésta es uniforme, hasta el tomar en cuenta la rigidez de la cimentación en conjunto con la superestructura, así como la compatibilidad de deformaciones entre la subestructura y el suelo de apoyo, con el consecuente cambio en la reacción del terreno que esto implica.

A causa de las cargas que una estructura de cimentación transmite al suelo de apoyo se originan desplazamientos totales y diferenciales en su contacto, debiendo ser estos últimos, iguales en la subestructura que los desplazamientos que aparecen en la superficie de apoyo de la cimentación, de tal suerte que tanto la subestructura, como las cargas que ésta transmite en el contacto cimentación-terreno de apoyo, quedan sujetas a la misma configuración que las reacciones inducidas en el suelo. Para que el equilibrio se satisfaga, las reacciones del suelo sobre la cimentación deben tener la misma forma y ser de sentido contrario, por lo que en la superficie de contacto la configuración de esfuerzos y deformaciones depende de la rigidez de la cimentación, de la distribución de cargas sobre ella y de la deformabilidad de la masa de suelo.

Se trata entonces de encontrar un sistema de reacciones que actúen simultáneamente en la estructura de cimentación y en la masa de suelo, produciendo la misma configuración de desplazamientos entre ellos. Al procedimiento de establecer las expresiones de compatibilidad para el cálculo de los esfuerzos de contacto se le designa Interacción Suelo-Estructura (Zeevaert,1980).

II.OBJETIVOS

De los diferentes métodos de interacción estática suelo-estructura que se han desarrollado, la mayoría de ellos trata el problema en forma bidimensional, siendo que las estructuras son tridimensionales. Para tomar en cuenta esto último, se puede recurrir al método de elemento finito, sin embargo, este método requiere de un gran esfuerzo numérico que en la mayoría de los despachos de cálculo no es posible realizar.

Por ello, uno de los objetivos de este trabajo es el desarrollo de un ejemplo resuelto paso a paso que explique la aplicación de un método de análisis tridimensional de interacción estática suelo-estructura que permite obtener tanto las reacciones del terreno, como los asentamientos y los elementos mecánicos en cualquier punto que se desee de la estructura (cimentación y superestructura), tomando en cuenta el efecto tridimensional, la rigidez de toda la estructura y todos los estratos del subsuelo, fácilmente programable, que no necesita realizar un esfuerzo numérico tan grande como el que se requiere en la aplicación del método de elemento finito, y de sencilla utilización en cualquier despacho de cálculo.

Por otro lado, en la práctica de la ingeniería es común encontrarse con el problema de analizar un mismo prototipo arquitectónico que se desea construir en diferentes sitios, como por ejemplo en el desarrollo de conjuntos habitacionales. Esto nos lleva a estudiar un cierto tipo de estructura apoyada sobre terrenos con diferentes características de deformación, entre otras cosas.

Dado que la configuración de esfuerzos y deformaciones depende de la deformabilidad de la masa de suelo, entre otros aspectos, el segundo objetivo de esta tesis es el determinar la influencia de la rigidez del terreno de cimentación en los resultados de la interacción estática suelo-estructura, llevando a cabo un análisis tridimensional, es decir, sin recurrir a la utilización del artificio

de la sección característica y con la posibilidad de obtener los elementos mecánicos en cualquier punto de la estructura que se desee. Para ello se mantendrán constantes tanto la rigidez del conjunto cimentación-superestructura, como la distribución de cargas sobre ella, variándose únicamente las propiedades de deformabilidad del subsuelo.

En el caso de cimentaciones construidas a base de concreto armado, se sabe que su módulo de deformación unitaria aumenta con el tiempo, así como principalmente en los suelos finos y saturados, las propiedades de deformación también dependen del tiempo, lo que significa que los esfuerzos de contacto son función del tiempo y variarán a medida que éste transcurra hasta que, para fines de cálculo, las propiedades de deformación ya no exhiban cambios significativos.

Sin embargo, en este primer esfuerzo por determinar la influencia de la rigidez del terreno de cimentación en los resultados de la interacción estática suelo-estructura, el problema se abordará únicamente a corto plazo.

El tercer objetivo consiste en comparar los momentos flexionantes calculados a través de los análisis tridimensionales de interacción estática suelo-estructura practicados a la estructura estudiada, con los obtenidos mediante análisis convencional, y establecer sus diferencias.

Por último, se comentarán los resultados obtenidos con este método de cálculo en relación con lo que Sommer (1965), Brown (1969) y Meyerhof (1979) reportan en estudios similares; realizados con otros procedimientos.

III. ANTECEDENTES

Para resolver el problema de la interacción estática suelo-estructura se han generado cuantiosos métodos, de los cuales, a manera de antecedente, se mencionarán en forma descriptiva algunas de las técnicas desarrolladas.

En 1956, Samuel Chamecki, presentó uno de los primeros procedimientos para tomar en cuenta la interacción suelo-estructura, aplicable a vigas y a marcos estructurales (Chamecki 1956). Trata el problema utilizando coeficientes de transferencia de carga en la estructura y calcula los hundimientos del suelo por procedimientos usuales. Como las relaciones esfuerzo-deformación unitaria en los suelos no son lineales, el procedimiento es iterativo.

Sommer (1965), desarrolló un método para el análisis de trabes y losas de cimentación flexibles en una sola dirección, que permite tomar en cuenta la rigidez de la superestructura.

En este método, la rigidez a la flexión del total de la estructura expresa la relación entre la rigidez de la cimentación y la superestructura y se muestran las condiciones bajo las cuales los cálculos pueden simplificarse al sustituir, al total de la estructura, por una losa imaginaria sin superestructura, cuya rigidez a la flexión sea igual al de la estructura real.

El procedimiento presentado por Sommer fue desarrollado para analizar cimentaciones incluyendo la rigidez de una estructura a base de marcos y proporciona las presiones de contacto en la cimentación, los asentamientos y los momentos flexionantes tanto en la cimentación, como en la superestructura.

Para el análisis del suelo y de la estructura, se basa en la teoría de elasticidad y supone un medio isótropo para calcular la

distribución de esfuerzos en la masa de suelo.

En términos generales, el método consiste en formar la sección característica de la cimentación, dividida en un cierto número de soportes sometidos a cargas unitarias uniformemente repartidas. Como los asentamientos producidos por estas cargas no se conocen, entonces se somete a cada una de las subdivisiones de la cimentación imaginaria, a asentamientos unitarios, mismos que a su vez, inducen reacciones adicionales sobre cada uno de los elementos de la cimentación. Por equilibrio, las reacciones del terreno sobre la cimentación y las acciones, deben ser iguales, por lo que al realizar la superposición de efectos de las cargas y asentamientos unitarios, se llega a la ecuación:

$$\sum Z_1^k S_k + P_1 = Q_1$$

donde Q_1 = fuerza de reacción final en el soporte rígido i de la cimentación.

P_1 = cargas sobre los soportes rígidos i de la subestructura apoyada sobre un suelo indeformable.

Z_1^k = reacciones producidas en cada soporte por el asentamiento unitario en el punto k .

S_k = asentamiento unitario en el punto k .

La relación entre los asentamientos y las presiones de contacto se obtiene formando la matriz de flexibilidades del suelo a partir de los valores de influencia para asentamientos unitarios.

Finalmente, utilizando el concepto de rigidez relativa cimentación-suelo K_r , se obtiene una expresión que permite calcular las presiones de contacto en función de la rigidez de la estructura y de la compresibilidad del subsuelo:

$$K_r \epsilon^3 \sum Z_1^k K \bar{a}^k \bar{q} - q_1 = - P_1 \epsilon / LB$$

Flores Victoria, en 1968, planteó otro método iterativo en el cual se aplica una distribución de presiones al suelo con la que se calculan los asentamientos. Con esos asentamientos se determina el estado de cargas que debe tener la estructura como reacción del suelo. Esa reacción se vuelve a aplicar al suelo sucesivamente hasta lograr la convergencia.

Posteriormente (Flores Victoria y Esteva, 1970), presentaron un procedimiento simplificado en el que se considera que el suelo es un medio elástico lineal semiinfinito, que la cimentación es rectangular con una red ortogonal de trabes y que la rigidez de la superestructura puede despreciarse.

Damy (1977), presentó un procedimiento incremental en el que se toma en cuenta el comportamiento no lineal del suelo aplicando incrementos del vector de carga suficientemente pequeños para que el sistema responda linealmente. Al aplicar el último incremento deben satisfacerse las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo.

El Dr Zeevaert (1973, 1980, 1983), desarrolló un método en el que se forma la ecuación matricial de asentamientos (EMA), que relaciona los hundimientos del suelo en función de las cargas aplicadas en la superficie:

$$\delta = D q$$

donde δ = vector de asentamientos en el contacto cimentación-suelo
 D = matriz de asentamientos ocasionados por presiones unitarias
 q = vector de cargas aplicadas en el contacto cimentación-suelo

La matriz D se forma a partir del concepto de valor de influencia, que es el efuerzo ocasionado por una presión unitaria en la superficie.

Después se forma la ecuación matricial de interacción (EMI), que es la que relaciona las deformaciones de la estructura con las cargas que le transmite el suelo:

$$S X = \Delta$$

donde S = matriz de flexibilidades del suelo
 X = vector de cargas del suelo sobre la estructura
 Δ = vector de deformaciones de la estructura

La interacción de la estructura de cimentación con el suelo depende del valor del módulo de cimentación por área tributaria K , definido como el cociente de la carga sobre el suelo (en unidades de fuerza), entre la deformación que produce. Como Δ es función de K , los valores K_i para los diferentes puntos considerados no son independientes entre sí y dependen de la distribución de esfuerzos de contacto con la cimentación. La interacción correcta se obtiene usando las reacciones X_i obtenidas por EMI, en la ecuación matricial de asentamientos EMA, obteniéndose así los desplazamientos verticales δ_i que proporcionan valores del módulo de cimentación, iguales a los utilizados en la ecuación matricial de interacción EMI, $K_i = X_i / \delta_i$. Si los resultados obtenidos no corresponden a los utilizados inicialmente, la interacción obtenida no será la correcta, por lo que se requerirá emplear la ecuación matricial EMA para conciliar el problema (Zeevaert, 1980).

Para resolver el problema sin llevar a cabo iteraciones y obtener resultados precisos (Zeevaert, 1983), se requiere hallar la ecuación matricial de interacción suelo-estructura (EMISE).

Deméneghi (1979, 1983, 1985), propuso otro método de interacción estática suelo-estructura en el que las reacciones del terreno son consideradas como un sistema de cargas sobre la estructura, de igual magnitud y de sentido contrario a las cargas que la cimentación transmite al suelo. Durante el proceso de análisis, estas cargas son manejadas como incógnitas. El análisis estructural se lleva a cabo empleando el método de rigideces, pero como no se conocen las reacciones del suelo, las ecuaciones faltantes las proporciona el análisis de hundimientos del terreno de cimentación, en el que se obtienen las deformaciones del suelo en función de las cargas sobre el mismo. En esta etapa se utiliza el concepto de valores de influencia de Zeevaert (1980). Al sustituir las deformaciones del suelo en las ecuaciones obtenidas a través del método de rigideces, el problema se resuelve en forma directa, sin necesidad de iteraciones. Otras de las ventajas que ofrece este método son que realiza un análisis tridimensional con relativa sencillez, que permite tomar en cuenta la rigidez de toda la superestructura y que se puede programar en una computadora con cierta facilidad.

Por último, se mencionará que Sánchez Martínez y Enriquez (1982), propusieron un procedimiento que se emplea en cimentaciones someras y que consiste en analizar el conjunto suelo-estructura como un sistema estructural único que se resuelve utilizando el método general de las rigideces y que no es iterativo.

El suelo es sustituido por una serie de resortes en los que el módulo de reacción depende de toda la masa del suelo. La matriz de rigideces de la estructura se forma a partir de la de sus elementos. Las reacciones de la estructura se consideran a través de resortes que se conectan con la cimentación. La matriz de rigideces del suelo se determina dando desplazamientos verticales unitarios a cada uno de los resortes que lo idealizan y calculando las fuerzas

que aparecen por este efecto en todos ellos; sin embargo, dicha matriz se puede formar obteniendo la inversa de la matriz de flexibilidades, para lo cual Sánchez Martínez y Enriquez emplean el procedimiento de Zeevaert (1980).

En este método, también se puede considerar a toda la superestructura, sin más limitación que la capacidad de la computadora que se emplee.

En resumen, se puede decir que se han desarrollado diferentes técnicas de interacción estática suelo-estructura, de las cuales la mayoría de ellas determinan las deformaciones del terreno utilizando la matriz de flexibilidades del suelo, mientras que para el análisis estructural, algunos procedimientos emplean la matriz de rigideces y otros la de flexibilidades.

Por otro lado, gran parte de los procedimientos de interacción analizan el problema en forma bidimensional, siendo que las estructuras son tridimensionales. También existen métodos que nos permiten hacer análisis en dos direcciones ortogonales y superponer los efectos de ellos, representando así el fenómeno tridimensional; aunque la desventaja que se tiene con estas técnicas es que no se pueden conocer los elementos mecánicos en las vigas intermedias de la estructura de cimentación.

Para la realización de este trabajo se utilizará el método de análisis tridimensional de interacción estática suelo-estructura propuesto por Deméneghi (1983, 1992), que toma en cuenta toda la estructura y todos los estratos del subsuelo.

IV.METODO DE ANALISIS TRIDIMENSIONAL DE INTERACCION ESTATICA SUELO-ESTRUCTURA

Este método está basado en la teoría de elasticidad tanto para el análisis del suelo, como para el de la estructura.

La distribución de esfuerzos en la masa de suelo se realiza para áreas rectangulares uniformemente cargadas ya sea para el caso Boussinesq (medio elástico, semiinfinito, isótropo y homogéneo), caso Westergaard (deformaciones horizontales restringidas), caso Frölich (módulo de deformación que aumenta con la profundidad), o algún otro caso cuya solución sea conocida para este tipo de cargas.

El análisis de deformaciones en el suelo se lleva a cabo por medio de la matriz de flexibilidades del mismo.

La masa de suelo se discretiza en elementos que no son aislados porque toma en cuenta que la acción en un punto i del medio ejerce influencia sobre otro punto j de él, tratando así a la masa de suelo como un medio continuo.

Para considerar que el suelo no es elástico, así como la no linealidad de la curva esfuerzo-deformación, basta con obtener las propiedades de deformación del suelo en función del nivel de esfuerzos que se tenga.

Cabe mencionar que este método, para un cierto nivel de esfuerzos establecido, no requiere de iteraciones para converger, ya que al mantener a las reacciones del terreno de cimentación como incógnitas y a los hundimientos del suelo en función de ellas, permite que al establecer la compatibilidad de deformaciones entre ambos medios se forme un sistema de ecuaciones cuya solución es única, evitándose así el proceso iterativo.

La estructura se analiza por medio del método de las rigideces. Para poder obtener los elementos mecánicos en cualquier punto de la

estructura, así como las reacciones del terreno sobre la cimentación y los asentamientos al centro de las losas o en cualquier otro punto de la subestructura que se desee, basta con considerar una barra virtual con rigidez equivalente a la del elemento que se quiere analizar. Sin embargo, está limitado a estructuras formadas por barras ortogonales.

Esta técnica de interacción consiste en:

1.-Considerar como cargas sobre la estructura a las reacciones del terreno de cimentación, manejando dichas reacciones como incógnitas.

2.-Calcular los hundimientos del suelo en función de las cargas que actúan sobre él. Por la tercera ley de Newton que dice que a toda acción corresponde una reacción de igual intensidad y de sentido contrario, estas cargas son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones del terreno de cimentación.

3.-Una vez que se tienen planteados los sistemas anteriores se procede a establecer la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo igualando los desplazamientos entre ambos medios, resolviéndose así el problema al obtener los hundimientos del suelo y las reacciones sobre la estructura.

4.-Como el análisis estructural fue previamente realizado se pueden determinar los giros en los nudos de la estructura, y con éstos, los elementos mecánicos en toda ella, incluyendo desde luego a la estructura de cimentación.

IV.1. ANALISIS ESTRUCTURAL

Para llevar a cabo el análisis de la estructura este procedimiento de interacción utiliza el método de rigideces del análisis estructural, en el que la ecuación general de equilibrio está dada por

$$K \delta + P_o + P_c = 0 \quad (1)$$

donde

K = matriz de rigideces de la estructura

δ = vector de desplazamientos

P_o = vector de cargas de empotramiento

P_c = vector de cargas concentradas

La matriz de rigideces de la estructura se forma sumando las matrices de rigidez de todas las barras que conforman la estructura. Estas matrices de rigidez dependen de las condiciones de apoyo de las barras, por lo que para los fines que competen a este procedimiento se analizarán las siguientes condiciones de apoyo:

- a) Barra con articulación a la derecha y un apoyo continuo a la izquierda.
- b) Barra con articulación a la izquierda y un apoyo continuo a la derecha.
- c) Barra con dos apoyos continuos.

Los vectores de empotramiento en las vigas de la estructura de cimentación se determinan considerando dos cargas repartidas para cada barra, una que actúa desde uno de los extremos de la barra hasta su mitad y otra actuando desde la mitad de la barra hasta el otro de sus extremos (figs.2, 3 y 4)

La convención de signos utilizada es la siguiente: los giros se consideran positivos en sentido antihorario y los desplazamientos lineales son positivos si van hacia abajo en una barra horizontal (o

hacia la izquierda en una barra vertical). Los momentos flexionantes son positivos en sentido horario y las fuerzas cortantes son positivas si van hacia arriba en barra horizontal (o hacia la derecha en barra vertical), figs. 1, 2, 3 y 4.

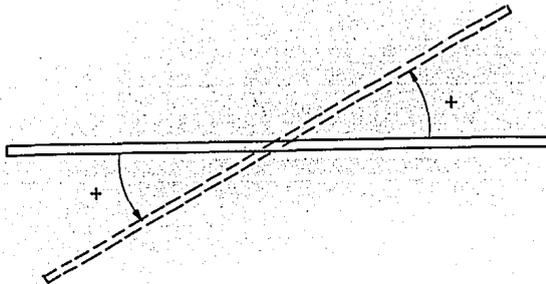


FIG. 1 GIRO POSITIVO

La obtención de la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento para cada una de las barras mencionadas se puede consultar en el anexo 2.

IV.1.a. BARRA CON ARTICULACION A LA DERECHA Y APOYO CONTINUO A LA IZQUIERDA (fig.2)

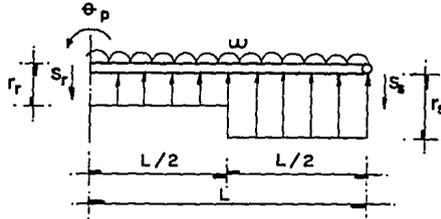


FIG. 2

La matriz de rigidez está dada por

$$K_m = \begin{bmatrix} 3EI / L & -3EI / L^2 & 3EI / L^2 \\ -3EI / L^2 & 3EI / L^3 & -3EI / L^3 \\ 3EI / L^2 & -3EI / L^3 & 3EI / L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix} \quad (2)$$

El vector de cargas de empotramiento vale

$$P_{e.m} = \begin{bmatrix} wL^2 / 8 - (9 / 128) L^2 r_r - (7 / 128) L^2 r_s \\ -5wL / 8 + (57 / 128) L r_r + (23 / 128) L r_s \\ -3wL / 8 + (7 / 128) L r_r + (41 / 128) L r_s \end{bmatrix} \quad (3)$$

IV.1.b. BARRA CON ARTICULACION A LA IZQUIERDA Y UN APOYO CONTINUO A LA DERECHA (fig.3).

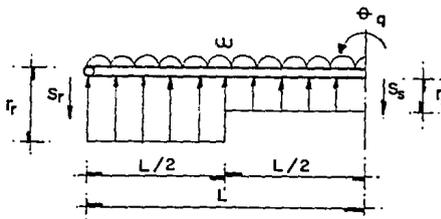


FIG. 3

La matriz de rigidez está dada por

$$K_m = \begin{bmatrix} \theta_q & \delta_r & \delta_s \\ 3EI / L & -3EI / L^2 & 3EI / L^2 \\ -3EI / L^2 & 3EI / L^3 & -3EI / L^3 \\ 3EI / L^2 & -3EI / L^3 & 3EI / L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix} \quad (4)$$

El vector de cargas de empotramiento vale

$$P_{em} = \begin{bmatrix} -wL^2 / 8 + (7 / 128) L^2 r_r + (9 / 128) L^2 r_s \\ -3wL / 8 + (41 / 128) L r_r + (7 / 128) L r_s \\ -5wL / 8 + (23 / 128) L r_r + (57 / 128) L r_s \end{bmatrix} \quad (5)$$

IV.1.c. BARRA CON DOS APOYOS CONTINUOS (fig.4)

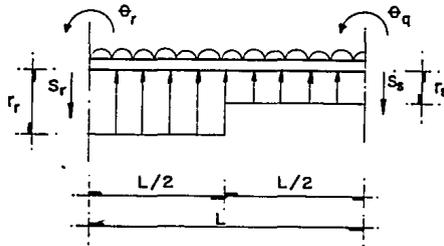


FIG. 4

La matriz de rigidez está dada por

$$K_m = \begin{bmatrix} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s \\ 4EI / L & 2EI / L & -6EI / L^2 & 6EI / L^2 \\ 2EI / L & 4EI / L & -6EI / L^2 & 6EI / L^2 \\ -6EI / L^2 & -6EI / L^2 & 12EI / L^3 & -12EI / L^3 \\ 6EI / L^2 & 6EI / L^2 & -12EI / L^3 & 12EI / L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix} \quad (6)$$

El vector de cargas de empotramiento vale

$$P_{e_m} = \begin{pmatrix} +wL^2/12 - (11/192) L^2 r_r - (5/192) L^2 r_s \\ -wL^2/12 + (5/192) L^2 r_r + (11/192) L^2 r_s \\ -wL/2 + (13/32) L r_r + (3/32) L r_s \\ -wL/2 + (3/32) L r_r + (13/32) L r_s \end{pmatrix} \quad (7)$$

Estas son las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento de cada una de las barras según sean sus condiciones de apoyo. Para obtener la matriz de rigideces de toda la estructura (K), es necesario sumar las matrices de rigidez (K_m) de todas las barras. De igual manera, el vector de cargas de empotramiento de toda la estructura (P_o), se obtiene sumando los vectores de cargas de empotramiento (P_{e_m}) de todas las barras. La determinación del vector de cargas concentradas (P_c), se logra asignando a cada grado de libertad la carga concentrada que actúa sobre él. Finalmente, el análisis de toda la estructura se realiza satisfaciendo la ec.1.

IV.2. DEFORMACIONES DEL TERRENO DE CIMENTACION

Las deformaciones que se presentan en el terreno de cimentación dependen de las cargas que la estructura transmite al terreno de apoyo, mismas que por la tercera ley de Newton son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura. Por este motivo, los asentamientos del terreno se pueden calcular en función de estas cargas. Llamando r_k a una reacción linealmente repartida que actúa sobre la superficie (fig.5),

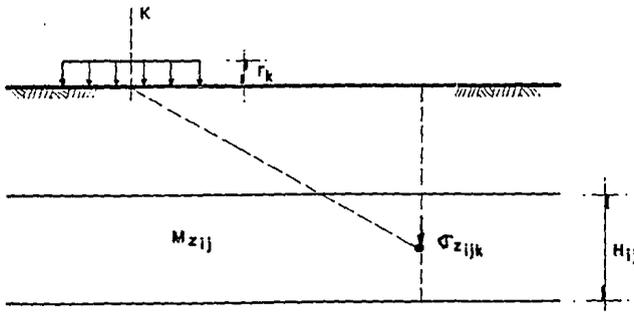


FIG.5 REACCION LINEALMENTE REPARTIDA

la presión vertical vale $r_k l_k / a_k$, donde l_k y a_k son la longitud y el área en las que actúa la carga, respectivamente.

La deformación del estrato de espesor H_{ij} , debida a la carga r_k es

$$\delta_{ijk} = (M_z)_{ij} H_{ij} (\sigma_z)_{ijk} \quad (8)$$

Pero

$$(\sigma_z)_{ijk} = I_{ijk} r_k l_k / a_k \quad (9)$$

donde

I_{ijk} = es el valor de influencia, el cual está dado por el esfuerzo normal vertical en el punto ij , producido por una presión unitaria actuando en el área a_k .

$(M_z)_{ij}$ = es el módulo lineal de deformación, el cual se define como el cociente de la deformación vertical del estrato, entre el esfuerzo normal vertical que la ocasiona. En este sentido, es importante mencionar que para determinar este módulo lineal de deformación (M_z) se deben tomar en cuenta las condiciones ambientales de la zona, es decir: la estratigrafía general del lugar y específica del sitio en cuestión, cómo se formó, cuáles son las condiciones hidráulicas que operan en ese momento y qué cambios futuros pueden presentarse, etc., de tal forma que los parámetros de deformación sean representativos de la realidad. Ello requiere del criterio y de la experiencia del ingeniero, ya que las pruebas de laboratorio con que se deben obtener dichos módulos tienen que ser congruentes con la realidad del caso que se esté estudiando.

Por lo tanto, se puede escribir

$$\delta_{ijk} = (M_z)_{ij} H_{ij} I_{ijk} r_k l_k / a_k \quad (10)$$

La deformación del estrato, debida a todas las cargas vale:

$$\delta_{ij} = (M_z)_{ij} H_{ij} \sum_{k=1}^n I_{ijk} r_k l_k / a_k \quad (11)$$

donde n_r = número total de cargas r_k .

Por último, el asentamiento bajo el punto i se calcula con:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n_e} (M_z)_{ij} H_{ij} \sum_{k=1}^{n_r} I_{ijk} r_k l_k / a_k \quad (12)$$

donde n_e = número total de estratos.

Así, la ec.12 proporciona los hundimientos del terreno en función de las cargas r_k .

IV.3.COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

Debido a que el suelo no se despegas de la subestructura, se puede establecer la compatibilidad de deformaciones entre la cimentación y el terreno de apoyo, lo que significa que los desplazamientos de la subestructura son iguales a los del terreno en el contacto entre ambos.

Analíticamente la compatibilidad de deformaciones se establece al sustituir los valores dados por la ec.12 en la ec.1. Como los desplazamientos lineales están determinados en función de las reacciones, se forma un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los giros en los nudos y las reacciones del terreno. Este sistema tiene el mismo número de incógnitas que de ecuaciones independientes, por lo que su solución es única y de ella se obtienen los valores de los giros en los nudos, así como los de las reacciones del suelo de cimentación, sin necesidad de llevar a cabo iteraciones.

Una vez conocidas dichas reacciones, se pueden determinar los hundimientos del terreno de apoyo, a través de la ec.12.

IV.4.ELEMENTOS MECANICOS

Con los resultados obtenidos en el inciso anterior a través del análisis de interacción estática suelo-estructura, se pueden hallar los elementos mecánicos sobre los diferentes grados de libertad de la estructura. Dichos elementos mecánicos de barra sobre nudo, que transmite la barra m al grado de libertad correspondiente, se calculan con las siguientes expresiones:

IV.4.a.BARRA CON ARTICULACION A LA DERECHA Y UN APOYO CONTINUO A LA IZQUIERDA(FIG.2)

$$M_p = wL^2/8 - (9/128) L^2 r_r - (7/128) L^2 r_s + (3EI/L)\theta_p - (3EI/L^2)\delta_r + (3EI/L^2)\delta_s \quad (13)$$

$$V_r = -5wL/8 + (57/128) L r_r + (23/128) L r_s - (3EI/L^2)\theta_p + (3EI/L^3)\delta_r - (3EI/L^3)\delta_s \quad (14)$$

$$V_s = -3wL/8 + (7/128) L r_r + (41/128) L r_s + (3EI/L^2)\theta_p - (3EI/L^3)\delta_r + (3EI/L^3)\delta_s \quad (15)$$

IV.4.b.BARRA CON ARTICULACION A LA IZQUIERDA Y UN APOYO CONTINUO A LA DERECHA (FIG.3)

$$M_q = -wL^2/8 + (7/128) L^2 r_r + (9/128) L^2 r_s + (3EI/L)\theta_q - (3EI/L^2)\delta_r + (3EI/L^2)\delta_s \quad (16)$$

$$V_r = -3wL/8 + (41/128) L r_r + (7/128) L r_s - (3EI/L^2)\theta_q + (3EI/L^3)\delta_r - (3EI/L^3)\delta_s \quad (17)$$

$$V_s = -5wL/8 + (23/128) L r_r + (57/128) L r_s + (3EI/L^2)\theta_q - (3EI/L^3)\delta_r + (3EI/L^3)\delta_s \quad (18)$$

IV.4.c. BARRA CON DOS APOYOS CONTINUOS (fig.4)

$$M_p = wL^2/12 - (11/192) L^2 r_r - (5/192) L^2 r_s + (4EI/L)\theta_p + (2EI/L)\theta_q - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (19)$$

$$M_q = -wL^2/12 + (5/192) L^2 r_r + (11/192) L^2 r_s + (2EI/L)\theta_p + (4EI/L)\theta_q - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (20)$$

$$V_r = -wL/2 + (13/32) L r_r + (3/32) L r_s - (6EI/L^2)\theta_p - (6EI/L^2)\theta_q + (12EI/L^3)\delta_r - (12EI/L^3)\delta_s \quad (21)$$

$$V_s = -wL/2 + (3/32) L r_r + (13/32) L r_s + (6EI/L^2)\theta_p + (6EI/L^2)\theta_q - (12EI/L^3)\delta_r + (12EI/L^3)\delta_s \quad (22)$$

IV.4.d. BARRA EN LA SUPERESTRUCTURA

Como las reacciones del terreno no actúan sobre las barras de la superestructura, las ecuaciones para obtener los elementos mecánicos en ellas quedan:

$$M_p = wL^2/12 + (4EI/L)\theta_p + (2EI/L)\theta_q - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (23)$$

$$M_q = -wL^2/12 + (2EI/L)\theta_p + (4EI/L)\theta_q - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (24)$$

$$V_r = -wL/2 - (6EI/L^2)\theta_p - (6EI/L^2)\theta_q + (12EI/L^3)\delta_r - (12EI/L^3)\delta_s \quad (25)$$

$$V_s = -wL/2 + (6EI/L^2)\theta_p + (6EI/L^2)\theta_q - (12EI/L^3)\delta_r + (12EI/L^3)\delta_s \quad (26)$$

IV.5.EJEMPLO ILUSTRATIVO RESUELTO PASO A PASO

A continuación se presenta un ejemplo sencillo, resuelto paso a paso, con el propósito de ilustrar las diferentes etapas de cálculo que contempla este método de análisis tridimensional de interacción estática suelo-estructura.

La estructura analizada, cuya cimentación es a base de una fosa continua, se muestra en la fig.6. La estratigrafía y las propiedades del subsuelo son las que aparecen en la fig.7.

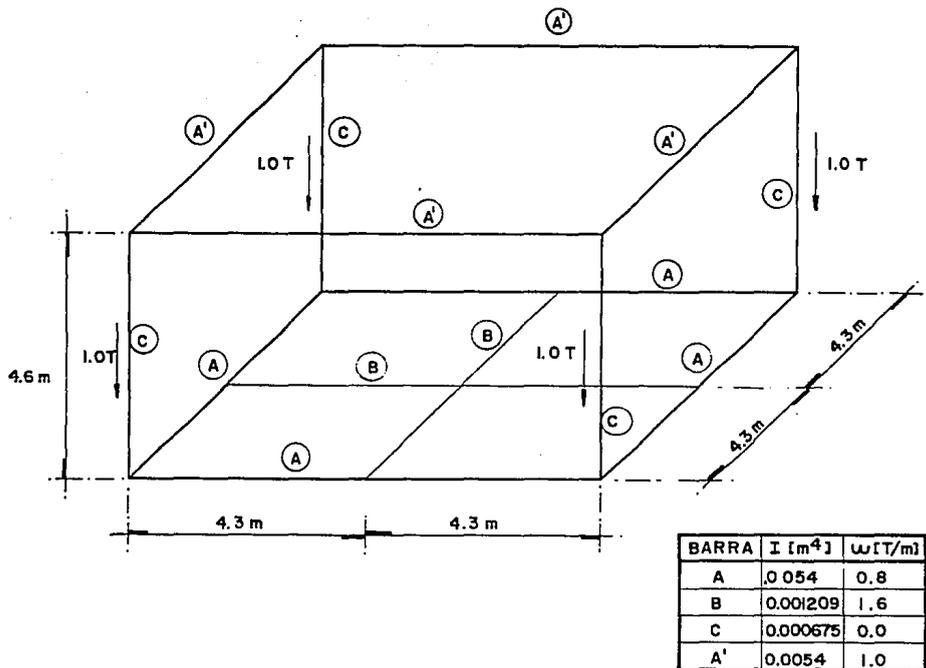


FIG.6 ESTRUCTURA ANALIZADA

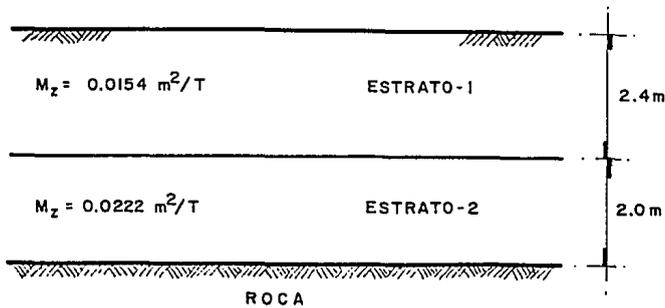


FIG.7 ESTRATIGRAFIA

Se trata entonces de determinar las reacciones y los hundimientos del terreno, así como los elementos mecánicos, tanto en la estructura de cimentación como en la superestructura.

Cabe mencionar que como la estructura es simétrica, los cálculos se simplifican notablemente; sin embargo, en el desarrollo del ejemplo no se toma en cuenta la simetría para la formación de la matriz de rigideces ni en la de los vectores de empotramiento y cargas concentradas, con el objetivo de que el ejemplo sea lo más representativo posible de un caso cualquiera.

IV.5.a.ANALISIS ESTRUCTURAL

IV.5.a.1.NUMERACION DE BARRAS Y DE GRADOS DE LIBERTAD

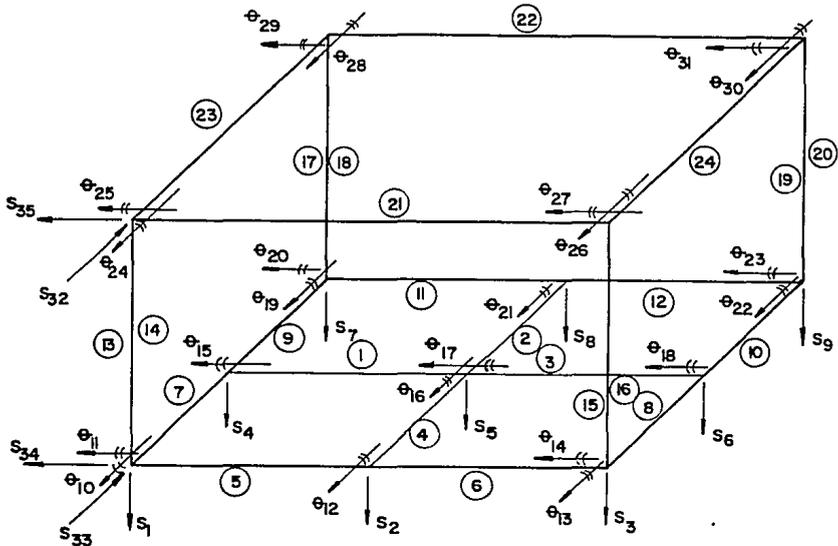


FIG.8 NUMERACION DE BARRAS Y DE GRADOS DE LIBERTAD

El primer paso a seguir es la numeración de las barras y de los grados de libertad de la estructura. La numeración de las barras se lleva a cabo en orden creciente, tomando en cuenta sus condiciones de apoyo. Así, se numeran primero las barras que tienen una articulación a la izquierda y un apoyo continuo a la derecha. Si la estructura se observa, primero de frente, y después desde su costado izquierdo, las barras que caen en este caso son la 1 y la 2 (fig.8). Después se continúa con las que tienen una articulación a la derecha y un apoyo continuo a la izquierda (barras 3 y 4). Por último se sigue con las que tienen dos apoyos continuos (barras 5,6,...,24).

Cabe hacer notar que a las columnas les corresponden dos números, pues cada columna trabaja en dos direcciones como miembro estructural independiente.

Para la numeración de los grados de libertad (en orden creciente y recorriendo las barras de izquierda a derecha), se comienza con los desplazamientos verticales (S_1 a S_9 , fig.8), se continúa con los giros (θ_{10} a θ_{31}), y se termina con los desplazamientos horizontales (S_{32} a S_{35}).

La numeración de las barras y de los grados de libertad del marco frontal de la estructura se muestran en la fig.9, mientras que en la fig.10 se muestra el sistema de cargas que actúa sobre él.

Como se puede observar, el sistema de cargas no contempla cargas horizontales, por lo que los desplazamientos de la estructura en este sentido no se tomarán en cuenta, no obstante que en la fig.8 aparezcan indicados.

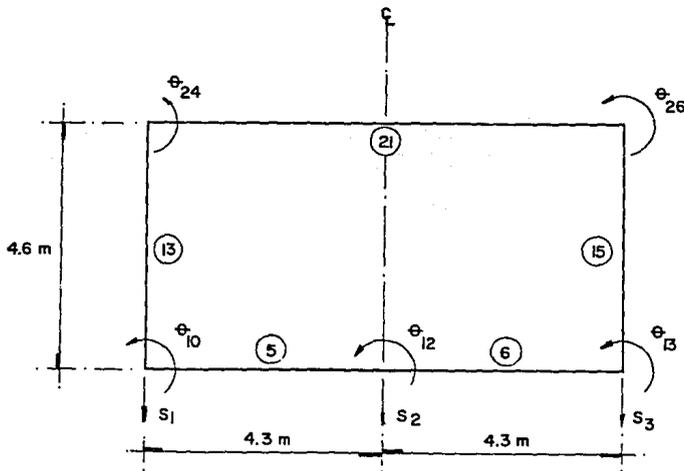


FIG.9 BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD DEL MARCO FRONTAL

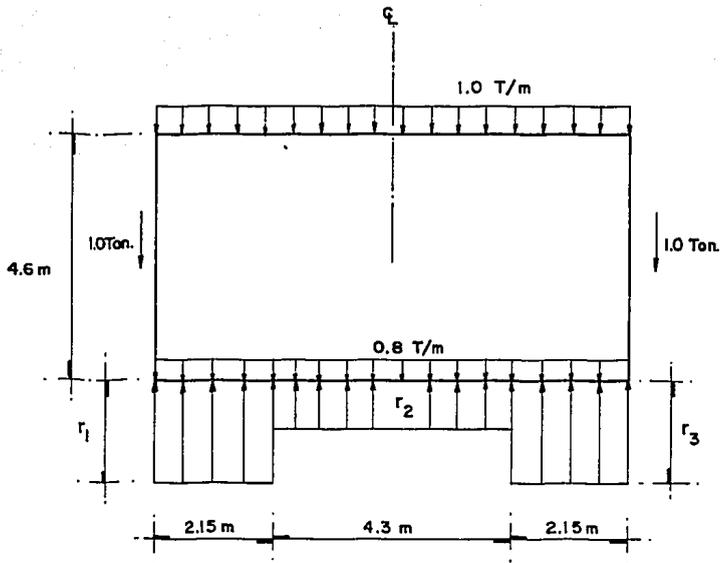


FIG.10 SISTEMA DE CARGAS SOBRE EL MARCO FRONTAL

A continuación se presenta una tabla en la que se indican las barras de la estructura y los grados de libertad asociados a cada una de ellas.

BARRA	θ_p	θ_q	δ_r	δ_s
01	--	16	4	5
02	--	17	8	5
03	16	--	5	6
04	17	--	5	2
05	10	12	1	2
06	12	13	2	3
07	15	11	4	1
08	18	14	6	3
09	20	15	7	4
10	23	18	9	6
11	19	21	7	8
12	21	22	8	9
13	24	10	35	34
14	25	11	32	33
15	26	13	35	34
16	27	14	32	33
17	28	19	35	34
18	29	20	32	33
19	30	22	35	34
20	31	23	32	33
21	24	26	1	3
22	28	30	7	9
23	29	25	7	1
24	31	27	9	3

TABLA 1.-GRADOS DE LIBERTAD ASOCIADOS A CADA BARRA

IV.5.a.2.MATRICES DE RIGIDEZ Y VECTORES DE EMPOTRAMIENTO DE LAS BARRAS DE LA ESTRUCTURA

Estas matrices y vectores se obtienen sustituyendo el módulo de elasticidad (E), el momento de inercia (I), la longitud (L) y la carga (w), de cada una de las barras, en las ecuaciones 2 a 7, según las condiciones de apoyo que se tengan.

Aplicando la ec.4 para las barras 1 y 2:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \theta_{16} & \delta_4 & \delta_5 \\ +400.067 & -93.039 & +93.039 \\ -93.039 & +21.637 & -21.637 \\ +93.039 & -21.637 & +21.637 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{16} \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{matrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \theta_{17} & \delta_8 & \delta_5 \\ +400.067 & -93.039 & +93.039 \\ -93.039 & +21.637 & -21.637 \\ +93.039 & -21.637 & +21.637 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{17} \\ \delta_8 \\ \delta_5 \end{matrix}$$

Aplicando la ec.2 para las barras 3 y 4:

$$K_3 = \begin{bmatrix} \theta_{16} & \delta_5 & \delta_6 \\ +400.067 & -93.039 & +93.039 \\ -93.039 & +21.637 & -21.637 \\ +93.039 & -21.637 & +21.637 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{16} \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{matrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} \theta_{17} & \delta_5 & \delta_2 \\ +400.067 & -93.039 & +93.039 \\ -93.039 & +21.637 & -21.637 \\ +93.039 & -21.637 & +21.637 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{17} \\ \delta_5 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

Aplicando la ec.6 para las barras 5 a 24:

$$K_5 = \begin{bmatrix} \theta_{10} & \theta_{12} & \delta_1 & \delta_2 \\ +2382.530 & +1191.265 & -831.115 & +831.115 \\ +1191.265 & +2382.530 & -831.115 & +831.115 \\ -831.115 & -831.115 & +386.565 & -386.565 \\ +831.115 & +831.115 & -386.565 & +386.565 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{10} \\ \theta_{12} \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} \theta_{12} & \theta_{13} & \delta_2 & \delta_3 \\ +2382.530 & +1191.265 & -831.115 & +831.115 \\ +1191.265 & +2382.530 & -831.115 & +831.115 \\ -831.115 & -831.115 & +386.565 & -386.565 \\ +831.115 & +831.115 & -386.565 & +386.565 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{12} \\ \theta_{13} \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} \theta_{15} & \theta_{11} & \delta_4 & \delta_1 \\ +2382.530 & +1191.265 & -831.115 & +831.115 \\ +1191.265 & +2382.530 & -831.115 & +831.115 \\ -831.115 & -831.115 & +386.565 & -386.565 \\ +831.115 & +831.115 & -386.565 & +386.565 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{15} \\ \theta_{11} \\ \delta_4 \\ \delta_1 \end{matrix}$$

$$K_8 = \begin{bmatrix} \theta_{18} & \theta_{14} & \delta_6 & \delta_3 \\ +2382.530 & +1191.265 & -831.115 & +831.115 \\ +1191.265 & +2382.530 & -831.115 & +831.115 \\ -831.115 & -831.115 & +386.565 & -386.565 \\ +831.115 & +831.115 & -386.565 & +386.565 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{18} \\ \theta_{14} \\ \delta_6 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

$$K_9 = \begin{bmatrix} \theta_{20} & \theta_{15} & \delta_7 & \delta_4 \\ +2382.530 & +1191.265 & -831.115 & +831.115 \\ +1191.265 & +2382.530 & -831.115 & +831.115 \\ -831.115 & -831.115 & +386.565 & -386.565 \\ +831.115 & +831.115 & -386.565 & +386.565 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{20} \\ \theta_{15} \\ \delta_7 \\ \delta_4 \end{matrix}$$

$$K_{10} = \begin{bmatrix} \theta_{23} & \theta_{18} & \delta_9 & \delta_6 \\ +2382.530 & +1191.265 & -831.115 & +831.115 \\ +1191.265 & +2382.530 & -831.115 & +831.115 \\ -831.115 & -831.115 & +386.565 & -386.565 \\ +831.115 & +831.115 & -386.565 & +386.565 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{23} \\ \theta_{18} \\ \delta_9 \\ \delta_6 \end{matrix}$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} \theta_{19} & \theta_{21} & \delta_7 & \delta_8 \\ +2382.530 & +1191.265 & -831.115 & +831.115 \\ +1191.265 & +2382.530 & -831.115 & +831.115 \\ -831.115 & -831.115 & +386.565 & -386.565 \\ +831.115 & +831.115 & -386.565 & +386.565 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{19} \\ \theta_{21} \\ \delta_7 \\ \delta_8 \end{matrix}$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} \theta_{21} & \theta_{22} & \delta_8 & \delta_9 \\ +2382.530 & +1191.265 & -831.115 & +831.115 \\ +1191.265 & +2382.530 & -831.115 & +831.115 \\ -831.115 & -831.115 & +386.565 & -386.565 \\ +831.115 & +831.115 & -386.565 & +386.565 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{21} \\ \theta_{22} \\ \delta_8 \\ \delta_9 \end{matrix}$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} \theta_{24} & \theta_{10} \\ +278.393 & +139.197 \\ +139.197 & +278.393 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{24} \\ \theta_{10} \end{matrix}$$

$$K_{14} = \begin{bmatrix} \theta_{25} & \theta_{11} \\ +278.393 & +139.197 \\ +139.197 & +278.393 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{25} \\ \theta_{11} \end{matrix}$$

$$K_{15} = \begin{bmatrix} \theta_{26} & \theta_{13} \\ +278.393 & +139.197 \\ +139.197 & +278.393 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{26} \\ \theta_{13} \end{matrix}$$

$$K_{16} = \begin{bmatrix} \theta_{27} & \theta_{14} \\ +278.393 & +139.197 \\ +139.197 & +278.393 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{27} \\ \theta_{14} \end{matrix}$$

$$K_{17} = \begin{bmatrix} \theta_{28} & \theta_{19} \\ +278.393 & +139.197 \\ +139.197 & +278.393 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{28} \\ \theta_{19} \end{matrix}$$

$$K_{18} = \begin{bmatrix} \theta_{29} & \theta_{20} \\ +278.393 & +139.197 \\ +139.197 & +278.393 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{29} \\ \theta_{20} \end{matrix}$$

$$K_{19} = \begin{bmatrix} \theta_{30} & \theta_{22} \\ +278.393 & +139.197 \\ +139.197 & +278.393 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{30} \\ \theta_{22} \end{matrix}$$

$$K_{20} = \begin{bmatrix} \theta_{31} & \theta_{23} \\ +278.393 & +139.197 \\ +139.197 & +278.393 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{31} \\ \theta_{23} \end{matrix}$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} \theta_{24} & \theta_{26} & \delta_1 & \delta_3 \\ +1191.265 & + 595.633 & -207.779 & +207.779 \\ + 595.633 & +1191.265 & -207.779 & +207.779 \\ - 207.779 & - 207.779 & + 48.321 & - 48.321 \\ + 207.779 & + 207.779 & - 48.321 & + 48.321 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{24} \\ \theta_{26} \\ \delta_1 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} \theta_{28} & \theta_{30} & \delta_7 & \delta_9 \\ +1191.265 & + 595.633 & -207.779 & +207.779 \\ + 595.633 & +1191.265 & -207.779 & +207.779 \\ - 207.779 & - 207.779 & + 48.321 & - 48.321 \\ + 207.779 & + 207.779 & - 48.321 & + 48.321 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{28} \\ \theta_{30} \\ \delta_7 \\ \delta_9 \end{matrix}$$

$$K_{23} = \begin{bmatrix} \theta_{29} & \theta_{25} & \delta_7 & \delta_1 \\ +1191.265 & + 595.633 & -207.779 & +207.779 \\ + 595.633 & +1191.265 & -207.779 & +207.779 \\ - 207.779 & - 207.779 & + 48.321 & - 48.321 \\ + 207.779 & + 207.779 & - 48.321 & + 48.321 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{29} \\ \theta_{25} \\ \delta_7 \\ \delta_1 \end{matrix}$$

$$K_{24} = \begin{bmatrix} \theta_{31} & \theta_{27} & \delta_9 & \delta_3 \\ +1191.265 & + 595.633 & -207.779 & +207.779 \\ + 595.633 & +1191.265 & -207.779 & +207.779 \\ - 207.779 & - 207.779 & + 48.321 & - 48.321 \\ + 207.779 & + 207.779 & - 48.321 & + 48.321 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{31} \\ \theta_{27} \\ \delta_9 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

En realidad estas matrices deben escribirse de 31x31 (ya que son 31 los grados de libertad que se tomaron en cuenta), pero para facilitar su escritura solamente se anotaron los elementos de ellas que son diferentes de cero, indicando a través de los grados de libertad la posición ij a la que pertenecen.

La matriz de rigideces de toda la estructura (K), es la suma de las matrices de rigidez de todas las barras (K_m). Por lo tanto

Los vectores de empotramiento de cada una de las barras se obtienen a partir de las ecuaciones 3,5 y 7.

Aplicando la ec.5 para las barras 1 y 2:

$$P_{e_1} = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -3.6980 + 1.0110 r_4 + 1.3000 r_5 \\ -2.5800 + 1.3773 r_4 + 0.2352 r_5 \\ -4.3000 + 0.7727 r_4 + 1.9148 r_5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{GL} \\ 16 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

$$P_{e_2} = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -3.6980 + 1.0110 r_8 + 1.3000 r_5 \\ -2.5800 + 1.3773 r_8 + 0.2352 r_5 \\ -4.3000 + 0.7727 r_8 + 1.9148 r_5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{GL} \\ 17 \\ 8 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Aplicando la ec.3 para las barras 3 y 4:

$$P_{e_3} = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} +3.6980 - 1.3000 r_5 - 1.0110 r_6 \\ -4.3000 + 1.9150 r_5 + 0.7727 r_6 \\ -2.5800 + 0.2352 r_5 + 1.3773 r_6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{GL} \\ 16 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

$$P_{e_4} = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} +3.6980 - 1.3000 r_5 - 1.0110 r_2 \\ -4.3000 + 1.9150 r_5 + 0.7727 r_2 \\ -2.5800 + 0.2352 r_5 + 1.3773 r_2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{GL} \\ 17 \\ 5 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Aplicando la ec.7 para las barras 5 a 24:

$$P_{e_5} = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} +1.2327 - 1.0593 r_1 - 0.4815 r_2 \\ -1.2327 + 0.4815 r_1 + 1.0593 r_2 \\ -1.7200 + 1.7469 r_1 + 0.4031 r_2 \\ -1.7200 + 0.4031 r_1 + 1.7469 r_2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{GL} \\ 10 \\ 12 \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

$$P_{e_6} = \begin{vmatrix} +1.2327 - 1.0593 r_2 - 0.4815 r_3 & 12 \\ -1.2327 + 0.4815 r_2 + 1.0593 r_3 & 13 \\ -1.7200 + 1.7469 r_2 + 0.4031 r_3 & 2 \\ -1.7200 + 0.4031 r_2 + 1.7469 r_3 & 3 \end{vmatrix}$$

GL

$$P_{e_7} = \begin{vmatrix} +1.2327 - 1.0593 r_4 - 0.4815 r_1 & 15 \\ -1.2327 + 0.4815 r_4 + 1.0593 r_1 & 11 \\ -1.7200 + 1.7469 r_4 + 0.4031 r_1 & 4 \\ -1.7200 + 0.4031 r_4 + 1.7469 r_1 & 1 \end{vmatrix}$$

GL

$$P_{e_8} = \begin{vmatrix} +1.2327 - 1.0593 r_6 - 0.4815 r_3 & 18 \\ -1.2327 + 0.4815 r_6 + 1.0593 r_3 & 14 \\ -1.7200 + 1.7469 r_6 + 0.4031 r_3 & 6 \\ -1.7200 + 0.4031 r_6 + 1.7469 r_3 & 3 \end{vmatrix}$$

GL

$$P_{e_9} = \begin{vmatrix} +1.2327 - 1.0593 r_7 - 0.4815 r_4 & 20 \\ -1.2327 + 0.4815 r_7 + 1.0593 r_4 & 15 \\ -1.7200 + 1.7469 r_7 + 0.4031 r_4 & 7 \\ -1.7200 + 0.4031 r_7 + 1.7469 r_4 & 4 \end{vmatrix}$$

GL

$$P_{e_{10}} = \begin{vmatrix} +1.2327 - 1.0593 r_9 - 0.4815 r_6 & 23 \\ -1.2327 + 0.4815 r_9 + 1.0593 r_6 & 18 \\ -1.7200 + 1.7469 r_9 + 0.4031 r_6 & 9 \\ -1.7200 + 0.4031 r_9 + 1.7469 r_6 & 6 \end{vmatrix}$$

GL

$$P_{e_{11}} = \begin{vmatrix} +1.2327 - 1.0593 r_7 - 0.4815 r_8 & 19 \\ -1.2327 + 0.4815 r_7 + 1.0593 r_8 & 21 \\ -1.7200 + 1.7469 r_7 + 0.4031 r_8 & 7 \\ -1.7200 + 0.4031 r_7 + 1.7469 r_8 & 8 \end{vmatrix}$$

GL

$$P_{e_{12}} = \begin{array}{l} +1.2327 - 1.0593 r_8 - 0.4815 r_9 \\ -1.2327 + 0.4815 r_8 + 1.0593 r_9 \\ -1.7200 + 1.7469 r_8 + 0.4031 r_9 \\ -1.7200 + 0.4031 r_8 + 1.7469 r_9 \end{array} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 21 \\ 22 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

$$P_{e_{13}} = \begin{array}{l} 0.0000 \\ 0.0000 \end{array} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 24 \\ 10 \end{array}$$

$$P_{e_{14}} = \begin{array}{l} 0.0000 \\ 0.0000 \end{array} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 25 \\ 11 \end{array}$$

$$P_{e_{15}} = \begin{array}{l} 0.0000 \\ 0.0000 \end{array} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 26 \\ 13 \end{array}$$

$$P_{e_{16}} = \begin{array}{l} 0.0000 \\ 0.0000 \end{array} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 27 \\ 14 \end{array}$$

$$P_{e_{17}} = \begin{array}{l} 0.0000 \\ 0.0000 \end{array} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 28 \\ 19 \end{array}$$

$$P_{e_{18}} = \begin{array}{l} 0.0000 \\ 0.0000 \end{array} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 29 \\ 20 \end{array}$$

$$P_{e_{19}} = \begin{array}{l} 0.0000 \\ 0.0000 \end{array} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 30 \\ 22 \end{array}$$

$$P_{e_{20}} = \begin{array}{l} 0.0000 \\ 0.0000 \end{array} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 31 \\ 23 \end{array}$$

$$P_{e_{21}} = \begin{array}{l} +6.1633 \\ -6.1633 \\ -4.3000 \\ -4.3000 \end{array} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 24 \\ 26 \\ 1 \\ 3 \end{array}$$

$$P_{e_{22}} = \begin{array}{l} +6.1633 \\ -6.1633 \\ -4.3000 \\ -4.3000 \end{array} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 28 \\ 30 \\ 7 \\ 9 \end{array}$$

$$P_{e_{23}} = \begin{array}{l} +6.1633 \\ -6.1633 \\ -4.3000 \\ -4.3000 \end{array} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 29 \\ 25 \\ 7 \\ 1 \end{array}$$

$$P_{e_{24}} = \begin{array}{l} +6.1633 \\ -6.1633 \\ -4.3000 \\ -4.3000 \end{array} \begin{array}{l} \text{GL} \\ 31 \\ 27 \\ 9 \\ 3 \end{array}$$

Estos vectores deben escribirse de 31×1 , pero por la misma razón que en las matrices de rigidez (facilidad de escritura), solamente se anotaron los elementos de ellos que son diferentes de cero, indicando a través de los grados de libertad la posición a la que pertenecen.

El vector de empotramiento de la estructura se obtiene sumando los vectores de empotramiento de todas las barras, dando el resultado que se presenta en la siguiente hoja:

P_r =

-12.0400	+3.4938 r ₁	+0.4031 r ₂	+0.4031 r ₄					
-6.0200	+0.4031 r ₁	+4.8711 r ₂	+0.4031 r ₃		+0.2352 r ₅			
-12.0400		+0.4031 r ₂	+3.4938 r ₃			+0.4031 r ₆		
-6.0200	+0.4031 r ₁			+4.8711 r ₄	+0.2352 r ₅		+0.4031 r ₇	
-17.2000		.7727 r ₂		+0.7727 r ₄	+7.6596 r ₅	+0.7727 r ₆		+0.7727 r ₈
-6.0200			+0.4031 r ₃		+0.2352 r ₅	+4.8711 r ₆		+0.4031 r ₉
-12.0400				+0.4031 r ₄			+3.4938 r ₇	+0.4031 r ₈
-6.0200					+0.2352 r ₅		+0.4031 r ₇	+4.8711 r ₈
-12.0400						+0.4031 r ₆		+0.4031 r ₈
+1.2327	-1.0593 r ₁	-0.4815 r ₂						
-1.2327	+1.0593 r ₁			+0.4815 r ₄				
0	+0.4815 r ₁							
-1.2327		+0.4815 r ₂	+1.0593 r ₃					
-1.2327			+1.0593 r ₃			+0.4815 r ₆		
0	-0.4815 r ₁						+0.4815 r ₇	
0				+1.0110 r ₄		-1.0110 r ₆		
0		-1.0110 r ₂					+1.0110 r ₈	
0			-0.4815 r ₃					+0.4815 r ₉
+1.2327						-1.0593 r ₇	-0.4815 r ₈	
+1.2327				-0.4815 r ₄		-1.0593 r ₇		
0						+0.4815 r ₇		-0.4815 r ₉
-1.2327							+0.4815 r ₈	+1.0593 r ₉
+1.2327						-0.415 r ₆		-1.0593 r ₉
+6.1633								
-6.1633								
-6.1633								
-6.1633								
+6.1633								
+6.1633								
-6.1633								
+6.1633								

VECTOR DE CARGAS DE EMPOTRAMIENTO

Como se puede observar en la fig.6, el vector de cargas concentradas es:

VECTOR DE CARGAS CONCENTRADAS

	GL	
$P_c =$	-1.0	1
	0.0	2
	-1.0	3
	0.0	4
	0.0	5
	0.0	6
	-1.0	7
	0.0	8
	-1.0	9
	0.0	10
	0.0	11
	0.0	12
	0.0	13
	0.0	14
	0.0	15
	0.0	16
	0.0	17
	0.0	18
	0.0	19
	0.0	20
	0.0	21
	0.0	22
	0.0	23
	0.0	24
	0.0	25
	0.0	26
	0.0	27
	0.0	28
	0.0	29
	0.0	30
	0.0	31

Ahora que ya se han obtenido la matriz de rigideces y el vector de cargas de empotramiento de la estructura, así como el vector de cargas concentradas, conviene hacer uso de la simetría de la estructura para simplificar las expresiones, es decir, tomar en cuenta que:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_3 = \delta_7 = \delta_9 \\ \delta_2 &= \delta_4 = \delta_6 = \delta_8 \\ \theta_{10} &= -\theta_{13} = \theta_{19} = -\theta_{22} = \theta_{20} = -\theta_{11} = \theta_{23} = -\theta_{14} \\ \theta_{24} &= -\theta_{26} = \theta_{28} = -\theta_{30} = \theta_{29} = -\theta_{25} = \theta_{31} = -\theta_{27} \end{aligned}$$

Una vez hecha esta simplificación se sustituye en la ec.1 dicha matriz y los vectores antes mencionados, obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones (que representan el equilibrio de cortantes o de momentos en el grado de libertad correspondiente):

SISTEMA DE ECUACIONES

	GL
$+773.130 \delta_1 - 773.130 \delta_2 - 1662.230 \theta_{10} - 831.115 \theta_{12} + 831.115 \theta_{15}$	1
$+3.4938 r_1 + 0.8062 r_2 - 13.0400 = 0$	(27)

$-773.130 \delta_1 + 794.767 \delta_2 - 21.637 \delta_5 + 1662.230 \theta_{10} + 93.039 \theta_{17}$	2
$+0.8062 r_1 + 4.8711 r_2 + 0.2352 r_5 - 6.02 = 0$	(28)

$+773.130 \delta_1 - 773.130 \delta_2 + 1662.230 \theta_{10} + 831.115 \theta_{12} + 831.115 \theta_{10}$	3
$+3.4938 r_1 + 0.8062 r_2 - 13.04 = 0$	(29)

$-773.130 \delta_1 + 794.767 \delta_2 - 21.637 \delta_5 + 1662.230 \theta_{10} - 93.039 \theta_{16}$	4
$+0.8062 r_1 + 4.8711 r_2 + 0.2352 r_5 - 6.02 = 0$	(30)

$-86.548 \delta_2 + 86.548 \delta_5$	5
$+3.0908 r_2 + 7.6596 r_5 - 17.02 = 0$	(31)

$-773.130 \delta_1 + 794.767 \delta_2 - 21.637 \delta_5 + 1662.230 \theta_{10} + 93.039 \theta_{16}$	6
$+0.8062 r_1 + 4.8711 r_2 + 0.2352 r_5 - 6.02 = 0$	(32)

$+773.130 \delta_1 - 773.130 \delta_2 - 1662.230 \theta_{10} - 831.115 \theta_{12} - 831.115 \theta_{21}$	7
$+3.4938 r_1 + 0.8062 r_2 - 13.0400 = 0$	(33)

SISTEMA DE ECUACIONES (CONTINUACION)

- 773.130 δ_1 +794.767 δ_2 -21.637 δ_5 +1662.230 θ_{10} -93.039 θ_{17} 8
 +0.8062 r_1 +4.8711 r_2 +0.2352 r_5 -6.02 = 0 (34)
- +773.130 δ_1 -773.130 δ_2 -1662.230 θ_{10} -831.115 θ_{18} +831.115 θ_{21} 9
 +3.4938 r_1 +0.8062 r_2 -13.0400 = 0 (35)
- 831.115 δ_1 +831.115 δ_2 +2660.923 θ_{10} +1191.265 θ_{12} +139.197 θ_{24} 10
 -1.0593 r_1 -0.4815 r_2 +1.2327 = 0 (36)
- +831.115 δ_1 -831.115 δ_2 -2660.923 θ_{10} +1191.265 θ_{15} -139.197 θ_{24} 11
 +1.0593 r_1 +0.4815 r_2 -1.2327 = 0 (37)
- 12
 +4765.060 θ_{12} = 0 (38)
- +831.115 δ_1 -831.115 δ_2 -2660.923 θ_{10} +1191.265 θ_{12} -139.197 θ_{24} 13
 +1.0593 r_1 +0.4815 r_2 -1.2327 = 0 (39)
- +831.115 δ_1 -831.115 δ_2 -2660.923 θ_{10} +1191.265 θ_{18} -139.197 θ_{24} 14
 +1.0593 r_1 +0.4815 r_2 -1.2327 = 0 (40)
- 15
 +4765.060 θ_{15} = 0 (41)
- 16
 + 800.137 θ_{16} = 0 (42)
- 17
 + 800.137 θ_{17} = 0 (43)
- 18
 +4765.060 θ_{18} = 0 (44)
- 831.115 δ_1 +831.115 δ_2 +2660.923 θ_{10} +1191.265 θ_{21} +139.197 θ_{24} 19
 -1.0593 r_1 -0.4815 r_2 +1.2327 = 0 (45)

SISTEMA DE ECUACIONES (CONTINUACION)

- 831.115 δ_1 + 831.115 δ_2 + 2660.923 θ_{10} + 1191.265 θ_{15} + 139.197 θ_{24} 20
 -1.0593 r_1 - 0.4815 r_2 + 1.2327 = 0 (46)
- 21
 +4765.060 θ_{21} = 0 (47)
- +831.115 δ_1 - 831.115 δ_2 - 2660.923 θ_{10} + 1191.265 θ_{21} - 139.197 θ_{24} 22
 +1.0593 r_1 + 0.4815 r_2 - 1.2327 = 0 (48)
- 831.115 δ_1 + 831.115 δ_2 + 2660.923 θ_{10} + 1191.265 θ_{18} + 139.197 θ_{24} 23
 -1.0593 r_1 - 0.4815 r_2 + 1.2327 = 0 (49)
- 24
 +139.197 θ_{10} + 874.025 θ_{24} + 6.1633 = 0 (50)
- 25
 -139.197 θ_{10} - 874.025 θ_{24} - 6.1633 = 0 (51)
- 26
 -139.197 θ_{10} - 874.025 θ_{24} - 6.1633 = 0 (52)
- 27
 -139.197 θ_{10} - 874.025 θ_{24} - 6.1633 = 0 (53)
- 28
 +139.197 θ_{10} + 874.025 θ_{24} + 6.1633 = 0 (54)
- 29
 +139.197 θ_{10} + 874.025 θ_{24} + 6.1633 = 0 (55)
- 30
 -139.197 θ_{10} - 874.025 θ_{24} - 6.1633 = 0 (56)
- 31
 +139.197 θ_{10} + 874.025 θ_{24} + 6.1633 = 0 (57)

IV.5.b.ANALISIS DE DEFORMACIONES DEL TERRENO DE CIMENTACION

Para llevar a cabo este análisis haremos uso de la ec.12:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n_e} (M_z)_{ij} H_{ij} \sum_{k=1}^{n_r} I_{ijk} r_k l_k / a_k \quad (12)$$

Como se puede apreciar en esta ecuación, para calcular las deformaciones se requieren conocer los valores de influencia (I_{ijk}), así como la longitud y el área (l_k y a_k), respectivamente, en que actúa la carga r_k .

IV.5.b.1.CALCULO DE LOS VALORES DE INFLUENCIA

En la fig.11 se muestran plantas de la estructura en las que se indican las áreas en que actúan las cargas (a_k), mediante zonas achuradas, y los puntos i bajo los que nos interesa conocer las deformaciones y por lo tanto, los valores de influencia.

Los subíndices i,j,k, representan el punto bajo el cual se lleva a cabo el análisis, el estrato en cuestión y el área en el que actúa la carga, respectivamente. Así por ejemplo, I_{125} , es el valor de influencia bajo el punto 1, a la mitad del estrato 2, debido a la aplicación de una carga unitaria en el área 5.

A través de la ecuación de Boussinesq para distribución de esfuerzos verticales se obtienen los valores de influencia indicados en las siguientes tablas, bajo los puntos i, a la mitad de los estratos j, debidos a cargas unitarias aplicadas en las áreas k:

$$I_{ijk} = (1/2\pi) \left(\left((1/x^2+z^2) + (1/y^2+z^2) \right) (xyz/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}) + \text{angtan} (xy/z(x^2+y^2+z^2)^{1/2}) \right) \quad (\text{Damy, 1985})$$

i = 1,2,...,9, pero por simetría, solamente es necesario calcular los valores de influencia para i = 1,2,5.

j = 1,2 (por ser dos estratos)

k = 1,2,...,9.

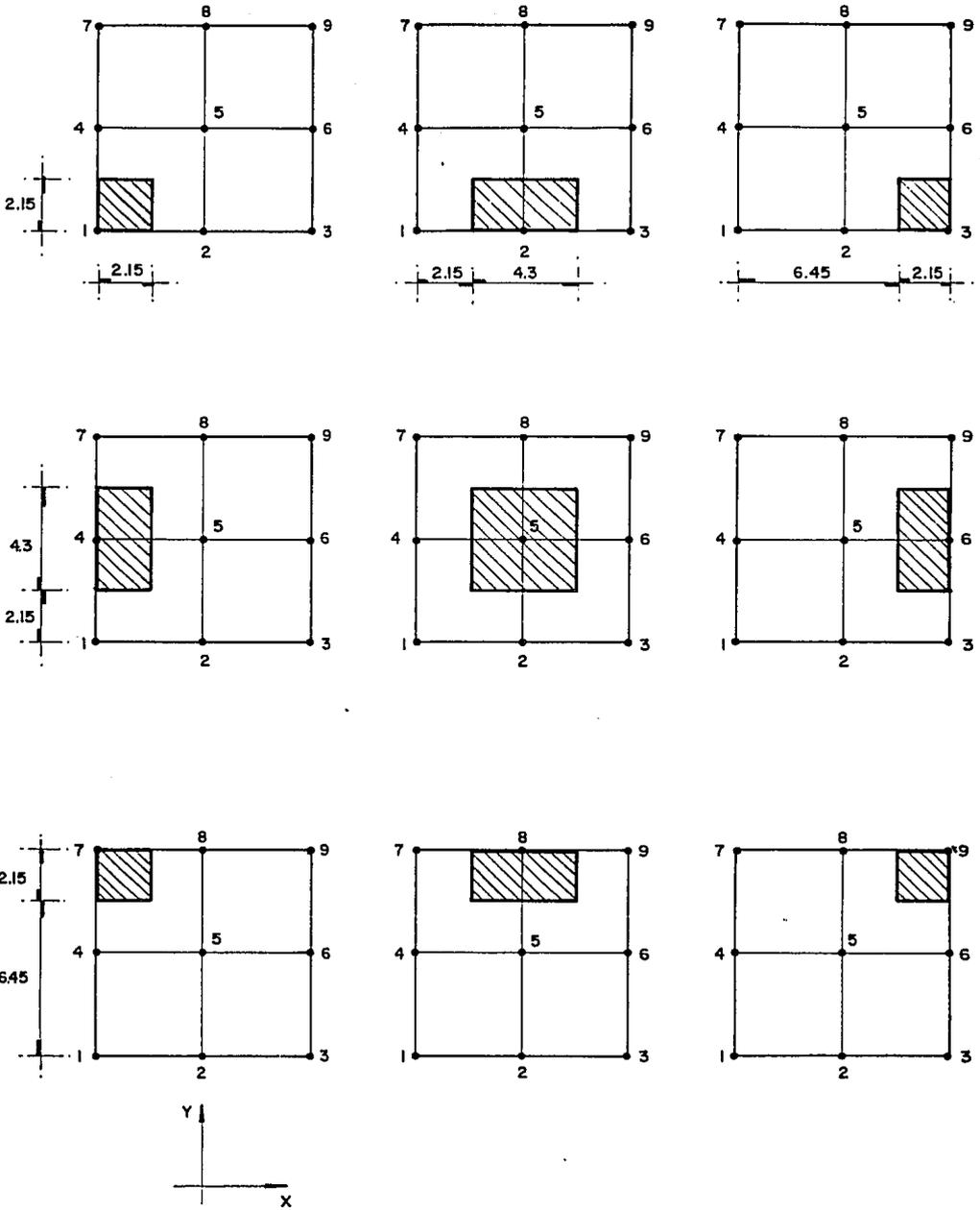


FIG.11 AREAS DE LA PLANTA DE CIMENTACION EN QUE ACTUAN LAS CARGAS $r_k \cdot l_k / a_k$

i=1	k								
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 z=1.2 m	+0.2271	+0.2365	+0.2366	+0.2365	+0.2488	+0.2491	+0.2366	+0.2491	+0.24950
		-0.2271	-0.2365	-0.2271	-0.2365	-0.2488	-0.2365	-0.2366	-0.2488
		+0.0094	+0.0001	+0.0094	+0.2271	+0.2365	+0.0001	+0.2365	+0.24884
					+0.0029	+0.0002		+0.0002	+0.00002
2 z=3.4 m	+0.1138	+0.1579	+0.1602	+0.1579	+0.2300	+0.2349	+0.1602	+0.2349	+0.2404
		-0.1138	-0.1579	-0.1138	-0.1579	-0.2300	-0.2349	-0.1579	-0.2349
		+0.0440	+0.0022	+0.0440	+0.1579	-0.1602	0.0022	+0.1579	-0.2349
					+0.1138	+0.1579		+0.1579	+0.2300
					+0.0280	+0.0026		+0.0026	+0.0005

i=2	k								
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 z=1.2 m	+0.0085	+0.4542	+0.0085	+0.0024	+0.0187	+0.0024	+0.0001	+0.0003	+0.0001
2 z=3.4 m	+0.0357	+0.2277	+0.0357	+0.0207	+0.0881	+0.0207	+0.0016	+0.0045	+0.0016

i=5	k								
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 z=1.2 m	+0.0020	+0.0171	+0.0020	+0.0171	+0.9084	+0.0171	+0.0020	+0.0171	+0.0020
2 z=3.4 m	+0.0156	+0.0714	+0.0156	+0.0714	+0.4555	+0.0714	+0.0156	+0.0714	+0.0156

TABLA 2. VALORES DE INFLUENCIA BAJO LOS PUNTOS i, A LA MITAD DE LOS ESTRATOS j, DEBIDOS A CARGAS UNITARIAS EN k

IV.5.b.2. CALCULO DE DEFORMACIONES

De la fig.11 se obtienen los valores de las áreas a_k (zonas achuradas), y las longitudes de las reacciones l_k (porciones de las barras que atraviesan o son adyacentes a las zonas achuradas).

Así, haciendo $i = 1$ en la ecuación 12:

$$\delta_1 = \sum_{j=1}^2 M_{z_{1j}} H_{1j} \sum_{k=1}^9 (I_{1jk} r_k l_k) / a_k$$

$$= M_{z_{11}} H_1 [(I_{111} l_1 r_1) / a_1 + (I_{112} l_2 r_2) / a_2 + \dots + (I_{119} l_9 r_9) / a_9] \quad (58)$$

$$+ M_{z_{12}} H_2 [(I_{121} l_1 r_1) / a_1 + (I_{122} l_2 r_2) / a_2 + \dots + (I_{129} l_9 r_9) / a_9]$$

Sustituyendo valores en la ec.58:

$$\delta_1 = 0.0154(2.4) [(0.2271)(4.3 r_1) / 4.6225 + (0.009375)(6.45 r_2) / 9.245$$

$$+ (0.0001528)(4.3 r_3) / 4.6225 + (0.009375)(6.45 r_4) / 9.245$$

$$+ (0.002988)(8.6 r_5) / 18.49 + (0.0001625)(6.45 r_6) / 9.245$$

$$+ (0.0001528)(4.3 r_7) / 4.6225 + (0.0001625)(6.45 r_8) / 9.245$$

$$+ (0.00002824)(4.3 r_9) / 4.6225]$$

$$+ 0.0222(2.0) [(0.1139)(4.3 r_1) / 4.6225 + (0.04407)(6.45 r_2) / 9.245$$

$$+ (0.002284)(4.3 r_3) / 4.6225 + (0.04407)(6.45 r_4) / 9.245$$

$$+ (0.028026)(8.6 r_5) / 18.49 + (0.002638)(6.45 r_6) / 9.245$$

$$+ (0.0022836)(4.3 r_7) / 4.6225 + (0.002638)(6.45 r_8) / 9.245$$

$$+ (0.0005157)(4.3 r_9) / 4.6225]$$

Por simetría sabemos que:

$$r_1 = r_3 = r_7 = r_9 \quad \text{y} \quad r_2 = r_4 = r_6 = r_8$$

Por lo que, sustituyendo y haciendo las operaciones correspondientes, se obtiene:

$$\delta_1 = 0.012733 r_1 + 0.0033854 r_2 + 0.00063012 r_5 \quad (59)$$

Haciendo $i=2$ en la ec.12, se determina δ_2 :

$$\begin{aligned} \delta_2 = & 0.0154(2.4) [(0.0085848)(4.3 r_1)/4.6225 + (0.4542121)(6.45 r_2)/9.245 \\ & + (0.0085848)(4.3 r_3)/4.6225 + (0.0024296)(6.45 r_4)/9.245 \\ & + (0.0187504)(8.6 r_5)/18.49 + (0.0024296)(6.45 r_6)/9.245 \\ & + (0.0000994)(4.3 r_7)/4.6225 + (0.0003176)(6.45 r_8)/9.245 \\ & + (0.0000994)(4.3 r_9)/4.6225] \\ & + 0.0222(2.0) [(0.0357448)(4.3 r_1)/4.6225 + (0.227761)(6.45 r_2)/9.245 \\ & + (0.0357448)(4.3 r_3)/4.6225 + (0.0207166)(6.45 r_4)/9.245 \\ & + (0.0881354)(8.6 r_5)/18.49 + (0.0207166)(6.45 r_6)/9.245 \\ & + (0.0016638)(4.3 r_7)/4.6225 + (0.0045672)(6.45 r_8)/9.245 \\ & + (0.0016638)(4.3 r_9)/4.6225] \end{aligned}$$

También por simetría:

$$r_1 = r_3 = r_7 = r_9 \quad \text{y} \quad r_2 = r_4 = r_6 = r_8$$

Por lo tanto:

$$\delta_2 = 0.0036873 r_1 + 0.0203261 r_2 + 0.0021424 r_5 \quad (60)$$

Haciendo $i=5$ en la ec.12 y utilizando la simetría, se calcula δ_5 :

$$\begin{aligned} \delta_5 = & 0.0154(2.4) [(0.0020251)(4.3)(r_1 + r_3 + r_7 + r_9)/4.6225 \\ & + (0.0171694)(6.45)(r_2 + r_4 + r_6 + r_8)/9.245 \\ & + (0.908424)(8.6 r_5)/18.49] \\ & + 0.0222(2.0) [(0.015695)(4.3)(r_1 + r_3 + r_7 + r_9)/4.6225 \\ & + (0.0714896)(6.45)(r_2 + r_4 + r_6 + r_8)/9.245 \\ & + (0.455522)(8.6 r_5)/18.49] \end{aligned}$$

Por último:

$$\delta_5 = 0.0028714 r_1 + 0.0106289 r_2 + 0.0250235 r_5 \quad (61)$$

IV.5.c.COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

La compatibilidad de deformaciones entre la estructura y el terreno de cimentación se logra sustituyendo las ecs. 59, 60 y 61, en el sistema de ecuaciones obtenido del análisis estructural (ecs. 27 a 57). En este sistema de ecuaciones es fácil determinar por simple inspección que θ_{12} , θ_{15} , θ_{16} , θ_{17} , θ_{18} Y θ_{21} , son iguales a cero, de manera que eliminando estas ecuaciones y la ecuaciones equivalentes en el sistema, producto de la simetría de la estructura, se obtiene lo siguiente:

Grado de libertad 1:

$$+773.130 \delta_1 - 773.130 \delta_2 - 1662.230 \theta_{10} + 3.4938 r_1 + 0.8062 r_2 - 13.04 = 0 \quad (27)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} &+773.130(0.012733 r_1 + 0.0033854 r_2 + 0.00063012 r_5) \\ &-773.130(0.0036873 r_1 + 0.0203261 r_2 + 0.0021424 r_5) - 1662.230 \theta_{10} \\ &+ 3.4938 r_1 + 0.8062 r_2 - 13.04 = 0 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$+10.4873 r_1 - 12.2911 r_2 - 1.1692 r_5 - 1662.230 \theta_{10} - 13.04 = 0 \quad (62)$$

Grado de libertad 2:

$$\begin{aligned} &-773.130 \delta_1 + 794.767 \delta_2 - 21.637 \delta_5 + 1662.230 \theta_{10} \\ &+ 0.8062 r_1 + 4.8711 r_2 + 0.2352 r_5 - 6.02 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} &-773.130(0.012733 r_1 + 0.0033854 r_2 + 0.00063012 r_5) \\ &+ 794.767(0.0036873 r_1 + 0.0203261 r_2 + 0.0021424 r_5) \\ &- 21.637(0.0028714 r_1 + 0.0106289 r_2 + 0.0250235 r_5) + 1662.230 \theta_{10} \\ &+ 0.8062 r_1 + 4.8711 r_2 + 0.2352 r_5 - 6.02 = 0 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$-6.1696 r_1 + 18.1783 r_2 + 0.9093 r_5 + 1662.230 \theta_{10} - 6.02 = 0 \quad (63)$$

Grado de libertad 5:

$$-86.548 \delta_2 + 86.548 \delta_5 + 3.0908 r_2 + 7.6596 r_5 - 17.02 = 0 \quad (31)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} & -86.548(0.0036873 r_1 + 0.0203261 r_2 + 0.0021424 r_5) \\ & + 86.548(0.0028714 r_1 + 0.0106289 r_2 + 0.0250235 r_5) \\ & + 3.0908 r_2 + 7.6596 r_5 - 17.02 = 0 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$-0.07061 r_1 + 2.25153 r_2 + 9.6399 r_5 - 17.02 = 0 \quad (64)$$

Grado de libertad 10:

$$\begin{aligned} & -831.115 \delta_1 + 831.115 \delta_2 + 2660.923 \theta_{10} + 139.197 \theta_{24} \\ & - 1.0593 r_1 - 0.4815 r_2 + 1.2327 = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} & -831.115(0.012733 r_1 + 0.0033854 r_2 + 0.00063012 r_5) \\ & + 831.115(0.0036873 r_1 + 0.0203261 r_2 + 0.0021424 r_5) \\ & + 2660.923 \theta_{10} + 139.197 \theta_{24} - 1.0593 r_1 - 0.4815 r_2 + 1.2327 = 0 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} & -8.5773 r_1 + 13.5982 r_2 + 1.2569 r_5 + 2660.923 \theta_{10} \\ & + 139.197 \theta_{24} + 1.2327 = 0 \end{aligned} \quad (65)$$

Grado de libertad 24:

$$+139.197 \theta_{10} + 874.025 \theta_{24} + 6.1633 = 0 \quad (66)$$

Agrupando las ecs. 62, 63, 64, 65 y 66, se obtiene el sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

$$+10.4873 r_1 - 12.2911 r_2 - 1.1692 r_5 - 1662.230 \theta_{10} - 13.04 = 0 \quad (62)$$

$$-6.1696 r_1 + 18.1783 r_2 + 0.9093 r_5 + 1662.230 \theta_{10} - 6.02 = 0 \quad (63)$$

$$-0.07061 r_1 + 2.25153 r_2 + 9.6399 r_5 - 17.02 = 0 \quad (64)$$

$$\begin{aligned} -8.5773 r_1 + 13.5982 r_2 + 1.2569 r_5 + 2660.923 \theta_{10} \\ + 139.197 \theta_{24} + 1.2327 = 0 \end{aligned} \quad (65)$$

$$+139.197 \theta_{10} + 874.025 \theta_{24} + 6.1633 = 0 \quad (66)$$

Resolviendo este sistema, se obtiene que:

$$r_1 = +3.3007 \text{ T/m}$$

$$r_2 = +0.8865 \text{ T/m}$$

$$r_5 = +1.5827 \text{ T/m}$$

$$\theta_{10} = +0.005311$$

$$\theta_{24} = -0.007897$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones 59, 60 y 61, se determinan los asentamientos bajo los puntos i:

$$\delta_1 = 0.012733 r_1 + 0.0033854 r_2 + 0.00063012 r_5 \quad (59)$$

$$\delta_2 = 0.0036873 r_1 + 0.0203261 r_2 + 0.0021424 r_5 \quad (60)$$

$$\delta_5 = 0.0028714 r_1 + 0.0106289 r_2 + 0.0250235 r_5 \quad (61)$$

$$\delta_1 = 0.04602 \text{ m}$$

$$\delta_2 = 0.03358 \text{ m}$$

$$\delta_5 = 0.05850 \text{ m}$$

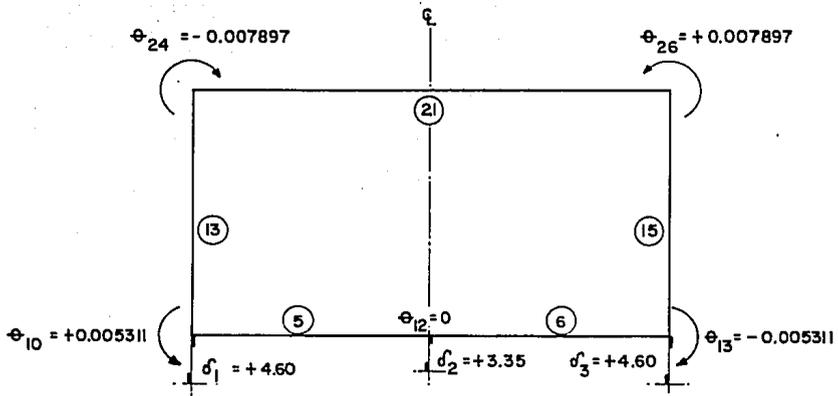


FIG.12. GIROS Y DESPLAZAMIENTOS VERTICALES EN CM. EN LOS NUDOS DEL MARCO FRONTAL

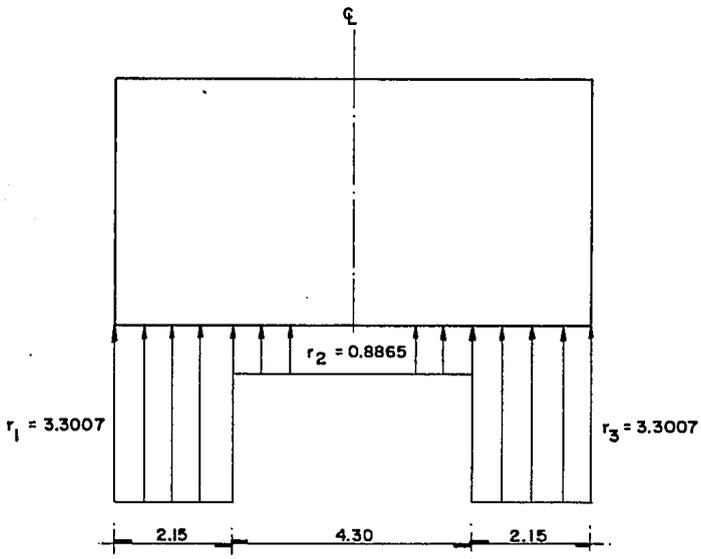


FIG.13. REACCIONES DEL TERRENO EN [T/m] SOBRE LAS BARRAS DE LA CIMENTACION (MARCO FRONTAL)

IV.5.d.ELEMENTOS MECANICOS

Con auxilio de las ecuaciones 13 a 26 se obtienen los elementos mecánicos sobre las barras de la estructura.

IV.5.d.1.BARRAS CON ARTICULACION A LA IZQUIERDA Y APOYO CONTINUO A LA DERECHA

$$M_q = -wL^2/8 + (7/128) L^2 r_r + (9/128) L^2 r_s + (3EI/L)\theta_q - (3EI/L^2)\delta_r + (3EI/L^2)\delta_s \quad (16)$$

$$V_r = -3wL/8 + (41/128) L r_r + (7/128) L r_s - (3EI/L^2)\theta_q + (3EI/L^3)\delta_r - (3EI/L^3)\delta_s \quad (17)$$

$$V_s = -5wL/8 + (23/128) L r_r + (57/128) L r_s + (3EI/L^2)\theta_q - (3EI/L^3)\delta_r + (3EI/L^3)\delta_s \quad (18)$$

BARRA 1: $r_4 = r_2$; $\delta_4 = \delta_2$; $\theta_{16} = 0$; $w = 1.6 \text{ T/m}$; $L = 4.3 \text{ m}$

$$M_{16} = -3.698 + 0.8964 + 2.0576 + 0 - 3.1242 + 5.4428 = +1.5746 \text{ T-m}$$

$$V_4 = -2.58 + 1.2210 + 0.3722 - 0 + 0.7266 - 1.2658 = -1.4866 \text{ Ton}$$

$$V_5 = -4.3 + 0.6850 + 3.0306 + 0 - 0.7266 + 1.2658 = 0.0 \text{ Ton}$$

$$M_{16} = +1.5746 \text{ T-m}$$

$$V_4 = -1.4866 \text{ Ton}$$

$$V_5 = 0.0 \text{ Ton}$$

Debido a la simetría, BARRA 2 = BARRA 1, por lo tanto:

$$M_{17} = +1.5746 \text{ T-m}$$

$$V_8 = -1.4866 \text{ Ton}$$

$$V_5 = 0.0 \text{ Ton}$$

IV.5.d.2. BARRAS CON ARTICULACION A LA DERECHA Y APOYO CONTINUO A LA IZQUIERDA

$$M_p = wL^2/8 - (9/128) L^2 r_r - (7/128) L^2 r_s + (3EI/L)\theta_p - (3EI/L^2)\delta_r + (3EI/L^2)\delta_s \quad (13)$$

$$V_r = -5wL/8 + (57/128) L r_r + (23/128) L r_s - (3EI/L^2)\theta_p + (3EI/L^3)\delta_r - (3EI/L^3)\delta_s \quad (14)$$

$$V_s = -3wL/8 + (7/128) L r_r + (41/128) L r_s + (3EI/L^2)\theta_p - (3EI/L^3)\delta_r + (3EI/L^3)\delta_s \quad (15)$$

$$\text{BARRA 3: } \theta_p = \theta_{16} = \theta_{17} = 0 ; r_s = r_6 = r_4 = r_2 ; \delta_s = \delta_6 = \delta_4 = \delta_2 ; r_r = r_5 ; \delta_r = \delta_5$$

$$M_{16} = +3.698 - 2.0576 - 0.8964 + 0 - 5.4428 + 3.1242 = -1.5746 \text{ T-m}$$

$$V_5 = -4.3 + 3.0306 + 0.6850 - 0 + 1.2658 - 0.7266 = 0.0 \text{ Ton}$$

$$V_6 = -2.58 + 0.3722 + 1.2210 + 0 - 1.2658 + 0.7266 = -1.4866 \text{ Ton}$$

$$M_{16} = -1.5746 \text{ T-m}$$

$$V_5 = 0.0 \text{ Ton}$$

$$V_6 = -1.4866 \text{ Ton}$$

Debido a la simetría, BARRA 4 = BARRA 3, por lo tanto:

$$M_{17} = -1.5746 \text{ T-m}$$

$$V_5 = 0.0 \text{ Ton}$$

$$V_2 = -1.4866 \text{ Ton}$$

IV.5.d.3. BARRAS CON DOS APOYOS CONTINUOS

$$M_p = wL^2/12 - (11/192) L^2 r_r - (5/192) L^2 r_s + (4EI/L) \theta_p + (2EI/L) \theta_q - (6EI/L^2) \delta_r + (6EI/L^2) \delta_s \quad (19)$$

$$M_q = -wL^2/12 + (5/192) L^2 r_r + (11/192) L^2 r_s + (2EI/L) \theta_p + (4EI/L) \theta_q - (6EI/L^2) \delta_r + (6EI/L^2) \delta_s \quad (20)$$

$$V_r = -wL/2 + (13/32) L r_r + (3/32) L r_s - (6EI/L^2) \theta_p - (6EI/L^2) \theta_q + (12EI/L^3) \delta_r - (12EI/L^3) \delta_s \quad (21)$$

$$V_s = -wL/2 + (3/32) L r_r + (13/32) L r_s + (6EI/L^2) \theta_p + (6EI/L^2) \theta_q - (12EI/L^3) \delta_r + (12EI/L^3) \delta_s \quad (22)$$

BARRA 5: $\theta_{10} = 0.005311$; $\theta_{12} = 0$; $r_1 = 3.3007 \text{ T/m}$; $r_2 = 0.8865 \text{ T/m}$
 $\delta_1 = 0.04602 \text{ m}$; $\delta_2 = 0.03358 \text{ m}$

$$M_{10} = +1.2327 - 3.4965 - 0.4269 + 12.6536 + 0 - 38.2479 + 27.9088 = -0.3762 \text{ T-m}$$

$$M_{12} = -1.2327 + 1.5893 + 0.9391 + 6.3268 + 0 - 38.2479 + 27.9088 = -2.7166 \text{ T-m}$$

$$V_1 = -1.72 + 5.7659 + 0.3574 - 4.4141 - 0 + 17.7897 - 12.9808 = +4.7981 \text{ Ton}$$

$$V_2 = -1.72 + 1.3306 + 1.5486 + 4.4141 + 0 - 17.7897 + 12.9808 = +0.7644 \text{ Ton}$$

$$M_{10} = -0.3762 \text{ T-m}$$

$$M_{12} = -2.7166 \text{ T-m}$$

$$V_1 = +4.7981 \text{ Ton}$$

$$V_2 = +0.7644 \text{ Ton}$$

Debido a la simetría, las BARRAS 9, 10, 11 y 5, son iguales, por lo tanto:

$$M_{20} = M_{23} = M_{19} = M_{10} = -0.3762 \text{ T-m}$$

$$M_{15} = M_{18} = M_{21} = M_{12} = -2.7166 \text{ T-m}$$

$$V_7 = V_9 = V_7 = V_1 = +4.7981 \text{ Ton}$$

$$V_4 = V_6 = V_8 = V_2 = +0.7644 \text{ Ton}$$

$$\text{BARRA 6: } \theta_{12} = 0 ; \theta_{13} = -\theta_{10} ; r_3 = r_1 ; \delta_3 = \delta_1$$

$$M_{12} = +1.2327 - 0.9391 - 1.5893 + 0 - 6.3268 - 27.9088 + 38.2479 = +2.7166 \text{ T-m}$$

$$M_{13} = -1.2327 + 0.4269 + 3.4965 + 0 - 12.6536 - 27.9088 + 38.2479 = +0.3762 \text{ T-m}$$

$$V_2 = -1.72 + 1.5486 + 1.3306 - 0 + 4.4141 + 12.9808 - 17.7897 = +0.7644 \text{ Ton}$$

$$V_3 = -1.72 + 0.3574 + 5.7659 + 0 - 4.4141 - 12.9808 + 17.7897 = +4.7981 \text{ Ton}$$

$$M_{12} = +2.7166 \text{ T-m}$$

$$M_{13} = +0.3762 \text{ T-m}$$

$$V_2 = +0.7644 \text{ Ton}$$

$$V_3 = +4.7981 \text{ Ton}$$

Debido a la simetría, las BARRAS 7, 8, 12 y 6, son iguales, por lo tanto:

$$M_{15} = M_{18} = M_{21} = M_{12} = +2.7166 \text{ T-m}$$

$$M_{11} = M_{14} = M_{22} = M_{13} = +0.3762 \text{ T-m}$$

$$V_4 = V_6 = V_8 = V_2 = +0.7644 \text{ Ton}$$

$$V_1 = V_3 = V_9 = V_3 = +4.7981 \text{ Ton}$$

IV.5.d.4. BARRAS EN LA SUPERESTRUCTURA

$$M_p = wL^2/12 + (4EI/L)\theta_p + (2EI/L)\theta_q - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (23)$$

$$M_q = -wL^2/12 + (2EI/L)\theta_p + (4EI/L)\theta_q - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (24)$$

$$V_r = -wL/2 - (6EI/L^2)\theta_p - (6EI/L^2)\theta_q + (12EI/L^3)\delta_r - (12EI/L^3)\delta_s \quad (25)$$

$$V_s = -wL/2 + (6EI/L^2)\theta_p + (6EI/L^2)\theta_q - (12EI/L^3)\delta_r + (12EI/L^3)\delta_s \quad (26)$$

BARRA 13: $w = 0.0$; $L = 4.6$ m ; $\theta_{24} = -0.007897$; $\theta_{10} = 0.005311$
 $\delta_r = 0.0$; $\delta_s = 0.0$

Sustituyendo valores y haciendo las operaciones correspondientes, se obtienen:

$$M_{24} = -1.4559 \text{ T-m}$$

$$M_{10} = +0.3762 \text{ T-m}$$

$$V_{35} = +0.2348 \text{ Ton}$$

$$V_{34} = -0.2348 \text{ Ton}$$

Debido a la simetría, las BARRAS 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 y 13 son iguales, por lo tanto:

$$-M_{25} = -M_{26} = M_{27} = -M_{28} = M_{29} = M_{31} = -M_{30} = M_{24} = -1.4559 \text{ T-m}$$

$$-M_{11} = -M_{13} = M_{14} = -M_{19} = M_{20} = M_{23} = -M_{22} = M_{10} = +0.3762 \text{ T-m}$$

$$-V_{32} = -V_{35} = V_{32} = -V_{35} = V_{32} = V_{35} = -V_{32} = V_{35} = +0.2348$$

$$-V_{33} = -V_{34} = V_{33} = -V_{34} = V_{33} = V_{34} = -V_{33} = V_{34} = -0.2348$$

BARRA 21: $w = 1.0$ T/m ; $L = 9.2$ m ; $\theta_{24} = -0.007897$; $\theta_{26} = +0.007897$
 $\delta_r = 0.0$; $\delta_s = 0.0$

Sustituyendo valores se encuentran:

$$M_{24} = +1.4559 \text{ T-m}$$

$$M_{26} = -1.4559 \text{ T-m}$$

$$V_1 = -4.3 \text{ Ton}$$

$$V_3 = -4.3 \text{ Ton}$$

Debido a la simetría, las BARRAS 22, 23, 24 y 21 son iguales, por lo tanto:

$$M_{28} = M_{29} = M_{31} = M_{24} = +1.4559 \text{ T-m}$$

$$M_{30} = M_{25} = M_{27} = M_{26} = -1.4559 \text{ T-m}$$

$$V_7 = V_7 = V_9 = V_1 = -4.3 \text{ Ton}$$

$$V_9 = V_1 = V_3 = V_3 = -4.3 \text{ Ton}$$

Así, ha quedado terminado el ejemplo propuesto para ilustrar el empleo del método de análisis tridimensional de interacción estática suelo-estructura, utilizado en esta tesis.

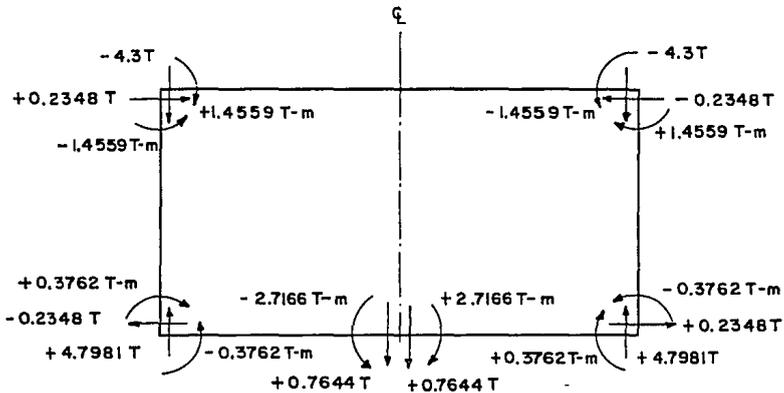


FIG. 14. ELEMENTOS MECANICOS EN LAS BARRAS DEL MARCO FRONTAL (BARRA SOBRE NUDO)

IV.6.COMPARACION DE RESULTADOS ENTRE ESTE METODO Y LA SOLUCION DE BROWN PARA UNA ZAPATA CORRIDA

Poulos y Davis (1974), presentaron los resultados obtenidos por Brown (1969) para una tira lisa de longitud finita, cargada uniformemente. Brown obtuvo soluciones para el momento máximo, el asentamiento diferencial máximo y el asentamiento central de la tira, aplicando la teoría de elasticidad a un medio semi-infinito, en el cual se encuentra apoyada dicha tira. La relación de Poisson de la cimentación considerada por Brown fue $\nu = 0.3$ y la rigidez relativa cimentación-suelo definida como sigue:

$$K = E_p I_p (1-\nu_s^2) / \pi E_s a^4$$

donde E_p = módulo de elasticidad de la cimentación

I_p = momento de inercia de la sección de la cimentación = $bt^3/6$

E_s = módulo de elasticidad del suelo

ν_s = relación de Poisson del suelo

a = semilargo de la cimentación

b = semiancho de la cimentación

t = espesor de la cimentación

Para comparar los resultados obtenidos por Brown con los obtenidos mediante el método expuesto de interacción suelo-estructura, se analizaron zapatas corridas con relaciones $a/b = 10$ y $\nu = 0.3$, cargadas con presión uniforme unitaria.

La primera aproximación se llevó a cabo simulando una zapata corrida de longitud $2a = 20$ m y ancho $2b = 2$ m, mediante una viga flotante formada por 4 elementos de 5 m de longitud, subyacida por 8 estratos (los 3 primeros de 1.0 m de espesor y los siguientes 5 de 3 m de espesor, cada uno). Los resultados obtenidos se encuentran representados mediante asteriscos en las gráficas de las figuras 14.a, 14.b y 14.c, denominados primera aproximación, para diferentes valores de rigidez relativa cimentación-suelo K.

Como se puede observar, los resultados obtenidos por Brown, representados por cruces (+), muestran la misma tendencia que los de la primera aproximación (*), pero la diferencia entre los valores es apreciable, llegando a ser en los casos extremos del orden del 25%.

Sin embargo, al aumentar el número de elementos de 4 a 10 (2 m de longitud cada uno), el de estratos de 8 a 19 (los 8 primeros de 0.5 m de espesor, los siguientes 7 de 1.0 m de espesor y los últimos 3 de 2 m de espesor), y tomar en cuenta el valor del módulo de deformación del suelo en función del nivel de esfuerzos en cada uno de los estratos, se obtuvieron los valores finales, representados por cuadros vacíos, denominados 2^a aproximación Deméneghi (figs. 15.a, 15.b y 15.c). De esta forma, la diferencia entre ambas soluciones fue menor al 3.5%.

Lo anterior pone de manifiesto que si la estructura es representada por un número suficiente de elementos, la estratigrafía es considerada con suficiente detalle y las propiedades de deformación de los estratos se obtienen adecuadamente en función del nivel de esfuerzos actuante, la aproximación de los resultados obtenidos con este método es perfectamente aceptable desde el punto de vista práctico de la ingeniería. Así, si se requiere un mayor grado de aproximación en los resultados, bastará con aumentar el número de elementos considerados tanto en el suelo como en la estructura, y afinar los valores de las propiedades de deformación en función del nivel de esfuerzos.

FIG. 15.a COMPARACION ENTRE LOS MOMENTOS FLEXIONANTES MAXIMOS OBTENIDOS POR BROWN (1969), PARA UNA ZAPATA LISA CON RELACION LARGO/ANCHO= 10, Y EL METODO DE DEMENEGHI, PARA DIFERENTES RIGIDEZES RELATIVAS

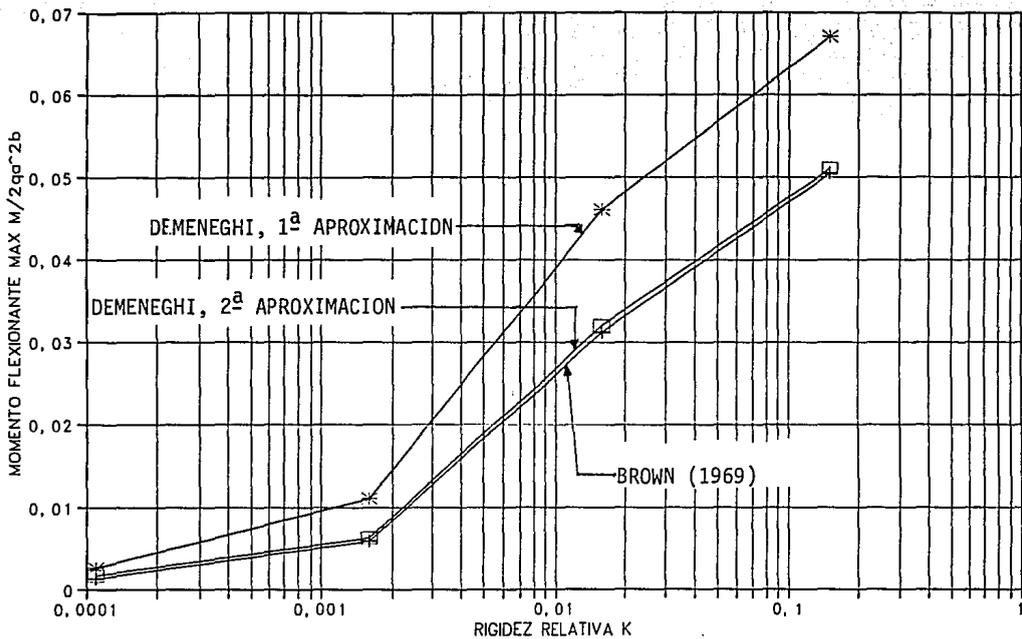


FIG. 15.b COMPARACION ENTRE LOS ASENTAMIENTOS DIFERENCIALES MAXIMOS OBTENIDOS POR BROWN (1969), PARA UNA ZAPATA LISA CON RELACION LARGO/ANCHO = 10, Y EL METODO DE DEMENEGHI, PARA DIFERENTES RIGIDECEZ RELATIVAS

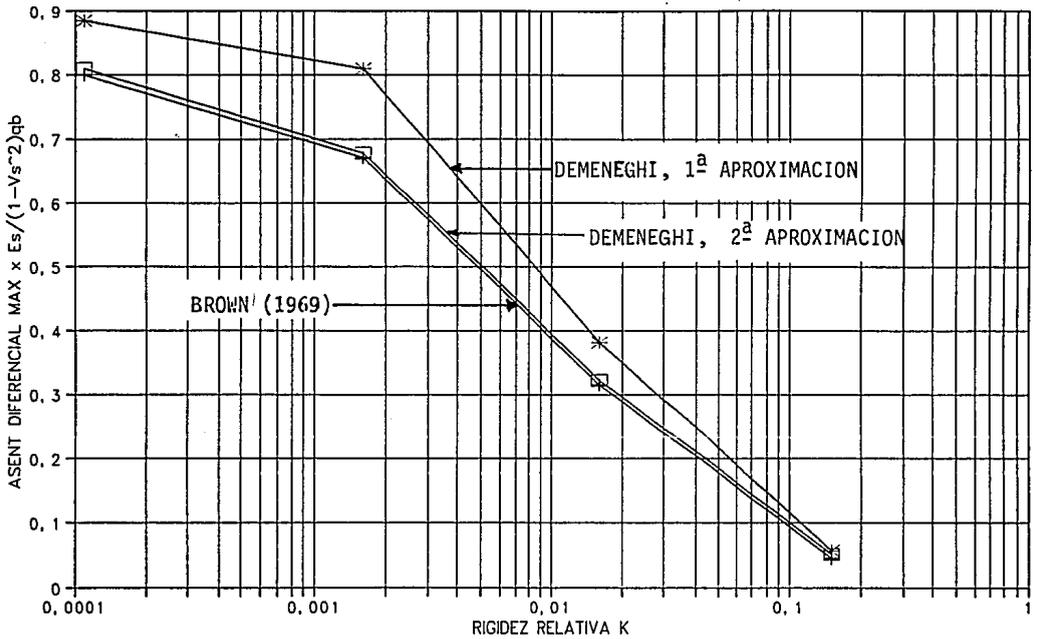
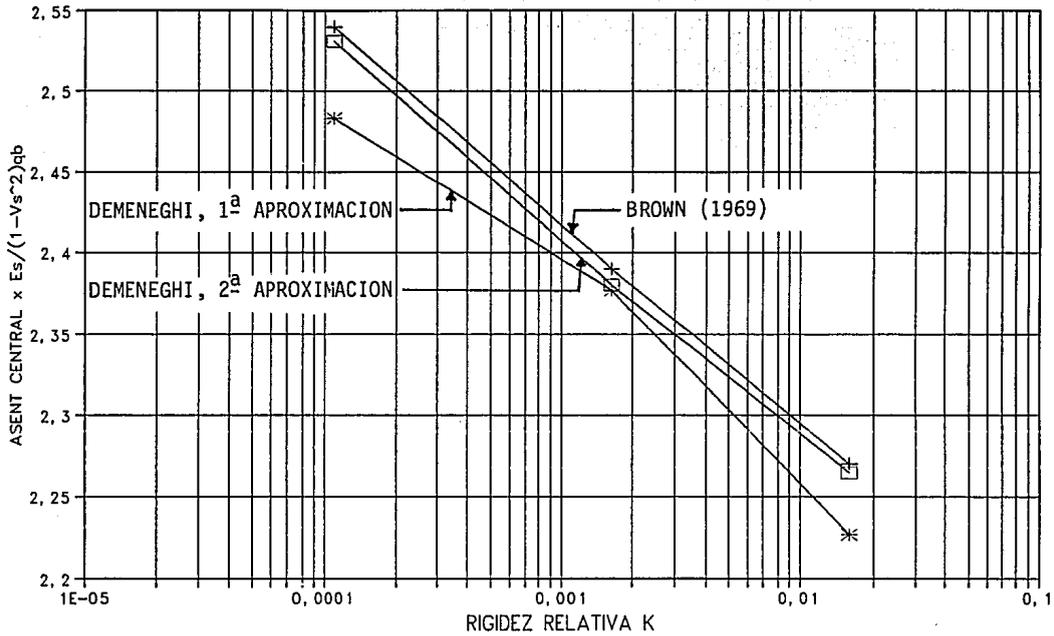


FIG. 15.c COMPARACION ENTRE LOS ASENTAMIENTOS CENTRALES OBTENIDOS POR BROWN (1969), PARA UNA ZAPATA LISA CON RELACION LARGO/ANCHO = 10, Y EL METODO DE DEMENEGHI, PARA DIFERENTES RIGIDEZES RELATIVAS



V. CASOS ESTUDIADOS

Para estudiar la influencia de la rigidez del terreno de cimentación en los resultados de la interacción estática suelo-estructura, se llevó a cabo el análisis de una misma estructura, apoyada sobre un terreno con las mismas características estratigráficas, pero con diferentes propiedades de deformación. Es decir, que las características estructurales y geométricas de la superestructura y de la cimentación fueron mantenidas, así como el subsuelo de apoyo fue considerado con el mismo número de estratos y el mismo espesor, variando solamente la rigidez de cada uno de los estratos.

Como se mencionó en el objetivo de este trabajo, los esfuerzos de contacto entre la cimentación y el suelo de apoyo, dependen del tiempo, lo que quiere decir que los resultados de la interacción suelo-estructura no son los mismos a corto plazo, que a largo plazo, cuando se trata de suelos que exhiben deformaciones con el tiempo. Sin embargo, para poder estudiar mejor el problema, en esta tesis se optó por realizar los análisis tomando en cuenta únicamente las propiedades de deformación del subsuelo a corto plazo.

V.1. DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA

Se trata de una estructura para vivienda cuyas características geométricas y dimensiones en planta (7.05 m de ancho por 7.20 m de longitud), así como los requerimientos del proyecto arquitectónico, se pueden apreciar en la figura 16.

La zona comprendida entre los ejes B y D es de dos niveles, mientras que la comprendida entre los ejes A y B, es de un solo nivel.

La estructuración es a base de barras ortogonales y losas de entrepiso, de azotea y de cimentación, de concreto reforzado.

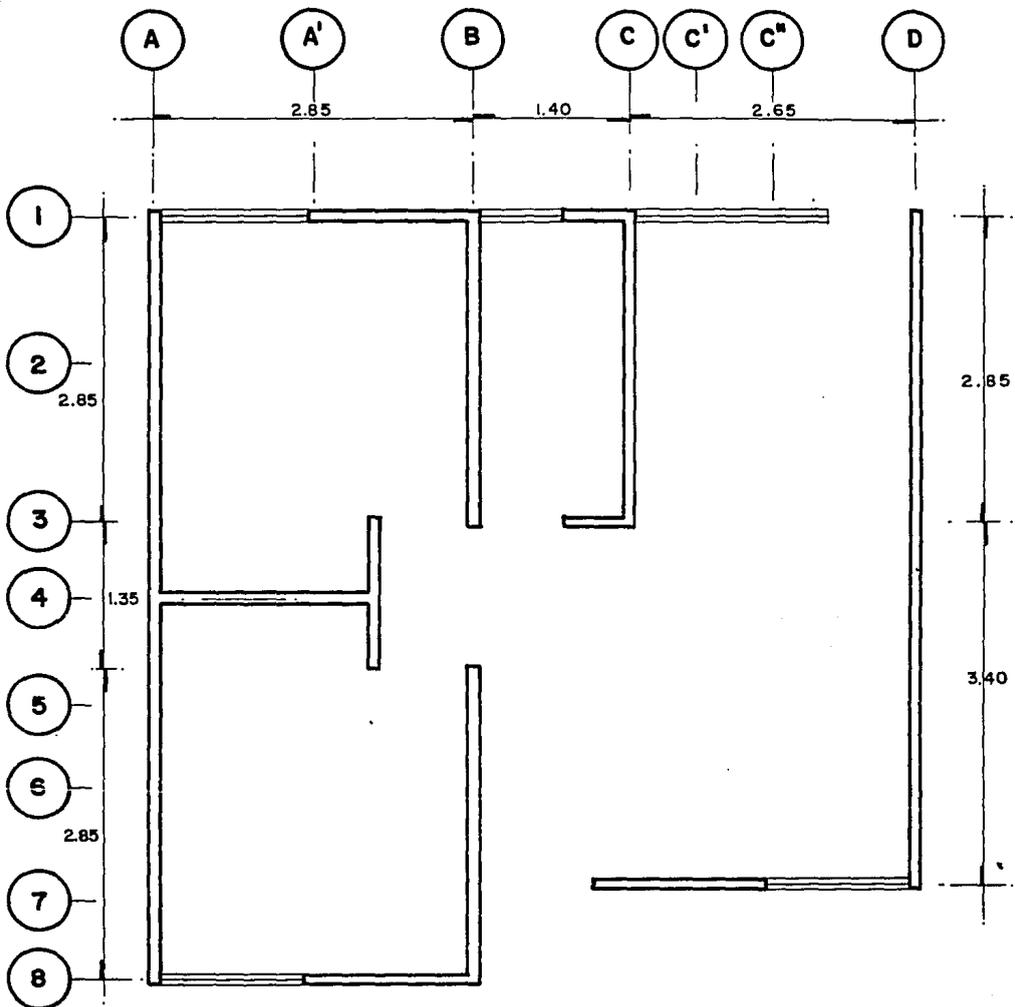


FIG.16 PLANTA DE LA VIVIENDA

La cimentación fue resuelta mediante una losa con contratrabes de concreto armado, apoyada sobre el terreno natural.

Para fines de análisis de interacción, la estructura se consideró como una retícula de barras en el plano horizontal para las trabes, las losas de cimentación y de entrepiso, y de barras verticales, para representar a los elementos verticales. Cada una de las barras se tomó como una viga con la rigidez correspondiente al material de la que está formada y en los casos de las trabes y contratrabes, se utilizó, por ejemplo, la rigidez del concreto en una sección formada por la misma contratrabe y la porción de losa correspondiente (viga T).

Con el fin de conocer los elementos mecánicos en la losa de cimentación, algunos tableros se consideraron como vigas con una rigidez igual a la de la propia losa; por ejemplo: en un tablero se consideran dos vigas ortogonales que pasan por la mitad del mismo, cada una de las cuales tiene una rigidez igual a la de la mitad de la losa en la dirección que le corresponde.

V.2.DESCRIPCION DE LOS TERRENOS DE CIMENTACION Y SUS PROPIEDADES DE DEFORMACION

Para estudiar la influencia de la rigidez del terreno de cimentación en los resultados de la interacción estática suelo-estructura, se utilizó la estratigrafía mostrada en la fig.18.

Como se puede apreciar, la estratigrafía encontrada consta de seis estratos de espesor variable que sobreyacen a la roca basáltica del lugar.

La determinación de las propiedades de deformación de los estratos requiere de la obtención del módulo lineal de deformación de cada uno de ellos, el cual se define como el cociente de la deformación vertical del estrato, entre el esfuerzo vertical que la ocasiona.

En este sentido, es importante mencionar que para determinar el módulo lineal de deformación (M_z) se deben tomar en cuenta las condiciones ambientales de la zona, es decir: la estratigrafía general del lugar y específica del sitio en cuestión, cómo se formó, cuáles son las condiciones hidráulicas que operan en ese momento y qué cambios futuros pueden presentarse, etc., de tal forma que los parámetros de deformación sean representativos de la realidad. Ello requiere del criterio y de la experiencia del ingeniero, ya que las pruebas de laboratorio con que se deben obtener dichos módulos tienen que ser congruentes con la realidad del caso que se esté estudiando.

Para el caso de suelos granulares, el módulo lineal de deformación se determina en el laboratorio a través de pruebas triaxiales de deformación de la siguiente manera:

- 1.- Se coloca en la cámara triaxial una probeta representativa del suelo en estudio, con relación de vacíos e_0 .
- 2.- Se aplica un esfuerzo de confinamiento σ_{c1} y se deja que la probeta se estabilice bajo este esfuerzo volumétrico, alcanzando una nueva relación de vacíos e_1 .

3.- A continuación se aplica un pequeño incremento de esfuerzo efectivo vertical $\Delta\sigma'_{z1}$ que provoca una deformación unitaria $\Delta\varepsilon_1$. Este incremento $\Delta\sigma'_{z1}$ deberá ser tal que el esfuerzo cortante inducido no sobrepase el 50% de la resistencia al esfuerzo cortante del material.

4.- El módulo secante de deformación M_{z1} correspondiente al esfuerzo de confinamiento σ_{c1} y a la relación de vacíos e_1 , se obtiene (fig. 17):

$$M_{z1} = \Delta\varepsilon_1 / \Delta\sigma'_{z1}$$

5.- Una vez hecho lo anterior, se retira el incremento $\Delta\sigma'_{z1}$ y se incrementa el esfuerzo de confinamiento hasta un nuevo valor σ_{c2} .

6.- Cuando la probeta se haya estabilizado bajo la acción de este nuevo esfuerzo de confinamiento σ_{c2} , se aplica otro incremento de esfuerzo $\Delta\sigma'_{z2}$ y se obtiene el siguiente módulo de deformación M_{z2} , correspondiente al esfuerzo de confinamiento σ_{c2} y a la relación de vacíos e_2 .

7.- El procedimiento se repite hasta obtener el valor del módulo de deformación M_z para el nivel de esfuerzos requerido.

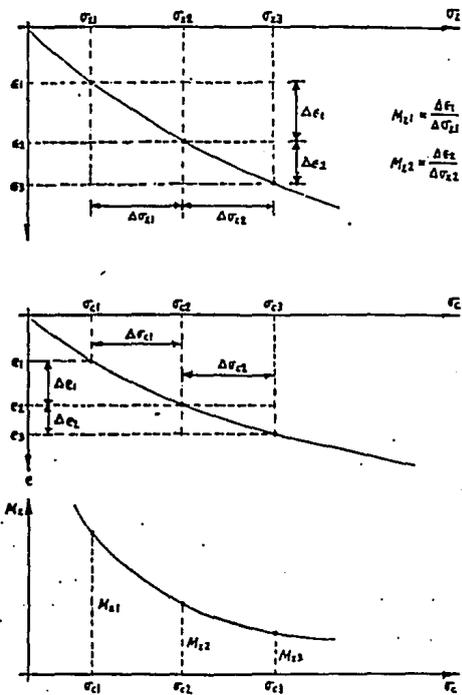


FIG.17 EJEMPLO DE GRAFICAS PARA LA OBTENCION DEL MODULO LINEAL DE DEFORMACION

Para suelos finos en los que se requieren obtener sus propiedades de deformación a corto plazo, el módulo lineal de deformación se puede obtener en el laboratorio mediante pruebas triaxiales de deformación aplicadas a muestras de suelo inalterado, siguiendo el procedimiento anteriormente descrito, pero bajo condiciones consolidadas no drenadas (CU), es decir, que los esfuerzos de confinamiento σ_{c1} deben aplicarse permitiendo el drenaje de la probeta de suelo, mientras que los incrementos de esfuerzo vertical $\Delta\sigma_{z1}$ se aplican sin permitir el drenaje del suelo.

En suelos finos para los que se deseen obtener sus propiedades de deformación a largo plazo, el módulo lineal de deformación se puede obtener en el laboratorio a través de pruebas de consolidación practicadas sobre suelo inalterado. En este sentido, conviene mencionar que la deformación a largo plazo producida por cargas verticales en suelos finos estratificados, se rige fundamentalmente por la deformación vertical, ya que las deformaciones horizontales que se presentan son prácticamente despreciables en comparación con la deformación vertical. Por lo tanto, para estos casos, el módulo de compresibilidad volumétrica m_v obtenido de pruebas de consolidación unidimensional proporciona el módulo de deformación del material.

Sean cuales fueren los casos para los que se quieran determinar los módulos lineales de deformación, se debe considerar que el suelo no es elástico y que la curva esfuerzo-deformación no es lineal, por lo que las propiedades de deformación del suelo deben obtenerse en función del nivel de esfuerzos que se tenga.

Para los casos estudiados los valores medios del módulo lineal de deformación a corto plazo, correspondientes a suelos cuya deformabilidad es muy alta, alta, media, baja y muy baja, se encuentran consignados en las figuras 19 a 23.

De esta forma, se mantuvieron constantes todos los aspectos del subsuelo que influyen en los resultados de la interacción estática, a excepción de la rigidez del terreno de cimentación, que es precisamente uno de los puntos que se quieren estudiar en esta tesis.

En otras palabras, se realizaron análisis tridimensionales de interacción estática suelo-estructura para una vivienda de características estructurales constantes, apoyada sobre suelos con la misma estratigrafía, pero con cinco rigideces diferentes.

ESTRATIGRAFIA DEL SUBSUELO

Estrato	Prof. m	Descripción
	0	<hr/>
1		Arena limosa con grava, café oscuro
	0.90	<hr/>
2		Arena limosa negra
	1.80	<hr/>
3		Limo arcilloarenoso verde olivo
	2.75	<hr/>
4		Limo arcilloarenoso verde olivo
	3.40	<hr/>
5		Arena fina negra
	4.60	<hr/>
6		Arena fina negra
	5.20	<hr/>
		Roca basáltica

FIG.18 ESTRATIGRAFIA TIPO

ESTRATIGRAFIA DEL SUBSUELO

Estrato	Prof. m	Descripción
	0	
1	0.90	Arena limosa con grava, café oscuro $M_z = 0.00900 \text{ m}^2/\text{T}$
2	1.80	Arena limosa negra $M_z = 0.00950 \text{ m}^2/\text{T}$
3	2.75	Limo arcilloarenoso verde olivo $M_z = 0.00955 \text{ m}^2/\text{T}$
4	3.40	Limo arcilloarenoso verde olivo $M_z = 0.00965 \text{ m}^2/\text{T}$
5	4.60	Arena fina negra $M_z = 0.00985 \text{ m}^2/\text{T}$
6	5.20	Arena fina negra $M_z = 0.01000 \text{ m}^2/\text{T}$
		Roca basáltica

FIG.19 ESTRATIGRAFIA Y PROPIEDADES DE DEFORMACION A CORTO PLAZO DEL TERRENO DE MUY ALTA COMPRESIBILIDAD

ESTRATIGRAFIA DEL SUBSUELO

Estrato	Prof. m	Descripción
	0	
1	0.90	Arena limosa con grava, café oscuro $M_z = 0.003000 \text{ m}^2/\text{T}$
2	1.80	Arena limosa negra $M_z = 0.002950 \text{ m}^2/\text{T}$
3	2.75	Limo arcilloarenoso verde olivo $M_z = 0.002975 \text{ m}^2/\text{T}$
4	3.40	Limo arcilloarenoso verde olivo $M_z = 0.002955 \text{ m}^2/\text{T}$
5	4.60	Arena fina negra $M_z = 0.002950 \text{ m}^2/\text{T}$
6	5.20	Arena fina negra $M_z = 0.003000 \text{ m}^2/\text{T}$
		Roca basáltica

FIG.20 ESTRATIGRAFIA Y PROPIEDADES DE DEFORMACION A CORTO PLAZO DEL TERRENO DE ALTA COMPRESIBILIDAD

ESTRATIGRAFIA DEL SUBSUELO

Estrato	Prof. m	Descripción
	0	
1	0.90	Arena limosa con grava, café oscuro $M_z = 0.000625 \text{ m}^2/\text{T}$
2	1.80	Arena limosa negra $M_z = 0.000600 \text{ m}^2/\text{T}$
3	2.75	Limo arcilloarenoso verde olivo $M_z = 0.000615 \text{ m}^2/\text{T}$
4	3.40	Limo arcilloarenoso verde olivo $M_z = 0.000605 \text{ m}^2/\text{T}$
5	4.60	Arena fina negra $M_z = 0.000600 \text{ m}^2/\text{T}$
6	5.20	Arena fina negra $M_z = 0.000597 \text{ m}^2/\text{T}$
		Roca basáltica

FIG.21 ESTRATIGRAFIA Y PROPIEDADES DE DEFORMACION A CORTO PLAZO DEL TERRENO DE COMPRESIBILIDAD MEDIA

ESTRATIGRAFIA DEL SUBSUELO

Estrato	Prof. m	Descripción
	0	
1	0.90	Arena limosa con grava, café oscuro $M_z = 0.0001750 \text{ m}^2/\text{T}$
2	1.80	Arena limosa negra $M_z = 0.0001700 \text{ m}^2/\text{T}$
3	2.75	Limo arcilloarenoso verde olivo $M_z = 0.0001710 \text{ m}^2/\text{T}$
4	3.40	Limo arcilloarenoso verde olivo $M_z = 0.0001705 \text{ m}^2/\text{T}$
5	4.60	Arena fina negra $M_z = 0.0001700 \text{ m}^2/\text{T}$
6	5.20	Arena fina negra $M_z = 0.0001675 \text{ m}^2/\text{T}$
		Roca basáltica

FIG.22 ESTRATIGRAFIA Y PROPIEDADES DE DEFORMACION A CORTO PLAZO DEL TERRENO DE BAJA COMPRESIBILIDAD

ESTRATIGRAFIA DEL SUBSUELO

Estrato	Prof. m	Descripción
	0	
1	0.90	Arena limosa con grava, café oscuro $M_z = 0.0000500 \text{ m}^2/\text{T}$
2	1.80	Arena limosa negra $M_z = 0.0000550 \text{ m}^2/\text{T}$
3	2.75	Limo arcilloarenoso verde olivo $M_z = 0.0000495 \text{ m}^2/\text{T}$
4	3.40	Limo arcilloarenoso verde olivo $M_z = 0.0000490 \text{ m}^2/\text{T}$
5	4.60	Arena fina negra $M_z = 0.0000500 \text{ m}^2/\text{T}$
6	5.20	Arena fina negra $M_z = 0.0000495 \text{ m}^2/\text{T}$
		Roca basáltica

FIG.23 ESTRATIGRAFIA Y PROPIEDADES DE DEFORMACION A CORTO PLAZO DEL TERRENO DE MUY BAJA COMPRESIBILIDAD

VI.RESULTADOS OBTENIDOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos (reacciones, hundimientos en los nudos y elementos mecánicos, en todas las barras de la retícula analizada), para cada uno de los casos estudiados.

Aunque en este trabajo la rigidez de la estructura se mantuvo constante al variar las características de deformación de los terrenos de apoyo, en general es conveniente hablar de la relación entre las rigideces de la estructura y el suelo, es decir, de la rigidez relativa estructura-suelo, ya que de otra forma una cierta estructura de características definidas puede considerarse como rígida, si se apoya sobre un terreno muy deformable en comparación con la estructura, o flexible si el suelo de apoyo es poco deformable en comparación con la estructura.

De acuerdo con Sommer (1965) y Meyerhof (1979), la rigidez relativa cimentación-suelo puede representarse mediante el cociente entre la rigidez efectiva de una losa de rigidez equivalente a la de toda la estructura (subestructura y superestructura) y el módulo efectivo de deformación del terreno de apoyo. Así, la rigidez relativa de la losa equivalente-suelo se puede calcular en forma aproximada de la siguiente forma:

$$K_r = E'_r I_r / E'_s B^3 \quad \text{Meyerhof (1953)}$$

donde K_r = rigidez relativa cimentación-suelo.

E'_r = módulo efectivo de deformación de la losa equivalente.

I_r = momento de inercia por unidad de ancho de la losa equivalente.

E'_s = módulo efectivo de deformación del suelo.

B = ancho de la losa equivalente.

o bien,

$$k_r = EJ_G / E'_s L^3 B \quad \text{Sommer (1965)}$$

donde E = módulo de deformación de la estructura.
 J_G = momento de inercia de la cimentación.
 L = largo de la cimentación.
 B = ancho de la cimentación.
 E_s = módulo de compresibilidad del suelo.

Siguiendo este orden de ideas, en este trabajo se calculó la rigidez relativa estructura-suelo K_r , de la siguiente manera:

$$K_r = (1-\nu_s^2) (EI)_E / (1-\nu_E^2) E'_s B^3$$

donde K_r = rigidez relativa estructura-suelo.
 ν_s = relación de Poisson del suelo.
 ν_E = relación de Poisson de la estructura (concreto).
 $(EI)_E$ = rigidez a la flexión de toda la estructura (cimentación y superestructura).
 E'_s = módulo efectivo de deformación del suelo, tomado como un promedio pesado entre todos los estratos.
 B = ancho de la cimentación.

Así, para la estructura de características fijas y terrenos de apoyo analizados, se obtuvieron los siguientes valores de K_r :

TIPO DE SUELO	K_r
MUY ALTA COMPRESIBILIDAD	6.7627
ALTA COMPRESIBILIDAD	2.24
COMPRESIBILIDAD MEDIA	0.
BAJA COMPRESIBILIDAD	0.1345
MUY BAJA COMPRESIBILIDAD	0.0398

**ESTA TESIS NO DEBE
 SALIR DE LA BIBLIOTECA**

VI.1.REPRESENTACION Y COMPARACION GRAFICA DE RESULTADOS

VI.1.a.HUNDIMIENTOS EN LOS NUDOS DE LAS RETICULAS DE CIMENTACION

En las figuras 24 a 28 se encuentran representados los asentamientos sufridos en los nudos de las retículas de cimentación para cada uno de los terrenos analizados. Como la zona comprendida entre los EJES A y B (fig.15) es de un sólo nivel y la comprendida entre los EJES B y D, es de dos niveles, se determinaron los asentamientos diferenciales a lo largo de los EJES A, A', B, C', C'' y D, con el objetivo de definir dichos asentamientos en ejes con cargas comparables.

En todos los casos los mayores asentamientos diferenciales se obtuvieron en la interfase entre la zona de un nivel y la de dos niveles (EJE B, fig. 28), mientras que los asentamientos diferenciales que representaron el mayor porcentaje del asentamiento total en cada eje (figs. 24, 25, 26, 27 y 28), fueron del orden de 23% para el terreno de Muy Alta Compresibilidad (EJE A), de 26% para el de Alta Compresibilidad (EJE A'), 38% en el de Compresibilidad Media (EJE A'), 42% cuando el subsuelo es de Baja Compresibilidad (EJE A') y 44% cuando se trata de un terreno de Muy Baja Compresibilidad (EJE A).

En este sentido se puede apreciar que el porcentaje que el asentamiento diferencial máximo representa, respecto al asentamiento total máximo, en los ejes mencionados, aumenta conforme la rigidez relativa estructura-suelo K_r , es menor (fig. 28').

En las figs 24 y 25 se puede observar que los asentamientos totales en el EJE A, que representa una contratrabes de cimentación, tienden a disminuir de un extremo a otro de la contratrabes cuando la rigidez relativa estructura-suelo nos indica que la estructura es mucho más rígida que el terreno de apoyo, mientras que cuando la rigidez de la estructura es mucho menor que la del subsuelo, los asentamientos

totales tienden a ser mayores al centro de la contratrabe que en sus extremos.

En cambio, en el EJE A', que corresponde al centro de las losas de cimentación (figs. 27) --zona menos rígida de la subestructura-- los asentamientos totales tienden a ser mayores a la mitad del eje.

Por otro lado, en la fig. 28 se puede apreciar que a medida que la rigidez relativa estructura-suelo disminuye, los asentamientos diferenciales tienden a disminuir en forma asintótica hacia el 0.

Meyerhof (1979), reporta que los asentamientos diferenciales, obtenidos mediante análisis de interacción suelo-estructura, disminuyen conforme el módulo efectivo de deformación del suelo aumenta, es decir, que al disminuir la rigidez relativa cimentación suelo, los asentamientos diferenciales disminuyen, lo cual concuerda con los resultados obtenidos en este trabajo.

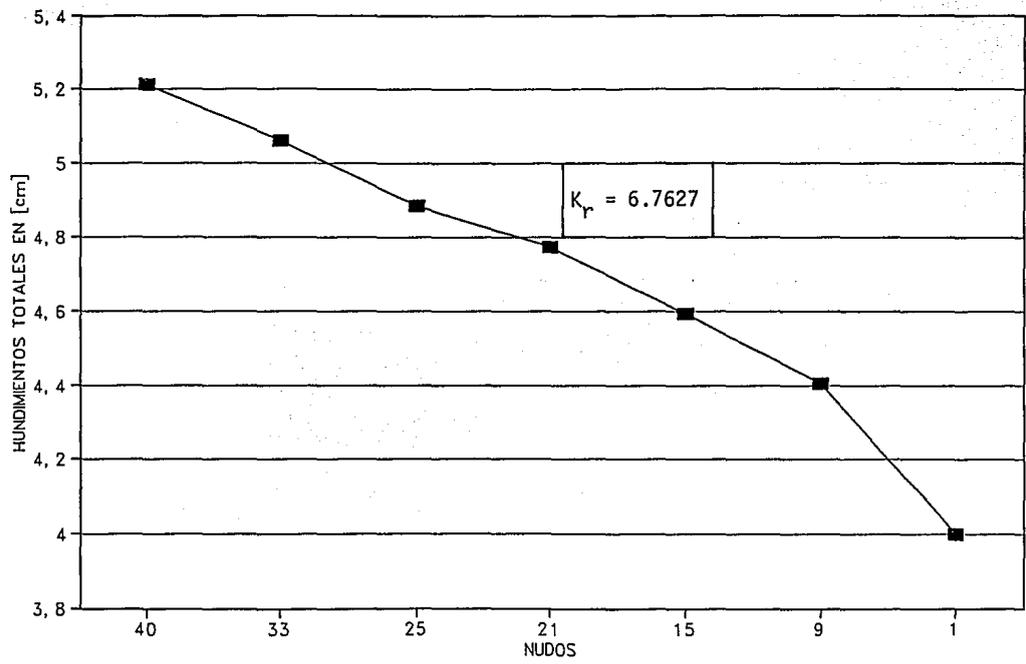
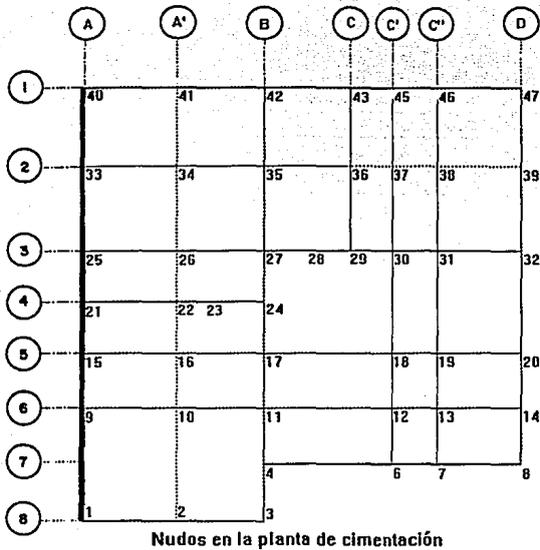
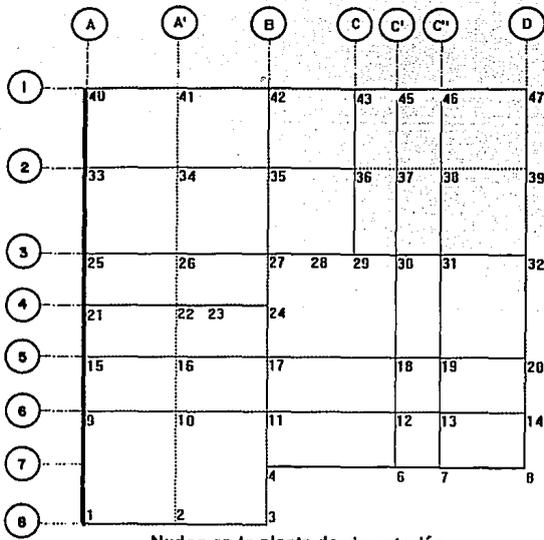


FIG. 24 HUNDIMIENTOS TOTALES EN EL EJE A DE LA CIMENTACION PARA UNA RIGIDEZ RELATIVA ESTRUCTURA-SUELO $K_r = 6.7627$



Nudos en la planta de cimentación

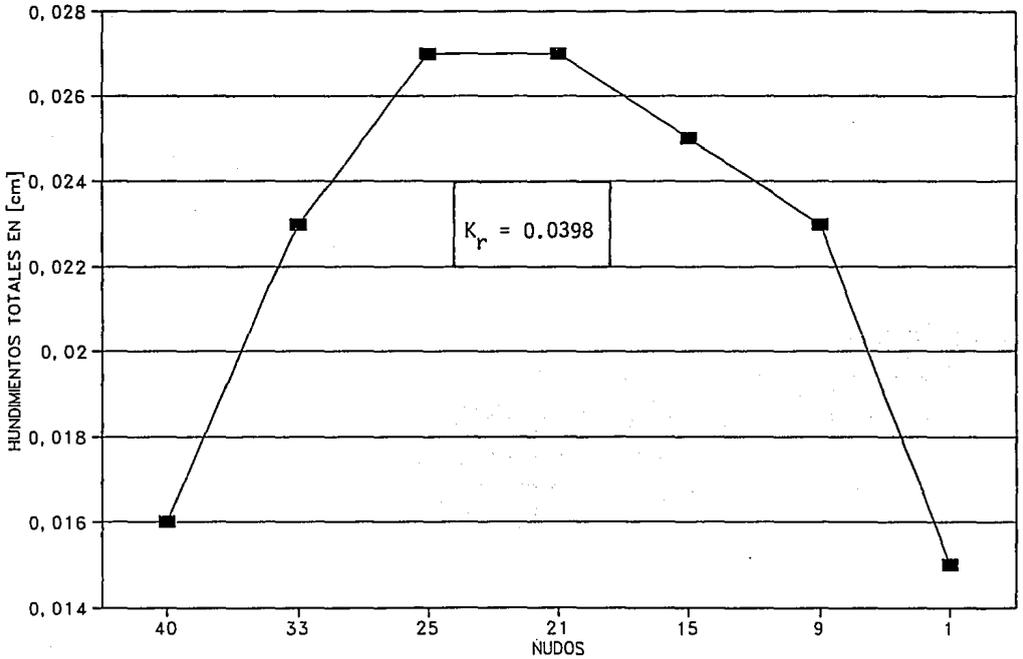
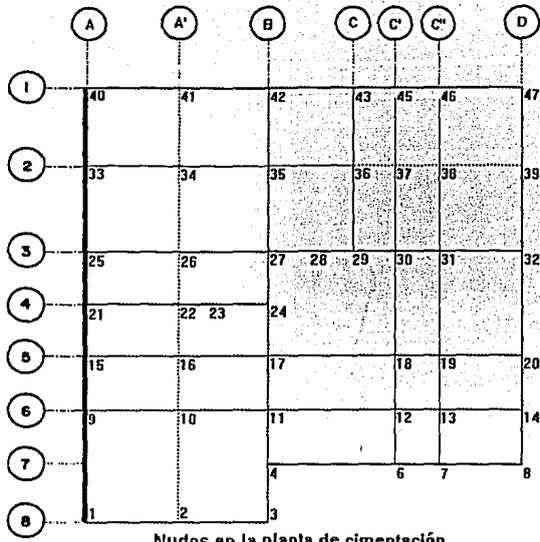


FIG. 25 HUNDIMIENTOS TOTALES EN EL EJE A DE LA CIMENTACION PARA UNA RIGIDEZ RELATIVA ESTRUCTURA-SUELO $K_r = 0.0398$



Nudos en la planta de cimentación

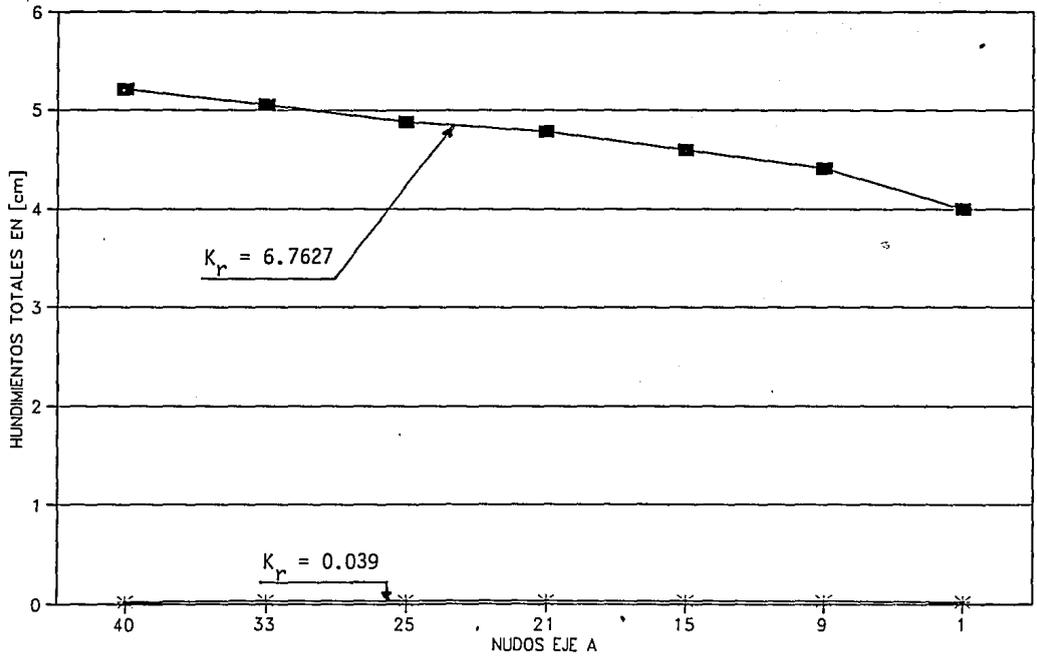


FIG. 26 INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LOS HUNDIMIENTOS TOTALES DEL EJE A DE LA CIMENTACION (CONTRATRABE)

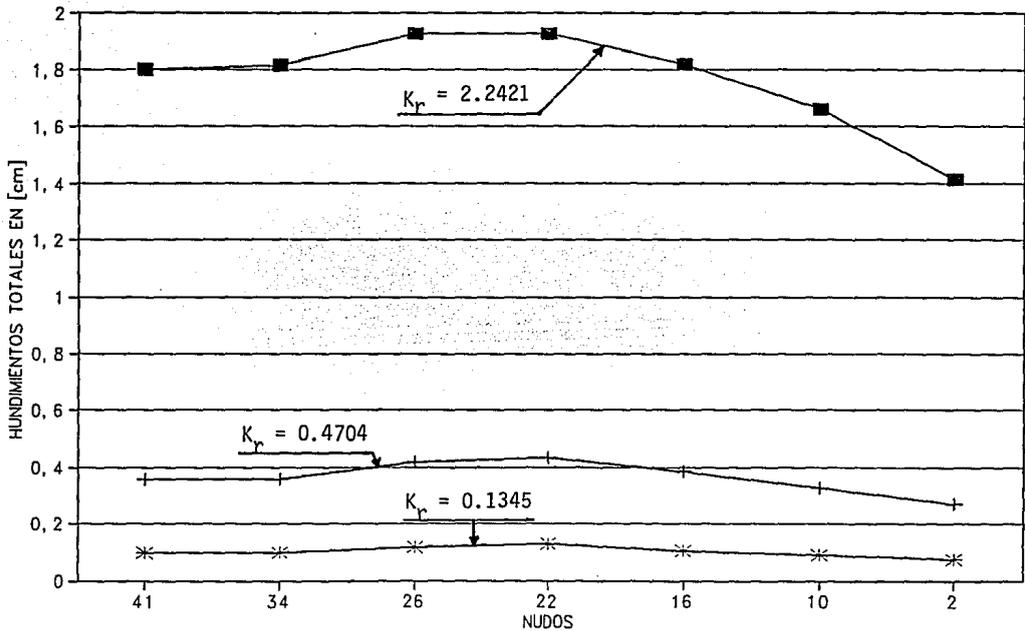
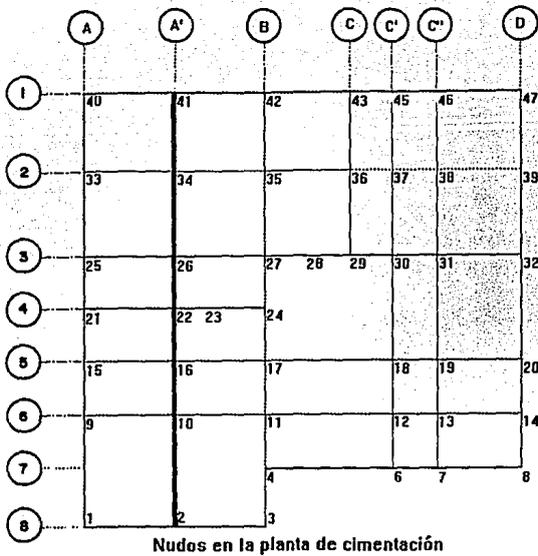
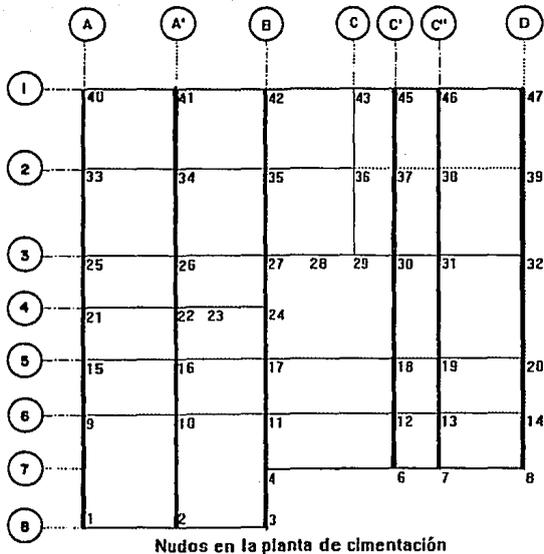


FIG. 27 INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LOS HUNDIMIENTOS TOTALES DEL EJE A' DE LA CIMENTACION (LOSA)



Nudos en la planta de cimentación

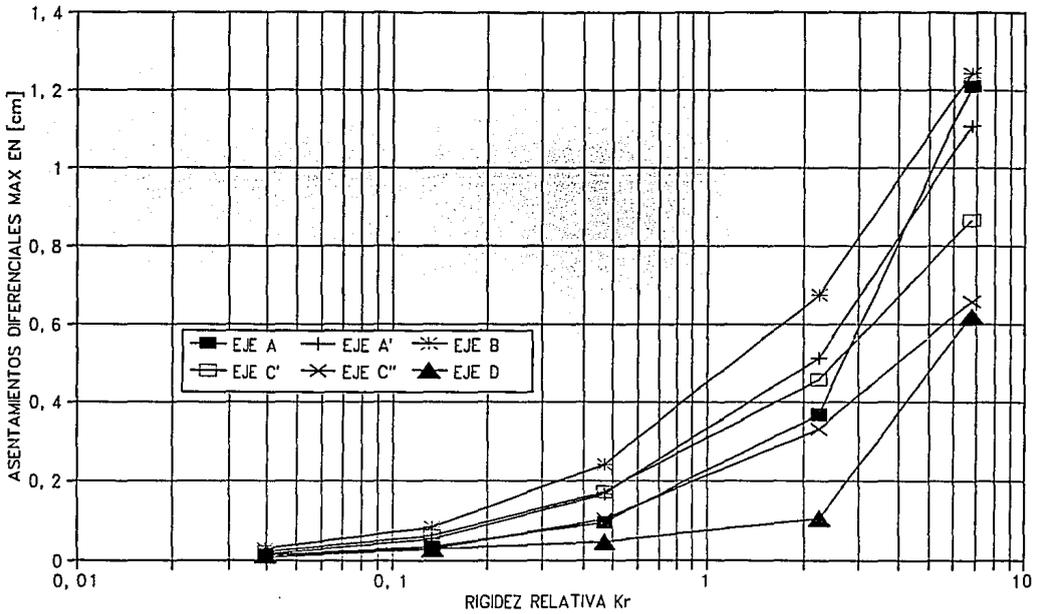
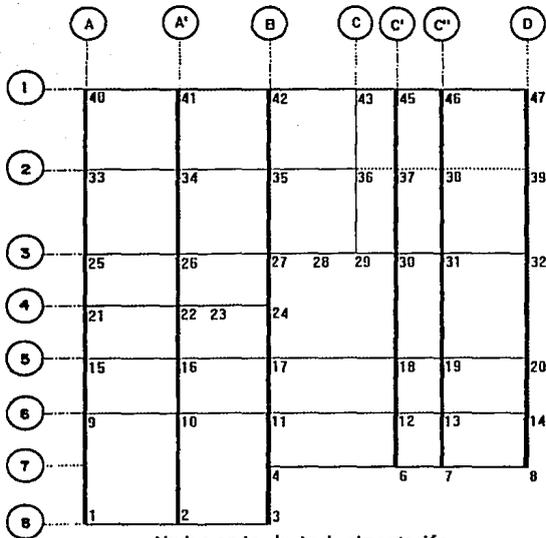


FIG.28 INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LOS ASENTAMIENTOS DIFERENCIALES MAXIMOS



Nudos en la planta de cimentación

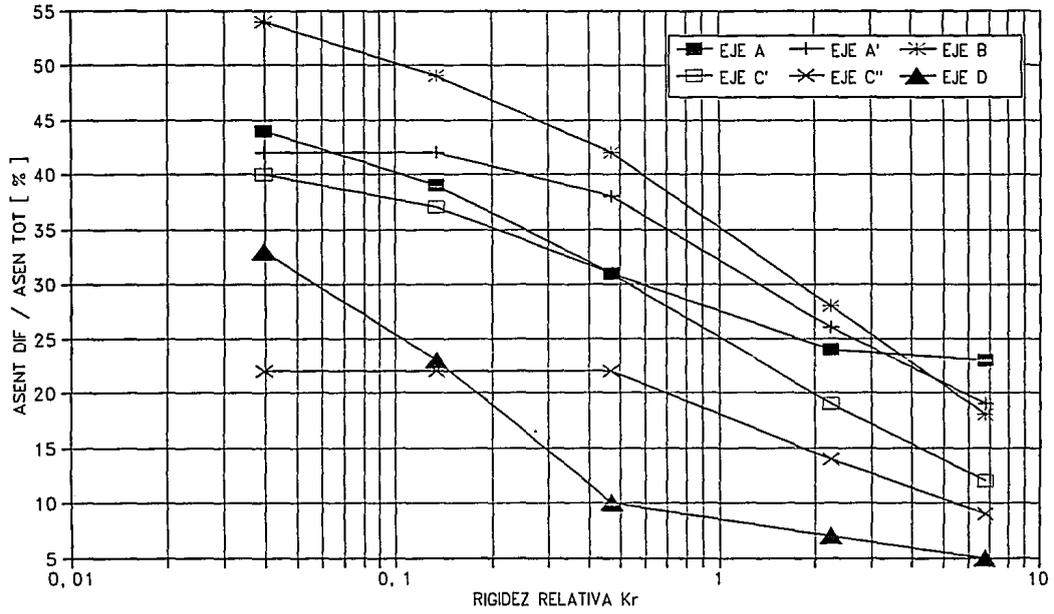


FIG.28' INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN EL PORCENTAJE QUE REPRESENTA EL ASENTAMIENTO DIFERENCIAL DEL ASENTAMIENTO TOTAL

VI.1.b.REACCIONES DEL TERRENO SOBRE LA CIMENTACION

En las figuras 29 a 33 se puede observar que en cada uno de los ejes mostrados de la reticula de cimentación (EJES 1, 2, 3, 5 y 6), el cambio en las reacciones del terreno sobre la subestructura es más acentuado a medida que la rigidez relativa estructura-suelo K_r , disminuye.

Por otro lado, se puede apreciar que al centro de los claros, las reacciones del terreno de cimentación sobre la estructura (contratrabes y losas), es menor conforme la rigidez relativa estructura-suelo es menor.

Asimismo, también resulta notable el hecho de que las reacciones del suelo de apoyo son de mayor magnitud, es decir, se concentran más, sobre los elementos estructurales de mayor rigidez.

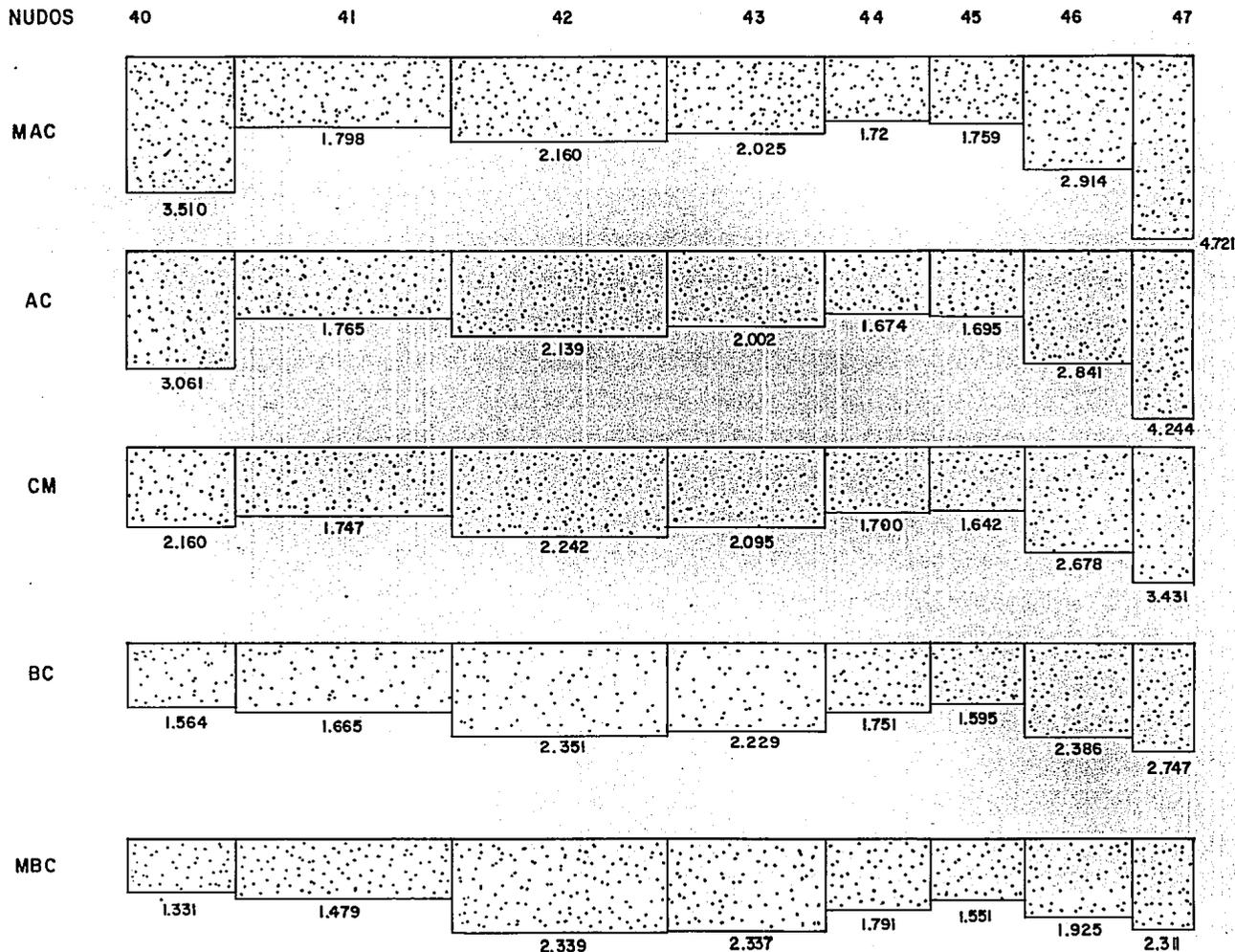
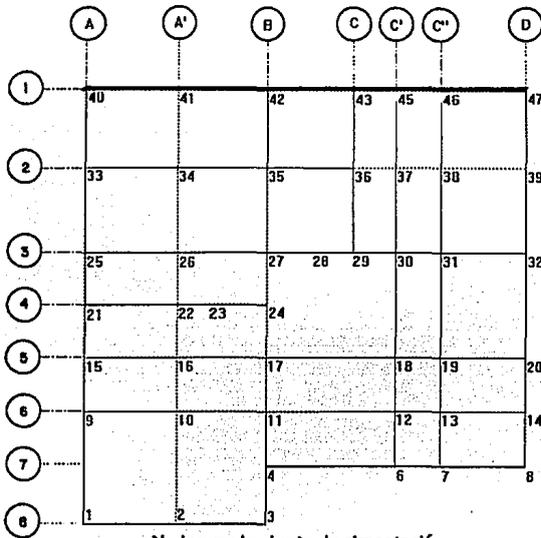


FIG. 29. EJE-I COMPARACION DE LAS REACCIONES SOBRE LA CIMENTACION EN T/m A MEDIDA QUE LA RIGIDEZ DEL TERRENO AUMENTA



Nudos en la planta de cimentación

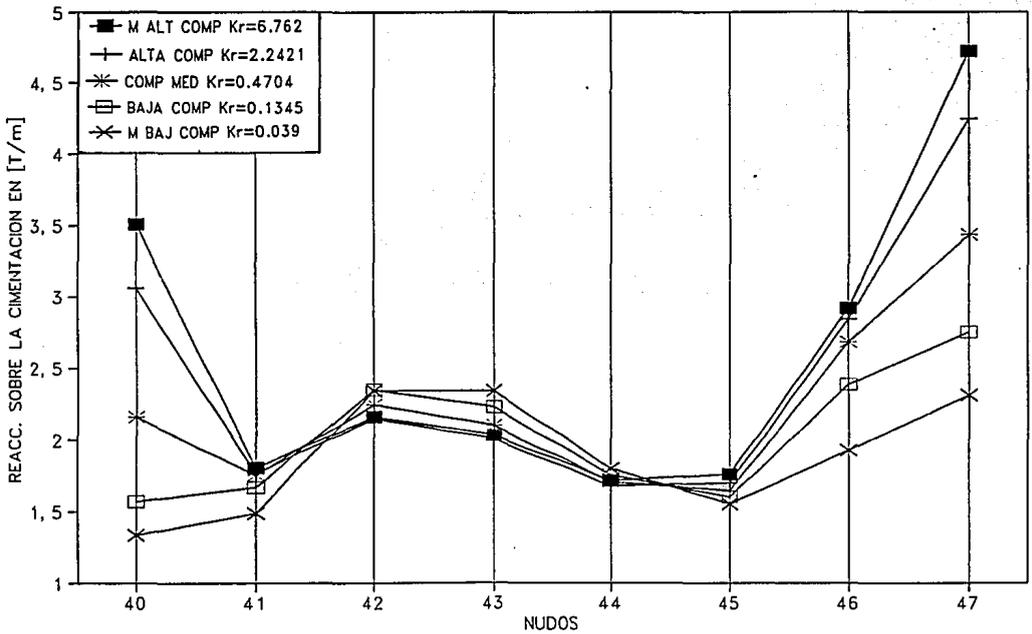


FIG.29' INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LAS REACCIONES DEL TERRENO SOBRE LA CONTRATRABE MAS RIGIDA DE LA CIMENTACION (EJE 1)

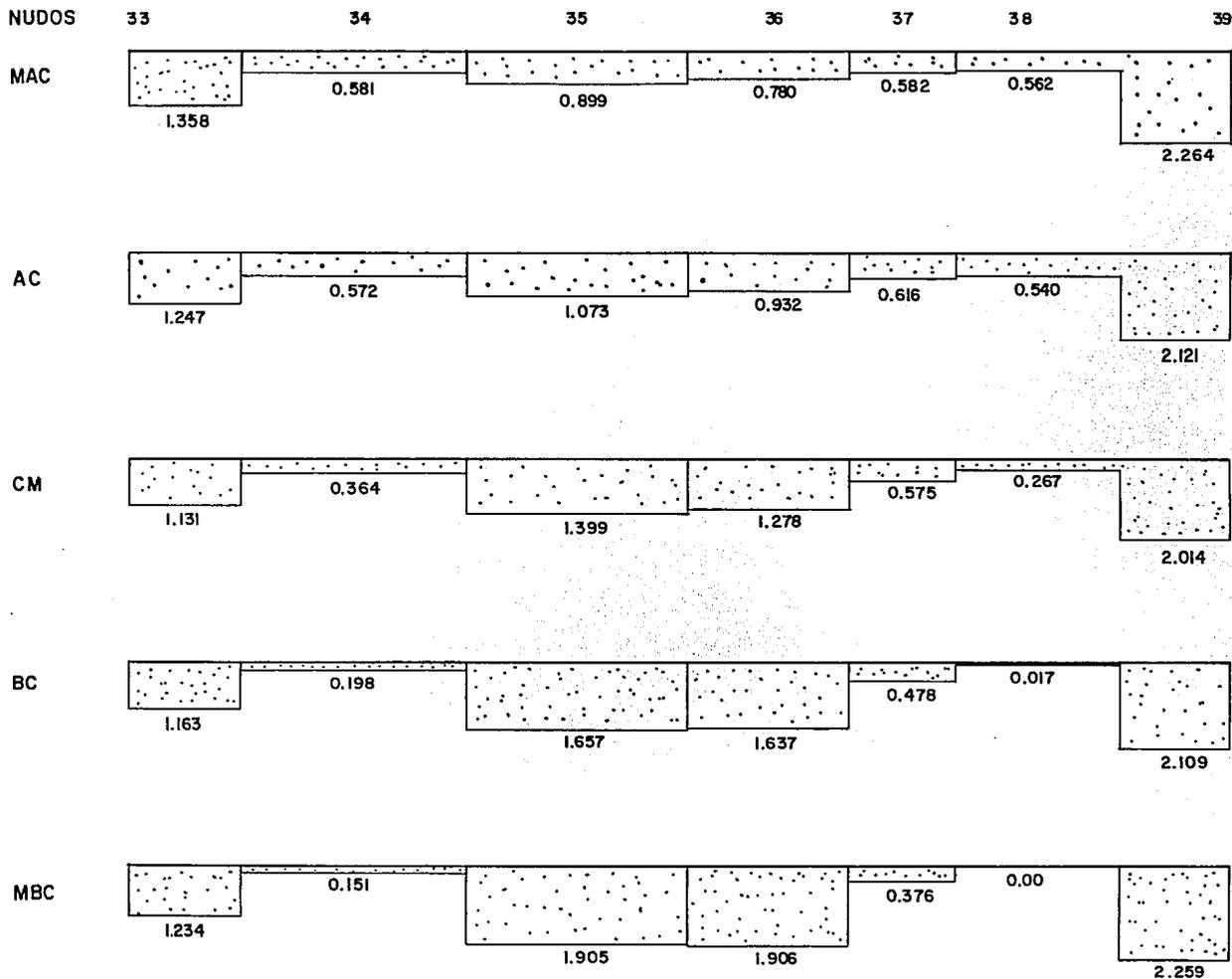


FIG. 30. EJE-2 COMPARACION DE LAS REACCIONES SOBRE LA CIMENTACION EN T/m A MEDIDA QUE LA RIGIDEZ DEL TERRENO AUMENTA

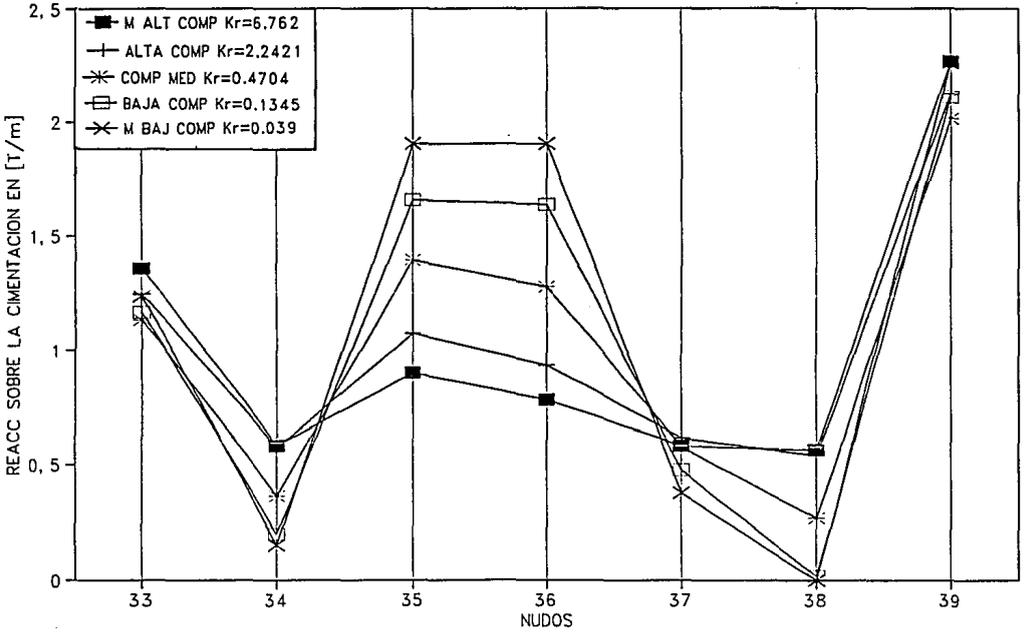
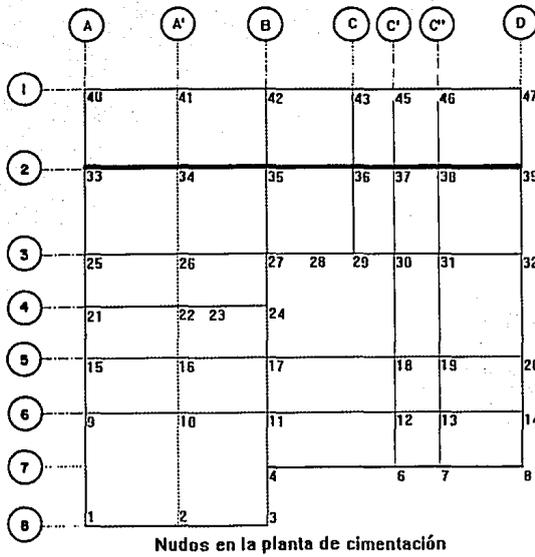


FIG.30' INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LAS REACCIONES DEL TERRENO SOBRE EL CENTRO DE DOS TABLEROS DE LA LOSA DE CIMENTACION (EJE 2)

NUDOS

25

26

27

28

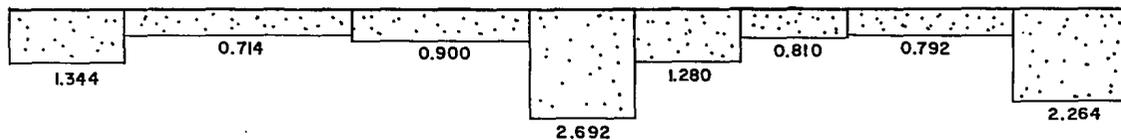
29

30

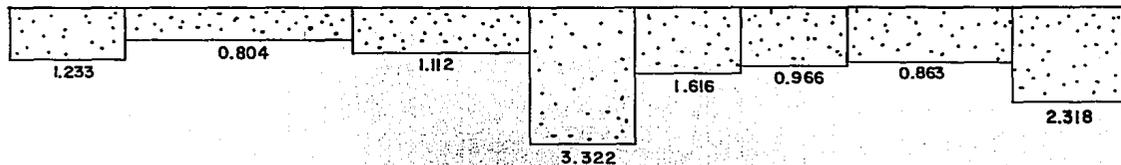
31

32

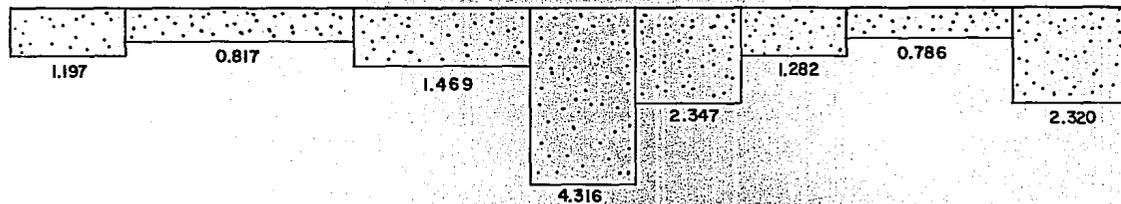
MAC



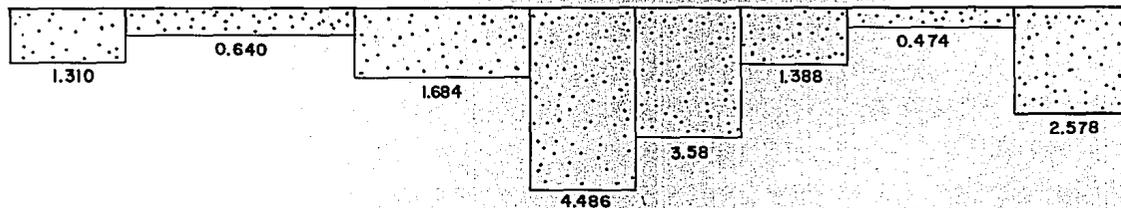
AC



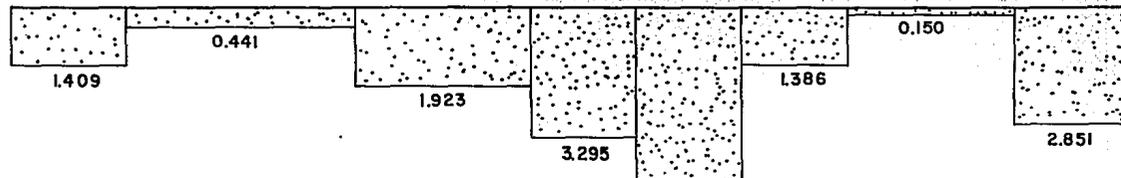
CM



BC



MBC



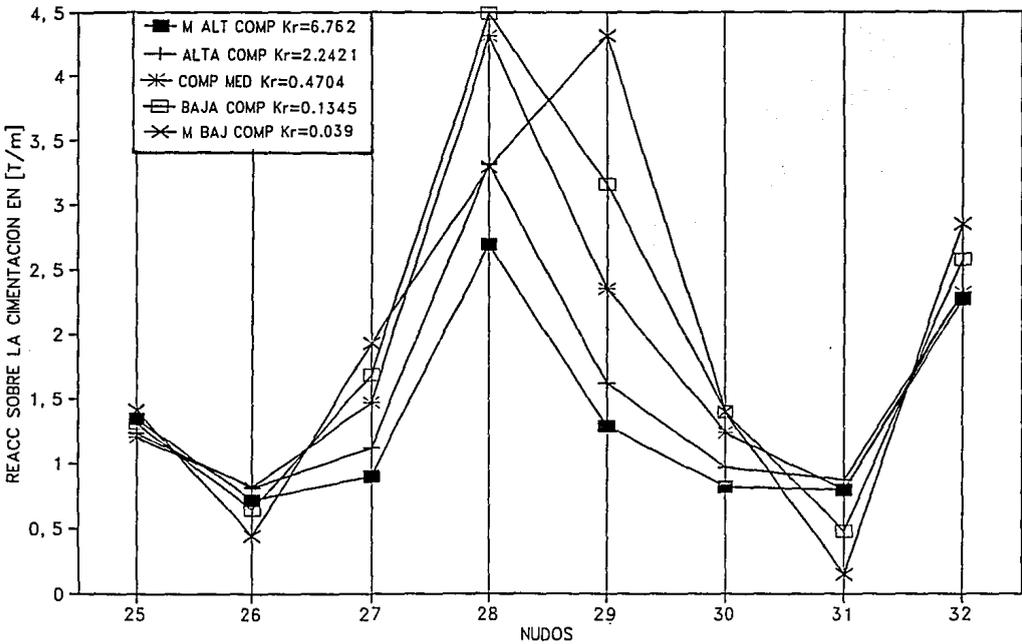
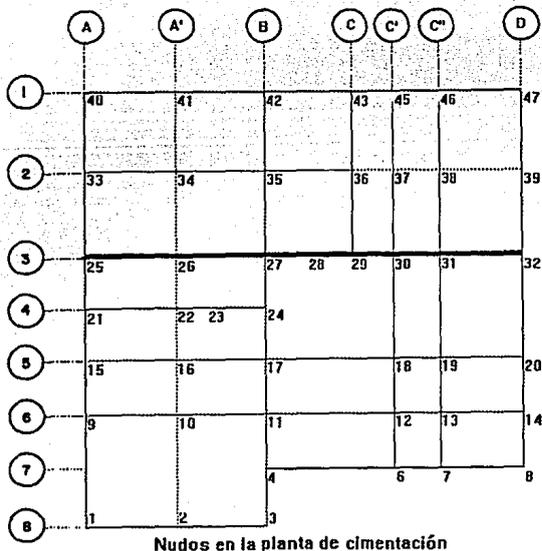


FIG. 31' INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LAS REACCIONES DEL TERRENO SOBRE UNA CONTRATRABE DE CIMENTACION (EJE 3)

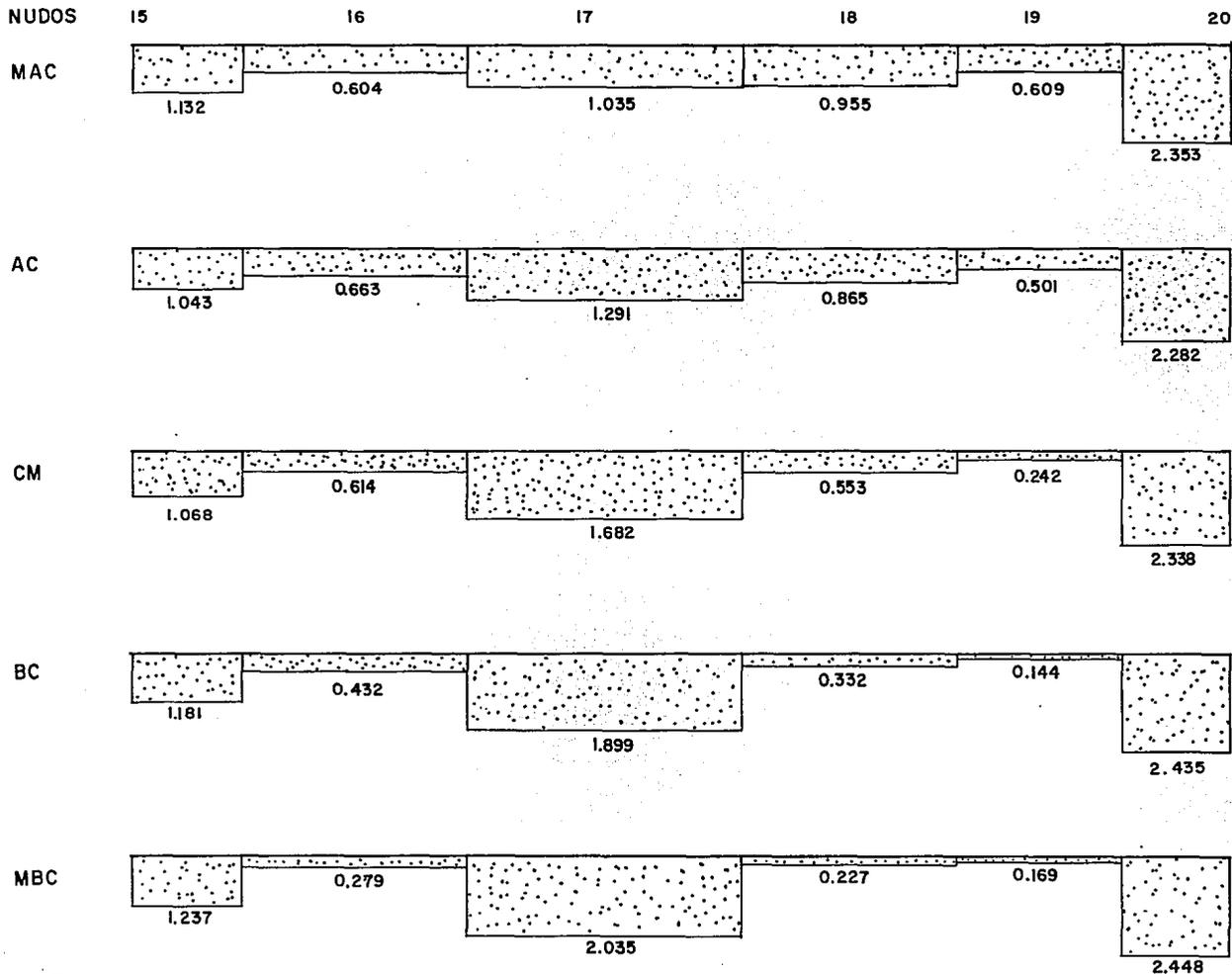
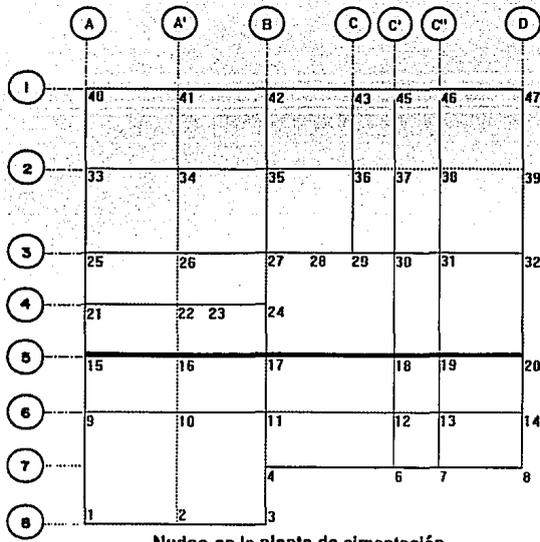


FIG. 32. EJE-5. COMPARACION DE LAS REACCIONES SOBRE LA CIMENTACION EN T/m A MEDIDA QUE LA RIGIDEZ DEL TERRENO AUMENTA



Nodos en la planta de cimentación

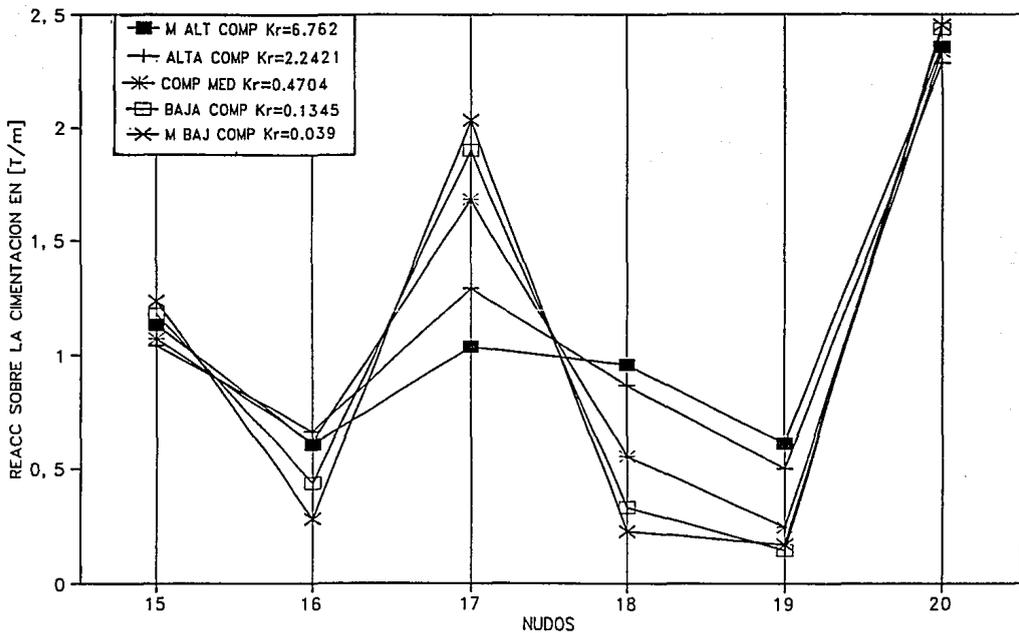


FIG.32' INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LAS REACCIONES DEL TERRENO SOBRE LA LOSA DE CIMENTACION (EJE 5)

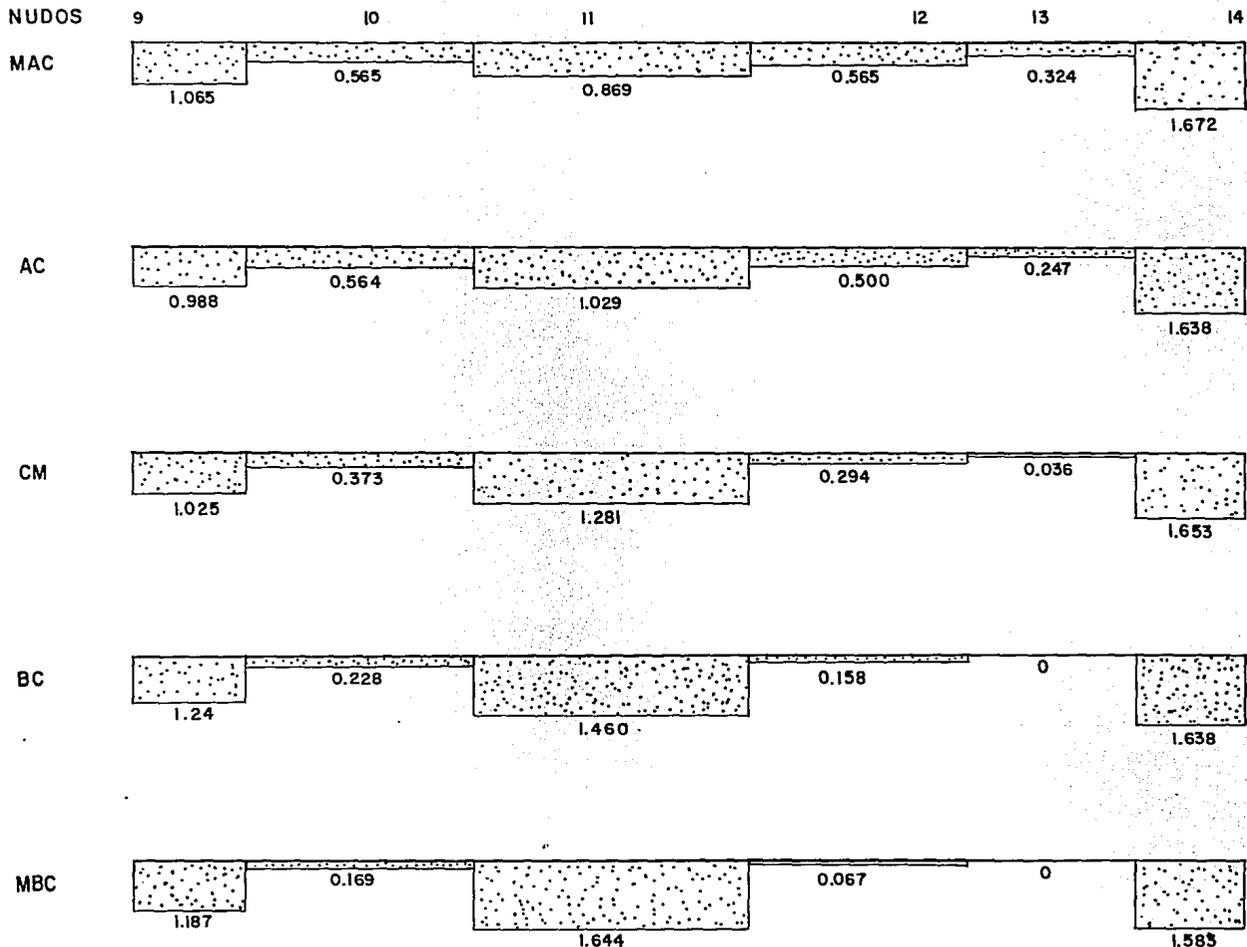


FIG.33. EJE-6 COMPARACION DE LAS REACCIONES SOBRE LA CIMENTACION EN T/m A MEDIDA QUE LA RIGIDEZ DEL TERRENO AUMENTA

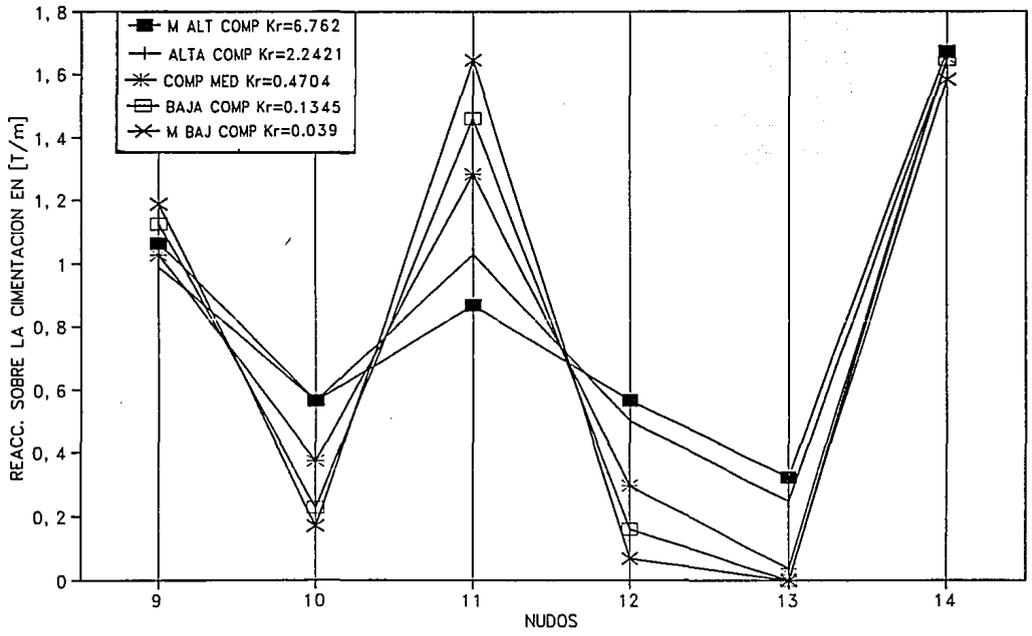
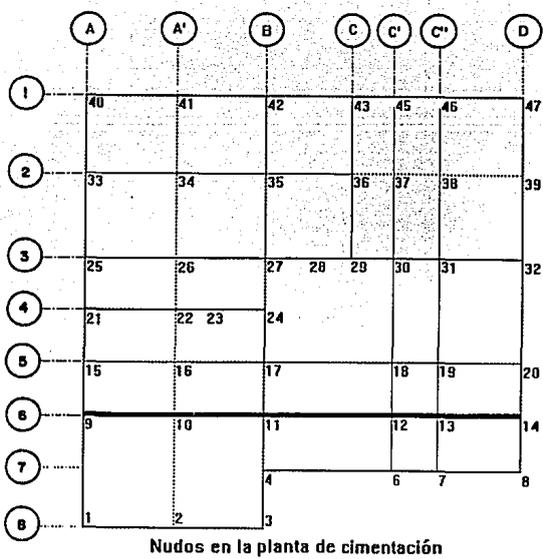


FIG.33' INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LAS REACCIONES DEL TERRENO SOBRE LA LOSA DE CIMENTACION (EJE 6)

VI.1.c.MOMENTOS FLEXIONANTES EN LOS NUDOS DE LAS RETICULAS DE CIMENTACION

Según las propiedades de deformación de los terrenos utilizados en esta tesis, cuando el subsuelo pasa de ser de Muy Alta Compresibilidad (MAC) a Alta Compresibilidad (AC), la rigidez del suelo de apoyo de AC es 69% mayor que la del de MAC. Así, al pasar de AC a Compresibilidad Media (CM), la rigidez aumenta 79.6%, al pasar de CM a Baja Compresibilidad (BC), el aumento es de 71.9% y al cambiar de BC a Muy Baja Compresibilidad (MBC), la rigidez se incrementa 70.4%.

Las representaciones gráficas y los valores numéricos de los momentos flexionantes obtenidos en los nudos de los EJES 1, 2, 3, 5 y 6, de las reticulas de cimentación analizadas, al cambiar el terreno de MAC a AC, de AC a CM, de CM a BC y de BC a MBC, así como la normalización de los momentos flexionantes en $[T\ m/m]$, obtenidos a través de los análisis de Interacción Estática Suelo-Estructura (IESE) y la comparación entre éstos y los momentos flexionantes obtenidos mediante un análisis convencional de la losa de cimentación, es decir, considerando que el terreno responde contra la subestructura con una reacción uniforme, se pueden consultar en las figuras 34 a 39.

En las figs. 34.a, 35.a, 36.a, 37.a y 38.a, se puede observar que los momentos flexionantes sobre la cimentación disminuyen considerablemente a medida que la rigidez relativa estructura-suelo disminuye, lo cual coincide con los resultados reportados por Sommer (1965) y Meyerhof (1979), obtenidos al estudiar la variación de los elementos mecánicos obtenidos de análisis de interacción suelo-estructura en función de la rigidez relativa cimentación-suelo.

En el EJE 1, que corresponde al elemento más rígido, se puede observar que cuando el terreno cambia de MAC a AC, las mayores disminuciones en los momentos flexionantes se presentan al centro de los claros, siendo del orden del 25% en el nudo 41 y del 20% en el nudo 45. La misma situación se puede comentar cuando los terrenos

pasan de ser de AC a CM, de CM a BC y de BC a MBC, en la que la reducción de los momentos flexionantes en los nudos 41 y 45, son del orden de 57 y 48%, 72 y 56%, y de 64 y 60%, respectivamente.

En la fig. 34.b se aprecia como los momentos en los nudos 41 y 45 del EJE 1 (contratrabe de cimentación), van disminuyendo conforme la rigidez relativa estructura-suelo se reduce, lo que nuevamente concuerda con lo reportado por Sommer y Meyerhof.

En la fig. 35.b, nudos 34 y 38 del EJE 2 (losa de cimentación), se observa la misma tendencia, aunque después de producirse un aumento cuando el terreno cambia de muy alta compresibilidad a alta compresibilidad.

También en el EJE 2, bajo las mismas circunstancias de cambio en la rigidez del terreno de cimentación, se puede observar nuevamente, que los mayores cambios en los momentos flexionantes se presentan al centro de las losas (nudos 34 y 38), aumentando cuando el subsuelo pasa de ser de MAC a AC (57 y 90%, respectivamente) y disminuyendo y hasta cambiando de signo en el nudo 38, para las demás condiciones de K_p (fig. 35.a y 35.b).

Además, en los terrenos rígidos y muy rígidos, al comparar los valores de los momentos flexionantes al centro de los claros del EJE 2 (nudos 34 y 38), con los de sus extremos (nudos 35 y 36), se advierte que los momentos flexionantes al centro de los claros son mucho menores y de magnitud casi nula, lo que permite concluir que el centro de las losas prácticamente no trabaja cuando la rigidez relativa estructura-suelo es menor que 0.13, para el caso analizado.

En las figs. 35.c, 36.b, 37.b y 38.b se pueden apreciar las diferencias en los momentos flexionantes obtenidos a través de análisis tridimensional de interacción estática suelo-estructura y los calculados mediante un análisis convencional.

Aquí se puede distinguir una importante reducción en los valores de los momentos obtenidos con IESE, que va, en términos generales, desde

el 30 hasta el 100%, sobre todo al centro de las losas (nudo 18 en el EJE 5 y nudo 10 en el EJE 6, figs. 37.b y 38.b), en los que las disminuciones en los valores de los momentos flexionantes van desde el 70 hasta el 100%, presentándose mayores reducciones a medida que la rigidez relativa estructura-suelo disminuye.

También se pueden notar cambios de signo en los momentos flexionantes obtenidos por ambos procedimientos en los nudos 29 y 17 de los EJES 3 Y 5, respectivamente (figs. 36.b y 37.b)

Sommer comenta que si solamente se toma en cuenta la rigidez de la losa de cimentación, despreciando la rigidez de la superestructura, el diseño resultará mayor que el necesario.

Evidentemente, como ha quedado manifiesto en los resultados de este trabajo, si ni siquiera se toma en cuenta la rigidez de la cimentación para el diseño de la misma, como sucede con el análisis convencional, la situación resulta aún peor.

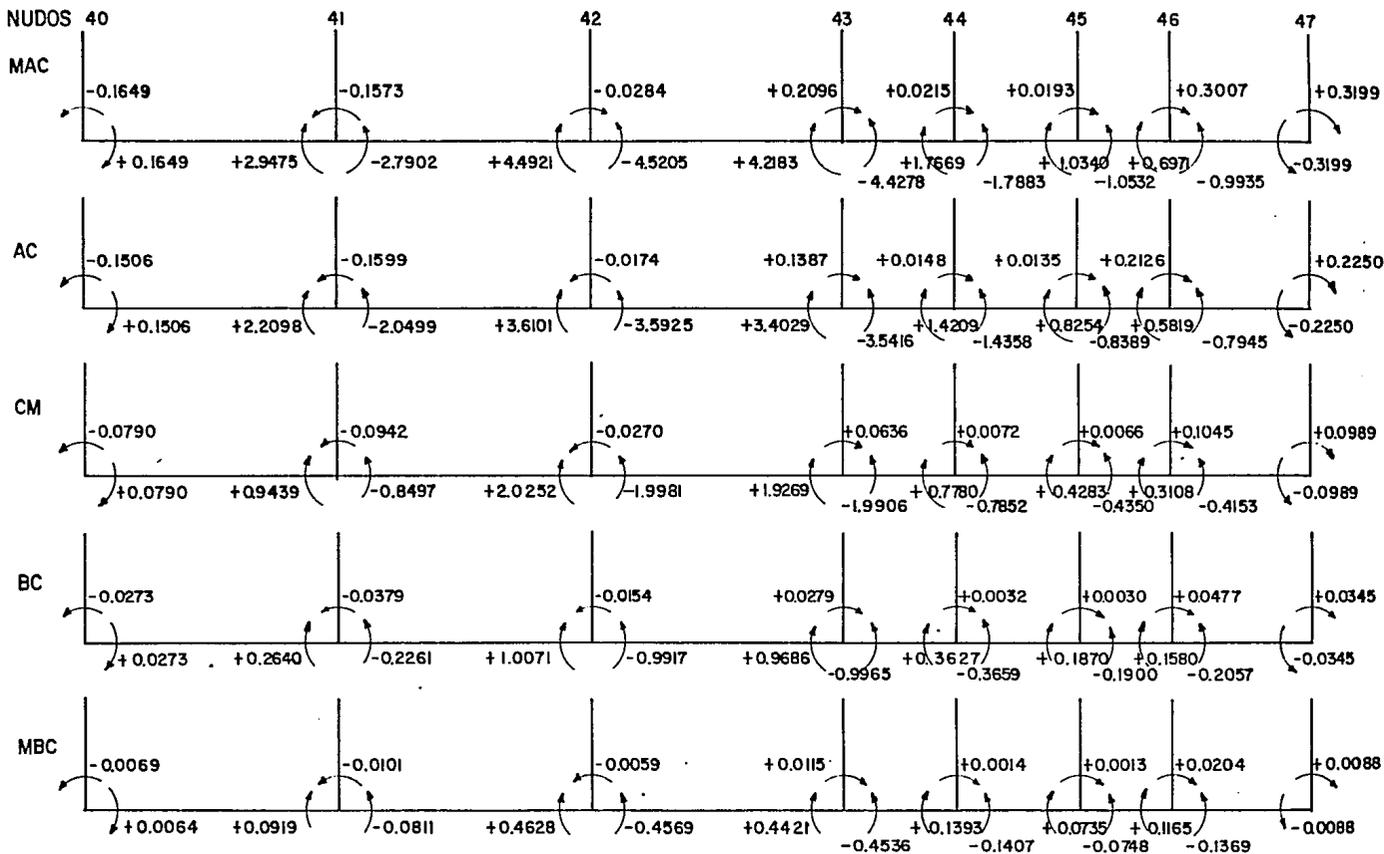
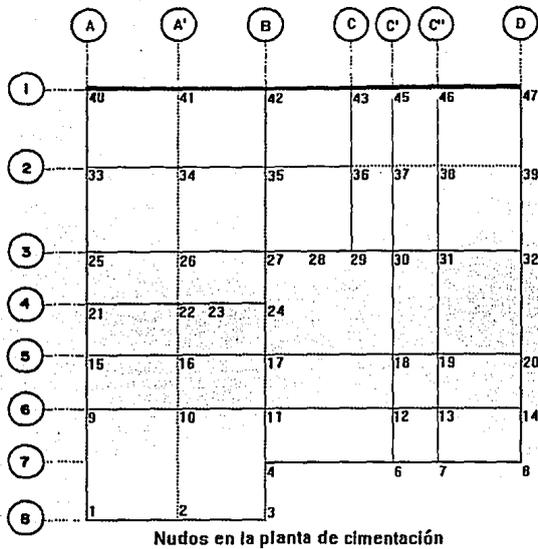


FIG. 34. EJE-1 COMPARACION DE MOMENTOS EN $[Tm]$ EN LA SUBESTRUCTURA A MEDIDA QUE LA RIGIDEZ DEL TERRENO DE CIMENTACION AUMENTA (BARRA SOBRE NUDO)



Nodos en la planta de cimentación

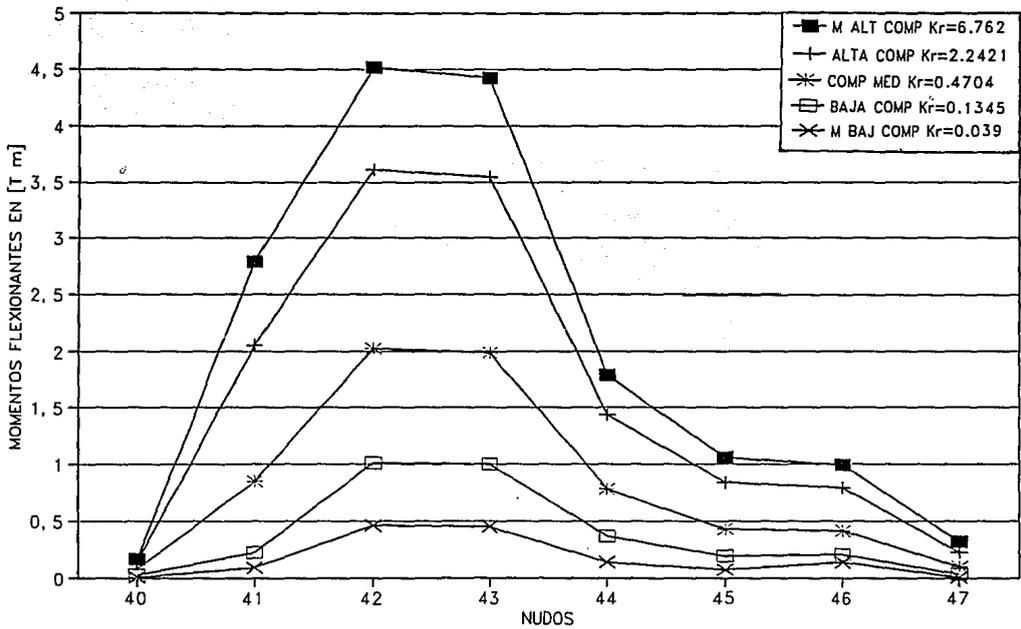


FIG. 34.a INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LOS MOMENTOS FLEXIONANTES QUE SE PRESENTAN EN EL EJE 1 DE LA CIMENTACION (CONTRATRABE)

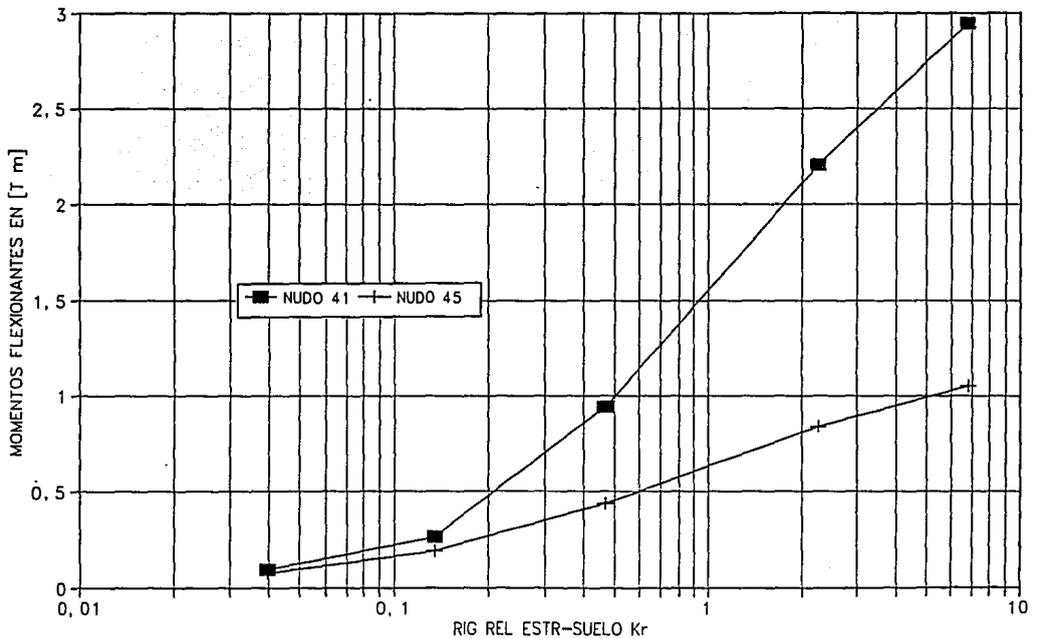
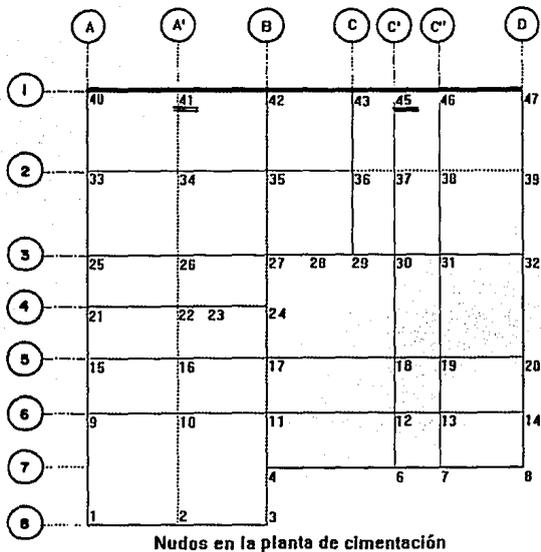


FIG. 34.b INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LOS MOMENTOS FLEXIONANTES QUE SE PRESENTAN EN LOS NUDOS 41 Y 45 DE UNA CONTRATRABE DE CIMENTACION (EJE 1)

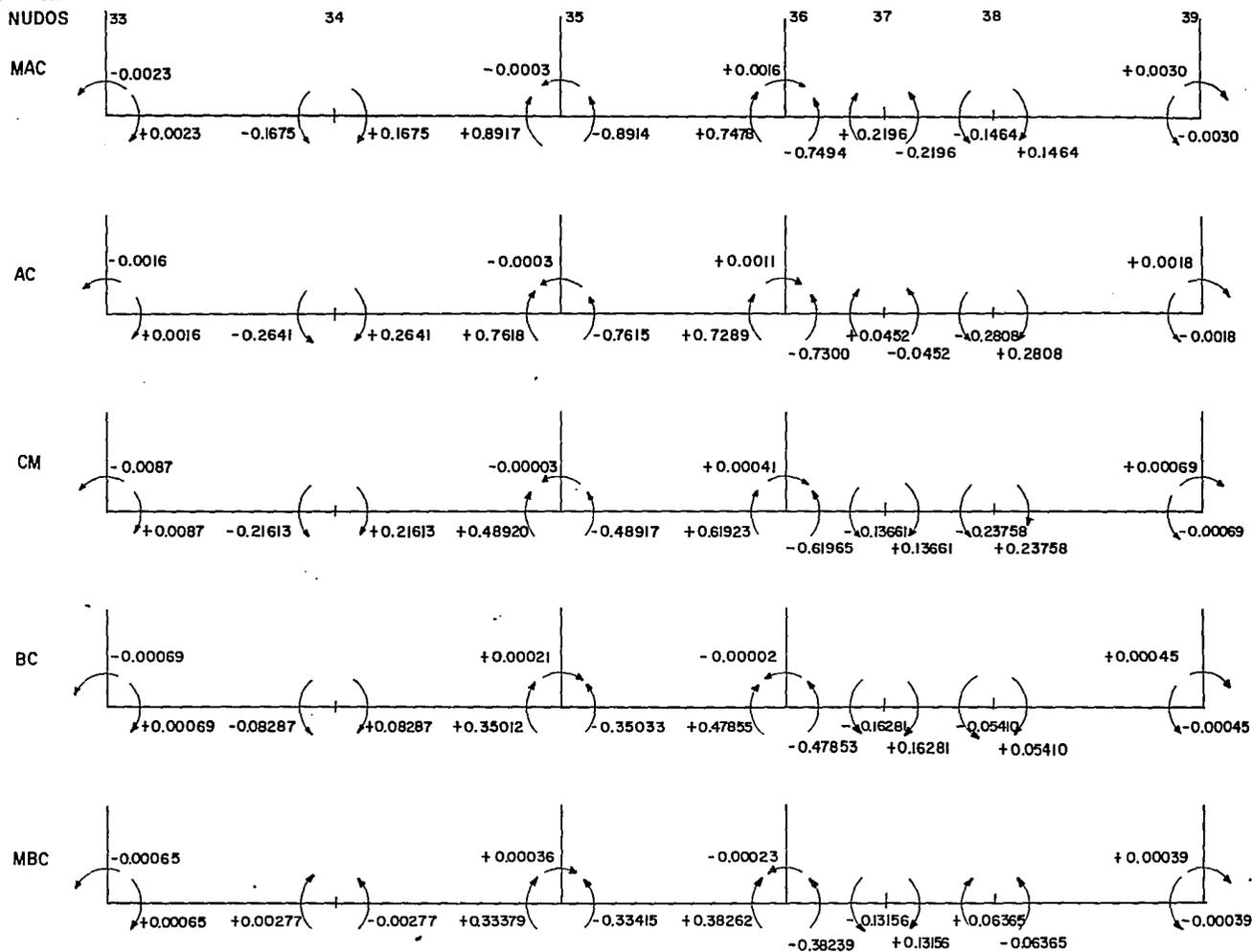


FIG. 35. EJE-2. COMPARACION DE MOMENTOS EN [T.m] EN LA SUBESTRUCTURA A MEDIDA QUE LA RIGIDEZ DEL TERRENO DE CIMENTACION AUMENTA (BARRA SOBRE NUDO)

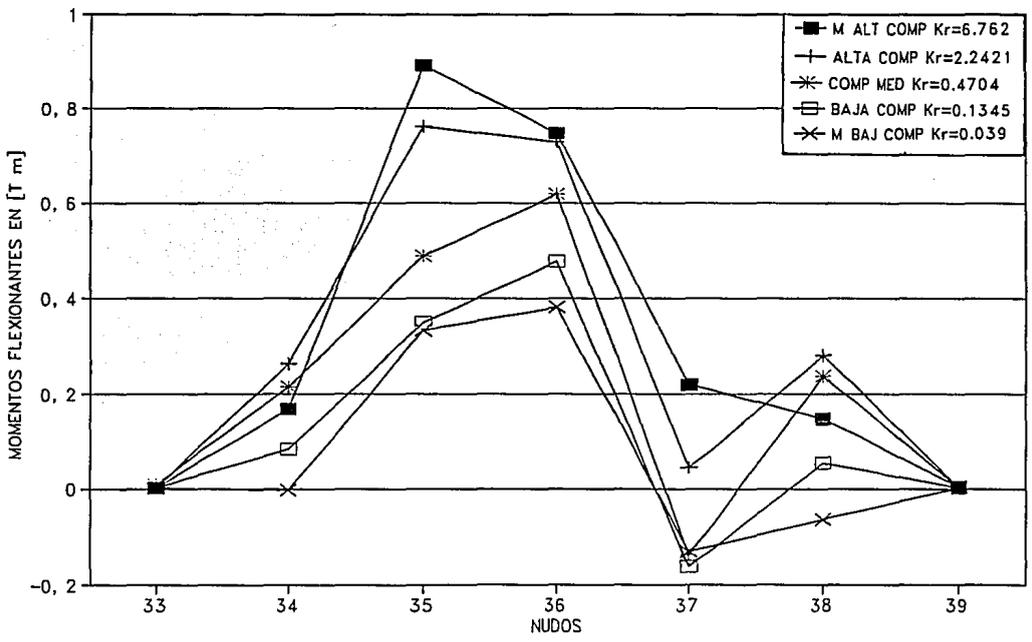
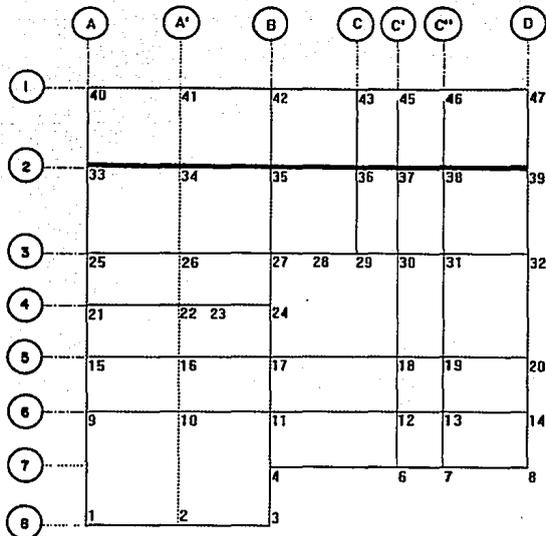
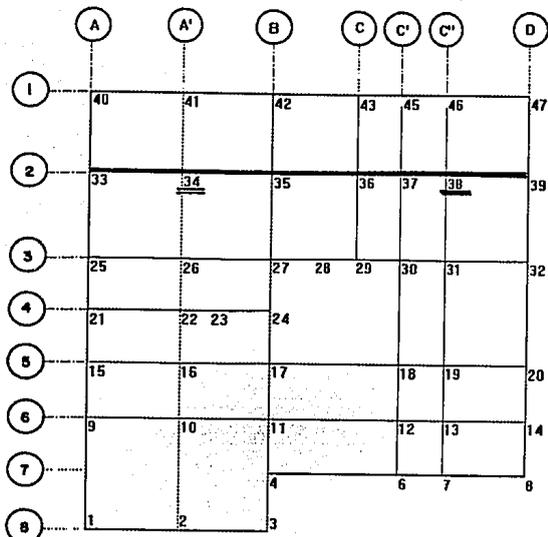


FIG. 35.a INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LOS MOMENTOS FLEXIONANTES QUE SE PRESENTAN AL CENTRO DE TRES TABLEROS DE LA LOSA DE CIMENTACION (EJE 2)



Nudos en la planta de cimentación

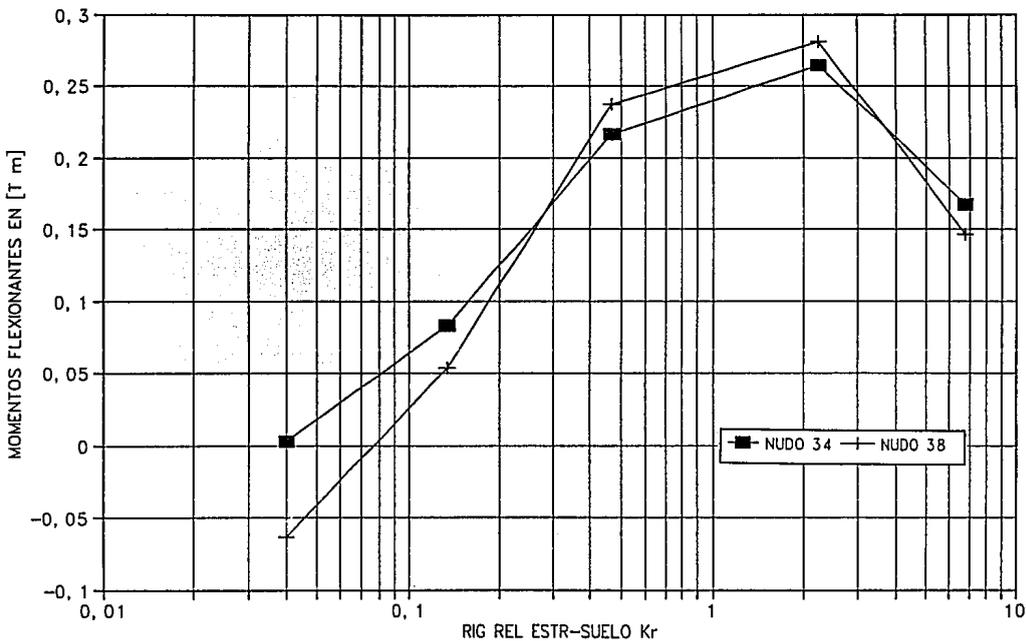
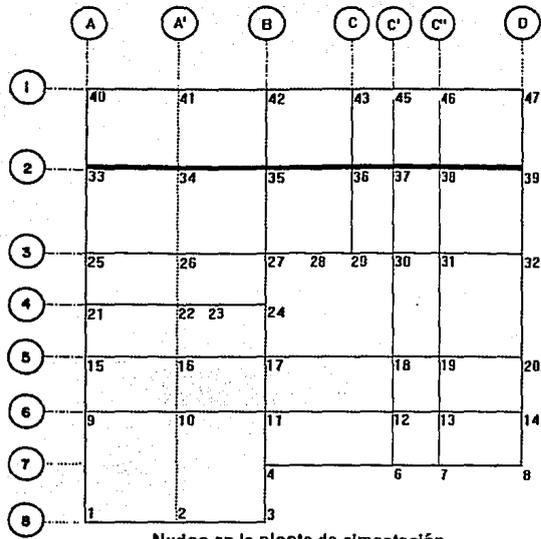


FIG.35.b. INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LOS MOMENTOS FLEXIONANTES QUE SE PRESENTAN EN LOS CENTROS DE DOS TABLEROS DE LA LOSA DE CIMENTACION (NUDOS 34 Y 38 DEL EJE 2)



Nudos en la planta de cimentación

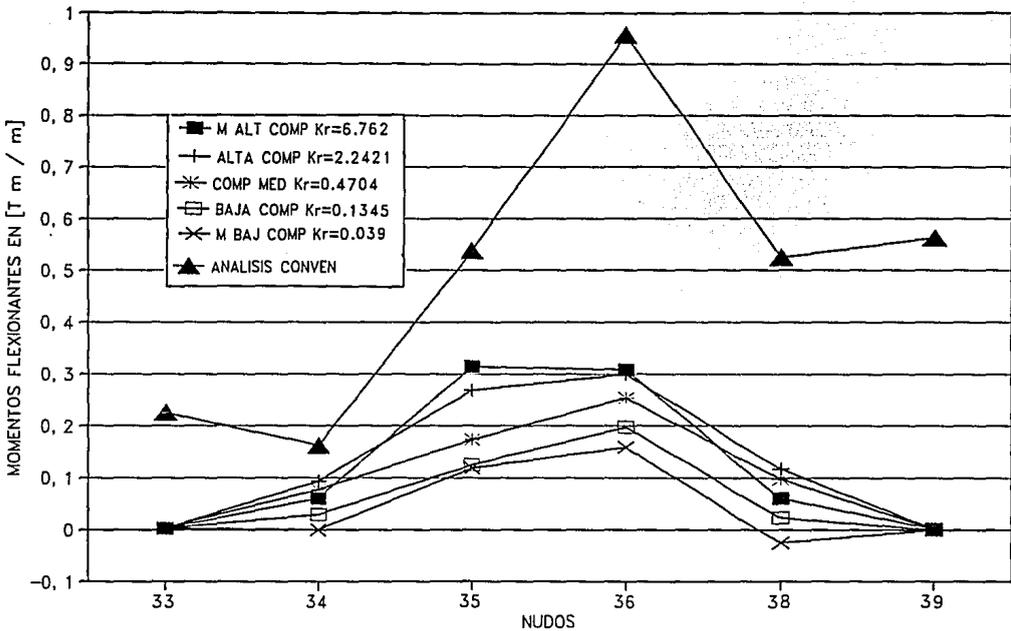


FIG.35.c COMPARACION ENTRE LOS MOMENTOS FLEXIONANTES OBTENIDOS A TRAVES DE INTERACCION ESTADICA SUELO-ESTRUCTURA Y ANALISIS CONVENCIONAL EN EL EJE 2 DE LA CIMENTACION

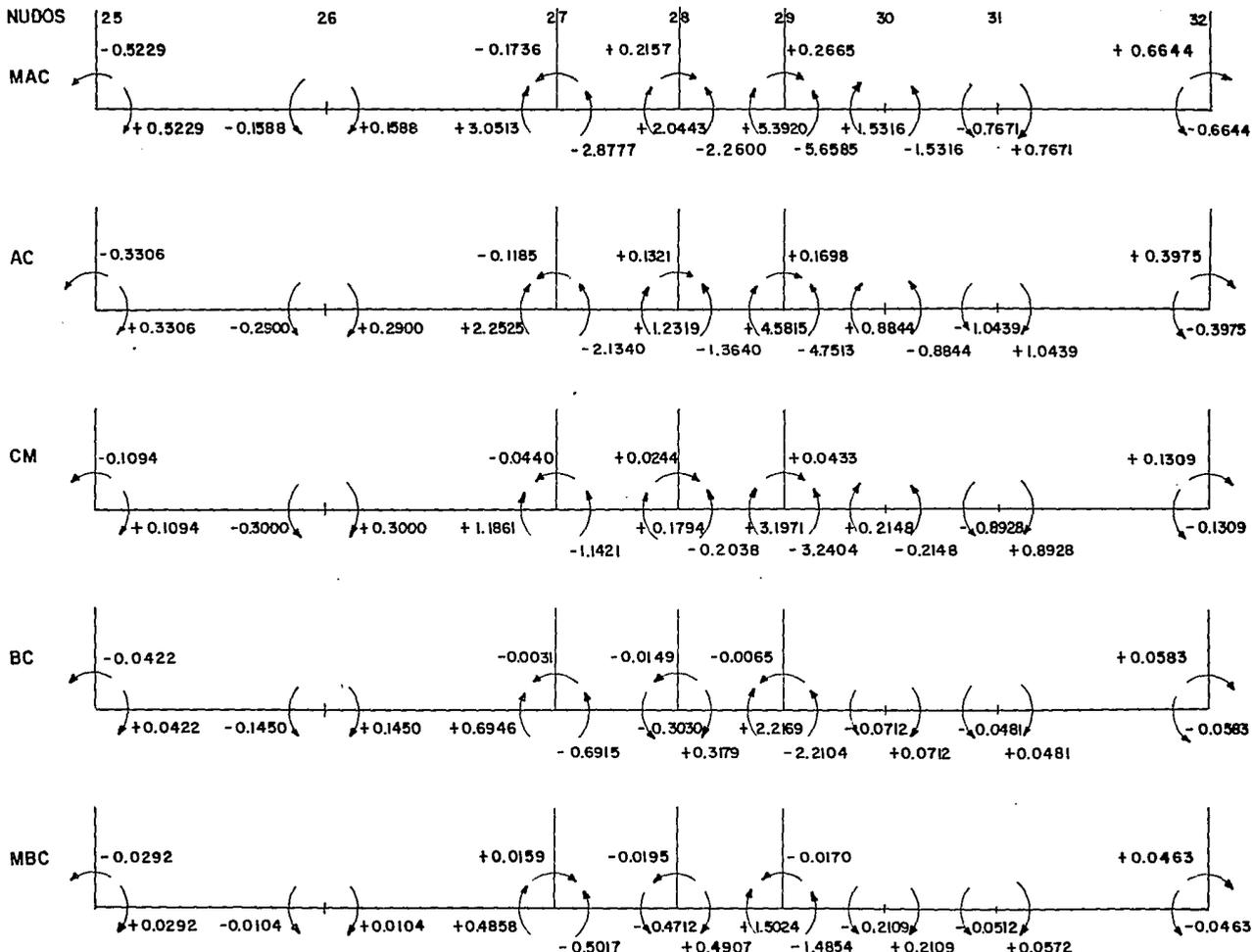


FIG. 36. EJE-3 COMPARACION DE MOMENTOS EN t m EN LA SUBESTRUCTURA A MEDIDA QUE LA RIGIDEZ DEL TERRENO DE CIMENTACION AUMENTA (BARRA SOBRE NUDO)

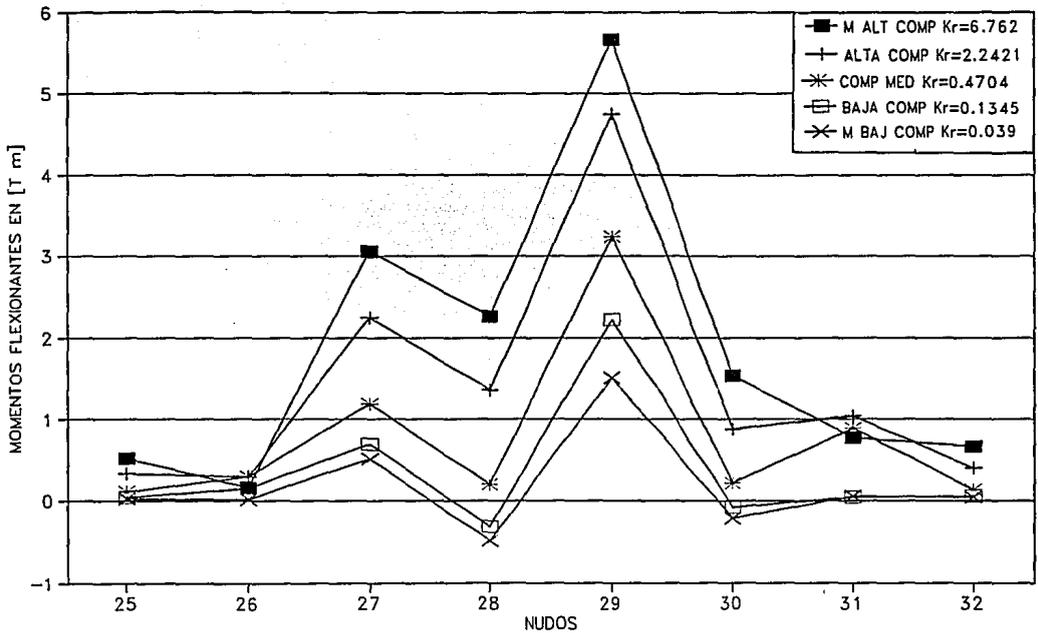
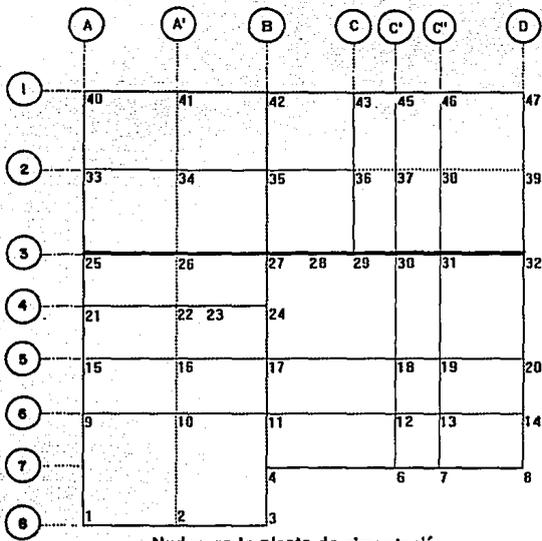


FIG. 36.a INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LOS MOMENTOS FLEXIONANTES QUE SE PRESENTAN EN EL EJE 3 DE LA CIMENTACION (CONTRATRABE)

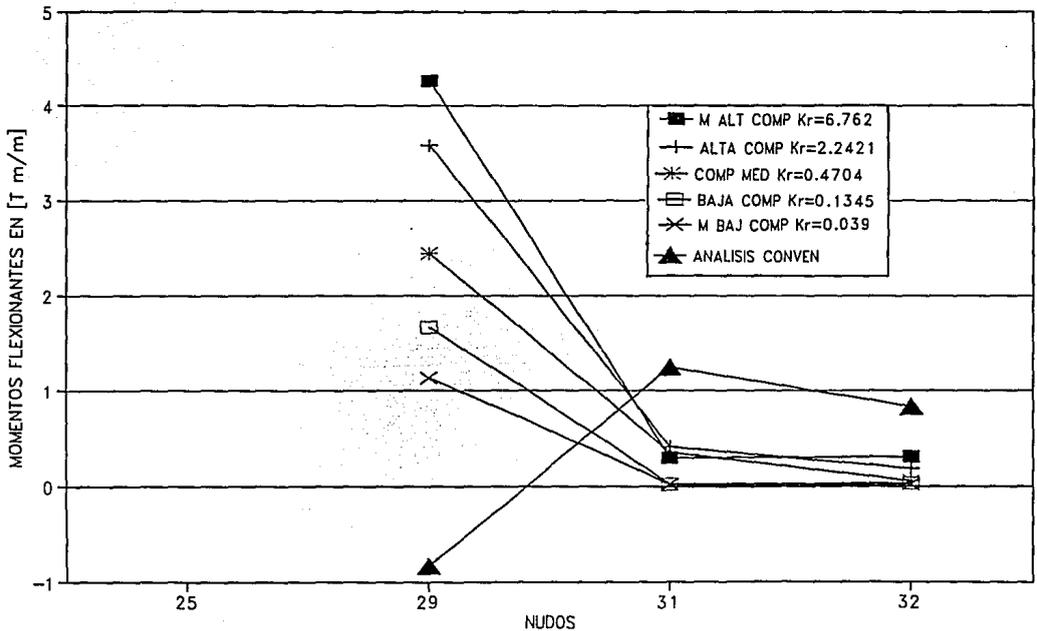
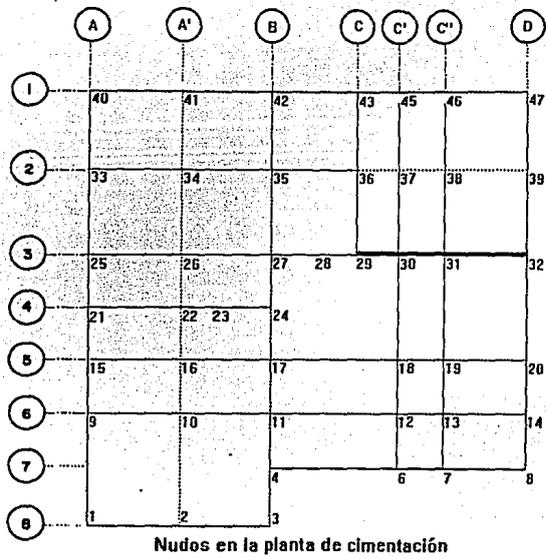


FIG. 36.b COMPARACION ENTRE LOS MOMENTOS FLEXIONANTES OBTENIDOS A TRAVES DE INTERACCION ESTATICA SUELO-ESTRUCTURA Y ANALISIS CONVENCIONAL EN EL EJE 3 DE LA CIMENTACION (CONTRATRABE)

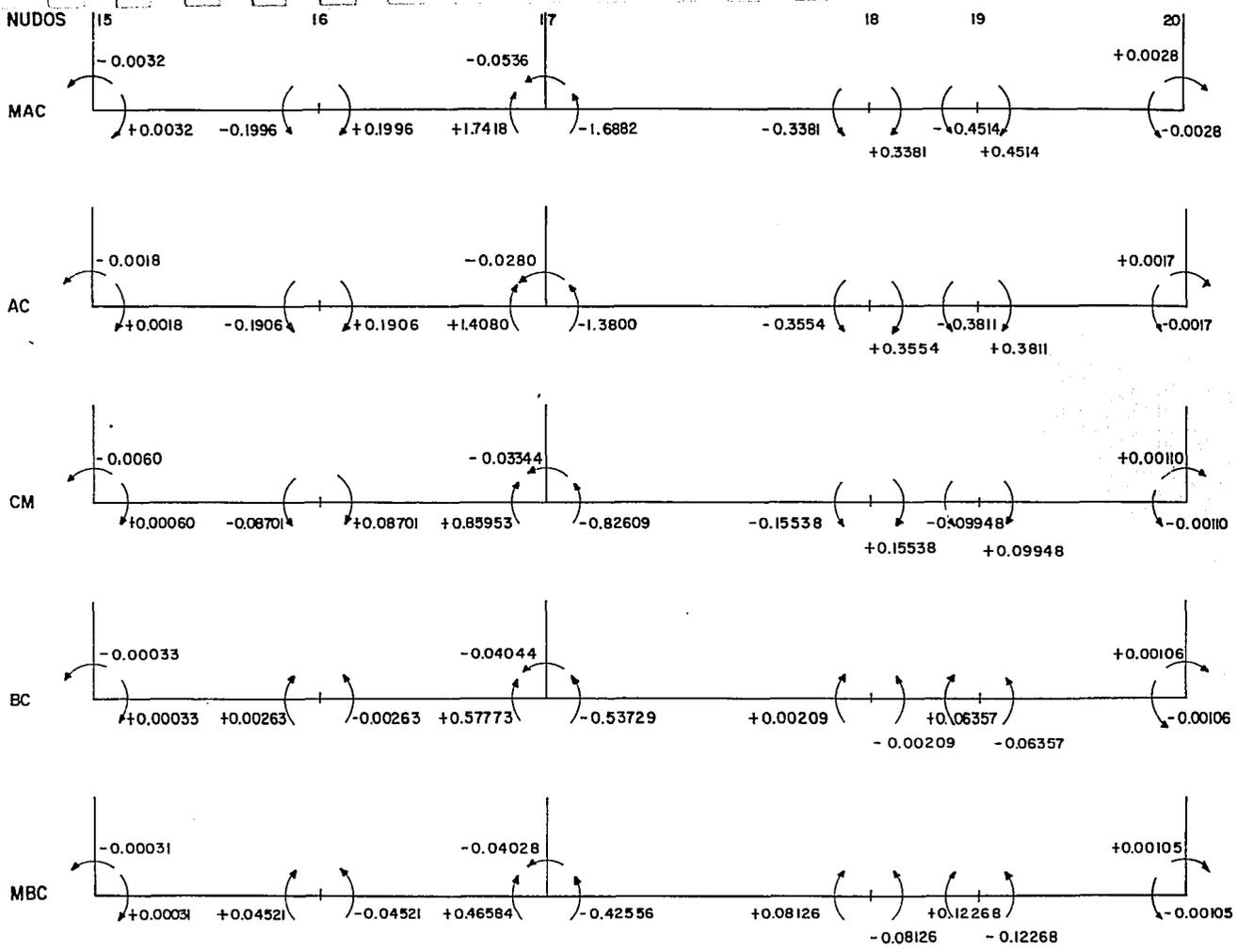


FIG. 37. EJE-5 COMPARACION DE MOMENTOS EN CT m EN LA SUBESTRUCTURA A MEDIDA QUE LA RIGIDEZ DEL TERRENO DE CIMENTACION AUMENTA (BARRA SOBRE NUDO)

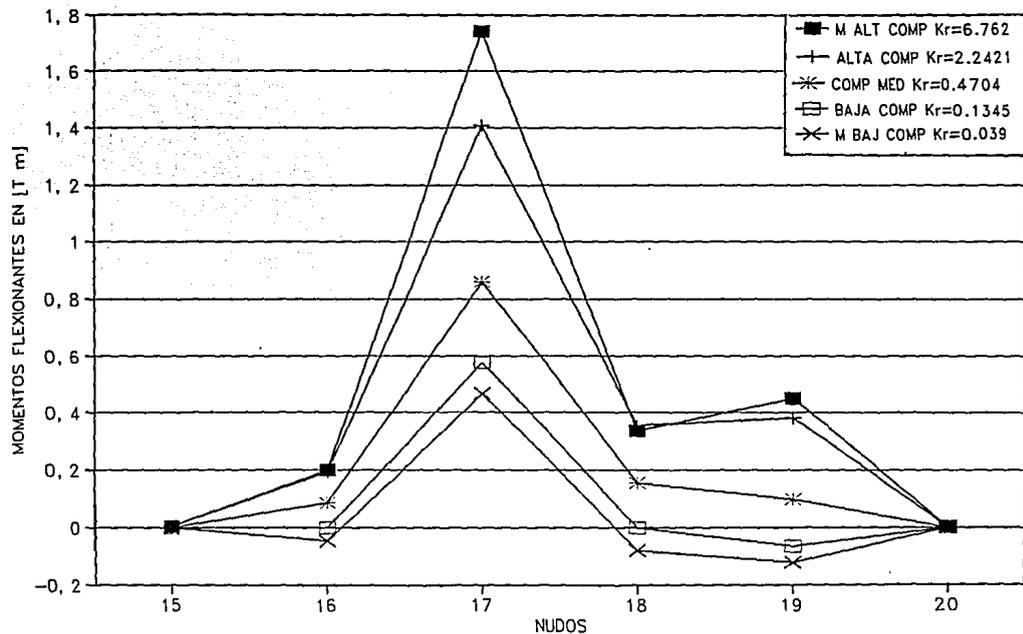
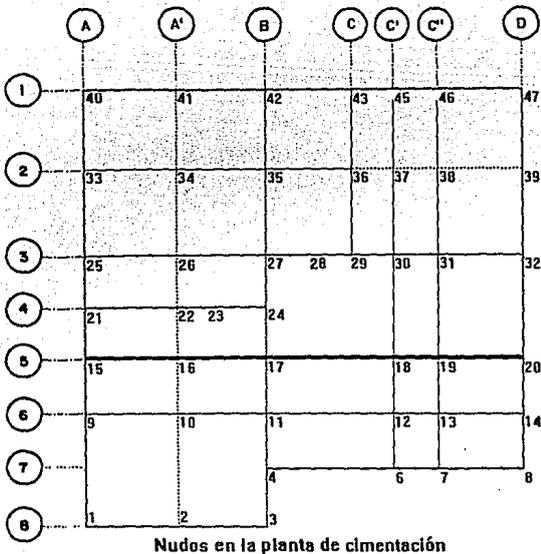


FIG. 37.a INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LOS MOMENTOS FLEXIONANTES QUE SE PRESENTAN EN EL EJE 5 DE LA CIMENTACION (LOSA)

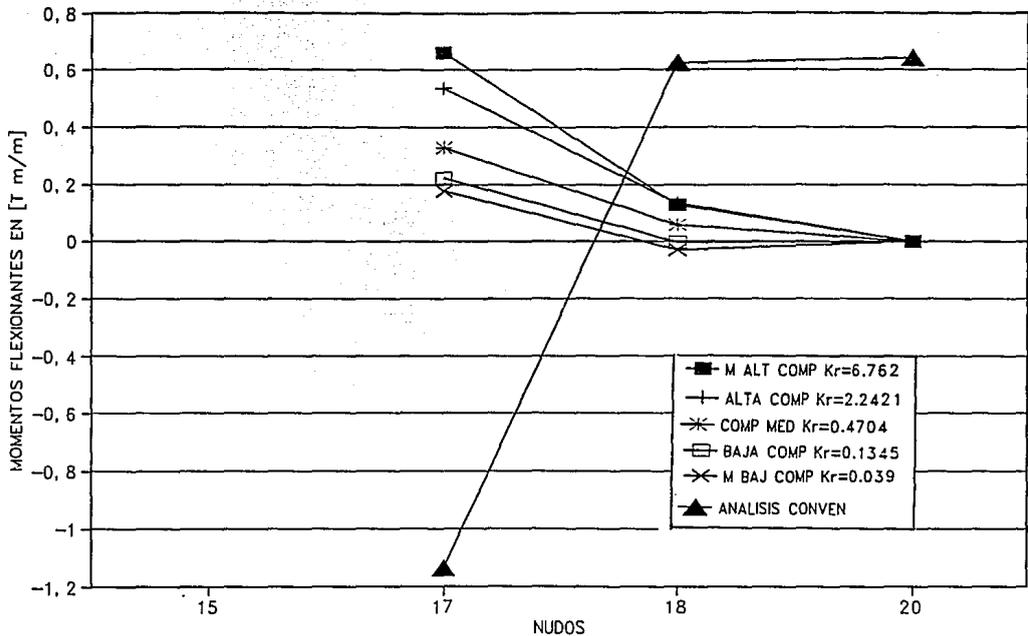
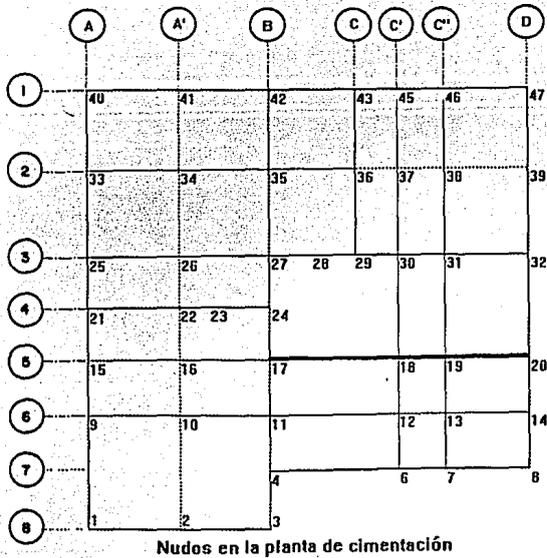


FIG.37.b COMPARACION ENTRE LOS MÓMENTOS FLEXIONANTES OBTENIDOS A TRAVÉS DE INTERACCIÓN ESTÁTICA SUELO-ESTRUCTURA Y ANÁLISIS CONVENCIONAL EN EL EJE 5 DE LA CIMENTACIÓN (LOSA)

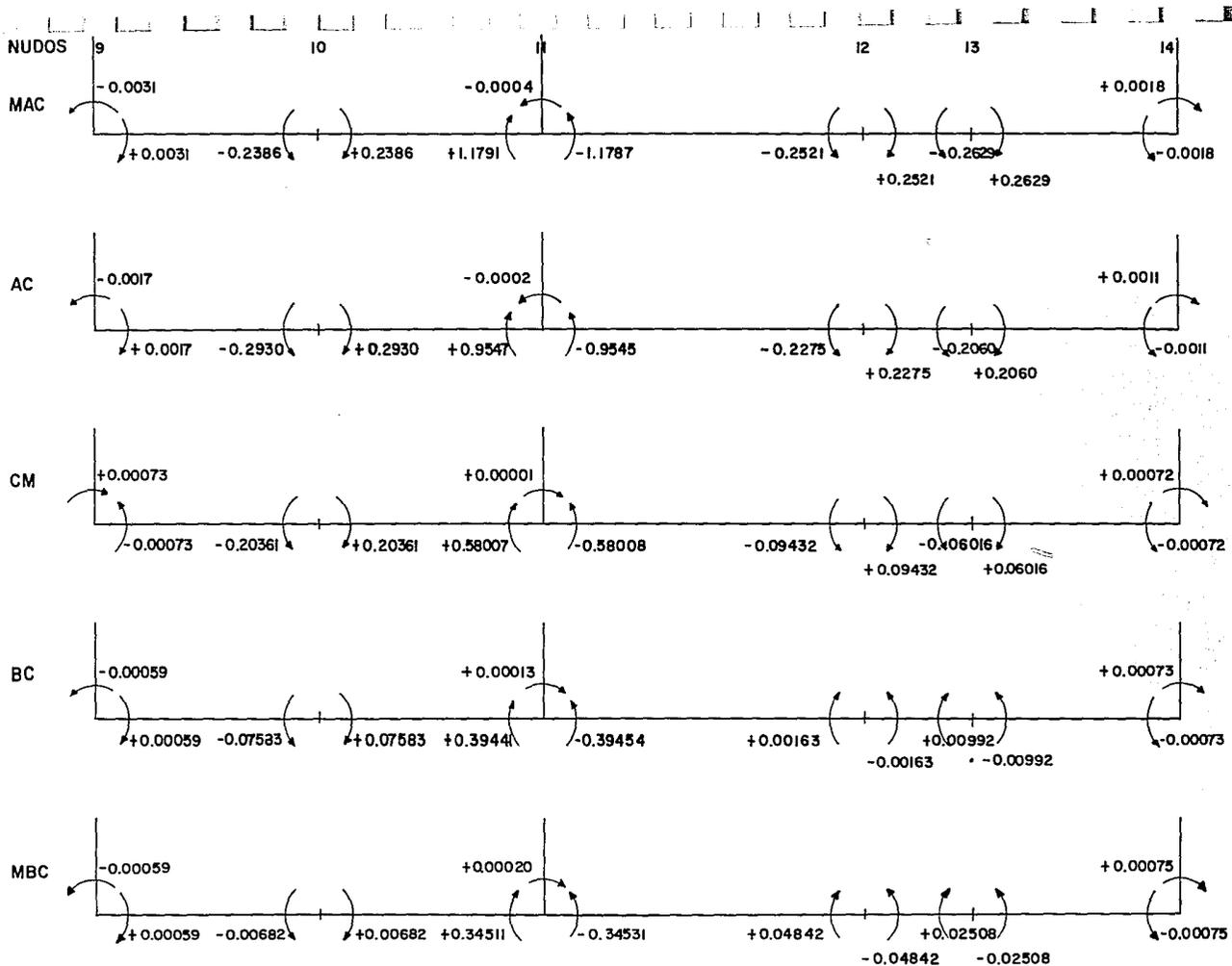
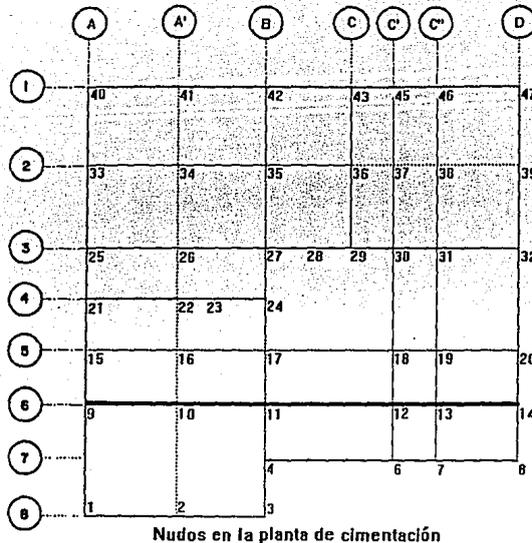


FIG. 38. EJE-6 COMPARACION DE MOMENTOS EN t m EN LA SUBESTRUCTURA A MEDIDA QUE LA RIGIDEZ DEL TIERRNO DE CIMENTACION AUMENTA (BARRA SOBRE NUDO)



Nudos en la planta de cimentación

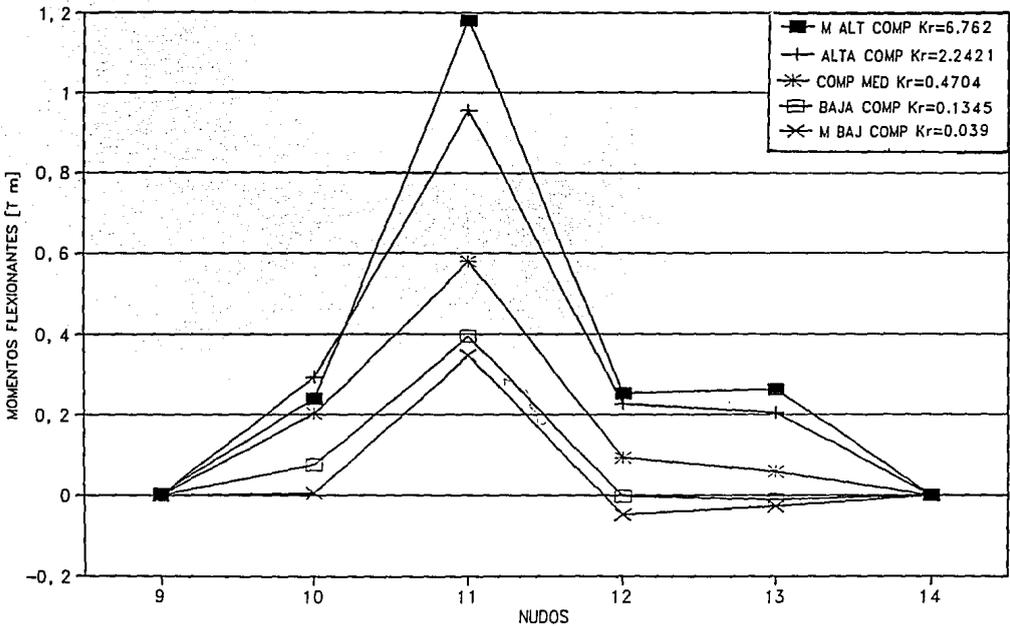


FIG.38.a INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ RELATIVA EN LOS MOMENTOS FLEXIONANTES QUE SE PRESENTAN EN EL EJE 6 DE LA CIMENTACION (LOSA)

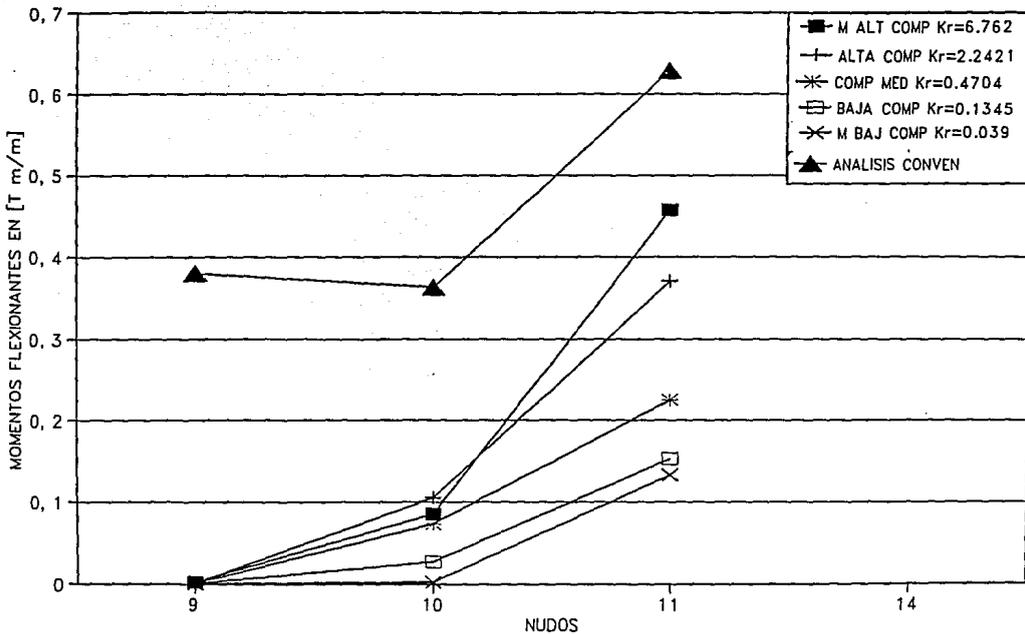
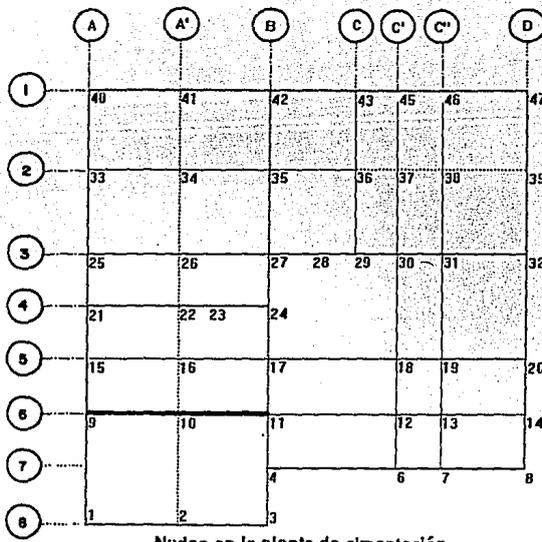


FIG. 38.b. COMPARACION ENTRE LOS MOMENTOS FLEXIONANTES OBTENIDOS A TRAVES DE INTERACCION ESTADICA SUELO-ESTRUCTURA Y ANALISIS CONVENCIONAL EN EL EJE 6 DE LA CIMENTACION (LOSA)

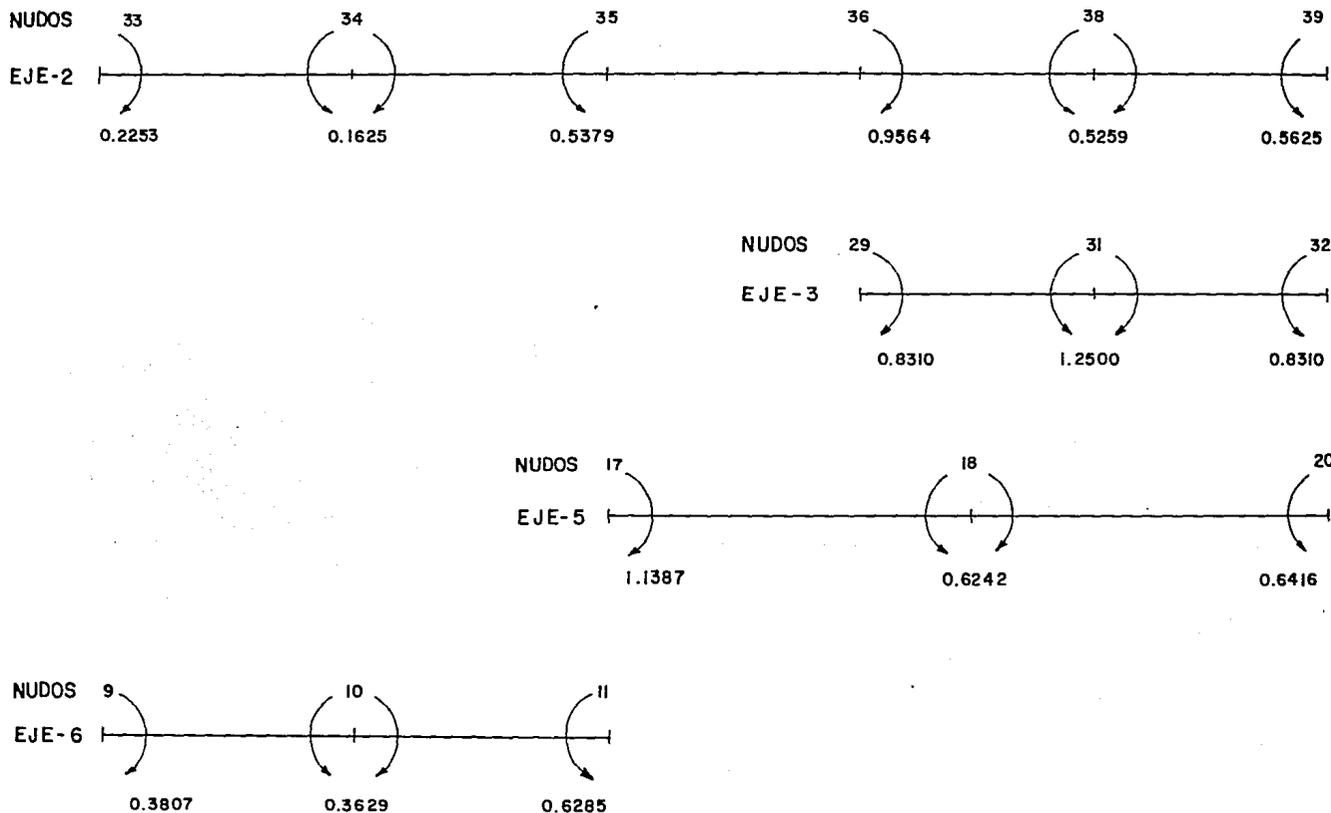


FIG. 39. MOMENTOS EN $[\text{Nm/m}]$ EN LA SUBESTRUCTURA OBTENIDOS MEDIANTE ANALISIS CONVENSIONAL EN LOS EJES 2,3,5 Y 6 (BARRA SOBRE NUDO)

VII. CONCLUSIONES

1.- Es posible realizar análisis de interacción estática suelo-estructura en tres dimensiones, tomando en cuenta toda la estructura así como todos los estratos del subsuelo, y obtener tanto los elementos mecánicos que actúan en la estructura en general, como en cualquier punto que se desee en la estructura de cimentación, en particular, sin necesidad de realizar un gran esfuerzo numérico.

2.- Se pueden llevar a cabo análisis de interacción estática suelo-estructura, para un cierto nivel de esfuerzos establecido, sin necesidad de realizar iteraciones, considerando como incógnitas a las reacciones del terreno, que a su vez son cargas sobre la estructura, calculando los hundimientos del suelo en función de las cargas sobre él y estableciendo la compatibilidad de deformaciones entre la subestructura y el suelo.

3.- Como el módulo de elasticidad del concreto, para fines de cálculo, disminuye con el tiempo y la deformabilidad del terreno de cimentación es función del nivel de esfuerzos, ya que su comportamiento no es lineal, además de cambiar con el tiempo principalmente en los sedimentos finos saturados, deben tomarse en cuenta en forma adecuada los cambios en las propiedades de deformación, por lo que se debe trabajar con módulos secantes de deformación del suelo de acuerdo con el nivel de esfuerzos y de acuerdo con el tiempo, especialmente si se trata con suelos finos saturados.

4.- A medida que la rigidez relativa estructura-suelo K_r es menor, el asentamiento diferencial máximo, si bien disminuye en magnitud, representa un porcentaje mayor del asentamiento total máximo de la subestructura.

5.- En la estructura analizada, el asentamiento diferencial es del orden del 25% del asentamiento total cuando la estructura está apoyada sobre terrenos de alta y muy alta compresibilidad, del orden del 40% en terrenos de compresibilidad media y del 45% en terrenos de baja y muy baja compresibilidad.

6.- Como se puede observar en cada uno de los ejes de la retícula de cimentación, el cambio en las reacciones del terreno sobre la subestructura es más acentuado a medida que la rigidez relativa estructura-suelo disminuye.

7.- Al centro de los claros, la reacción del terreno de cimentación sobre la estructura (contratrabes y losas), es menor conforme la rigidez relativa estructura-suelo es menor.

8.- En los resultados presentados se puede observar que los elementos mecánicos de mayor magnitud aparecen en los miembros estructurales más rígidos, mientras que los menores se obtienen en las losas, que son los más flexibles.

9.- También se puede notar que los elementos mecánicos que aparecen al centro de los claros son más pequeños al disminuir la rigidez relativa estructura-suelo, llegando a ser prácticamente nulos en los terrenos rígidos (baja compresibilidad) y muy rígidos (muy baja compresibilidad).

10.- El fenómeno mencionado permite concluir que los centros de las losas de cimentación prácticamente no trabajan cuando la rigidez relativa estructura-suelo es muy pequeña, es decir, cuando la estructura es mucho más flexible que el terreno sobre el cual se apoya.

11.- Dado que al cambiar de un terreno de cimentación de Muy Alta Compresibilidad a Alta Compresibilidad, de Alta Compresibilidad a Compresibilidad Media, de Compresibilidad Media a Baja Compresibilidad, o de Baja Compresibilidad a Muy Baja Compresibilidad, la rigidez del terreno sufre un incremento del orden

del 70% de un caso con respecto al otro, y que los elementos mecánicos obtenidos con Interacción Estática Suelo-Estructura, para la estructura analizada, experimentan cambios que van desde el 0 hasta el 100%, en los casos extremos, se concluye que la influencia de la rigidez del terreno de cimentación en los resultados de la Interacción Estática Suelo-Estructura, es significativa, por lo que tanto el criterio, como la metodología, la precisión y el nivel de esfuerzos con los que se obtengan los parámetros de deformabilidad del suelo, son de fundamental importancia.

12.- Se pueden esperar diferencias notables entre los resultados obtenidos con análisis de interacción estática suelo-estructura y los que se obtienen considerando una reacción uniforme. Estos cambios son tanto en los diagramas de hundimientos diferenciales como en las reacciones del terreno y en los elementos mecánicos (momentos flexionantes y cortantes).

13.- Para la estructura analizada, los momentos flexionantes obtenidos a partir de Interacción Estática Suelo-Estructura presentaron una reducción que va desde el 30 hasta el 100% de los momentos flexionantes calculados mediante análisis convencional, presentándose inclusive cambios en los signos de algunos de los momentos.

14.- Como consecuencia de lo anterior, las secciones y los armados de las losas son menores que los que se obtienen a través de un análisis convencional (reacción uniforme sobre la estructura de cimentación).

15.- El mismo fenómeno, aunque menos acentuado, se puede observar en las contratrabes de cimentación.

16.- Mediante un análisis tridimensional de interacción estática suelo-estructura se pueden obtener los elementos mecánicos que actúan en los elementos verticales estructurales.

17.- Lo anterior permite concluir que deben realizarse análisis de Interacción Estática Suelo-Estructura, ya que los resultados obtenidos con el método convencional no representan lo que realmente sucede en una cimentación.

18.- Desde el punto de vista económico, los resultados obtenidos con Interacción Estática Suelo-Estructura conducen a una reducción apreciable en el costo de la estructura de cimentación, que dependiendo del caso, se estima que puede representar un ahorro entre el 25 y el 40% , respecto al costo que se obtendría con un análisis convencional.

19.- De la comparación cuantitativa entre los resultados obtenidos con el método de análisis tridimensional de interacción estática suelo-estructura utilizado en este trabajo y los resultados obtenidos por Brown (1969), así como de la comparación cualitativa con los resultados obtenidos por Sommer (1965) y Meyerhof (1979), se puede concluir que este método es congruente y que tiene la ventaja de que al no requerir del artificio de la sección característica, sino que considera a la estructura de cimentación tal y como es, y realizar una análisis tridimensional, se pueden obtener las reacciones, los hundimientos y los elementos mecánicos en cualquier punto de la estructura que se desee, ya sea al centro de las losas de cimentación, en las contratrabes o en cualquier otro elemento.

ANEXO 1
PROGRAMA DE COMPUTADORA ISEMCCVL

Este anexo contiene al programa llamado "ISEMCCVL" que sirve para realizar análisis tridimensionales de interacción estática suelo-estructura con el método de cálculo (Deméneghi, 1992), expuesto en el cuerpo de este trabajo.

Es aplicable a estructuras formadas a base de barras ortogonales y permite obtener las reacciones del terreno sobre todas las barras definidas en la estructura de cimentación, así como los desplazamientos de todos los nudos formados por las intersecciones de las barras de la estructura, los giros, los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes de barra sobre nudo, de todos los elementos definidos en la estructura analizada (cimentación y superestructura).

Las hipótesis en que se basa el método de análisis, así como sus limitaciones, se encuentran expresadas en el cap.IV.

El programa está desarrollado en lenguaje FORTRAN y las variables contenidas en él son las siguientes:

DEFINICION DE VARIABLES

AH(J) = espesor del estrato j.

AIN(I) = momento de inercia de la barra i.

AINF(I,J,K) = valor de influencia bajo el punto i, a la mitad del estrato j, debido a una carga unitaria aplicada en k.

AKR = elementos de las matrices de rigidez de las barras según sus condiciones de apoyo.

ALO(I) = longitud de la barra i.

ALR(I) = longitud de la reacción r_1 correspondiente al nudo i.

AMZ(I,J) = módulo lineal de deformación del estrato j bajo el punto i.

ARI(I) = área de la reacción correspondiente al nudo i.

D(I) = desplazamiento del nudo i.

DR(I) = grado de libertad correspondiente al desplazamiento δ_r de la barra i.

DS(I) = grado de libertad correspondiente al desplazamiento δ_s de la barra i.

E(I) = módulo de elasticidad de la barra i.

FLE = elementos de la matriz de flexibilidades del suelo.

N = número de nudos en la reticula de cimentación.

NAI(I) = número de áreas internas en el nudo i.

NBC = número donde terminan las barras centrales de la cimentación.

NBCSE = número donde terminan las barras continuas de la superestructura.

NBDER = número donde terminan las barras de la cimentación articuladas a la derecha.

NE = número de estratos.

NG = número de grados de libertad.

NBIZQ = número donde terminan las barras de la cimentación articuladas a la izquierda.

P(I) = carga o momento concentrado en el grado de libertad i.

TP(I) = grado de libertad correspondiente al giro θ_p de la barra i.

TQ(I) = grado de libertad correspondiente al giro θ_q de la barra i.

VE, CR = elementos de los vectores de cargas de empotramiento de las barras según sus condiciones de apoyo.

W(I) = carga linealmente repartida sobre la barra i.

XF(I), YF(I) = coordenadas finales X e Y del área interna del nudo i.

XI(I), YI(I) = coordenadas iniciales X e Y del área interna del nudo i.

XP(I), YP(I) = coordenadas X e Y del nudo i.

Z(J) = profundidad a la mitad del estrato j.

SUB200 = subrutina que calcula la distribución de esfuerzos en la masa de suelo según la solución de Boussinesq para áreas rectangulares uniformemente cargadas.

SUB204 = subrutina que transforma a la matriz en matriz triangular.

SUB247 = subrutina que resuelve el sistema de ecuaciones por eliminación Gaussiana con pivoteo parcial.

El programa está estructurado a base de bloques como se indica en el diagrama de bloques que se muestra a continuación:

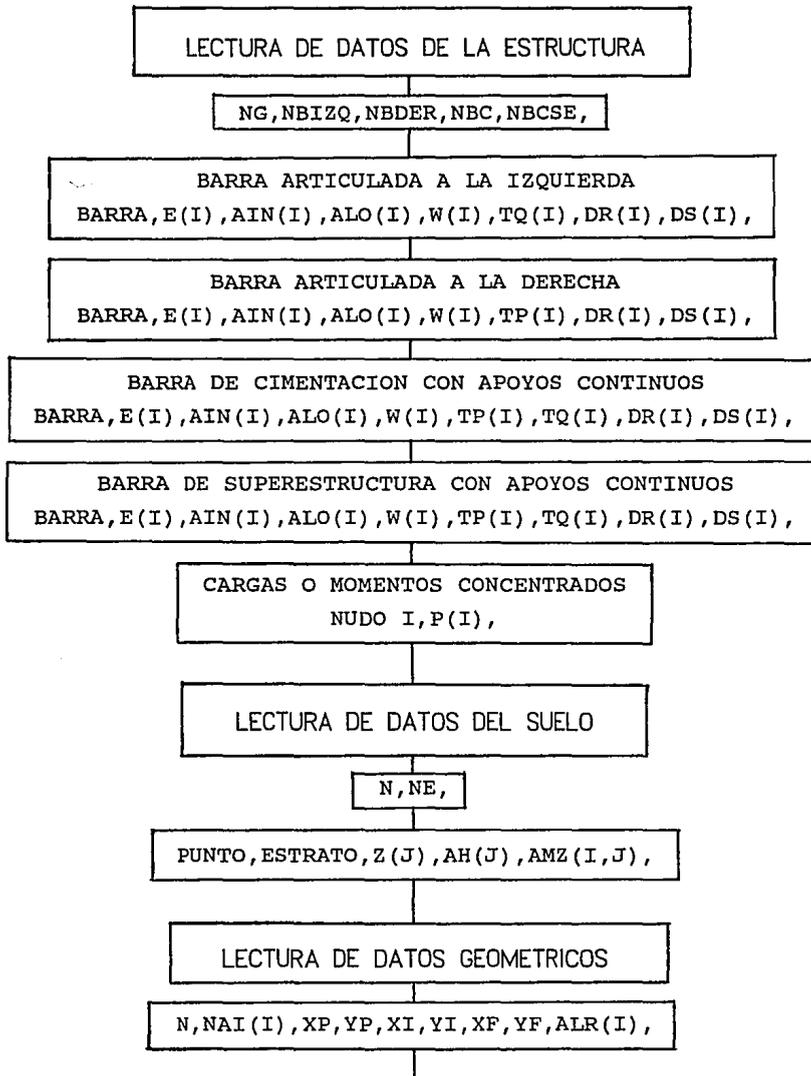
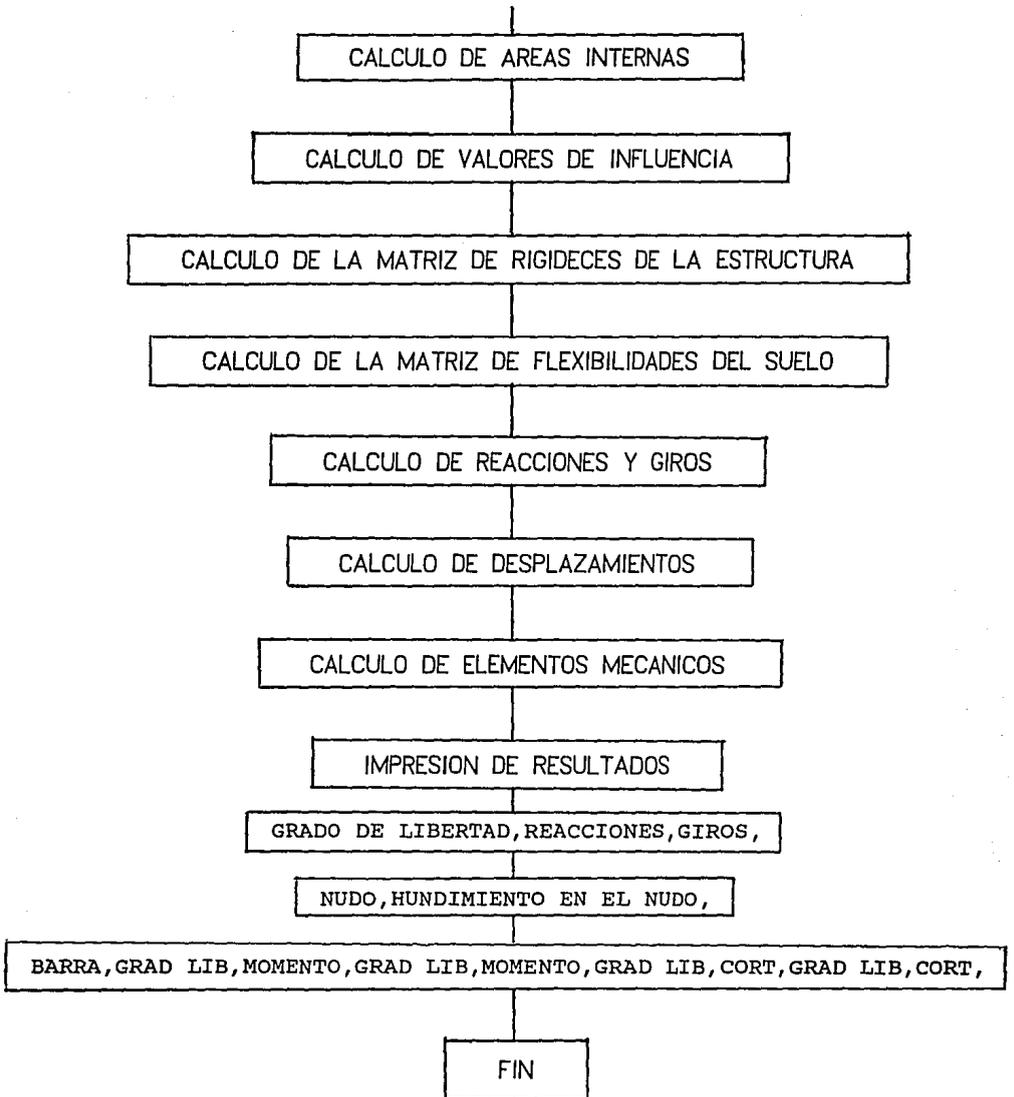


DIAGRAMA DE BLOQUES DEL PROGRAMA ISEMCCVL

DIAGRAMA DE BLOQUES (CONTINUACION)



Para hacer uso del programa se requiere formar un archivo de datos que contenga la siguiente información:

DATOS DE LA ESTRUCTURA:

- a) NG, NBIZQ, NBDER, NBC, NCBSE,
- b) BARRA, E(I), AIN(I), ALO(I), W(I), TP(I), TQ(I), DR(I), DS(I),
- c) NUDO I, P(I),

DATOS DEL SUELO:

- a) N, NE,
- b) NUDO I, ESTRATO J, Z(J), AH(J), AMZ(J),

DATOS GEOMETRICOS:

- a) N, NAI(I), XP(I), YP(I), XI(I), YI(I), XF(I), YF(I), ALR(I),

Todos los datos se introducen en formato libre, separados por una coma entre sí.

Los resultados proporcionados se presentan en tres bloques:

- a) GRADO DE LIBERTAD, REACCIONES, GIROS
- b) NUDO, HUNDIMIENTO EN EL NUDO,
- c) BARRA, GRAD LIB, MOMENTO (M_p), GRAD LIB, MOMENTO (M_q), GRAD LIB, CORTANTE (V_r), GRAD LIB, CORTANTE (V_s),

A continuación se presenta el listado del programa y un ejemplo en el que se pueden observar tanto el archivo de datos formado para el ejemplo resuelto paso a paso en el cap.IV, como los resultados obtenidos.

LISTADO DEL PROGRAMA ISEMCCVL

```

$RESET FREE                                00000100
$SET SUPRS                                00000200
$SET ERRLIST                               00000300
$RESET LIMIT                              00000400
$RESET LIST                               00000500
FILE 6=IMP,UNIT=PRINTER,RECORD=22        00000600
FILE 5=EJEM/DAT,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30 00000700
DIMENSION E(500),AIN(500),ALO(500),W(500),P(500),TP(500),TQ(500), 00000800
*DR(500),DS(500),AKR(500,500),CR(500,500),VE(500),SCAL(500), 00000900
*IPS(500),MO(500),XP(500),YP(500),XI(500,4),XF(500,4),YI(500,4), 00001000
*YF(500,4),Z(500),AH(500),AMZ(500,500),A(500),AINF(140, 00001100
*50,140),AR1(500,4),ALR(500),BR(500),B(500),D(500),V(500,500), 00001200
*X(500),FLE(500,500)                    00001300
*,NAI(500)                                00001400
WRITE(6,*) "INTERAC SUELO-ESTRUCTURA A BASE DE BARRAS ORTOGONALES" 001500
WRITE(6,*) "PROGRAMA ISEMCCVL"           00001600
WRITE(6,*) "EN ESTE PROGRAMA SE TOMA EN CUENTA QUE CADA NUDO"      00001700
WRITE(6,*) " PUEDE TENER AREAS INTERNAS " 00001800
WRITE(6,*) "LECTURA DE DATOS DE LA ESTRUCTURA"                   00001900
READ(5,/) NG,NBIZQ,NBDER,NBC,NBCSE     00002000
WRITE(6,*) "NG = NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD =",NG,"NBDER = 00002100
*NUMERO DONDE TERMINAN LAS BARRAS A LA DERECHA =",NBDER, 00002200
*NBC = NUMERO DONDE TERMINAN LAS BARRAS CENTRALES =",NBC, 00002300
*NBCSE = NUMERO DONDE TERMINAN LAS BARRAS CONTINUAS DE 00002400
*LA SUPERESTRUCTURA =",NBCSE,"NBIZQ = NUMERO DONDE TERMINAN 00002500
*LAS BARRAS A LA IZQUIERDA, ART A LA IZQ=","NBIZQ 00002550
WRITE(6,*) "PROPIEDADES DE LAS BARRAS" 00002600
WRITE(6,*) "BARRA, E, I, L, W, TQ, DR, DS" 00002700
DO 5 I=1,NBDER                          00002800
READ(5,/) I,E(I),AIN(I),ALO(I),W(I),TP(I),DR(I),DS(I) 00002900
WRITE(6,*) I,E(I),AIN(I),ALO(I),W(I),TP(I),DR(I),DS(I) 00003000
5 CONTINUE                               00003100
WRITE(6,*) "BARRA, E, I, L, W, TP, DR, DS" 00003200
DO 15 I=NBDER+1,NBC                     00003300
READ(5,/) I,E(I),AIN(I),ALO(I),W(I),TP(I),TQ(I),DR(I),DS(I) 00003400
WRITE(6,*) I,E(I),AIN(I),ALO(I),W(I),TP(I),TQ(I),DR(I),DS(I) 00003500
15 CONTINUE                              00003600
WRITE(6,*) "BARRA, E, I, L, W, TP, TQ, DR, DS" 00003700
DO 16 I=NBC+1,NBCSE                     00003800
READ(5,/) I,E(I),AIN(I),ALO(I),W(I),TP(I),TQ(I),DR(I),DS(I) 00003900
WRITE(6,*) I,E(I),AIN(I),ALO(I),W(I),TP(I),TQ(I),DR(I),DS(I) 00004000
16 CONTINUE                              00004100
WRITE(6,*) "BARRA, E, I, L, W, TP, DR, DS" 00004200
DO 17 I=NBCSE+1,NBSED                    00004300
READ(5,/) I,E(I),AIN(I),ALO(I),W(I),TP(I),DR(I),DS(I) 00004400
WRITE(6,*) I,E(I),AIN(I),ALO(I),W(I),TP(I),DR(I),DS(I) 00004500
17 CONTINUE                              00004600
WRITE(6,*) " " 00004700
WRITE(6,*) "CARGAS CONCENTRADAS Y CARGAS DE EMPOTRAMIENTO" 00004800
DO 25 I=1,NG                             00004900
READ(5,/) I,P(I)                        00005000
WRITE(6,*) I,P(I)                       00005100
25 CONTINUE                              00005200
WRITE(6,*) " " 00005300
WRITE(6,*) " " 00005400
WRITE(6,*) " " 00005500
WRITE(6,*) "LECTURA DE DATOS DEL SUELO" 00005600
READ(5,/) N,NE                          00005700
WRITE(6,*) "N = NUMERO DE NUDOS DE LA RETICULA=","N,"NE = 00005800
*NUMERO DE ESTRATOS=","NE 00005900

```

LISTADO DEL PROGRAMA (CONTINUACION)

	WRITE(6,*/) "DATOS GEOMETRICOS"	00006000
	WRITE(6,*/) "AREAS INTERNAS EN CADA NUDO"	00006100
	WRITE(6,*/) "NUDO, NUMERO DE AREAS INTERNAS"	00006200
	DO 45 I=1,N	00006300
	READ(5,/) I,NAI(I)	00006400
45	CONTINUE	00006500
	WRITE(6,*/) " "	00006600
	WRITE(6,*/) "(XP,YP):COORDENADAS DEL PUNTO, (XI,YI):COORDENADAS	00006700
	* INICIALES DE LA CARGA REPARTIDA, (XF,YF):COORDENADAS FINALES	00006800
	*DE LA CARGA REPARTIDA, ALR:LONGITUD DE LA REACCION r, A: AREA	00006900
	* DE LA REACCION r, BR: ANCHO EQUIVALENTE DE LA REACCION r"	00007000
	WRITE(6,*/) "I, K1,XP,YP,XI,YI,XF,YF"	00007100
	WRITE(6,*/) "I,A(I)"	00007150
	DO 55 I=1,N	00007200
	SUM=0.	00007300
	NA=NAI(I)	00007400
	DO 65 K1=1,NA	00007500
	READ(5,/) I,K1,XP(I),YP(I),XI(I,K1),XF(I,K1),YI(I,K1),YF(I,K1)	00007600
	WRITE(6,*/) I,K1,XP(I),YP(I),XI(I,K1),YI(I,K1),XF(I,K1),YF(I,K1)	00007700
	AR1(I,K1)=(XF(I,K1)-XI(I,K1))* (YF(I,K1)-YI(I,K1))	00007800
	SUM=SUM+AR1(I,K1)	00007900
65	CONTINUE	00008000
	A(I)=SUM	00008100
	WRITE(6,*/) I,A(I)	00008150
55	CONTINUE	00008200
	WRITE(6,*/) "PUNTO, ESTRATO, PROFUNDIDAD, ESPESOR, MODULO DE	00008300
	* DEFORMACION"	00008400
	J=1	00008500
	WRITE(6,*/) "AMZ(I,J)"	00008510
	DO 75 I=1,N	00008520
	AMZ(I,J)=0.000625	00008530
	WRITE(6,*/) I,J,AMZ(I,J)	00008540
75	CONTINUE	00008550
	Z(1)=0.45	00008560
	AH(1)=0.90	00008570
	WRITE(6,*/) "Z1,AH1",Z(1),AH(1)	00008580
	J=2	00009000
	WRITE(6,*/) "AMZ(I,J)"	00009010
	DO 85 I=1,N	00009020
	AMZ(I,J)=0.0006	00009030
	WRITE(6,*/) I,J,AMZ(I,J)	00009040
85	CONTINUE	00009050
	Z(2)=1.35	00009060
	AH(2)=0.90	00009070
	WRITE(6,*/) "Z2,AH2",Z(2),AH(2)	00009080
	J=3	00010700
	WRITE(6,*/) "AMZ(I,J)"	00010750
	DO 88 I=1,N	00010800
	AMZ(I,J)=0.000615	00010900
	WRITE(6,*/) I,J,AMZ(I,J)	00010950
88	CONTINUE	00011000
	Z(3)=2.275	00011100
	AH(3)=0.95	00011200
	WRITE(6,*/) "Z3,AH3",Z(3),AH(3)	00011250
	J=4	00011300
	WRITE(6,*/) "AMZ(I,J)"	00011350
	DO 89 I=1,N	00011400
	AMZ(I,J)=0.000605	00011500
	WRITE(6,*/) I,J,AMZ(I,J)	00011550
89	CONTINUE	00011600

LISTADO DEL PROGRAMA (CONTINUACION)

Z(4)=3.075	00011700
AH(4)=0.65	00011800
WRITE(6,*)"Z4,AH4",Z(4),AH(4)	00011850
J=5	00011851
WRITE(6,*)"AMZ(I,J)"	00011852
DO 86 I=1,N	00011853
AMZ(I,J)=0.0006	00011854
WRITE(6,*)I,J,AMZ(I,J)	00011855
86 CONTINUE	00011856
Z(5)=4.00	00011857
AH(5)=1.20	00011858
WRITE(6,*)"Z5,AH5",Z(5),AH(5)	00011859
J=6	00011860
WRITE(6,*)"AMZ(I,J)"	00011861
DO 87 I=1,N	00011862
AMZ(I,J)=0.0005975	00011863
WRITE(6,*)I,J,AMZ(I,J)	00011864
87 CONTINUE	00011865
Z(6)=4.90	00011866
AH(6)=0.60	00011867
WRITE(6,*)"Z6,AH6",Z(6),AH(6)	00011868
WRITE(6,*)"LONGITUD DE LA REACCION ALR"	00011870
DO 90 I=1,N	00011900
READ(5,/)I,ALR(I)	00012000
WRITE(6,*)I,ALR(I)	00012100
90 CONTINUE	00012200
WRITE(6,*)"AH5=",AH(5),"AH6=",AH(6),"Z3=",Z(3),"AH3=",AH(3),	00012300
*"Z4=",Z(4),"AH4=",AH(4)	00012400
WRITE(6,*)"I,J,K,AINF(I,J,K)"	00012410
DO 95 I=1,N	00012500
DO 105 J=1,NE	00012600
Z1=Z(J)	00012610
DO 110 K=1,N	00012700
SUM=0.	00012900
NA=NAI(I)	00013000
DO 125 K1=1,NA	00013100
X1=XP(I)-XI(K,K1)	00013200
Y1=YP(I)-YI(K,K1)	00013300
CALL SUB200(X1,Y1,Z1,SIGZ)	00013400
SIGZI=SIGZ	00013500
X1=XP(I)-XF(K,K1)	00013600
CALL SUB200(X1,Y1,Z1,SIGZ)	00013700
SIGZII=SIGZ	00013800
X1=XP(I)-XI(K,K1)	00013900
Y1=YP(I)-YF(K,K1)	00014000
CALL SUB200(X1,Y1,Z1,SIGZ)	00014100
SIGZIII=SIGZ	00014200
X1=XP(I)-XF(K,K1)	00014300
CALL SUB200(X1,Y1,Z1,SIGZ)	00014400
SIGZIV=SIGZ	00014500
SUM=SUM+ABS((SIGZI-SIGZII-SIGZIII+SIGZIV))	00014600
125 CONTINUE	00014700
AINF(I,J,K)=SUM	00014800
110 CONTINUE	00014900
105 CONTINUE	00015000
95 CONTINUE	00015100
DO 145 M=1,NBDER	00018000
I=TP(M)	00018100
K=DR(M)	00018200
L=DS(M)	00018300

LISTADO DEL PROGRAMA (CONTINUACION)

A1=3*E(M)*AIN(M)/ALO(M)	00018400
A2=3*E(M)*AIN(M)/ALO(M)**2	00018500
A3=3*E(M)*AIN(M)/ALO(M)**3	00018600
AKR(I,I)=AKR(I,I)+A1	00018700
AKR(I,K)=AKR(I,K)-A2	00018800
AKR(I,L)=AKR(I,L)+A2	00018900
AKR(K,K)=AKR(K,K)+A3	00019000
AKR(K,L)=AKR(K,L)-A3	00019100
AKR(L,L)=AKR(L,L)+A3	00019200
AKR(K,I)=AKR(I,K)	00019300
AKR(L,I)=AKR(I,L)	00019400
AKR(L,K)=AKR(K,L)	00019500
VE(I)=VE(I)+(W(M)*ALO(M)**2)/8	00019600
VE(K)=VE(K)-5*W(M)*ALO(M)/8	00019700
VE(L)=VE(L)-3*W(M)*ALO(M)/8	00019800
AL1=ALO(M)	00019900
AL2=AL1**2	00020000
CR(I,K)=CR(I,K)-(9/128.)*AL2	00020100
CR(I,L)=CR(I,L)-(7/128.)*AL2	00020200
CR(K,K)=CR(K,K)+(57/128.)*AL1	00020300
CR(K,L)=CR(K,L)+(23/128.)*AL1	00020400
CR(L,K)=CR(L,K)+(7/128.)*AL1	00020500
CR(L,L)=CR(L,L)+(41/128.)*AL1	00020600
145 CONTINUE	00020700
DO 147 M=NBDER+1,NBC	00021900
I=TP(M)	00022000
J=TQ(M)	00022100
K=DR(M)	00022200
L=DS(M)	00022300
AL1=ALO(M)	00022400
AL2=AL1**2	00022500
AL3=AL1*AL2	00022600
W1=W(M)	00022700
A1=4*E(M)*AIN(M)/AL1	00022800
A2=6*E(M)*AIN(M)/AL2	00022900
A3=12*E(M)*AIN(M)/AL3	00023000
AKR(I,I)=AKR(I,I)+A1	00023100
AKR(I,J)=AKR(I,J)+A1/2	00023200
AKR(I,K)=AKR(I,K)-A2	00023300
AKR(I,L)=AKR(I,L)+A2	00023400
AKR(J,J)=AKR(J,J)+A1	00023500
AKR(J,K)=AKR(J,K)-A2	00023600
AKR(J,L)=AKR(J,L)+A2	00023700
AKR(K,K)=AKR(K,K)+A3	00023800
AKR(K,L)=AKR(K,L)-A3	00023900
AKR(L,L)=AKR(L,L)+A3	00024000
AKR(J,I)=AKR(I,J)	00024100
AKR(K,I)=AKR(I,K)	00024200
AKR(L,I)=AKR(I,L)	00024300
AKR(K,J)=AKR(J,K)	00024400
AKR(L,J)=AKR(J,L)	00024500
AKR(L,K)=AKR(K,L)	00024600
VE(I)=VE(I)+W1*AL2/12	00024700
VE(J)=VE(J)-W1*AL2/12	00024800
VE(K)=VE(K)-W1*AL1/2	00024900
VE(L)=VE(L)-W1*AL1/2	00025000
CR(I,K)=CR(I,K)-(11/192.)*AL2	00025100
CR(I,L)=CR(I,L)-(5/192.)*AL2	00025200
CR(J,K)=CR(J,K)+(5/192.)*AL2	00025300
CR(J,L)=CR(J,L)+(11/192.)*AL2	00025400

LISTADO DEL PROGRAMA (CONTINUACION)

CR(K,K)=CR(K,K)+(13/32.)*AL1	00025500
CR(K,L)=CR(K,L)+(3/32.)*AL1	00025600
CR(L,K)=CR(L,K)+(3/32.)*AL1	00025700
CR(L,L)=CR(L,L)+(13/32.)*AL1	00025800
147 CONTINUE	00025810
DO 148 M=NBC+1,NBCSE	00025820
I=TP(M)	00025830
J=TQ(M)	00025840
K=DR(M)	00025903
L=DS(M)	00025904
AL1=ALO(M)	00025905
AL2=AL1**2	00025906
AL3=AL1*AL2	00025907
W1=W(M)	00025908
A1=4*E(M)*AIN(M)/AL1	00025909
A2=6*E(M)*AIN(M)/AL2	00025910
A3=12*E(M)*AIN(M)/AL3	00025911
AKR(I,I)=AKR(I,I)+A1	00025912
AKR(I,J)=AKR(I,J)+A1/2	00025913
AKR(I,K)=AKR(I,K)-A2	00025914
AKR(I,L)=AKR(I,L)+A2	00025915
AKR(J,J)=AKR(J,J)+A1	00025916
AKR(J,K)=AKR(J,K)-A2	00025917
AKR(J,L)=AKR(J,L)+A2	00025918
AKR(K,K)=AKR(K,K)+A3	00025919
AKR(K,L)=AKR(K,L)-A3	00025920
AKR(L,L)=AKR(L,L)+A3	00025921
AKR(J,I)=AKR(I,J)	00025922
AKR(K,I)=AKR(I,K)	00025923
AKR(L,I)=AKR(I,L)	00025924
AKR(K,J)=AKR(J,K)	00025925
AKR(L,J)=AKR(J,L)	00025926
AKR(L,K)=AKR(K,L)	00025927
VE(I)=VE(I)+W1*AL2/12	00025928
VE(J)=VE(J)-W1*AL2/12	00025929
VE(K)=VE(K)-W1*AL1/2	00025930
VE(L)=VE(L)-W1*AL1/2	00025931
148 CONTINUE	00025932
DO 149 M=NBCSE+1,NBSED	00025950
I=TP(M)	00025951
K=DR(M)	00025952
L=DS(M)	00025953
A1=3*E(M)*AIN(M)/ALO(M)	00025954
A2=3*E(M)*AIN(M)/ALO(M)**2	00025955
A3=3*E(M)*AIN(M)/ALO(M)**3	00025956
AKR(I,I)=AKR(I,I)+A1	00025957
AKR(I,K)=AKR(I,K)-A2	00025958
AKR(I,L)=AKR(I,L)+A2	00025959
AKR(K,K)=AKR(K,K)+A3	00025960
AKR(K,L)=AKR(K,L)-A3	00025961
AKR(L,L)=AKR(L,L)+A3	00025962
AKR(K,I)=AKR(I,K)	00025963
AKR(L,I)=AKR(I,L)	00025964
AKR(L,K)=AKR(K,L)	00025965
VE(I)=VE(I)+(W(M)*ALO(M)**2)/8	00025966
VE(K)=VE(K)-5*W(M)*ALO(M)/8	00025967
VE(L)=VE(L)-3*W(M)*ALO(M)/8	00025968
AL1=ALO(M)	00025969
AL2=AL1**2	00025970
149 CONTINUE	00025971

LISTADO DEL PROGRAMA (CONTINUACION)

	WRITE(6,*/)"I,J,AKR,CR"	00026000
	DO 325 I=1,NG	00026100
	DO 315 J=1,NG	00026200
315	CONTINUE	00026300
325	CONTINUE	00026400
	WRITE(6,*/)"I,K1,FLE(I,K1)"	00026500
	DO 155 I=1,N	00026600
	DO 165 K1=1,N	00026700
	SUM=0.	00026800
	DO 175 J=1,NE	00026900
	SUM=SUM+AMZ(I,J)*AH(J)*AINF(I,J,K1)*ALR(K1)/A(K1)	00027000
175	CONTINUE	00027100
	FLE(I,K1)=SUM	00027200
165	CONTINUE	00027300
155	CONTINUE	00027400
	WRITE(6,*/)" "	00027500
	WRITE(6,*/)"CR"	00027600
	DO 185 I=1,NG	00027700
	DO 195 J=1,N	00027800
	SUM=0.	00027900
	DO 205 K=1,N	00028000
	SUM=SUM+AKR(I,K)*FLE(K,J)	00028100
205	CONTINUE	00028200
	CR(I,J)=CR(I,J)+SUM	00028300
195	CONTINUE	00028400
185	CONTINUE	00028500
	WRITE(6,*/)"B"	00028600
	DO 215 I=1,NG	00028700
	B(I)=-VE(I)-P(I)	00028800
215	CONTINUE	00029000
	N1=N	00029100
	DO 225 I=1,NG	00029200
	DO 235 J=N+1,NG	00029300
	CR(I,J)=AKR(I,J)	00029400
235	CONTINUE	00029500
225	CONTINUE	00029600
	CALL SUB204(CR,NG,IPS)	00029700
	CALL SUB247(X,CR,NG,IPS,B)	00029800
	WRITE(6,*/)" "	00029900
	WRITE(6,*/)"GRADO DE LIBERTAD, REACCION HASTA N=",	00030000
	*N1,"GIROS LOS SIGUIENTES"	00030100
	DO 245 I=1,NG	00030200
	WRITE(6,*/) I,X(I)	00030300
245	CONTINUE	00030400
	WRITE(6,*/)" "	00030500
	WRITE(6,*/)" "	00030600
	WRITE(6,*/)"NUDO, HUNDIMIENTO DEL NUDO"	00030700
	DO 255 I=1,N1	00030800
	SUM=0.	00030900
	DO 265 J=1,N1	00031000
	SUM=SUM+FLE(I,J)*X(J)	00031100
265	CONTINUE	00031200
	D(I)=SUM	00031300
	WRITE(6,*/) I,D(I)	00031400
255	CONTINUE	00031500
	WRITE(6,*/)" "	00031600
	WRITE(6,*/)" "	00031700
	WRITE(6,*/)"BARRA, GRADO DE LIBERTAD, MOMENTO O CORTANTE EN EL NUO"	00031800
	*DO"	00031900
	DO 285 M=1,NBDER	00033800

LISTADO DEL PROGRAMA (CONTINUACION)

I=TP (M)	00033900
K=DR (M)	00034000
L=DS (M)	00034100
A1=3*E (M) *AIN (M) /ALO (M)	00034200
A2=3*E (M) *AIN (M) /ALO (M) **2	00034300
A3=3*E (M) *AIN (M) /ALO (M) **3	00034400
W1=W (M)	00034500
AL1=ALO (M)	00034600
AL2=AL1**2	00034700
V (I, M) = (W1*AL2/8+A1*X (I) -A2*D (K) +A2*D (L) - (9/128.) *AL2*X (K) -	00034800
* (7/128.) *AL2*X (L)) *1.4	00034900
V (K, M) = (-5*W1*AL1/8-A2*X (I) +A3*D (K) -A3*D (L) + (57/128.) *AL1*X (K) +	00035000
* (23/128.) *AL1*X (L)) *1.4	00035100
V (L, M) = (-3*W1*AL1/8+A2*X (I) -A3*D (K) +A3*D (L) + (7/128.) *AL1*X (K) +	00035200
* (41/128.) *AL1*X (L)) *1.4	00035300
WRITE (6, */) M, I, V (I, M), K, V (K, M), L, V (L, M)	00035400
285 CONTINUE	00035500
DO 305 M=NBDER+1, NBC	00036500
I=TP (M)	00036600
J=TQ (M)	00036700
K=DR (M)	00036800
L=DS (M)	00036900
W1=W (M)	00037000
AL1=ALO (M)	00037100
AL2=AL1**2	00037200
AL3=AL1**3	00037300
A1=4*E (M) *AIN (M) /AL1	00037400
A2=6*E (M) *AIN (M) /AL2	00037500
A3=12*E (M) *AIN (M) /AL3	00037600
V (I, M) = (W1*AL2/12+A1*X (I) +A1*X (J) /2-A2*D (K)	00037700
**A2*D (L) - (11/192.) *AL2*X (K) - (5/192.) *AL2*X (L)) *1.4	00037800
V (J, M) = (-W1*AL2/12+A1*X (I) /2+A1*X (J) -A2*D (K)	00037900
**A2*D (L) + (5/192.) *AL2*X (K) + (11/192.) *AL2*X (L)) *1.4	00038000
V (K, M) = (-W1*AL1/2-A2*X (I) -A2*X (J) +A3*D (K)	00038100
*-A3*D (L) + (13/32.) *AL1*X (K) + (3/32.) *AL1*X (L)) *1.4	00038200
V (L, M) = (-W1*AL1/2+A2*X (I) +A2*X (J) -A3*D (K)	00038300
**A3*D (L) + (3/32.) *AL1*X (K) + (13/32.) *AL1*X (L)) *1.4	00038400
WRITE (6, */) M, I, V (I, M), J, V (J, M), K, V (K, M), L, V (L, M)	00038500
305 CONTINUE	00038600
DO 400 I=N+1, NG	00038602
D (I) =X (I)	00038604
400 CONTINUE	00038606
DO 306 M=NBC+1, NBCSE	00038610
I=TP (M)	00038611
J=TQ (M)	00038612
K=DR (M)	00038613
L=DS (M)	00038614
W1=W (M)	00038615
AL1=ALO (M)	00038616
AL2=AL1**2	00038617
AL3=AL1**3	00038618
A1=4*E (M) *AIN (M) /AL1	00038619
A2=6*E (M) *AIN (M) /AL2	00038620
A3=12*E (M) *AIN (M) /AL3	00038621
V (I, M) = (W1*AL2/12+A1*D (I) +A1*D (J) /2-A2*D (K)	00038622
**A2*D (L)) *1.4	00038623
V (J, M) = (-W1*AL2/12+A1*D (I) /2+A1*D (J) -A2*D (K)	00038624
**A2*D (L)) *1.4	00038625
V (K, M) = (-W1*AL1/2-A2*D (I) -A2*D (J) +A3*D (K)	00038626
*-A3*D (L)) *1.4	00038627

LISTADO DEL PROGRAMA (CONTINUACION)

	V(L,M) = (-W1*AL1/2+A2*D(I)+A2*D(J) -A3*D(K)	00038628
	+A3*D(L)) *1.4	00038629
	WRITE(6,*) M,I,V(I,M),J,V(J,M),K,V(K,M),L,V(L,M)	00038630
306	CONTINUE	00038631
	DO 286 M=NBCSE+1,NBSED	00038650
	I=TP(M)	00038651
	K=DR(M)	00038652
	L=DS(M)	00038653
	A1=3*E(M)*AIN(M)/ALO(M)	00038654
	A2=3*E(M)*AIN(M)/ALO(M)**2	00038655
	A3=3*E(M)*AIN(M)/ALO(M)**3	00038656
	W1=W(M)	00038657
	AL1=ALO(M)	00038658
	AL2=AL1**2	00038659
	V(I,M) = (W1*AL2/8+A1*D(I) -A2*D(K) +A2*D(L)) *1.4	00038660
	V(K,M) = (-5*W1*AL1/8 -A2*D(I) +A3*D(K) -A3*D(L)) *1.4	00038661
	V(L,M) = (-3*W1*AL1/8 +A2*D(I) -A3*D(K) +A3*D(L)) *1.4	00038662
	WRITE(6,*) M,I,V(I,M),K,V(K,M),L,V(L,M)	00038663
286	CONTINUE	00038664
	CALL EXIT	00038700
	END	00038800
	SUBROUTINE SUB200(X1,Y1,Z1,SIGZ)	00038900
	R=SQRT(X1**2+Y1**2+Z1**2)	00039000
	SIGZ = ((1./(X1**2+Z1**2) +1./(Y1**2+Z1**2)) *X1*Y1*Z1/R +ATAN(X1*Y1/	00039100
	*(Z1*R)) /6.2832	00039200
	RETURN	00039300
	END	00039400
	SUBROUTINE SUB204(CR,NG,IPS)	00039500
	DIMENSION CR(500,500),SCAL(500),IPS(500)	00039600
	SUBROUTINA DECOMP	00039700
	N=NG	00039800
	DO 5 I=1,N	00039900
	IPS(I)=I	00040000
	ROWN=0.	00040100
	DO 15 J=1,N	00040200
	IF(ROWN.GE.ABS(CR(I,J))) GOTO 15	00040300
	ROWN=ABS(CR(I,J))	00040400
15	CONTINUE	00040500
	IF(ROWN.EQ.0.) GOTO 2	00040600
	SCAL(I)=1/ROWN	00040700
	GO TO 5	00040800
2	M=1	00040900
	SCAL(I)=0.	00041000
5	CONTINUE	00041100
	ELIMINACION GAUSSIANA CON PIVOTEO PARCIAL	00041200
	NM1=N-1	00041300
	DO 25 K=1,NM1	00041400
	BIG=0.	00041500
	DO 35 I=K,N	00041600
	IP=IPS(I)	00041700
	SIZE=ABS(CR(IP,K))*SCAL(IP)	00041800
	IF(SIZE.LE.BIG) GOTO 35	00041900
	BIG=SIZE	00042000
	IDXP=I	00042100
35	CONTINUE	00042200
	IF(BIG.NE.0.) GOTO 12	00042300
	M=2	00042400
	GO TO 25	00042500
12	IF(IDXP.EQ.K) GOTO 22	00042600
	J=IPS(K)	00042700

LISTADO DEL PROGRAMA (CONTINUACION)

	IPS(K)=IPS(IDXP)	00042800
	IPS(IDXP)=J	00042900
22	KP=IPS(K)	00043000
	PIVO=CR(KP,K)	00043100
	DO 45 I=K+1,N	00043200
	IP=IPS(I)	00043300
	EM=-CR(IP,K)/PIVO	00043400
	CR(IP,K)=-EM	00043500
	DO 55 J=K+1,N	00043600
	CR(IP,J)=CR(IP,J)+EM*CR(KP,J)	00043700
55	CONTINUE	00043800
45	CONTINUE	00043900
25	CONTINUE	00044000
	KP=IPS(N)	00044100
	IF(CR(KP,N).NE.0.) GOTO 32	00044200
	M=2	00044300
	CALL SUB267	00044400
32	RETURN	00044500
	END	00044600
	SUBROUTINE SUB247(X,CR,NG,IPS,B)	00044700
	DIMENSION X(500),CR(500,500),IPS(500),B(500)	00044800
C*	SUBROUTINA SOLVE	00044900
	N=NG	00045000
	IP=IPS(1)	00045100
	X(1)=B(IP)	00045200
	DO 5 I=2,N	00045300
	IP=IPS(I)	00045400
	SUM=0.	00045500
	DO 15 J=1,I-1	00045600
	SUM=SUM+CR(IP,J)*X(J)	00045700
15	CONTINUE	00045800
	X(I)=B(IP)-SUM	00045900
5	CONTINUE	00046000
	IP=IPS(N)	00046100
	X(N)=X(N)/CR(IP,N)	00046200
	DO 25 IB=2,N	00046300
	I=N+1-IB	00046400
	IP=IPS(I)	00046500
	SUM=0.	00046600
	I VA DESDE N-1 HASTA 1	00046700
	DO 35 J=I+1,N	00046800
	SUM=SUM+CR(IP,J)*X(J)	00046900
35	CONTINUE	00047000
	X(I)=(X(I)-SUM)/CR(IP,I)	00047100
25	CONTINUE	00047200
	RETURN	00047300
	END	00047400

PROPIEDADES DE LAS BARRAS

NG	NBZO	NSDER	NBC	NBCSE				
35	2	4	12	24				
BARRA	E (T/m ²)	I (m ⁴)	LONG (m)	w (T/m)	TO	DR	DS	
1	474300	0,001209	4,3	1,6	16	4	5	
2	474300	0,001209	4,3	1,6	17	8	9	
BARRA	E (T/m ²)	I (m ⁴)	LONG (m)	w (T/m)	TP	DR	DS	
3	474300	0,001209	4,3	1,6	16	5	6	
4	474300	0,001209	4,3	1,6	17	5	2	
BARRA	E (T/m ²)	I (m ⁴)	LONG (m)	w (T/m)	TP	TO	DR	DS
5	474300	0,0054	4,3	0,8	10	12	1	2
6	474300	0,0054	4,3	0,8	12	13	2	3
7	474300	0,0054	4,3	0,8	15	11	4	1
8	474300	0,0054	4,3	0,8	18	14	6	3
9	474300	0,0054	4,3	0,8	20	15	7	4
10	474300	0,0054	4,3	0,8	23	18	9	6
11	474300	0,0054	4,3	0,8	19	21	7	8
12	474300	0,0054	4,3	0,8	21	22	8	9
BARRA	E (T/m ²)	I (m ⁴)	LONG (m)	w (T/m)	TP	TO		
13	474300	0,000675	4,6	0	24	10		
14	474300	0,000675	4,6	0	25	11		
15	474300	0,000675	4,6	0	26	13		
16	474300	0,000675	4,6	0	27	14		
17	474300	0,000675	4,6	0	28	19		
18	474300	0,000675	4,6	0	29	20		
19	474300	0,000675	4,6	0	30	22		
20	474300	0,000675	4,6	0	31	23		
BARRA	E (T/m ²)	I (m ⁴)	LONG (m)	w (T/m)	TP	TO	DR	DS
21	474300	0,0054	8,6	1	24	26	1	3
22	474300	0,0054	8,6	1	28	30	7	9
23	474300	0,0054	8,6	1	29	25	7	1
24	474300	0,0054	8,6	1	31	27	9	3

TABLA A-1. EJEMPLO DE ARCHIVO DE DATOS

VECTOR DE CARGAS

GRADO DE LIBERTAD	CARGA O MOMENTO CONCENTRADO
1	-1
2	0
3	-1
4	0
5	0
6	0
7	-1
8	0
9	-1
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0
21	0
22	0
23	0
24	0
25	0
26	0
27	0
28	0
29	0
30	0
31	0

TABLA A-2. EJEMPLO DE ARCHIVO DE DATOS

DATOS DEL SUELO

NUMERO DE NUDOS
EN LA CIMENTACION

NUMERO DE
ESTRATOS

9	2			
PUNTO	ESTRATO	PROF	ESPESOR	MOD DEFOR
1	1	1, 2	2, 4	0, 0154
2	1	1, 2	2, 4	0, 0154
3	1	1, 2	2, 4	0, 0154
4	1	1, 2	2, 4	0, 0154
5	1	1, 2	2, 4	0, 0154
6	1	1, 2	2, 4	0, 0154
7	1	1, 2	2, 4	0, 0154
8	1	1, 2	2, 4	0, 0154
9	1	1, 2	2, 4	0, 0154
1	2	3, 4	2	0, 0222
2	2	3, 4	2	0, 0222
3	2	3, 4	2	0, 0222
4	2	3, 4	2	0, 0222
5	2	3, 4	2	0, 0222
6	2	3, 4	2	0, 0222
7	2	3, 4	2	0, 0222
8	2	3, 4	2	0, 0222
9	2	3, 4	2	0, 0222

TABLA A-3. EJEMPLO DE ARCHIVO DE DATOS

DATOS GEOMETRICOS

NUDO	NO. AREAS INTER	XP	YP	XI	YI	XF	YF	LONG REAC
1	1	0	0	0	0	2, 15	2, 15	4, 3
2	1	4, 3	0	2, 15	0	6, 45	2, 15	6, 45
3	1	8, 6	0	6, 45	0	8, 6	2, 15	4, 3
4	1	0	4, 3	0	2, 15	2, 15	6, 45	6, 45
5	1	4, 3	4, 3	2, 15	2, 15	6, 45	6, 45	8, 6
6	1	8, 6	4, 3	6, 45	2, 15	8, 6	6, 45	6, 45
7	1	0	8, 6	0	6, 45	2, 15	8, 6	4, 3
8	1	4, 3	8, 6	2, 15	6, 45	6, 45	8, 6	6, 45
9	1	8, 6	8, 6	6, 45	6, 45	8, 6	8, 6	4, 3

XP, YP = COORDENADAS X E Y DEL NUDO i
 XI, YI = COORDENADAS INICIALES X E Y DEL AREA INTERNA DEL NUDO i
 XF, YF = COORDENADAS FINALES X E Y DEL AREA INTERNA DEL NUDO i

TABLA A-4. EJEMPLO DE ARCHIVO DE DATOS

GRADO DE LIBERT	REACCIONES	GIROS
1	3,3007	
2	0,8865	
3	3,3007	
4	0,8865	
5	1,5827	
6	0,8865	
7	3,3007	
8	0,8865	
9	3,3007	
10		0,005311
11		-0,005311
12		0
13		-0,005311
14		-0,005311
15		0
16		0
17		0
18		0
19		0,005311
20		0,005311
21		0
22		-0,005311
23		0,005311
24		-0,007897
25		0,007897
26		0,007897
27		0,007897
28		-0,007897
29		-0,007897
30		0,007897
31		-0,007897

TABLA A-5. EJEMPLO DE RESULTADOS OBTENIDOS
(REACCIONES Y GIROS)

NUDO	HUNDIMIENTO
1	0,04602
2	0,03358
3	0,04602
4	0,03358
5	0,0585
6	0,03358
7	0,04602
8	0,03358
9	0,04602

TABLA A-6. EJEMPLO DE RESULTADOS OBTENIDOS
(HUNDIMIENTOS)

BARRA	GRAD LB p	MOMENTO Mp	GRAD LB q	MOMENTO Mq	GRAD LB r	CORTANTE Vr	GRAD LB s	CORTANTE Vs
1			16	1, 5746	4	-1, 4866	5	0
2			17	1, 5746	8	-1, 4866	5	0
3	16	-1, 5746			5	0	6	-1, 4866
4	17	-1, 5746			5	0	2	-1, 4866
5	10	-0, 3762	12	-2, 7166	1	4, 7981	2	0, 7644
6	12	2, 7166	13	0, 3762	2	0, 7644	3	4, 7981
7	15	2, 7166	11	0, 3762	4	0, 7644	1	4, 7981
8	18	2, 7166	14	0, 3762	6	0, 7644	3	4, 7981
9	20	-0, 3762	15	-2, 7166	7	4, 7981	4	0, 7644
10	23	-0, 3762	18	-2, 7166	9	4, 7981	6	0, 7644
11	19	-0, 3762	21	-2, 7166	7	4, 7981	8	0, 7644
12	21	2, 7166	22	0, 3762	8	0, 7644	9	4, 7981
13	24	-1, 4559	10	0, 3762	35	0, 2348	34	-0, 2348
14	25	1, 4559	11	-0, 3762	32	-0, 2348	33	0, 2348
15	26	1, 4559	13	-0, 3762	35	-0, 2348	34	0, 2348
16	27	-1, 4559	14	0, 3762	32	0, 2348	33	-0, 2348
17	28	-1, 4559	19	0, 3762	35	-0, 2348	34	0, 2348
18	29	1, 4559	20	-0, 3762	32	0, 2348	33	-0, 2348
19	30	-1, 4559	22	0, 3762	35	0, 2348	34	-0, 2348
20	31	1, 4559	23	-0, 3762	32	-0, 2348	33	0, 2348
21	24	1, 4559	26	-1, 4559	1	-4, 3	3	-4, 3
22	28	1, 4559	30	-1, 4559	7	-4, 3	9	-4, 3
23	29	1, 4559	25	-1, 4559	7	-4, 3	1	-4, 3
24	31	1, 4559	27	-1, 4559	9	-4, 3	3	-4, 3

TABLA A-7. EJEMPLO DE RESULTADOS OBTENIDOS
(MOMENTOS Y CORTANTES EN CADA
UNA DE LAS BARRAS)

ANEXO 2

**OBTENCION DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ Y DE LOS VECTORES DE CARGAS DE
EMPOTRAMIENTO UTILIZADOS EN EL PROCEDIMIENTO DE CALCULO**

ANEXO 2. OBTENCION DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ Y DE LOS VECTORES DE CARGAS DE EMPOTRAMIENTO UTILIZADOS EN EL PROCEDIMIENTO DE CALCULO

Con el propósito de ejemplificar cómo se obtienen las matrices de rigidez y los vectores de cargas de empotramiento de las barras, a continuación se presenta la deducción de la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento para una barra doblemente empotrada.

A partir de la matriz de flexibilidad del elemento $[f_e]_1$ para una barra doblemente empotrada, la matriz básica de rigidez del elemento $[k_e]_1$ se define como:

$$[f_e]_1^{-1} = [k_e]_1 \quad (\text{Beaufait, 1977})$$

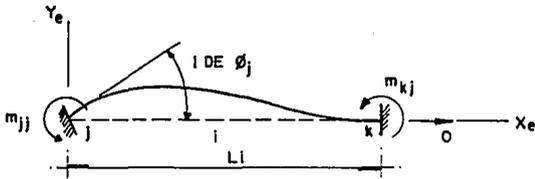
En una barra plana, la matriz de flexibilidad del elemento es

$$[f_e]_1 = \begin{bmatrix} L/3EI & -L/6EI & 0 \\ -L/6EI & L/3EI & 0 \\ 0 & 0 & L/AE \end{bmatrix} \quad (\text{Op.Cit., Ec.8-64a})$$

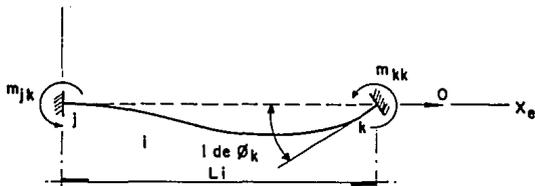
Por lo tanto

$$[k_e]_1 = \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L & 0 \\ 2EI/L & 4EI/L & 0 \\ 0 & 0 & AE/L \end{bmatrix} \quad (\text{Op.Cit., Ec.9-26})$$

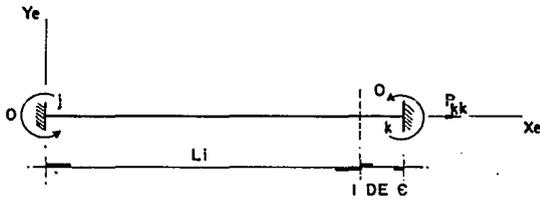
Los elementos de esta matriz se denominan coeficientes básicos de rigidez y son las acciones básicas de los extremos del elemento que se desarrollan al imponer, con sus extremos restringidos, una unidad de uno de los desplazamientos básicos.



(a) COEFICIENTES BASICOS DE RIGIDEZ CORRESPONDIENTES A LA ROTACION UNITARIA DEL EXTREMO j



(b) COEFICIENTES BASICOS DE RIGIDEZ CORRESPONDIENTES A LA ROTACION UNITARIA DEL EXTREMO k



(c) COEFICIENTE BASICO DE RIGIDEZ CORRESPONDIENTE A LA TRASLACION UNITARIA DEL EXTREMO k

FIG. A2-1 IDENTIFICACION DE LOS COFICIENTES BASICOS DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO RESTRINGIDO TYPICO

A2.1 MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO

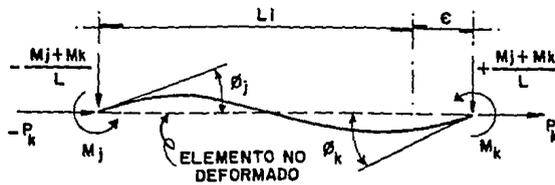


FIG.A2-2a ACCIONES PRODUCIDAS EN LOS EXTREMOS POR DESPLAZAMIENTOS UNITARIOS

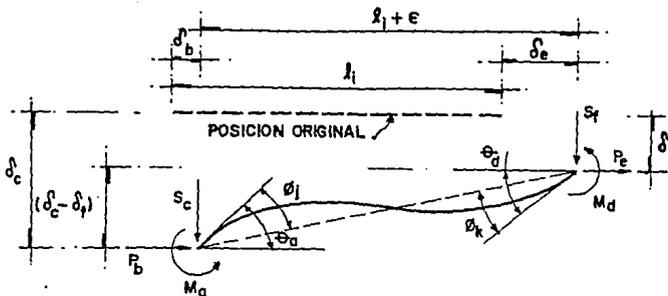


FIG.A2-2b ACCIONES PRODUCIDAS EN LOS EXTREMOS POR DESPLAZAMIENTO GENERALIZADO

Las acciones que se producen en los extremos del elemento debidas al desplazamiento generalizado de los extremos, se expresan en términos de las acciones básicas como sigue:

En el extremo j

$$\begin{aligned} M_a &= M_j \\ P_b &= -P_k \\ S_c &= (M_j + M_k)/L_1 \end{aligned}$$

y en extremo k

$$\begin{aligned} M_d &= M_k \\ P_e &= P_k \\ S_f &= -(M_j + M_k)/L_1 \end{aligned}$$

(Op.Cit., Ecs.9.14a-9.14f)

Matricialmente, las Ecs. 9.14 quedan expresadas como:

$$\begin{bmatrix} M_a \\ P_b \\ S_c \\ M_d \\ P_e \\ S_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/L & 1/L & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/L & -1/L & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_j \\ M_r \\ P_k \end{bmatrix}$$

Es decir

$$[M_o]_i = [TA_o]_i [A_o]_i \quad (\text{Op.Cit., Ec.9-15b})$$

donde

$[A_o]_i$ = acciones básicas de los extremos producidas por el desplazamiento de los extremos del elemento i.

$[M_o]_i$ = acciones generalizadas de los extremos producidas por el desplazamiento generalizado de los extremos del elemento i.

$[TA_o]_i$ = matriz que transforma las acciones básicas de los extremos del elemento i en las acciones generalizadas correspondientes.

Por otro lado

$$[A_o]_i = [k_o]_i [D_o]_i \quad (\text{Op.Cit., Ec.9-8})$$

donde $[D_o]_i$ = matriz de desplazamientos básicos de los extremos del elemento i.

$$y \quad [D_o]_i = [TA_o]_i^T [\delta_o]_i \quad (\text{Op.Cit., Ec.9-18b})$$

donde $[\delta_o]_i$ = matriz de desplazamientos generalizados de los extremos del elemento i.

Sustituyendo la Ec. 9-18b en la Ec.9-8

$$[A_o]_i = [k_o]_i [TA_o]_i^T [\delta_o]_i \quad (\text{Op.Cit., Ec.9-19})$$

Sustituyendo la Ec.9-19 en la Ec.9-15b

$$[M_e]_1 = [TA_e]_1 [A_e]_1 = [k_e]_1 [TA_e]_1^T [\delta_e]_1 \quad (\text{Op.Cit., Ec.9-19})$$

Definiendo $[K_e]_1 = [TA_e]_1 [k_e]_1 [TA_e]_1^T$ (Op.Cit., Ec.9-20)

donde $[K_e]_1 =$ Matriz de Rigidez del elemento, se puede escribir

$$[M_e]_1 = [K_e]_1 [\delta_e]_1 \quad (\text{Op.Cit., Ec.9-22})$$

Desarrollando:

$$[TA_e]_1 \times [k_e]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1/L & -1/L & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/L & 1/L & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L & 0 \\ 2EI/L & 4EI/L & 0 \\ 0 & 0 & AE/L \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L & 0 \\ 0 & 0 & -AE/L \\ -6EI/L & -6EI/L & 0 \\ 2EI/L & 4EI/L & 0 \\ 0 & 0 & AE/L \\ 6EI/L & 6EI/L & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_e]_1 = [TA_e]_1 \times [k_e]_1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 1/L \\ 0 & 0 & -1/L & 1 & 0 & 1/L \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Identificación de los desplazamientos

Identificación de las acciones

		a	b	c	d	e	f	
$[K_e]_1 =$	=	4EI/L	0	-6EI/L ²	2EI/L ²	0	6EI/L ²	a
		0	AE/L	0	0	-AE/L	0	b
		-6EI/L ²	0	12EI/L ³	-6EI/L ²	0	-12EI/L ³	c
		2EI/L	0	-6EI/L ²	4EI/L	0	6EI/L ²	d
		0	-AE/L	0	0	AE/L	0	e
		6EI/L	0	12EI/L ³	6EI/L	0	12EI/L ³	f

Para el caso tratado en esta tesis, en el que no se tomaron en cuenta fuerzas axiales en las barras, la matriz de rigidez del elemento queda:

$$[K_e]_1 = \begin{bmatrix} p & q & r & s \\ 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} p \\ q \\ r \\ s \end{matrix}$$

$$[K_e]_1 \times [\delta_e]_1 = \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_p \\ M_q \\ V_r \\ V_s \end{bmatrix}$$

En forma análoga se pueden obtener las matrices de rigidez para barras con articulación a la derecha y apoyo continuo a la izquierda, así como con articulación a la izquierda y apoyo continuo a la derecha, quedando los resultados que se expresan en las ecuaciones 2 y 4, respectivamente, del capítulo IV.

A2.2 VECTOR DE CARGAS DE EMPOTRAMIENTO

Para obtener el vector de cargas de empotramiento correspondiente a una barra con 2 apoyos continuos (doblemente empotrada), se utilizará el método de la Viga Conjugada. Para ello, el análisis se llevará a cabo en 3 etapas:

a) Barra sometida a una carga linealmente repartida (w), correspondiente a la carga que la barra en cuestión transmite al subsuelo (fig.A2-3).

b) Barra sometida a una carga linealmente repartida (w_r), correspondiente a la reacción del terreno de cimentación sobre la barra que representa a la subestructura. Dicha reacción actúa desde el extremo izquierdo de la barra hasta el centro del claro (fig.A2-4).

c) Barra sometida a una carga linealmente repartida (w_s), correspondiente a la reacción del terreno de cimentación sobre la barra que representa a la subestructura. Dicha reacción actúa desde el extremo derecho de la barra hasta el centro del claro (fig.A2-5).

Una vez obtenidos los momentos y cortantes de empotramiento para cada uno de los casos anteriores, se utilizará el principio de superposición, a través de la suma algebraica de los efectos correspondientes, para obtener el vector de cargas de empotramiento de una barra con 2 apoyos continuos, sometida a la condición de carga que se indica en la fig.4 del capítulo IV, que es el caso que nos interesa.

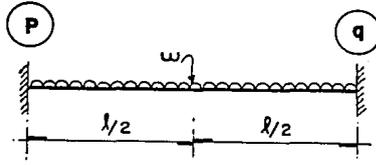


FIG.A2-3 BARRA CON APOYOS CONTINUOS SOMETIDA A CARGA LINEALMENTE REPARTIDA

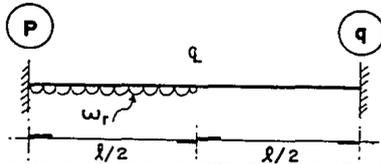


FIG.A2-4 BARRA CON APOYOS CONTINUOS SOMETIDA A CARGA REPARTIDA HASTA EL CENTRO DEL CLARO

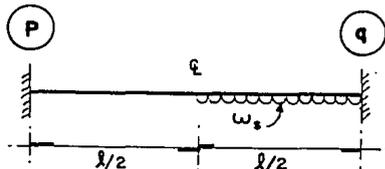
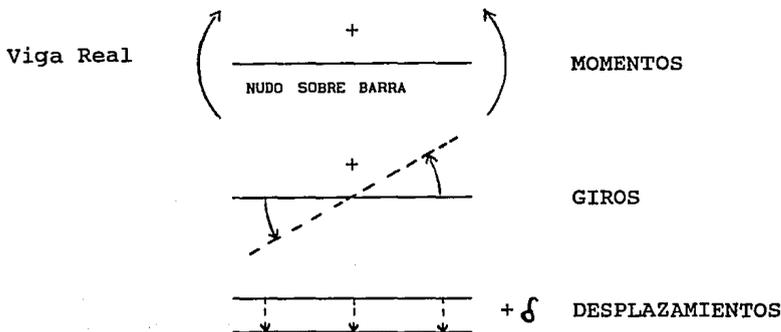
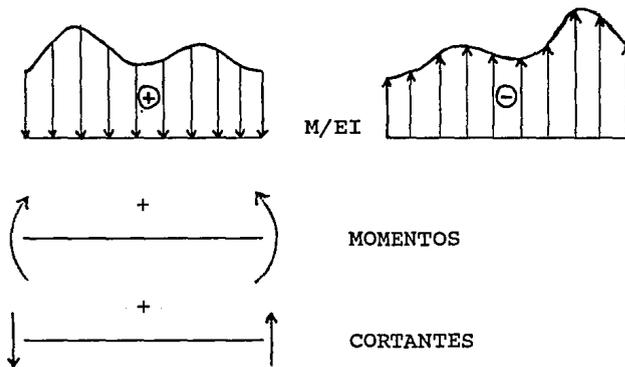


FIG.A2-5 BARRA CON APOYOS CONTINUOS SOMETIDA A CARGA REPARTIDA HASTA EL CENTRO DEL CLARO

La convención de signos utilizada es la siguiente:



Viga Conjugada



Como en los casos b) y c) los diagramas M/EI tienen una parte limitada por un segmento de parábola, se obtuvieron tanto la posición del centroide como el área bajo dicho segmento de parábola, en función de la ecuación que define a la curva ($M = [-w_1/2]x^2 + [3w_1l/8]x$), obteniéndose los siguientes resultados:

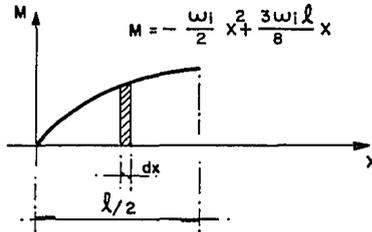


FIG. A2-6 SEGMENTO DE PARABOLA

$$A = \int_0^{l/2} [(-\omega l/2)x^2 + (3\omega l/8)x] dx = 5\omega l^3/192$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\int_0^{l/2} x \, dA}{A} = 3/5(l/2) \quad ; \quad \bar{x}_2 = 2/5(l/2)$$

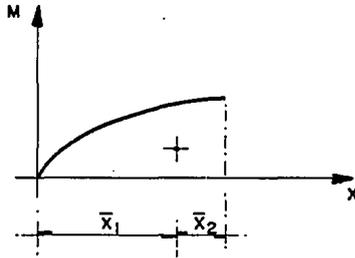


FIG. A2-7 POSICION DEL CENTROIDE DEL SEGMENTO DE PARABOLA

CASO a) fig.A2-8

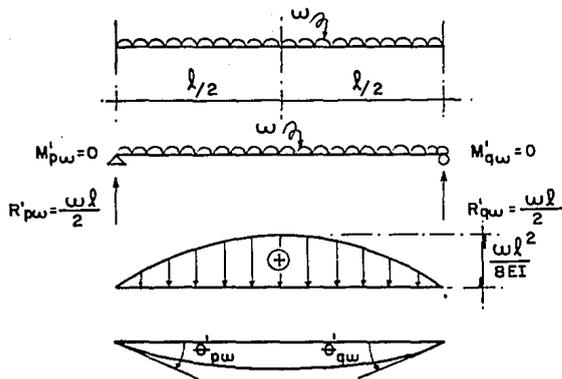


FIG.A2-8 VIGA CONJUGADA

$$\zeta + \Sigma M_q = -[(4/3)(l/2)(wl^2/8EI)](l/2) + (-\theta'_{pw})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta'_{pw} = -wl^3/24EI$$

$$\zeta + \Sigma M_p = +[(4/3)(l/2)(wl^2/8EI)](l/2) - (+\theta'_{qw})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta'_{qw} = wl^3/24EI$$

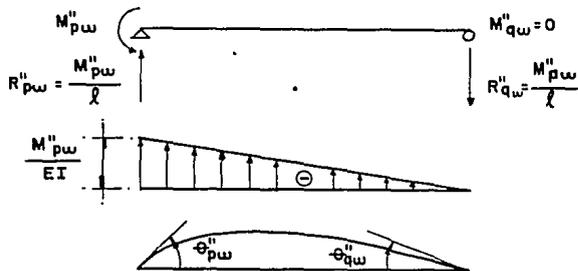


FIG.A2-8b VIGA CONJUGADA

$$\zeta + \Sigma M_q = + (M''_{pw}/2EI)(2l/3) + (-\theta''_{pw})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta''_{pw} = M''_{pw}/3EI$$

$$\zeta + \Sigma M_p = - (M''_{pw}/2EI)(l/3) + (-\theta''_{qw})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta''_{qw} = -M''_{pw}/6EI$$

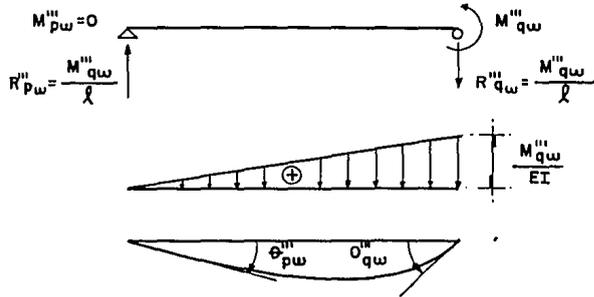


FIG.A2-8c VIGA CONJUGADA

$$\uparrow \Sigma M_q = -(M'''_{qw}/2EI)(l/3) + (-\theta'''_{pw})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta'''_{pw} = -M'''_{qw}l/6EI$$

$$\uparrow \Sigma M_p = +((M'''_{qw}l/2EI)(2l/3) + (-\theta'''_{qw})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta'''_{qw} = M'''_{qw}l/3EI$$

Por condición de empotramiento:

$$\theta'_{pw} + \theta''_{pw} + \theta'''_{pw} = 0, \text{ entonces } -wl^3/24EI + M'''_{pw}l/3EI - M'''_{pw}l/6EI = 0$$

$$\theta'_{qw} + \theta''_{qw} + \theta'''_{qw} = 0, \text{ entonces } wl^3/24EI - M'''_{pw}l/6EI + M'''_{pw}l/3EI = 0$$

$$(1/3)M'''_{pw} - (1/6)M'''_{qw} = wl^2/24 \quad (A2.1)$$

$$-(1/6)M'''_{pw} + (1/3)M'''_{qw} = -wl^2/24 \quad (A2.2)$$

Resolviendo el sistema formado por las Ecs. A2.1 y A2.2

$$M'''_{qw} = -wl^2/12$$

$$M'''_{pw} = wl^2/12$$

$$R'_{pw} = wl/2$$

$$R'_{qw} = wl/2$$

$$R''_{pw} = -wl/2$$

$$R''_{qw} = -wl/2$$

Superponiendo efectos:

$$M_{pw} = M'_{pw} + M''_{pw} + M'''_{pw} = 0 + wl^2/12 + 0$$

$$M_{pw} = wl^2/12$$

$$M_{qw} = M'_{qw} + M''_{qw} + M'''_{qw} = 0 + 0 - wl^2/12$$

$$M_{qw} = -wl^2/12$$

$$R_{pw} = R'_{pw} + R''_{pw} + R'''_{pw} = -wl/2 - (wl/12) - (-wl/12)$$

$$R_{pw} = -wl/2$$

$$R_{qw} = R'_{qw} + R''_{qw} + R'''_{qw} = -wl/2 + (wl/12) + (-wl/12)$$

$$R_{qw} = -wl/2$$

CASO b) fig.A2.9

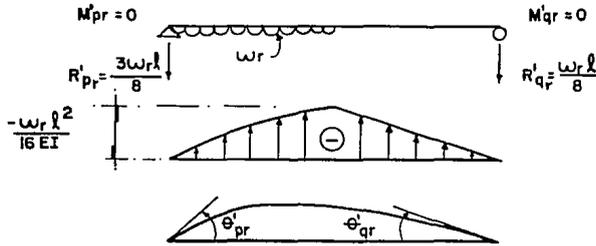


FIG.A2-9a VIGA CONJUGADA

$$\sum M_q = w_r(1/2)(1/4 + 1/2) - R'_{pr}l = 0, \text{ entonces}$$

$$R'_{pr} = 3w_r l/8$$

$$\sum F_y = w_r l/2 - 3w_r l/8 - R'_{qr} = 0, \text{ entonces}$$

$$R'_{qr} = w_r l/8$$

Para $0 < x < 1/2$, $M = (-3w_r l/8)x + w_r x^2/2$; si $x = 1/2$,
 $M = -w_r l^2/16$

$$\sum M_q = +(5w_r l^3/192EI)[(2/5)(1/2) + 1/2] + (w_r l^3/64EI)(1/3) - (\theta'_{pr})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta'_{pr} = 9w_r l^3/384EI$$

$$\sum M_p = -(5w_r l^3/192EI)[(3/5)(1/2)] - (w_r l^3/64EI)(1/6 + 1/2) + (-\theta'_{qr})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta'_{qr} = -7w_r l^3/384EI$$

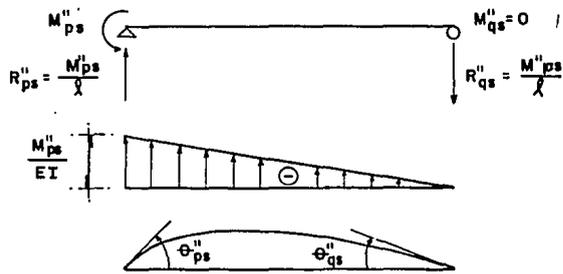


FIG. A2-9b VIGA CONJUGADA

$$\sum M_q = (M''_{ps}/EI)(1/2)(2l/3) + (\theta''_{ps})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta''_{ps} = M''_{ps}l/3EI$$

$$\sum M_p = -(M''_{ps}l/2EI)(1/3) + (-\theta''_{qs})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta''_{qs} = -M''_{ps}l/6EI$$

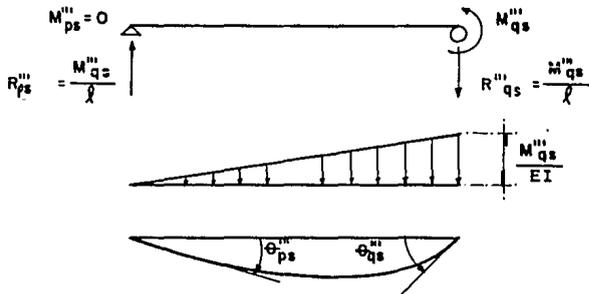


FIG. A2-9c VIGA CONJUGADA

$$\sum M_q = -(M'''_{qs}l/2EI)(1/3) + (-\theta'''_{ps})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta'''_{ps} = -M'''_{qs}l/6EI$$

$$\zeta + \Sigma M_p = (M''''_q/EI)(1/2)(2l/3) + (-\theta''''_q)l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta''''_q = M''''_q l/3EI$$

Por condición de empotramiento:

$$\theta'_{pr} + \theta''_{pr} + \theta'''_{pr} = 0, \text{ entonces } 9w_r l^3/384EI + M''_{pr} l/3EI + M'''_{pr} l/6EI = 0$$

$$\theta'_{qr} + \theta''_{qr} + \theta'''_{qr} = 0, \text{ entonces } -7w_r l^3/384EI - M''_{pr} l/6EI + M'''_{qr} l/3EI = 0$$

$$(1/3)M''_{pr} - (1/6)M'''_{qr} = -9w_r l^2/384 \quad (A2.3)$$

$$(-1/6)M''_{pr} + (1/3)M'''_{qr} = 7w_r l^2/384 \quad (A2.4)$$

Resolviendo el sistema formado por las Ecs. A2.3 y A2.4

$$M'''_{qr} = 5w_r l^2/192$$

$$M''_{pr} = -11w_r l^2/192$$

$$R''_{pr} = -11w_r l/192$$

$$R''_{qr} = -11w_r l/192$$

$$R'''_{pr} = 5w_r l/192$$

$$R'''_{qr} = 5w_r l/192$$

Superponiendo efectos:

$$M_{pr} = M'_{pr} + M''_{pr} + M'''_{pr} = 0 - 11w_r l^2/192 + 0$$

$$M_{pr} = -11w_r l^2/192$$

$$M_{qr} = M'_{qr} + M''_{qr} + M'''_{qr} = 0 + 0 + 5w_r l^2/192$$

$$M_{qr} = 5w_r l^2/192$$

$$R_{pr} = R'_{pr} + R''_{pr} + R'''_{pr} = 3w_r l/8 - (-11w_r l/192) - (5w_r l/192)$$

$$R_{pr} = 13w_r l/32$$

$$R_{qr} = R'_{qr} + R''_{qr} + R'''_{qr} = w_r l/8 + (-11w_r l/192) + (5w_r l/192)$$

$$R_{qr} = 3w_r l/32$$

CASO c) fig.A2.10

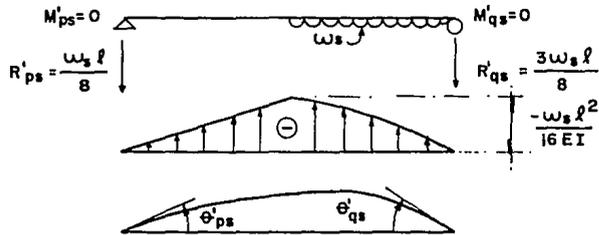


FIG.A2-10a VIGA CONJUGADA

$$\left(\begin{array}{l} + \\ \Sigma M_q \end{array} = (w_s l / 2) (1/4) - R'_{ps} l = 0, \text{ entonces} \right.$$

$$R'_{ps} = w_s l / 8$$

$$\left(\begin{array}{l} + \\ \Sigma F_y \end{array} = w_s l / 2 - w_s l / 8 - R'_{qs} = 0, \text{ entonces} \right.$$

$$R'_{qs} = 3w_s l / 8$$

Para $0 < x < l/2$, $M = (-w_s l / 8)x$; Si $x = l/2$, $M = -w_s l^2 / 16$

$$\left(\begin{array}{l} + \\ \Sigma M_q \end{array} = (w_s l^2 / 16EI) (1/2) (1/2) (1/6 + 1/2) + (5w_s l^3 / 192) (3/5) (1/2) - (\theta'_{ps}) = 0, \text{ entonces} \right.$$

$$\theta'_{ps} = 7w_s l^3 / 384EI$$

$$\left(\begin{array}{l} + \\ \Sigma M_p \end{array} = (-w_s l^3 / 64EI) (1/3) - (5w_s l^3 / 192EI) [(2/5) (1/2) + 1/2] + (-\theta'_{qs}) = 0, \text{ entonces} \right.$$

$$\theta'_{qs} = -9w_s l^3 / 384EI$$

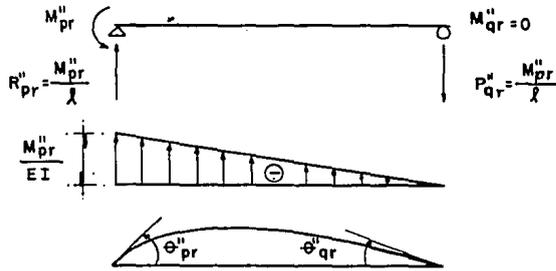


FIG.A2-10b VIGA CONJUGADA

$$\zeta + \Sigma M_q = (M''_{pr}/EI) (1/2) (2l/3) + (-\theta''_{pr})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta''_{pr} = M''_{pr}l/3EI$$

$$\zeta + \Sigma M_p = -(M''_{pr}/EI) (1/2) (l/3) - (\theta''_{qr})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta''_{qr} = M''_{pr}l/6EI$$

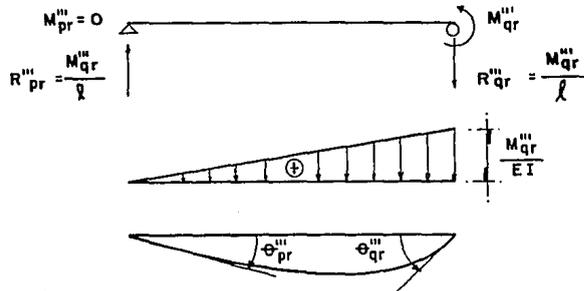


FIG.A2-10c VIGA CONJUGADA

$$\zeta + \Sigma M_q = -(M'''_{qr}/EI) (1/2) (l/3) + (-\theta'''_{pr})l = 0, \text{ entonces}$$

$$\theta'''_{pr} = -M'''_{qr}l/6EI$$

$$\left(\sum M_p = -(M''''_q l/2EI)(2l/3) - (\theta'''_q)l = 0 \right), \text{ entonces}$$

$$\theta'''_q = M''''_q l/3EI$$

Por condición de empotramiento:

$$\theta'_{ps} + \theta''_{ps} + \theta'''_{ps} = 0, \text{ entonces } 7w_s l^3/384EI + M''_p l/3EI - M'''_q l/6EI = 0$$

$$\theta'_{qs} + \theta''_{qs} + \theta'''_{qs} = 0, \text{ entonces } -9w_s l^3/384EI - M''_p l/6EI + M'''_q l/3EI = 0$$

$$(1/3)M''_p - (1/6)M'''_q = -7w_s l^2/384 \quad (A2.5)$$

$$-(1/6)M''_p + (1/3)M'''_q = 9w_s l^2/384 \quad (A2.6)$$

Resolviendo el sistema formado por las Ecs. A2.5 A2.6

$$M'''_q = 11w_s l^2/192$$

$$M''_p = -5w_s l^2/192$$

$$R''_p = -5w_s l/192$$

$$R''_q = -5w_s l/192$$

$$R'''_p = 11w_s l/192$$

$$R'''_q = 11w_s l/192$$

Superponiendo efectos:

$$M_{ps} = M'_p + M''_p + M'''_p = 0 - 5w_s l^2/192 + 0$$

$$M_{ps} = -5w_s l^2/192$$

$$M_{qs} = M'_{qs} + M''_{qs} + M'''_{qs} = 0 + 0 + 11w_s l^2 / 192$$

$$M_{qs} = 11w_s l^2 / 192$$

$$R_{ps} = R'_{ps} + R''_{ps} + R'''_{ps} = w_s l / 8 - (-5w_s l / 192) - (11w_s l / 192)$$

$$R_{ps} = 3w_s l / 32$$

$$R_{qs} = R'_{qs} + R''_{qs} + R'''_{qs} = 3w_s l / 8 - (-5w_s l / 192) + (11w_s l / 192)$$

$$R_{qs} = 13w_s l / 32$$

Finalmente, superponiendo los casos a), b) y c), se obtiene el vector de cargas de empotramiento de la barra con 2 apoyos continuos:

$$P_{em} = \begin{vmatrix} +w l^2 / 12 - 11r_r l^2 / 192 - 5r_s l^2 / 192 \\ -w l^2 / 12 + 5r_r l^2 / 192 + 11r_s l^2 / 192 \\ -w l / 2 + 13r_r l / 32 + 3r_s l / 32 \\ -w l / 2 + 3r_r l / 32 + 13r_s l / 32 \end{vmatrix}$$

En forma análoga se pueden obtener los vectores de cargas de empotramiento para barras con articulación a la derecha y apoyo continuo a la izquierda, así como con articulación a la izquierda y apoyo continuo a la derecha, dando los resultados que se expresan en las ecuaciones 3 y 5, respectivamente, del capítulo IV.

REFERENCIAS

- 1.- BEAUFAIT, F. Análisis estructural. Prentice-Hall Internacional, E.U.A., 1977.
- 2.- BROWN, P.T. "Raft foundations". Postgraduate course on analysis of settlement of foundations, School of Civil Engineering, Univ of Sydney, 1969.
- 3.- CASTILLO, H. Análisis y diseño estructural. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., México, 1973.
- 4.- CHAMECKI, S. "Structural rigidity in calculating settlements". Journal of Soil Mech and Found Division. Proc ASCE, Vol 88, No SM1, enero 1956.
- 5.- DAMY, J., ESTEVA, L. y GUERRA, R. "Métodos incrementales en el análisis de cimentaciones continuas sobre terreno compresible", Memoria del 1^{er} Congreso Nal sobre Ing Estructural. Soc Mex de Ing Estructural, México, 1977.
- 6.- DAMY, J. "Integración de las superficies de Boussinesq, Westergaard y Frölich, sobre superficies poligonales de cualquier forma, cargadas con fuerzas verticales uniformemente repartidas". Rev Ingeniería, No 1, 1985.
- 7.- DEMENEGHI, A. "Un método para el análisis conjunto de la estructura y el suelo". Rev Ingeniería, Vol XLIX, No 3, 1979.
- 8.- DEMENEGHI, A. "Interacción suelo-estructura". Rev Ingeniería, Vol LIII, No 4, 1983.
- 9.- DEMENEGHI, A. "Non-iterative method for the analysis of soil-structure interaction". Proc of the XI Int Conf on Soil Mechanics and Foundation Engineering, San Francisco, 1985.

- 10.- DEMENEGHI, A. "Interacción estática suelo-estructura". Memorias del Simposio sobre Interacción Suelo-Estructura y Diseño Estructural de Cimentaciones, Soc Mex de Mecánica de Suelos, México, 1991.
- 11.- DEMENEGHI, A. "Interacción estática suelo-estructura. Análisis tridimensional". Rev Ingeniería, Vol LXII, 1992.
- 12.- FLORES VICTORIA, A. Análisis de cimentaciones sobre suelos compresibles. Instituto de Ingeniería, No 171, julio 1968.
- 13.- FLORES VICTORIA, A. y ESTEVA, L. Análisis y diseño de cimentaciones sobre terreno compresible. Instituto de Ingeniería, No 258, febrero 1970.
- 14.- LAMBE, T. W. y WHITMAN, R. V. Mecánica de suelos. Limusa, México, 1972.
- 15.- MEYERHOF, G. G. "Some recent foundation research and its application to design". Struct. Engr., London, Vol. 31, pp 151-167, 1953.
- 16.- MEYERHOF, G. G. "Soil-structure interaction and foundations". Memorias del 6^o Congreso Pan de Mec de Suelos e Ing de Cimentaciones, Lima, Perú, 1979.
- 17.- POULOS, H.G., DAVIS, E.H. Elastic solutions for soil and rock mechanics. John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- 18.- SANCHEZ MARTINEZ, J. L. y ENRIQUEZ, P. "Un método de solución al problema de interacción suelo-estructura en cimentaciones someras". Memorias del 3^{er} Congreso Nal de Ing Estructural, Morelia, Mich, 1982.
- 19.- SOMMER, H. "A method for the calculation of settlements, contact pressures and bending moments in a foundation including the influence of the flexural rigidity of the superstructure". Proc of the VI Int Conf Soil Mech, Vol 2, pp 197-201, Montreal, Canadá, 1965.

- 20.- TERZAGHI, K. y PECK, R. B. Soil mechanics in engineering practice. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.
- 21.- ZEEVAERT, L. Foundation Engineering for difficult subsoil conditions. Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York, 1973.
- 22.- ZEEVAERT, L. Interacción suelo-estructura de cimentaciones superficiales y profundas, sujetas a cargas estáticas y sísmicas. Limusa, México, 1980.
- 23.- ZEEVAERT, L. Foundation Engineering for difficult subsoil conditions. 2nd edition, Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York, 1983.