29
2 ej.

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

## FACULTAD DE CIENCIAS

# UN CURSO DE ALGEBRA PARA BACHILLERATO

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

MARIA VICTORIA POPOCA YAÑEZ



México, D. F. 1994

**M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE**
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a **Usted**, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron __la__ pasante(s) __________

MARIA VICTORIA POPOCA YAÑEZ

con número de cuenta 7594389-7 con el Título: UN CURSO DE ALGEBRA PARA BACHILLERATO

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y **consideramos** que a la brevedad **deberá** presentar su Examen Profesional para obtener el título de MATEMATICO

| GRADO | NOMBRE(S) APELLIDOS COMPLETOS | FIRMA |
|---|---|---|
| Director de Tesis | MAT. ISABEL HERRERA DURAN | Isabel Herrera |
| | M. en C. MA. ELENA GARCIA ALVAREZ | |
| | DR. ALEJANDRO JAVIER DIAZ BARRIGA CASALES | |
| Suplente | M. En C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA | |
| Suplente | DRA. BERTHA MARIA TOME ARREOLA | Bertha Tomé |

A mis padres:
Esperanza y Antonino
Con mucho cariño, por todo su apoyo y
confianza que siempre me tuvieron.

A mis hijos:
Jorge y Omar
Por su comprensión y paciencia.

A mi esposo:
Alejandro
Con amor.

A mis hermanos:
Elvia, Odi, Sandra
Pera y Rigo
Por el cariño y la
unión que existe
entre nosotros.

Quiero agradecer en especial a la directora de esta tesis:

Mat. Isabel Herrera Durán

Por todo el esfuerzo, apoyo y los consejos que recibí de ella para la elaboración de este trabajo.

También quiero agradecer por toda la cooperación que me brindaron a los demás sinodales de la comisión dictaminadora que colaboraron en este trabajo.

M. en C. Ma. Elena García Alvarez.

Dra. Bertha María Tamé Arreola.

Dr. Alejandro Javier Díaz Barriga Casales.

M. en C. Alejandro Bravo Mojica.

# I N D I C E

LA MATEMATICA EN EL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES.

El Colegio de Cencias y Humanidades surge principalmente, por la necesidad de la Universidad de tener nuevas instituciones que desarrollen las ciencias y humanidades tomando en cuenta la modificación y perfeccionamiento de los conocimientos en la actualidad; es decir que los planes de enseñanza puedan adecuarse agilmente a su intenso ritmo de cambio, sin tener que cambiar necesaria e inmediatamente toda la estructura Universitaria.

Además de esto se pretende que este ciclo escolar prepare jovenes capaces de cursar estudios que vinculen las humanidades, las ciencias y las técnicas. Para lograr esto, el aprendizaje en este ciclo escolar es de tal manera que se combinen el estudio en las aulas, en el laboratorio y la comunidad; tratando de que con todo esto el estudiante logre tener una cultura universal, es decir una visión general del desarrollo, complejidad e integración del conocimiento humano; con el fin de que conozca la relación entre las distintas ciencias y ramas del conocimiento para que pueda tener el educando capacidad de decisión y crítica, y se pueda desenvolver en la sociedad adecuadamente según las necesidades que le vayan surgiendo.

Otro de los objetivos de este ciclo de enseñanza es proporcionar al educando educación a nivel medio superior indispensable para aprovechar las alternativas profesionales académicas, ya sea, tradicionales o modernas, y para que pueda decidirse por alguna de ellas; esto se logra por medio del dominio de los métodos fundamentales del conocimiento como el método experimental e histórico social, los lenguajes como son el español y las matemáticas.

Esto nos hace ver que cada una de las diferentes areas es indispensable para el completo desarrollo y conocimiento del educando, así la falta de alguna de estas áreas haría ver las cosas de una manera parcial y la cultura y formación del alumno no sería Universal.

Por esto es que el área de matemáticas como todas las demás es indispensable para el completo desarrollo del educando.

La materia de Algebra pertenece al área de matemáticas. Esta materia se imparte en el segundo semestre del ciclo bachillerato del CCH plantel oriente, es la materia que nos da las nociones básicas para poder realizar los objetivos que se plantea esta área; uno de ellos es "Lograr que el alumno represente fenómenos y situaciones reales, mediante símbolos desarrollando modelos y obteniendo relaciones entre los símbolos utilizados ya sea por medio de la inducción, deducción y analogía". Otro de los objetivos que se plantea es que " El alumno integrará el conocimiento de la teoría de los conjuntos, los modelos matemáticos, los lenguajes numéricos, algebraico y geométrico, los principios del cálculo, la estadística y la lógica en una visión general de las matemáticas".

Esta integración a pesar de ser general debe lograrse para que el alumno se de cuenta de la utilidad de las matemáticas en la solución de problemas prácticos.

Para que el alumno logre vincular a las matemáticas con otras ciencias, que vea la relación que existe entre otras disciplinas y las matemáticas, ya que las matemáticas para su aplicación requiere de ejemplos objetivos dado su caracter bastante abstracto, y las otras ciencias requieren de herramientas matemáticas para sistematizar, formalizar y comprobar fenómenos pasados y para aprobar fenómenos futuros, ya que para esto es indispensable la utilización de modelos donde hay que seleccionar las variables adecuadas en un cierto fenómeno o evento estableciendo sus relaciones funcionales, esto es esencial para describir muchos fenómenos naturales. En la mayoría de las ciencias la formulación de un modelo es el principal objetivo ya que este suele ser una descripción más accesible de los fenómenos, y una ves que se que se adapte solamente a las necesidades que se requieren para el curso de Matematicas II en el CCH Oriente, ya que la mayoria de maestros recomendamos folletos o libros de algrebra en los cuales solo se adaptan partes de algunos temas, y al estudiante no le queda muy clara la idea de la estructura del curso. Uno de los objetivos de este trabajo es el de reforzar y compactar los temas (que se estipulan en el plan de estudios del bachillerato del CCH), mediante teoria ejercicios y aplicaciones pretendiendo que sirva al estudiante para aclarar conceptos, adquirir habilidades en el manejo de expresiones algebraicas fundamentales y al mismo tiempo que el estudiante mejore su rutina de estudio y su técnica de autoaprendizaje, para que pueda aprobar la materia sin mucha dificultad.

Este material esta planeado para que se cubra en un semestre adaptandose al plan de estudios del bachillerato del CCH ORIENTE.

Contiene los siguientes temas:

Tema I.- Aritmética del conjunto de los números Reales.
Tema II.- Operaciones algebraicas básicas.
Tema III.- Factorización de polinomios.
Tema IV.- Ecuaciones de primer grado.
Tema V.- Fracciones algebraicas.
Tema VI.- Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incognitas.
Tema VII.- Ecuaciones de segundo grado en una variable.
Tema VIII.- Exponentes y Radicales.
Tema IX.- Desigualdades e inecuaciones lineales.

Espero que el material que viene a continuación sirva de apoyo y facilíte tanto al profesor como al alumno lograr los objetivos del curso de MATEMATICAS II si no en su totalidad si en la mayor parte.

Por esto es que el área de matemáticas como todas las demás es indispensable para el completo desarrollo del educando.

La materia de Algebra pertenece al área de matemáticas. Esta materia se imparte en el segundo semestre del ciclo bachillerato del CCH plantel oriente, es la materia que nos da las nociones básicas para poder realizar los objetivos que se plantea esta área; uno de ellos es "Lograr que el alumno represente fenómenos y situaciones reales, mediante símbolos desarrollando modelos y obteniendo relaciones entre los símbolos utilizados ya sea por medio de la inducción, deducción y analogía". Otro de los objetivos que se plantea es que " El alumno integrará el conocimiento de la teoría de los conjuntos, los modelos matemáticos, los lenguajes numéricos, algebraico y geométrico, los principios del cálculo, la estadística y la lógica en una visión general de las matemáticas".

Esta integración a pesar de ser general debe lograrse para que el alumno se de cuenta de la utilidad de las matemáticas en la solución de problemas prácticos.

Para que el alumno logre vincular a las matemáticas con otras ciencias, que vea la relación que existe entre otras disciplinas y las matemáticas, ya que las matemáticas para su aplicación requiere de ejemplos objetivos dado su caracter bastante abstracto, y las otras ciencias requieren de herramientas matemáticas para sistematizar, formalizar y comprobar fenómenos pasados y para aprobar fenómenos futuros, ya que para esto es indispensable la utilización de modelos donde hay que seleccionar las variables adecuadas en un cierto fenómeno o evento estableciendo sus relaciones funcionales, esto es esencial para describir muchos fenómenos naturales. En la mayoría de las ciencias la formulación de un modelo es el principal objetivo ya que este suele ser una descripción más accesible de los fenómenos, y una ves que se construye este modelo, las matemáticas se encargan de las reglas y operaciones que deban de ejecutarse.

Así que, si el estudiante comprende y aprende bien las nociones básicas y elementales de las matemáticas irá desarrollando habilidad en el manejo de los conceptos matemáticos, manejando un lenguaje y simbología apropiada para obtener lo necesario para que de manera práctica pueda relacionar estos conocimientos con las otras ciencias.

El álgebra que se imparte en el ciclo Bachillerato, el mayor de sus objetivos es de que el alumno logre desarrollar habilidad en el manejo y operacionalidad en los modelos matemáticos, ya que el álgebra nos proporciona las reglas fundamentales para manejar el lenguaje y simbolismo apropiado en todo modelo matemático.

**Así mi principal objetivo en esta tesis es que el alumno logre desarrollar habilidad en el manejo de conceptos como las expresiones y modelos algebraicos, sobre todo en las estrategias que debe seguir para resolver problemas específicos.**

Estas para mí son las bases para que el alumno pueda seguir sin alguna dificultad en otras ramas de la matemática que se estudian en este ciclo escolar, ya que todas las ramas de la matemática estan interrelacionadas entre sí; algunas se derivan de otras o son parte una de la otra, así que si un alumno no aprende lo indispensable del algebra va ha tener muchas dificultades con cualquier otra rama de las matemáticas y sobre todo no podra manejar, ni trabajar un modelo o una expresión algebraica que nos de la solución de ciertos problemas específicos y dificilmente logrará ver la relación de las matemáticas con las otras ciencias.

He observado que los estudiantes de bachillerato carecen de un texto que se adapte solamente a las necesidades que se requieren para el curso de Matematicas II en el CCH Oriente, ya que la mayoria de maestros recomendamos folletos o libros de algrebra en los cuales solo se adaptan partes de algunos temas, y al estudiante no le queda muy clara la idea de la estructura del curso. Uno de los objetivos de este trabajo es el de reforzar y compactar los temas (que se estipulan en el plan de estudios del bachillerato del CCH), mediante teoria ejercicios y aplicaciones pretendiendo que sirva al estudiante para aclarar conceptos, adquirir habilidades en el manejo de expresiones algebraicas fundamentales y al mismo tiempo que el estudiante mejore su rutina de estudio y su técnica de autoaprendizaje, para que pueda aprobar la materia sin mucha dificultad.

Este material esta planeado para que se cubra en un semestre adaptandose al plan de estudios del bachillerato del CCH ORIENTE.

Contiene los siguientes temas:

Tema I.- Aritmética del conjunto de los números Reales.
Tema II.- Operaciones algebraicas básicas.
Tema III.- Factorización de polinomios.
Tema IV.- Ecuaciones de primer grado.
Tema V.- Fracciones algebraicas.
Tema VI.- Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incognitas.
Tema VII.- Ecuaciones de segundo grado en una variable.
Tema VIII.- Exponentes y Radicales.
Tema IX.- Desigualdades e inecuaciones lineales.

Espero que el material que viene a continuación sirva de apoyo y facilite tanto al profesor como al alumno lograr los objetivos del curso de MATEMATICAS II si no en su totalidad si en la mayor parte.

## ¿ QUE ES ALGEBRA ?

El origen del álgebra es desconocido, pero podemos asegurar que se desarrolló desde que el hombre aprendió a contar, y los grandes avances que se han dado en el álgebra se deben a las necesidades y el interés que el hombre siempre ha tenido por los números.

En la actualidad el álgebra es una de las herramientas indispensables en la ciencia, en la ingeniería y en la tecnología.

El álgebra no es complicada, es fácil de manejar como la aritmética, lo atractivo del álgebra es que te permitirá ir adquiriendo facilidad para resolver problemas que te pudierón haber sido difíciles. También te hará tener una visión más amplia del mundo de los números.

EL ÁLGEBRA SE OCUPA DE LOS NÚMEROS Y DE LAS OPERACIONES QUE CON ELLOS EFECTUA, ES DECIR DE SISTEMAS MATEMÁTICOS.

El fundamental de ellos es el sistema numérico; el algebra elemental es una generalización de la aritmética, en la aritmética usamos números reales que son **números específicos** mientras que en álgebra usamos letras que son considerados como **números generales** o **literales**. Los números **literales** que se utilizan en álgebra nos permiten considerar propiedades generales de los números.

La mayoria de problemas que pueden resolverse en álgebra se basan en operaciones del aritmética; las más importantes son suma, resta, multiplicación y división.

Así que para empezar a estudiar el álgebra sin mucha dificultad primero recordaremos y aprenderemos algunas cosas nuevas de la Aritmética y después ampliaremos lo aprendido con **números generales**.

TEMA I

# ARITMETICA DE LOS NUMEROS REALES

1.1 El conjunto de los Números Naturales.
1.2 El conjunto de los Números Enteros.
1.3 El conjunto de los Números Racionales.
1.4 El conjunto de los Números Irracionales y Reales.

INTRODUCCION

En este tema se desarrolla el sistema de los números reales de una manera básica. Se presentan propiedades y leyes que son fundamentales para el desarrollo de ciertos conceptos algebraicos que se verán más adelante. También se verán las cuatro operaciones básicas que son: **suma, resta, producto ó multiplicación y la división.**

---

## 1.1 EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES

Los números Naturales son aquellos números con los que podemos contar, estos son representados por la letra $\mathbb{N}$.

Asi $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,......\}$ y se representan como puntos situados a la misma distancia uno del otro sobre una recta numérica, un número mayor siempre estará a la derecha del menor (Figura 1.1).

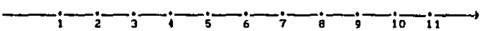



**Figura 1.1**

Estos números surgieron por la necesidad de contar, podemos agregar siempre 1 a cualquier número natural y se obtiene el siguiente.

Por esto el conjunto de los números naturales no tiene fin ya que siempre hay un número natural mayor que otro, es decir no existe el más grande.

Así que el conjunto de los números naturales es infinito.

Los números Naturales son los primeros números que conocemos y utilizamos para hacer nuestras operaciones básicas ; pero cada una de estas operaciones deben de cumplir ciertas propiedades que son las siguientes.

**L A  S U M A**

Con los números Naturales podemos efectuar una operación binaria, llamada SUMA la representamos con el signo +, y a cada número que compone la suma se le llama sumando.

EJEMPLO: La suma de 5 y 9 se representa por 5 + 9; donde 5 es el primer sumando y 9 el segundo sumando.

LAS PROPIEDADES DE LA SUMA SON:

CERRADURA

| |
|---|
| Si $a , b \in \mathbb{N}$ se cumple<br>$a + b \in \mathbb{N}$ |

Es decir: Si sumamos dos números Naturales el resultado es otro número Natural.

EJEMPLOS: 1) $2 + 7 \in \mathbb{N}$

2) $9 + 18 \in \mathbb{N}$

3) $42 + 21 \in \mathbb{N}$

LEY CONMUTATIVA

| |
|---|
| Si $a , b \in \mathbb{N}$ se cumple<br>$a + b = b + a$ |

Es decir: Al sumar dos números Naturales no importa el orden, obtenemos el mismo resultado.

EJEMPLOS: 1) $3 + 5 = 5 + 3$

2) $8 + 15 = 15 + 8$

3) $27 + n = n + 27$ ; $n \in N$

LEY ASOCIATIVA

| Si a, b, c $\in$ N se cumple $a + (b + c) = (a + b) + c$ |
|---|

Es decir: Al sumar tres números Naturales, se puede sumar el primero con la suma de de los dos restantes, ó la suma de los dos primeros con el tercero; y se obtiene el mismo resultado.

EJEMPLOS: 1) $7 + (3 + 9) = (7 + 3) + 9$

2) $8 + ( 17 + n) = (8 + 17) + n$ ; $n \in N$

3) $(24 + 2) + 31 = 24 + (2 + 31)$

NOTA

| La suma es una operación binaria, pero se puede extender para la suma de tres o más sumandos. |
|---|

EJEMPLOS: 1) $7 + 3 + 6 = (7 + 3) + 6 = 10 + 6 = 16$

2) $9+2+11+3= (9+2) + (11+3) = 11 + 14 = 25$

3) $14 + 8 + 37 = 14 + (8 + 37) = 14 + 45 = 59$

**EJERCICIOS 1.1.1**

En cada operación escribe en el lado derecho la propiedad que se está aplicando.

1) $8 + 15 = 15 + 8$ propiedad__________________

2) $(3 + 18) + 7 = 3 + (18 + 7)$ propiedad__________________

3) $(2 + 6) + 5 = 5 + (2 + 6)$ propiedad________________

4) $9 + (4 + 8) = 9 + (8 + 4)$ propiedad________________

5) $3 + [7 + (5+1)] = [3 + 7] + (5+1)$ propiedad________________

6) $7 + [2 + (4+3)] = 7 + [(2+4) + 3]$ propiedad________________

7) $(5+2) + (3+7) = (3+7) + (5+2)$ propiedad________________

8) $[(8+6) + 4] + n = [8 + (6+4)] + n$ propiedad________________

## L A M U L T I P L I C A C I O N

Otra de las operaciones binarias que se pueden efectuar con los números Naturales es la multiplicación ó producto, esta operación se representa de las siguientes maneras:

- El producto de dos números específicos: 7 y 3 se representa como $7x3$ ó $(7)(3)$ ó $7(3)$ ó $7 \cdot 3$ .

- El producto de un número específico y uno literal: 5 y **a** se representa por $5x\mathbf{a}$ ó $(5)(\mathbf{a})$ ó $5\mathbf{a}$ ó $5 \cdot a$ .

- El producto de dos números literales se representa de la siguiente manera **a** x **b** ó **a**·**b** ó **a**(**b**) ó (**a**)(**b**) ó **ab**.

A cada uno de los números que se multiplican entre si se les llama FACTORES.

LAS PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION SON:

CERRADURA

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } a\ ,\ b \in \mathbb{N} \text{ se cumple} \\ a \times b \in \mathbb{N}\end{array}}$$

Es decir: Si multiplicamos dos números Naturales, el resultado es otro número Natural.

EJEMPLOS: 1) $2 \times 17 \in \mathbb{N}$

2) $5 \times 29 \in \mathbb{N}$

3) $32 \times 8 \in \mathbb{N}$

LEY CONMUTATIVA

| Si $a, b \in \mathbb{N}$ se cumple $a \times b = b \times a$ |
|---|

Es decir: No importa el orden en que multipliquemos dos números Naturales ya que el resultado es el mismo.

EJEMPLOS: 1) $3 \times 15 = 15 \times 3$

2) $8 \times 12 = 12 \times 8$

3) $7 \times n = n \times 7$ ; $n \in \mathbb{N}$

LEY ASOCIATIVA

| Si $a, b, c \in \mathbb{N}$ se cumple $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ |
|---|

Es decir: Si multiplicamos un número natural con el producto de otros dos es lo mismo que multiplicar el producto de los dos primeros con el tercero.

EJEMPLOS: 1) $5 \times (3 \times 9) = (5 \times 3) \times 9$

2) $3 \times (17 \times 4) = (3 \times 17) \times 4$

3) $(12 \times n) \times 2 = 12 \times (n \times 2)$ ; $n \in \mathbb{N}$

NEUTRO O IDENTICO MULTIPLICATIVO

| Para todo número natural a existe un número único 1 tal que se cumple: $1 \times a = a \times 1 = a$ |
|---|

Es decir: Todo número Natural multiplicado por la unidad da como resultado el número Natural.

EJEMPLOS: 1) $1 \times 5 = 5$

2) $1 \times 36 = 36$

3) $19 \times 1 = 19$

LEY DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION SOBRE LA SUMA

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } a,\ b,\ c \in \mathbb{N} \text{ se cumple} \\ a(b + c) = ab + ac\end{array}}$$

EJEMPLOS: 1) $3(8 + 5) = (3 \times 8) + (3 \times 5)$

2) $5(b + 7) = 5b + (5 \times 7)$

3) $(6 + 4)a = 6a + 4a$

**EJERCICIOS 1.1.2**

En cada operación escribe en el lado derecho la propiedad que se está aplicando.

1) $8 \times 15 = 15 \times 8$ propiedad________________

2) $(3 \times 18) \times 7 = 3 \times (18 \times 7)$ propiedad________________

3) $(2 + 6) \times 5 = 2x5 + 6x5$ propiedad________________

4) $9 \times 1 = 9$ propiedad________________

5) $9 \times (3 \times 12) = (9 \times 3) \times 12$ propiedad________________

6) $(3+5) \times (6+1) = (6+1) \times (3+5)$ propiedad________________

7) $(4x8) + (4x9) = 4(8 + 9)$ propiedad________________

8) $1 \times (3+7) = 3+7$ propiedad________________

9) $(2+5) \times (8 \times 3) = [(2+5)x8] \times 3$ propiedad________________

10) $12 + 8(4 + 9) = 12 + (8x4 + 8x9)$ propiedad________________

NOTA

> La multiplicación es una operación binaria, pero se puede extender para la multiplicación de tres o más factores como en la suma.

EJEMPLOS: 1) $4 \times 8 \times 5 = (4 \times 8) \times 5 = 40 \times 5 = 200$

2) $6 \times 2 \times 7 = (6 \times 2) \times 7 = 12 \times 7 = 84$

3) $5 \times 2 \times 9 = 5 \times (2 \times 9) = 5 \times 18 = 90$

NOTA

> Si una operación contiene sumas y multiplicaciones sin paréntesis, primero se realizan las multiplicaciones.
> Y si hay paréntesis, primero se realizan las operaciones dentro del paréntesis.

EJEMPLOS: 1) $2 + 7 \times 5 = 2 + 35 = 37$

2) $8 \times 5 + 9 = 40 + 9 = 49$

3) $7 + 3(7 + 6) = 7 + 3(13) = 7 + 39 = 46$

**EJERCICIOS 1.1.3**

Efectúa las operaciones indicadas, escribiendo en cada espacio el número faltante que corresponda.

1. $5 + 17 = \quad = 17 +$

2. $25 \times 1 = \quad = 1 \times$

3. $7 + (3 + 15) = (7 + \quad) + 15$
   $7 + (\quad) = (\quad) + 15$
   $(\quad) = (\quad)$

4. $6 + (9 + 15) = (6 + \quad) + 15$
   $6 + (\quad) = (\quad) + 15$
   $(\quad) = (\quad)$

5. 23 x 5 = = x 23

6. 223 x 5 = = x 223

7. 6 x (3 x 11) = ( x 3) x 11

6 x ( ) = ( ) x 11

( ) = ( )

8. (6 x 4) x 31 = x (4 x 31)

( ) x = 6 x ( )

( ) = ( )

9. 7x(9 + 30) = 7x9 + x30

7 x = + 210

( ) = ( )

10. 17x(9 + 23) = x9 + 17x23

17 x = 153 +

( ) = ( )

11. 9 + (4 x 12) = ( x 12) + 9

9 + ( ) = ( 48 ) +

( ) = ( )

12. (29 + 4)x9 = 9 x ( + 4)

( ) x 9 = 9 x ( )

( ) = ( )

13. (6 x 23) x 21 = 6 x (23 x )

( ) x 21 = x ( 483 )

( ) = ( )

14. (16 x 2) x 17 = (2 x ) x 17

( ) x 17 = ( ) x 17

( ) = ( )

15 . 7x5 + 8x2 = 8x + 7x

\+ = 16 +

=

16 . 9x3 + 9x5 = 9x( + 5)

\+ = 9x( )

=

17. (4 + 10)x5 = 4x + 10x5

( ) x 5 = 20 +

( ) = ( )

18. (4 x 10) x 5 = 4 x( x 5)

( ) x 5 = 4 x ( )

( ) = ( )

19. 5 + 3x(8+4) = 5 + (3x + 3x )

5 + 3x( ) = + ( 24 + )

5 + = +

=

20. 1 x (8 + 4) = (8 + )

1 x ( ) = ( )

=

Efectúa las operaciones indicadas.

21. 32 + (26 + 54)

22. 32 + 7(3 + 1) + 27

23. $5 \times (7 \times 3)$

24. $12 \times 1 + 28 \times 1 + 3(5 + 8)$

25. $3 \times 2 + 4 \times 8$

26. $2[8(3) + 9](4 + 8)$

27. $9(4) + 53$

28. $5 + 4(3 + 1) + 2(6 + 9)$

29. $5(6 + 2)$

30. $6(a + 4) \quad ; a \in \mathbb{N}$

31. $26 + 7(4)$

32. $4(9 + 2a) \quad ; a \in \mathbb{N}$

33. $1 \times 8 + 6(4 + 1)$

34. $9(5a + 2) \quad ; a \in \mathbb{N}$

35. $6(7 + 4) + 31$

36. $3\ [(5 + 6)2 + 4\ ] + 3$

37. $4(3 + 7) + 5(6 + 9)$

38. $7(1 + 8) + 2[(6 + 5)4] + 7(4)$

39. $(21 + 9) \times 5 + 7(7)$

40. $8 \times 5 \times 3 + 2[8 + 6(2 + 9)]$

41. $9 + 6 + 7(5 + 1)$

42. $9 + 5(4 + 2) + 2[5 + 3(5 + 7)]$

43. $4(5)(3)(6)$

44. $7(4a + 9) \quad ; a \in \mathbb{N}$

45. $3 \times 7 \times 2 + 2 \times 9$

46. $(5 + 3a)9 \quad ; a \in \mathbb{N}$

47. $5(a + 7) \quad ; a \in \mathbb{N}$

48. $17(2a + b) \quad ; a, b \in \mathbb{N}$

49. $a(3 + b) \quad ; a, b \in \mathbb{N}$

50. $6(4a + 8b) \quad ; a, b \in \mathbb{N}$

## L A R E S T A O S U S T R A C C I O N

Todos nosotros ya conocemos el concepto de RESTA representado por el signo "-".

Así al restarle 3 a 8 se escribe $8 - 3$.

También se puede interpretar como a un conjunto de 8 elementos le quitamos 3 y nos da como resultado 5.

El resultado de $8 - 3$ es un número que al sumarlo con 3 nos de 8, y este es el 5 ya que $5 + 3 = 8$.

Del mismo modo como $9 + 2 = 11$ entonces $11 - 9 = 2$.

Pero la operación RESTA no se puede aplicar a cualesquiera números Naturales, el resultado de 4 - 7 no está en el conjunto de los números Naturales ya que no existe algún número Natural que al sumarlo con 7 nos de 4.

Hay una infinidad de operaciones de este tipo: 3 - 8, 2 - 5, 7 - 9, 5 - 12, 8 - 25, 21 - 64, etc..

Ante esta carencia, se formó otro conjunto de Números más grande en donde si existan los números que sean resultados de las operaciones antes mencionadas y da lugar al surgimiento de los Números ENTEROS.

## 1.2 LOS NUMEROS ENTEROS

A el conjunto de enteros positivos junto con el de enteros negativos y el 0, se le llama simplemente números ENTEROS y se denotan por el símbolo $\mathbb{Z}$.
Así $\mathbb{Z} = \{.......-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ........\}$.
Los números con signo - se puede interpretar como los opuestos de los enteros positivos, veamos esto con algunos ejemplos.

-Una ganancia de \$12 se representa por +12 ó simplemente 12.
Una pérdida de \$12 se representa por -12.
-Un depósito de \$50 en el banco se representa por +50 ó 50.
Un retiro de \$50 de el banco se representa por -50.
-Una posición de 100 m sobre el nivel del mar se representa por 100.
Una posición de 100 m bajo dicho nivel se representa por -100.
-La altura de un poste de 2m se representa por +2 ó 2.
La profundidad de un hoyo de 2m se representa por -2.

Con estos ejemplos podemos afirmar que los signos + y - nos indican dos direcciones opuestas. Como los números positivos se sitúan a la derecha del cero, los números negativos deben ubicarse a la izquierda del cero. Así en general los números enteros **x** y **-x** son números situados en lados opuestos al cero y a la misma distancia de él, se dice que son **simétricos** (Figura 1.2).

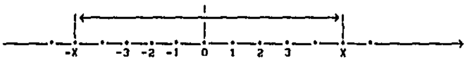



**Figura 1.2**

Obsérvese que los números que estan a la izquierda son de menor valor que los de la derecha.
Por ejemplo: $-23 < -12$ ; $-38 < -9$ ; $-8 < -1$ ; $-1 < 5$ etc.

**VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO**

El valor absoluto de un número a se representa como $|a|$, y se define de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$|7| = 7$ ya que $7 > 0$

$|-4| = -(-4) = 4$ ya que $-4 < 0$

$|-9| = -(-9) = 9$ ya que $-9 < 0$

$|19| = 19$ ya que $19 > 0$

$|-27| = -(-27) = 27$ ya que $-27 < 0$

Podemos afirmar que en si lo que hace el valor absoluto es que a todo número le deja signo positivo.

**Ejercicio 1.2.1**

Encuentra el valor de cada una de las siguientes expresiones:

| | | |
|---|---|---|
| 1. $|8| =$ | 6. $|-48| =$ | 11. $|-86| =$ |
| 2. $|-3| =$ | 7. $|-93| =$ | 12. $|-391| =$ |
| 3. $|-20| =$ | 8. $|58| =$ | 13. $|100| =$ |
| 4. $|29| =$ | 9. $|-4| =$ | 14. $|-830| =$ |
| 5. $|96| =$ | 10. $|347| =$ | 15. $|1003| =$ |

## S U M A  D E  N U M E R O S  E N T E R O S

Para sumar dos números enteros se deben de contemplar los siguientes casos:

> Si los números tienen el MISMO signo:
> - Se suman sus valores absolutos.
> - Al resultado se le pone el signo de los número.

EJEMPLOS: 1) 7 + 6 = 13 2) 9 + 3 + 12

3) -3 + (-8) = -11 4) -5 + (-4) = -9

5) 8 + 15 = 23 6) -9 + (-16) = -25

| Si los números tienen DIFERENTE signo:<br>- Se restan sus valores absolutos.<br>- Al resultado tendrá el signo de el número cuyo valor absoluto sea mayor |
|---|

EJEMPLOS: 1) 8 + (-2) = 6 2) 6 + (-9) = -3

3) (-5) + 7 = 2 4) (-8) + 3 = -5

5) (-14) + 5 = -9 6) 17 + (-27) = -10

**EJERCICIO 1.2.2**

Realiza cada una de las siguientes sumas.

1. -7 + ( -5) =
2. -6 + 9 + (-3) =
3. -4 + 8 =
4. 9 + (-7) + 2 =
5. 9 + (-6) =
6. -4 + 3 + 8 + (-9) =
7. -5 + (-2) =
8. 6 + (-15) + (-2) =
9. 3 + 9 =
10. 19 + 8 + (-24) =

Escribe el número entero que falte para que la suma sea correcta.

11. 8 + ____ = -3
12. ____ + 8 = -19
13. ____ + (-6) = 5
14. 19 + ____ = -3
15. (-9) + ____ = 2
16. -21 + ____ + 5 = 15
17. 12 + ____ = -1
18. -8 + ____ + (-6) = -26
19. ____ + (-16) = -23
20. 26 + (-14) + ____ = -4

La SUMA de enteros cumple todas las propiedades de la SUMA de números Naturales y dos mas que son las siguientes.

NEUTRO o IDENTICO ADITIVO

| |
|---|
| Para todo número $a \in \mathbb{Z}$, existe el $0 \in \mathbb{Z}$ tal que: $a + 0 = a$ y $0 + a = a$ |

EJEMPLOS: 1) $5 + 0 = 5$ 2) $-3 + 0 = -3$

3) $0 + (-7) = -7$ 4) $0 + 1 = 1$

5) $-9 + 0 = -9$ 6) $0 + (-2) = -2$

INVERSO ADITIVO

| |
|---|
| Para todo número $a \in \mathbb{Z}$, existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que: $a + (-a) = 0$ y $(-a) + a = 0$ |

Se dice que $-a$ es el inverso aditivo de $a$, e inversamente que $a$ es el inverso aditivo de $-a$.

EJEMPLOS:

1) El inverso aditivo de 5 es -5, ya que $5 + (-5) = 0$
2) El inverso aditivo de -7 es 7, ya que $-7 + 7 = 0$
3) El inverso aditivo de -19 es 19, ya que $-19 + 19 = 0$
4) El inverso aditivo de 8 es -8, ya que $8 + (-8) = 0$
5) El inverso aditivo de 27 es -27, ya que $27 + (-27) = 0$

Con lo nuevo que hemos aprendido estamos listos para darle una nueva interpretación a la RESTA.

| |
|---|
| Si $m, n \in \mathbb{Z}$ la DIFERENCIA o RESTA de $m - n = m + (-n)$ es la suma de $m$ con el inverso aditivo de $n$. |

EJEMPLOS: 1) $8 - 3 = 8 + (-3) = 5$

2) $6 - 4 = 6 + (-4) = 2$

3) $-5 - 3 = -5 + (-3) = -8$

4) $4 - 9 = 4 + (-9) = -5$

5) $3 - (-7) = 3 + 7 = 10$ *

* Ya que es la suma de 3 con el inverso de -7 que es 7.

**EJERCICIO 1.2.3**

Realiza las siguientes operaciones:

| | | |
|---|---|---|
| 1. $8 + 0 =$ | 2. $-9 + 0 =$ | 3. $0 + 16 =$ |
| 4. $0 + (-35) =$ | 5. $0 + (-51) =$ | 6. $49 + 0 =$ |
| 7. $-27 + 0 =$ | 8. $13 + 0 =$ | 9. $0 + (-72) =$ |

10. El inverso aditivo de 5 es____ ya que $5 + (\quad) = 0$.
11. El inverso aditivo de 18 es____ ya que $18 + (\quad) = 0$.
12. El inverso aditivo de -4 es ____ ya que $-4 + (\quad) = 0$.
13. El inverso aditivo de 27 es____ ya que $27 + (\quad) = 0$.
14. El inverso aditivo de -53 es____ ya que $-53 + (\quad) = 0$.
15. El inverso aditivo de -65 es____ ya que $-65 + (\quad) = 0$.
16. El inverso aditivo de -84 es____ ya que $-84 + (\quad) = 0$.
17. El inverso aditivo de 59 es____ ya que $59 + (\quad) = 0$.
18. El inverso aditivo de -326 es_____ ya que $-326 + (\quad) = 0$.
19. El inverso aditivo de 68 es____ ya que $68 + (\quad) = 0$.
20. El inverso aditivo de -72 es____ ya que $-72 + (\quad) = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| 21. Restar 5 a 12. | 22. Restar -3 a 8. | 23. A -2 restarle 7. |
| 24. A 8 restarle 16. | 25. A -6 restarle 9. | 26. A 5 restarle -3. |
| 27. Restar 9 a -7. | 28. Restar -4 a -11. | 29. Restar -9 a 24. |
| 30. $8 - 2 =$ | 31. $14 - 8 =$ | 32. $7 - 12 =$ |
| 33. $-6 - 4 =$ | 34. $-5 - 13 =$ | 35. $2 - -8 =$ |
| 36. $9 - 17 =$ | 37. $6 - -4 =$ | 38. $-4 - -9 =$ |
| 39. $-3 - -16 =$ | 40. $(3 - 1) - 9 =$ | 41. $14 - (7 - 2) =$ |
| 42. $(-2 + 6) - 8 =$ | 43. $(8 + 3) - -5 =$ | 44. $9 - (-3 -5) =$ |
| 45. $-4 + (8 -13) =$ | 46. $(3 - 5) - (-2 + 5) =$ | 47. $(7 - 9) + (6 + 1) =$ |
| 48. $(-5 - 4) + (-3) =$ | 49. $(-2 + 5) - (4 - 7) =$ | 50. $(8 - 15) - (9-25) =$ |

## MULTIPLICACION DE NUMEROS ENTEROS

Para multiplicar cualesquiera números enteros se debe de tomar en cuenta las siguientes leyes para los signos de los números que se estan multiplicando.

| LEYES DE LOS SIGNOS |
|---|
| (+)(+) = + |
| (+)(-) = - |
| (-)(+) = - |
| (-)(-) = + |

EJEMPLOS: 1) $5 \times 7 = 35$
2) $-3 \times 5 = -15$
3) $6 \times -4 = -24$
4) $-2 \times -8 = 16$
5) $-3 \times 2 \times -5 = 30$
6) $4 \times -5 \times -3 \times -7 = -420$

NOTA: Si en un número no se especifica el signo, se supone que es positivo.

La multiplicación entre numeros enteros cumple las mismas propiedades que se cumplen con los números naturales.

Te recomiendo que les des un repaso, y a continuación lee los ejemplos.

EJEMPLOS: 1) $3, 7 \in \mathbb{Z}$ y $3 \times 7 = 21$ donde $21 \in \mathbb{Z}$, CERRADURA.
2) $6, -4 \in \mathbb{Z}$ y $6 \times -4 = -24$ donde $-24 \in \mathbb{Z}$, CERRADURA.

3) $-9, -4 \in \mathbb{Z}$ y $-9 \times -4 = 36$ donde $36 \in \mathbb{Z}$, CERRADURA.
4) $8 \times 5 = 40 = 5 \times 8$ , CONMUTATIVA.
5) $-6 \times 3 = -18 = 3 \times -6$ , CONMUTATIVA.
6) $-9 \times -12 = 108 = -12 \times 9$ , CONMUTATIVA.
7) $-4 \times (5 \times -2) = 40 = (-4 \times 5) \times -2$ , ASOCIATIVA.
8) $(9 \times -2) \times 3 = -54 = 9 \times (-2 \times 3)$ , ASOCIATIVA.
9) $-3 \times (4 + -2) = (-3 \times 4) + (-3 \times -2)$, DISTRIBUTIVA.
10) $6 \times (-5 + 3) = (6 \times -5) + (6 \times 3)$ , DISTRIBUTIVA.
11) $-2 \times (-3 + -7) = (-2 \times -3) + (-2 \times -7)$, DISTRIB.
12) $1 \times -5 = -5 \times 1 = -5$ , IDENTICO MULTIPLICATIVO.
13) $-24 \times 1 = 1 \times -24 = -24$ , IDENTICO MULTIPLICATIVO.

| |
|---|
| El producto de cero y cualquier otro número entero es cero. Es decir si $a \in \mathbb{Z}$ entonces $0 \times a = 0$ |

**EJERCICIO 1.2.4**

Realiza las siguientes multiplicaciones:

1) $(-5) \times 6 =$ 
2) $7 \times (-9) =$
3) $(-13)\ (-4) =$
4) $8\ (-5)\ -6 =$
5) $11\ (-7)(-20)(-2) =$
6) $(-12)(5)(-3)(4) =$

Multiplica:

7) 8, -4, 5
8) -9, 5, -6
9) -13, 7, 3
10) 9, -4, -23, 7
11) 4, -7, -3, -8
12) -2, -6, -3, -5, -7

Aplica la ley conmutativa de la multiplicación y comprueba su validéz.

13) $7 \times (-3) =$
14) $(-4) \times 6 =$

15) (-2) x (-13) =

16) 8 x 9 =

17) (-5) x 9 =

18) 7 x (-8) =

19) 21 x 5 =

20) (-4) x (-7) =

21) 9 x (-8) =

22) (-6) x 9 =

Aplica la ley asociativa de la multiplicación y comprueba su validéz.

23) (7 x 3) x -7 =

24) 8 x (-3 x 6) =

25) -4 x (-2 x 9) =

26) (-5 x -2) x -7 =

27) -3 x (9 x -7) =

28) (6 x -5) x 9 =

29) (6 x -7) x -2 =

30) 7 x (-3 x -8) =

Aplica la ley distributiva y comprueba su validéz.

31) 5 x (-3 + 5) =

32) -4 x (7 + -6) =

33) (6 + 9) x -3 =

34) 9 x (-3 + -5) =

35) -3 x (-8 + 5) =

36) (-4 + 8) x -6 =

37) (-5 + -3) x -9 =

38) 8 x (-6 + -5) =

Comprueba la validéz del neutro o idéntico multiplicativo.

39) 1 x 9 = 9 x 1 =

40) 1 x -8 = -8 x 1 =

41) 23 x 1 = 1 x 23 =

42) -15 x 1 = 1 x -15 =

43) 1 x -47 = -47 x 1 =

44) 1 x -39 = -39 x 1 =

45) -52 x 1 = 1 x -52 =

46) 74 x 1 = 1 x 74 =

**LA DIVISION CON NUMEROS ENTEROS.**

Al multiplicar 3 x 9 = 27 ; al número 9 se le llama **cociente** de 27 al dividirlo entre 3, esto en símbolos se denota como $\frac{27}{3} = 9$.
El número 27 se llama **dividendo** y el número 3 **divisor**.

La división es la operación inversa de la multiplicación.

Para denotar esta operación se usa el símbolo ÷ ó /, se lee "entre" ó "dividido por". Así $\frac{27}{3}$ se lee 27 entre 3 ó 27 dividido por 3. A el número $\frac{27}{3}$ también se le llama **fracción**.

DEFINICION

| |
|---|
| Si a, b, c $\in \mathbb{Z}$ de tal manera que $a = b \cdot c$ entonces $\frac{a}{b} = c$ |

Para dividir cualesquiera números enteros se debe de tomar en cuenta las siguientes leyes para los signos de los números que se estan dividiendo.

| LEYES DE LOS SIGNOS |
|---|
| (+)÷(+) = + |
| (+)÷(-) = - |
| (-)÷(+) = - |
| (-)÷(-) = + |

EJEMPLOS:
1) 25 ÷ 5 = 5 ya que 5 x 5 = 25.
2) 36 ÷ 9 = 4 ya que 9 x 4 = 36.
3) 18 ÷ 3 = 6 ya que 3 x 6 = 18.
4) 54 ÷ 2 = 27 ya que 2 x 27 = 54.
5) 84 ÷ 7 = 12 ya que 7 x 12 = 84.

| |
|---|
| Si una expresión tiene multiplicaciones y divisiones sin símbolos de agrupación, las operaciones se van efectuando en el orden que aparecen. |

EJEMPLOS:
1) 3 x 8 ÷ 4 = 24 ÷ 4 = 6
2) -45 ÷ 3 x 7 = -15 x 7 = -105
3) 84 ÷ -6 ÷ 7 x -5 = -14 ÷ 7 x -5 = -2 x -5 = 10

| |
|---|
| Si una expresión tiene las cuatro operaciones aritméticas sin signos de agrupación, primero se realizan las multiplicaciones y divisiones en el orden que aparescan y después las sumas y restas. |

EJEMPLOS: 1) $56 \div 4 + 9 = 14 + 9 = 23.$

2) $18 - 42 \div 7 \times 2 = 18 - 6 \times 2 = 18 - 12 = 6.$

3) $4 + 3 \times -8 \div 6 - 48 \div 8 + 5 = 4 - 24 \div 6 - 6 + 5$

$= 4 - 4 - 6 + 5 = -6 + 5 = -1.$

4) $-78 \div 6 + 5 \times -2 + 4 = -13 -10 + 4 = -19.$

5) $5 - 8 \times 3 + 56 \div 4 -12 = 5 - 24 + 14 -12 = -17.$

EL CERO Y LA DIVISION.

Considérese $\frac{0}{7}$; se busca un número entero **b** tal que $7 \times b = 0$ y este número **b** es el 0. Así que $\frac{0}{7} = 0$.

En general: $\boxed{\text{Para todo } a \in \mathbb{Z},\ \frac{0}{a} = 0,\quad a \neq 0}$

Ahora considérese $\frac{5}{0}$; se busca un número entero **b** tal que $0 \times b = 5$, y tal número no existe ya que sabemos que para todo número **b**; $0 \times b = 0$.

En general: $\boxed{\text{Para todo } a \in \mathbb{Z},\ \frac{a}{0} \text{ no existe}}$

Por último considérese $\frac{0}{0}$; se busca un número entero **b** tal que $0 \times b = 0$, y como nosotros ya sabemos que para todo número **b**; $0 \times b = 0$; entonces cualquier número entero puede ser el resultado, pero el cociente de una división debe de ser único.

En consecuencia $\boxed{\frac{0}{0} \text{ no esta determinado.}}$

OBSERVACION: Como $\frac{p}{q}$ no existe si $q = 0$. consideraremos todos los denominadores de las fracciones diferentes de cero.

EJERCICIO 1.2.5

Realiza las siguientes operaciones.

| | |
|---|---|
| 1) 75 + -3 = | 2) -68 + -4 = |
| 3) -98 + 7 = | 4) 104 + -8 = |
| 5) 354 + 6 = | 6) -259 + -7 = |
| 7) -85 + 5 = | 8) 152 + -8 = |
| 9) -792 + -4 = | 10) 384 + 3 = |
| 11) 5 x 12 + 3 = | 12) -6 x 8 + 2 = |
| 13) 4 x -7 + -2 = | 14) 9 x -3 x -7 = |
| 15) 26 + 2 x -3 = | 16) 48 + -3 x 5 = |
| 17) -63 + 7 x -4 = | 18) -32 + -8 x -7 = |
| 19) 4 x -6 + 56 + 8 = | 20) 49 + -7 + -4 x -8 = |
| 21) -7 + 5 x 3 - 24 + 8 = | 22) 6 - 15 + -3 + 9 = |
| 23) -38 - 42 + 7 x -2 = | 24) 18 - 4 x -7 + 2 = |
| 25) -78 + -6 + 5 x -2 - 4 = | 26) 5 + 78 + -3 + 5 x 2 - 14 = |
| 27) 5 - 8 x 7 - 76 + 4 - 12 = | 28) 15 + 8 x -3 + 56 + -7 - 32 = |
| 29) 7 + 3(15 + -5) = | 30) -3 + (6 - 48 + 8) + 7 = |
| 31) (7 x -3 + 21) + 8 = | 32) 2(7 - 2) - 6 + (4 - 10) = |
| 33) (-28+2) + -4 - 10(8-12)= | 34) (4 - 14) + -2 - 7(2 - 8) = |
| 35) 24 + -3 x 6 - (7 - 35)+14= | 36) (3-12) + -9 - 72 + -8 x 4 = |
| 37) 68 + (-15 + 12) - 9 x 2 = | 38) (5 - 21) + -8 - 4(7 - 12) = |
| 39) 9 - (3 x -14) + -6 + 5 = | 40) -24 + [7 - (25-18)+ -7] x -3 = |

## F A C T O R I Z A C I O N   D E   N U M E R O S.

Recordemos lo siguiente:

Definición

> Los números primos son aquellos números naturales que solo son divisibles por el mismo y la unidad, exepto el uno.

EJEMPLOS: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109,..etc.

> Todo número que no sea primo se puede representar como producto de primos(Teorema Fundamental de la Aritmética); a estos números se les llama compuestos.

Para encontrar los factores primos de un número se procede así:

1o.) Se checa si es divisible entre 2, si esto sucede, de nuevo se checa si su cociente es divisible entre 2; y asi sucesivamente hasta obtener un cociente que no sea divisible entre 2.

2o.) Se checa si el cociente es divisible entre 3, así tantas veces sea posible.

3o.) Después el cociente resultante se verifica si es divisible entre 5, así se continua con los primos sucesivos en orden creciente hasta que el cociente sea 1.

Todos los divisores obtenidos son los **factores primos** del número dado.

EJEMPLOS:

1) Encontrar todos los factores primos de 468.

SOLUCION:

| 468 | 2 |
|---|---|
| 234 | 2 |
| 117 | 3 |
| 39 | 3 |
| 13 | 13 |
| 1 | |

Los factores primos de 468 son:

2, 2, 3, 3, 13

Se cumple que 468 = 2(2)(3)(3)(13)

2) Encontrar todos los factores primos de 270.

SOLUCION:

$$\begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ \hline 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Los factores primos de 270 son:

2, 3, 3, 3, 5

Se cumple que 270 = 2(3)(3)(3)(5)

**EJERCICIOS 1.2.6**

Cada uno de los siguientes números representarlos en términos de sus factores primos.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) 6 | 2) 14 | 3) 18 | 4) 20 |
| 5) 24 | 6) 30 | 7) 36 | 8) 40 |
| 9) 45 | 10) 50 | 11) 68 | 12) 78 |
| 13) 86 | 14) 120 | 15) 156 | 16) 176 |
| 17) 252 | 18) 396 | 19) 490 | 20) 855 |
| 21) 345 | 22) 452 | 23) 289 | 24) 746 |
| 25) 634 | 26) 809 | 27) 104 | 28) 607 |
| 29) 970 | 30) 1245 | | |

**EL MAXIMO COMUN DIVISOR DE UN NUMERO.**

Definición:

> El entero más grande que divide a un conjunto de enteros se le llama su **máximo común divisor** y se representa por las abreviaturas **MCD**.

El **MCD** de un conjunto de números está formado por todos los factores primos que son comunes a todos los números del conjunto dado.

EJEMPLOS:

1) Encuentra el **MCD** de los números 24, 36 y 60.

SOLUCION: Cada número lo descomponemos en sus factores primos.

24 = 2(2)(2)(3)  36 = 2(2)(3)(3)  60 = 2(2)(3)(5)

Factores primos comunes a los tres números

Así el **MCD** de 24, 36, y 60 es 2(2)(3) = 12.

2) Encuentra el **MCD** de los números 30, 105 y 180.

SOLUCION: Descomponemos en sus factores primos a cada número.

30 = 2(3)(5)  105 = 3(5)(7)  180 = 2(2)(3)(3)(5)

Factores primos comunes a los tres números

Así el **MCD** de 30, 105 y 180 es 3(5) = 15.

**EJERCICIOS 1.2.7**

Encuentra el **MCD** para cada conjunto de números.

| | | |
|---|---|---|
| 1) 12, 26 | 2) 42, 90 | 3) 68, 85 |
| 4) 18, 28, 40 | 5) 36, 90, 60 | 6) 20, 165, 210 |
| 7) 120, 180, 420 | 8) 210, 315, 420 | 9) 105, 315, 1050 |
| 10) 60, 168, 396 | 11) 220, 525, 875 | 12) 315, 330, 975 |
| 13) 308, 1302, 1610 | 14) 70, 570, 3220 | 15) 528, 1224, 1680 |

**EL MINIMO COMUN MULTIPLO DE UN NUMERO.**

Definición

| El menor número positivo que sea divisible entre cada elemento de un conjunto de números, es llamado MINIMO COMUN MULTIPLO (MCM) del conjunto de números. |
|---|

El **MCM** de un conjunto de números contiene a todos los factores primos de cada número del conjunto dado.

EJEMPLOS:

1) Encuentra el **MCM** de los números 20, 32, 14.

SOLUCION: Descomponemos cada número en sus factores primos.

20 = 2(2)(5)      32 = 2(2)(2)(2)(2)      14 = 2(7)

Se toma el mayor número de veces que se repite un factor primo.

Asi el **MCM** de 20, 32, y 14 es 2(2)(2)(2)(2)(5)(7) = 1120

2) Encuentra el **MCM** de los números 28, 49, 105.

SOLUCION: Descomponemos cada número en sus factores primos.

28 = 2(2)(7)      49 = 7(7)      105 = 3(5)(7)

Se toma el mayor número de veces que se repite un factor primo.

Asi el **MCM** de 28, 49 y 105 es 2(2)(3)(5)(7)(7) = 2940

**EJERCICIOS 1.2.8**

Hallar el **MCM** de los siguientes conjuntos de números.

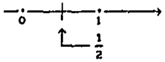
| | | |
|---|---|---|
| 1) 6, 18 | 2) 8, 12 | 3) 14, 20 |
| 4) 15, 18, 24 | 5) 22, 36, 50 | 6) 36, 90, 60 |
| 7) 18, 28, 40 | 8) 63, 90, 105 | 9) 165, 175, 231 |
| 10) 30, 84. 180 | 11) 24, 80, 84 | 12) 45, 54, 70 |
| 13) 252, 540, 630 | 14) 75, 210, 225 | 15) 20, 280, 700 |

## 1.3 LOS NUMEROS RACIONALES

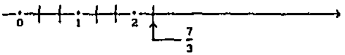
Ya se habran dado cuenta de que no todas las divisiones entre enteros es un número entero, por ejemplo $8 + 3$ ó $15 + 2$ sus resultados no son números enteros. Por esto se ve la necesidad de ampliar más el conjunto de números que hasta ahorita conocemos, a este nuevo conjunto lo llamaremos **NUMEROS RACIONALES** y los denotaremos con la letra **Q**.

La **interpretación geométrica** que se les da a los números racionales es que estan representados por puntos que resultan de dividir una cierta unidad en partes iguales, nosotros consideraremos a nuestra unidad en la recta numérica.

Así $\frac{1}{2}$ es el punto que resulta de dividir a la unidad en dos partes iguales.




También $\frac{7}{3}$ es el punto que resulta de dividir a la unidad en tres partes iguales y de estas se toman 7.




De manera semejante podemos asociar a todo número racional un punto de la recta real.

DEFINICION:

> Los NÚMEROS RACIONALES son aquellos números que se pueden poner de la forma $\frac{p}{q}$ donde $p$ , $q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$.
>
> p es el numerador y q el denominador

Aquel número RACIONAL ó también llamado fracción común cuyo numerador es menor que el denominador se le llama **fracción propia**; y aquel cuyo numerador es igual ó mayor que el denominador es llamado **fracción impropia**

Todos los números enteros se pueden representar como un número racional, ejemplos: $5 = \frac{5}{1}$, $-7 = \frac{-7}{1}$, $3 = \frac{6}{2}$, $-26 = \frac{-78}{3}$, etc..

Podemos afirmar que para toda $a \in Q$ se cumple que $\frac{a}{1} = a$ y $\frac{2a}{2} = a$ etc.

Esto nos dice que la representación fraccionaria de un número entero no es única y esto nos lleva a hacer la siguiente observación.

> Si $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s} \in Q$, $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$
> si y solo si $p \cdot s = q \cdot r$.

Podemos afirmar que si $\frac{p}{q} \in Q$ y $n \in N$, entonces $\frac{np}{nq} = \frac{p}{q}$; (ya que se cumple que $npq = nqp$) a estas fracciones se les llama **fracciones equivalentes**.

Y si p y q no tienen factores comunes se dice que $\frac{p}{q}$ está en su forma **reducida**.

EJEMPLOS:

1) Encontrar una fracción equivalente a $\frac{3}{4}$ y que tenga como denominador a -28.

   SOLUCION: Como $-28 = -7(4)$ entonces $\frac{3}{4} = \frac{-7(3)}{-7(4)} = \frac{-21}{-28}$

2) Expresar a $\frac{48}{36}$ en su forma mas simple.

   SOLUCION: $\frac{48}{36} = \frac{12(4)}{12(3)} = \frac{4}{3}$ Eliminando factores comunes.

**EJERCICIOS 1.3.1**

**Encuentra el numerador o denominador faltante.**

1) $\frac{5}{2} = \frac{\quad}{8}$ 2) $\frac{7}{3} = \frac{-21}{\quad}$ 3) $\frac{5}{6} = \frac{\quad}{18}$

4) $\frac{\quad}{5} = \frac{28}{35}$ 5) $\frac{-3}{\quad} = \frac{27}{72}$ 6) $\frac{26}{-10} = \frac{\quad}{5}$

7) $\frac{-20}{24} = \frac{-5}{\quad}$ 8) $\frac{\quad}{-68} = \frac{-12}{17}$ 9) $\frac{12}{\quad} = \frac{4}{7}$

Obtener dos fracciones equivalentes a cada una de las siguientes dadas:

10) $\frac{5}{7} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$ 11) $\frac{6}{4} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$

12) $\frac{3}{5} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$ 13) $\frac{12}{8} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$

14) $\frac{4}{18} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$ 15) $\frac{15}{9} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$

Expresar en su forma más simple a cada una de las siguientes fracciones.

16) $\frac{6}{15} =$ 17) $\frac{8}{20} =$ 18) $\frac{16}{12} =$

19) $\frac{24}{9} =$ 20) $\frac{36}{48} =$ 21) $\frac{24}{40} =$

22) $\frac{72}{63} =$ 23) $\frac{72}{126} =$ 24) $\frac{128}{96} =$

25) $\frac{735}{210} =$ 26) $\frac{2520}{1400} =$ 27) $\frac{546}{637} =$

28) $\frac{612}{918} =$ 29) $\frac{4290}{6864} =$ 30) $\frac{1995}{15435} =$

**SUMA DE NUMEROS RACIONALES.**

La suma de dos ó más números racionales con el mismo denominador es otro racional cuyo numerador es la suma de los numeradores de los racionales que se estan sumando, y el denominador es el mismo.

Es decir: $\boxed{\text{Si } \frac{a}{b}, \frac{c}{b} \in Q \text{ y } b \neq 0 \text{ entonces } \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}}$

EJEMPLOS: 1) $\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2}$

2) $\frac{3}{5} - \frac{7}{5} = \frac{3-7}{5} = -\frac{4}{5}$

3) $\frac{5}{9} + \frac{8}{9} = \frac{5+8}{9} = \frac{13}{9}$

Para hacer la suma de dos o más racionales con distinto denominador se procede como sigue:

1°) Se encuentra el **MCM** de los denominadores y este es llamado **MINIMO COMUN DENOMINADOR(MCD)**.

2° El **MCD** se divide entre cada denominador y cada resultado se va multiplicando por su respectivo numerador.

3°) La suma de los numeradores sobre el **MCD** es el resultado, si se puede hay que simplificarlo.

EJEMPLOS:

1) Sumar $\frac{4}{5}$ con $\frac{2}{3}$

SOLUCION: El **MCD** de 5 y 3 es 15 entonces:

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3(4) + 5(2)}{15} = \frac{12 + 10}{15} = \frac{22}{15}$$

2) Sumar $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ y $-\frac{5}{3}$.

SOLUCION: El MCD de 4, 5 y 3 es 60, entonces:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{5}{3} = \frac{15(3) + 12(2) - 20(5)}{60} = \frac{45 + 24 - 100}{60} = -\frac{31}{60}$$

3) Sumar $\frac{8}{3}$, $-\frac{2}{9}$ y $-\frac{3}{4}$.

SOLUCION: El MCD de 3, 9 y 4 es 36, entonces:

$$\frac{8}{3} - \frac{2}{9} - \frac{3}{4} = \frac{12(8) - 4(2) - 9(3)}{36} = \frac{96 - 8 - 27}{36} = \frac{61}{36}$$

4) Sumar $\frac{9}{26}$, $\frac{4}{39}$ y $-\frac{5}{52}$.

SOUCION: El MCD de 26, 39 y 52 es 156, entonces:

$$\frac{9}{26} + \frac{4}{39} - \frac{8}{52} = \frac{6(9) + 4(4) - 3(8)}{156} = \frac{54 + 16 - 24}{156} = \frac{46}{156} =$$

$$= \frac{23}{78}$$

**EJERCICIOS 1.3.2**

Efectúa las siguientes operaciones y obten los resultados en su mínima expresión.

1) $\frac{8}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{3} =$

2) $\frac{3}{2} - \frac{5}{2} - \frac{7}{2} =$

3) $\frac{9}{5} - \frac{12}{5} + \frac{7}{5} =$

4) $\frac{8}{13} - \frac{5}{13} - \frac{14}{13} =$

5) $\frac{7}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} - \frac{12}{9} =$

6) $\frac{5}{7} + \frac{2}{7} - \frac{3}{7} + \frac{8}{7} =$

7) $\frac{8}{3} - \frac{2}{9} =$

8) $\frac{1}{4} + \frac{4}{5} =$

9) $\frac{5}{4} - \frac{9}{14} =$

10) $-\frac{2}{9} - \frac{3}{4} =$

11) $-\frac{5}{9} + \frac{4}{6} =$

12) $\frac{8}{3} + \frac{2}{15} =$

13) $\frac{8}{3} + \frac{2}{9} - \frac{3}{4} =$

14) $\frac{4}{3} - \frac{3}{7} - \frac{5}{14} =$

15) $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{6} =$

16) $\frac{7}{12} - \frac{4}{15} - \frac{17}{18} =$

17) $\frac{5}{18} + \frac{11}{24} - \frac{13}{36} =$

18) $\frac{8}{3} - \frac{2}{9} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$

19) $\frac{1}{3} - \frac{3}{4} - \frac{4}{7} - \frac{2}{5} =$

20) $-\frac{1}{7} - \frac{2}{18} - \frac{4}{7} + \frac{6}{9} =$

**MULTIPLICACION DE NUMEROS RACIONALES.**

La multiplicación o producto de dos o más números racionales es otro racional, que resulta de multiplicar todos los numeradores de las fracciones dadas sobre el producto de todos los denominadores.

Esto es: $\boxed{\text{Si } \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q \text{ entonces } \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}}$

EJEMPLOS: 1) $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$

2) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot (-\frac{5}{3}) = -\frac{30}{60} = -\frac{1}{2}$

3) $-\frac{7}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\frac{4}{9}) = +\frac{28}{135}$

**EJERCICIOS 1.3.3**

Efectúa las siguientes operaciones, reduciendo a su mínima expresión los resultados.

1) $\frac{3}{4} \cdot (-\frac{2}{9}) =$

2) $\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} =$

3) $(-\frac{5}{4}) \cdot \frac{2}{9} =$

4) $(-\frac{8}{5}) \cdot (-\frac{1}{4}) =$

5) $\frac{7}{4} \cdot (-\frac{1}{7}) =$

6) $\frac{8}{6} \cdot \frac{7}{3} =$

7) $(-\frac{5}{2}) \cdot \frac{6}{4} =$

8) $(-\frac{7}{5}) \cdot (-\frac{6}{3}) =$

9) $\frac{1}{3} \cdot (-\frac{9}{2}) =$

10) $\frac{8}{4} \cdot \frac{3}{2} =$

11) $\left(-\frac{6}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) =$

12) $\left(-\frac{8}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{9}{4} =$

13) $3 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7} =$

14) $\frac{5}{3} \cdot 7 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) =$

15) $\left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \frac{4}{5} \cdot (-5) =$

16) $(-6) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{7} =$

17) $\left(-\frac{7}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) =$

18) $\frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{8}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) =$

19) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{7} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) =$

20) $\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) \cdot \frac{9}{2} =$

**DIVISION DE RACIONALES.**

La división de dos racionales es también otro racional, cuyo numerador es el producto del numerador (de la fracción dividendo) con el denominador (de la fracción divisor); y su denominador es el producto del denominador (de la fracción dividendo) con el numerador (de la fracción divisor).

Es decir: $\boxed{\text{Si } \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \text{ entonces } \underbrace{\frac{p}{q}}_{\text{dividendo}} \div \underbrace{\frac{r}{s}}_{\text{divisor}} = \frac{ps}{qr}}$

Otra interpretación es:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \text{ entonces } \dfrac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{ps}{qr} \\ \text{Producto de extremos entre producto de medios.} \end{array}}$$

EJEMPLOS: 1) $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

2) $\frac{3}{4} \div \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{9}{20}$

$$3)\ \frac{-\frac{7}{5}}{-\frac{8}{9}} = +\frac{7 \times 9}{5 \times 8} = +\frac{63}{40}$$

**EJERCICIOS 1.3.4**

Efectúa las siguientes operaciones, reduciendo a su mínima expresión los resultados.

1) $\frac{3}{4} + (-\frac{2}{9}) =$

2) $\frac{5}{4} + \frac{6}{3} =$

3) $(-\frac{5}{4}) + \frac{2}{9} =$

4) $(-\frac{8}{5}) + (-\frac{1}{5}) =$

5) $\frac{7}{4} + (-\frac{1}{7}) =$

6) $\frac{8}{6} + \frac{7}{3} =$

7) $(-\frac{5}{6}) + \frac{2}{4} =$

8) $(-\frac{7}{5}) \div (-\frac{6}{3}) =$

9) $\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{9}} =$

10) $\frac{\frac{8}{4}}{-\frac{3}{2}} =$

11) $\frac{-\frac{5}{2}}{\frac{3}{7}} =$

12) $\frac{-\frac{6}{4}}{-\frac{8}{9}} =$

13) $4 + \frac{3}{2} =$

14) $-\frac{5}{3} + 3 =$

15) $\frac{5}{-\frac{7}{3}} =$

16) $\frac{-\frac{3}{5}}{4} =$

17) $(-\frac{5}{7}) + \frac{2}{9} =$

18) $(-\frac{7}{3}) + (-\frac{2}{5}) =$

19) $\frac{\frac{10}{3}}{-\frac{5}{9}} =$

20) $\frac{-\frac{9}{4}}{\frac{3}{5}} =$

OPERACIONES COMBINADAS

Veamos algunos ejemplos para encontrar el valor de una expresión que tiene operaciones combinadas.

1) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

2) $\frac{5}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{10}{9} - \frac{5}{4} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$

3) $\frac{2}{3} - \frac{8}{5} + \frac{3}{2} + \frac{4}{5} = \frac{2}{3} - \frac{16}{15} + \frac{4}{5} = \frac{10 - 16 + 12}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

4) $\frac{2}{3} - \left(\frac{8}{5} \times \frac{3}{2}\right) + \frac{4}{5} = \frac{2}{3} - \frac{24}{10} + \frac{4}{5} = \frac{2}{3} - \frac{120}{40} = \frac{2}{3} - \frac{3}{1}$

$= \frac{2 - 9}{3} = -\frac{7}{3}$

5) $\frac{5}{4} + \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{6}\right) + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} + \left(\frac{4 - 8}{6}\right) + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} + \left(-\frac{4}{6}\right) + \frac{1}{2}$

$- \frac{30}{16} + \frac{1}{2} = \frac{-30 + 8}{16} = -\frac{22}{16} = -\frac{11}{8}$

NOTA: Es imporante observar que al igual que en las operaciones combinadas de números enteros; si no hay paréntesis que den prioridad a ciertas operaciones, primero se resuelve el producto ó división y después las sumas o restas.

Cuando hay paréntesis primero se efectúa la operación dentro del paréntesis.

EJERCICIO 1.3.5

Efectúa cada una de las siguientes operaciones y simplifica el resultado.

1) $\frac{5}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{8}{5} =$

2) $\frac{2}{3} + \frac{8}{6} - \frac{7}{9} =$

3) $\frac{3}{4} - \frac{8}{3} + \frac{9}{2} =$

4) $\frac{5}{4} + \frac{2}{3} - \frac{8}{6} \times \frac{1}{9} =$

5) $\frac{24}{3} \times \frac{1}{5} - \frac{7}{12} =$

6) $\frac{7}{16} + \frac{8}{4} + \frac{5}{3} =$

7) $\frac{12}{5} + \frac{2}{3} + \frac{7}{15} - \frac{16}{30} =$

8) $\frac{15}{4} + \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{6}\right) =$

9) $\left(\frac{2}{3} - \frac{8}{6}\right) \times \frac{7}{9} =$

10) $\frac{5}{14} + \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{7}\right) =$

11) $\frac{2}{7} \times \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{6}\right) =$

12) $\left(\frac{5}{3} - \frac{8}{7}\right) + \frac{4}{9} =$

13) $\frac{6}{4} + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{4} =$

14) $\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{5}\right) =$

15) $\frac{6}{4} + \frac{5}{8} \times \left(\frac{2}{9} - \frac{8}{6}\right) =$

16) $\left(\frac{1}{3} - \frac{8}{5}\right) + \frac{2}{9} \times \frac{4}{3} =$

17) $\frac{12}{5} - \frac{14}{3} \times \left(\frac{9}{2} + \frac{7}{3}\right) =$

18) $\frac{5}{3} \times \left(\frac{16}{6} - \frac{24}{9}\right) + \frac{2}{5} =$

19) $\left(7 + \frac{2}{3}\right) - \left(5 + \frac{3}{4}\right) =$

20) $\frac{7}{3} \times \left(\frac{2}{5} - 8\right) =$

**LOS NUMEROS MIXTOS.**

Otro tipo de números con los que se suele trabajar son de la forma $3\frac{2}{5}$ que no **es lo mismo** que $3 \cdot \frac{2}{5}$ , ya que $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$ es llamado **número mixto**, y $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ hay que tener cuidado de no confundirlos.

Estos números llamados números mixtos son otra representación de las fracciones impropias(ya vistas con anterioridad).

Por ejemplo $\frac{17}{5}$ se representa por el número mixto $3\frac{2}{5}$ que resultó de dividir 17 entre 5, donde 3 es el cociente y 2 el reciduo.

E inversamente $3\frac{2}{5}$ se puede representar por $\frac{17}{5}$ que resultó de multiplicar 5 x 3 + 2 entre 5 .

EJEMPLOS. 1) $\frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$ ya que $7\overline{\smash{)}25}$ cociente 3, residuo 4

2) $\frac{53}{4} = 13\frac{1}{4}$ ya que $4\overline{\smash{)}53}$ cociente 13; 13; residuo 1

3) $7\frac{2}{5} = (5 \times 7 + 2) \div 5 = 37 \div 5 = \frac{37}{5}$

4) $4\frac{7}{9} = (9 \times 4 + 7) \div 9 = 43 \div 9 = \frac{43}{9}$

**EJERCICIO 1.3.6**

Representar cada una de las siguientes fracciones impropias como números mixtos.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $\frac{38}{4}$ | 2) $\frac{53}{6}$ | 3) $\frac{39}{8}$ | 4) $\frac{87}{14}$ |
| 5) $\frac{138}{24}$ | 6) $\frac{208}{62}$ | 7) $\frac{441}{37}$ | 8) $\frac{186}{73}$ |
| 9) $\frac{689}{45}$ | 10) $\frac{385}{48}$ | 11) $\frac{213}{12}$ | 12) $\frac{741}{81}$ |

Representar cada uno de los siguientes números mixtos como fracciones impropias.

13) $7\frac{4}{3}$ 14) $3\frac{2}{5}$ 15) $9\frac{4}{7}$ 16) $12\frac{7}{3}$

17) $5\frac{4}{15}$ 18) $3\frac{1}{3}$ 19) $21\frac{7}{9}$ 20) $37\frac{5}{11}$

**FORMA DECIMAL DE LOS NUMEROS RACIONALES.**

Ya vimos que todo entero se puede expresar como el cociente de dos números, por ejemplo:

$$3 = \frac{3}{1}, \quad -2 = \frac{-2}{1}, \quad 5 = \frac{10}{2}, \quad -47 = \frac{-141}{3}, \text{ etc...}$$

Así que ya podemos afirmar que un número racional puede ser un entero ó un número decimal.

Ejemplos:

1) $\frac{12}{3} = 4$ ; El 4 se obtuvo de dividir 12 entre 3.

2) $\frac{-35}{5} = -7$ ; El -7 se obtuvo de dividir -35 entre 5.

3) $\frac{3}{5} = 0.6$ ; El 0.6 se obtuvo de dividir 3 entre 5.

4) $\frac{25}{4} = 6.25$ ; El 6.25 se obtuvo de dividir 25 entre 4.

5) $\frac{43}{8} = 5.375$ ; El 3.375 se obtuvo de dividir 43 entre 8.

6) $\frac{7}{40} = 0.175$ ; El 0.175 se obtuvo de dividir 7 entre 40.

7) $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$ ; El $0.\overline{6}$ se obtuvo de dividir 2 entre 3. La raya colocada encima del ultimo número significa que se repite indefinidamente.

8) $\frac{3}{22} = 0.1\overline{36}$ ; El $0.1\overline{36}$ resultó de dividir 3 entre 22. La raya colocada encima de los ultimos números significa que se repiten indefinidamente.

NOTA:

| |
|---|
| Las cifras que se repiten indefinidamente en un número decimal se le llama **PERIODO**, y se caracteriza por llevar una raya arriba. Si no hay cifras que se repitan indefinidamente se dice que el **periodo** es cero. |

**EJERCICIO 1.3.7**

Escribir los siguientes números racionales en forma decimal.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $\frac{7}{4}$ | 2) $\frac{5}{2}$ | 3) $\frac{8}{6}$ | 4) $\frac{2}{7}$ |
| 5) $\frac{9}{5}$ | 6) $\frac{7}{12}$ | 7) $\frac{6}{11}$ | 8) $\frac{12}{9}$ |
| 9) $\frac{13}{4}$ | 10) $\frac{25}{37}$ | 11) $\frac{5}{8}$ | 12) $\frac{24}{7}$ |

Como hemos observado en nuestro sistema de numeración(hindú-arábigo), usamos el punto, llamado punto decimal. Dicho punto separa los valores iguales ó mayores a 1 de los valores menores que 1.

El primer número a la izquierda del punto decimal ocupa el lugar de las **unidades**.

El segundo número a la izquierda del punto decimal ocupa el lugar de las **decenas**.

El tercer número a la izquierda del punto decimal ocupa el lugar de las **centenas**, y así sucesivamente.

El primer número a la derecha del punto decimal ocupa el lugar de las **décimas**.

El segundo número a la derecha del punto decimal ocupa el lugar de las **centésimas**.

El tercer número a la derecha del punto decimal ocupa el lugar de las **milésimas**, y así sucesivamente.

Por esto es que la representación desarrollada del número 163.27 es:

$$1(100) + 6(10) + 3(1) + 2 \times \frac{1}{10} + 7 \times \frac{1}{100}$$

Entonces así como pudimos encontrar el equivalente decimal de una fracción, dado un número decimal podremos encontrar su equivalente fraccional.

EJEMPLOS:

Si la parte decimal tiene **periodo igual a cero.**

1) Encontrar la fracción equivalente a 3.125

$$3.125 = 3(1) + 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000}$$

$$= 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{3125}{1000} = \frac{25}{8}$$

Así $3.125 = \frac{25}{8}$

2) Encontrar la fracción equivalente a 25.048

$$25.048 = 2(10) + 5(1) + 0 \times \frac{1}{10} + 4(\frac{1}{100}) + 8 \times \frac{1}{1000} =$$

$$= 20 + 5 + 0 + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000} = \frac{25048}{1000} = \frac{3131}{125}$$

Así $25.048 = \frac{3131}{125}$

Si el decimal tiene periodo diferente de cero.

3) Encontrar la fracción equivalente a $2.\overline{45}$

Hacemos a $n = 2.\overline{45}$

Multiplicamos por 100 a $n$, ya que el periodo tiene dos cifras. Y tenemos $100n = 100(2.\overline{45})$

$$100n = 245.\overline{45}$$

le restamos el valor de $n$.

$$\begin{array}{rcr} & 100n = & 245.\overline{45} \\ - & n = & 2.\overline{45} \\ \hline & 99n = & 243.00 \end{array}$$

$$n = \frac{243}{99} = \frac{81}{33}$$

Así $2.\overline{45} = \frac{81}{33}$

4) Encontrar la fracción equivalente a $0.1\overline{6}$.

Hacemos a $n = 0.1\overline{6}$, en este caso haremos uso de $10n = 1.\overline{6}$ ya que el periodo empieza en las centésimas. Multiplicamos por 10 a $10n$ ya que el periodo tiene una cifra, y tenemos:

$$10(10n) = 10(1.\overline{6})$$

$$100n = 16.\overline{6}$$

le restamos el valor de $10n$.

$$\begin{array}{rcr} & 100n = & 1\overline{6}.6 \\ - & 10n = & 1.\overline{6} \\ \hline & 90n = & 15.0 \end{array}$$

$$n = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

Así $0.1\overline{6} = \frac{1}{6}$

5) Encontrar la fracción equivalente a $5.2\overline{243}$.

Hacemos a $n = 5.2\overline{243}$, en este caso haremos uso de $100n = 522.\overline{43}$ ya que el periodo empieza en las milésimas. Multiplicamos por 100 a 100n ya que el periodo tiene dos cifras, y tenemos

$$100(100n) = 100(522.\overline{43})$$

$$10000n = 52243.\overline{43}$$

le restamos el valor de 100n.

$$\begin{array}{rcr} & 10000n = & 52243.\overline{43} \\ - & 100n = & 522.\overline{43} \\ \hline & 9900n = & 51721.0 \end{array}$$

$$n = \frac{51721}{9900}$$

Así $5.22\overline{43} = \frac{51721}{9900}$

**EJERCICIO 1.3.8**

Encuentra la fracción equivalente a cada uno de los siguientes números con decimales.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) 5.2 | 2) 0.25 | 3) 6.15 | 4) 0.72 |
| 5) 3.12 | 6) 0.58 | 7) 6.25 | 8) 0.725 |
| 9) -2.5 | 10) -0.025 | 11) -1.005 | 12) $0.\overline{3}$ |
| 13) $3.\overline{1}$ | 14) $0.\overline{45}$ | 15) $3.2\overline{3}$ | 16) $0.7\overline{25}$ |
| 17) $0.\overline{125}$ | 18) $0.0\overline{6}$ | 19) $0.63\overline{43}$ | 20) $0.\overline{428571}$ |

## 1.4 LOS NUMEROS IRRACIONALES Y LOS REALES

Con lo visto anteriormente podemos concluir que todo número **racional** tiene una expresión decimal periódica.

Aquellos números que su parte decimal se repita indefinidamente y no tenga periodo son llamados **NUMEROS IRRACIONALES** los denotaremos con la letra $\mathbb{I}$.

EJEMPLOS:

1) $1.112123123412345..... \in \mathbb{I}$
2) $0.101001000100001..... \in \mathbb{I}$
3) $\sqrt{2} = 1.414213562.... \in \mathbb{I}$
4) $-\sqrt{7} = -2.6457512.... \in \mathbb{I}$
5) $\pi = 3.141592654........ \in \mathbb{I}$
6) $-\frac{\pi}{2} = -1.5707964..... \in \mathbb{I}$

En general los números **Irracionales** estan formados por los números cuyas **raices no son exactas** y aquellos números cuya expresión decimal no **tiene periodo**, de este nuevo tipo de números hay una infinidad.

Los números Irracionales cumple todas las propiedades que hasta ahorita hemos visto con los números Naturales, Enteros y Racionales.

No profundizaremos más acerca de los números Irracionales, abordaremos el tema más adelante.

Los **NUMEROS REALES** (los denotaremos con la letra $\mathbb{R}$), estan formados por la unión de los conjuntos de números Naturales, los números Enteros, los números Racionales y los números Irracionales.

Informalmente podemos decir que los números **REALES** es el conjunto de **todos** los números que hasta ahorita conocemos.

Algunas observaciones muy importantes que hay que hacer son:

1) El conjunto de los números Naturales es **subconjunto** de los números Enteros; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

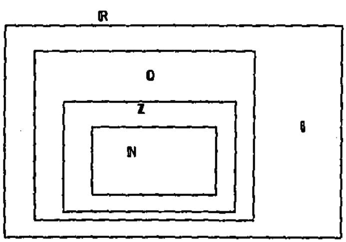
2) A su vez el conjunto de los números Enteros está **contenido** en el conjunto de los números Racionales; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

3) De los puntos 1 y 2 podemos afirmar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

4) Además ya vimos que $\mathbb{Q} \neq \mathbb{I}$.

5) Conclución $\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}}$

El siguiente diagrama de VEN-EULER nos muestra la relación enunciada en estos ultimos puntos.



EJERCICIO 1.4.1

En cada uno de los siguientes números escribe una **Q** si es un número Racional y una **I** si es un número Irracional.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $-\sqrt{25}$ | 2) $\sqrt{7}$ | 3) $-\frac{5}{3}$ | 4) $1.\overline{24}$ |
| 5) $7\frac{9}{12}$ | 6) $-0.\overline{714285}$ | 7) $-\pi^2$ | 8) $2\sqrt{3}$ |
| 9) 1.012345678.... | 10) $\sqrt{9} + \sqrt{4}$ | 11) $-5\sqrt{17}$ | 12) $3\pi$ |
| 13) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 14) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ | 15) $-3\sqrt{64}$ | 16) $\sqrt{2^2}$ |
| 17) $\pi + \pi$ | 18) $-3\frac{1}{5}$ | 19) 0.01020304.... | 20) $0.00\overline{740}$ |

**EJERCICIOS DE REPASO DE EL TEMA I.**

En cada operación con números Naturales y Enteros indica la propiedad que se está utilizando.

1) $3 \times (4 + 9) = 3 \times (9 + 4)$ propiedad________________

2) $(5 + 7) \times 1 = 5 + 7$ propiedad________________

3) $5 \times (8 + 1) = 5x8 + 5x1$ propiedad________________

4) $2 + (3 + 9) = (2 + 3) + 9$ propiedad________________

5) $(9 + 0) \times 7 = 9 \times 7$ propiedad________________

6) $8x1 + 3 = 8 + 3$ propiedad________________

7) $7xa + 7x2 = 7 \times (a + 2)$ propiedad________________

8) $(9 \times 6) + 0 = 9 \times 6$ propiedad________________

9) $(5 + 6) \times 8 = (6 + 5) \times 8$ propiedad________________

10) $4 \times [8 + (-8)] = 4 \times 0$ propiedad________________

Efectúa cada una de las siguientes operaciones.

11) $12 + 3 =$ 12) $26 - 14 =$

13) $-7 - 21 =$ 14) $-32 + 19 =$

15) $9 - 5 - 6 =$ 16) $-4 + 29 - 17 =$

17) $-16 + 5 - 28 + 34 =$ 18) $24 - 13 - 9 - 2 + 47 =$

19) $5 - (7 + 2) =$ 20) $(8 - 14) - (6 - 18) + 31 =$

21) $3 + 7x(4 - 9) =$ 22) $4x(16 - 9) + 5x(3 - 7) =$

23) $2 \times (6 - 5 \times 7) =$ 24) $[-8 + 5 \times (-2 + 7)] \times (-3) =$

25) $(9 - 5) - 7 \times [5 + 3 \times (-2 - 4) + 21] - 11 =$

26) $18 + 12 + 3 =$ 27) $(5 + 23) + 7 =$

28) $38 + (-2) + 5 =$ 29) $20 - 10 + (-5) =$

30) $15 + 3 + 24 + (-8) =$ 31) $42 + (-7) - 30 + (-5) =$

32) $12 + 4 \times 3 - 24 + 8 =$ 33) $18 \times 3 + 9 + 3x(5 - 14) =$

34) $2x(7 - 9) - 6 + (4 - 10) =$ 35) $20x(-4) + 10 - 6 + (5 - 7) =$

36) $24 + 4 \times 3 - (7 - 35) + 14 =$

Representar cada uno de los siguientes números en términos de sus factores primos.

37) 48 38) 46 39) 92 40) 147 41) 351

Para cada conjunto de números encuentra su **MCD** y su **MCM**.

42) 12, 18, 24 43) 24, 36, 48 44) 52, 68, 78

45) 9, 15, 24 46) 26, 39, 52

Expresar en su forma más simple a cada una de las siguientes fracciones.

47) $\frac{12}{30}$ 48) $\frac{35}{28}$ 49) $\frac{72}{63}$ 50) $\frac{126}{72}$ 51) $\frac{144}{360}$

Efectúa cada una de las siguientes operaciones con números racionales y simplifica los resultados.

52) $\frac{6 - 8}{3 - 4} =$ 53) $\frac{-14 - 12}{7 - 3} =$

54) $\frac{7}{4} - \frac{6}{7} - \frac{9}{14} =$

55) $\frac{9}{26} - \frac{4}{39} + \frac{5}{52} =$

56) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{9} + \frac{25}{6} =$

57) $\left(35 + \frac{7}{8}\right) \times \frac{3}{16} =$

58) $\frac{7}{4} + \left(\frac{6}{7} + \frac{5}{2}\right) =$

59) $\frac{1}{4} - \left(\frac{6}{7} \times \frac{2}{3}\right) =$

60) $\left(\frac{3}{7} - \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{3}\right) =$

61) $\frac{2}{3} - \frac{7}{4} + \left(\frac{6}{7} + \frac{5}{2}\right) =$

62) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{6}{10} - \frac{14}{9}\right) + \frac{8}{3} =$

63) $\frac{4}{3} + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{7}\right) - \frac{7}{4} =$

Representa cada una de las siguientes fracciones impropias como números mixtos.

64) $\frac{12}{5}$ 65) $\frac{35}{12}$ 66) $\frac{72}{23}$ 67) $\frac{126}{72}$ 68) $\frac{125}{36}$

Representa cada uno de los siguientes números mixtos como fracciones impropias

69) $3\frac{4}{5}$ 70) $7\frac{2}{3}$ 71) $7\frac{3}{7}$ 72) $4\frac{5}{11}$ 73) $2\frac{1}{9}$

Representa cada uno de los números fraccionarios en forma decimal.

74) $\frac{22}{13}$ 75) $\frac{15}{12}$ 76) $\frac{72}{43}$ 77) $\frac{12}{17}$ 78) $\frac{25}{36}$

Encuentra la fracción equivalente a cada uno de los siguientes números decimales.

79) $3.24$ 80) $.008$ 81) $.384$ 82) $1.3\overline{2}$ 83) $3.6\overline{42}$ 84) $5.\overline{1}$

En cada uno de los siguientes números escribe una Q si es racional y una I si es irracional.

85) $4.5\overline{67}$ 86) $1.23\overline{4} - .0\overline{5}$ 87) $3\sqrt{5}$ 88) $\left(\sqrt{11}\right)^2$

89) $3.234018605..... - 3$ 90) $1.3\overline{45} + 7$ 91) $\sqrt{9 + 6}$

TEMA II

# OPERACIONES ALGEBRAICAS BASICAS

2.1 Lenguaje algebraico
2.2 Notación y Terminología
2.3 Polinomios
2.4 Grado de un Polinomio
2.5 Adición de Polinomios
2.6 Resta de Polinomios
2.7 Producto de Polinomios
2.8 División de Polinomios

## 2.1 LENGUAJE ALGEBRAICO

Como ya lo había mencionado con anterioridad el álgebra elemental es una generalización de la aritmética, en la cuál se utiliza un lenguaje más amplio que el de la aritmética y se usan además de números reales y símbolos de operación, letras y otros símbolos; a este lenguaje se le llama LENGUAJE ALGEBRAICO.

Veamos las representaciones en lenguaje algebraico de las cuatro operaciones fundamentales y después la de algunos enunciados.

ADICION O SUMA:

Para representar la suma de los números literales **a** y **b** se representa por $a + b$, la suma de tres números cualesquiera como $a + b + c$, etc.

DIFERENCIA O RESTA:

Al restarle 7 al número literal **b** escribimos $b - 7$.

La diferencia entre 9 y **x** se escribe como $9 - x$.

La diferencia entre dos números cualesquiera se representa por $a - b$.

PRODUCTO O MULTIPLICACION:

El producto se representa de varias formas ya vistas en el tema anterior la notación que utilizaremos con mayor frecuencia será:

El producto de 3 con **a** lo representaremos como $3a$.

El producto entre los números literales **a** y **b** se escribe como $ab$.

DIVISION O COCIENTE:

La división entre 12 y 3 se representa como $12 \div 3$ ó $\frac{12}{3}$.

La división o cociente de dos números cualesquiera se representará como $a \div b$ ó $\frac{a}{b}$.

EL USO DE PARENTESIS:

No olvidemos que el uso de paréntesis es muy importante ya que nos ayudan a precisar las operaciones que se desean expresar. Es necesario aprender la colocación adecuada de los paréntesis y saber donde son estrictamente necesarios sin hacer abuso de ellos.

EJEMPLOS:

1) El cuadrado de la suma de dos números se representa por $(a + b)^2$. Si no ponemos paréntesis quedaría así $a + b^2$ que no representa lo enunciado, así que es necesario el paréntesis. Pero si lo representamos como $((a) + (b))^2$ estamos haciendo abuso de paréntesis.
2) La tercera parte de la diferencia de dos números, se representa como $(x - y) \div 3$ ó $\frac{1}{3}(x - y)$. Si no ponemos paréntesis nos quedaría así $x - y \div 3$ ó $\frac{1}{3}x - y$ que no representa al enunciado que nos dan.
3) El triple de la suma de dos números se representar por $3(a + b)$, sería un error representarlo como $3a + b$ ya que esto ultimo representa a la suma de el triple de un número con otro.
4) El doble del cubo de la suma de tres números se representa por $2(x + y + z)^3$, ya que si no se le pone paréntesis nos quedaría así $2x + y + z^3$ que es totalmente distinto al enunciado dado.
5) El cubo de la diferencia del doble de un número y su mitad se representa por $\left(2a - \frac{a}{2}\right)^3$ donde es indispensable el uso del paréntesis.

Pero existen muchos enunciados en que su representación algebráica no necesita el uso de paréntesis.

EJEMPLOS:

1) La tercera parte de la diferencia de dos números: $\frac{x - y}{3}$.
2) La mitad de un número disminuida en otro número: $\frac{x}{2} - b$.
3) La suma de los cuadrados de dos números: $a^2 + b^2$.
4) El cociente de la suma de dos números y su diferencia: $\frac{a + b}{a - b}$
5) Tres enteros consecutivos : $x$, $x + 1$, $x + 2$; donde $x \in \mathbb{Z}$.
6) Tres enteros pares consecutivos: $2x$, $2x + 2$, $2x + 4$; $x \in \mathbb{Z}$.

7) Tres enteros impares consecutivos: $2x - 1$, $2x + 1$, $2x + 3$.

8) El cociente del producto de tres números y la suma de sus cuadrados: $\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2}$

**EJERCICIO 2.1**

Representar en lenguaje algebraico a cada uno de los siguientes enunciados.

1) Un número aumentado en doce.
2) Un número disminuido en siete.
3) La mitad de un número cualquiera.
4) Dos terceras partes de un número.
5) La suma de un número con el doble de el mismo.
6) El cuádruplo de un número disminuido en dieciocho.
7) Si un niño tiene exactamente n años, ¿cuantos tenía hace 8 años?
8) Si Alberto corre a 15 km. por hora, ¿Cuántos kilómetros recorrerá en t horas?
9) La longitud de un rectángulo es 3 cm. más que el triple de su ancho.
10) Si el lado de un cuadrado mide l, su área es:
11) El número de días que hay en n semanas.
12) El número de manzanas que hay en x docenas.
13) El número de centímetros que hay en y metros.
14) El promedio de tres números cualesquiera.
15) Escribe el número 327 en forma desarrollada.
16) Escribe en forma desarrollada a un número de dos dígitos.
17) El 25% de x pesos.
18) ¿Cuánto hay que pagar por una pelota que cuesta x pesos si tiene un descuento del 30%?
19) El valor de n estampillas de setenta centavos.
20) El valor en pesos de y billetes de a 20 pesos.

21) ¿Que tanto por ciento es 35 de 50?

22) ¿Que tanto por ciento es 42 de X?

23) La raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de dos números.

24) La mitad del cubo de la diferencia entre dos números.

25) El cuádruplo del producto de la suma de dos números con su diferencia.

Hasta ahorita hemos visto enunciados con las cuatro operaciones fundamentales y potencias, pero también existen las relaciones, estas son: IGUALDAD(=), DESIGUALDAD(≠), MAYOR QUE(>) y MENOR QUE(<).

Enunciados que utilicen estas relaciones dan lugar a las ecuaciones y a las inecuaciones que estudiaremos y analizaremos más adelante.

## 2.2 NOTACION Y TERMINOLOGIA

La utilización del lenguaje algebraico da lugar a expresiones que estan formadas por combinaciones de números específicos, números literales y símbolos de operación a este tipo de números se les llama "Expresiones Algebraicas" o simplemente **expresiones.**

EJEMPLOS:

1) $4x^2 + 5xy - 32y^2$

2) $3xyz + \frac{(2xy)^3}{5 - z} - \frac{x}{3}$

3) $(2ab)(5a^2b) - \frac{2}{3ab^3}$

OBSERVACION: $\boxed{\text{Toda expresión algebraica está representando a un enunciado.}}$

Cada una de las partes de una expresión algebraica tiene un nombre, que son los siguientes.

A las partes de una expresión algebráica separadas una de otra por un signo + ó - se les llama TERMINO de la expresión.

EJEMPLOS:

1) Los términos de la expresión $3x^2 - 2xy + \frac{5}{2}$
   Son: $3x^2$, $-2xy$ y $\frac{5}{2}$
2) Los términos de la expresión $a^2b^2 + \frac{1}{2}a - 2ab$
   Son: $a^2b^2$, $\frac{1}{2}a$ y $-2ab$

Observemos que la mayoria de términos contienen literales y los términos que no contenga literales se le llama TERMINO INDEPENDIENTE; en el ejemplo 1 el término $\frac{5}{2}$ es término independiente.

Son términos positivos los que van precedidos de el signo +, y son negativos aquellos que van precedidos de el signo -.

El signo + suele omitirse delante de los términos positivos, así cuando un término no va precedido por algún signo se dice que el término es positivo.

EJEMPLOS:

1) Los términos $3x^2$, $\frac{5}{2}xy^2$, $a^2b^2$ y $\frac{1}{2}a$ son positivos.
2) Los términos $-2xy$ y $-2ab$ son negativos.

Los términos mismos estan formados por números específicos y números literales, es decir por números y letras multiplicados entre sí; a cada uno de estos números se les llama FACTORES.

EJEMPLOS:

1) Los factores del término $3xy^2$ son $3$, $x$ y $y^2$.
2) Los factores del término $-5a^2b$ son $-5$, $a^2$ y $b$.
3) Los factores del término $\frac{2ab}{3}$ son $\frac{2}{3}$, $a$ y $b$.
4) Los factores del término $-x^3y^2$ son $-1$, $x^3$ y $y^2$.

Al factor numérico se le llama COEFICIENTE NUMERICO o simplemente COEFICIENTE. El símbolo del término generalmente se considera que pertenece al coeficiente.

EJEMPLOS:

1) El coeficiente del término $5x^2y$ es $5$.
2) El coeficiente del término $-2zx^2$ es $-2$.
3) El coeficiente del término $\frac{3ab}{2}$ es $\frac{3}{2}$.

Cuando en un término no existe factor numérico, se entiende que el coeficiente es uno.

EJEMPLOS:

1) El coeficiente de el término $x^2y$ es 1, ya que $1x^2y = x^2y$
2) El coeficiente de el término $-nm^2$ es -1, ya que $-1nm^2 = -nm^2$
3) El coeficiente de el término $-x^2y^2z$ es -1, ya que $-1x^2y^2z = -x^2y^2z$

**EVALUACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS:**

La evaluación de expresiones algebraicas es el proceso de asignar valores específicos a las variables de dicha expresión para así obtener un valor numérico de tal expresión.

Los valores específicos que pueden tomar las variables de una **expresión** pueden variar pero, deben permanecer fijos durante un determinado problema.

Para hacer las evaluaciones en expresiones algebraicas solo hay que sustituir los valores específicos de cada variable y realizar las operaciones indicadas en la **expresión**.

EJEMPLOS:

1) Evaluar la expresión $(2n - 3) + 4$, cuando $n = 3$.

SOLUCION: $(2n - 3) + 4 = (2(3) - 3) + 4 = (6 - 3) + 4 = 7$

2) Evaluar la expresión $2a - 3(2b + c)$, si $a = 2$, $b = -1$ y $c = 5$.

SOLUCION: $2a - 3(2b + c) = 2(2) - 3(2(-1) + 5) = 4 - 3(-2 + 5)$
$= 4 - 3(3) = 4 - 9 = -5.$

3) Evaluar la expresión $\frac{3xy - 5xz}{2y + 7z}$, si $x = -1$, $y = 1$, $z = -3$.

SOLUCION: $\frac{3xy - 5xz}{2y + 7z} = \frac{3(-1)(1) - 5(-1)(-3)}{2(1) + 7(-3)} = \frac{-3 - 15}{2 - 21} =$

$= \frac{-18}{-19} = \frac{18}{19}$

**EJERCICIO 2.2**

Determina el número de términos, los términos positivos y negativos en cada una de las siguientes axpresiones.

1) $m^3n^2 - mn^2 + mxy^2 - x^2 + y^3 - m$

2) $\frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{4} - 2xy - x$

3) $-8a^x + 3a^{x-1}b - ab^x$

4) $3(a + b) - 31ab + 5a(b - a)$

5) $3xy(x + y)^2 - xy^2$

6) $ab^2 - 7b + c - \frac{1}{2}$

7) $xy - \frac{(x - y)^2}{5} + 2x - y + 1$

8) $(2mn)(3m^2n) - \frac{2mn^3}{3}$

9) $\frac{w - k}{w + k}$

10) $\frac{2p}{3q} - \frac{5}{p} + \frac{q}{2} - \frac{pq}{7} + \frac{q}{p} - p^2$

Determina los FACTORES y los COEFICIENTES en cada uno de los siguientes términos.

11) $3x^2y$  12) $-xyz^2$  13) $2x(5 + z)$  14) $mn(n^2 - 2m)$

15) $2(x + y)(x - y)$  16) $-\frac{3a}{b}$  17) $2(a + b)^2$

18) $\frac{-xy^2z}{2}$  19) $-(p^2 + q^2)(p - q)$  20) $-4a^3(b + 1)$

Evaluar las expresiones siguientes si $x = -1$, $y = 2$ y $z = 3$.

21) $2x - y$  22) $xy - z$  23) $2z - y^2$

24) $3y - 2x$  25) $z - x + 3y$  26) $2(x + z)^2 - y$

27) $2(x + y)(x - y)$  28) $2x - 3(z + y)$  29) $5y(z - x)$

30) $\frac{4x^2}{-y}$  31) $\frac{x - y}{z}$  32) $\frac{yz}{2} + x$

33) $\frac{x + 2y}{y - z}$  34) $\frac{xy - 3yz}{x}$  35) $\frac{5(z + y)}{3x + 4}$

## 2.3 POLINOMIOS

Ahora vamos a estudiar una clase especial de expresiones algebraicas, llamadas **polinomios**. Expresiones como $3x + 2y^2 - 7$, $m^2n^2 - mn + 5n - m$, $2ab + 6a^2 - a^2b^3$, etc. son ejemplos de polinomios en el conjunto de los números reales.

Los **polinomios** en el conjunto de los números reales son aquellas expresiones algebraicas formadas de números específicos y números literales en los cuales solo halla operaciones de suma, resta ó multiplicación(esta restricción se debe de cumplir solo entre las literales ó variables).

EJEMPLOS:

1) Expresiones que son **polinomios**: $3x + y$, $\frac{2xy^2}{3} - xy + 2$, $\frac{a^2 + b^2}{3}$, $\frac{5xy}{2} + 3x - 7$, $\frac{2mn}{3} - \frac{5x^2y^2}{6} + \frac{2}{5}$, etc.

2) Expresiones que no son **polinomios**: $2^x + 5$, $\frac{1 + y}{x}$, $(x - y)^{2x}$, $\frac{x - 2y + 7}{3x + 1}$, $\frac{2x^2y}{x - 1}$, $\sqrt{x + y}$ etc.

NOTA: | Observe que en los polinomios ninguna variable puede aparecer en el denominador ni como exponente, ni dentro de un radical.

Recordemos que toda **expresión algebraica** representa a un enunciado o algún problema determinado, que para poder resolverlo necesitamos aprender y practicar todo tipo de operaciones con éstas, para empezar lo haremos con los **polinomios** y después se extiende en general para todo tipo de expresiones algebraicas.

Es conveniente conocer la clasificación de los polinomios para que se nos facilite nuestro estudio.

-Si un polinomio tiene un sólo término se le llama monomio.

EJEMPLOS: $4xy$, $7a^2b$, $-\frac{2xz}{5}$, $-3x^3y^2$, etc.

-Si un polinomio tiene dos términos son llamados binomios.

EJEMPLOS: $x^2 + 3xy$, $-3a^2 + 2$, $\frac{4x}{3} - xy$, etc.

-Si un polinomio tiene tres términos son llamados trinomios.

EJEMPLOS: $a + 3b + 5$, $4x^2 + 5y - 7$, $3x^3 - \frac{4x}{5} + \frac{2x^2}{3}$, etc.

-Aquellos que tiene cuatro ó más términos son simplemente polinomios.

EJEMPLOS: $3a^3 - 9a^2 + 2a - 7$, $6xy - x^2y^2 + \frac{xy}{3} - 6x + 8y + 1$, etc.

EJERCICIO 2.3

De las siguientes expresiones algebraicas, dí cuales son polinomios y cuales no lo son.

1) $x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}$

2) $x^2 - \frac{2xy}{3} + 2y^2$

3) $\frac{4x - 2y + 5}{3}$

4) $\frac{2x + 1}{3x^2 + 2x - 1}$

5) $\frac{2}{a + b}$

6) $x^2 + \frac{3y}{2} - 1$

7) $\frac{4x^2y^3z}{3}$

8) $3x + 6y - 5x^2 + \sqrt{8}$

9) $\frac{3n^2}{2} - \frac{2mn}{5} + \frac{6}{4}$

10) $\frac{3x}{2} - 2x + 1$

11) $\sqrt{x^2 + \frac{3y}{2}}$

12) $\frac{2a - 6a^3 + 7a^2 - 1}{5a}$

Clasifica a cada uno de los siguientes polinomios según el número de términos que contengan.

13) $4x^3 - 3x + 5$

14) $2xy - x$

15) $3x^3y^2$

16) $7$

17) $3x^2 - 5xy^2 + 6$

18) $\frac{2x}{3} - 3x^2y + 1$

19) $2ab^2 - 5a$

20) $4xy^2$

21) $3x + 2y - 7xy + x^2 - 5$

22) $9ab^2 - 3a + 5b$

23) $mn^3 - 5n^2$

24) $\frac{mn^2p}{3}$

25) $3 - 5x + 2y - 3xy + 4x^5$

26) $xy - 1$

27) $-3$

28) $xyz + x^2 + y^2 + z^2$

29) $7a - 2b + a^2b^2$

30) $\frac{4m}{5} + \frac{n}{2}$

---

## 2.4 GRADO DE UN POLINOMIO

Si un polinomio tiene una sola variable el grado de el polinomio será el exponente de la mayor potencia de la variable de cualquiera de sus términos.

EJEMPLOS: 1) El grado del trinomio $2b^2 - 3b^3 + 5b$ es 3, ya que es el exponente de la mayor potencia de la variable b.

2) El grado de el polinomio $12 - 5m^4 + 8m + 3m^2$ es 4, ya que es el exponente de la mayor potencia de la variable m.

El grado de un monomio es la suma de los exponentes de sus variables.

EJEMPLOS:

1) El grado del monomio $3x^2$ es 2.
2) El grado del monomio $\frac{5y^4}{2}$ es 4.
3) El grado del monomio $5xy^3$ es $1+3 = 4$.
4) El grado del monomio $2a^2bc^3$ es $2+1+3 = 6$.

Si un polinomio tiene más de una variable el grado del polinomio será el mayor grado de sus términos que son monomios.

EJEMPLOS:

1) El grado del polinomio $3x^2y - x^3y^5 + 7xy$ es 8; ya que 3+5 es la mayor de las sumas de los exponentes de uno de sus términos.

2) El grado del polinomio $2ab^2 - 5a^2b^2 - 2b + 6$ es 4; ya que 2+2 es la mayor de las sumas de los exponentes de uno de sus términos.

3) El grado del polinomio $5x + 2yz^3 - x^2y^2z + 3x^2y + xyz$ es 5; ya que 2+2+1 es la mayor de las sumas de los exponentes de uno de sus términos.

Cualquier constante real diferente de cero se define como un polinomio de cero grado.

**EJERCICIO 2.4**

Determina el grado de cada uno de los siguientes polinomios.

1) $4x^3 - 3x + 5$
2) $2xy - x$
3) $3x^3y^2$
4) $7$
5) $3x^2 - 5x^3y^2 + 6$
6) $\frac{2x}{3} - 3x^2y + 1$
7) $2ab^2 - 5a$
8) $4xy^3$
9) $3x + 2y - 7xy + x^2 - 5$
10) $9ab^2 - 3a + 5b$
11) $mn^3 - 5n^2$
12) $\frac{mn^2p}{3}$
13) $3 - 5x + 2y - 3xy + 4x^5$
14) $xy - 1$
15) $-3$
16) $xyz + x^2 + y^2 + z^2$
17) $7a - 2b + a^2b^2$
18) $\frac{4m^3}{5} + \frac{n}{2}$
19) $2m^3n + mn - m^2n^3 + 5$
20) $a^2b^2 + c^2d^2 + acd^3$

## 2.5 ADICION DE POLINOMIOS

Para la adición o suma de polinomios haremos uso de los términos semejantes ya que solamente estos se podrán sumar o restar.

Los términos que difieren sólo en su coeficiente numérico se les llama TERMINOS SEMEJANTES.

EJEMPLOS:

1) Los términos $2xy^2$, $-3xy^2$, $-12xy^2$ y $21xy^2$ son términos semejantes, ya que solo son diferentes por el coeficiente.
2) Los términos $-ab$, $5ab$, $3ab$, $-8ab$ y $-4ab$ son términos semejantes, porque solo difieren en el coeficiente.
3) Los términos $5m^2n^3$, $-11m^2n^3$, $23m^2n^3$ también son términos semejantes.

Los términos semejantes se pueden sumar fácilmente sumando sus coeficientes numéricos y la parte literal queda igual.

EJEMPLOS:

1) Sumar los términos: $2xy^2$, $-3xy^2$, $-12xy^2$.

SOLUCIÓN: Sumamos sus coeficientes numéricos $2 + (-3) + (-12) = -13$

Entonces $2xy^2 + -3xy^2 + -12xy^2 = -13xy^2$

2) Sumar los términos: $5m^2n^3$, $-11m^2n^3$, $23m^2n^3$.

SOLUCIÓN: Sumamos sus coeficientes numéricos $5 + (-11) + 23 = 17$

Entonces $5m^2n^3 + -11m^2n^3 + 23m^2n^3 = 17m^2n^3$

3) Sumar $\frac{3xy}{2}$, $5xy$, $-7xy$, $\frac{6xy}{5}$.

SOLUCIÓN: Sumamos los coeficientes $\frac{3}{2} + 5 + (-7) + \frac{6}{5} = \frac{7}{10}$

Entonces $\frac{3xy}{2} + 5xy + -7xy + \frac{6xy}{5} = \frac{7xy}{10}$

Para sumar dos o mas polinomios nos fijamos en aquellos términos que sean semejantes y los sumamos como ya lo vimos.

EJEMPLOS:

1) Sumar el polinomio $4x + 5x^2 - 3$ con el polinomio $8x + 2 - 3x^2$.

SOLUCIÓN:

Para facilitar las sumas con polinomios, ordenamos cada uno de sus términos por potencias en orden descendente de izquierda a derecha con respecto a una variable.

Así ordenando nuestro primer polinomio nos queda de la siguiente forma: $5x^2 + 4x - 3$

Después colocamos debajo de el, los términos que sean semejantes del segundo polinomio y nos quedaría así:

$$\begin{array}{rrr} 5x^2 & +\ 4x & -\ 3 \\ -3x^2 & +\ 8x & +\ 2 \\ \hline 2x^2 & +\ 12x & -\ 1 \end{array}$$

Sumamos las columnas y se obtiene $2x^2 + 12x - 1$

El resultado de la suma es $2x^2 + 12x - 1$.

2) Sumar los polinomios $x^2 + x^3 - 3x$, $4 - 5x^2 + 3x^3$ y $10 - 8x^2 - 5x$.

SOLUCIÓN:

Ordenamos los términos del primer polinomios: $x^3 + x^2 - 3x$

Después colocamos debajo de este, los términos semejantes del segundo polinomio y debajo de estos colocamos los términos semejantes del tercer polinomio y nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rrrr} x^3 & +\ x^2 & -\ 3x & \\ 3x^3 & -\ 5x^2 & & +\ 4 \\ & -\ 8x^2 & -\ 5x & +\ 10 \\ \hline 4x^3 & -\ 12x^2 & -\ 8x & +\ 14 \end{array}$$

Sumando se obtiene: $4x^3 - 12x^2 - 8x + 14$

El resultado de la suma es: $4x^3 - 12x^2 - 8x + 14$

EJERCICIO 2.5

Efectuar la suma de los siguientes términos semejantes.

1) $7a,\ -9a,\ 2a,\ 4a$

2) $-8a^2b,\ 5a^2b,\ 12a^2b,\ -3a^2b,\ a^2b$

3) $15xy,\ 7xy,\ -4xy,\ -2xy$

4) $6mn^3,\ -9mn^3,\ -13mn^3$

5) $\frac{21ax}{3},\ \frac{8ax}{3},\ \frac{-25ax}{3}$

6) $\frac{7pq}{x},\ \frac{13pq}{x},\ \frac{-16pq}{x},\ \frac{-5pq}{x}$

Realizar la suma de los siguientes polinomios.

7) $3x - 5;\ 2x + 3$

8) $2y^2 - 6y + 1;\ y^2 - 6y - 1$

9) $7x - 5;\ -x + 3;\ -8x - 2$

10) $a - 8 - 9a^2 - 6a;\ 4 + 3a^2 - 10a$

11) $5x^2 + 2x - 7;\ \ 2x^2 + 3 - 8x;\ \ -3x - 8$

12) $a^2 - 2ab - b^2;\ \ b^2 + 2ab - a^2;\ \ 2a^2 + 2b^2 - 5ab$

13) $2x^2 - 3y^2;\ \ -3xy + 8y^2 - 5x^2;\ \ 9x^2 + 6xy - 10y^2$

14) $3a^2 - 8ab + 4b^2;\ \ 2ab - 4a^2 - 7b^2;\ \ 6b^2 + 3ab$

15) $-8a^2m + 6am^2 - m^3;\ a^3 - 5am^2 + am^2;\ -4a^3 + 4a^2m - 3am^2;\ 7a^2m - 4am^2 - 6$

16) $m^2 + \frac{1}{2}p - q;\ \ 3m^2 - 2p + \frac{3}{2}q;\ \ 5p - \frac{5}{2}q$

17) $8xy - 2yz;\ \ 2xy - z + 6yz;\ \ 9yz - 7yx - 3z$

18) $2ax + 3by - 7cz;\ \ -2ax - 4by + 8cz;\ \ by + cz + ax$

19) $6xy - 9x^3y + 3y;\ 7x^3y - 3xy + y;\ -2x^3y + 5xy;\ 7y - 9xy;\ -4y + 6x^3y$

20) $12pq - 17p + 8;\ -16q + 9p - 15;\ 18q - 11p - 24pq$

---

## 2.6 RESTA DE POLINOMIOS

Para restar dos polinomios se procede de la misma manera que la suma, la única diferencia es que al minuendo se le suma el inverso aditivo del sustraendo. El inverso aditivo de un polinomio es aquel que está formado por los inversos aditivos de cada uno de sus términos.

EJEMPLOS:

1) Restar $7xy - 5x + 3y$ a el polinomio $3xy + 7x - 9y$.

SOLUCIÓN: $3xy + 7x - 9y - (7xy - 5x + 3y) =$

$3xy + 7x - 9y - 7xy + 5x - 3y = -4xy + 12x - 12y$.

Que es lo mismo que:
$$\begin{array}{r} 3xy + 7x - 9y \\ \underline{-7xy + 5x - 3y} \end{array}$$
Sumando se tiene: $-4xy + 12x - 12y$

El resultado es $-4xy + 12x - 12y$.

2) Restar $5xy^3 - 5x^2 + 6y$ a el polinomio $3xy^3 - 8x^2 - 3y$.

SOLUCIÓN: $3xy^3 - 8x^2 - 3y - (5xy^3 - 5x^2 + 6y) =$

$3xy^3 - 8x^2 - 3y - 5xy^3 + 5x^2 - 6y = -2xy^3 - 3x^2 - 9y$.

Que es lo mismo que:
$$\begin{array}{r} 3xy^3 - 8x^2 - 3y \\ \underline{-5xy^3 + 5x^2 - 6y} \end{array}$$
Sumando se tiene: $-2xy^3 - 3x^2 - 9y$

El resultado es $-2xy^3 - 3x^2 - 9y$.

**EJERCICIO 2.6**

Realiza las siguientes restas entre polinomios, fijandote bien quien será el minuendo y el sustraendo.

1) A $3x + y$ restarle $x - y$.
2) A $2x^2 - 3y^2$ restarle $-x^2 + 4y^2$.
3) A $3a - 2b + 4c$ restarle $a - 3c$.
4) A $4x - z$ restarle $5y - 3z$.
5) A $x^2 + 19x - 21$ restarle $3x^2 + 21x - 40$.
6) Restar $3x^2 - xy - 5y^2$ de $x^2 + xy + y^2$.
7) Restar $2x^2 - 3x - 5$ de $x^3 - 5x^2 + 6x$.
8) Restar $-y^2 + 3x^2 - 4xy$ de $x^2 + y^2 - 3xy$.
9) Restar $-11x^2 + 21x - 43 + 6x^3$ de $x^3 - 9x + 6x^2 - 19$.

10) ¿Cuánto debemos sumar a $x^2 - 4x$ para obtener $3x^2 + 2x$?

11) ¿Cuánto debemos restar a $3a^2 - 5xy + 7y^2 - 16$ para obtener $a^2 + xy + 1$.

12) Sumarle $2a - 5ab + 3$ a $-ab + a - 7$ y restarle $4a - 2ab + 1$.

13) Restar $\frac{2x}{3} - \frac{3y}{2} + \frac{5}{4}$ a $\frac{7x}{3} + \frac{5y}{2} - \frac{3}{4}$

14) Agregar $3x - y$ a $x - 2y$; a la suma restarle $5x + y$; el resultado restarlo a $-3x + 5y - 2$.

Suprimir paréntesis y simplificar los términos semejantes.

15) $(-8x^2 + 5x - 4) - (-x^3 + 6x - 4x^2)$

16) $(-3m + 4n + 5p) - (n - m + p)$

17) $(x^3 - 5x^2 + 6x) - (2x^2 - 3xy - 4y^2)$

18) $(6a^2 - 2ab - b) - (4a^2 + 3ab + 5b)$

19) $(-4pq + 3p - 2q) - (9p - 2q + 5pq)$

20) $(4y^2 - 2y - 3) + (-2y^2 - y + 2) - (3y^2 + 3y + 4)$

21) $(3a^2 + 5b^2 + 3) - [(8 + 2a^2 - 4b^2) - (8a^2 + 6 - 5b^2)]$

22) $[(2y - 4x + xy) - (5y - 3x - 3xy)] + [(4x - xy) - (3y - 7x)]$

23) $\left[\frac{2x}{5} + \frac{3y}{2} - \frac{3}{5}\right] - \left[\frac{4x}{3} + \frac{2y}{5} + \frac{2}{3}\right] + \frac{3}{2}$

24) $\left[\frac{3a}{2} - \frac{2b}{3} - 5\right] - \left[-\frac{a}{3} + \frac{3b}{2} - 3\right]$

25) $\left[\frac{3p}{2q} - \frac{2p^2}{q^2} + 4\right] - \left[-\frac{p}{4q} - \frac{p^2}{2q^2} - 2\right]$

## 2.7 PRODUCTO DE POLINOMIOS

Para la multiplicación de números específicos sabemos que el producto de 2 por 5 es $2 \times 5 = 5 + 5 = 10$.

Podemos generalizar un poco para el producto de 3 por a es:

$3a = a + a + a$ 3 veces a.

$5ab = ab + ab + ab + ab + ab$ 5 veces ab.

En general: $ax = x + x + x + x + \ldots + x$ a veces x.

Ahora en el término $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ el factor 3 se multiplica 4 veces, esto se representa como $3^4$, se lee "3 a la potencia 4". De la misma forma $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ el factor **x** se multiplica 5 veces, esto lo escribimos como $x^5$, a el número **x** se le llama **base** y al 5 **exponente**. Cuando tenemos un número literal y se considera como una potencia con exponente 1.

EJEMPLOS:
1) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
2) $5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
3) $a^7 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$
4) $(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3)$
5) $-4^3 = -(4 \cdot 4 \cdot 4)$
6) $3b^4 = 3 \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$
7) $a^2b^3 = a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$

DEFINICION:

$$\boxed{\text{Si } x \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N} \text{ se cumple } \quad x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factores}}}$$

**EJERCICIO 2.7.1**

Escribe las siguientes expresiones empleando la notación de exponentes.

| | | |
|---|---|---|
| 1) $3\cdot3\cdot3 =$ | 2) $5\cdot5\cdot5\cdot5 =$ | 3) $b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b =$ |
| 4) $7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7 =$ | 5) $2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 =$ | 6) $a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b =$ |
| 7) $(-p)(-p)(-p) =$ | 8) $3\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x =$ | 9) $5\cdot p\cdot p\cdot q\cdot q\cdot q =$ |
| 10) $a\cdot a\cdot a\cdot(-p\cdot p) =$ | 11) $a\cdot a\cdot a\cdot(-p)\cdot(-p) =$ | 12) $x\cdot x + y\cdot y\cdot y\cdot y =$ |
| 13) $(3\cdot m\cdot m\cdot m)\cdot(2\cdot n\cdot n) =$ | 14) $2\cdot x\cdot x + x\cdot x\cdot x\cdot x =$ | 15) $(a+b)(a+b)(a+b) =$ |

Escribe las siguientes potencias en forma desarrollada:

| | | |
|---|---|---|
| 16) $3^5 =$ | 17) $7^3 =$ | 18) $5^7 =$ |
| 19) $x^4 =$ | 20) $a^2b^4=$ | 21) $-x^3y^6=$ |
| 22) $(-3)^4=$ | 23) $5^x =$ | 24) $x^nx^3 =$ |
| 25) $(a + b)^5=$ | | |

Ahora veamos con detalle las siguientes operaciones:

- $a^2a^3= a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^5$ por definición.
  $2^32^5= 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^8$ por definición.
  $x^4x^8= x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x = x^{12}$ por definición.
  $y^3y^5= y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y = y^8$ por definición.

De esto podemos concluir la siguiente propiedad.

**PROPIEDAD 1:** Si $X\in R$ y $m,n\in N$ entonces $X^mX^n= X^{m+n}$.

Demostración:

$$X^mX^n=\underbrace{\underbrace{X\cdot X\cdot X\cdot\ldots\ldots\cdot X}_{m\text{ factores}}\cdot\underbrace{X\cdot X\cdot X\cdot\ldots\ldots\cdot X}_{n\text{ factores}}}_{m\,+\,n\text{ factores}}= X^{m+n}$$

OBSERVACION 1: $\boxed{\text{Para que se cumpla esta propiedad, las bases de las potencias deben ser las mismas.}}$

EJEMPLO: Es FALSO $2^2 \cdot 3^3 = 2^5$ ó $2^2 \cdot 3^3 = 3^5$ ó $2^2 \cdot 3^3 = 5^5$.

Lo correcto es $2^2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 27 = 108$.

¡RECUERDALO!

OBSERVACION 2: $\boxed{\text{Observese que solo se suman los exponentes, la base no se altera.}}$

EJEMPLO: Es FALSO $3^2 \cdot 3^5 = 9^8$ ó $3^2 \cdot 3^5 = 6^8$.

Lo correcto es $3^2 \cdot 3^5 = 3^8$ ¡RECUERDALO!

OBSERVACION 3: $\boxed{\text{Para aplicar esta propiedad las potencias se deben estar multiplicando, no sumando ni restando.}}$

EJEMPLO: Es FALSO $3^2 + 3^5 = 3^8$ ó $3^5 - 3^2 = 3^3$.

¡RECUERDALO!

**PRODUCTOS ENTRE MONOMIOS:**

En el producto de números literales y específicos se usan las mismas propiedades del producto de números específicos(ya vistas en el tema 1) como son: Ley conmutativa, Ley asociativa, Ley distributiva y las leyes de los signos. Te recomiendo les des un repaso ya que las vamos a utilizar en ésta sección.

EJEMPLOS: 1) $(3x^3y)(5xy^2) = (3\cdot5)\cdot(x^3\cdot x)\cdot(y\cdot y^2) = 15\cdot x^4\cdot y^3 = 15x^4y^3$

2) $(5a^2b^2)(-4ab^5) = (5)\cdot(-4)\cdot(a^2\cdot a)\cdot(b^2\cdot b^5) = -20a^3b^7$

3) $(-6m^5n^3)(-8m^2n^7) = (-6)\cdot(-8)\cdot(m^5\cdot m^2)\cdot(n^3\cdot n^7) = 48m^7n^{10}$

4) $(2pq^3)(-4pq)(5p^2q^3) = (2)\cdot(-4)\cdot(5)\cdot(p\cdot p\cdot p^2)\cdot(q^3\cdot q\cdot q^3) =$
$= -40p^4q^7$

Lo que hemos multiplicado son productos de monomios que como ves no tienen gran dificultad.

**EJERCICIO 2.7.2**

Obtener el valor numérico de las siguientes expresiones.

1) $-2^3 + 2^4 =$ 2) $2^3 3^2 =$ 3) $(-2)^4 + (-3)^2 =$
4) $(4 - 9)^2 =$ 5) $5^3 - 3^4 =$ 6) $2^2 3^2 - 2^5 =$
7) $-(-2)^6 =$ 8) $(-3)^3(-5)^2$ 9) $(-6 - 4)^3 =$
10) $(-1)^5(-2)^3(-3) =$

Simplifica los siguientes términos.

11) $x^3x^5x^4 =$ 12) $2^5 2^3 2^2 2 =$ 13) $y^3y^2y^5 =$
14) $2^7 2^5 3^2 3^8 =$ 15) $5^3 5^7 + 5^4 5^2 =$ 16) $5x^2 + 2x^5 =$

Efectúa los siguientes productos entre monomios.

17) $(-5x^3y)(xy^2) =$ 18) $(3a^2bx)(7b^3x^5) =$
19) $(-4a^4b^2c)(-6ab^3c^3) =$ 20) $(8m^4n^2r^3)(-3mnr) =$
21) $(4mn^3)(-3mnt)(-7n^2t^3) =$ 22) $(-m^2n)(-3m^2)(-5mn^3) =$
23) $(3x)(-4y)(-2x^2y) =$ 24) $b^2(-4ab)(3ab^2) =$
25) $(-7x^2y^2)(-2xy^3)(-x^3y^2) =$ 26) $(2^3 3^5)(2^5 3^2)(3^4) =$
27) $5^n 5^{3-n} 5^2 =$ 28) $y^{n+1}y^{5-n}y^{n+2} =$
29) $(-5m^an^b)(-6m^2n^3x) =$ 30) $(a^{x-1}b^{x+2})(-3a^{x+2}b^3) =$

Por definición sabemos que:

$$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = (2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2) = 2^6$$
$$(3^2)^4 = 3^2\cdot3^2\cdot3^2\cdot3^2 = (3\cdot3)\cdot(3\cdot3)\cdot(3\cdot3)\cdot(3\cdot3) = 3^8$$
$$(a^3)^4 = a^3\cdot a^3\cdot a^3\cdot a^3 = (a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a) = a^{12}$$

Podemos concluir la siguiente propiedad:

**PROPIEDAD 2:** Si $X \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$ entonces $(X^m)^n = X^{m\cdot n}$.

Demostración:

$$(X^m)^n = \underbrace{X^m \cdot X^m \cdot X^m \cdot \ldots \cdot X^m}_{n \text{ factores}} = \overbrace{(X\cdot X\cdot \ldots \cdot X)}^{m \text{ factores}} \cdot \overbrace{(X\cdot X\cdot \ldots \cdot X)}^{m \text{ factores}} \cdot \ldots$$
$$\ldots\ldots \cdot \underbrace{(X\cdot X\cdot \ldots \cdot X)}_{m \text{ factores}} = \underbrace{X\cdot X\cdot X\cdot \ldots\ldots \cdot X}_{m\cdot n \text{ factores}} = X^{m\cdot n}$$

EJEMPLOS:

1) $(3^4)^2 = 3^{4\cdot2} = 3^8$
2) $(5^3)^7 = 5^{3\cdot7} = 5^{21}$
3) $(-2^3)^5 = -2^{3\cdot5} = -2^{15}$
4) $(x^5)^4 = x^{5\cdot4} = x^{20}$
5) $(-y^3)^6 = y^{3\cdot6} = y^{18}$

Ahora por la definición de exponentes se cumple:

$$(2\cdot3)^3 = (2\cdot3)(2\cdot3)(2\cdot3) = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3 = 2^3 3^3$$
$$(5\cdot7)^2 = (5\cdot7)(5\cdot7) = 5\cdot5\cdot7\cdot7 = 5^2 7^2$$
$$(a\cdot b)^4 = (a\cdot b)(a\cdot b)(a\cdot b)(a\cdot b) = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b = a^4 b^4$$

Ya podemos demostrar la siguiente propiedad:

**PROPIEDAD 3:** Si $X, Y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $(XY)^n = X^n Y^n$.

Demostración:

$$(XY)^n = \underbrace{(XY)(XY)\ldots\ldots(XY)}_{n \text{ factores}} = \overbrace{(X\cdot X\cdot \ldots \cdot X)}^{n \text{ factores}} \cdot \overbrace{(Y\cdot Y\cdot \ldots \cdot Y)}^{n \text{ factores}}$$
$$= X^n Y^n$$

EJEMPLOS: 1) $(3\cdot 7)^3 = 3^3 7^3$

2) $(5\cdot 11)^5 = 5^5 11^5$

3) $(3a)^4 = 3^4 a^4$

4) $(2^3 3^2)^4 = (2^3)^4 (3^2)^4 = 2^{12} 3^8$

5) $(-a^2 b^5)^3 = -(a^2)^3 (b^5)^3 = -a^6 b^{15}$

(4 y 5: aplicando las propiedades 3 y la 2.)

OBSERVACION:

> Recuerda que esta propiedad sólo es válida cuando las potencias se están multiplicando, no se vale cuando se suman ni cuando se restan.

EJEMPLOS: Es **FALSO** hacer lo siguiente: $(2 + 5)^2 = 2^2 + 5^2$

Es **FALSO** hacer lo siguiente: $(5 - 3)^3 = 5^3 - 3^3$

¡RECUERDALO!

**EJERCICIO 2.7.3**

Efectúa las operaciones indicadas y simplifica.

| | | |
|---|---|---|
| 1) $(3^2)^3 =$ | 2) $(5^3)^4 =$ | 3) $(7^4)^3 =$ |
| 4) $(-2^3)^5 =$ | 5) $(-3^4)^2 =$ | 6) $(x^3)^6 =$ |
| 7) $(-a^4)^6 =$ | 8) $(2x^2)^3 =$ | 9) $(-3b^3)^3 =$ |
| 10) $(5\cdot 3)^5 =$ | 11) $(-2\cdot 5)^3 =$ | 12) $(7^2 x^3)^3 =$ |
| 13) $(3a^3b^2)^4 =$ | 14) $6(xy^3)^5 =$ | 15) $(-x^3y)^3 =$ |
| 16) $-(-2^2ab^2)^5 =$ | 17) $-(-3a^2b^3)^4 =$ | 18) $x(2x^2)^3 =$ |
| 19) $3x(x^3)^2 =$ | 20) $-3a^2(3a^3)^2 =$ | 21) $x^2y(xy^3)^3 =$ |
| 22) $6m^2n^3(2mn^2)^3 =$ | 23) $(a^{2m})^3 =$ | 24) $(mn)^x(3mn)^x =$ |
| 25) $(x^2y^3)^2(xy^4)^3 =$ | 26) $(3^x 5^{2x} 7^x)^3 =$ | 27) $(x^a y^b)^n =$ |

Sustituye los signos de interrogación por el símbolo que creas correcto.

28) $a^3a^? = a^?$ 29) $x^?x^5 = x^9$ 30) $x^9 = (x^?)^3$

31) $(x^?y^3)^4 = x^8y^?$ 32) $(a^3b^?)^? = a^{12}b^{20}$ 33) $y^{12} = y^5y^?$

34) $(2a^?b^5)^3 = 2^?a^6b^?$ 35) $(3^?x^2y^3)^? = 3^6x^4y^6$

**PRODUCTO ENTRE UN MONOMIO Y UN POLINOMIO.**

Para la multiplicación de un monomio y un polinomio vamos a utilizar la Ley distributiva y la propiedad 2 de los exponentes.

La ley distributiva extendida quedaría asi:

$$X(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots\dots\dots + Y_n) = XY_1 + XY_2 + XY_3 + \dots\dots\dots + XY_n$$

Y es la que vamos a aplicar para multiplicar un monomio por un polinomio.

EJEMPLOS:

1) Multiplicar $2x^2$ con $x^2 + 3x - 5$.

SOLUCION: $2x^2(x^2 + 3x - 5) = 2x^2(x^2) + 2x^2(3x) + 2x^2(-5) =$
$= 2x^4 + 6x^3 - 10x^2$

2) Multiplicar $-3y$ con $2y^2 - y + 1$.

SOLUCION: $-3y(2y^2 - y + 1) = (-3y)(2y^2) + (-3y)(-y) + (-3y)(1) =$
$= -6y^3 + 3y^2 - 3y$

3) Multiplicar $2ab^2$ con $5ab + 4a + b^2$.

SOLUCION: $2ab^2(5ab + 4a + b^2) = 2ab^2(5ab) + 2ab^2(4a) + 2ab^2(b^2) =$
$= 10a^2b^3 + 8a^2b^2 + 2ab^4$

4) Multiplicar $2xy$ con $\frac{xy - 2}{3} - \frac{3xy + 1}{2}$.

SOLUCION: $8xy\left[\frac{xy - 2}{4} - \frac{3xy + 1}{2}\right] = \frac{8xy}{1}\left[\frac{xy - 2}{4}\right] + \frac{8xy}{1}\left[-\frac{3xy + 1}{2}\right]$

$$= \frac{8xy(xy - 2)}{4} - \frac{8xy(3xy + 1)}{2} = 8xy(xy - 2) - 8xy(3xy + 1) =$$

$$= 8x^2y^2 - 16xy - 24x^2y^2 + 8xy = - 16x^2y^2 - 8xy$$

5) Efectúa la operación indicada y simplifica.

$$3ab(5a^2b - 2ab^2) - 5a^2b^2(2a - 3b) = 15a^3b^2 - 6a^2b^3 - 10a^3b^2 + 15a^2b^3 =$$
$$= 5a^3b^2 - 9a^2b^3$$

**EJERCICIO 2.7.4**

Efectúa las operaciones indicadas y donde sea necesario simplifica.

1) $2a(a - 5)$
2) $3m(5m + 2)$
3) $7ab(2a^2b + 3a^3)$
4) $4xy(3x - 2y)$
5) $-2a^2(a^3 - 5a^2)$
6) $5a^2(a^2 - 2a + 3)$
7) $-3ab(9a^2 - 5ab + 6b^2)$
8) $-2x(x^2 - 4x + 3)$
9) $4x^2y(x^3y - 3xy + 5y)$
10) $5a^2bc^2(-3b^3 + 5b^2c - 7ab + 4ac)$
11) $-2a^2x^3(5ax + 3a^3x^2 - 4ax^2)$
12) $3x(2x - 1) + x(5x - 3)$
13) $2a(3a + 5) - 5a(a - 3)$
14) $ab(3a^2b + 2ab^2) - 3a^2b^2(2a - 3b)$
15) $3x^2y(6xy^3 - 2y^2) + 7xy(2xy^2 + x^2y^3) - 2y^2(x^3y^2 + 5x^2)$
16) $16\left[\frac{xy + 2}{8} - \frac{3xy + 1}{4}\right]$
17) $8x\left[\frac{xy - 5}{4} - \frac{2xy - 3}{2}\right]$
18) $18ab\left[\frac{2ab - 3}{3} + \frac{4ab + 2}{9}\right]$
19) $10x^2y\left[\frac{2y^2 - 2x}{4} - \frac{3x - 5y^2}{2}\right]$

**PRODUCTO ENTRE POLINOMIOS.**

El producto o multiplicación entre dos polinomios es muy semejante a el producto entre un monomio y un polinomio, ya que a uno de los polinomios que nos den lo vamos a considerar como una sola cantidad que multiplicará a cada término del segundo polinomio.

EJEMPLOS:

1) Multiplicar $2x + 1$ con $5x - 3$.

SOLUCION: Consideremos $2x + 1$ como una cantidad y aplicando la ley distributiva dos veces procedemos así:

$$\begin{aligned} \boxed{2x+1}(5x-3) &= \boxed{2x+1}(5x) + \boxed{2x+1}(-3) = \\ &= 5x(2x+1) + (-3)(2x+1) \\ &= 10x^2 + 5x - 6x - 3 = 10x^2 - x - 3 \end{aligned}$$

Para algunos es de mayor facilidad hacer el producto de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rrrr} & & 2x & +1 \\ & & 5x & -3 \\ \hline & & -6x & -3 \\ + & 10x^2 & +5x & \\ \hline & 10x^2 & -x & -3 \end{array}$$

Acomodar en columna y cada uno de los términos del 2° polinomio multiplica a cada término del 1er. polinomio.

Para efectuar la suma se colocan en columna los términos semejantes que resulten del producto.

Así que $(2x + 1)(5x - 3) = 10x^2 - x - 3$

2) Multiplicar $5a^2 + 2a - 1$ por $2a - 3$.

SOLUCION:

$$\begin{array}{rrrr} & 5a^2 & +2a & -1 \\ & & 2a & -3 \\ \hline & -15a^2 & -6a & +3 \\ 10a^3 & +4a^2 & -2a & \\ \hline 10a^3 & -11a^2 & -8a & +3 \end{array}$$

Entonces $(5a^2 + 2a - 1)(2a - 3) = 10a^3 - 11a^2 - 8a + 3$

3) Realizar el producto de $(2y - 3)^2$ y $3y - 5$.

Primero: haremos $(2y - 3)^2 = (2y - 3)(2y - 3)$

$$\begin{array}{rrr} & 2y & -3 \\ & 2y & -3 \\ \hline & -6y & +9 \\ 4y^2 & -6y & \\ \hline 4y^2 & -12y & +9 \end{array}$$

Entonces $(2y - 3)^2 = 4y^2 - 12y + 9$

Segundo: haremos el producto $(4y^2 - 12y + 9)(3y - 5)$.

$$\begin{array}{r} 4y^2 - 12y + 9 \\ \underline{3y - 5} \\ -20y^2 + 60y - 45 \\ \underline{12y^3 - 36y^2 + 27y \qquad} \\ 12y^3 - 56y^2 + 87y - 45 \end{array}$$

El resultado final de $(2y - 3)^2(3y - 5) = 12y^3 - 56y^2 + 87y - 45$.

4) Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

$(a - 3)(a^2 + 2a) + a(2a + 5)(3a - 4) =$

Primero: realizamos el producto $(a - 3)(a^2 + 2a) = a^3 - a^2 - 6a$

Segundo: realizamos el producto $a(2a + 5)(3a - 4) = (2a^2 + 5a)(3a - 4)$
$= 6a^3 + 7a^2 - 20a$

Tercero: efectuamos la suma de los dos productos.

$(a - 3)(a^2 + 2a) + a(2a + 5)(3a - 4) = a^3 - a^2 - 6a + 6a^3 + 7a^2 - 20a =$
$= 7a^3 + 6a^2 - 26a$

Finalmente $(a - 3)(a^2 + 2a) + a(2a + 5)(3a - 4) = 7a^3 + 6a^2 - 26a$

**EJERCICIO 2.7.5**

Realiza los siguientes productos y simplifica.

1) $(m - 1)(m + 1)$
2) $(x + 4)(x - 5)$
3) $(a - 9)(a - 2)$
4) $(p - 5)(p + 12)$
5) $(2x - 3)(x + 1)$
6) $(5a + 4)(3a - 6)$
7) $(3m + 5)(2m + 1)$
8) $(3 - 5x)(6 + 2x)$
9) $(7 - 2y)(3 - 5y)$
10) $(2w - 3)^2$
11) $(3z - 7)^2$
12) $(5 - 3y)^2$
13) $(2x - 5y)(x + 3y)$
14) $(4a - 7b)(3a - 2b)$
15) $(x + 5a)(x - 4a)$
16) $(2x - 3)(3x^2 - 7x + 2)$
17) $(3y + 5)(2y^2 + 2y - 7)$
18) $(3x + 1)(9x^2 + 3x + 1)$

19) $(3a - 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$

20) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

21) $(a^2 + a + 1)(a^2 - a - 1)$

22) $(x^3 + 2x^2 - x)(x^2 - 2x + 5)$

23) $(2x^2 - 3x + 6)(x^2 + 2x - 4)$

24) $(3a^2 - a + 2)(2a^2 + a - 3)$

25) $(x - 3)(x - 2)(x + 5)$

26) $(a + 2)(3a - 5)(2a - 7)$

27) $(2x - 1)^3$

28) $(a^2 - 1)^3$

29) $(2x + 1)(x - 2) + x(x - 6)$

30) $(2a - 3)(3a - 4) + (a + 6)(a - 2)$

31) $(3z + 2)(4z - 1) - (3 - 2z)(1 + 6z)$

32) $(5w + 1)(w + 3) - (w + 2)^2$

33) $(2y + 3)^2 - 3(2y - 3)^2$

## 2.8 DIVISION DE POLINOMIOS

En la división de polinomios primero es necesario ver algunas nuevas propiedades de los exponentes que son las siguientes.

En la división de potencias con la misma base procederemos de la siguiente forma, cuando el exponente del númerador es mayor que el exponente del denominador.

Por definición $$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2^3 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 1} = \frac{2^3}{2^3} \cdot \frac{2^2}{1} = 1 \cdot 2^2 = 2^2$$

De la misma manera $$\frac{5^7}{5^4} = \frac{5^4 \cdot 5^3}{5^4 \cdot 1} = \frac{5^4}{5^4} \cdot \frac{5^3}{1} = 1 \cdot 5^3 = 5^3$$

Más general $$\frac{a^8}{a^3} = \frac{a^3 \cdot a^5}{a^3 \cdot 1} = \frac{a^3}{a^3} \cdot \frac{a^5}{1} = 1 \cdot a^5 = a^5$$

Ahora cuando el exponente del númerador es menor que el exponente del denominador.

Por definición $$\frac{3^2}{3^5} = \frac{3^2 \cdot 1}{3^2 \cdot 3^3} = \frac{3^2}{3^2} \cdot \frac{1}{3^3} = 1 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^3}$$

De la misma manera $$\frac{5^3}{5^7} = \frac{5^3 \cdot 1}{5^3 \cdot 5^4} = \frac{5^3}{5^3} \cdot \frac{1}{5^4} = 1 \cdot \frac{1}{5^4} = \frac{1}{5^4}$$

Más general $$\frac{a^5}{a^7} = \frac{a^5 \cdot 1}{a^5 \cdot a^2} = \frac{a^5}{a^5} \cdot \frac{1}{a^2} = 1 \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$$

Ya podemos enunciar la siguiente propiedad de los exponentes.

**PROPIEDAD 4:** Si $X \in \mathbb{R}$, $X \neq 0$, $m,n \in \mathbb{N}$ entonces se cumple

$$\frac{X^n}{X^m} = \begin{cases} X^{n-m} & \text{Si } n>m \\ \dfrac{1}{X^{m-n}} & \text{Si } m>n \end{cases}$$

DEMOSTRACION: Cuando $n>m$

$$\frac{X^n}{X^m} = \frac{X^m \cdot X^{n-m}}{X^m \cdot 1} = \frac{X^m}{X^m} \cdot \frac{X^{n-m}}{1} = 1 \cdot X^{n-m}$$

DEMOSTRACION: Cuando $m>n$

$$\frac{X^n}{X^m} = \frac{X^n \cdot 1}{X^n \cdot X^{m-n}} = \frac{X^n}{X^n} \cdot \frac{1}{X^{m-n}} = 1 \cdot \frac{1}{X^{m-n}}$$

EJEMPLOS:

1) $\dfrac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3$

2) $\dfrac{7^2}{7^6} = \dfrac{1}{7^{6-2}} = \dfrac{1}{7^4}$

3) $\dfrac{4^{13}}{4^9} = 4^{13-9} = 4^4$

4) $\dfrac{5^3}{5^8} = \dfrac{1}{5^{8-3}} = \dfrac{1}{5^5}$

5) $\dfrac{(a+1)^5}{(a+1)^3} = (a+1)^{5-3} = (a+1)^2$

6) $\dfrac{2^3 3^5 2^7}{3^3 2^2 3^4} = \dfrac{2^3 2^7 3^5}{2^2 3^3 3^4} = \dfrac{2^{10} 3^5}{2^2 3^7} = \dfrac{2^{10-2}}{3^{7-5}} = \dfrac{2^8}{3^2}$

OBSERVACION:

> Recuerda que esta propiedad se aplica si las potencias tienen la misma base y si las potencias se dividen.

EJEMPLOS: Es **FALSO** hacer esto: $\dfrac{3^5}{2^3} = 3^2$ ó $\dfrac{3^5}{2^3} = 2^2$

Y tambien es **FALSO** hacer $5^7 - 5^2 = 5^5$

OBSERVACION: $\boxed{\text{Recuerda que sólo se opera con los exponentes, la base queda igual.}}$

En la propiedad 3 vimos que si tenemos $(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$, pero si en ves de producto tenemos división, ¿que pasará?; veamoslo.

Usando la definición de potencia tenemos que:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\cdots\cdots\left(\frac{x}{y}\right)}_{n\ \text{factores}} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdots\cdots x}^{n\ \text{factores}}}{\underbrace{y \cdot y \cdot y \cdots\cdots y}_{n\ \text{factores}}} = \frac{x^n}{y^n}$$

Con esto podemos afirmar la siguiente propiedad.

**PROPIEDAD 5:** Si $X, Y \in \mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\left(\frac{X}{Y}\right)^n = \frac{X^n}{Y^n} \qquad \text{con } Y \neq 0$$

EJEMPLOS: 1) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2^3}{7^3}$ 2) $\left(\frac{5^2}{9}\right)^4 = \frac{(5^2)^4}{9^4} = \frac{5^8}{9^4}$

3) $\left(\frac{x^4y^3y^6}{x^8y^5}\right)^5 = \left(\frac{x^4y^9}{x^8y^5}\right)^5 = \left(\frac{y^{9-5}}{x^{8-4}}\right)^5 = \left(\frac{y^4}{x^4}\right)^5 = \frac{y^{20}}{x^{20}}$

Para mayor facilidad realiza primero las operaciones dentro del paréntesis.

4) $\left(\frac{2a^2bc^3}{8ac^5}\right)^3 = \left(\frac{2ab}{2^3c^2}\right)^3 = \frac{a^3b^3}{2^6c^6} = \frac{a^3b^3}{64c^6}$

5) $\frac{(3x^3y^2z)^2}{(2xy^3z^2)^3} = \frac{3^2x^6y^4z^2}{2^3x^3y^9z^6} = \frac{3^2x^3}{2^3y^5z^4} = \frac{9\ x^3}{8\ y^5z^4}$

Con estos ejercicios en si lo que hemos aprendido es la división de monomio entre monomio y el uso de exponentes.

**EJERCICIO 2.8.1**

Simplifica aplicando las propiedades de los exponentes.

| | | |
|---|---|---|
| 1) $\dfrac{2^5}{2^3} =$ | 2) $\dfrac{3^8}{3^5} =$ | 3) $\dfrac{2^5}{2^7} =$ |
| 4) $\dfrac{5^7}{-5^3} =$ | 5) $\dfrac{-7^3}{7^8} =$ | 6) $\dfrac{(-3)^4}{3^2} =$ |
| 7) $\dfrac{(-11)^3}{(-11)^6} =$ | 8) $\dfrac{a^6}{a^4} =$ | 9) $\dfrac{(-x)^3}{x^5} =$ |
| 10) $\dfrac{z^5}{z^5} =$ | 11) $\dfrac{(2+a)^7}{(2+a)^5} =$ | 12) $\dfrac{15x^5}{25x^7} =$ |
| 13) $\dfrac{8x^7y^3}{2x^2y^5z} =$ | 14) $\dfrac{9x^2y^3}{36xy^5} =$ | 15) $\dfrac{-32a^5y^2}{8a^3y^6} =$ |
| 16) $\left(\dfrac{2x^2}{x^3}\right)^3 =$ | 17) $\left(\dfrac{x^3y^2}{xy^3}\right)^5 =$ | 18) $\left(\dfrac{6x^2y^6z^4}{9x^5y^4z^3}\right)^2 =$ |
| 19) $\left(\dfrac{21a^5b^3c^4}{28a^4b^5c^3}\right)^3 =$ | 20) $\left(\dfrac{-x^7y^6z^4}{x^5y^4z^8}\right)^n =$ | |

**DIVISION DE UN POLINOMIO ENTRE UN MONOMIO**

Una de las propiedades de las fracciones es:

Si $\dfrac{3+7}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2}$, asi $\dfrac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots + X_n}{Y} = \dfrac{X_1}{Y} + \dfrac{X_2}{Y} + \ldots + \dfrac{X_n}{Y}$

Esto quiere decir que si un número divide a una expresión algebraica, este número divide a cada uno de sus términos.

Aplicado a los polinomios: Todo monomio que divide a un polinomio, el monomio divide a cada uno de los términos del polinomio.

EJEMPLOS:

1) Dividir $\dfrac{8x^4 + 4x^3 - 12x^2}{2x^2}$

SOLUCION: $$\frac{8x^4 + 4x^3 - 12x^2}{2x^2} = \frac{8x^4}{2x^2} + \frac{4x^3}{2x^2} - \frac{12x^2}{2x^2} = 4x^2 + 2x - 6$$

2) Dividir $\dfrac{9a^4 - 15a^6 + 3a^5 - 12a^8}{3a^3}$

SOLUCION: $$\frac{9a^4 - 15a^6 + 3a^5 - 12a^8}{3a^3} = \frac{9a^4}{3a^3} - \frac{15a^6}{3a^3} + \frac{3a^5}{3a^3} - \frac{12a^8}{3a^3} =$$
$$= 3a - 5a^3 + a^2 - 4a^5$$

3) Dividir $\dfrac{10a^4b - 15a^6b^3 + 5a^5b^4 - 25a^8b^2}{5a^2b}$

SOLUCION: $$\frac{10a^4b - 15a^6b^3 + 5a^5b^4 - 25a^8b^2}{5a^2b} = \frac{10a^4b}{5a^2b} - \frac{15a^6b^3}{5a^2b} + \frac{5a^5b^4}{5a^2b}$$
$$- \frac{25a^8b^2}{5a^2b} = 2a^2 - 3a^4b^2 + a^3b^3 - 5a^6b$$

4) Dividir $\dfrac{3(a-1)^4 + 12(a-1)^7}{3(a-1)^2}$

SOLUCION: $$\frac{3(a-1)^4 + 12(a-1)^7}{3(a-1)^2} = \frac{3(a-1)^4}{3(a-1)^2} + \frac{12(a-1)^7}{3(a-1)^2} =$$
$$= (a-1)^2 + 4(a-1)^5$$

5) Realizar las operaciones indicadas y simplificar.

$$\frac{20x^4 + 12x^3 - 32x^2}{4x^2} - (5x - 3)(x + 1)$$

SOLUCION: $\frac{20x^4 + 12x^3 - 32x^2}{4x^2} - (5x - 3)(x + 1) = 5x^2 + 3x - 8 - (5x^2$

$+ 2x - 3) = 5x^2 + 3x - 8 - 5x^2 - 2x + 3 = x - 5$

**EJERCICIO 2.8.2**

Realizar cada una de las operaciones indicadas, y simplificar donde sea necesario.

1) Dividir $5a - 10$ entre 5.
2) Dividir $8 + 12x$ entre 4.
3) Dividir $9a^3 - 12a^2$ entre $3a$.
4) Dividir $28b^4 + 56b^3$ entre $7b^2$.
5) Dividir $4x^2 + 6x$ entre $-2x$.
6) Dividir $-8a^3 + 6a^5$ entre $2a^2$.
7) Dividir $18a^3b - 9$ entre 3.
8) Dividir $12xy^2 + 8$ entre 4.
9) Dividir $-15x^4y^3 + 12x^2y^5$ entre $3xy$.
10) Dividir $21a^3b^2 + 42ab^3 - 14a^2b^2$ entre $7ab$.
11) Dividir $8x^2y^7 - 16x^5y^3 + 4x^3y^2$ entre $-4x^2y$.
12) Dividir $-21x^5z^3 + 7x^3z^4 - 14x^4z^3$ entre $-7x^3z^2$.
13) Dividir $27xy^3 - 15x^2y^5 + 9y^7$ entre $3y^3$.
14) Dividir $3a^5b^3 + 2a^4b^2 - a^6b^4 + a^3b^2$ entre $a^3b^2$.
15) Dividir $(x + 3)^3 - 6(x + 3)^5$ entre $(x + 3)^2$.
16) Dividir $-8(z - 1)^5 + 4(z - 1)^4$ entre $-2(z - 1)^3$.
17) Dividir $10(2 - x)^4 + 25(2 - x)^3$ entre $5(2 - x)^2$.
18) Dividir $6x^3(2a + 1)^5 - 12x^2(2a + 1)^7$ entre $3x(2a + 1)^4$.
19) Dividir $-18a^3(x - y)^3 + 24a^5(x - y)^6$ entre $-6a^2(x - y)^3$.
20) Dividir $14b^5(xy + 1)^4 - 28b^3(xy + 1)^5$ entre $7b^3(xy + 1)^4$.
21) Dividir $x^4 - 2x^3$ entre $x^2$, y sumarle $x(x + 2)$.
22) Dividir $5a^5 + 25a^4 - 10a^2$ entre $5a^2$, y restarle $a(a^2 - 5a) + 3$.
23) Dividir $x^4 - 3x^3 - 2x^2$ entre $x^2$, y sumarle $(x + 1)(x + 2)$.
24) Dividir $2x^4y - 4x^3y^2 + 2x^2y^3$ entre $2x^2y$, y restarle $(a + b)^2$.
25) Dividir $a^3b^3 - 2a^2b^4 - 12ab^5$ entre $ab^3$, y restarle $(a - b)^2$.

**DIVISION ENTRE POLINOMIOS CON UNA SOLA VARIABLE**

Empezaremos por recordar el algoritmo de la división entre números enteros no negativos.

"Para cualesquiera dos números enteros no negativos X y Y, donde $Y \neq 0$, siempre existen otros dos números enteros positivos únicos a y b tales que $X = aY + b$ con $0 \leq b \leq Y$.

Es decir si $\begin{array}{r} a \\ Y \overline{)\,X} \\ b \end{array}$ entonces $X = aY + b$ con $Y \neq 0$ y $0 \leq b \leq Y$.

Tambien es bueno recordar el nombre de cada parte de una división.

$$\begin{array}{rl} & a \leftarrow \text{cociente} \\ \text{divisor} \rightarrow Y & \overline{)\,X} \leftarrow \text{dividendo} \\ & b \leftarrow \text{residuo} \end{array}$$

EJEMPLO: 1) Dividir 158 entre 12.

$$\begin{array}{rl} & 13 \leftarrow \text{cociente} \\ 12 & \overline{)\,158} \leftarrow \text{dividendo} \\ \uparrow & \;038 \\ \text{divisor} & \;02 \leftarrow \text{residuo} \end{array}$$

Comprobación: $158 = 12(13) + 2$

Algoritmo de la división en polinomios:

"Para dos polinomios dados P(x) y Q(x) en una variable, con $Q(x) \neq 0$; existen siempre otros dos únicos polinomios C(x) y R(x) tales que:

$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$ con $R(x) = 0$ ó de menor grado que Q(x)".

En simbología conocida es:

$$\begin{array}{rl} & C(x) \leftarrow \text{cociente} \\ Q(x) & \overline{)\,P(x)} \leftarrow \text{dividendo} \\ \uparrow & \;\;\vdots \\ \text{divisor} & \;R(x) \leftarrow \text{residuo} \end{array}$$

Con $R(x) = 0$ ó de menor grado que Q(x).

Esto tambien puede expresarse como $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

EJEMPLO: Sea $P(x) = 6b^5 - 8b^4 + 7$, y $Q(x) = 2b^2$ calcular $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

SOLUCION:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{6b^5 - 8b^4 + 7}{2b^2} = 3b^3 - 4b^2 + \frac{7}{2b^2}$$

Para dividir un polinomio entre otro que no sea monomio se hace similarmente a la división entre números específicos, y hay que seguir los pasos que se dan a continuación.

1) Se ordenan los términos del divisor en orden decreciente con respecto a las potencias de la variable.
2) Se ordenan los términos del dividendo en también en orden decreciente respecto a las potencias de la variable y se colocan en sus lugares correspondientes dentro de la "casita" de división.

   divisor$\overline{\big)\text{dividendo}}$

3) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.
4) Se multiplica el primer término del cociente por cada uno de los términos del divisor y se coloca cada término del resultado debajo de cada término semejante del dividendo.
5) Se efectúa la resta en este último arreglo y se obtiene un primer residuo que será un nuevo dividendo respetando el orden decreciente de la variable.
6) Se continúa este proceso repitiendose los pasos del 3) al 5) hasta obtener un residuo igual a cero ó de menor grado que el divisor.

EJEMPLO 1) Dividir $P(x) = 9x^2 - 10x^3 + 12 - 6x$ entre $Q(x) = 2x - 1$.

1o.y 2o. Ordenamos el dividendo y el divisor en orden decreciente con respecto a las potencias de $x$, y los colocamos dentro de la "casita".

$$2x - 1\overline{\big)-10x^3 + 9x^2 - 6x + 12}$$

3o. Dividimos el primer término del dividendo $-10x^3$ entre el primer término del divisor $2x$ y obtenemos nuestro primer cociente $\frac{-10x^3}{2x} = -5x^2$ que se coloca arriba de la "casita".

$$\begin{array}{r|l} & -5x^2 \\ \hline 2x - 1 & -10x^3 + 9x^2 - 6x + 12 \end{array}$$

4o. Multiplicamos este cociente $-5x^2$ por cada uno de los términos del divisor $2x - 1$ y el resultado $-10x^2 + 5x^2$ lo colocamos debajo de cada termino semejante del dividendo.

$$\begin{array}{r|l} & -5x^2 \\ \hline 2x - 1 & -10x^3 + 9x^2 - 6x + 12 \\ & -10x^3 + 5x^2 \end{array}$$

5o. Se efectúa la resta y obtenemos un primer residuo.

$$\begin{array}{r|l} & -5x^2 \\ \hline 2x - 1 & -10x^3 + 9x^2 - 6x + 12 \\ & \underline{+10x^3 - 5x^2} \\ & \quad 0 \; + 4x^2 - 6x + 12 \longleftarrow \text{primer residuo.} \end{array}$$

Recuerda que para restar polinomios al sustraendo se le cambian todos sus signos.

6o. Continuamos este proceso hasta obtener un residuo cero ó de menor grado que el divisor.

Segundo término del cociente $\frac{4x^2}{2x} = 2x$

Tercer término del cociente $\frac{-4x}{2x} = -2$

$$\begin{array}{rr|l} & & -5x^2 + 2x - 2 \longleftarrow C(x) = \text{cociente} \\ \hline & 2x - 1 & -10x^3 + 9x^2 - 6x + 12 \\ & & \underline{+10x^3 - 5x^2} \\ & & \quad 0 \; + 4x^2 - 6x + 12 \\ -\,2x(2x-1) = & & \quad \underline{-\,4x^2 + 2x} \\ & & \qquad 0 - 4x + 12 \\ -\,-2(2x-1) = & & \qquad \underline{+\,4x - 2} \\ & & \qquad\quad 0 + 10 \longleftarrow R(x) = \text{residuo final} \end{array}$$

El resultado final es: $\frac{9x^2 - 10x^3 + 12 - 6x}{2x - 1} = -5x^2 + 2x - 2 + \frac{10}{2x - 1}$

Comprobación: Para la comprobación tenemos que checar que se cumple:

$$P(x) = Q(x)\cdot C(x) + R(x) \quad \text{es decir checar que:}$$

$$-10x^3 + 9x^2 - 6x + 12 = (2x - 1)(-5x^2 + 2x - 2) + 10$$

Chequemos: $Q(x)\cdot C(x) + R(x) = (2x - 1)(-5x^2 + 2x - 2) + 10 =$

$$= -10x^3 + 4x^2 - 4x + 5x^2 - 2x + 2 + 10 =$$

$$= -10x^3 + 9x^2 - 6x + 12 = P(x)$$

EJEMPLO 2) Dividir $19y^2 - 10y^3 + y^5 - 14y + 6$ entre $y^2 - 2y + 1$.

Siguiendo cada uno de los pasos anteriormente mencionados obtenemos:

-Primer término del cociente: $\dfrac{y^5}{y^2} = y^3$

-Segundo término del cociente: $\dfrac{2y^4}{y^2} = 2y^2$

-Tercer término del cociente: $\dfrac{-7y^3}{+y^2} = -7y$

-Cuarto término del cociente: $\dfrac{3y^2}{y^2} = 3$

$$
\begin{array}{rr|rrrrrr}
 & & y^3 & +\,2y^2 & -\,7y & +\,3 & & \\
\hline
 & y^2 - 2y + 1 & y^5 & +\,0y^4 & -\,10y^3 & +\,19y^2 & -\,14y & +\,6 \\
-y^3(y^2-2y+1) = & & -y^5 & +\,2y^4 & -\,y^3 & & & \\
\hline
 & & 0 & +\,2y^4 & -\,11y^3 & +\,19y^2 & -\,14y & +\,6 \\
-2y^2(y^2-2y+1) = & & & -\,2y^4 & +\,4y^3 & -\,2y^2 & & \\
\hline
 & & & 0 & -\,7y^3 & +\,17y^2 & -\,14y & +\,6 \\
-(-7y)(y^2-2y+1) = & & & & 7y^3 & -\,14y^2 & +\,7y & \\
\hline
 & & & & 0 & +\,3y^2 & -\,7y & +\,6 \\
 & & & & & -\,3y^2 & +\,6y & -\,3 \\
\hline
 & & & & & 0 & -\,y & +\,3
\end{array}
$$

Finalmente $$\frac{19y^2 - 10y^3 + y^5 - 14y + 6}{y^2 - 2y + 1} = y^3 + 2y^2 - 7y + 3 + \frac{-y + 3}{y^2 - 2y + 1}$$

La comprobación queda de ejercicio al lector.

**EJERCICIO 2.8.3**

Efectúa las siguientes divisiones.

1) $x^2 - 18x + 32$ entre $x - 2$

2) $x^2 - 2x - 35$ entre $x + 5$

3) $12y^2 + 10y - 12$ entre $3y - 2$
4) $24x^2 + 15x - 38$ entre $6x - 5$
5) $6a^3 - 10a^2 - 10a - 2$ entre $3a + 1$
6) $24x^3 - 26x^2 - 53x + 62$ entre $3x - 4$
7) $8 - 35x + 12x^2$ entre $3x - 8$
8) $10a + 14a^3 - 2 + 15a^2$ entre $2a + 1$
9) $10 + 24y - 27y^2 - 14y^3$ entre $5 + 2y$
10) $x^3 - 4x - 2x^2 + 8$ entre $x^2 - 4$
11) $x^3 + 48x - 64 - 12x^2$ entre $x^2 + 16 - 8x$
12) $9x^3 - 12 + 30x - 30x^2$ entre $3x^2 + 2 - 4x$
13) $3x^2 - 5x + 2x^3 - 6$ entre $2x^2 - x - 3$
14) $a^4 + 5a - 3a^3 + 2 + 4a^2$ entre $3 + a^2 - 3a$
15) $x^8 + x^4 + 1$ entre $x^2 + x + 1$

**DIVISION ENTRE POLINOMIOS CON DOS O MAS VARIABLES**

Para dividir polinomios que tengan más de una variable o literal debemos hacer la división con respecto a una sola variable tanto para el dividendo como para el divisor, ya decidido con respecto a que literal se hará la división se procede de manera similar al caso de polinomios con una sola variable.

EJEMPLO 1) Dividir $7xy - 6y^2 + 2x^2$ entre $2x - y$ con respecto a $x$.

1o.y 2o. Ordenamos el dividendo y el divisor en orden decreciente con respecto a las potencias de $x$, y los colocamos dentro de la "casita".

Divisor $\longrightarrow$ $2x - y \overline{\big)\, 2x^2 - 7xy - 6y^2}$ $\longleftarrow$ Dividendo

3o. Dividimos el primer término del dividendo $2x^2$ entre el primer término del divisor $2x$ y obtenemos nuestro primer cociente $\frac{2x^2}{2x} = x$ que se coloca arriba de la "casita".

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \cline{2-2} 2x - y & 2x^2 - 7xy - 6y^2 \end{array}$$

4o. Multiplicamos este primer cociente $x$, por cada uno de los términos del divisor $2x - y$ y el resultado $2x^2 - xy$ lo colocamos debajo de cada término semejante del dividendo.

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \cline{2-2} 2x - y & 2x^2 - 7xy - 6y^2 \\ & 2x^2 - \ \ xy \end{array}$$

5o. Se efectúa la resta y obtenemos un primer residuo.

$$\begin{array}{r|ll} & x & \\ \cline{2-2} 2x - y & 2x^2 - 7xy - 6y^2 & \\ & \underline{2x^2 - \ \ xy} & \\ & 0 - 8xy - 6y^2 & \longleftarrow \text{primer residuo.} \end{array}$$

Recuerda que para restar polinomios al sustraendo se le cambian todos sus signos.

6o. Continuamos este proceso hasta obtener un residuo cero ó de menor grado (con respecto a $x$) que el divisor.

Segundo término del cociente:
$\frac{-8xy}{2x} = -4y$

$$\begin{array}{rr|ll} & & x - 4y & \longleftarrow \text{Cociente} \\ \cline{3-3} & 2x - y & 2x^2 - 7xy - 6y^2 & \\ & & \underline{2x^2 - \ \ xy} & \\ & & 0 - 8xy - 6y^2 & \\ -(-4y)(2x-y) = & & \underline{+ 8xy - 4y^2} & \\ & & 0 \ - \ 10y^2 & \longleftarrow \text{Residuo final} \end{array}$$

El resultado final es: $\frac{2x^2 - 7xy - 6y^2}{2x - y} = x - 4y + \frac{-10y^2}{2x - y}$

Comprobación: Para la comprobación tenemos que checar que se cumple:

Dividendo = (Divisor)(Cociente) + Residuo

$$
\begin{aligned}
\text{(Divisor)(Cociente) + Residuo} &= (2x - y)(x - 4y) + - 10y^2 = \\
&= 2x^2 - 8xy - xy + 4y^2 - 10y^2 = \\
&= 2x^2 - 7xy - 6y^2 = \text{Dividendo}
\end{aligned}
$$

Como ya lo observaste son exactamente los mismos paso que con polinomios en una variable, aquí solo hay que elegir con respecto a que variable se va hacer la división.

EJEMPLO 2) Dividir $2x^4 - 3y^4 - 13x^2y^2 + 14xy^3$ entre $x^2 + 2xy - 3y^2$.

Dividiremos con respecto a $y$.

-Primer término del cociente:

$$\frac{-3y^4}{-3y^2} = y^2$$

-Segundo término del cociente:

$$\frac{12xy^3}{-3y^2} = -4xy$$

-Tercer término del cociente:

$$\frac{-6x^2y^2}{-3y^2} = 2x^2$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad y^2 - 4xy + 2x^2 \\
-3y^2 + 2xy + x^2 & \overline{\big)\, -3y^4 + 14xy^3 - 13x^2y^2 + 0x^3y + 2x^4} \\
-y^2(-3y^2+2xy+x^2) = & \underline{+3y^4 - 2xy^3 - x^2y^2} \\
 & 0 + 12xy^3 - 14x^2y^2 + 0x^3y + 2x^4 \\
-(-4xy)(-3y^2+2xy+x^2) = & \underline{- 12xy^3 + 8x^2y^2 + 4x^3y} \\
 & 0 - 6x^2y^2 + 4x^3y + 2x^4 \\
-2x^2(-3y^2 + 2xy + x^2) = & \underline{+ 6x^2y^2 - 4x^3y - 2x^4} \\
 & 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Comprobación:

$$
\begin{aligned}
\text{(Divisor)(Cociente) + Residuo} &= (-3y^2 + 2xy + x^2)(y^2 - 4xy + 2x^2) + 0 = \\
&= -3y^4 + 12xy^3 - 6x^2y^2 + 2xy^3 - 8x^2y^2 + 4x^3y + x^2y^2 - 4x^3y + 2x^4 = \\
&= -3y^4 + 14xy^3 - 13x^2y^2 + 2x^4 = \text{Dividendo}
\end{aligned}
$$

**EJERCICIO 2.8.4**

Realiza las siguientes divisiones entre polinomios.

1) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ entre $x - y$ respecto a $x$.
2) $48a^2 - 62ab + 20b^2$ entre $8a - 5b$ respecto a $b$.
3) $17x^3y^3 - 3x^2y^4 - 10x^4y^2$ entre $2x - 3y$ respecto a $x$.
4) $8m^3 + 27n^3$ entre $3n + 2m$ respecto a $m$.
5) $a^4 - 16b^4$ entre $a^2 + 4b^2$ respecto a $a$.
6) $2x^4 - 3y^4 - 5xy^3 + 3x^3y + 3x^2y^2$ entre $2x^2 - xy - y^2$ respecto a $x$.
7) $x^5 + x^3y^2 - x^2y^3 + 2xy^4 - y^5$ entre $x^2 - xy + y^2$ respecto a $x$.
8) $8a^5 - 22a^4b + 26a^3b^2 - 27a^2b^3 + 13ab^4 - 2b^5$ entre $2a^2 - 4ab + b^2$
9) $6x^4 - 5x^2y^2 - 5xy^3 - y^4$ entre $2x^2 + 2xy + y^2$
10) $m^6 - 8n^6$ entre $m^2 - 2n^2$

TEMA III

# FACTORIZACION DE POLINOMIOS

## 3.1 EL CONCEPTO DE FACTORIZACION

En un producto o multiplicación a cada uno de los números que se están multiplicando se les llama FACTORES.

EJEMPLOS: 1) Si multiplicamos (a) por (a - 1) obtenemos,

$$a(a - 1) = a^2 - a$$

Donde a y (a - 1) son factores de $a^2 - a$.

2) Si multiplicamos 2x por 5 + x obtenemos,

$$2x(5 + x) = 10x + 2x^2$$

Así 2x y 5 + x son factores de $10x + 2x^2$.

3) Si multiplicamos (y + 2) con (1 - y) obtenemos,

$$(y + 2)(1 - y) = - y^2 - y + 2$$

Donde (y + 2) y (1 - y) son los factores de $- y^2 - y + 2$.

En el tema 1 vimos como todo número que no sea primo se puede descomponer como producto de primos, y recordemos que todo polinomio representa un número, entonces también estos se podrán descomponer en producto de factores.

No todos los polinomios se podrán descomponer como productos de factores diferentes de 1, al igual que como en los números específicos hay números que no se descomponen y estos son los números Primos.

Por ejemplo el binomio x - 1 no se puede descomponer en producto de factores diferentes de 1, ya que solo es divisible entre 1 y x - 1.

En este capítulo estudiaremos las maneras de descomponer polinomios con coeficientes enteros como producto de factores a este proceso se le llama FACTORIZACION.

Un polinomio está FACTORIZADO COMPLETAMENTE cuando se representa como productos de polinomios con coeficientes enteros los cuales ya no se pueden factorizar.

## 3.2 MAXIMO FACTOR COMUN

Sabemos que la ley distributiva nos dice que el producto de (a) con (b + c) es igual a **ab + ac**, aplicandola a los siguientes productos tenemos:

$$3m(p + q) = 3mp + 3mq$$
$$2xy(5x - 2y) = 10x^2y - 4xy^2$$
$$5a^2(3a + b) = 15a^3 + 5a^2b$$

Esta ley tambien la podemos aplicar de manera inversa es decir:

$$ab + ac = a(b + c)$$

Observese que **a** es factor común de los dos términos en **ab + ac**, es decir el factor **a** aparece en cada uno de los términos de **ab + ac**.

EJEMPLOS: 1) $2x + ax = x(2 + a)$ **x** factor común.

2) $4ax - 6ay = 2a(2x - 3y)$ **2a** factor común.

3) $3mn + mnx = mn(3 + x)$ **mn** factor común.

El MAXIMO FACTOR COMÚN es el MCD de un conjunto de números enteros, que ya aprendimos a calcularlo en el tema 1.

Y el MAXIMO FACTOR CUMÚN(MFC) de un conjunto de monomios puede determinarse tomando el producto de el MCD de los coeficientes de los monomios y las potencias comunes cada una de ellas con el mínimo exponente.

EJEMPLOS:

1) Encontrar el MFC de $5xy^2 + 15x^2y$.

SOLUCION: El MCD de 5 y 15 es 5.

En los términos $xy^2$ y $x^2y$ las potencias que son comunes tienen como base una a **x** y la otra a **y**; el mínimo exponente para ambas es 1.

Por lo tanto el MFC es **5xy**.

2) Encontrar el MFC de $18a^2b^4 - 12\ a^3b^3$.

SOLUCION: El MCD de 18 y 12 es 6.

En los términos $a^2b^4$ y $a^3b^3$ las potencias comunes con el mínimo exponente son $a^2$ y $b^3$.

Por lo tanto el MFC es $6a^2b^3$.

3) Encontrar el MFC de $6x^4(a - b)^2 - 9x^3(a - b)^3 + 12x^2(a - b)^4$.

SOLUCION: El MCD de 6,9 y 12 es 3.

En los términos $x^4(a - b)^2$, $x^3(a - b)^3$ y $x^2(a - b)^4$ las potencias comunes con el minímo exponente son $x^2$ y $(a - b)^2$.

Por lo tanto el MFC es $3x^2(a - b)^2$.

| |
|---|
| Para FACTORIZAR un polinomio se calcula el MFC del polinomio y será uno de los factores, el otro factor resulta de dividir cada término del polinomio entre su MFC. |

EJEMPLOS:

1) Factorizar $5xy^2 + 15x^2y$.

SOLUCION: El MFC es $5xy$, entonces:

$$5xy^2 + 15x^2y = 5xy\left(\frac{5xy^2}{5xy} + \frac{15x^2y}{5xy}\right) =$$

$$= 5xy(y + 3x)$$

2) Factorizar $18a^2b^4 - 12a^3b^3$.

SOLUCION: El MFC es $6a^2b^3$, entonces:

$$18a^2b^4 - 12a^3b^3 = 6a^2b^3\left(\frac{18a^2b^4}{6a^2b^3} - \frac{12a^3b^3}{6a^2b^3}\right) =$$

$$= 6a^2b^3(3b - 2a)$$

3) Factorizar $6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3$.

SOLUCION: El MFC es $3xy^3$, entonces:

$$6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3 = 3xy^3\left(\frac{6xy^3}{3xy^3} - \frac{9nx^2y^3}{3xy^3} + \frac{12nx^3y^3}{3xy^3} - \frac{3n^2x^4y^3}{3xy^3}\right)$$

$$= 3xy^3(2 - 3nx + 4nx^2 - n^2x^3)$$

4) Factorizar $6x^4(a - b)^2 - 18x^3(a - b)^3 + 12x^2(a - b)^4$.

SOLUCION: El MFC es $6x^2(a - b)^2$, entonces:

$$6x^4(a - b)^2 - 18x^3(a - b)^3 + 12x^2(a - b)^4 = 6x^2(a-b)^2\left(\frac{6x^4(a-b)^2}{6x^2(a-b)^2} - \frac{18x^3(a-b)^3}{6x^2(a-b)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{12x^2(a-b)^4}{6x^2(a-b)^2}\right) = 6x^2(a-b)^2[x^2 - 3x(a-b) + 2(a-b)^2]$$

5) Factorizar $24a(a - 1)^2 + 36a^2(1 - a)$.

SOLUCION: Como $1 - a = -(a - 1)$, el MFC es $12a(a - 1)$, entonces:

$$24a(a - 1)^2 + 36a^2(1 - a) = 24a(a - 1)^2 - 36a^2(a - 1) =$$

$$= 12a(a - 1)\left(\frac{24a(a - 1)^2}{12a(a - 1)} - \frac{36a^2(a - 1)}{12a(a - 1)}\right) =$$

$$= 12a(a - 1)(2(a - 1) - 3a)$$

$$= 12a(a - 1)(2a - 2 - 3a)$$

$$= 12a(a - 1)(-a - 2) \qquad \text{como } -a-2 = -(a + 2)$$

$$= -12a(a - 1)(a + 2)$$

RECUERDA LO SIGUIENTE: $\boxed{(x - a) = -(a - x)}$

**EJERCICIO 3.2**

Factorizar los siguientes polinomios.

1) $8x + 20y$ 2) $3y + 9$

3) $6a - 15b$ 4) $12 - 28y$

5) $24a + 8b - 32$
6) $18x - 27 + 54y$
7) $9xm + 27xn$
8) $14y + 7ya - 56yb$
9) $6am - 21an - 18ap$
10) $15x^2 - 21x^3$
11) $7ab^2 + 63ab^5$
12) $11p^2q^5 + 55pq^3$
13) $32p^4q^3a - 16p^3q^3b$
14) $x^3y^2z + x^2y^4z^3 - x^4y^3z$
15) $27x^5y - 9x^3y^2 + 36x^4y^3$
16) $2a^3b^2 - 3a^2b^3 - ab^3$
17) $14a^2x^2 - 28a^3 + 56a^4$
18) $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3 + 48m^5n^4$
19) $55x^2y^3z + 110x^2y^3z^2 - 220x^3y^2$
20) $8z(2x - 1) + 20(2x - 1)$
21) $26(2 - y) - 39a(2 - y)$
22) $15(x + 2) + 35(x + 2)^2$
23) $(x + 1)(x - 2) + (x - 2)(x + 3)$
24) $(x + 2)(2x - 2) - (x + 2)(2x - 3)$
25) $2x(2x - 3)^2 + x^2(3 - 2x)$

---

## 3.3 FACTOR COMUN POR AGRUPACION DE TERMINOS

Cuando en un polinomio no hay factor común en todos sus términos se buscan factores comunes en grupos de términos del polinomio, ya que por lo general estos son resultado del producto de otros polinomios.

La factorización de estos polinomios es muy similar a la anterior, veamoslo en un ejemplo.

EJEMPLO 1) Factorizar $ax + bx + ay + by$.

SOLUCION 1: La agrupación no es única, se puede hacer de diferentes maneras, nosotros lo haremos fijandonos que los dos primeros términos tienen como factor común a $x$ y los dos últimos términos tienen a $y$ como factor común, agrupandolos tenemos:

$$\left.\begin{aligned}(ax + bx) + (ay + by) &= x(a + b) + y(a + b)\\ &= (a + b)(x + y)\end{aligned}\right\}\ \text{ya que } a+b \text{ es MFC}$$

Finalmente $ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$

SOLUCION 2: Por la ley conmutativa y asociativa tenemos:

$$\begin{aligned} ax + bx + ay + by &= ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by) = \\ &= a(x + y) + b(x + y) \\ &= (x + y)(a + b) \end{aligned} \Bigg\} \text{ Como } x+y \text{ es es el MFC.}$$

Como $(a + b)(x + y) = (x + y)(a + b)$ Ley conmutativa.
Los dos resultados son los mismos.

EJEMPLO 2) Factorizar $8x^2 - 12xn + 6x - 9n$.

SOLUCION: Los dos primeros términos tienen como MFC a $4x$, y los dos últimos a 3; agrupandolos tenemos:

$$\begin{aligned} 8x^2 - 12xn + 6x - 9n &= 4x(2x - 3n) + 3(2x - 3n) \longleftarrow \text{El MFC es } 2x-3n. \\ &= (2x - 3n)(4x + 3) \end{aligned}$$

Por lo tanto $8x^2 - 12xn + 6x - 9n = (2x - 3n)(4x + 3)$.

EJEMPLO 3) Factorizar $6m - 9n + 21nx - 14mx$.

SOLUCION: El MFC de los dos primeros términos es 3 y de los dos últimos es $7x$, factorizando tenemos:

$$\begin{aligned} 6m - 9n + 21nx - 14mx &= 3(2m - 3n) + 7x(3n - 2m) \\ &= 3(2m - 3n) - 7x(2m - 3n) \longleftarrow \text{El MFC es } 2m-3n \\ &= (2m - 3n)(3 - 7x) \end{aligned}$$

Por lo tanto $6m - 9n + 21nx - 14mx = (2m - 3n)(3 - 7x)$

EJEMPLO 4) Factorizar completamente $32x^3y^5z - 80xy^4z^2 - 24x^4y^3 + 60x^2y^2z$.

SOLUCION: El MFC de los cuatro términos es $4xy^2$, entonces tenemos que:

$$32x^3y^5z - 80xy^4z^2 - 24x^4y^3 + 60x^2y^2z = 4xy^2(8x^2y^3z - 20y^2z^2 - 6x^3y + 15xz)$$

Factorizando $8x^2y^3z - 20y^2z^2 - 6x^3y + 15xz$ tenemos:

$$\begin{aligned} 8x^2y^3z - 20y^2z^2 - 6x^3y + 15xz &= 4y^2z(2x^2y - 5z) - 3x(2x^2y - 5z) \\ &= (2x^2y - 5z)(4y^2z - 3x) \end{aligned}$$

Finalmente nos resulta que:

$$32x^3y^5z - 80xy^4z^2 - 24x^4y^3 + 60x^2y^2z = 4xy^2(2x^2y - 5z)(4y^2z - 3x)$$

**EJERCICIO 3.3**

Factorizar completamente a cada uno de los siguientes polinomios.

1) $ax + bx + a + b$

2) $2ax + a - 2bx - b$

3) $3mx - 3nx + 2m - 2n$

4) $14x - 10ax - 21y + 15ay$

5) $5a^2 - 5a + 3ab - 3b$

6) $3a^2b + 3a^2 - b^2 - b$

7) $14xy - 7y^3 + 2x^2 - xy^2$

8) $abx - axy - bx^2 + x^2y$

9) $2axy - 6ax - 2ay + 6a$

10) $12x^4 + 18x^2y - 30x^2 - 4x^5 - 6x^3y + 10x^3$

---

## 3.4 FACTORIZACION DE UN TRINOMIO

Recordemos que un trinomio es un polinomio de tres términos. Existen una gran variedad de trinomios y no todos se podrán factorizar de la misma manera.

En este tema estudiaremos la factorización de los trinomios cuadráticos de la forma:

1) $X^2 + bX + c$ con $b, c \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

2) $aX^2 + bX + c$ con $a$, $b$ y $c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Cada uno de estos tiene su manera especial de factorización y vuelvo a repetir no todos los trinomios de estas formas se podrán factorizar con números enteros como a continuación lo haremos.

## 1) TRINOMIOS DE LA FORMA $X^2 + bX + c$

| OBSERVACION: | En estos trinomios el coeficiente del término que está al cuadrado es 1, tiene un segundo término con la misma variable que está elevada al cuadrado y un tercer término independiente sin variable. |
|---|---|

Si realizamos el producto de dos binomios con un término común de la forma $(x + m)(x + n)$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ obtendremos un trinomio cuadrático.

$(x + m)(x + n) = x^2 + xn + nx + mn = x^2 + (m+n)x + mn$

Donde $(m+n) = b$ y $mn = c$

Esto nos lleva ha pensar que existen trinomios cuadráticos que se factorizarán como el **producto de dos binomios** con un término en común. En efecto, así es, veamos los pasos a seguir para factorizar este tipo de trinomios.

PASOS A SEGUIR PARA FACTORIZAR TRINOMIOS DE LA FORMA $X^2 + bX + c$.

1) El primer término de cada factor (término en común) será la raíz cuaorada del término al cuadrado en el trinomio.

2) Los segundos términos de cada factor serán dos números enteros que sumados nos den el coeficiente de $X$, y multiplicados nos den el término independiente. Es decir serán dos enteros m y n tales que:

$$m + n = b \quad y \quad (m)(n) = c$$

Entonces $X^2 + bX + c = (x + m)(x + n)$

Antes de ver ejemplos recordemos que es una raíz cuadrada.

La raíz cuadrada de un número a se denota por $\sqrt[2]{a}$, donde el símbolo $\sqrt{\phantom{a}}$ se le llama **radical**, a el número **a** se le llama **radicando** y el número 2 que va con el radical se llama **indice**, por lo general no se escribe cuando es 2. Esta raíz se define de la siguiente manera:

$$\sqrt{a} = b \text{ siempre y cuando } b^2 = a.$$

Así $\sqrt{9} = \pm 3$ ya que $(+3)^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$

$\sqrt{36} = \pm 6$ ya que $(+6)^2 = 36$ y $(-6)^2 = 36$

En este tema nos referiremos solo a la raíz positiva.

Para extraer la raíz cuadrada de un monomio se extrae la raíz cuadrada de su coeficiente y se divide el exponente de cada variable entre 2.

Asi $\sqrt{4x^2y^4} = 2xy^2$, ya que $\sqrt{4} = 2$, $x^{2/2} = x$ y $y^{4/2} = y^2$.

$\sqrt{16m^6n^4} = 4m^3n^2$, ya que $\sqrt{16} = 4$, $m^{6/2} = m^3$ y $n^{4/2} = n^2$.

Ahora si, veamos algunos ejemplos para factorizar trinomios de la forma $X^2 + bX + c$.

EJEMPLO 1) Factorizar $x^2 + 5x + 6$.

SOLUCION: 1) $\sqrt{x^2} = x$, será el término común de cada factor, entonces:

$x^2 + 5x + 6 = (x \quad )(x \quad )$

2) Buscamos dos números cuya suma sea +5 y su producto +6.

Estos números son +2 y +3; ya que:

$2 + 3 = 5$ y $(+2)(+3) = +6$

Entonces $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

EJEMPLO 2) Factorizar $a^2 + 4a - 12$.

SOLUCION: 1) $\sqrt{a^2} = a$, será el término común de cada factor, es decir:

$a^2 + 4a - 12 = (a \quad )(a \quad )$

2) Buscamos dos números cuya suma sea +4 y su producto -12.

Estos números son -2 y + 6, ya que cumplen:

$6 + (-2) = 6 - 2 = 4$ y $(+6)(-2) = -12$

Entonces $a^2 + 4a - 12 = (a - 2)(a + 6)$

EJEMPLO 3) Factorizar $x^2 - 6x + 5$.

SOLUCION: 1) $\sqrt{x^2} = x$ , será el término común de cada factor, entonces:

$x^2 - 6x + 5 = (x \quad)(x \quad)$

2) Buscamos dos números cuya suma sea -6 y su producto +5.

Estos números son -1 y -5; ya que:

$-1 + (-5) = -1 - 5 = -6$ y $(-1)(-5) = +5$

Entonces $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$.

EJEMPLO 4) Factorizar $b^2 - 8b - 48$.

SOLUCION: 1) $\sqrt{b^2} = b$ , será el término común de cada factor, entonces:

$b^2 - 8b - 48 = (b \quad)(b \quad)$

2) Buscamos dos números cuya suma sea -8 y su producto -48.

Estos números son +4 y -12; ya que:

$-12 + 4 = -8$ y $(-12)(+4) = -48$

Entonces $b^2 - 8b - 48 = (b + 4)(b - 12)$.

**CASOS ESPECIALES:** Para otro tipo de trinomios se aplica de la misma forma.

EJEMPLO 5) Factorizar $y^4 + 12y^2 - 45$.

SOLUCION: 1) $\sqrt{y^4} = y^2$, será el término común de cada factor, entonces:

$y^4 + 12y^2 - 45 = (y^2 \quad)(y^2 \quad)$

2) Buscamos dos números cuya suma sea +12 y su producto -45.

Estos números son +15 y -3; ya que:

$-3 + 15 = +12$ y $(-3)(+15) = -45$

Entonces $y^4 + 12y^2 - 45 = (y^2 - 3)(y^2 + 15)$.

EJEMPLO 6) Factorizar $x^6y^6 - 9x^3y^3 + 8$.

SOLUCION: 1) $\sqrt{x^6y^6} = x^3y^3$, será el término común de cada factor, es decir $x^6y^6 - 9x^3y^3 + 8 = (x^3y^3 \quad)(x^3y^3 \quad)$

2) Buscamos dos números cuya suma sea -9 y su producto +8.

Estos números son -1 y -8; ya que:

$-1 + (-8) = -1 - 8 = -9$ y $(-1)(-8) = +8$

Entonces $x^6y^6 - 9x^3y^3 + 8 = (x^3y^3 - 1)(x^3y^3 - 8)$.

EJEMPLO 7) Factorizar $25a^2 - 45a + 14$.

SOLUCION: En este caso especial hacemos $X = 5a$ entonces $X^2 = (5a)^2 = 25a^2$ y $-45a = -9(5a) = -9X$, entonces tenemos que:

$$25a^2 - 45a + 14 = X^2 - 9X + 14$$

Factorizaremos a $X^2 - 9X + 14$.

1) $\sqrt{X^2} = X$, será el término común de cada factor, entonces:

$$X^2 - 9X + 14 = (X \quad )(X \quad )$$

2) Buscamos dos números cuya suma sea -9 y su producto +14. Estos números son -2 y -7; ya que:

$$-2 + (-7) = -2 - 7 = -9 \quad y \quad (-2)(-7) = +14$$

Entonces $X^2 - 9X + 14 = (X - 2)(X - 7)$ como $X = 5a$ tenemos que:

$$25a^2 - 45a + 14 = (5a - 2)(5a - 7)$$

Para comprobar que cada una de las factorizaciones está bien hecha se efectúa el producto de los binomios y tiene que dar como resultado el trinomio.

Se queda como ejercicio al lector hacer las comprobaciones de los 7 últimos ejemplos.

**EJERCICIO 3.4.1**

Factorizar cada uno de los siguientes trinomios.

| | |
|---|---|
| 1) $x^2 + 10x + 16$ | 2) $y^2 + 6y - 27$ |
| 3) $a^2 - 3a - 40$ | 4) $m^4 - 7m^2 + 12$ |
| 5) $x^6 - 4x^3 - 45$ | 6) $b^4 + 4b^2 - 21$ |
| 7) $a^2 - 14a + 48$ | 8) $y^2 + 20y + 99$ |
| 9) $x^2 + 5x - 104$ | 10) $9a^2 + 21a + 10$ |
| 11) $49b^2 - 7b - 30$ | 12) $4y^2 + 4y - 63$ |
| 13) $25a^2 - 15a - 40$ | 14) $16x^4 - 32x^2 - 105$ |

2) **TRINOMIOS DE LA FORMA $aX^2 + bX + c$**

La gran diferencia con los trinomios anteriores es que en este caso el coeficiente del término cuadrático es diferente de 1.

Para factorizar este tipo de trinomios fijemonos bien como se efectúo el ejemplo 7, ya que de la misma manera los factorizaremos.

EJEMPLO 8) Factorizar $2a^2 + 4a - 16$.

SOLUCION: Para esto seguiremos los siguientes pasos.

1) Multiplicamos y dividimos por el coeficiente de la variable al cuadrado, en este caso es 2.

$$2a^2 + 4a - 16 = \frac{2(2a^2 + 4a - 16)}{2} = \frac{(2a)^2 + 4(2a) - 32}{2}$$

2) Se factoriza el trinomio $(2a)^2 + 4(2a) - 32$ donde $2a = X$ .

FACTORIZACION: Se sigue el mismo procedimiento de los ejemplos 1 al 7 y tenemos:

$$(2a)^2 + 4(2a) - 32 = (2a - 4)(2a + 8)$$

ya que $-4 + 8 = +4$ y $(-4)(+8) = -32$.

3) Uno de los binomios resultantes se dividen entre 2.

$$\frac{(2a)^2 + 4(2a) - 32}{2} = \frac{(2a - 4)(2a + 8)}{2} = \frac{(2a - 4)}{2} \cdot \frac{(2a + 8)}{1}$$

$$= (a - 2)(2a + 8)$$

La factorización final es $2a^2 + 4a - 16 = (a - 2)(2a + 8)$.

Para comprobar que es la factorización correcta se efectúa el producto de los binomios, se queda de ejercicio al lector.

EJEMPLO 9) Factorizar $7x^2 + 23x - 60$.

SOLUCION: 1) Multiplicamos y dividimos el trinomio por el coeficiente de la variable al cuadrado, en este caso es 7.

$$7x^2 + 23x - 60 = \frac{7(7x^2 + 23x - 60)}{7} = \frac{(7x)^2 + 23(7x) - 420}{7}$$

2) Factorizamos el trinomio $(7x)^2 + 23(7x) - 420$.

$(7x)^2 + 23(7x) - 420 = (7x - 12)(7x + 35)$

ya que $-12 + 35 = +23$ y $(-12)(+35) = -420$

3) Uno de los binomios resultantes se dividen entre 7,

$$\frac{(7x - 12)(7x + 35)}{7} = \frac{(7x - 12)}{1} \cdot \frac{(7x + 35)}{7} = (7x - 12)(x + 5)$$

La factorización final es $7x^2 + 23x - 60 = (7x - 12)(x + 5)$

EJEMPLO 10) Factorizar $5a^8 - 7a^4 + 2$.

SOLUCION: 1) Multiplicamos y dividimos el trinomio por el coeficiente de la variable al cuadrado, en este caso es 5.

$$5a^8 + a^4 + 2 = \frac{5(5a^8 - 7a^4 + 2)}{5} = \frac{(5a^4)^2 - 7(5a^4) + 10}{5}$$

2) Factorizamos el trinomio $(5a^4)^2 - 7(5a^4) + 10$, donde $X = 5a^4$.

$(5a^4)^2 - 7(5a^4) + 10 = (5a^4 - 2)(5a^4 - 5)$

ya que $-2 + (-5) = -7$ y $(-2)(-5) = +10$

3) Uno de los binomios resultantes se dividen entre 5.

$$\frac{(5a^4 - 2)(5a^4 - 5)}{5} = \frac{(5a^4 - 2)}{1} \cdot \frac{(5a^4 - 5)}{5} = (5a^4 - 2)(a^4 - 1)$$

La factorización final es $5a^8 - 7a^4 + 2 = (5a^4 - 2)(a^4 - 1)$.

**EJERCICIO 3.4.2**

Factorizar cada uno de los siguientes trinomios.

| | |
|---|---|
| 1) $2x^2 - 7x - 15$ | 2) $3a^2 - 7a - 20$ |
| 3) $10a^2 + 18a - 4$ | 4) $6b^2 - 29b + 35$ |
| 5) $8y^2 + 30y - 27$ | 6) $21z^2 - 18z - 3$ |
| 7) $30a^2 + 2a - 12$ | 8) $12b^2 - 30b + 12$ |
| 9) $10y^2 + 41y + 21$ | 10) $3x^4 + 11x^2 - 4$ |
| 11) $7y^4 - 32y^2 - 15$ | 12) $6z^6 + 7z^3 - 3$ |
| 13) $2a^8 + 5a^4 + 2$ | 14) $6b^6 - 21b^3 + 15$ |
| 15) $15a^8 - 7a^4 - 2$ | |

## 3.5 TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Ahora estudiaremos un tipo especial de trinomios, son los llamados trinomios cuadrados perfectos.

DEFINICION: Un trinomio es un **trinomio cuadrado perfecto** si es el cuadrado de un binomio, es decir si es el producto de dos binomios iguales.

Por ejemplo $x^2 + 2xy + y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto porque es el cuadrado de $x + y$, es decir:

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$$

Observa que el cuadrado de un binomio sigue la siguiente regla:
EL CUADRADO DE UN BINOMIO ES EL CUADRADO DEL PRIMER TERMINO, MAS EL DOBLE PRODUCTO DEL PRIMERO POR EL SEGUNDO TERMINOS MAS EL CUADRADO DEL SEGUNDO TERMINO. Mas adelante profundizaremos en esta regla.

Por la definición podemos hacer la siguiente afirmación.

Todo **trinomio cuadrado perfecto** (TCP) se puede factoriza como el cuadrado de un binomio.

Para saber cuando un trinomio es **TCP** hay que checar que cumple:

1) Dos de sus términos son cuadrados perfectos.
2) El tercer término debe de ser el doble producto de las raices cuadradas de sus cuadrados perfectos.

EJEMPLO 1) Comprobar si $x^2 + 4x + 4$ es un trinomio cuadrado perfecto.

SOLUCION: 1) $x^2 = (x)^2$ y $4 = 2^2$, es decir tiene dos términos que son cuadrados perfectos.

2) $2(\sqrt{x^2})(\sqrt{4}) = 2(x)(2) = 4x$

El tercer término es el doble producto de las raices cuadradas de sus cuadrados perfectos.

Cumple con las dos condiciones, entonces $x^2 + 4x + 4$ es TCP.

EJEMPLO 2) Comprobar si $9a^2 + 12ab + 4b^2$ es trinomio cuadrado perfecto.

SOLUCION: 1) $9a^2 = (3a)^2$ y $4b^2 = (2b)^2$, entonces si tiene dos términos que son cuadrados perfectos.

2) $2(\sqrt{9a^2})(\sqrt{4b^2}) = 2(3a)(2b) = 12ab$

El tercer término es el doble producto de las raices cuadradas de sus cuadrados perfectos.

Por lo tanto $9a^2 + 12ab + 4b^2$ es un TCP.

EJEMPLO 3) Comprobar si $36x^4 - 60x^2y + 25y^2$ es TCP.

SOLUCION: 1) $36x^4 = (6x^2)^2$ y $25y^2 = (5y)^2$, dos de sus términos son cuadrados perfectos.

2) $2(\sqrt{36x^4})(\sqrt{25y^2}) = 2(6x^2)(5y) = 60x^2y$

El tercer término es el doble producto de las raíces cuadradas de sus cuadrados perfectos.

Por lo tanto $36x^4 - 60x^2y + 25y^2$ es TCP.

En los tres últimos ejemplos checamos que los trinomios dados son TCP, pero ahora hay que factorizarlos, que esto ya es mas fácil.

| |
|---|
| Todo TCP se factoriza como el cuadrado de un binomio; el binomio estará formado por las raices cuadradas de los cuadrados perfectos separadas por el signo del tercer término. |

EJEMPLOS:

1) Factorizar $4x^2 + 20x + 25$.

SOLUCION: Primero chequemos si es TCP.

1) $4x^2 = (2x)^2$ y $25 = (5)^2$.

2) $2(\sqrt{4x^2})(\sqrt{25}) = 2(2x)(5) = 20x$.

Cumple con las dos condiciones, por lo tanto es TCP.

Su factorización será $\left(\sqrt{4x^2} \underset{\uparrow}{+} \sqrt{25}\right)^2 = (2x + 5)^2$ signo de $+20x$.

Finalmente $4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$

2) Factorizar $9b^2 - 30a^2b + 25a^4$.

SOLUCION: Chequemos que sea TCP.

1) $9b^2 = (3b)^2$ y $25a^4 = (5a^2)^2$.

2) $2(\sqrt{9b^2})(\sqrt{25a^4}) = 2(3b)(5a^2) = 30a^2b$

Cumple con las dos condiciones, entonces es TCP.

Su factorización es $\left(\sqrt{9b^2} \underset{\uparrow}{-} \sqrt{25a^4}\right)^2 = (3b - 5a^2)^2$ signo de $-30a^2b$

Por lo tanto $9b^2 - 30a^2b + 25a^4 = (3b - 5a^2)^2$

3) Factorizar $\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9}$.

SOLUCION: Primero mostremos que es TCP.

1) $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ y $\frac{b^2}{9} = \left(\frac{b}{3}\right)^2$

2) $2\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\left(\sqrt{\frac{b^2}{9}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{3}\right) = \frac{b}{3}$

Cumple con las dos condiciones entonces es TCP.

Su factorización será $\left(\sqrt{\frac{1}{4}} \underset{\uparrow}{-} \sqrt{\frac{b^2}{9}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right)^2$ signo de $-\frac{b}{3}$

Finalmente $\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b}{9} = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right)^2$

4) Factorizar $9(x-y)^6 + 12(x-y)^3(x+y) + 4(x+y)^2$.

SOLUCION: Comprobemos que es TCP.

1) $9(x-y)^6 = [3(x-y)^3]^2$ y $4(x+y)^2 = (2(x+y))^2$

2) $2\left(\sqrt{9(x-y)^6}\right)\left(\sqrt{4(x+y)^2}\right) = 2[3(x-y)^3][2(x+y)] =$
$= 12(x-y)^3(x+y)$

Cumple las dos condiciones, entonces es un TCP.

Su factorización será $\left(\sqrt{9(x-y)^6} + \sqrt{4(x+y)^2}\right)^2 = [3(x-y)^3 + 2(x+y)]^2$

Finalmente $9(x-y)^6 + 12(x-y)^3(x+y) + 4(x+y)^2 = [3(x-y)^3 + 2(x+y)]^2$

**EJERCICIO 3.5**

Factorizar cada uno de los siguientes trinomios.

1) $x^2 + 10x + 25$

2) $y^2 - 14y + 49$

3) $25a^2 - 10ab + b^2$

4) $9m^4 - 12m^2n + 4n^2$

5) $1 - 8x^3 + 16x^6$

6) $4b^4 + 9a^6 - 12a^3b^2$

7) $121 - 154x + 49x$

8) $1 + \frac{2b}{3} + \frac{b^2}{9}$

9) $x^4 - x^2y^2 + \frac{y^4}{4}$

10) $\frac{1}{49} + \frac{4b}{35} + \frac{4b^2}{25}$

11) $\frac{1}{25} + \frac{25x^4}{36} - \frac{x^2}{3}$

12) $4 - 4(1-a) + (1-a)^2$

13) $4(x+b)^2 - 20(x+b)(x-y) + 25(x+y)^2$

14) $49(a+b)^2 - 182(a+b)(c-1) + 169(c-1)^2$

15) $64(a-b)^4 - 48(a-b)^2(a+b)^4 + 9(a+b)^8$

## 3.6 DIFERENCIA DE CUADRADOS

El producto de dos binomios de la forma $(x + y)(x - y)$ es igual a una diferencia de cuadrados.

$$\begin{array}{rrr} & x & + y \\ & x & - y \\ \hline & - xy & - y^2 \\ x^2 & + xy & \\ \hline x^2 & + 0 & - y^2 \end{array}$$

Por esos podemos afirmar que $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

Inversamente $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ es decir:

> Una diferencia de cuadrados es igual a un producto de binomios, que serán la suma y diferencia de las raíces cuadradas respectivas de dichos cuadrados.

EJEMPLOS: 1) Factorizar $a^2 - 9$ .

$\sqrt{a^2} = a$ y $\sqrt{9} = 3$ entonces $a^2 - 9 = (a + 3)(a - 3)$

2) Factorizar $4b^2 - 25$.

$\sqrt{4b^2} = 2b$ y $\sqrt{25} = 5$ entonces $4b^2 - 25 = (2b + 5)(2b - 5)$.

3) Factorizar $16x^4 - 64y^2$.

$\sqrt{16x^4} = 4x^2$ y $\sqrt{64y^2} = 8y$ entonces

$16x^4 - 64y^2 = (4x^2 + 8y)(4x^2 - 8y)$.

4) Factorizar completamente $a^4 - 81b^4$.

$a^4 - 81b^4 = (a^2 + 9b^2)(a^2 - 9b^2) =$

$= (a^2 + 9b^2)(a + 3b)(a - 3b)$.

5) Factorizar completamente $8a^4 - 8$.

$8a^4 - 8 = 8(a^4 - 1) =$

$$= 8(a^2 + 1)(a^2 - 1) =$$
$$= 8(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1).$$

6) Factorizar completamente $x^3 - xy^2$.

$$x^3 - xy^2 = x(x^2 - y^2) = x(x + y)(x - y).$$

7) Factorizar completamente $x^2 - 9(a - 2)^2$.

$$x^2 - 9(a - 2)^2 = [x + 3(a - 2)][x - 3(a - 2)] =$$
$$= [x + 3a - 6][x - 3a + 6]$$

**EJERCICIO 3.6**

Factorizar completamente cada uno de los siguientes polinomios.

1) $a^2 - 16$
2) $b^2 - 144$
3) $x^2 - 81$
4) $y^2 - 25$
5) $36 - a^2$
6) $169 - b^4$
7) $49 - x^6$
8) $121 - 4y^4$
9) $9a^2 - 36y^4$
10) $4x^6 - 25y^4$
11) $16a^2b^4 - 81x^2y^6$
12) $36x^6 - y^{10}$
13) $x^4 - 16$
14) $5x^4 - 45$
15) $3a^4 - 1875$
16) $16a^4 - 81b^4$
17) $2a^5 - 2ab^4$
18) $8x^2 - 18(3y - 2)^2$
19) $9x^2 - (y + 4)^2$
20) $(3x - 2)^2 - (x + 1)^2$

## 3.7 FACTORIZACION COMPLETA DE POLINOMIOS

Ya que vimos algunas de las factorizaciones mas usadas aplicaremos estas para factorizar algunos polinomios.

1) Factorizar completamente $2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$.

1o.) El MFC a los cuatro términos es 2, entonces:

$2x^3 + 6x^2 - 2x - 6 = 2(x^3 + 3x^2 - x - 3)$

2o.) Agrupamos términos de dos en dos y sacando factores comunes:

$2(x^3 + 3x^2 - x - 3) = 2(x^3 - x + 3x^2 - 3) = 2[x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1)]$

3o.) El factor común es $x^2 - 1$ y tenemos:

$2[x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1)] = 2[(x^2 - 1)(x + 3)] = 2(x + 3)(x^2 - 1)$

4o.) Factorizando la diferencia $x^2 - 1$ tenemos:

$2(x + 3)(x^2 - 1) = 2(x + 3)(x + 1)(x - 1)$

Asi finalmente $2x^3 + 6x^2 - 2x - 6 = 2(x + 3)(x + 1)(x - 1)$.

2) Factorizar completamente $4x^3 - x^2 - 36x + 9$.

1o.) Agrupando términos y sacando sus MFC tenemos:

$4x^3 - x^2 - 36x + 9 = x^2(4x - 1) - 36x + 9 = x^2(4x - 1) - 9(4x - 1)$

$= (4x - 1)(x^2 - 9)$

2o.) Factorizamos la diferencia de cuadrados y resulta:

$(x^2 - 9) = (x + 3)(x - 3)$

Asi finalmente $4x^3 - x^2 - 36x + 9 = (4x - 1)(x + 3)(x - 3)$.

3) Factorizar completamente $3a^2m + 9am - 30m + 3a^2 + 9a - 30$.

1o.) El MFC de los seis términos es 3, sacandolo tenemos:

$3a^2m + 9am - 30m + 3a^2 + 9a - 30 = 3(a^2m + 3am - 10m + a^2 + 3a - 10)$

2o.) Agrupamos términos de tres en tres y sacamos su MFC.

$3(a^2m + 3am - 10m + a^2 + 3a - 10) = 3[m(a^2 + 3a - 10) + 1(a^2 + 3a - 10)]$

3o.) En la última expresión el MFC es $a^2 + 3a - 10$, sacandolo tenemos:

$3[m(a^2 + 3a - 10) + 1(a^2 + 3a - 10)] = 3[(m + 1)(a^2 + 3a - 10)] =$

$= 3(m + 1)(a^2 + 3a - 10)$

4o.) Factorizamos el trinomio $a^2+ 3a - 10$, y tenemos:

$3(m + 1)(a^2+ 3a - 10) = 3(m + 1)(a + 5)(a - 2)$

Asi que finalmente:

$3a^2m + 9am - 30m + 3a^2+ 9a - 30 = 3(m + 1)(a + 5)(a - 2)$.

4) Factorizar completamente $2x^4+ 13x^3- 26x^2- 13x + 24$.

1o.) En este caso vamos a representar el término $- 26x^2$como la suma de $-24x^2- 2x^2$ y el polinomio nos quedaría así:

$2x^4+ 13x^3- 26x^2- 13x + 24 = 2x^4+ 13x^3- 24x^2- 2x^2- 13x + 24$

2o.) Agrupamos los términos de tres en tres y sacamos su MFC.

$$2x^4+ 13x^3- 24x^2- 2x^2- 13x + 24 = x^2(2x^2+ 13x - 24) - 1(2x^2- 13x + 24)$$
$$= (x^2- 1)(2x^2+ 13x - 24)$$

3o.) Factorizamos el binomio $(x^2- 1)$ y el trinomio $2x^2+ 13x- 24$ como lo hicimos anteriormente y tenemos:

$(x^2- 1)(2x^2+ 13x - 24) = (x + 1)(x - 1)(x + 8)(2x - 3)$

Finalmente $2x^4+ 13x^3- 26x^2- 13x + 24 = (x + 1)(x - 1)(x + 8)(2x - 3)$.

**EJERCICIO 3.7**

Factorizar completamenta cada uno de los siguientes polinomios.

1) $x^4 - 26x^2+ 25$ 2) $12x^2+ 8x - 32$

3) $6a^3- 12a^2- 48a$ 4) $2x^2- 2xy - 24y^2$

5) $10ay^2+ 10ay - 20a$ 6) $(x + y)^2- (x - y)^2$

7) $a^4 - 13a^2 + 36$ 8) $81m^4 - 18m^2 + 1$

9) $m^4 - 41m^2 + 400$ 10) $x^2a + x^2b - 16a - 16b$

11) $a^2b + a^2 - 25b - 25$ 12) $9x^4 + 9x^3y - x^2 - xy$

13) $5ma^3 + 10ma^2 - 5ma - 10m$ 14) $a^2x^2 + a^2x - 6a^2 - x^2 - x + 6$

15) $x^4 - x^2y^2 - (2x - 1)(x^2- y^2)$ 16) $48x^6- 80x^5- 192x^4- 27x^2+ 45x + 108$

17) $m^6 - 9m^4 - m^2 + 9$

18) $3ax^4 - 5x^5 + 2x^4 - 12ax^2+ 20x^3- 8x^2+ 12a - 20x + 8$

## 3.8 DESARROLLO DEL CUADRADO Y CUBO DE UN BINOMIO

No daremos por terminado este tema sin antes hacer ver el desarrollo del cuadrado y cubo de un binomio, aunque estos los trabajaremos a la manera inversa ya que no los vamos a factorizar pues ya estan factorizados.

1) El cuadrado de un binomio es la factorización de un trinomio cuadrado perfecto.
2) El cubo de un binomio es la factorización de un polinomio especial de cuatro términos.

Analicemos con cuidado cada uno de estos desarrollos ya que también son muy importantes y muy usados.

**CUADRADO DE UN BINOMIO**

Sea un binomio cualquiera $x + y$, entonces su cuadrado es igual a: $(x + y)(x + y)$ realizando su producto tenemos:

$$\begin{array}{r} x + y \\ \underline{x + y} \\ + xy + y^2 \\ \underline{x^2 + xy \phantom{+ y^2}} \\ x^2 + 2xy + y^2 \end{array}$$

Asi que $(\underset{\uparrow}{x} + \underset{\uparrow}{y})^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$

1er. término 2o. término

Observa con cuidado el resultado y veras que sigue la siguiente regla:

| |
|---|
| EL CUADRADO DE UN BINOMIO ES EL CUADRADO DEL PRIMER TERMINO, MAS EL DOBLE PRODUCTO DEL PRIMERO POR EL SEGUNDO TERMINOS, MAS EL CUADRADO DEL SEGUNDO TERMINO. |

EJEMPLOS:

1) Desarrollar $(x + 3)^2$.

$$(x + 3)^2 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

1er. término 2o. término

2) Desarrollar $(2a + 5)^2$.

$$(2a - 5)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(-5) + (-5)^2 = 4a^2 - 20a + 25$$

1er. término 2o. término

3) Desarrollar $(5y^3 - 3x)^2$.

$$(5y^3 - 3x)^2 = (5y^3)^2 + 2(5y^3)(-3x) + (-3x)^2 = 25y^6 - 30xy^3 + 9x^2.$$

1er. término 2o. término

**CUBO DE UN BINOMIO**

Sea un binomio cualquiera $x + y$, entonces su cubo es igual a:
$(x + y)^2(x + y) = (x^2 + 2xy + y^2)(x + y)$ realizando su producto tenemos:

$$\begin{array}{r}
x^2 + 2xy + y^2 \\
\underline{x + y} \\
x^2y + 2xy^2 + y^3 \\
\underline{x^3 + 2x^2y + xy^2 \phantom{+ y^3}} \\
x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3
\end{array}$$

Asi que $(x + y)^3 = (x + y)^2(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

1er. término 2o. término

Observa con cuidado el resultado y veras que sigue la siguiente regla:

| |
|---|
| EL CUBO DE UN BINOMIO ES IGUAL AL CUBO DEL PRIMER TERMINO, MAS EL TRIPLE PRODUCTO DEL PRIMER TERMINO AL CUADRADO POR EL SEGUNDO, MAS EL TRIPLE PRODUCTO DEL PRIMER TERMINO POR EL CUADRADO DEL SEGUNDO, MAS EL CUBO DEL SEGUNDO TERMINO. |

EJEMPLOS:

1) Desarrollar $(x + 3)^3$.

$$(x + 3)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(3) + 3(x)(3)^2 + (3)^3 =$$
$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

2) Desarrollar $(2a - 5)^3$.

$$(2a - 5)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(-5) + 3(2a)(-5)^2 + (-5)^3 =$$
$$= 8a^3 - 60a^2 + 150a - 125$$

3) Factorizar $(3x^2y^3 - 2x)^3$.

$$(3x^2y^3 - 2x)^3 = (3x^2y^3)^3 + 3(3x^2y^3)^2(-2x) + 3(3x^2y^3)(-2x)^2 + (-2x)^3$$
$$= 27x^6y^9 - 54x^5y^6 + 36x^4y^3 - 8x^3$$

**EJERCICIO 3.8**

Desarrollar cada uno de las siguientes expresiones.

| | |
|---|---|
| 1) $(y + 3)^2 =$ | 2) $(x - 5)^2 =$ |
| 3) $(2x + 7)^2 =$ | 4) $(6 - 3y)^2 =$ |
| 5) $(2a - 3b)^2 =$ | 6) $(5m + 4mn)^2 =$ |
| 7) $(x^2 - 2y^3)^2 =$ | 8) $(3a^3 + 5b)^2 =$ |
| 9) $\left(\frac{m}{2} + 5n^3\right)^2 =$ | 10) $\left(\frac{2}{5}a - \frac{7}{3}b\right)^2 =$ |
| 11) $(a + 2)^3 =$ | 12) $(4 + 2b)^3 =$ |
| 13) $(2a - 5b)^3 =$ | 14) $(3ab - 1)^3 =$ |
| 15) $(3x^2 + 2)^3 =$ | 16) $(2m^3n - mn)^3 =$ |
| 17) $(2 - 3x^3)^3 =$ | 18) $\left(\frac{2}{3}a^2 - 2b\right)^2 =$ |

# TEMA IV

## ECUACIONES DE PRIMER GRADO

4.1 ¿Que es una ecuación?

4.2 Ecuaciones equivalentes

4.3 Solución de ecuaciones

4.4 Aprendiendo a resolver problemas.

## 4.1 QUE ES UNA ECUACION?

En nuestra vida diaria frecuentemente nos encontramos con una gran variedad de problemas, ya sea que escuchemos nos lo platiquen o que se nos presenten a nosotros mismos; de los cuales algunos los resolvemos mentalmente sin dificultad, otros nos cuestan un poco más de trabajo y otros definitivamente no los podemos resolver.

Existen diferentes tipos de problemas, y para cada uno de ellos existe una representación algebraica o un Modelo Matemático. En el TEMA II estudiamos un poco acerca del lenguaje algebraico en este tema lo estudiaremos con mayor profundidad ya que aquí abordaremos más que enunciados, estos serán planteamiento de problemas para poder encontrar su solución. Estudiaremos aquellos problemas que se puedan representar solo en función de una variable ya que existen una infinidad de ecuaciones con una gran variedad de variables en diferentes grados pero el estudio de estas es a un nivel superior.

Las ecuaciones que estudiaremos tienen la siguiente forma, observa que solo tienen una variable.

EJEMPLOS: 1) $3x - 5 = 4 + 7x$

2) $5(3 - x) + 3 = 6(3x + 6) - 1$

3) $\frac{1}{2} y + 3 = 12$

4) $\frac{y - 2}{3} + \frac{3 + 5y}{2} = \frac{1}{3}$

A estas alturas yo creo que todos tenemos una noción de lo que es una ecuación, podemos decir que una ecuación es: UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA QUE LLEVA EL SIGNO DE IGUALDAD, LA CUAL SOLO ES VERDADERA PARA DETERMINADOS VALORES DE LAS INCOGNITAS.

A las expresiones que estan de cada lado de la igualdad se les llama miembros ya sea izquierdo o derecho.

EJEMPLO: En la ecuación $4 + 2x = 3x - 1$; $4 + 2x$ es el miembro izquierdo y $3x - 1$ es el miembro derecho.

El conjunto solución de una ecuación lo forman aquellos valores que hacen verdadera la igualdad a estos valores también se le llaman las raíces de la ecuación, y estas se determina según el grado de la ecuación que se calcula de igual manera que lo hicimos con los polinomios.

-Una ecuación de 1er.grado en una variable tiene una sola solución. (que ese será nuestro caso en este tema).

-Una ecuación de 2o.grado con una incognita tendrá dos soluciones. (lo veremos más adelante).

-Una ecuación de 1er. grado con dos variables tendrá dos soluciones. (también lo veremos más adelante). etc. etc.

Existen un tipo de expresiones algebraicas que a primera vista ..driamos confundirlas con ecuaciones que son las IDENTIDADES; a diferencia de las ecuaciones las identidades son verdaderas para cualquier valor de sus variables o incognitas.

EJEMPLOS: 1) $3(2x - 1) = 6x - 3$

2) $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

3) $\frac{2y + 1}{y} = 2 + \frac{1}{y}$

4) $\frac{10x^2 + 9x}{15} = \frac{3x}{5} + \frac{2x^2}{3}$

Verifícalo dandole cualquier valor a las variables.

## 4.2 ECUACIONES EQUIVALENTES

Para poder encontrar la solución de las ecuaciones haremos uso de ecuaciones **equivalentes** que son aquellas ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución.

EJEMPLOS: 1) La ecuación $x + 1 = 4$ y la ecuación $x = 4 - 1$ son equivalentes; ya que si $x$ toma el valor de 3 ambas son verdaderas.

2) La ecuación $2y - 3 = 7$ y la ecuación $2y = 7 + 3$ son equivalentes; ya que si $y$ toma el valor de 5 ambas son verdaderas.

El método que usaremos para resolver ecuaciones consistirá en remplazar la ecuación dada por una cadena de ecuaciones equivalentes, cada una de las cuales será más simple que la anterior hasta que la solución sea evidente.

Para poder ir haciendo esta cadena de ecuaciones equivalentes hay que tomar en cuenta que la operación inversa de la suma es la resta y viceversa; la operación inversa del producto es la división y viceversa.

Ya que una ecuación es como una **balanza** en equilibrio, de tal manera que si agregamos o quitamos un cierto peso a uno de los platillos, debemos agregar o quitar el mismo peso a el otro platillo para que la balanza siga en equilibrio.

Hablando matemáticamente es "Si sumamos, restamos, multiplicamos ó dividimos por un número a un miembro de la ecuación, debemos hacer exactamente lo mismo al otro miembro de la igualdad para obtener una ecuación equivalente". Esto es enunciado en el **axioma fundamental de las ecuaciones** que nos dice lo siguiente:

"SI A CANTIDADES IGUALES SE LES APLICAN OPERACIONES IGUALES LOS RESULTADOS SERAN IGUALES".

De este axioma podemos puntualizar lo siguiente:

1) Si a los miembros de una ecuación se les **suma** la misma cantidad ya sea positiva o negativa, los resultados serán iguales.
2) Si a los miembros de una ecuación se les **resta** la misma cantidad ya sea positiva o negativa, los resultados tambien serán iguales.
3) Si los dos miembros de una ecuación se **multiplican** por la misma cantidad ya sea positiva o negativa, los resultados serán iguales.
4) Si los dos miembros de una ecuación se **dividen** entre una misma cantidad ya sea positiva o negativa, los resultados serán iguales.
5) Si los dos miembros de una ecuación se **elevan** a una misma potencia o se les extrae la misma **raíz**, los resultados también serán iguales.

---

## 4.3 SOLUCION DE ECUACIONES

Para poder encontrar la solución de las ecuaciones hay que tomar muy en cuenta los 5 puntos que anteriormente enunciamos, pero nunca olvides que toda operación que le hagas a un miembro de una ecuación haz exactamente lo mismo a el otro miembro para que la ecuación no se altere.

Veamos ejemplos de solución de ecuaciones usando estos puntos y observa que cada paso que damos tiene su razón de ser.

EJEMPLO 1) Encuentra la solución de la ecuación $3x - 2 = 7$.

SOLUCION: Nuestro objetivo es despejar $x$, es decir llegar a una ecuación equivalente donde veamos claramente el valor de $x$.

1o.) Sumamos 2 (inverso aditivo de -2) a los dos miembros de la ecuación $\longrightarrow$ $3x - 2 + 2 = 7 + 2$

2o.) Como $-2 + 2 = 0$ , tenemos $\longrightarrow$ $3x = 9$

3o.) Dividimos ambos miembros entre 3, para quitar el 3 que multiplica a la variable $x$ y resulta:

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$$
$$x = 3$$

Finalmente llegamos a una ecuación equivalente a la dada, y concluimos que la solución es $x = 3$.

COMPROBACION: Sustituimos el valor solución en la ecuación dada y debemos checar que nos quede una igualdad verdadera.

$$3x - 2 = 7$$
$$3(3) - 2 = 7$$
$$9 - 2 = 7$$
$$7 = 7$$

EJEMPLO 2) Encuentra la solución de la ecuación $2x + 1 = x - 5$.

SOLUCION: Enumeremos cada uno de los pasos a seguir para llegar a la solución.

1o.) Restamos $x$ a los dos miembros de la ecuación y tenemos ⟶ $2x + 1 - x = x - 5 - x$

2o.) Sumando términos semejantes ⟶ $x + 1 = -5$

3o.) Restamos 1 a los dos miembros ⟶ $x + 1 - 1 = -5 - 1$

4o.) La solución es ⟶ $x = -6$

COMPROBACION: Sustituimos el valor solución en la ecuación dada y debemos checar que nos quede una igualdad verdadera.

$$2x + 1 = x - 5$$
$$2(-6) + 1 = -6 - 5$$
$$-12 + 1 = -11$$
$$-11 = -11$$

EJEMPLO 3) Encuentra la solución de la ecuación $3(2x - 7) = 4x + x - 2$.

SOLUCION: Enumeramos los pasos a seguir hasta llegar a la solución.

1o.) Quitamos el paréntesis efectuando el producto $3(2x - 7)$ ⟶ $6x - 21 = 4x + x - 2$

2o.) Sumamos los términos semejantes ⟶ $6x - 21 = 5x - 2$

3o.) Restamos 5x a los dos miembros ⟶ $6x - 21 - 5x = 5x - 2 - 5x$

4o.) Sumamos los términos semejantes ⟶ $x - 21 = -2$

5o.) Sumamos 21 a los dos miembros de la ecuación y tenemos ⟶ $x - 21 + 21 = -2 + 21$

6o.) La solución es ⟶ $x = 19$

COMPROBACION: Sustituimos el valor solución en la ecuación dada y debemos checar que nos quede una igualdad verdadera.

$$3(2x - 7) = 4x + x - 2$$
$$3[2(19) - 7] = 4(19) + 19 - 2$$
$$3[38 - 7] = 76 + 17$$
$$3(31) = 93$$
$$93 = 93$$

OBSERVACION: Siempre se despeja la variable que aparece en la ecuación, esto quiere decir que en cada una de nuestras nuevas ecuaciones debe de ir quedando sola.

EJEMPLO 4) Encuentra la solución de $\frac{8}{9}y - \frac{11}{12}y = \frac{1}{8}$.

SOLUCION:

1o.) Realizamos la suma de los términos semejantes, para esto sumamos las fracciones $\frac{8}{9}$ y $-\frac{11}{12}$.

$$\left.\begin{array}{r} \frac{8}{9}y - \frac{11}{12}y = \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{36}y = \frac{1}{8} \end{array}\right.$$

2o.) Multiplicamos ambos miembros por -36 y tenemos:

$$-36\left(-\frac{1}{36}y\right) = -36\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$+\frac{36}{36}y = -\frac{36}{8}$$

$$1y = -\frac{9}{2}$$

3o.) La solución es ⟶ $y = -\frac{9}{2}$

COMPROBACION: Sustituimos el valor de x en la ecuación original.

$$\frac{8}{9}y - \frac{11}{12}y = \frac{1}{8}$$

$$\frac{8}{9}\left(-\frac{9}{2}\right) - \frac{11}{12}\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$-\frac{72}{18} + \frac{99}{24} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{-288 + 297}{72} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{9}{72} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

OBSERVACION:

| |
|---|
| Observa que siempre utilizamos la operación inversa para lograr dejar sola a la variable y obtener un despeje correcto. |

EJEMPLO 5) Encuentra la solución de $3y(y - 1) - (y + 3)(3y - 2) = 26$.

SOLUCION:

1o.) Quitamos los paréntesis, efectuando los productos indicados. $\left.\right\}$ $3y^2 - 3y - (3y^2 + 7y - 6) = 26$

$$3y^2 - 3y - 3y^2 - 7y + 6 = 26$$

2o.) Sumando los términos semejantes. $-10y + 6 = 26$

3o.) Restamos 6 a los miembros de la ecuación. $-10y + 6 - 6 = 26 - 6$

$$-10y = 20$$

4o.) Dividimos entre -10 ambos miembros de la ecuación.

$$\frac{-10y}{-10} = \frac{20}{-10}$$

$$1y = -4$$

5o.) La solución es ⟶ $y = -4$

COMPROBACION: Sustituimos el valor obtenido en nuestra ecuación dada.

$$3y(y - 1) - (y + 3)(3y - 2) = 26$$
$$3(-4)(-4 - 1) - (-4 + 3)[3(-4) - 2] = 26$$
$$-12(-5) - (-1)[-12 - 2] = 26$$
$$60 + [-14] = 26$$
$$60 - 14 = 26$$
$$26 = 26$$

EJEMPLO 6) Encuentra la solución de $\frac{3x + 5}{4} - \frac{2x - 1}{3} = 2 - \frac{x}{3}$ .

SOLUCION:

1o.) En este caso buscamos el MCM de 4 y 3, este es 12.

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por 12, y tenemos:

$$12\left(\frac{3x + 5}{4} - \frac{2x - 1}{3}\right) = 12(2 - \frac{x}{3})$$

2o.) Efectuamos los productos y reducimos.

$$\frac{12(3x + 5)}{4} - \frac{12(2x - 1)}{3} = 24 - \frac{12x}{3}$$

$$\frac{12}{4}\left(\frac{3x + 5}{1}\right) - \frac{12}{3}\left(\frac{2x - 1}{1}\right) = 24 - 4x$$

$$3(3x + 5) - 4(2x - 1) = 24 - 4x$$
$$9x + 15 - 8x + 4 = 24 - 4x$$
$$x + 19 = 24 - 4x$$

3o.) Sumamos 4x ambos miembros de la ecuación y sumamos los términos semejantes, obtenemos:

$$x + 19 + 4x = 24 - 4x + 4x$$
$$5x + 19 = 24$$

4o.) Restamos 19 a los dos miembros: $5x + 19 - 19 = 24 - 19$

$$5x = 5$$

5o.) Dividimos ambos miembros entre 5: $\frac{5x}{5} = \frac{5}{5}$

6o.) El resultado es ⟶ $x = 1$

COMPROBACION: Sustituimos el valor obtenido en nuestra ecuación dada.

$$\frac{3x + 5}{4} - \frac{2x - 1}{3} = 2 - \frac{x}{3}$$

$$\frac{3(1) + 5}{4} - \frac{2(1) - 1}{3} = 2 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{8}{4} - \frac{1}{3} = 2 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{24 - 4}{12} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

EJEMPLO 7) Resolver $\frac{2}{9}(4y + 7) - \frac{3}{7}(3y + 5) = \frac{1}{3}(2 - y) - 1.$

SOLUCION:

1o.) Multiplicamos ambos miembros por el MCM de 9, 7 y 3, este es 63.

$$63\left[\frac{2}{9}(4y + 7) - \frac{3}{7}(3y + 5)\right] = 63\left[\frac{1}{3}(2 - y) - 1\right]$$

$$63\left[\frac{2}{9}(4y + 7)\right] - 63\left[\frac{3}{7}(3y + 5)\right] = 63\left[\frac{1}{3}(2 - y)\right] - 63(1)$$

$$\frac{63(2)}{9}(4y + 7) - \frac{63(3)}{7}(3y + 5) = \frac{63(1)}{3}(2 - y) - 63$$

$$14(4y + 7) - 27(3y + 5) = 21(2 - y) - 63$$

2o.) Efectuamos los productos indicados y reducimos términos semejantes.

$$56y + 98 - 81y - 135 = 42 - 21y - 63$$

$$-25y - 37 = -21 - 21y$$

3o.) Sumamos 21y a los dos miembros de la ecuación.

$$-25y - 37 + 21y = -21 - 21y + 21y$$

$$-4y - 37 = -21$$

4o.) Sumamos 37 a los dos miembros de la ecuación y tenemos:

$$-4y - 37 + 37 = -21 + 37$$

$$-4y = 16$$

5o.) Dividimos ambos miembros entre -4.

$$\frac{-4y}{-4} = \frac{16}{-4}$$

$$1y = -4$$

6o.) La solución es ⟶ $y = -4$

La comprobación se deja de ejercicio al lector.

**EJERCICIO 4.3**

Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones, en cada caso efectúa su comprobación.

1) $3x + 4 + 2x = -11$

2) $-5 + 2y - 3 = 10 - y$

3) $-6z + 5 - 8z = -5z + 4 - 10z$

4) $5w - 8 = 2w + 7$

5) $4(3x + 7) + 5 = 33$

6) $13 + 3(4x - 3) = -8$

7) $2(3y + 1) + 7 = 0$

8) $3w + 2 - 4(w - 3) = 2(5w - 4)$

9) $7(z - 1) - 2(z + 1) = 4z$

10) $2(3x - 1) = 4 + 3(7 - x)$

11) $(5 - y)(2 - y) - y(y - 3) = 0$

12) $6w(w - 3) - (2w - 1)(3w + 5) = 50$

13) $(2z - 3)(3z + 2) - 6(z - 2)(z + 3) = -3$

14) $\frac{3x}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}$

15) $\frac{3x}{4} - \frac{4}{3} = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$

16) $\frac{2x}{9} - \frac{1}{4} = \frac{3x}{8} + \frac{1}{18}$

17) $\frac{1}{12} + \frac{5x}{4} = \frac{2x}{3} - \frac{1}{2}$

18) $\frac{2X}{5} + 2\frac{2}{3}X = 3X + \frac{2}{3}$

19) $\frac{y}{4} + \frac{y + 5}{8} = 1$

20) $\frac{z + 2}{14} - 1 = \frac{z}{7}$

21) $\frac{3x + 1}{6} + \frac{2x}{3} = 6$

22) $\frac{y - 1}{3} + \frac{2y - 3}{2} = \frac{7}{2}$

23) $\frac{4z - 3}{9} - \frac{z - 1}{4} = \frac{1}{12}$

24) $y - \frac{13 - y}{3} = \frac{y + 2}{6}$

25) $\frac{2}{9}(4x + 7) - \frac{3}{7}(3x + 5) = \frac{1}{3}(2 - x) - 1$

26) $\frac{1}{2}(y - 3) - \frac{3}{5}(2y - 5) = 3 - \frac{3}{4}(2y - 6)$

---

## 4.4 APRENDIENDO A RESOLVER PROBLEMAS

Ahora si estamos listos para poder resolver algunos problemas, para hacer esto te recomiendo sigas cada uno de los siguientes pasos para que puedas representar el problema por medio de una ecuación algebraica y puedas encontrar la solución.

1.- Leer con mucho cuidado el problema. Si es necesario volverlo a leer hasta tener una idea clara de la situación, algunas veces ayuda el hacer un dibujo o diagrama.
2.- Determinar la cantidad desconocida y representarla por medio de una variable.
3.- Establecer las relaciones matemáticas entre las otras cantidades conocidas o desconocidas en términos de nuestra variable.
4.- Traducir los enunciados del problema a una ecuación algebraica donde esten involucradas las cantidades conocidas y nuestra variable.
5.- Se resuelve la ecuación y después se interpretan las demás cantidades desconocidas.
6.- Comprobar la solución en el problema original no en la ecuación.

Te recomiendo dar un repaso al TEMA II para que no tengas mayores dificultades en la traducción del lenguaje algebraico.

A continuación se darán varios ejemplos muy detallados de como proceder para resolver ciertos problemas, estos procedimientos no son únicos tu puedes encontrar otras formas pero debes de llegar a la misma solución.

**PROBLEMAS QUE SE REFIENEN A NUMEROS.**

EJEMPLO 1) La mitad de un número es 5 unidades mayor que la tercera parte del número.

SOLUCIÓN: Llamemos **x** al número desconocido.

La representación de la mitad de **x** es: $\frac{x}{2}$

La representación de la tercera parte de **x** es: $\frac{x}{3}$

Como $\frac{x}{2}$ es mayor en 5 unidades que $\frac{x}{3}$, para que sean iguales a $\frac{x}{3}$ que es el menor le sumamos 5 y serán iguales; esto es:

$$\frac{x}{2} = \frac{x}{3} + 5$$

Resolvemos la ecuación:

$$6\left(\frac{x}{2}\right) = 6\left(\frac{x}{3} + 5\right)$$

$$\frac{6x}{2} = \frac{6x}{3} + 30$$

$$3x = 2x + 30$$

$$3x - 2x = 30$$

$$x = 30$$

El número buscado es 30

COMPROBACIÓN: La mitad de 30 es 15.

La tercera parte de 30 es 10.

Efectivamente 15 es mayor que 10 en 5 unidades.

EJEMPLO 2) Hallar dos números cuya suma sea 48 y el cuádruplo del menor es igual al doble del mayor.

SOLUCIÓN: Supongamos que **y** es el número menor.

Como la suma del número menor y el número mayor es 48, entonces el número mayor será $48 - y$.

El cuádruplo del menor es: $4y$

El doble del mayor es: $2(48 - y)$

El cuádruplo del menor es igual al doble del mayor: $4y = 2(48 - y)$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} 4y &= 2(48 - y) \\ 4y &= 96 - 2y \\ 4y + 2y &= 96 \\ 6y &= 96 \\ y &= \frac{96}{6} \\ y &= 16 \end{aligned}$$

El número menor es 16 y el mayor será $48 - 16 = 32$.

COMPROBACIÓN: -La suma del menor y el mayor es $16 + 32 = 48$.
-El cuádruplo del menor $4(16) = 64$ es igual al doble del mayor $2(32) = 64$.

EJEMPLO 3) Encontrar dos números impares consecutivos tales que el triple del mayor sea 8 unidades menos que el quíntuplo del menor.

SOLUCIÓN: Representemos al primer entero impar como $2x + 1$.
El impar que le sigue será $2x + 3$ que es mayor que el primero.
El triple del mayor es $3(2x + 3)$.
El quíntuplo del menor es $5(2x + 1)$.

Como el triple del mayor $3(2x + 3)$ es 8 unidades menor que el quíntuplo del menor $5(2x + 1)$; para que sean iguales a $3(2x + 3)$ le sumamos 8 y serán iguales, esto es: $3(2x + 3) + 8 = 5(2x + 1)$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} 6x + 9 + 8 &= 10x + 5 \\ 6x - 10x &= 5 - 17 \\ -4x &= -12 \\ x &= \frac{-12}{-4} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

El primer entero impar es $2x + 1 = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7$.

El segundo impar consecutivo es $2x + 3 = 2(3) + 3 = 9$.

COMPROBACIÓN:-Efectivamente 7 y 9 son enteros impares consecutivos.

-El triple del mayor $3(9) = 27$ es 8 unidades menor que el quíntuplo del menor $5(7) = 35$.

EJEMPLO 4) La suma de tres números es 82. El segundo número es el triple del primero y el tercero supera en 5 al segundo. Encontrar los números.

SOLUCIÓN: Llamemos **y** al primer número.

El segundo es el triple del primero: $3y$

El tercero supera en 5 al segundo: $3y + 5$

La suma de los tres es 82: $(y) + (3y) + (3y + 5) = 82$

Resolvemos la ecuación: $(y) + (3y) + (3y + 5) = 82$

$$y + 3y + 3y + 5 = 82$$

$$7y = 82 - 5$$

$$y = \frac{77}{7}$$

$$y = 11$$

El primer número es 11, el segundo es $3(11) = 33$ y el tercero $33 + 5 = 38$.

COMPROBACIÓN: -La suma de los tres es: $11 + 33 + 38 = 82$.

-El segundo que es 33 es el triple de 11.

-El tercero que es 38 es 5 unidades mayor que 33.

EJEMPLO 5) La suma de dos números es 37 y la diferencia de sus cuadrados es menor 4 unidades que nueve veces el mayor de los números.

SOLUCIÓN: Llamemos **x** al número menor.

Como la suma del número menor y el número mayor es 37, entonces el número mayor será $37 - x$.

La diferencia de sus cuadrados es: $(37 - x)^2 - x^2$

Nueve veces el número mayor es: $9(37 - x)$

Como la diferencia de sus cuadrados $(37 - x)^2 - x^2$ es menor 4 unidades que 9 veces el mayor $9(37 - x)$, para que sean iguales a la diferencia que es la más chica le sumamos 4 y tenemos:

$$(37 - x)^2 - x^2 + 4 = 9(37 - x)$$

Resolvemos la ecuación:

$$37^2 + 2(37)(-x) + x^2 - x^2 + 4 = 333 - 9x$$
$$1369 - 74x + 4 = 333 - 9x$$
$$-74x + 9x = 333 - 1373$$
$$-65x = -1040$$
$$x = \frac{-1040}{-65}$$
$$x = 16$$

El número menor es 16 y el mayor es 37 - 16 = 21.

COMPROBACIÓN: -La suma de 16 y 21 es 37.

-La diferencia de sus cuadrados es:

$21^2 - 16^2 = 441 - 256 = 185$

-Nueve veces el mayor es 9(21) = 189.

Efectivamente 185 es menor en 4 unidades que 189.

EJEMPLO 6) El dígito de las decenas de un número de dos cifras es menor en 3 unidades que el dígito de las unidades. Si el número supera en 6 al cuádruplo de la suma de los dígitos, hallar el número.

SOLUCIÓN: Llamemos $x$ al dígito de las unidades.

Entonces $x - 3$ será el dígito de las decenas.

El número buscado en notación desarrollada es:

$10(x - 3) + 1(x) = 10x - 30 + x = 11x - 30$.

El cuádruplo de la suma de los dígitos es:

$4(x + x - 3) = 4(2x - 3)$.

Como el número $11x - 30$ supera en 6 al cuádruplo de la suma de los dígitos $4(2x - 3)$, para que sean iguales al más chico le sumamos 6 y serán iguales; es decir:

$$11x - 30 = 4(2x - 3) + 6$$

Resolvemos la ecuación:

$$11x - 30 = 8x - 12 + 6$$
$$11x - 8x = 30 - 6$$
$$3x = 24$$
$$x = \frac{24}{3}$$
$$x = 8$$

El dígito de las unidades es 8 y el dígito de las decenas será $8 - 3 = 5$. Así el número buscado es 58.

COMPROBACIÓN:
- Efectivamente el dígito de las decenas que es 5 es menor en 3, que el dígito de las unidades que es 8.
- La suma de los dígitos es $5 + 8 = 13$, su cuádruplo es $4(13) = 52$.
- Es fácil ver que el número encontrado que es 58 supera en 6 al cuádruplo de la suma de sus dígitos que es 52.

EJEMPLO 7) En cierto número de tres cifras el dígito de las centenas es una unidad menor que el de las decenas y la suma de los tres dígitos es 17. Si se intercambian los dígitos de las unidades y las centenas, el número disminuye en 495. Encontrar el número.

SOLUCIÓN: Supongamos que $x$ es el dígito de las decenas.

Entonces el dígito de las centenas será $x - 1$, ya que es una unidad menor que el de las decenas.

Como la suma de los tres es 17, el dígito de las unidades es $17 - x - (x - 1) = 18 - 2x$.

El número buscado en notación desarrollada es:

$100(x - 1) + 10(x) + 1(18 - 2x)$

Al intercambiar el dígito de las unidades y las centenas nos queda el número: $100(18 - 2x) + 10(x) + 1(x - 1)$.

Al hacer el intercambio este número disminuye en 495, para que sean iguales al más chico le sumamos 495 y tenemos nuestra ecuación:

$$100(x - 1) + 10(x) + 1(18 - 2x) = 100(18 - 2x) + 10(x) + 1(x - 1) + 495$$

Resolvemos esta ecuación:

$$100(x - 1) + 10(x) + 1(18 - 2x) = 100(18 - 2x) + 10(x) + 1(x - 1) + 495$$

$$100x - 100 + 10x + 18 - 2x = 1800 - 200x + 10x + x - 1 + 495$$

$$108x - 82 = - 189x + 2294$$

$$108x + 189x = 2294 + 82$$

$$297x = 2376$$

$$x = \frac{2376}{297}$$

$$x = 8$$

Así el dígito de las decenas es 8, de las centenas es uno menos es decir 7 y el de las unidades es 17 - 8 - 7 = 2, el número buscado es 782.

COMPROBACIÓN: - La suma de los tres dígitos es 7 + 8 + 2 = 17.

- Al intercambiar el dígito de las unidades por el de las centenas tenemos el número 287 que es 495 unidades menor que 782.

**EJERCICIO 4.4.1**

Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

1. Si a un número se le suman 12, el resultado es 39.¿Cuál es el número?
2. Si a un número le restamos 17, el resultado es 34.¿Cuál es el número?
3. Si al doble de un número se le aumenta 13, resulta 49. Hallar el número.
4. El triple de un número disminuido en ocho es 64. Encontrar el número.
5. Cinco veces un número es 42 unidades mayor que seis veces el número. Hallar el número.
6. Si a cinco veces un número se le suman 4, resulta el número aumentado en 28.
7. Tres cuartas partes de número excede a la mitad de el en 6 unidades. Encontrar tal número.
8. Un número es 7 unidades menor que otro. Determine ambos si el cuádruplo del menor es una unidad menos que el triple del mayor.
9. La diferencia de dos números es 8. Si el cuádruplo del mayor supera en uno al quíntuplo del menor, obtenga ambos números.
10. La suma de tres números es 78. El segundo es el doble del primero y el tercero es el triple del primero. Encontrar los números.
11. La suma de tres números es 136. El segundo supera en ocho al primero y el tercero es 15 menos que el segundo. Hallar los números.
12. La suma de tres números pares consecutivos es 102. ¿Cuáles son los números?

13. Encontrar tres enteros impares consecutivos tales que el triple de la suma del segundo y el tercero supera en 3 a siete veces el primero.
14. La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 15. El dígito de las unidades es el cuádruplo del de las centenas. El doble dígito de las decenas es igual a la suma de dígitos de las unidades y las centenas. Obtener el número.
15. La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 13. El dígito de las unidades supera en uno al dígito de las centenas. El cuádruplo del dígito de las centenas es mayor 4 unidades que el doble de la suma de los dígitos de las unidades y las decenas. Hallar el número.
16. En un número de tres cifras el dígito de las unidades supera en dos al de las decenas, y la suma de los dígitos es 17. Si se intercambian los dígitos de las unidades y las centenas, el nímero disminuye en 396. Encontrar el número.

**PROBLEMAS DE PORCENTAJES.**

Recordemos que es un porcentaje o tanto por ciento que se representa con el símbolo % . Ejemplos:

$$38\% = 38 + 100 = \frac{38}{100} = .38$$

$$3\frac{2}{5}\ \% = 3\frac{2}{5} + 100 = \frac{17}{5} + 100 = \frac{17}{500} = .034$$

$$250\% = 250 + 100 = \frac{250}{100} = 2.5$$

EJEMPLO 1) ¿Que tanto por ciento es 28 de un total de 60?

SOLUCIÓN: Aquí utilizamos la famosa regla de tres:

$$\left.\begin{array}{lll} 60 \text{ es el total} & 100\% \\ 28 \quad \text{es el} & x\% \end{array}\right\} \quad \frac{x}{28} = \frac{100}{60}$$

Despejamos a $x$ y tenemos $x = \frac{28(100)}{60} = 46.6\ \%$

Así 28 es el 46.6% de 60.

EJEMPLO 2) Escribir $\frac{42}{50}$ como un tanto por ciento.

SOLUCIÓN: Para hacer esto, el número se multiplica por 100% y se simplifica.

$$\frac{42}{50} = \frac{42}{50}(100\%) = \frac{4200}{50}\% = 84\%$$

EJEMPLO 3) ¿Cuál es el 38% de 84?

SOLUCIÓN: Para hacer esto, el porcentaje se divide entre 100 y se multiplica por el número dado.

$$38\%(84) = (\frac{38}{100})(84) = (.38)(84) = 31.92$$

EJEMPLO 4) El precio de venta de una computadora es de N$6300.00. Si se ofrece en venta a un precio de N$5600.00.¿Cuál es el porcentaje de descuento?

SOLUCIÓN: El descuento en de 6300 - 5600 = 700 nuevos pesos.

Veamos que porcentaje es 700 de 6300.

Aplicamos la regla de tres:

$$\left.\begin{array}{r} 6300 \text{ es el } 100\% \\ 700 \text{ es el } x\% \end{array}\right\} \frac{x}{700} = \frac{100}{6300}$$

Despejando a $x$ tenemos $x = \frac{700(100)}{6300} = \frac{70000}{6300} = 11.11\%$

El descuento que se hace es de un 11.11%.

EJEMPLO 5) El costo de un boleto de avión es de N$340.00, pero hay que pagar el impuesto que es en 8% del costo del boleto.¿Cuál es el total a pagar?

SOLUCIÓN: Debemos calcular el 8% de 340.

Para esto dividimos el pocentaje entre 100 y lo multiplicamos por 340.

$\frac{8}{100}(340) = .08(340) = 27.2$

Entonces hay que pagar N$27.2 de impuesto.

El total a pagar es 340 + 27.2 = N$367.2

EJEMPLO 6) La Sra.López pagó por un coche N$31 650.00, éste tenía un descuento del 12.5%. ¿Cuál era el precio de venta sin descuento?

SOLUCIÓN: En si queremos encontrar el 100%, que es el precio de venta sin descuento.

Como el descuento es del 12.5%, la Sra. López pagó un 87.5%

Apliquemos de nuevo la regla de tres y tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x \text{ es el } 100\% \\ 31650 \text{ es el } 87.5\% \end{array}\right\} \quad \frac{x}{100} = \frac{31650}{87.5}$$

Despejamos a x y tenemos $x = \dfrac{31650(100)}{87.5} = 36171.429$

El precio de venta sin descuento es de N$36171.429

EJEMPLO 7) El Sr. González realizó dos inversiones con un total de N$12000. En una de las inversiones obtuvo un 7% de utilidad, pero en la otra tubo una perdida del 4%. Si la ganancia neta fué de N$290. ¿Qué cantidades tenía en cada inversión?

SOLUCIÓN: Supongamos que la cantidad en la primera inversión es **x**.

Entonces 12000 - **x** será la cantidad de la segunda inversión.

La ganancia obtenida fué de $7\%(x) = .07x$

La pérdida obtenida fué de $4\%(12000 - x) = .04(12000 - x)$

Cantidad ganada - Cantidad pérdida = Ganancia neta.

$$.07x - .04(12000 - x) = 290$$

Resolvemos la ecuación:

$$.07x - .04(12000) + .04x = 290$$
$$.11x - 480 = 290$$
$$.11x = 290 + 480$$
$$x = \frac{770}{.11}$$
$$x = 7000$$

La cantidad de la primera inversión fué de N$7000.

La cantidad en la segunda inversión fué de N$5000.

COMPROBACIÓN: 1a. inversión + 2a. inversión = 7000 + 5000 = 12000

Cantidad ganada: 7% de 7000 = .07(7000) = 490

Cantidad perdida: 4% de 5000 = .04(5000) = 200

Cantidad ganada - Cantidad pérdida = Ganancia neta.

490 - 200 = 290

EJEMPLO 8) El interés anual producido por N$24000 supera en N$156 al producido por N$17000 con una tasa anual de interés 1.8% mayor.¿Cuál es la tasa anual de interés aplicada a cada cantidad?

SOLUCIÓN: Sea x% el interés de 24000; el interés que producirá es $\frac{24000}{100}x$.

(x + 1.8)% será el interés de 17000; el interés que producirá será de $\frac{x + 1.8}{100}(17000)$.

Como el interés producido por 24000 supera en 156 al producido por 17000, para que sean iguales le sumamos 156 a la que produce menos y tenemos:

$$\frac{24000}{100}x = \frac{x + 1.8}{100}(17000) + 156$$

Resolvemos la ecuación:

$$100\left(\frac{24000}{100}x\right) = 100\left(\frac{x + 1.8}{100}(17000) + 156\right)$$

$$24000x = (x + 1.8)(17000) + 15600$$

$$24000x = 17000x + 30600 + 15600$$

$$24000x - 17000x = 46200$$

$$7000x = 46200$$

$$x = \frac{46200}{7000}$$

$$x = 6.6$$

El resultado es: 6.6% es la tasa de interés anual de los N$24000.

8.4% es la tasa de interés anual de los N$17000.

COMPROBACIÓN: El interés anual producido por 24000 es 24000(.066) = 1584

El interés anual producido por 17000 es: 17000(8.4) = 1428

Hacemos la diferencia: 1584 - 1428 = 156

Efectivamente el interés anual de 24000 supera en 156 al de 17000.

EJERCICIO 4.4.2

Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

1. Un refrigerador costó N$845 hace 2 años. El mismo modelo se vende este año en N$1300. ¿Cuál es el porcentaje de aumento en el precio?
2. En un examen de Inglés, Alejandro obtuvo 210 puntos de un total de 300. ¿Cuál es su calificación porcentual?
3. Si se asignan 8.4 millones de barriles de petróleo diarios para el consumo de cierto país y solamente se utilizan 7.2 millones. ¿Qué porcentaje de la asignación no se consume?.
4. Martín gana N$3200 al mes. ¿Cuánto ganará mensualmente si su salario se incrementa en un 8.5%?
5. Un terreno se vendió en N$68000. ¿Cuánto recibe el propietario si el vendedor tiene una comisión del 9% sobre el precio de venta?
6. Un corredor de bienes raíces recibió una comisión de N$12300 por vender una casa. ¿En cuánto se vendió la casa si el vendedor recibió un 12.5% del precio de venta?
7. El Sr. Pérez compró un equipo de aire acondicionado en N$1600 que tenía un 23% de descuento.¿Cuál era el precio sin el descuento?
8. Dos cantidades de dinero que hacen un total de N$30000, ganan respectivamente el 8% y el 12% de interes anual. Encontrar ambas cantidades, si entre las dos producen una ganancia de N$3088?
9. Andrea tiene N$18000 invertidos al 9% de interes anual. ¿Cuánto debe invertir al 7% para que el interés de ambas inversiones le den una ganancia de N$2075?
10. El Sr. Ramírez realizó dos inversiones cuya diferencia es de N$18000. La inversión menor es al 7.8% y la mayor al 8.6%. Determinar las cantidades invertidas si el ingreso anual total de intereses es de N$2860.
11. Sandra y Sergio invirtieron una parte de N$52000 al 7.5% y el resto al 11.5%. Si su ingreso por la inversión al 7.5% fue de N$670 más que el de la inversión al 11.5%, ¿Cuánto fué invertido a cada tasa?
12. Jorge hizo dos inversiones con un total de N$20000. En una de ellas obtuvo una utilidad del 24%, pero en la otra perdió un 11%. Si la ganancia total fue de N$600, ¿Cuánto tenía en cada inversión?

13. Francisco invirtió dos cantidades que sumaban N$15000. En una de ellas obtuvo una utilidad del 8%, pero en la otra perdió un 15%. Si la perdida total fue de N$1330, ¿Cuánto tenía en cada inversión?
14. El monto de interés anual producido por N$28000 es de N$448 más que el producido por N$16000 con 2% más de interés anual. ¿Cuál es la tasa de interés aplicada a cada cantidad?

**PROBLEMAS DE MEZCLAS Y DE VALOR MONETARIO**

EJEMPLO 1) Un laboratorista desea saber cuántos litros de agua debe de agregar a 6 litros de una solución de ácido clorhídrico al 6% y agua, para producir otra solución al 3% de ácido.

SOLUCIÓN: Una solución de ácido clorhídrico al 6% y agua significa que el 6% es ácido y el 94% es agua; tenemos 6 litros al 6% de ácido es: 6%(6).

Deseamos una agregar $x$ litros de agua a los 6 litros y la nueva solución debe de contener 3% de ácido, esto se representa como: 3%$(6 + x)$

La primer solución más el agua agregada con 0% de ácido, debe de dar la nueva solución, y nos queda la ecuación: $6\%(6) + 0\%(x) = 3\%(6 + x)$

Resolviendo la ecuación tenemos: $.06(6) + 0x = .03(6 + x)$

$$.36 = .18 + .03x$$
$$.36 - .18 = .03x$$
$$\frac{.18}{.03} = x$$
$$x = 6$$

La cantidad de agua que debe agregarse es 6 litros.

COMPROBACIÓN: La primer solución de 6 litros tiene un 6% de ácido, es decir $6\%(6) = .06(6) = .36$

La segunda solución de 12 litros tiene un 3% de ácido, es decir $3\%(12) = .03(12) = .36$

Efectivamente obtenemos los mismos resultados.

EJEMPLO 2) Un orfebre mezcló una aleación de oro al 48% con otra al 72% para producir una nueva aleación al 57%. Si hay 200 gramos más de la aleación al 48% que de la aleación al 72%, ¿Cuántos gramos hay en la mezcla total?

SOLUCIÓN:

Llamemos $x$ a los gramos de la aleación al 72%, queda representado por: $72\%x$

La aleación al 48% que contiene 200gr. más que la de 72% queda representada por: $48\%(x + 200)$

La mezcla total contendrá $x + (x + 200)$gr. de oro al 57%, y queda representada por: $57\%(x + x + 200) = 57\%(2x + 200)$

La suma de las dos primeras aleaciones debe de ser igual a la mezcla total y tenemos nuestra ecuación: $72\%x + 48\%(x + 200) = 57\%(2x + 200)$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$.72x + .48(x + 200) = .57(2x + 200)$$
$$.72x + .48x + .48(200) = .57(2x) + .57(200)$$
$$1.2x + 96 = 1.14x + 114$$
$$1.2x - 1.14x = 114 - 96$$
$$.06x = 18$$
$$x = \frac{18}{.06}$$
$$x = 300$$

El peso de la mezcla total es $2x + 200 = 2(300) + 200 = 800$ gr.

COMPROBACIÓN:

Los gramos de la aleación al 72% son: $72\%(300) = .72(300) = 216$

Los gramos de la aleación al 48% son: $48\%(300 + 200) = .48(500) = 240$

La mezcla total contendrá 800gr. de oro al 57%, son:

$$57\%(800) = .57(800) = 456$$

Efectivamente la suma de $216 + 240 = 456$.

EJEMPLO 3) ¿Cuántos kilos de nueces que se venden a N$9 el kilo y cuántos kilos de otras nueces que se venden a N$5 el kilo deberán mezclarse para obtener 64 kilos de nueces que se venderán a N$6 el kilo?

SOLUCIÓN: Llamemos $y$ a los kilos de nueces de a N$9 el kilo.

Su venta total será N$9y.

Si hay un total de 64 kilos en la mezcla, entonces hay $64 - y$ kilos de nueces de a N$5 el kilo; la venta total N$5(64 - y).

Venta total de la mezcla es N$6(64).

Como el comerciante no desea perder, la venta de las nueces de a N$9 más la venta de las nueces de a N$5 debe ser igual a la venta de la mezcla.

Esto se representa por:

V. de nueces de a N$9 + V. de nueces de a N$5 = Venta de la mezcla

$$9y + 5(64 - y) = 6(64)$$

Resolviendo la ecuación:

$$9y + 320 - 5y = 384$$
$$4y = 384 - 320$$
$$y = \frac{64}{4}$$
$$y = 16$$

Se deben mezclar 16 kilos de nueces de a N$9 y 48 kilos de nueces de a N$5 para que la mezcla de 64 kilos se venda a N$6 el kilo.

COMPROBACIÓN:

Si hay 16 kilos de nueces de a N$9, la venta total es: N$9(16) = N$144

Si hay 48 kilos de nueces de a N$5, la venta total es: N$5(48) = N$240

En la mezcla hay 64 kilos de a N$6, la venta total es: N$6(64) = N$384

Efectivamente N$144 + N$240 = N$384

EJEMPLO 4) Roxana compró N$4.45 de estampas de a 10¢ y otras de a 25¢. Si compró un total de 28 estampas. ¿Cuántas tiene de cada clase?

SOLUCIÓN: Supongamos que $x$ es el número de estampas de a 10¢.

Pagó por ellas $10x$¢.

$28 - x$ es el número de estampas de a 25¢, ya que compró 28 estampas en total. Pagó por estas $25(28 - x)$¢.

Por ambas estampas pagó un total de N$4.45 = 445¢, entonces:

$$10x + 25(28 - x) = 445$$

Resolvemos la ecuación y tenemos: $10x + 25(28 - x) = 445$

$$10x + 700 - 25x = 445$$
$$-15x = 445 - 700$$
$$x = \frac{-255}{-15}$$
$$x = 17$$

Compró 17 estampas de a 10¢ y 28 - 17 = 11 estampas de a 25¢.

COMPROBACIÓN: 17 estampas de a 10¢ pagó 170¢.
11 estampas de a 25¢ pagó 275¢.
Sumamos ambas cantidades: 445¢
Y 17 + 11 = 28 estampas en total.

EJEMPLO 2) Omar tenía N$222 en su alcancía en monedas de 10¢, 20¢ y 50¢ con un total de 860 monedas. Si la cantidad de monedas de a 50¢ es el cuádruplo de las de a 20¢. ¿cuántas monedas de cada valor tenía?

SOLUCIÓN: Llamemos **x** al número de monedas de a 20¢, tendrá un total de $\boxed{20x¢}$

**4x** será el número de monedas de a 50¢, tendrá un total de $\boxed{50(4x)¢}$ con solo monedas de a 50¢.

En total hay 860 monedas de las cuales **x** son de a 20¢ y **4x** son de a 50¢, entonces 860 - **x** - **4x** será el número de monedas de a 10¢ y tendrá una cantidad de $\boxed{10(860 - 5x)¢}$

Convertimos N$222 a centavos y son 22200¢.

La suma de las cantidades de cada moneda será igual a la cantidad total.

En lenguaje algebraico: $10(860 - 5x) + 20x + 50(4x) = 22200$

Resolvemos la ecuación: $8600 - 50x + 20x + 200x = 22200$

$$170x = 22200 - 8600$$
$$x = \frac{13600}{170}$$
$$x = 80$$

Tenía: 80 monedas de a 20¢.
4(80) = 320 monedas de a 50¢.
860 - 5(80) = 860 - 400 = 460 monedas de a 10¢.

COMPROBACIÓN: Monedas de a 10¢ + Monedas de a 20¢ + monedas de a 50¢ =

460 + 80 + 320 = 860 monedas en total.

460 monedas de a 10¢ = 10(460) = 4600¢

80 monedas de a 20¢ = 20(80) = 1600¢

320 monedas de a 50¢ = 50(320) = 16000.

La suma de las tres cantidades es: 22200¢

Convirtiendo a N$ son: N$222

**EJERCICIO 4.4.3**

1. ¿Cuántas onzas de alcohol deben añadirse a 100 onzas de una solución al 12% de yodo en alcohol para obtener una solución al 8% de yodo?
2. ¿Cuántas pintas de una solución con desinfectante al 4% deben agregarse a 20 pintas de otra igual al 30% para obtener una al 12%.
3. ¿Cuántos litros de una solución de ácido al 80% deben añadirse a 15 litros de igual solución al 6% para hacer una al 20%.
4. Un platero mezcló 300 gr, de una aleación de plata al 90% con 450gr. del mismo tipo de aleación al 60%.¿Cuál es el porcentaje de plata en la mezcla?
5. Un lechero desea mezclar leche que contiene 5% de grasa, y crema que contiene 75% de grasa para obtener 56 litros de mezcla con 50% de grasa. ¿Cuántos litros de cada clase debe usar?
6. Un orfebre mezcló 20 kilos de una aleación de estaño al 70% con 55 kilos de la misma aleación al 40% . ¿Cuál es el porcentaje de estaño en la mezcla?
7. Un químico desea mezclar una solución acida al 20% con otra al 70% para obtener 50 litros de solución al 60%. Encuentra cuántos litros de cada solución debe de agregar.
8. Un almacenista tiene dulces de N$12 el kilo y otros de N$8 el kilo. Quiere hacer una mezcla de 20 kilos que resulten a N$10 el kilo. ¿Cuántos kilos de cada clase deberá poner?

9. Un comerciante desea obtener 100 litros de aceite para venderlos a N$2 el litro. para ello mezcla aceite de N$3.5 el litro con otro de N$1.5 el litro. ¿Cuántos litros de cada clase debe usar?.
10. Un agricultor mezcló un fertilizante que contiene 20% de nitrógeno con otro de 60% para hacer un fertilizante con 34% de nitrógeno. Si hay 36 kg menos del fertilizante de 60% que del de 20%. ¿Cuántos kilos hay en la mezcla total?
11. Una planta procesadora de alimentos desea producir una salsa picante con 75% de tomate. Si tiene una salsa con 40% de tomate y otra con 90% ,además hay 20 litros más de salsa con 90% de tomate que la de 40%. ¿Cuántos litros hay en la mezcla?
12. Un tendero mezcló 8 kilos de café con 4 kilos de otro café que cuesta N$3 el kilo menos que el primero. Si el kilo de la mezcla ya hecha costará N$6 el kilo, ¿Cuál es el precio por kilo de cada café?
13. Un carnicero mezcla 3 clases de carne molida, una de N$19.5 el kilo, otra de N$24.5 el kilo y la tercera de a N$35 el kilo. La mezcla pesa 16.6 kilos y se vende a N$27.5 el kilo. Si la cantidad de carne de a N$19.5 es el doble de la de a N$24.5,¿Cuántos kilos de cada tipo de carne utiliza?
14. Edgar compró timbres de 4¢ y de 10¢, gastando un total de N$1.98. Si compró 3 timbres de a 10¢ más que de a 4¢. ¿Cuántos compró de cada clase?
15. Norma tiene el doble de monedas de 20¢ que de 10¢ y tiene 3 más de 10¢ que de 50¢. Si el valor total de las monedas es de N$8.50. ¿Cuántas tiene de cada clase?
16. Esperanza compró 60 estampillas de 10¢, 15¢ y 25¢ pagando por ellas N$13.55. Si hay 2 estampillas más de 15¢ que el doble de las de 10¢, ¿Cuántas adquirió de cada clase?
17. Los ingresos por la venta de 68000 boletos para un concierto de Rock fuerón de N$600,000. Los boletos se vendierón a N$14, N$10 y N$6, y la cantidad de los de N$6 fué 3.5 veces la correspondiente a los de N$14. ¿Cuántos fuerón vendidos de cada clase?

**PROBLEMAS DE MOVIMIENTO**

Recuerda lo siguiente: LA DISTANCIA RECORRIDA ES IGUAL AL PRODUCTO DE LA VELOCIDAD POR EL TIEMPO. En símbolos $d = vt$.

EJEMPLO 1) Dos trenes parten uno hacia el otro al mismo tiempo, de estaciones que estan separadas 560 km. Uno es un tren de pasajeros y el otro es un tren de carga cuya velocidade es menor 40 Km. por hora que el primer tren. Se encontrarán en 4 horas. ¿Cuál es la velocidad de cada tren?

SOLUCIÓN: Llamemos **x** a la velocidad del tren de pasajeros.

$x - 40$ será la velocidad del tren de carga.

Los trenes se encuentran en 4 horas, es decir $t = 4$.

Como $d = vt$ entonces la distancia que recorrerá el primer tren la llamaremos $d_1 = 4x$.

La distancia que recorrerá el segundo tren $d_2 = 4(x - 40)$.

La suma de las distancias recorridas por ambos debe de ser 560 km. es decir:

$$d_1 + d_2 = 560$$

$$4x + 4(x - 40) = 560$$

Resolvemos la ecuación:

$$4x + 4x - 160 = 560$$

$$8x = 560 + 160$$

$$x = \frac{720}{8}$$

$$x = 90$$

La velocidad del tren de pasajeros es de 90 km. por hora.

La velocidad del tren de carga es de 90 - 40 = 50 km. por hora.

COMPROBACIÓN:
- Distancia recorrida por el tren de pasajeros es: $vt = 90(4) = 360$ km.
- Distancia recorrida por el tren de carga es: $vt = 50(4) = 200$ km.

La suma de las distancias es 360 + 200 = 560 km. que es la distancia que se encuentran separados.

EJERCICIO 2) Dos aviones dejan el mismo aeropuerto al mismo tiempo volando en direcciones opuestas. Si los aviones van a velocidades de 450 y 550 km. por hora respectivamente, ¿al cabo de cuántas horas la distancia entre ambos será de 2500 km.?

SOLUCIÓN: Supongamos que el tiempo en que se encuentran los aviones a 2500 km. de distancia es $t$ horas.

La velocidad del 1er. avión es 450, recorrerá una distancia de $vt = 450t$ km.

La velocidad del 2o. avión es 550, al mismo tiempo que el 1o. recorrerá una distancia de $vt = 550t$ km.

La suma de las distancias recorridas debe de ser igual a 2500 km. es decir: $450t + 550t = 2500$

Resolvemos la ecuación:

$$1000t = 2500$$
$$t = \frac{2500}{1000}$$
$$t = 2.5$$

Los aviones estarán a una distancia de 2500 km en 2.5 hrs.

COMPROBACIÓN: - La distancia recorrida por el 1er. avión es:
$vt = 450(2.5) = 1125$ km.
- La distancia recorrida por el 2o. avión es:
$vt = 550(2.5) = 1375$ km.

La suma de ambas distancias es $1125 + 1375 = 2500$ km. que es la distancia que se encuentran separados.

EJEMPLO 3) Jorge conduce su motocicleta a una velocidad de 60 Km. por hora, quiere alcanzar a Omar que también conduce una motocicleta a la velocidad de 45 km. por hora y le lleva una ventaja de 2 horas. ¿Cuánto tardará Jorge en alcanzar a Omar?

SOLUCIÓN: Llamemos t el tiempo en que Jorge alcanza a Omar.

Distancia recorrida por Jorge: $vt = 60t$

Distancia recorrida por Omar: $vt = 45(t + 2)$ ya que lleva una ventaja de 2 horas.

Jorge alcanzará a Omar cuando hayan recorrido la misma distancia, es decir: $60t = 45(t + 2)$

Resolvemos la ecuación:

$$60t = 45t + 90$$
$$60t - 45t = 90$$
$$15t = 90$$
$$t = \frac{90}{15}$$
$$t = 6$$

El tiempo que se requiere para que Jorge alcanzé a Omar es 6 horas.

COMPROBACIÓN: - Distancia recorrida por Jorge en 6 horas:

$60(6) = 3600$ km.

- Distancia recorrida por Omar en $6 + 2 = 8$ horas es:

$45(8) = 3600$ km.

Como ambos recorren la misma distancia, Jorge alcanza a Omar.

EJEMPLO 4) Paula condujo su automóvil 45 minutos a cierta velocidad. Luego la aumentó en 16 km. por hora durante el resto del viaje. Si la distancia total recorrida fué de 114 km. y le llevó 2 horas 15 minutos, ¿qué distancia manejó a la velicidad mayor?

S. .JCIÓN: Supongamos que $x$ es la velocidad en los primeros 45 minutos.

$x + 16$ será la velocidad en los minutos restantes que son 90, ya que 2 hrs 15 min. son 135 minutos y $135 - 45 = 90$.

La distancia recorrida en los primeros 45 min. que son $\frac{3}{4}$ de hora, es: $\frac{3}{4}x$.

La distancia recorrida en los 90 min. restantes que son $\frac{3}{2}$ horas es: $\frac{3}{2}(x + 16)$

La suma de las distancias debe de ser 114 km. es decir:

$$\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}(x + 16) = 114$$

Resolvemos la ecuación: $(4)\left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}(x + 16)\right) = (4)(114)$

$$\frac{(4)(3)}{4}x + \frac{(4)(3)}{2}(x + 16) = 456$$

$$3x + 6(x + 16) = 456$$
$$3x + 6x + 96 = 456$$
$$9x = 456 - 96$$
$$x = \frac{360}{9}$$
$$x = 40$$

Paula conducía a una velocidad de 40km. por hora en los primeros 45 min. En los 90 min. restantes conducía a una velocidad de 40 + 16 = 56 km/h. La velocidad mayor es 56 km. por hora y la distancia que recorrió en los 90 min. fue de $56(\frac{3}{2}) = 84$ kilómetros.

COMPROBACIÓN: - En los primeros 45 min que son $\frac{3}{4}$ de hora su velocidad era de 40 km/h, recorrió la distancia: $\frac{3}{4}(40) = 30$ km.

- En los restantes 90 min. que son $\frac{3}{2}$ hrs. su velocidad era de 56 km/h, recorrió la distancia: $\frac{3}{2}(56) = 84$ km.

La suma de los recorridos nos dá 30 + 84 = 114 km. que es la distancia total recorrida por Paula.

**EJERCICIO 4.4.4**

Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

1. Dos automoviles están separados 456 km. y están caminando uno hacia el otro con velocidades de 42 km. por hora y 34 km. por hora respectivamente. ¿En cuantar horas se encontrarán?
2. Dos camiones que están a una distancia de 464 km. entre sí y cuyas velocidades difieren en 8 km/h, se dirigen uno hacia el otro. Se encontrarán dentro de 4 horas. ¿Cuál es la velocidad de cada camión?
3. En una estación ferroviaria se encuentran dos trenes de pasajeros que están en vías paralelas, parten al mismo tiempo en direcciones opuestas. Uno de ellos hace un promedio de 6 km. por hora más que el otro. Determinar las velocidades de ambos si al cabo de 5 horas 30 min. se encuentran a 528 km. de distancia.

4. Dos motociclistas parten del mismo lugar al mismo tiempo en direcciones opuestas y se separán 51 km. en 45 minutos. Uno de ellos va a una velocidad de 12 km. por hora más aprisa que el otro. Hallar la velocidad de cada motociclista.
5. Dos automóviles parten del mismo lugar y van a velocidades uniformes sobre el mismo camino. El primero marcha a 50 km/h y al cabo de tres horas se le ponchó una llanta que lo retrasó media hora. Después continuó su marcha con la misma velocidad de 50 km/h. El segundo partió dos horas más tarde que el primero y lo alcanzó al cabo de 5 horas. ¿A que velocidad hiba el segundo automóvil?
6. Un hombre cabalgó de ida a una velocidad de 28 km. por hora y regresa a pie a una velocidad de 4 km/h. El viaje redondo le llevó dos horas. ¿Que distancia recorrió?
7. María tenía una cita para una comida a 96 km. de distancia. Manejó a una velocidad media de 28 km. por hora en la ciudad y a 60 km. por hora en la carretera. Si el viaje duró dos horas, ¿qué distancia manejó en la ciudad?
8. El oficial de un portaviones no alcanzó a abordar su nave. Cruzó en avión el muelle, 17 minutos después de que el barco lo había abandonado. El portaviones viaja a un promedio de 36km. por hora, mientras que el avión viaja a 240 km. por hora. Si transcurrierón 5 minutos para que el avión alcanzara y aterrizara en el portaaviones. ¿A que distancia se hallaba el barco del muelle cuando el oficial salió del avión?

**PROBLEMAS DE EDADES**

EJEMPLO 1) El Sr.Ramírez tiene ahora 24 años más que su hijo. dentro de 13 años el Sr. Ramírez tendrá el doble de la edad que tendrá entonces su hijo. Hallar sus edades actuales.

SOLUCIÓN: *Edades actuales*:

Supongamos que actualmente el hijo del Sr. Ramírez tiene $x$ años.

La edad actual del Sr. Ramírez será $x + 24$.

*Edades dentro de 13 años*:

$x + 13$ será la edad del hijo del Sr. Ramírez.

$x + 24 + 13 = x + 37$ será la edad del Sr. Ramírez.

Dentro de 13 años la edad del Sr Ramírez será el doble que la de su hijo, este enunciado se plantea como: $x + 37 = 2(x + 13)$

Resolvemos la ecuación:

$$x + 37 = 2x + 2(13)$$
$$x - 2x = 26 - 37$$
$$-x = -11$$
$$x = 11$$

La edad del hijo del Sr. Ramírez es 11 años.

La edad del Sr. Ramírez es $11 + 24 = 35$ años.

EJEMPLO 2) Hace cinco años la edad de Omar era $\frac{1}{16}$ de la correspondiente edad de su madre. Dentro de 11 años la edad de Omar será $\frac{3}{8}$ de la edad que entonces tenga su mamá. ¿Cuál es la edad actual de Omar?

SOLUCIÓN: *Edades hace 5 años.*

Supongamos que la edad de la mamá de Omar era de $y$ años.

Entonces $\frac{y}{16}$ era la edad de Omar.

*Edades actuales*:

$y + 5$ es la edad actual de la mamá de Omar.

$\frac{y}{16} + 5$ es la edad actual de Omar.

*Edades dentro de 11 años*:

$y + 5 + 11 = y + 16$ será la edad de la mamá de Omar.

$\frac{y}{16} + 5 + 11 = \frac{y}{16} + 16$ será la edad de Omar.

Dentro de 11 años la edad de Omar será $\frac{3}{8}$ de la edad que entonces tenga su mamá, esto se representa por: $\frac{y}{16} + 16 = \frac{3}{8}(y + 16)$

Resolvemos la ecuación:

$$16\left(\frac{y}{16} + 16\right) = 16\left(\frac{3}{8}(y + 16)\right)$$

$$\frac{16(y)}{16} + 16(16) = \frac{16(3)}{8}(y + 16)$$

$$y + 256 = 6(y + 16)$$
$$y + 256 = 6y + 96$$
$$y - 6y = 96 - 256$$
$$-5y = -160$$
$$y = \frac{-160}{-5}$$
$$y = 32$$

La edad actual de Omar es $\frac{y}{16} + 5 = \frac{32}{16} + 5 = 2 + 5 = 7$ años.

**EJERCICIO 4.4.5**

Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

1. Israel tiene actualmente el triple de la edad que David. Dentro de 12 años Israel tendrá el doble de la edad que tendrá David. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?
2. Eduardo tiene el doble de la edad de Paty . Hace 6 años Eduardo tenía el cuádruple de la edad que tenía entonces Juanita. ¿Cuántos años tiene cada uno?
3. La edad actual de la maestra de Andrés es el triple de la edad de Andrés. Hace dos años ella tenía el quíntuplo de la edad que correspondía a Andrés. ¿Cuáles son sus edades actuales?
4. La edad actual de Norma es $\frac{1}{2}$ de la edad de Elsa. Dentro de siete años Norma tendrá $\frac{2}{3}$ de la edad de Elsa. ¿Cuál es la edad de Elsa?
5. Dentro de 8 años un niño tendrá el triple de la edad que tenía hace 4 años. Hallar su edad actual.

6. Panchito tiene 8 años más que Dorita. Hace dos años la edad de Panchito era el doble que la que tenía Dorita hace 4 años. Hallar las edades actuales de cada uno.
7. Hace dos años la edad de Bertha era $\frac{1}{5}$ de la edad de su padre y dentro de 4 años será $\frac{1}{3}$ de la de su papá. ¿Cuál es la edad actual del padre?
8. Fernando es seis años menor que Vicente. Dentro de cinco años Fernando tendrá $\frac{4}{5}$ de la edad de Vicente. ¿Cuáles son sus edades actuales?

**PROBLEMAS DE GEOMETRIA**

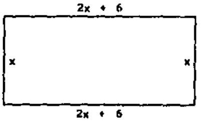
Antes de ver ejemplos debes de recordar algunos conceptos de las figuras geométricas.

PERÍMETRO DE UN:
**Cuadrado**: Es 4 veces la longitud de su lado.
**Rectángulo**: Es el doble del largo más el doble del ancho.
ÁREA DE UN:
**Cuadrado**: Es el cuadrado de la longitud de su lado.
**Rectángulo**: Es el producto del largo por el ancho.
**Triángulo**: Es la mitad de la base por la altura.

La **suma de los ángulos interiores de todo triángulo** es igual a $180^\circ$.
Dos ángulos son **complementarios** si su suma es $90^\circ$.
Dos ángulos son **suplementarios** si su suma es $180^\circ$.

En este tipo de problemas es de gran ayuda hacer un dibujo para visualizar mejor lo que se pide.

EJEMPLO 1) Un terreno rectangular tiene de largo 6 mts. más que el doble de su ancho, y su perímetro es de 78 mts. Obtener las dimenciones del terreno.




SOLUCIÓN: Llamemos $x$ al ancho del terreno.

El largo será $2x + 6$.

El perímetro de un rectángulo es:

2 veces el largo + 2 veces el ancho.

es decir $2(2x + 6) + 2x$ = Perímetro.

Pero nos dicen que el perímetro del terreno es de 78 mts., de ésto surge nuestra ecuación: $2(2x + 6) + 2x = 78$

Resolvemos la ecuación:

$$4x + 12 + 2x = 78$$
$$6x = 78 - 12$$
$$x = \frac{66}{6}$$
$$x = 11$$

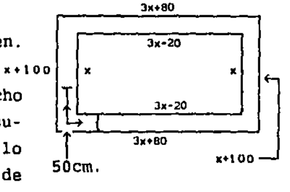
Entonces el ancho del terreno es de 11 mts.

Y su largo es $2(11) + 6 = 28$ mts.

EJEMPLO 2) Un pintor desea hacer un mural rectangular sobre una pared, dejandole un margen de 50 cm. de ancho a cada lado y el área del margen es de 9 $m^2$. El largo de la pintura debe de ser 20 cm. menor que el triple de su ancho.

Encontrar las dimensiones de la pintura sin el margen.

SOLUCIÓN: Ver la figura.




Sea $x$ el ancho de la pintura sin margen.

Entonces $3x - 20$ sera su largo.

Si el ancho de la pintura es $x$ el ancho de la pared será $x + 2(50)$ ya que le sumamos el margen de arriba y de abajo, lo mismo hacemos para calcular el largo de la pared que será $3x - 20 + 2(50) = 3x + 80$.

Recuerda que el área es largo por ancho.

Área de la pintura = $x(3x - 20)$

Área de la pared = $(x + 100)(3x + 80)$

El área del margen es 9 $m^2$. = 90000 $cm^2$.

El área del margen será igual a el área de la pared menos el área que ocupará la pintura, en símbolos tenemos:

$$(x + 100)(3x + 80) - x(3x - 20) = 90000$$

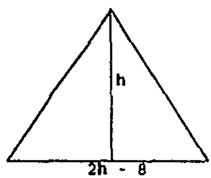
Resolvemos la ecuación:

$$3x^2 + 380x + 8000 - 3x^2 + 20x = 90000$$
$$400x + 8000 = 90000$$
$$400x = 90000 - 8000$$
$$x = \frac{82000}{400}$$
$$x = 205$$

El ancho de la pintura es 205 cm de ancho.

De largo será 3(205) - 20 = 595.

EJEMPLO 3) La base de un triángulo es 8 cm. menor que el doble de su altura. La suma de la base y la altura es 28 cm. Encuentra el área del triángulo.




SOLUCIÓN: Llamemos h a la altura del triángulo.

Su base medirá $2h - 8$.

La suma de la base y la altura es igual a 28, en lenguaje algebraico: $(2h - 8) + h = 28$

Resolvemos la ecuación:

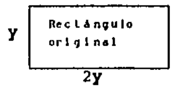
$$3h - 8 = 28$$
$$3h = 28 + 8$$
$$h = \frac{36}{3}$$
$$h = 12$$

La altura del triángulo es 12 cm. y su base será 2(12) - 8 = 16 cm.

El área del triángulo es base por altura entre dos: $\frac{(16)(12)}{2} = 92\ cm^2$.

EJEMPLO 4) El largo de un rectángulo es el doble de su ancho. si el largo se aumenta en 8 cm. y el ancho en 5 cm., el nuevo rectángulo formado tiene un perímetro de 110 cm. Encontrar las dimensiones del rectángulo original.

SOLUCIÓN: Ver figura.

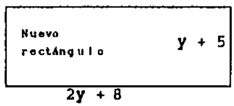



Sea $y$ el ancho del rectángulo original.

Su largo será $2y$.

Si el largo se aumenta en 8, el largo del nuevo rectángulo medirá $2y + 8$.

Y su ancho se aumenta en 5, el ancho del nuevo rectángulo medirá $y + 5$.




El perímetro del nuevo rectángulo es $2(2y + 8) + 2(y + 5)$.

Pero nos dicen que el perímetro del nuevo rectángulo es 110 cm., entonces tenemos: $2(2y + 8) + 2(y + 5) = 110$

Resolvemos la ecuación:

$$4y + 16 + 2y + 10 = 110$$
$$6y + 26 = 110$$
$$6y = 110 - 26$$
$$y = \frac{84}{6}$$
$$y = 14$$

El ancho del rectángulo original es 14 cm. y su largo $2(14) = 28$ cm.

**EJERCICIO 4.4.6**

Encuentra las soluciones de cada uno de los siguientes problemas.

1. Una cancha rectángular es 3 m. mayor que el doble de su ancho. Si el perímetro de la cancha es de 72 m, encontrar las dimensiones de la cancha.
2. La longitud de un salón de fiestas es 5 m. más que el triple de su ancho. Si el perímetro es 122 m, hallar las dimensiones del salón.

3. El largo de un mural en forma rectangular mide 7 m. menos que el doble de su ancho, y el perímetro es de 58 m. Encuentra el área del mural.
4. Un prado tiene la forma de un rectángulo cuyo largo es 10 m. más que el triple de su ancho. El prado está encerrado por 220 m. de cerca. Encontrar la superficie del prado.
5. El largo de un jardín rectangular es 4 m. menor que cinco veces el ancho, el jardín está rodeado por una barda que mide de largo dos metros más que seis veces su ancho. Hallar la superficie que ocupa el jardín.
6. Si dos lados opuestos de un cuadrado se incrementan en 3 cm. cada uno y los otros dos disminuyen 2 cm. cada uno, el área aumenta 8 $cm^2$. Encuentra la longitud del lado del cuadrado.
7. Si dos lados opuestos de un cuadrado aumentan 10 cm. cada uno y los otros dos disminuyen 8 cm. cada uno, el área decrece 20 $cm^2$. Hallar la longitud del lado del cuadrado.
8. Una sala tiene doble largo que ancho. Si el largo se disminuye en 6 m. y el ancho se aumenta en 4 m., la superficie de la sala no varía. Hallar las dimensiones de la sala.
9. El largo de una pintura sin marco mide el doble de su ancho. Si el marco tiene 2 cm. de ancho y su área es de 208 $cm^2$, encuentra las dimensiones de la pintura sin marco.
10. El largo de un espejo sin marco es 7 cm. menor que el triple de su ancho. Si el marco del espejo tiene 2 cm. de ancho y su área es de 132 $cm^2$, ¿Cuáles son las dimensiones del espejo sin marco?
11. El dueño de un edificio desea hechar impermeabilizante a toda la azotea del edificio, y le cobran N$6.50 por el metro cuadrado. El edificio ocupa un terreno rectangular de 15 m. menos que el doble de su ancho. El alero de la azotea es de 1m de ancho en todos los lados del edificio y su área es de 124 $m^2$. Determinar cuanto va ha pagar el dueño del edificio por impermeabilizar el techo del edificio.

12. La suma de la base y la altura de un triángulo es 29 cm. Encontrar el área del triángulo si su altura mide 5 cm más que el triple de su base.
13. La suma de la base y la altura de un triángulo es 43 cm. Obtener el área del triángulo si el triple de su base supera en 10 al cuádruplo de su altura.
14. Un lado de un triángulo supera en 1 cm al doble del segundo lado. El tercer lado mide 8 cm, y el perímetro es de 24 cm. Encuentra la longitud de cada uno de sus lados.
15. El perímetro de un triángulo es de 28 cm. Un lado del triángulo tiene 5 cm más que el pequeño y el lado mayor es 2 cm menos que el triple del lado más pequeño. Encontrar cuánto mide cada lado del triángulo.
16. Encontrar cuanto mide cada uno de los ángulos interiores de un triángulo si el segundo ángulo mide $10^\circ$ más que el primero, y el tercer ángulo mide $10^\circ$ menos que el doble del segundo.
17. Encuentra la medida de dos ángulos complementarios si uno de ellos mide $12^\circ$ más que el doble del otro.
18. Encontrar cuanto mide cada uno de los ángulos interiores de un triángulo si el ángulo mayor es 6 veces más grande que el ángulo más pequeño y $80^\circ$mayor que el tercer ángulo.
19. Encuentra la medida de dos ángulos suplementarios si uno de ellos es $4^\circ$ menor que el triple del otro.
20. Encuentra cuánto miden dos ángulos suplementarios si uno de ellos es $\frac{4}{5}$ de la medida del otro.

TEMA V

# F R A C C I O N E S   A L G E B R A I C A S

5.1 Simplificación de fracciones algebraicas.

5.2 Adición y Resta de fracciones algebraicas.

5.3 Multiplicación de fracciones algebraicas.

5.4 División de fracciones algebraicas.

5.5 Ecuaciones con fracciones algebraicas.

5.6 Planteamiento de problemas.

En la aritmética estudiada en el tema I vimos los números Racionales(Q), que son las fracciones donde tanto el numerador como el denominador son enteros.

Ejemplos: $\frac{3}{4} = 3 \div 4$, $-\frac{5}{7} = -5 \div 7$, $\frac{8}{5} = 8 \div 5$, $\frac{4}{2} = 4 \div 2$,etc., es claro que la operación involucrada es la división, pero no son las únicas fracciones que existen hay otras que son por ejemplo:

$$\frac{5}{x}, \; -\frac{6x}{5y}, \; \frac{4}{7x^2}, \; \frac{3x}{-2y^2}, \; \frac{2x^2}{x+1}, \; \frac{6}{(1+y)^3} \text{ etc...}$$

A este tipo de fracciones se les llama **fracciones algebraicas**. Observa que son de dos tipos, aquellas cuyo numerador es un número específico y su denominador un número literal y aquellas donde el numerador y el denominador son números literales.

En las fracciones algebraicas hay que tener mucho cuidado ya que a las literales del denominador no se les debe asignar valores específicos de tal forma que el denominador se haga cero, ya que la división entre cero no está definida.

## 5.1 SIMPLIFICACION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Una fracción se dice que esta **simplificada** o reducida a sus términos mínimos cuando el numerador y el denominador no poseen factor común.

Para la simplificación de fracciones algebraicas es necesario recordar que $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ y son llamadas fracciones equivalentes.

Observa que en la fracción $\frac{ka}{kb}$, **k** y **a** son **factores** ya que se están multiplicado entre si, también **k** y **b** son **factores** por la misma razón.

Para simplificar una fracción algebraica hay que seguir los siguientes paso:

1) Se factoriza completamente el numerador y el denominador.
2) Se encuentra el Máximo Factor Común (MFC) del numerador y denominador.
3) Se agrupan y se dividen los MFC del numerador y denominador.

EJEMPLO 1) Simplificar $\dfrac{60a^3b^2c^5}{48a^4bc^3}$ a sus términos mínimos.

SOLUCIÓN: Hay que encontrar el MFC del numerador y del denominador.

MFC de $60a^3b^2c^5$ y de $48a^4bc^3$ es $12a^3bc^3$.

Agrupamos y dividimos al MFC del numerador y del denominador y tenemos:

$$\frac{60a^3b^2c^5}{48a^4bc^3} = \frac{12a^3bc^3(5bc^2)}{12a^3bc^3(4a)} = \frac{12a^3bc^3}{12a^3bc^3} \cdot \frac{5bc^2}{4a} = 1\left(\frac{5bc^2}{4a}\right) = \frac{5bc^2}{4a}$$

EJEMPLO 2) Simplificar $\dfrac{36a^4b^2(1-c)^2}{54a^3b(1-c)^5}$ a su mínima expresión.

SOLUCIÓN: El MFC de $36a^4b^2(1-c)^2$ y de $54a^3b(1-c)^5$ es $18a^3b(1-c)^2$.
Agrupando y dividiendo al numerador y al denominador tenemos:

$$\frac{36a^4b^2(1-c)^2}{54a^3b(1-c)^5} = \frac{18a^3b(1-c)^2(2ab)}{18a^3b(1-c)^2[3(1-c)^3]} = \frac{18a^3b(1-c)^2}{18a^3b(1-c)^2} \cdot \frac{2ab}{3(1-c)^3}$$

$$= 1\left(\frac{2ab}{3(1-c)^3}\right) = \frac{2ab}{3(1-c)^3}$$

EJEMPLO 3) Simplificar la expresión $\dfrac{24a^3b^2 - 18ab^3}{12a^2b^2}$.

SOLUCIÓN: El MFC de $24a^3b^2 - 18ab^3$ es $6ab^2$, entonces:

$$24a^3b^2 - 18ab^3 = 6ab^2(4a^2 - 3b)$$

El MFC de $6ab^2(2a^2 - 3b)$ y de $12a^2b^2$ es $6ab^2$.

Agrupando y dividiendo el MFC del numerador y el denominador tenemos:

$$\frac{24a^3b^2 - 18ab^3}{12a^2b^2} = \frac{6ab^2(4a^2 - 3b)}{6ab^2(2a)} = \frac{6ab^2}{6ab^2} \cdot \frac{4a - 3b}{2a} =$$

$$= 1\left(\frac{4a - 3b}{2a}\right) = \frac{4a - 3b}{2a}$$

**NOTA:**

| |
|---|
| La fracción $\frac{a + c}{b + c}$ no se puede reducir más. Además no cometas el error de afirmar que $\frac{a + c}{b + c} = \frac{a}{b}$ es FALSO. También recuerda que $\frac{ax + b}{cx} \neq \frac{a + b}{c}$ pero $\frac{ax + b}{cx} = \frac{ax}{cx} + \frac{b}{cx} = \frac{a}{c} + \frac{b}{cx}$ |

EJEMPLO 4) Simplificar $\frac{14x^2 + 19x - 3}{21x^2 - 31x + 4}$.

SOLUCIÓN: Se factorizan completamente el numerador y el denominador, dar un repaso al TEMA III.

$$14x^2 + 19x - 3 = (14x + 21)\left(x - \frac{1}{7}\right) = 7(2x + 3)\left(x - \frac{1}{7}\right)$$

$$21x^2 - 31x + 4 = (21x - 28)\left(x - \frac{1}{7}\right) = 7(3x - 4)\left(x - \frac{1}{7}\right)$$

Agrupamos y dividimos el MFC del numerador y el denominador y tenemos:

$$\frac{14x^2 + 19x - 3}{21x^2 - 31x + 4} = \frac{7(2x + 3)\left(x - \frac{1}{7}\right)}{7(3x - 4)\left(x - \frac{1}{7}\right)} = \frac{7\left(x - \frac{1}{7}\right)}{7\left(x - \frac{1}{7}\right)} \cdot \frac{2x + 3}{3x - 4} =$$

$$= 1\left(\frac{2x + 3}{3x - 4}\right) = \frac{2x + 3}{3x - 4}$$

**NOTA:** Recuerda lo siguiente:

$$a - b = -b + a = -(b - a)$$
$$(a - b)^2 = [-(b - a)]^2 = (b - a)^2$$
$$(a - b)^3 = [-(b - a)]^3 = -(b - a)^3$$

EJEMPLO 5) Simplificar $\dfrac{12(x - 1)^3}{18(1 - x)^2}$.

SOLUCIÓN: Sabemos que se cumple lo siguiente:

$$12(x - 1)^3 = 2(6)(x - 1)^2(x - 1)$$
$$18(1 - x)^2 = 3(6)[-(x - 1)]^2 = 3(6)(x - 1)^2$$

Se agrupa y se dividen los MFC del numerador y el denominador y tenemos:

$$\frac{12(x - 1)^3}{18(1 - x)^2} = \frac{2(6)(x - 1)^2(x - 1)}{3(6)(x - 1)^2} = \frac{6(x - 1)^2}{6(x - 1)^2} \cdot \frac{2(x - 1)}{3} = \frac{2(x - 1)}{3}$$

**EJERCICIO 5.1**

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas a sus términos mínimos.

1) $\dfrac{8x^3}{12x}$ 2) $\dfrac{9y^2}{15y^5}$ 3) $\dfrac{24x^3y^4}{16x^2y^5}$

4) $\dfrac{14a^2b^3}{21a^5bc^2}$ 5) $\dfrac{-64x^4y^5z}{24x^5y^5z^2}$ 6) $\dfrac{24x^3y^4}{-16x^2y^5}$

7) $\left(\dfrac{-9a^3b}{18a^2b^2}\right)^3$ 8) $\dfrac{(-10x^3y^5)^2}{(15x^4y^2)^3}$ 9) $\dfrac{9a^2(x - 2)^4}{6a^5(x - 2)^2}$

10) $\dfrac{25a^3b^2(x - y)^3}{10a^4b(x - y)^5}$ 11) $\dfrac{x - 2}{2 - x}$ 12) $\dfrac{(x - 1)^3}{(1 - x)^2}$

13) $\dfrac{(2 + a)(1 - a)}{(a - 1)^2}$ 14) $\dfrac{ab - a}{a}$ 15) $\dfrac{3x}{6x^2 - 9x}$

16) $\dfrac{30x^2y^3 - 18xy^2}{12x^2y^2}$ 17) $\dfrac{24a^3b^2}{36a^2b^3 + 48a^4b^2}$ 18) $\dfrac{x^2 - 9}{2x + 6}$

19) $\dfrac{x^3 - x^2y}{x^2 - y^2}$ 20) $\dfrac{a^2 - b^2}{(a - b)^2}$ 21) $\dfrac{a^2 - 10a + 24}{a^2 - 3a - 4}$

22) $\dfrac{12x^2 + 25x + 12}{16x^2 + 24x + 9}$ 23) $\dfrac{3a^4 + 14a^2 - 24}{-12 + 4a^2 + a^4}$ 24) $\dfrac{3y^4 - 11y^2 - 4}{6y^4 - y^2 - 1}$

## 5.2 ADICION Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

La adición de fracciones algebraicas sigue los mismos procedimientos que la adición de fracciones aritméticas.

Recuerda que para sumar fracciones aritméticas primero lo hicimos con aquellas que tenían un común denominador y después con diferente denominador, de la misma manera lo haremos con las fracciones algebraicas y las variaciones que se deban hacer.

Resolveremos una serie de ejercicios para mostrar la adición de fracciones.

**FRACCIONES ALGEBRAICAS CON DENOMINADOR COMUN.**

EJEMPLO 1) Realizar la siguiente suma $\dfrac{5}{a} + \dfrac{3}{a}$.

SOLUCIÓN: Cuándo sumamos fracciones con el mismo denominador, efectuabamos la suma de los numeradores y ésta era dividida por el común denominador; haciendo lo mismo tenemos:

$$\frac{5}{a} + \frac{3}{a} = \frac{5 + 3}{a} = \frac{8}{a}$$

EJEMPLO 2) Efectuar la siguiente suma $\frac{2x + 9}{x - 2} + \frac{8 - 5x}{x - 2} - \frac{4x + 3}{x - 2}$.

SOLUCIÓN: Como es el mismo denominador para las tres fracciones, sumamos los numeradores reduciendolo y la suma será dividida por el común denominador que es $x - 2$.

$$\frac{2x + 9}{x - 2} + \frac{8 - 5x}{x - 2} - \frac{4x + 3}{x - 2} = \frac{(2x + 9) + (8 - 5x) - (4x + 3)}{x - 2} =$$

$$= \frac{2x + 9 + 8 - 5x - 4x - 3}{x - 2} =$$

$$= \frac{-7x + 14}{x - 2} = \frac{-7(x - 2)}{x - 2} = -7$$

EJEMPLO 3) Realizar la siguiente suma y simplificar.

$$\frac{4a^2 + a}{2a^2 - 5a - 12} - \frac{2a^2 + 15a}{2a^2 - 5a - 12} + \frac{5a^2 - 14a}{2a^2 - 5a - 12}$$

SOLUCIÓN: Sumamos los numeradores y la suma será dividida por el común denominador que es $2a^2-5a-12$.

$$\frac{4a^2 + a}{2a^2 - 5a - 12} - \frac{2a^2 + 15a}{2a^2 - 5a - 12} + \frac{5a^2 - 14a}{2a^2 - 5a - 12} =$$

$$= \frac{(4a^2 + a) - (2a^2 + 15a) + (5a^2 - 14a)}{2a^2 - 5a - 12} =$$

$$= \frac{4a^2 + a - 2a^2 - 15a + 5a^2 - 14a}{2a^2 - 5a - 12} = \frac{7a^2 - 28a}{2a^2 - 5a - 12} =$$

$$= \frac{7a(a-4)}{(2a+3)(a-4)} = \frac{7a}{2a+3}$$

EJERCICIO 5.2.1

Realizar las siguientes sumas con fracciones algebraicas y simplificar tu resultado.

1) $\frac{3}{x} + \frac{7}{x}$

2) $\frac{8}{x^2} - \frac{3}{x^2}$

3) $\frac{4}{2a} + \frac{3}{2a} - \frac{5}{2a}$

4) $\frac{3a^2}{a+1} - \frac{5a^2-3}{a+1} + \frac{4-7a^2}{a+1}$

5) $\frac{3x-5}{2x-1} - \frac{7x-7}{2x-1}$

6) $\frac{9a+8}{a+3} - \frac{2a-4}{a+3} - \frac{3+4a}{a+3}$

7) $\frac{x^2-1}{4x^2-1} - \frac{x^2-x}{4x^2-1} - \frac{x^2-2x}{4x^2-1}$

8) $\frac{2y^2+y}{y^2-9} - \frac{y^2-2y}{y^2-9}$

9) $\frac{2x^2-3}{x^2+2x-15} - \frac{2x^2-5x}{x^2+2x-15}$

10) $\frac{2x^2-3x}{2x^2-11x+12} - \frac{x^2+3x}{2x^2-11x+12}$

11) $\frac{3y^2-2}{3y^2+10y-8} - \frac{y^2-6y}{3y^2+10y-8} - \frac{y+10}{3y^2+10y-8}$

12) $\frac{y^2+4y}{4y^4-13y^2+3} + \frac{y^2-2y}{4y^4-13y^2+3} - \frac{3y}{4y^4-13y^2+3}$

**FRACCIONES ALGEBRAICAS CON DISTINTO DENOMINADOR.**

Para sumar fracciones ariméticas con distinto denominador, primero encontrabamos el mínimo común denominador que es el MCM de los denominadores.

De la misma forma lo haremos con las fracciones algebraicas, primero encontraremos el MCM de los denominadores y después se continúa con el procedimiento de la suma.

MINIMO COMUN MULTIPLO DE POLINOMIOS

Para encontrar el MCM de un conjunto de polinomios hay que hacer lo siguiente:

1) Factorizarlos completamente y representar todos sus factores distintos con sus exponentes respectivos.
   El producto de todas las bases cada una con su mayor exponente será el MCM.

EJEMPLO: Encontrar el MCM de $x^3y$, $x^2y^3$, $x^5y^2$.

SOLUCIÓN: Los factores que tenemos son **x** y **y**.
En los tres monomios la potencia mayor de **x** es $x^5$.
Y la potencia mayor de **y** es $y^3$.
Entonces el MCM es $x^5y^3$.

EJEMPLO: Encontrar el MCM de $60x(x - 2)$, $24(x - 3)(x - 2)$, $72(x - 2)^2$.

SOLUCIÓN: Primero encontramos el MCM de 60, 24 y 72.

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$24 = 2^3 \cdot 3$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

El MCM es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

Los factores literales distintos son $x$, $(x - 2)$ y $(x - 3)$.

El producto de sus potencias mayores será el MCM, es: $x(x - 2)^2(x - 3)$

Asi el MCM de los monomios es: $360x(x - 2)^2(x - 3)$.

EJEMPLO: Encontrar el MCM de $2y^2 - 7y + 3$ y $2y^2 + 3y - 2$.

SOLUCIÓN: Primero factorizamos completamente cada polinomio.

$2y^2 - 7y + 3 = (2y - 1)(y - 3)$

$2y^2 + 3y - 2 = (2y - 1)(y + 2)$

Entonces los factores literales son $(2y - 1)$, $(y + 2)$ y $(y - 3)$.

El MCM será el producto de sus máximas potencias: $(2y-1)(y+2)(y-3)$

EJEMPLO: Encontrar el MCM de $2x^2 - 3x - 2$, $4 - x^2$ y $x^2 + 4x + 4$.

SOLUCIÓN: Factorizamos completamente cada uno de los polinomios.

$2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$

$4 - x^2 = (2 - x)(2 + x) = -(x - 2)(x + 2)$

Ya que: $2 - x = -(x - 2)$ y $2 + x = x + 2$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

Los factores literales son: $(2x + 1)$, $(x - 2)$ y $(x + 2)$.

El MCM de los tres polinomios es: $(2x + 1)(x - 2)(x + 2)^2$.

A continuación realiza estos 10 ejercicios para que tengas mayor facilidad para efectuar la suma de fracciones algebraicas con distinto denominador.

**EJERCICIO 5.2.2**

Encuentra el MCM de cada conjunto de polinomios.

1) $x^3yz^2$, $xy^2$, $y^2z$

2) $4x^2y$, $12x^3y^2$, $18yz^2$

3) $6y(y - 2)$, $9(y - 2)$, $y^2(y - 2)$

4) $x(x + 1)^2$, $x^2(x + 1)$, $x(1 - x)$

5) $(2x - 1)(3x - 2)$, $(1 - 2x)(x + 2)$, $(2 + x)(2 - 3x)$

6) $y^2 - 3$, $y + 3$, $(y + 3)^2$

7) $3y^2 - 3y$, $2y^2 - 2y$, $6y - 6y^2$

8) $18x - 27$, $4x^2 - 9$, $12x - 18$

9) $4x^2 - 1$, $x^2 - 6x + 9$, $2x^2 - 5x - 3$

10) $3x^2 + x - 10$, $x^3 - 4x$, $3x^2 - 11x + 10$

Ya que realizaste estos 10 ejercicios estamos listos para continuar con las sumas de fracciones algebraicas con distinto denominador.

Para sumar fracciones algebraicas con diferente denominador hay que seguir los siguientes pasos:

1) Encontrar el MCM de los denominadores.
2) Dividir el MCM entre cada uno de los denominadores de la suma y cada resultado multiplicarlo por su numerador correspondiente, y

esto resultados se relaciona mediante los signos de las fracciónes correspondientes.

3) Se efectúa la suma que estará dividida entre el común denominador.

4) Se reducen términos semejantes y la fracción resultante se simplifica a sus términos mínimos.

EJEMPLO 1) Efectuar la siguiente suma $\frac{3}{2x} + \frac{5}{6x} - \frac{4}{3x^3}$.

SOLUCIÓN:

1o.)Encontramos el MCM de $2x^2$, $6x$ y $3x^3$, es $6x^3$.

2o) Dividimos el MCM = $6x^3$ entre cada uno de los denominador de nuestra suma.

$$\frac{6x^3}{2x} = 3x^2 \qquad \frac{6x^3}{6x} = x^2 \qquad \frac{6x^3}{3x^3} = 2$$

Los resultados se multiplican por su numerador respectivo y la suma estará dividida entre el MCM.

$$\frac{3x^2(3) + x^2(5) - 2(4)}{6x^3}$$

3o y 4o.) Efectuamos la suma y simplificamos el resultado:

$$\frac{3x^2(3) + x^2(5) - 2(4)}{6x^3} = \frac{9x^2 + 5x^2 - 8}{6x^3} = \frac{14x^2 - 8}{6x^3} = \frac{2(7x^2 - 4)}{2(3x^3)}$$

$$= \frac{7x^2 - 4}{6x^3}$$

EJEMPLO 2) Realizar la siguiente suma: $\frac{3x - 2}{6x^2} - \frac{2x + 2}{4x}$

SOLUCIÓN:

1o) El MCM de $6x^2$ y de $4x$ es $12x^2$.

2o) Dividimos el MCM = $12x^2$ entre cada uno de los denominador de nuestra suma. $\frac{12x^2}{6x^2} = 2$ $\qquad \frac{12x^2}{4x} = 3x$

Los resultados se multiplican por su numerador respectivo y la suma estará dividida entre el MCM.

$$\frac{2(3x - 2) - 3x(2x + 2)}{12x^2}$$

3o y 4o.) Efectuamos la suma y simplificamos el resultado:

$$\frac{2(3x - 2) - 3x(2x + 2)}{12x^2} = \frac{6x - 4 - 6x^2 - 6x}{12x^2} = \frac{-6x^2 - 4}{12x^2} =$$

$$= \frac{2(-3x^2 - 2)}{2(6x^2)} = \frac{-3x^2 - 2}{6x^2}$$

EJEMPLO 3) Realizar la siguiente suma $\dfrac{7x - 5}{2x^2 - 3x + 1} + \dfrac{7x + 1}{1 - x - 2x^2}$

SOLUCIÓN: 1o) Factorizamos los denominadores.

$$2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$$

$$1 - x - 2x^2 = (1 - 2x)(1 + x) = -(2x - 1)(x + 1)$$

El MCM de los denominadores es: $(2x - 1)(x - 1)(x + 1)$

2o) Dividimos el MCM entre cada denominador ya factorizado.

$$\frac{(2x - 1)(x - 1)(x + 1)}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{(2x - 1)(x - 1)(x + 1)}{(2x - 1)(x - 1)} = x + 1$$

$$\frac{(2x - 1)(x - 1)(x + 1)}{1 - x - 2x^2} = \frac{(2x - 1)(x - 1)(x + 1)}{-(2x - 1)(x + 1)} = -(x - 1) = 1 - x$$

Cada resultado lo multiplicamos por el numerador que le corresponde y los relacionamos con los signos de las fracciones correspondientes.

$$\frac{7x - 5}{2x^2 - 3x + 1} + \frac{7x + 1}{1 - x - 2x^2} = \frac{(x + 1)(7x - 5) + (1 - x)(7x + 1)}{(2x - 1)(x - 1)(x + 1)} =$$

3o) y 4o) se efectúa la suma y se simplifican resultados.

$$= \frac{7x^2 + 2x - 5 + 1 + 6x - 7x^2}{(2x - 1)(x - 1)(x + 1)} =$$

$$= \frac{8x - 4}{(2x - 1)(x - 1)(x + 1)} =$$

$$= \frac{4(2x - 1)}{(2x - 1)(x - 1)(x + 1)} =$$

$$= \frac{4}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{4}{x^2 - 1}$$

EJEMPLO 4) Realizar la siguiente operación.

$$\frac{3x - 2}{2x^2 - 5x - 3} - \frac{x - 2}{6x^2 + x - 1} - \frac{2x + 2}{3x^2 - 10x + 3}$$

SOLUCIÓN:

1o) Factorizamos cada denominador y encontramos su MCM.

$2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3)$

$6x^2 + x - 1 = (2x + 1)(3x - 1)$

$3x^2 - 10x + 3 = (3x - 1)(x - 3)$

Su MCM o máximo común denominador es $(2x + 1)(3x - 1)(x - 3)$.

2o) Dividimos el MCM entre cada denominador.

$$\frac{(2x + 1)(3x - 1)(x - 3)}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{(2x + 1)(3x - 1)(x - 3)}{(2x + 1)(x - 3)} = 3x - 1$$

$$\frac{(2x + 1)(3x - 1)(x - 3)}{6x^2 + x - 1} = \frac{(2x + 1)(3x - 1)(x - 3)}{(2x + 1)(3x - 1)} = x - 3$$

$$\frac{(2x + 1)(3x - 1)(x - 3)}{3x^2 - 10x + 3} = \frac{(2x + 1)(3x - 1)(x - 3)}{(3x - 1)(x - 3)} = 2x + 1$$

Los resultados los multiplicamos con su respectivo numerador para relacionarlos con su signo de operación indicado.

$$\frac{3x - 2}{2x^2 - 5x - 3} - \frac{x - 2}{6x^2 + x - 1} - \frac{2x + 2}{3x^2 - 10x + 3} =$$

$$\frac{3x - 2}{(2x + 1)(x - 3)} - \frac{x - 2}{(2x + 1)(3x - 1)} - \frac{2x + 2}{(3x - 1)(x - 3)} =$$

$$= \frac{(3x - 1)(3x - 2) - (x - 3)(x - 2) - (2x + 1)(2x + 2)}{(2x + 1)(3x - 1)(x - 3)} =$$

3o) y 4o) Efectuamos las operaciones indicadas y simplificamos.

$$= \frac{9x^2 - 9x + 2 - (x^2 - 5x + 6) - (4x^2 + 6x + 2)}{(2x+1)(3x-1)(x-3)} =$$

$$= \frac{9x^2 - 9x + 2 - x^2 + 5x - 6 - 4x^2 - 6x - 2}{(2x+1)(3x-1)(x-3)} =$$

$$= \frac{4x^2 - 10x - 6}{(2x+1)(3x-1)(x-3)} = \frac{2(2x+1)(x-3)}{(2x+1)(3x-1)(x-3)} = \frac{2}{3x-1}$$

EJERCICIO 5.2.3

Efectuar las sumas indicadas y simplificar los resultados.

1) $\frac{7}{9y} - \frac{1}{12y} + \frac{9}{4y}$

2) $\frac{3x}{14y} - \frac{x}{4y} + \frac{2x}{7y}$

3) $\frac{2a}{5c} + \frac{a}{c} - \frac{3a}{2c}$

4) $\frac{6x - 3y}{15x} - \frac{2y - 2x}{20y}$

5) $\frac{a - 3}{6a} + \frac{a - 4}{9a}$

6) $\frac{2y - 1}{3y} + \frac{3 - y}{7y}$

7) $\frac{3}{2y} + \frac{x - 2}{6x^2}$

8) $\frac{5}{2xy^2} + \frac{4}{3x^2y}$

9) $\frac{9x + 3y}{6xy} - \frac{2x^2y - 4xy^2}{8x^2y^2}$

10) $\frac{a + 2}{3a} + \frac{a^2 - 2}{5a^2} + \frac{2 - a^3}{9a^3}$

11) $\frac{x}{x + 3} + \frac{6x}{x^2 - 9}$

12) $\frac{2}{x^2 - 2x - 8} + \frac{x - 3}{x^2 - x - 12}$

13) $\frac{3y + 6}{y^2 + y - 20} - \frac{y}{y^2 - 6y + 8}$

14) $\frac{7y + 14}{3y^2 + 10y - 8} - \frac{y + 6}{3y^2 + y - 2}$

15) $\frac{2a}{a^2 - 9} + \frac{2}{a + 3} - \frac{1}{a - 3}$

16) $\frac{5x}{x^2 - 3x - 24} - \frac{3}{6 - x} - \frac{2}{x + 4}$

17) $\dfrac{y+1}{y^2+5y+6}+\dfrac{y+17}{y^2-y-12}-\dfrac{6}{y^2-2y-8}$

18) $\dfrac{4x-4}{3x^2-8x+4}-\dfrac{7}{2x^2-x-6}+\dfrac{13}{6x^2+5x-6}$

---

## 5.3 MULTIPLICACION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

En la multiplicación de fracciones aritméticas multiplicabamos de la siguiente forma:

$$\frac{a}{c}\cdot\frac{m}{n}=\frac{a(m)}{c(n)}$$

El producto de los numeradores entre el producto de los denominadores.

De la misma forma vamos a multiplicar a las fracciones algebraicas; el producto de los numeradores entre el producto de los denominadores.

EJEMPLO 1) Realizar la siguiente operación y simplificar, $\dfrac{3ab^2}{2x^2y}\cdot\dfrac{4xy^3}{5a^3b^3}$.

SOLUCIÓN: $\dfrac{3ab^2}{2x^2y}\cdot\dfrac{4xy^3}{5a^3b^3}=\dfrac{12ab^2xy^3}{10a^3b^3x^2y}$

Aplicando las leyes de los exponentes y simplificando tenemos:

$$\frac{12ab^2xy^3}{10a^3b^3x^2y}=\frac{6y^2}{5a^2bx}$$

Cuando los numeradores ó denominadores sean polinomios con más de un término estos primero se factorizan completamente y después se efectúa el producto.

EJEMPLO 2) Efectuar $\dfrac{6x^3 - 30x}{6x^2 + 2x} \cdot \dfrac{3x^2 + x}{4x^2 - 20}$.

SOLUCIÓN: Primero factorizamos cada polinomio y tenemos:

$$\frac{6x^3 - 30x}{6x^2 + 2x} \cdot \frac{3x^2 + x}{4x^2 - 20} = \frac{6x(x^2 - 5)}{2x(3x + 1)} \cdot \frac{x(3x + 1)}{4(x^2 - 5)}$$

Realizamos los productos y simplificamos:

$$\frac{6x(x^2 - 5)}{2x(3x + 1)} \cdot \frac{x(3x + 1)}{4(x^2 - 5)} = \frac{3(x^2 - 5)}{3x + 1} \cdot \frac{x(3x + 1)}{4(x^2 - 5)} =$$

$$= \frac{3x(x^2 - 5)(3x + 1)}{4(x^2 - 5)(3x + 1)} = \frac{3x}{4}$$

EJEMPLO 3) Multiplicar y simplificar $\dfrac{24x^2 - xy - 3y^2}{9x^2 - 21xy - 8y^2} \cdot \dfrac{9x^2 - 36xy + 32y^2}{24x^2 - 41xy + 12y^2}$

SOLUCIÓN: Factorizamos cada trinomio y simplificamos.

$$\frac{24x^2 - xy - 3y^2}{9x^2 - 21xy - 8y^2} \cdot \frac{9x^2 - 36xy + 32y^2}{24x^2 - 41xy + 12y^2} = \frac{(8x - 3y)(3x + y)}{(3x - 8y)(3x + y)} \cdot \frac{(3x - 4y)(3x - 8y)}{(3x - 4y)(8x - 3y)}$$

$$= \frac{8x - 3y}{3x - 8y} \cdot \frac{3x - 8y}{8x - 3y}$$

$$= \frac{(8x - 3y)(3x - 8y)}{(3x - 8y)(8x - 3y)}$$

$$= 1$$

EJERCICIO 5.3

Realizar cada una de las siguientes operaciones y simplificar.

1) $\dfrac{3b^2}{2a^2} \cdot \dfrac{5a^3}{9b^5}$

2) $\dfrac{6x^3y^2}{8a^2b^4} \cdot \dfrac{4ab^2}{3x^2y^4}$

3) $\dfrac{12m^3nx^4}{8x^3y^6} \cdot \dfrac{7xy^5n^2}{3m^4n^2y}$

4) $\dfrac{m^5n^3}{3x^3y} \cdot \dfrac{6x^2y}{5m^2n} \cdot \dfrac{5n^2y^4}{m^4n^2}$

5) $\dfrac{7x}{6m^2} \cdot \dfrac{3m}{10n^2} \cdot \dfrac{5n^4}{14xy}$

6) $\dfrac{2x^2 - 8}{5x} \cdot \dfrac{5y}{x + 2}$

7) $\dfrac{30a^3 - 18a^2}{6a^3 + 5a^2} \cdot \dfrac{42a + 35}{60a - 36}$

8) $\dfrac{2a^2 + 2a}{2a^2} \cdot \dfrac{a^2 - 3a}{a^2 - 2a - 3}$

9) $\dfrac{2x^2 - 6x}{10x^3y^2} \cdot \dfrac{5xy + 15y}{x^2 - 9}$

10) $\dfrac{5x^2 + 5xy}{3x^2 + 2xy - y^2} \cdot \dfrac{3x^2 - 4xy + y^2}{10x^2y^3}$

11) $\dfrac{6x^3 - 24x}{2x^2 + 3x - 2} \cdot \dfrac{2x^2 - x}{3x^2 - 6x}$

12) $\dfrac{3x^2 + 13x + 4}{3x^2 + 2xy - y^2} \cdot \dfrac{3x^2 + 11x + 6}{4x^2 + 13x + 3}$

13) $\dfrac{3x^3 - 3x^2 - 6x}{2x^2 - x - 6} \cdot \dfrac{2x^2 + 7x - 15}{3x^3 + 18x^2 + 15x}$

14) $\dfrac{y^2 - 5y + 6}{3y - 15} \cdot \dfrac{6y}{y^2 - y - 30} \cdot \dfrac{y^2 - 25}{2y - 4}$

15) $\dfrac{x^2 + 4yx + 4y^2}{3yx - 6y^2} \cdot \dfrac{2yx - 4y^2}{yx + y} \cdot \dfrac{6y - 6x}{x^2 + 3yx + 2y^2}$

## 5.4 DIVISION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

En la división de fracciones aritméticas al dividir $\frac{p}{q}$ entre $\frac{r}{s}$ lo haciamos de la siguiente manera:

$$\frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{ps}{qr} \quad \left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\} \text{Producto de extremos entre producto de medios.}$$

ó de la siguiente manera: $\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}$ Observa como la división se transforma en multiplicación.

Nos dice lo siguiente: "Para dividir $\frac{p}{q}$ entre $\frac{r}{s}$ es lo mismo que multiplicar $\frac{p}{q}$ por el recíproco de $\frac{r}{s}$ que es $\frac{s}{r}$".

Esta última forma es la que vamos a utilizar para dividir fracciones algebraicas, pero ten mucho cuidado al encontrar los recíprocos de las fracciones algebraicas, recuerda lo siguiente:

El recíproco de $\frac{2}{x + y}$ es $\frac{x + y}{2}$.

El recíproco de $x + y$ es $\frac{1}{x + y}$, no es $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ya que son distintos.

El recíproco de $\frac{x - y}{5}$ es $\frac{5}{x - y}$, etc. etc.

EJERCICIO 1) Realizar la división y simplificar, $\frac{3b^2}{2a^2} \div \frac{5a^3}{9b^5}$

SOLUCIÓN: $\frac{3b^2}{2a^2} \div \frac{5a^3}{9b^5} = \frac{3b^2}{2a^2} \cdot \frac{9b^5}{5a^3} = \frac{27b^7}{10a^5}$

EJERCICIO 2) Efectúa la operación y simplifica.

$$\frac{x^3 - x}{2x^2 + 6x} \div \frac{5x^2 - 5x}{2x + 6}$$

SOLUCIÓN: $\dfrac{x^3-x}{2x^2+6x} \div \dfrac{5x^2-5x}{2x+6} = \dfrac{x^3-x}{2x^2+6x} \cdot \dfrac{2x+6}{5x^2-5x} =$

$$= \frac{x(x^2-1)}{2x(x+3)} \cdot \frac{2(x+3)}{5x(x-1)} =$$

$$= \frac{2x(x+1)(x-1)(x+3)}{10x^2(x-1)(x+3)} =$$

$$= \frac{x+1}{5x}$$

EJERCICIO 3) Simplificar $\dfrac{28+13y-6y^2}{16y^2+24y+9} \div \dfrac{10y^2-39y+14}{20y^2+7y-6}$.

SOLUCIÓN: Primero factorizamos cada uno de los trinomios y después simplificamos con las operaciones indicadas.

$$\frac{28+13y-6y^2}{16y^2+24y+9} \div \frac{10y^2-39y+14}{20y^2+7y-6} = \frac{-(2y-7)(3y+4)}{(4y+3)^2} \div \frac{(2y-7)(5y-2)}{(4y+3)(5y-2)}$$

$$= \frac{-(2y-7)(3y+4)}{(4y+3)^2} \cdot \frac{(4y+3)(5y-2)}{(2y-7)(5y-2)}$$

$$= \frac{-(2y-7)(3y+4)(4y+3)(5y-2)}{(4y+3)^2(2y-7)(5y-2)}$$

$$= \frac{-(3y+4)}{(4y+3)}$$

**EJERCICIO 5.4**

Simplificar y realizar las operaciones indicadas.

1) $\dfrac{4y^3}{9x^2} \div \dfrac{2y^2}{3x}$ 2) $\dfrac{21xy^4}{4a^2b^3} \div \dfrac{7x^2y^8}{a^3b^6}$

3) $\dfrac{35x^5y^2}{9x^3y^2z} + \dfrac{56a^4b^2}{27xy^4}$

4) $\dfrac{85x^6y^7}{8a^4b^9} + \dfrac{55x^5y^3}{6a^6b^5}$

5) $\dfrac{42x + 35}{60x - 36} + \dfrac{30x^3 - 18x^2}{6x^3 + 5x^2}$

6) $\dfrac{6x - 12}{10x^2 - 5x} + \dfrac{3x^2 - x - 2}{3x^2 + x}$

7) $\dfrac{7x^2 + 21x}{2x^2 - 5x + 3} + \dfrac{4x^2 + 12x}{2x^2 - 3x}$

8) $\dfrac{2x^2 + 5x - 7}{x - 21 + 2x^2} + \dfrac{x^3 - x^2}{3x^2 - 9x}$

9) $\dfrac{15x^2 - 10x}{2x^2 - 3x} + \dfrac{13x - 10 + 3x^2}{2x^2 + 7x - 15}$

10) $\dfrac{2x^3 - 17x^2 + 30x}{8x^3 - 50x^2 + 12x} + \dfrac{2x^3 + x^2 - 15x}{4x^2 + 11x - 3}$

## 5.5 ECUACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

En el TEMA IV aprendimos a resolver ecuaciones de primer grado con una incognita, la mayoria eran ecuaciones enteras o con denominador un número específico. Pero es necesario que aprendamos a encontrar la solución ó resolver ecuaciones con fracciones algebraicas ya que éstas son representaciones algebraicas de algunos enunciados ó de algunos problemas que mas adelante veremos.

Pasos a seguir para resolver una ecuación que contenga fracciones algebraicas:

1) Encontrar el MCM de todos los denominadores de la ecuación.
2) Multiplicar los dos miembros de la ecuación por el MCM.
3) Se resuelve la ecuación resultante que será una ecuación entera y equivalente a nuestra ecuación original.

4) Verificar las soluciones en la ecuación original y si alguna no satisface la ecuación (suele suceder), esta es llamada solución extraña y se descarta.

EJEMPLO 1) Encontrar la solución de $\frac{2}{4x} + \frac{5}{2x^2} = \frac{3}{x^2}$ .

SOLUCIÓN:

1o) Encontramos el MCM de los denominadores que son $4x$, $2x^2$ y $x^2$.

El MCM es $4x^2$

2o) Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por el MCM y tenemos:

$$4x^2\left(\frac{2}{4x} + \frac{5}{2x^2}\right) = 4x^2\left(\frac{3}{x^2}\right)$$

3o) Resolvemos:

$$\frac{4x^2(2)}{4x} + \frac{4x^2(5)}{2x^2} = \frac{4x^2(3)}{x^2}$$

$$x(2) + 2(5) = 4(3)$$

$$2x + 10 = 12$$

$$2x = 12 - 10$$

$$x = \frac{2}{2}$$

$$x = 1$$

4o) Verificamos:

$$\frac{2}{4(1)} + \frac{5}{2(1)^2} = \frac{3}{1^2}$$

$$\frac{2}{4} + \frac{5}{2} = 3$$

$$\frac{2 + 10}{4} = 3$$

$$3 = 3$$

EJERCICIO 2) Resolver la ecuación $\frac{10}{4x - 1} - 3 = 7$

SOLUCIÓN:

1o) Como hay un sólo denominador el MCM es el mismo.

2o) Multiplicamos ambos miembros por 4x - 1.

$$(4x - 1)\left(\frac{10}{4x - 1} - 3\right) = (4x - 1)(7)$$

3o) Resolvemos la ecuación:

$$\frac{(4x - 1)(10)}{4x - 1} - (4x - 1)(3) = 28x - 7$$

$$10 - 12x + 3 = 28x - 7$$

$$-12x - 28x = -7 - 13$$

$$-40x = -20$$

$$x = \frac{-20}{-40}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

4o) Comprobación:

$$\frac{10}{4x - 1} - 3 = 7$$

$$\frac{10}{4\left(\frac{1}{2}\right) - 1} - 3 = 7$$

$$\frac{10}{2 - 1} - 3 = 7$$

$$\frac{10}{1} - 3 = 7$$

$$10 - 3 = 7$$

$$7 = 7$$

EJEMPLO 3) Resolver la ecuación $\dfrac{3}{y + 3} + \dfrac{7y + 19}{y^2 + 5y + 6} = \dfrac{9}{y + 2}$

SOLUCIÓN:

1o) Encontramos el MCM de los denominadores.

Factorizamos $y^2 + 5y + 6 = (y + 2)(y + 3)$

El MCM es $(y + 2)(y + 3)$

2o) Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el MCM.

$$(y+2)(y+3)\left(\frac{3}{y+3}+\frac{7y+19}{y^2+5y+6}\right)=(y+2)(y+3)\left(\frac{9}{y+2}\right)$$

3o) Resolvemos la ecuación.

$$\frac{(y+2)(y+3)(3)}{y+3}+\frac{(y+2)(y+3)(7y+19)}{(y+2)(y+3)}=\frac{(y+2)(y+3)(9)}{y+2}$$

$$(y+2)(3)+7y+19=(y+3)(9)$$
$$3y+6+7y+19=9y+27$$
$$10y-9y=27-25$$
$$y=2$$

4o) Comprobación:

$$\frac{3}{2+3}+\frac{7(2)+19}{2^2+5(2)+6}=\frac{9}{2+2}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{33}{20}=\frac{9}{4}$$

$$\frac{12+33}{20}=\frac{9}{4}$$

$$\frac{45}{20}=\frac{9}{4}$$

$$\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$$

EJEMPLO 4) Resolver $\dfrac{2x+5}{2x^2-5x-3}-\dfrac{3x+10}{4x^2-13x+3}=\dfrac{2x-3}{8x^2+2x-1}$

SOLUCIÓN:

1o) Factorizamos y encontramos el MCM.

$2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3)$

$4x^2-13x+3=(x-3)(4x-1)$

$8x^2+2x-1=(2x+1)(4x-1)$

Entonces el MCM es $(x-3)(2x+1)(4x-1)$

2o) Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el MCM y nos resulta:

$$\frac{(2x + 5)(x - 3)(2x + 1)(4x - 1)}{(2x + 1)(x - 3)} - \frac{(3x + 10)(x - 3)(2x + 1)(4x - 1)}{(x - 3)(4x - 1)} =$$

$$= \frac{(2x - 3)(x - 3)(2x + 1)(4x - 1)}{(2x + 1)(4x - 1)}$$

3o) Simplificamos y resolvemos la ecuación y resulta:

$$(2x + 5)(4x - 1) - (3x + 10)(2x + 1) = (2x - 3)(x - 3)$$
$$8x^2 + 18x - 5 - (6x^2 + 23x + 10) = 2x^2 - 9x + 9$$
$$8x^2 + 18x - 5 - 6x^2 - 23x - 10 = 2x^2 - 9x + 9$$
$$2x^2 - 5x - 15 - 2x^2 + 9x = 9$$
$$4x = 9 + 15$$
$$x = \frac{24}{4}$$
$$x = 6$$

4o) Comprobación:

$$\frac{2(6) + 5}{2(6)^2 - 5(6) - 3} - \frac{3(6) + 10}{4(6)^2 - 13(6) + 3} = \frac{2(6) - 3}{8(6)^2 + 2(6) - 1}$$

$$\frac{17}{39} - \frac{28}{69} = \frac{9}{299}$$

$$\frac{391 - 364}{897} = \frac{9}{299}$$

$$\frac{27}{897} = \frac{9}{299}$$

$$\frac{9}{299} = \frac{9}{299}$$

EJERCICIO 5.5

Encuentra la solución de cada una de las siguientes ecuaciones.

1) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{18}{6x^2} = \dfrac{1}{2x}$

2) $\dfrac{5}{4x} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{3}{3x^2}$

3) $\dfrac{17}{2y^2} + \dfrac{5}{y} - \dfrac{12}{3y^2} = 0$

4) $\dfrac{9}{2y - 3} - 3 = 0$

5) $\dfrac{2x + 5}{x - 2} = \dfrac{3}{6}$

6) $\dfrac{3}{2 - y} - \dfrac{2}{4 - 2y} = \dfrac{2}{3 - y}$

7) $\dfrac{5}{x + 3} - \dfrac{3}{2x + 1} = \dfrac{1}{x - 1}$

8) $\dfrac{3}{1 - y} = \dfrac{7}{5 - y} - \dfrac{1}{2 - 2y}$

9) $\dfrac{3}{2x^2 - 3x - 9} - \dfrac{6}{x^2 + 2x - 15} = \dfrac{7}{2x^2 + 13x + 15}$

10) $\dfrac{7}{3y - 1} - \dfrac{2}{2y - 3} = \dfrac{y - 5}{6y^2 - 11y + 3}$

11) $\dfrac{x - 2}{3x - 1} = \dfrac{x - 1}{2x + 3} - \dfrac{x^2 - 3}{6x^2 + 7x - 3}$

12) $\dfrac{2x^2 - 3}{x^2 + 2x - 3} - \dfrac{2x}{x + 2} = \dfrac{4}{x^2 + x - 2}$

13) $\dfrac{3x + 1}{x^2 - 4x - 5} + \dfrac{2x}{x^2 - 1} - \dfrac{3 + 5x}{x^2 - 6x + 5} = 0$

14) $\dfrac{8y - 1}{6y^2 - 7y - 3} - \dfrac{2y - 7}{2y^2 - 11y + 12} = \dfrac{y - 5}{3x^2 - 11y - 4}$

15) $\dfrac{3y - 2}{12y^2 + 5y - 28} + \dfrac{2y + 5}{8y^2 + 2y - 21} - \dfrac{3y - 5}{6y^2 - 17y + 12} = 0$

## 5.6 PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS

Existen enunciados y problemas cuya representación algebraica nos da una ecuación con fracciones algebraicas que hay que resolver para encontrar la solución del problema, ya tenemos los conocimientos para poder resolver problemas de los siguientes tipos.

EJEMPLO 1) El denominador de una fracción excede al numerador en 42. Si se suma 6 al numerador y se resta 4 al denominador, el valor de la fracción resulta ser $\frac{5}{7}$. Encuentra la fracción original.

SOLUCIÓN: Sea $x$ el numerador.

Como el denominador excede al numerador en 42, el denominador es $x + 42$.

La fracción buscada se representa por $\frac{x}{x + 42}$

El problema afirma que si se suma 6 al numerador y se resta 4 al denominador el valor de la fracción es igual a $\frac{5}{7}$, ésto se representa por:

$$\frac{x + 6}{x + 42 - 4} = \frac{5}{7} \quad \text{ó bien} \quad \frac{x + 6}{x + 38} = \frac{5}{7}$$

Resolvemos la ecuación: $\frac{x + 6}{x + 38} = \frac{5}{7}$

$$(x + 38)\left(\frac{x + 6}{x + 38}\right) = (x + 38)\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$\frac{(x + 38)(x + 6)}{x + 38} = \frac{5(x + 38)}{7}$$

$$7(x + 6) = 5(x + 38)$$

$$7x + 42 = 5x + 190$$

$$7x - 5x = 190 - 42$$

$$2x = 148$$

$$x = 74$$

La fracción buscada es $\frac{74}{116}$

EJEMPLO 2) Un número supera en 27 a otro. Si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 4 y el residuo es 6. Encontrar los números.

SOLUCIÓN: Sea y el número menor.

Entonces el mayor será $y + 27$.

Al dividir el mayor entre el menor tenemos $\frac{y + 27}{y}$, el cociente es 4 y el residuo es 6; por el algoritmo de la división esto se representa por:

$$\frac{y + 27}{y} = 4 + \frac{6}{y}$$

Resolvemos la ecuación y tenemos:

$$(y)\left(\frac{y + 27}{y}\right) = (y)\left(4 + \frac{6}{y}\right)$$

$$y + 27 = 4y + 6$$

$$-4y + y = 6 - 27$$

$$-3y = -21$$

$$y = \frac{-21}{-3}$$

$$y = 7$$

Los números buscados son uno 7 y el otro 34.

EJEMPLO 3) En un número de dos dígitos, el dígito de las unidades supera en 3 al dígito de las decenas. Si él número se divide entre la suma de sus dígitos el cociente es 4 y el residuo es 3. Encontrar el número.

SOLUCIÓN: Sea x el dígito de las decenas.

Entonces el dígito de las unidades será $x + 3$.

El número buscado lo representamos en notación desarrollada y es: $10(x) + 1(x + 3)$.

Si dividimos el número entre la suma de sus dígitos el cociente es 4 y el residuo 3, por el algoritmo de la división tenemos:

$$\frac{10(x) + 1(x + 3)}{(x) + (x + 3)} = 4 + \frac{3}{(x) + (x + 3)}$$

Resolvemos la ecuación y resulta:

$$\frac{10x + x + 3}{x + x + 3} = 4 + \frac{3}{x + x + 3}$$

$$(2x + 3)\left(\frac{11x + 3}{2x + 3}\right) = (2x + 3)\left(4 + \frac{3}{2x + 3}\right)$$

$$11x + 3 = 4(2x + 3) + 3$$

$$11x + 3 = 8x + 12 + 3$$

$$11x - 8x = 15 - 3$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

El número buscado es 47.

EJEMPLO 4) Un pintor puede pintar una casa en 55 horas si trabaja solo. Su ayudante puede pintar la misma casa en 66 horas. ¿Cuánto tardarán en pintar la casa si trabajan juntos?

SOLUCIÓN:

Supongamos que juntos tardan **x** horas en pintar la casa.

Como el pintor tarda 55 horas en pintar toda la casa, en una hora pintará $\frac{1}{55}$ parte.

El ayudante tarda 66 horas en pintar la casa, en una hora pintará $\frac{1}{66}$ parte de la casa.

Como al pintar la casa juntos tardan **x** horas, en una hora llevarán pintado $\frac{1}{x}$ parte de la casa.

Planteamos nuestra ecuación de la siguiente manera.

En una hora la parte pintada por:

El pintor + La del ayudante = La parte de los 2 juntos

$$\frac{1}{55} + \frac{1}{66} = \frac{1}{x}$$

Resolvemos la ecuación y tenemos:

$$x\left(\frac{1}{55} + \frac{1}{66}\right) = x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{x}{55} + \frac{x}{66} = 1$$

$$\frac{6x + 5x}{330} = 1$$

$$11x = 330$$

$$x = 30$$

Ambos juntos pintarán la casa en 30 horas.

EJEMPLO 5) El arquitecto Pedro termina de diseñar unos planos en $\frac{4}{5}$ del tiempo en que el ingeniero Eduardo los termina. Si trabajan juntos en diseñar los planos, los terminan en 100 horas. ¿En que tiempo los terminan cada uno si trabajan solos?

SOLUCIÓN:

Sea $x$ el tiempo que tarda Eduardo en diseñar los planos, en una una hora lleva terminado $\frac{1}{x}$ del diseño.

Pedro los terminará en $\frac{4}{5}x$ horas, entonces en una hora lleva terminado $\frac{1}{\frac{4}{5}x} = \frac{5}{4x}$ del diseño.

Al trabajar juntos en una hora llevan terminado $\frac{1}{100}$ del diseño.

Planteamos nuestra ecuación de la siguiente manera.

En una hora la parte terminada del diseño por:
Pedro + La de Eduardo = La parte de los 2 juntos

$$\frac{5}{4x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{100}$$

Resolvemos la ecuación y resulta:

$$(100x)\left(\frac{5}{4x} + \frac{1}{x}\right) = (100x)\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$5(25) + 1(100) = x(1)$$

$$225 = x$$

Eduardo termina el diseño en 225 horas.

Pedro lo termina en $\frac{4}{5}(225) = 180$ horas.

EJEMPLO 6) Una picina es llenada por una tubería en 6 horas, y se vacía por otra en 8 horas. Si ambas se abren simultaneamente, ¿en cuánto tiempo se llenará la picina?

SOLUCIÓN:

La tubería que llena: en una hora a llenado $\frac{1}{6}$ de la picina.

La tubería que vacía: a vaciado $\frac{1}{8}$ de la picina en una hora.

Si $x$ es el tiempo que se tardan en llenar la picina las dos tuberías abiertas entonces ambas juntas han llenado $\frac{1}{x}$ de la picina.

Como una de las tuberías llena y la otra vacía, a lo que lleva lleno en una hora le restamos lo que vacía en la misma hora y será igual a lo que han llenado las dos juntas también en la misma hora y tenemos:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{x}$$

Resolvemos la ecuación:

$$(x)\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) = (x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{x}{6} - \frac{x}{8} = 1$$

$$\frac{4x - 3x}{24} = 1$$

$$x = 24$$

La picina se llenará en 24 horas abriendo ambas tuberías juntas.

EJERCICIO 5.6

Encuentra la solución de cada uno de los siguientes problemas.

1. Encuentra que número hay que sumarle al numerador y al denominador de la fracción $\frac{9}{5}$ para obtener una fracción que sea igual a $\frac{13}{11}$.
2. Encuentra que número hay que restarle al numerador y al denominador de la fracción $\frac{53}{35}$ para obtener una fracción que sea igual a $\frac{5}{3}$.
3. El denominador de una fracción supera en 3 al numerador. Si se suma 5 al numerador y se le resta 1 al denominador, el valor de la fracción es $\frac{3}{2}$. Encuentra la fracción original.
4. El numerador de una fracción es 6 unidades menor que su denominador. Si se le suma 3 al numerador y se le resta 5 al denominador se obtiene la fracción $\frac{5}{4}$. Hallar la fracción original.
5. Un número excede en 94 a otro. Si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 4 y el residuo es 13. Encuentra ambos números.
6. Un número es menor 151 unidades que otro. Si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 2 y el residuo es 57. Encuentra los números.
7. En un número de dos cifras el dígito de las unidades excede en 4 al dígito de las decenas. Si el número se divide entre la suma de sus dígitos el cociente es 3 y el residuo es 7. Encuentra el número.
8. El dígito de las unidades de un número de dos cifras es menor en 5 que el dígito de las decenas. Si el número se divide entre el triple de el dígito de las decenas, el cociente es 3 y el residuo es 9. Encuentra el número.
9. Un carpintero hace una mesa el solo en 6 horas. Su hijo hace la misma mesa en 12 horas.¿Cuánto les tomará al padre y al hijo juntos construir la mesa?
10. Un plomero se tarda en arreglar la tubería de una casa en 78 horas y y otro segundo plomero se tarda 91 horas en arreglar lo mismo. ¿Cuánto tiempo emplearán en arreglar la tubería de la misma casa si trabajan juntos?

11. El ayudante de un albañil puede construir una barda en $\frac{3}{2}$ del tiempo que tarda el albañil. Si el albañil y el ayudante trabajan juntos tardan en construir la barda en 12 días, ¿cuánto tardará cada uno sólo en construir la barda?

12. Una prensa puede imprimir cierto trabajo en 8 horas. Después de que la primera prensa ha trabajado por tres horas, se pone otra a hacer el trabajo. Las dos juntas realizan el trabajo en dos horas menos. ¿Cuánto tardará la segunda prensa para hacer el trabajo ella sola?

13. Un depósito de agua puede ser llenado por dos tuberías. Una tarda 35 horas y la otra tarda 14 horas. ¿Cuánto tardarán en llenarlo si trabajan las dos juntas?

14. El depósito de una pipa tarda en llenarse 15 minutos y en vaciarse 24 minutos. ¿Cuánto tardará en llenarse la pipa si se pone a funcionar al mismo tiempo el sistema de llenado y vaciado de la pipa?

15. Una alberca puede ser llenada por una tubería en 35 minutos. ¿Cuánto tardará el sistema de drenaje en vaciar la alberca si cuando ambos funcionan juntos dicha alberca se llena en 84 minutos?

TEMA VI

# SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

6.1 Sistema de dos ecuaciones con dos variables.
6.2 Métodos de solución.
6.3 Sistemas que contienen símbolos de agrupación y fracciones.
6.4 Problemas de aplicación.

## 6.1 SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS

Un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas es el conjunto formado por dos ecuaciones cada una con dos variables, nosotros estudiaremos aquellas ecuaciones de la forma:

$ax + by = c$ donde $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ ó $b \neq 0$.

$dx + ey = f$ donde $d$, $e$, $f \in \mathbb{R}$ con $d \neq 0$ ó $e \neq 0$.

Observa que en cada ecuación aparecen las mismas variables que son $x$ y $y$. Cada una de estas ecuaciones tiene asociada una línea recta en el plano cartesiano, donde las parejas de valores $(x, y)$ son los puntos que forman ya sea a la recta $ax + by = c$ ó la recta $dx + ey = f$.

Nuestro objetivo es saber como encontrar las soluciones de un sistema de este tipo. Cada una de las rectas que forman el sistema tienen una infinidad de soluciones, ya que una solución en este caso será una pareja de números $(x, y)$ que satisfaga la ecuación y este conjunto de valores son los que formarán la línea recta que representa la ecuación.

| |
|---|
| El conjunto solución del sistema será aquellos valores que sean solución de ambas ecuaciones, es decir la intersección de los conjuntos soluciones de cada ecuación. |

Geométricamente cualesquiera dos rectas en el plano pueden ser:

a) Paralelas ó que nunca se intersecan.

b) La misma recta ó que las dos coinciden.

c) Que se cortan en un punto.

a) Si las rectas son paralelas el sistema no tiene solución ya que cómo no se cortan no hay un punto común.

b) Si las rectas coinciden cualquier solución de cualquier ecuación será solución del sistema, es decir tiene una infinidad de soluciones.

c) Un sistema tendrá una sola solución en el último caso, que es cuando las rectas se cortan pués encontraremos un punto en el plano cartesiano que pertenesca a las dos rectas y solo sucede si estas se cortan.

Existen muchos métodos para poder encontrar la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables, nosotros estudiaremos sólo 4 que son:

a) Reducción.
b) Sustitución.
c) Igualación.
d) Determinantes.

El uso de cualquiera de estos métodos nos resulta la misma solución, así que puedes usar el que más se te facilite.

---

## 6.2 METODOS DE SOLUCION

En cualquiera de los métodos que se usen su objetivo es relacionar las dos ecuaciones del sistema de tal manera que podamos eliminar una variable ya sea **x** ó y para obtener una sola ecuación de primer grado con una incognita la cuál ya sabemos resolver.

**METODO DE REDUCCION**

Este método consiste en hacer iguales los coeficientes de la variable que se desea eliminar en ambas ecuaciones, para después sumarlas o restarlas de tal manera que se eliminen tales términos.

Para hacer esto es recomendable seguir los siguientes pasos.

1o) El sistema debe de estar en la forma estándar: $\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}$

2o) Elegir la variable a eliminar.

3o) Multiplicar los dos miembros de la primer ecuación por el coeficiente de la incognita elegida de la segunda ecuación.

4o) Multiplicar los dos miembros de la segunda ecuación por el coeficiente de la incognita elegida de la primer ecuación.

5o) Se restan las ecuaciones resultantes en 3 y 4, término a término y se resuelve la ecuación resultante.

6o) Se sustituye el valor de la variable conocida en cualquiera de las ecuaciones que forman el sistema y se resuelve para encontrar el valor de la segunda variable.

EJEMPLO 1) Encuentra la solución del sistema $\begin{array}{l} 2x - 3y = 2 \\ \underline{4x + 3y = 22} \end{array}$

SOLUCIÓN:

1o) El sistema ya se encuentra en la forma estándar.

2o) La variable a eliminar es x.

3o) Multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por 4 y resulta:

$$4(2x - 3y) = 4(2)$$
$$8x - 12y = 8 \longrightarrow (1)$$

4o) Multiplicamos los dos miembros de la segunda ecuación por 2 y tenemos:

$$2(4x + 3y) = 2(22)$$
$$8x + 6y = 44 \longrightarrow (2)$$

5o) Restamos las ecuaciónes, a la ecuación (1) le restamos la ecuación (2) y resolvemos.

$$\begin{array}{r} 8x - 12y = 8 \\ \underline{-8x - 6y = -44} \\ 0 - 18y = -36 \end{array}$$
$$y = \frac{-36}{-18}$$
$$\boxed{y = 2}$$

6o) Sustituimos el valor encontrado de y en la primer ecuación del sistema y resolvemos.

$$2x - 3(2) = 2$$
$$2x - 6 = 2$$
$$2x = 2 + 6$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$\boxed{x = 4}$$

La solución del sistema es $x = 4$ y $y = 2$ es decir el punto de intersección de las rectas del sistema es (4 , 2).

COMPROBACIÓN: Sustituimos los valores $x = 4$ y $y = 2$ en cada ecuación del sistema original y tenemos:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 3y = 2 & \qquad & 4x + 3y = 22 \\ 2(4) - 3(2) = 2 & & 4(4) + 3(2) = 22 \\ 8 - 6 = 2 & & 16 + 6 = 22 \\ 2 = 2 & & 22 = 22 \end{array}$$

Satisfacen ambas ecuaciones.

EJEMPLO 2) Encuentra la solución de $\begin{array}{l} x + 3y = 6 \\ 5x - 2y = 13 \end{array}$

SOLUCIÓN:

1o) El sistema se encuentra en forma estándar.

2o) La variable a eliminar es **y**.

3o) Multiplicamos la primer ecuación del sistema por -2.

$$(-2)(x + 3y) = (-2)(6)$$

$$-2x - 6y = -12 \longrightarrow (1)$$

4o) Multiplicamos la segunda ecuación por 3.

$$(3)(5x - 2y) = (3)(13)$$

$$15x - 6y = 39 \longrightarrow (2)$$

5o) Restamos las ecuaciones, a la ecuación (1) le restamos la (2), y resolvemos.

$$\begin{array}{r} -2x - 6y = -12 \\ \underline{-15x + 6y = -39} \\ -17x + 0 = -51 \end{array}$$

$$x = \frac{-51}{-17}$$

$$\boxed{x = 3}$$

6o) Sustituimos el valor encontrado de **x** en la primer ecuación del sistema y resolvemos.

$$x + 3y = 6$$
$$3 + 3y = 6$$
$$3y = 6 - 3$$
$$y = \frac{3}{3}$$
$$\boxed{y = 1}$$

La solución es $x = 3$ y $y = 1$, es decir el punto de intersección de las rectas que forman el sistema es $(3\ ,\ 1)$.

COMPROBACIÓN: Sustituimos los valores encontrados en las ecuaciones del sistema original.

$$\begin{array}{rcl} x + 3y = 6 & \qquad & 5x - 2y = 13 \\ 3 + 3(1) = 6 & & 5(3) - 2(1) = 13 \\ 3 + 3 = 6 & & 15 - 2 = 13 \\ 6 = 6 & & 13 = 13 \end{array}$$

Las soluciones encontradas satisfacen ambas ecuaciones.

EJEMPLO 3) Encuentra las soluciones de $\begin{array}{l} 2x + 1 = 5y \\ 6x = 15y + 3 \end{array}$

SOLUCIÓN:

1o) Hay que colocar el sistema en forma estándar.

$$\begin{array}{lcl} 2x + 1 = 5y & \longrightarrow & 2x - 5y = -1 \longrightarrow (1) \\ 6x = 15y + 3 & \longrightarrow & 6x - 15y = 3 \longrightarrow (2) \end{array}$$

2o) La variable a eliminar es $x$.

3o) Multiplicamos la ecuación (1) por 6 y tenemos:

$$6(2x - 5y) = 6(-1)$$
$$12x - 30y = -6$$

4o) Multiplicamos la ecuación (2) por 2 y tenemos:

$$2(6x - 15y) = 2(3)$$
$$12x - 30y = 6$$

5o) Restamos las ecuaciones que resultaron en los pasos 3 y 4, resolvemos y tenemos:

$$\begin{array}{r} 12x - 30y = -6 \\ \underline{-12x + 30y = -6} \\ 0 + 0 = -12 \end{array}$$

$$0 = -12 \qquad ¡FALSO!$$

En los casos en que se eliminen las dos variables y nos quede una igualdad FALSA, el sistema NO tiene solución pués las rectas nunca se cortan es decir son PARALELAS.

**EJERCICIO 6.2.1**

Encuentra la solución de cada uno de los siguientes sistemas, usando el método de reducción.

1) $\begin{array}{l} 3x - 2y = 12 \\ \underline{7x + 2y = 8} \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ \underline{-5x + 4y = 18} \end{array}$

3) $\begin{array}{l} 11x + 2y = 1 \\ \underline{9x - 3y = 24} \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} 3x = y - 3 \\ \underline{5x + 3y = -19} \end{array}$

5) $\begin{array}{l} 4x = 2 - 6y \\ \underline{9y = 6x - 15} \end{array}$ 6) $\begin{array}{l} 3x - 7 = y \\ \underline{4x - 5y = 2} \end{array}$

7) $\begin{array}{l} 13x - 4y = -66 \\ \underline{10x - 20 = -4y} \end{array}$ 8) $\begin{array}{l} 3x - 8y = 7 \\ \underline{8y = 4x - 12} \end{array}$

9) $\begin{array}{l} 5x - 2y = -6 \\ \underline{15x - 20 = 6y} \end{array}$ 10) $\begin{array}{l} 5x - 5y = 25 \\ \underline{2x - 5 = -3y} \end{array}$

**METODO DE SUSTITUCION**

Este método consiste en despejar una variable en una ecuación y sustituirla en la otra.

Para hacer esto sólo hay que seguir los siguientes pasos.

1o) Elegir la variable que se va ha despejar y la ecuación donde se va a despejar.

2o) Despejar la variable.

3o) Sustituir el valor de la variable despejada en la otra ecuación del sistema y resolver la ecuación resultante.

4o) Ya conocido el valor de una variable se sustituye en el despeje hecho en el 2o.paso y obtendremos el valor de la segunda variable

EJEMPLO 1) Encontrar las soluciones de $\begin{array}{l} 2x - 4y = -6 \\ 5x - 21 = 4y \end{array}$

SOLUCIÓN:

1o) Despejaremos a **x** de la primer ecuación del sistema.

2o) Al hacer el despeje tenemos:

$$2x = 4y - 6 \iff x = \frac{4y - 6}{2} \iff \boxed{x = 2y - 3}$$

3o) Sustituimos el valor de **x** en la segunda ecuación del sistema y resolvemos.

$$5(2y - 3) - 21 = 4y$$
$$10y - 15 - 21 = 4y$$
$$10y - 4y = 36$$
$$6y = 36$$
$$\boxed{y = 6}$$

4o) Sustituimos el valor y = 6 en la ecuación del 2o. paso.

$$x = 2(6) - 3$$
$$\boxed{x = 9}$$

Las soluciones del sistema son: x = 9 y y = 6, es decir las rectas que representan al sistema se cortan en el punto (9 , 6).

COMPROBACIÓN: Sustituimos los valores encontrados de **x** y de **y** en las ecuaciones originales.

$$\begin{array}{rcl} 2x - 4y &=& -6 \\ 2(9) - 4(6) &=& -6 \\ 18 - 24 &=& -6 \\ -6 &=& -6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 5x - 21 &=& 4y \\ 5(9) - 21 &=& 4(6) \\ 45 - 21 &=& 24 \\ 24 &=& 24 \end{array}$$

Efectivamente los valores encontrados satisfacen ambas ecuaciones.

EJEMPLO 2) Encuentra las soluciones de $\begin{array}{l} 5x - 3y = 2 \\ -10x + 6y = -4 \end{array}$

SOLUCIÓN:

1o) Despejaremos a **x** de la primer ecuación del sistema.

2o) Al hacer el despeje tenemos:

$$5x = 3y + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{3y + 2}{5}}$$

3o) Sustituimos el valor de x en la segunda ecuación del sistema y resolvemos la ecuación resultante.

$$-10\left(\frac{3y + 2}{5}\right) + 6y = -4$$

$$-2(3y + 2) + 6y = -4$$

$$-6y - 4 + 6y = -4$$

$$0y = -4 + 4$$

$$0 = 0$$

En los casos en que se eliminen ambas variables y nos quede como resultado 0 = 0 quiere decir que las rectas del sistema coinciden, es decir representan la misma línea recta y tienen una infinidad de soluciones.

**EJERCICIO 6.2.2**

Encuentra la solución de cada uno de los siguientes sistemas, usando el método de sustitución.

1) $\begin{array}{l} 3x + 2y = 3 \\ x + y = 1 \end{array}$

2) $\begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 3x - 7y = 8 \end{array}$

3) $\begin{array}{l} 5x + 20y = 10 \\ 2x - 3y = 15 \end{array}$

4) $\begin{array}{l} 2x = 6y + 16 \\ 5x + 3y = -14 \end{array}$

5) $\begin{array}{l} 3x = 2 + 6y \\ 9y = 6x - 16 \end{array}$

6) $\begin{array}{l} 5x - 7 = y \\ 4x - 2y = 2 \end{array}$

7) $\begin{array}{l} 11x - y = -6 \\ 5x + 20 = -3y \end{array}$

8) $\begin{array}{l} 3x - 8y = 4 \\ 4y = 4x - 12 \end{array}$

## METODO DE IGUALACION

Este método consiste en despejar una variable de la primer ecuación del sistema y despejar la misma variable en la segunda ecuación, después igualar los despejes y resolver.

Con los ejemplos que vienen a continuación quedará claro éste método.

EJEMPLO 1) Encontrar las soluciones de

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -6 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN:

Despejamos a la variable $x$ de ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -6 \\ 3x &= 2y - 6 \\ \boxed{x = \frac{2y - 6}{3}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ \boxed{x = 3 - y} \end{aligned}$$

Como se cumple que $x = x$, hacemos la igualación de los despejes.

$$\begin{aligned} \frac{2y - 6}{3} &= 3 - y \\ 2y - 6 &= 3(3 - y) \\ 2y - 6 &= 9 - 3y \\ 2y + 3y &= 9 + 6 \\ 5y &= 15 \\ \boxed{y = 3} \end{aligned}$$

Sustituimos el valor encontrado en cualquiera de los despejes hechos al principio, elegimos el más sencillo y tenemos:

$$\begin{aligned} x &= 3 - y \\ x &= 3 - 3 \\ \boxed{x = 0} \end{aligned}$$

Las soluciones del sistema son $x = 0$ y $y = 3$.

COMPROBACIÓN: Sustituimos los valores encontrados en las ecuaciones originales del sistema.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -6 \\ 3(0) - 2(3) &= -6 \\ 0 - 6 &= -6 \\ -6 &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ 0 + 3 &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2) Resolver el siguiente sistema $\begin{array}{l} 2x = 3y - 4 \\ 4x - 3y + 6 = 0 \end{array}$

SOLUCIÓN:

Despejamos a la variable **x** (también podría haber sido **y**) de ambas ecuaciones del sistema.

$$2x = 3y - 4 \qquad\qquad 4x - 3y + 6 = 0$$

$$\boxed{x = \frac{3y - 4}{2}} \qquad\qquad 4x = 3y - 6$$

$$\boxed{x = \frac{3y - 6}{4}}$$

Como se cumple que **x** = **x**, igualando los despejes y resolviendo tenemos:

$$\frac{3y - 4}{2} = \frac{3y - 6}{4}$$

$$4(3y - 4) = 2(3y - 6)$$
$$12y - 16 = 6y - 12$$
$$12y - 6y = 16 - 12$$
$$6y = 4$$
$$y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$\boxed{y = \frac{2}{3}}$$

Sustituimos el valor encontrado en cualquier despeje de **x** y tenemos:

$$x = \frac{3y - 4}{2}$$
$$x = \frac{3(\frac{2}{3}) - 4}{2}$$
$$x = \frac{2 - 4}{2}$$
$$x = \frac{-2}{2}$$
$$\boxed{x = -1}$$

Las soluciones del sistema son $x = -1$ y $y = \frac{2}{3}$.

COMPROBACIÓN: Sustituimos los valores encontrados en las ecuaciones originales del sistema y tenemos:

$$\begin{aligned} 2x &= 3y - 4 \\ 2(-1) &= 3(\tfrac{2}{3}) - 4 \\ -2 &= 2 - 4 \\ -2 &= -2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 4x - 3y + 6 &= 0 \\ 4(-1) - 3(\tfrac{2}{3}) + 6 &= 0 \\ -4 - 2 + 6 &= 0 \\ -6 + 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones encontradas satisfacen ambas ecuaciones.

EJERCICIO 6.2.3

Encuentra la solución de cada uno de los siguientes sistemas, usando el método de sustitución.

1) $\begin{aligned} 3x - 6y &= 12 \\ x - y &= 5 \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} 7x + y &= 22 \\ 5x + 5y &= 20 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} 4x - y + 7 &= 0 \\ 6x - 3y - 9 &= 0 \end{aligned}$ 4) $\begin{aligned} 2x &= 4y - 10 \\ 6x - 5y &= 12 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} 3x &= 3 + 6y \\ y &= 6x + 16 \end{aligned}$ 6) $\begin{aligned} 5x + 7 - y &= 0 \\ x - 2y &= 4 \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} 4x - 5y &= 17 \\ 3x + 23 &= y \end{aligned}$ 8) $\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ 5y &= 3x - 2 \end{aligned}$

**METODO POR DETERMINANTES**

Un **determinante** es un arreglo de números en columnas y renglones; en nuestro caso usaremos los determinantes de segundo orden, aquellos que estarán formados por dos columnas y dos renglones.

Un determinante de segundo orden cuyos elementos son los números *a*, *b*, *c* y *d* se representa de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Este determinante es igual a un número, éste número será el resultado de efectuar la operación $a \cdot d - b \cdot c$; entonces podemos afirmar que:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

EJEMPLOS:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2(6) - 5(3) = 12 - 15 = -3$

2) $\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -3(6) - 7(4) = -18 - 28 = -46$

3) $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(2) - (-4)(3) = 10 + 12 = 22$

Una de las aplicaciones más importantes de los **determinantes** son en las ecuaciones lineales, veamos como intervienen.

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{array}{c} ax + by = c \\ \underline{dx + ey = f} \end{array}$ donde las letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* son números reales y las variables son **x** y **y**; resolviendo el sistema por cualquier método anteriormente mencionado tenemos que los valores de **x** y de **y** son:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \qquad y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Estas se pueden representar por medio de **determinantes** de la siguiente forma:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

Observa lo siguiente:

1o) Los **determinantes** de los denominadores de **x** y de **y** son los mismos y están formados por los coeficientes de las **x**'s y de las **y**'s de las dos ecuaciones del sistema, es llamado DETERMINANTE DEL SISTEMA.

2o) El **determinante** del numerador de **x** se obtiene sustituyendo en el determinante del sistema la columna de los coeficientes de **x** por los términos independientes.

3o) El **determinante** del numerador de **y** se obtiene sustituyendo en el determinante del sistema la columna de los coeficientes de **y** por los términos independientes.

NOTA: Para hacer estos calculos el sistema de ecuaciones debe de estar en la forma estándar.

EJEMPLO 1) Encontrar las soluciones de $\begin{array}{l} 3x - y = 5 \\ \underline{6x + 3y = 15} \end{array}$

SOLUCIÓN: Como el sistema ya está en forma estándar escribimos los determinantes como se mencionó anteriormente.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 15 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5(3) - (-1)(15)}{3(3) - (-1)(6)} = \frac{15 + 15}{9 + 6} = \frac{30}{15} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3(15) - 5(6)}{3(3) - (-1)(6)} = \frac{45 - 30}{9 + 6} = \frac{15}{15} = 1$$

Las soluciones del sistema son $x = 2$ y $y = 1$.

COMPROBACIÓN: Sustituimos los valores encontrados de $x$ y de $y$ en las ecuaciones del sistema y resulta:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 5 \\ 3(2) - 1 &= 5 \\ 6 - 1 &= 5 \\ 5 &= 5 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 6x + 3y &= 15 \\ 6(2) + 3(1) &= 15 \\ 12 + 3 &= 15 \\ 15 &= 15 \end{aligned}$$

Si satisfacen ambas ecuaciones, las soluciones son correctas.

EJEMPLO 2) Resolver el sistema $\begin{aligned} 2x &= y + 5 \\ 3x + 3y - 21 &= 0 \end{aligned}$

SOLUCIÓN: Acomodamos el sistema en forma estándar y nos queda de la siguiente forma: $\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ 3x + 3y &= 21 \end{aligned}$

Resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 21 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5(3) - (-1)(21)}{2(3) - (-1)(3)} = \frac{15 + 21}{6 + 3} = \frac{36}{9} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2(21) - (5)(3)}{2(3) - (-1)(3)} = \frac{42 - 15}{6 + 3} = \frac{27}{9} = 3$$

Las soluciones del sistema son $x = 4$, $y = 3$; geométricamente las rectas del sistema se cortan en el punto $(4\ ,\ 3)$.

COMPROBACIÓN: Sustituimos los valores encontrados en las ecuaciones del sistema original.

$$\begin{aligned} 2x &= y + 5 \\ 2(4) &= 3 + 5 \\ 8 &= 8 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3x + 3y - 21 &= 0 \\ 3(4) + 3(3) - 21 &= 0 \\ 21 - 21 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Nos quedan igualdades ciertas, esto quiere decir que los valores de **x** y de **y** efectivamente son las soluciones del sistema.

OBSERVACIÓN:

| |
|---|
| Si al resolver un sistema te resulta que los valores de **x** y de **y** tienen denominador cero, quiere decir que el sistema no tiene solución ya que las rectas son **paralelas**.<br>Si te resulta que los valores de **x** y de **y** son $\frac{0}{0}$, quiere decir que tienen una infinidad de soluciones ya que las ecuaciones del sistema representan **la misma linea recta**. |

**EJERCICIO 6.2.4**

Encuentra la solución de cada uno de los siguientes sistemas, por el método de los determinantes.

1) $\begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ x = y + 2 \end{array}$

2) $\begin{array}{l} 3x + 4y = -6 \\ y = 3 - 3x \end{array}$

3) $\begin{array}{l} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 2y - x + 7 = 0 \end{array}$

4) $\begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ 2y - 4x = -4 \end{array}$

5) $\begin{array}{l} 7x = 42 - y \\ y = 3x - 8 \end{array}$

6) $\begin{array}{l} 3x + 4y = 20 \\ x = y + 2 \end{array}$

7) $\begin{array}{l} 3x = 27 - y \\ 2y = 3x \end{array}$

8) $\begin{array}{l} 3x - 2y = 8 \\ 4y = 12x - 32 \end{array}$

## 6.3 SISTEMAS QUE CONTIENEN SIMBOLOS DE AGRUPACION Y FRACCIONES

Cuando se nos presente algún sistema de dos ecuaciones con dos incognitas en formas complejas ya sea con paréntesis ó con fracciones aritméticas lo primero que hay que hacer es eliminarlos, es decir convertir éste sistema a otro equivalente en el cuál tengamos ecuaciones enteras y procedemos a resolverlo con cualquier método ya visto con anterioridad.

EJEMPLO 1) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3(2x + y) = 2(x - 2y) + 26$$
$$2(y - x) + x - 2 = 5(4 - x) - 3y$$

SOLUCIÓN: Simplificamos ambas ecuaciones por separado y tenemos:

| | |
|---|---|
| $3(2x + y) = 2(x - 2y) + 26$ | $2(y - x) + x - 2 = 5(4 - x) - 3y$ |
| $6x + 3y = 2x - 4y + 26$ | $2y - 2x + x - 2 = 20 - 5x - 3y$ |
| $6x + 3y - 2x + 4y = 26$ | $2y - x + 5x + 3y = 2 + 20$ |
| $4x + 7y = 26$ | $4x + 5y = 22$ |

El sistema $\begin{array}{l} 4x + 7y = 26 \\ 4x + 5y = 22 \end{array}$ es equivalente al original, lo resolvemos por determinantes y tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 26 & 7 \\ 22 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{26(5) - (7)(22)}{4(5) - (7)(4)} = \frac{130 - 154}{20 - 28} = \frac{-24}{-8} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 26 \\ 4 & 22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{4(22) - (26)(4)}{4(5) - (7)(4)} = \frac{88 - 104}{20 - 28} = \frac{-16}{-8} = 2$$

Las soluciones son $x = 3$ y $y = 2$.

COMPROBACIÓN: Sustituimos los valores encontrados en las ecuaciones del sistema original y tenemos:

$$
\begin{aligned}
3(2x + y) &= 2(x - 2y) + 26 \\
3(2[3] + 2) &= 2(3 - 2[2]) + 26 \\
3(6 + 2) &= 2(3 - 4) + 26 \\
3(8) &= 2(-1) + 26 \\
24 &= -2 + 26 \\
24 &= 24
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2(y - x) + x - 2 &= 5(4 - x) - 3y \\
2(2 - 3) + 3 - 2 &= 5(4 - 3) - 3(2) \\
2(-1) + 1 &= 5(1) - 6 \\
-2 + 1 &= 5 - 6 \\
-1 &= -1
\end{aligned}
$$

Nos quedan igualdades ciertas, esto quiere decir que los valores de x y de y efectivamente son las soluciones del sistema.

EJEMPLO 2) Resolver el siguiente sistema:

$$\frac{x + y}{4} - \frac{3x - y}{9} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3x - y}{3} - \frac{4y - x}{4} = 1$$

SOLUCIÓN: Simplificaremos cada ecuación para obtener un sistema de ecuaciones enteras que sean equivalentes al dado.

$$
\begin{aligned}
\frac{x + y}{4} - \frac{3x - y}{9} &= \frac{3}{4} \\
36\left(\frac{x + y}{4} - \frac{3x - y}{9}\right) &= 36\left(\frac{3}{4}\right) \\
9(x + y) - 4(3x - y) &= 9(3) \\
9x + 9y - 12x + 4y &= 27 \\
-3x + 13y &= 27
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{3x - y}{3} - \frac{4y - x}{4} &= 1 \\
12\left(\frac{3x - y}{3} - \frac{4y - x}{4}\right) &= 12(1) \\
4(3x - y) - 3(4y - x) &= 12 \\
12x - 4y - 12y + 3x &= 12 \\
15x - 16y &= 12
\end{aligned}
$$

El sistema obtenido $\begin{aligned} -3x + 13y &= 27 \\ 15x - 16y &= 12 \end{aligned}$ es equivalente al dado en un principio, lo resolvemos y tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 27 & 13 \\ 12 & -16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 13 \\ 15 & -16 \end{vmatrix}} = \frac{27(-16) - (13)(12)}{-3(-16) - (13)(15)} = \frac{-432 - 156}{48 - 195} = \frac{-588}{-147} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 27 \\ 15 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 13 \\ 15 & -16 \end{vmatrix}} = \frac{-3(12) - (27)(15)}{-3(-16) - (13)(15)} = \frac{-36 - 405}{48 - 195} = \frac{-441}{-147} = 3$$

Las soluciones del sistema son $x = 4$ y $y = 3$.

COMPROBACIÓN: Sustituimos los valores obtenidos en la ecuación original y tenemos:

$$\frac{x + y}{4} - \frac{3x - y}{9} = \frac{3}{4} \qquad\qquad \frac{3x - y}{3} - \frac{4y - x}{4} = 1$$

$$\frac{4 + 3}{4} - \frac{3(4) - 3}{9} = \frac{3}{4} \qquad\qquad \frac{3(4) - 3}{3} - \frac{4(3) - 4}{4} = 1$$

$$\frac{7}{4} - \frac{9}{9} = \frac{3}{4} \qquad\qquad \frac{9}{3} - \frac{8}{4} = 1$$

$$\frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4} \qquad\qquad 3 - 2 = 1$$

$$\frac{7 - 4}{4} = \frac{3}{4} \qquad\qquad 1 = 1$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Cuando en un sistema haya ecuaciones fraccionarias con variables en el denominador da lugar a ecuaciones de mayor grado; para evitar eso es recomendable hacer un cambio de variable para asi obtener una ecuación lineal.

EJEMPLO 1) Encuentra las soluciones del siguiente sistema:

$$\frac{5}{3x} + \frac{3}{2y} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{9}{2x} + \frac{2}{y} = \frac{13}{15}$$

SOLUCIÓN:

Hacemos $a = \frac{1}{x}$ y $b = \frac{1}{y}$ entonces nuestras ecuaciones se pueden representar de la siguiente forma:

$$\frac{5}{3x} + \frac{3}{2y} = \frac{4}{3} \iff \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{4}{3} \iff \frac{5}{3}a + \frac{3}{2}b = \frac{4}{3}$$

$$\frac{9}{2x} + \frac{2}{y} = \frac{13}{15} \iff \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot\frac{1}{y} = \frac{13}{15} \iff \frac{9}{2}a + 2b = \frac{13}{15}$$

Cada una de las ecuaciones resultante las hacemos lineales:

$$\frac{5}{3}a + \frac{3}{2}b = \frac{4}{3} \longrightarrow (1)$$

$$\frac{9}{2}a + 2b = \frac{13}{15} \longrightarrow (2)$$

Multiplicamos la ecuación (1) por el MCM de 2 y 3, y obtenemos:

$$6\left(\frac{5}{3}a + \frac{3}{2}b\right) = 6\left(\frac{4}{3}\right) \iff 10a + 9b = 8$$

Multiplicamos la ecuación (2) por el MCM de 2 y 15, y obtenemos:

$$30\left(\frac{9}{2}a + 2b\right) = 30\left(\frac{13}{15}\right) \iff 135a + 60b = 26$$

Resolvemos el sistema $\begin{array}{l} 10a + 9b = 8 \\ \underline{135a + 60b = 26} \end{array}$ por medio de determinantes.

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 26 & 60 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 135 & 60 \end{vmatrix}} = \frac{8(60) - 9(26)}{10(60) - 9(135)} = \frac{480 - 234}{600 - 1215} = \frac{246}{-615} = -\frac{2}{5}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 135 & 26 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 135 & 60 \end{vmatrix}} = \frac{10(26) - 8(135)}{10(60) - 9(135)} = \frac{260 - 1080}{600 - 1215} = \frac{-820}{-615} = \frac{4}{3}$$

Ahora como $a = \frac{1}{x} = -\frac{2}{5}$ entonces $\boxed{x = -\frac{5}{2}}$

Y como $b = \frac{1}{y} = \frac{4}{3}$ entonces $\boxed{y = \frac{3}{4}}$

**EJERCICIO 6.3**

Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones.

1) $7(x + y - 1) = 3(y - 3x)$
$2(2x - 6) = y - 3$

2) $4(x + y) + 10 = -(y + 11x)$
$5x - 3y = 2(1 + 2x - y)$

3) $4(x + 1) - 3(y + 2) = 19$
$5x + 4(y - 3) = -9$

4) $5(3x + 8y) + 2(x + 2y) = 3$
$4(2x + 7y) - 19 = x + y$

5) $\frac{3}{8}x + \frac{5}{12}y = \frac{7}{3}$
$\frac{5}{6}x - \frac{7}{9}y = \frac{16}{9}$

6) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = \frac{1}{12}$
$\frac{4}{7}x + \frac{9}{8}y = \frac{37}{56}$

7) $\frac{x + 2}{3} - \frac{y - 3}{8} = \frac{5}{6}$
$\frac{y - 5}{6} - \frac{2x - 3}{5} = 0$

8) $2(y - x) = \frac{5 + x}{2}$
$\frac{3(y + x)}{6} = \frac{y + 7}{3}$

9) $\frac{x - y - 1}{x + y + 1} = \frac{1}{9}$
$\frac{x + y}{x - y} = 4$

10) $\frac{x + 9}{x - 9} = \frac{y + 21}{y + 39}$
$\frac{x + 8}{x - 8} = \frac{y + 19}{y + 11}$

11) $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

$\frac{2}{x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{2}$

12) $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{8}{3}$

$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$

13) $\frac{5}{3x} + \frac{3}{2y} = \frac{19}{12}$

$\frac{3}{2x} - \frac{4}{y} = -\frac{5}{4}$

14) $\frac{7}{3x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{2}$

$\frac{5}{x} - \frac{3}{y} = \frac{3}{2}$

---

## 6.4 PROBLEMAS DE APLICACION

Muchos de los problemas que se nos plantean pueden resolverse con mayor facilidad si se representan los enunciados por medio de dos ecuaciones con dos incognitas, se resuelve el sistema por algún método ya visto y finalmente se comprueban los resultados en el problema inicial.

Veamos algunos ejemplos de como resolver problemas por medio de si⁻temas de dos ecuaciones con dos incognitas, de ecuaciones lineales y fraccionarias recuerda los puntos que se te indicarón seguir para resolver un problema.

EJEMPLO 1) En un teatro, 12 entradas de adulto y 8 de niño cuestan N$276, y 12 entradas de niño con 8 de adulto cuestan N$244. Hallar el precio de entrada al teatro de un niño y de un adulto.

SOLUCIÓN: Sea $x$ el precio de entrada de un niño.

Sea $y$ el precio de entrada de un adulto.

12 entradas de adulto y 8 de niño $(12y + 8x)$ cuestan N$276, da lugar a nuestra primer ecuación $12y + 8x = 276$ ó $8x + 12y = 276$

12 entradas de niño y 8 de adulto $(12x + 8y)$ cuestan N$244, da lugar a nuestra segunda ecuación: $12x + 8y = 244$.

Resolveremos el sistema formado por: $8x + 12y = 276$

$$\underline{12x + 8y = 244}$$

Como éste sistema se puede simplificar tenemos que:

$8x + 12y = 276$ al dividirla entre 4 es equivalente a $2x + 3y = 69.$

$12x + 8y = 244$ al dividirla entre 4 es equivalente a $\underline{3x + 2y = 61.}$

Resolveremos éste sistema por determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 69 & 3 \\ 61 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{69(2) - 3(61)}{2(2) - 3(3)} = \frac{138 - 183}{4 - 9} = \frac{-45}{-5} = 9$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 69 \\ 3 & 61 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2(61) - 69(3)}{2(2) - 3(3)} = \frac{122 - 207}{4 - 9} = \frac{-85}{-5} = 17$$

Esto quiere decir que la entrada al teatro de un niño cuesta N$9.
Y la entrada al teatro de un adulto cuesta N$17.

COMPROBACIÓN: 12 entradas de adulto más 8 de niño son:

$12(17) + 8(9) = 204 + 72 = 276.$

12 entradas de niño más 8 de adulto son:

$12(9) + 8(17) = 108 + 136 = 244$

EJEMPLO 2) El triple de un número supera en 11 al doble de otro, mientras que 8 veces el segundo excede en 7 unidades al quíntuplo del primero. Hallar ambos números.

SOLUCIÓN: Sean $x$ el primer número y $y$ el segundo.

El triple de un número es $3x$, supera en 11 a $y$.

Para que sean iguales al menor que es $y$, le sumamos 11 y tenemos nuestra primer ecuación: $3x = y + 11$

Ocho veces el segundo es $8y$.

El quíntuplo del primero es $5x$.

Como $8y$ excede en 7 unidades a $5x$, para que sean iguales al menor que es $5x$ le sumamos 7 y nuestra segunda ecuación es:

$$8y = 5x + 7$$

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones y tenemos:

$$3x = y + 11 \longrightarrow 3x - y = 11 \longrightarrow (1)$$

$$\underline{8y = 5x + 7} \longrightarrow -5x + 8y = 7 \longrightarrow (2)$$

Resolvemos por el método de reducción.

Multiplicamos la ecuación (1) por 8 y sumamos con la ecuación (2).

$$8(3x - y) = 8(11) \longrightarrow 24x - 8y = 88$$

$$\begin{array}{r} 24x - 8y = 88 \\ \underline{-5x + 8y = 7} \\ 19x + 0 = 95 \\ x = \dfrac{95}{19} \\ \boxed{x = 5} \end{array}$$

Sustituimos el valor encontrado en la ecuación (1).

$$\begin{aligned} 3x - y &= 11 \\ 3(5) - y &= 11 \\ -y &= 11 - 15 \\ -y &= -4 \\ \boxed{y = 4} \end{aligned}$$

Los números buscados $x = 5$ y $y = 4$.

COMPROBACIÓN: El triple de 5 es 15, supera en 11 al segundo que es 4. Ocho veces el segundo es $8(4) = 32$ supera en 7 a el quíntuplo del primero que es $5(5) = 25$.

EJEMPLO 3) Si la longitud de un terreno rectangular aumenta 2 mts. y el ancho disminuye en 2, la superficie del terreno disminuye 16 $m^2$. Si la longitud aumenta en 5 mts. y el ancho disminuye 3 mts, su superficie aumenta en 15 $m^2$. Encontrar la superficie del terreno original.

SOLUCIÓN: Sea $x$ la longitud del terreno.

Sea $y$ el ancho del terreno.

La superficie ó área del terreno es $xy$.

1o) La longitud aumenta en 2 mts. se representa por $x + 2$.

El ancho disminuye en 2 mts. se representa por $y - 2$.

La superficie disminuye en 16, esto es $(x + 2)(y - 2) = xy - 16$.

2o) La longitud aumenta en en 5 mts. se representa por $x + 5$.

El ancho disminuye en 3 mts. se representa por $y - 3$.

La superficie disminuye en 15, esto es $(x + 5)(y - 3) = xy - 15$.

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones resultantes:

$$(x + 2)(y - 2) = xy - 16 \longrightarrow - 2x + 2y = -12 \longrightarrow (1)$$

$$(x + 5)(y - 3) = xy - 15 \longrightarrow - 3x + 5y = 0 \longrightarrow (2)$$

Lo resolveremos por el método de Sustitución:

Despejando a $y$ de (1) tenemos: $y = x - 6 \longrightarrow (3)$

Este valor lo sustituimos en la ecuación (2) y resolvemos.

$$- 3x + 5y = 0$$

$$- 3x + 5(x - 6) = 0$$

$$- 3x + 5x - 30 = 0$$

$$2x = 30$$

$$\boxed{x = 15}$$

Este valor encontrado lo sustituimos en (3) y tenemos el valos de $y$.

$$y = x - 6$$

$$y = 15 - 6$$

$$\boxed{y = 9}$$

Entonces el largo del terreno original es 15 mts. y su ancho 9 mts., su superficie es (largo)(ancho) = (15)(9) = 135 $m^2$.

La comprobación se deja de ejercicio al lector.

EJEMPLO 4) Un número de dos cifras es 3 unidades menor que el cuádruplo de la suma de sus dígitos. Si los dígitos se intercambian, el resultado excede en 3 a 10 veces el dígito de las unidades del número original. Encontrar dicho número.

SOLUCIÓN: Sea $x$ el dígito de las unidades y $y$ el de las decenas.

El número buscado en notación desarrollada es $10y + x$.

El cuádruplo de la suma de sus dígitos: $4(x + y)$

El número $10y + x$ es 3 unidades menor que $4(x + y)$, para que sean iguales a el número menor le sumamos 3 y tenemos la primer ecuación:

$$10y + x + 3 = 4(x + y)$$

Si los dígitos se intercambian el número es: $10x + y$.

Diez veces el dígito de las unidades del número original es $10x$.

El nuevo número es $10x + y$ excede en 3 a $10x$, para que sean iguales al número menor le sumamos 3 y tenemos nuestra segunda ecuación:

$$10x + y = 10x + 3$$

Resolvemos el sistema formado por:

$$10y + x + 3 = 4(x + y) \longrightarrow -3x + 6y = -3 \longrightarrow (1)$$

$$10x + y = 10x + 3 \longrightarrow \boxed{y = 3} \longrightarrow (2)$$

Usamos el método de sustitución:

Sustituimos en la ecuación (1) el valor dado en la ecuación (2) y tenemos:

$$-3x + 6y = -3$$
$$-3x + 6(3) = -3$$
$$-3x = -3 - 18$$
$$-3x = -21$$
$$x = \frac{-21}{-3}$$
$$\boxed{x = 7}$$

El número buscado es 37.

EJEMPLO 5) Un boticario tiene una solución de tintura de argirol al 40% le va agregar otra al 60%, la mezcla resulta al 54%. Si tubiera 10 partes más de la solución al 60%, la mezcla sería al 55% de tintura. ¿Cuántas partes de cada solución de tintura tiene el boticario?

SOLUCIÓN:

Sea $x$ la primer solución de tintura al 40%, esto es $40\%x = .4x$

Sea $y$ la segunda solución de tintura al 60%, esto es $60\%y = .6y$

La mezcla $x + y$ resulta al 54%, esto es $54\%(x + y) = .54(x + y)$

Planteamos la primer ecuación:

Primera solución + Segunda solución = Mezcla

$$.4x + .6y = .54(x + y)$$

10 partes más de la solución al 60% es 60%(y + 10) = .6(y + 10)

La nueva mezcla al 55% es 55%(x + y + 10) = .55(x + y + 10)

Planteamos la segunda ecuación:

Primera solución + Segunda solución = Nueva mezcla

$$.4x + .6(y + 10) = .55(x + y + 10)$$

Resolvemos el sistema formado por:

$$.4x + .6y = .54(x + y)$$

$$.4x + .6(y + 10) = .55(x + y + 10)$$

Simplificandolas nos queda el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -.14x + .06y = 0 \longrightarrow -14x + 6y = 0 \\ -.15x + .05y = -.5 \longrightarrow -15x + 5y = -50 \end{array}\right\}\text{multiplicamos por 100 ambas ecuaciones}$$

Aplicamos el método de determinantes y tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -50 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -14 & 6 \\ -15 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{0(5) - (-6)(50)}{-14(5) - 6(-15)} = \frac{300}{-70 + 90} = \frac{300}{20} = 15$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -14 & 0 \\ -15 & -50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -14 & 6 \\ -15 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-14(-50) - 0(-15)}{-14(5) - 6(-15)} = \frac{700}{-70 + 90} = \frac{700}{20} = 35$$

El boticario tiene 15 partes de tintura de argirol al 40% y 35 partes de tintura al 60%.

EJEMPLO 6) Si $\frac{1}{5}$ de la edad de Ana se aumenta en los $\frac{2}{3}$ de la edad de Bety, el resultado sería 37 años, y $\frac{5}{12}$ de la edad de Bety equivalen a $\frac{3}{13}$ de la edad de Ana. Hallar las edades de ambas.

SOLUCIÓN:

Sea $x$ la edad que tiene Ana.

Sea $y$ la edad de Bety.

$\frac{1}{5}$ de la edad de Ana aumentada en los $\frac{2}{3}$ de la de Bety es igual a 37 años se representa por:

$$\frac{1}{5}x + \frac{2}{3}y = 37$$

$\frac{5}{12}$ de la edad de Bety es igual a $\frac{3}{13}$ de la edad de Ana se representa por:

$$\frac{5}{12}y = \frac{3}{13}x \quad \text{es equivalente a:} \quad \frac{3}{13}x - \frac{5}{12}y = 0$$

Quitamos denominadores a las dos ecuaciones resultantes:

$\frac{1}{5}x + \frac{2}{3}y = 37$ la multiplicamos por 15 y queda: $3x + 10y = 555$

$\frac{3}{13}x - \frac{5}{12}y = 0$ la multiplicamos por 156 y nos queda: $36x - 65y = 0$

Resolvemos el sistema:
$$\begin{aligned} 3x + 10y &= 555 \longrightarrow (1) \\ 36x - 65y &= 0 \longrightarrow (2) \end{aligned}$$

Por el método de Reducción.

Multiplicamos la ecuación (1) por 12 y le restamos la ecuación (2).

$$\begin{array}{r} 36x + 120y = 6660 \\ \underline{-\ 36x + \ 65y = 0} \\ 0 + 185y = 6660 \end{array}$$

$$y = \frac{6660}{185}$$

$$\boxed{y = 36}$$

Sustituimos el valor encontrado en la ecuación (2) y tenemos:

$$36x - 65(36) = 0$$

$$36x = 65(36)$$

$$x = \frac{65(36)}{36}$$

$$\boxed{x = 65}$$

Entonces Ana tiene 65 años y Bety 36.

EJEMPLO 7) El Sr. López rema 18 kilometros a favor de la corriente en 2 horas. Encuentra que remando en contra de la corriente, recorre la misma distancia en 6 horas. ¿Cuál será su velocidad en agua tranquila, y cuál es la velocidad de la corriente?

SOLUCIÓN: Sea $x$ la velocidad del Sr. López en agua tranquila.
Sea $y$ la velocidad de la corriente.
Entonces la velocidad del Sr. López a favor de la corriente es $x + y$.
La velocidad en contra de la corriente es $x - y$.

Para plantear el problema usamos *velocidad* x tiempo = *distancia*

Viaje a favor de la corriente: $2(x + y) = 18$

Viaje en contra de la corriente $6(x - y) = 18$

Quitamos signos de agrupación y simplificamos:

$$2(x + y) = 18 \longrightarrow 2x + 2y = 18 \longrightarrow x + y = 9$$

$$6(x - y) = 18 \longrightarrow 6x - 6y = 18 \longrightarrow x - y = 3$$

Resolvemos el sistema formado por $\begin{array}{l} x + y = 9 \\ \underline{x - y = 3} \end{array}$ usando Reducción.

Simplemente sumamos el sistema y resolvemos:

$$\begin{array}{r} x + y = 9 \\ \underline{x - y = 3} \\ 2x + 0 = 12 \\ x = \frac{12}{2} \\ \boxed{x = 6} \end{array}$$

Sustituimos este valor en la primer ecuación del sistema:

$$\begin{array}{r} x + y = 9 \\ 6 + y = 9 \\ y = 9 - 6 \\ \boxed{y = 3} \end{array}$$

La velocidad del Sr. López en aguas tranquilas es 6 km por hora.

La velocidad de la corriente es 3 km por hora.

EJEMPLO 8) Marcela y Juan pueden realizar una maqueta en 42 horas. Si Marcela trabaja sola durante 15 horas y después le ayuda Juan terminando el solo el trabajo en 60 horas. ¿Cuántas horas tarda cada uno solos en hacer la misma maqueta?

SOLUCIÓN: Sea $x$ el tiempo que tarda Marcela en hacer la maqueta ella sola.

Sea $y$ el tiempo que tarda Juan en hacer la maqueta el solo.

La parte que realiza Marcela en 42 horas es $\frac{42}{x}$.

La parte que realiza Juan en 42 horas es $\frac{42}{y}$.

La parte que realiza Marcela en 15 horas es $\frac{15}{x}$.

La parte que realiza Juan en 60 horas es $\frac{60}{y}$.

Juntos hacen una maqueta en 42 horas: $\frac{42}{x} + \frac{42}{y} = 1$

Por separado hacen la misma maqueta: $\frac{15}{x} + \frac{60}{y} = 1$

Hacemos cambio de variable se $a = \frac{1}{x}$ y $b = \frac{1}{y}$ sustituimos estas variables y tenemos el sistema:

$$42a + 42b = 1$$
$$15a + 60b = 1$$

Resolvemos el sistema por determinantes y tenemos:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 42 \\ 1 & 60 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 42 & 42 \\ 15 & 60 \end{vmatrix}} = \frac{1(60) - 42(1)}{42(60) - 42(15)} = \frac{18}{1890} = \frac{1}{105}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 42 & 1 \\ 15 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 42 & 42 \\ 15 & 60 \end{vmatrix}} = \frac{42(1) - 1(15)}{42(60) - 42(15)} = \frac{27}{1890} = \frac{1}{70}$$

Como $a = \frac{1}{x} = \frac{1}{105}$ entonces $x = 105$, y $b = \frac{1}{y} = \frac{1}{70}$ entonces $y = 70$. Esto quiere decir que Marcela ella sola termina la maqueta en 105 horas y Juan el solo realiza el trabajo en 70 horas.

**EJERCICIO 6.4**

Encuentra las soluciones a cada uno de los siguientes problemas.

1. Doce veces un número excede en 12 unidades al séptuplo de otro, mientras que el doble del segundo número supera en 9 al triple del primero. Encontrar ambos números.
2. El quíntuplo de un número es 3 unidades menor que el doble de otro número, mientras que el doble del primero es 4 unidades menor que el segundo. Hallar los números.
3. En una tienda una persona compró 5 limpiadores y 4 jabones por N$32. Otro cliente compró 2 limpiadores y 6 jabones por N$20. ¿Cuál es el precio de cada limpiador y cada jabón?
4. Cinco kilos de té y 7 kilos de café cuestan N$103, mientras que 4 kilos deté y 3 kilos de café cuestan N$59. ¿Cuál es el precio de un kilo de té y de un kilo de café?
5. El dueño de un vivero compró 28 tulipanes y 36 rosales pagando por ellos N$364, una semana después a los mismos precios compró 15 tulipanes y 43 rosales por N$361. Hallar el costo de un tulipán y de un rosal.
6. Si al numerador de una fracción se le añaden 5 unidades, el valor de la fracción es 2, por otro lado si al mismo numerador se le restan 2, el valor de la fracción es 1. Hallar la fracción.
7. Si se le suma 3 unidades al numerador de una fracción y se le resta 2 al denominador, la fracción se convierte en $\frac{6}{7}$, pero si se le resta 5 al numerador y se le suma 2 al denominador, la fracción que resulta es es $\frac{2}{5}$. Hallar la fracción.
8. Si el mayor de dos números se divide entre el menor, el cociente es 3, y si diez veces el menor se divide por el mayor, el cociente es 3 y el reciduo 19. Hallar los números.
9. Si la base de un rectángulo disminuye en 3 cm. y su altura aumenta en 2 cm., su área se incrementa en 8 $cm^2$. Si la base aumenta en 4 y la altura disminuye en 3 unidades, su área disminuye en 39 $cm^2$. Encuentra el área del rectángulo original.

10. Si el largo de un terreno aumenta 4 mts. y su ancho disminuye 3 mts., la superficie del terreno disminuye en $18m^2$. Si el largo del terreno disminuye en 5 mts. y su ancho aumenta 5 mts., la superficie del terreno aumenta en 15 $m^2$. Hallar las dimenciones del terreno original.

11. Cuando a un número de dos cifras se le agrega la suma de sus dígitos, el resultado es 59. Cuando se invierten los dígitos del número y al número que resulta se le agrega la suma de sus dígitos el resultado es 32. Encontrar el número.

12. Un número de dos cifras es 30 unidades mayor que el cuádruplo de la suma de sus dígitos. Si los dígitos se intercambian, el resultado es menor 4 unidades que nueve veces el dígito de las decenas del número origina. Encontrar dicho número.

13. Un químico tiene una solucion ácida al 20% y le agrega otra al 50%, resulta una mezcla al 38%. Si tuviera 10 litros más de la solución al 50% , la nueva mezcla resultaría al 40% de ácido. ¿Cuántos galones tiene de cada solución?

14. Un lechero hace una combinación de crema con 8% de grasa y otro tipo de crema con 20% de grasa, la mezcla contendría 10.4% de grasa. Si tuviera 10 litros menos de la crema con 8% de grasa y 10 más de la crema con 20% de grasa, la mezcla resultaría al 12.8% de grasa. ¿Cuántos litros de cada crema tiene el lechero?

15. Hace 5 años la edad de Ruth era $\frac{1}{5}$ de la que tenía su Tía, y dentro de 10 años Ruth tendrá la mitad de la edad de su Tía. Hallar las edades actuales de Ruth y su Tía.

16. El doble de la edad de José excede en 50 años a la edad de Pedro, y $\frac{1}{4}$ de la edad de Pedro es 35 años menos que la edad de José. Hallar las edades de José y Pedro.

17. Un aficionado que navega por un río recorre 15 kilómetros en $1\frac{1}{2}$ horas a favor de la corriente y 12 kilómetros en 2 horas contra la corriente. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad de las aguas del río.

18. Un avión volando a favor del viento puede recorrer 1800 km. en 3 horas, pero volando en contra del viento, puede recorrer solamente $\frac{5}{6}$ de esta distancia en el mismo tiempo. Hallar la velocidad del avión en aire tranquilo y la velocidad del viento.

19. Tere y Lety pueden coser juntas un traje en 24 horas. Si Tere trabaja solo durante 6 horas y luego Lety completa el trabajo en 36 horas, ¿cuántas horas demorará cada una sola en coser el traje?

20. Luis y Paco pueden podar un cesped en 24 horas. Después de que Luis trabajó solo durante 7 horas, Paco se unió al trabajo y juntos terminarón el resto en 20 horas. ¿Cuánto tiempo demora cada uno en hacer el trabajo solos?

TEMA VII

# ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO EN UNA VARIABLE

7.1 Las diversas formas de una ecuación cuadrática.

7.2 Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas.

7.3 Solución de ecuaciones cuadráticas por Factorización.

7.4 Solución de ecuaciones cuadráticas completando trinomios cuadrados perfectos.

7.5 Solución de ecuaciones cuadráticas por la Fórmula General.

7.6 Ecuaciones reducibles a cuadráticas.

7.7 Problemas que se resuelven por medio de una ecuación de segundo grado.

## 7.1 LAS DIVERSAS FORMAS DE UNA ECUACION CUADRATICA

Las ecuaciones de segundo grado ó ecuaciones cuadráticas con una variable, si están simplificadas tienen la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde **x** es la variable y $a$, $b$, $c$ son los coeficientes y son números específicos. Observa que esta ecuación es un trinomio cuadrático igualado a cero.

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es **la forma general** de una ecuación cuadrática, de tal manera que si se le asignan valores específicos a sus coeficientes obtendremos ecuaciones cuadráticas particulares.

EJEMPLOS:

$$3x^2 + 7x + 5 = 0$$
$$5x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$2x^2 + 4x - 7 = 0$$
$$x^2 - 6x - 1 = 0$$

A este tipo de ecuaciones de segundo grado en los cuales $a$, $b$, y $c$ son todos diferentes de cero se les llama **ecuaciones completas**.

Aquellas ecuaciones en las cuales $b$ ó $c$ son igual a cero se les llama ecuaciones de segundo grado **incompletas**, son de la forma $ax^2 + bx = 0$ y $ax^2 + c = 0$.

EJEMPLOS:

$$2x^2 - 5 = 0$$
$$4x^2 + 3x = 0$$
$$5x^2 - 2x = 0$$
$$x^2 + 9 = 0$$

Lo que nunca debe de suceder es que el coeficiente de $x^2$ sea cero, ya que entonces no sería ecuación de segundo grado.

Algunas veces se nos presentan ecuaciones en las que a simple vista no hay término cuadrático, para asegurar el grado de una ecuación primero hay que hacer las simplificaciones necesarias y poner la ecuación en forma general, y ya hecho ésto definir el grado de la ecuación.

EJEMPLO: La ecuación $\frac{5}{x - 2} + 3x = 2$ a primera vista parece de primer grado ya que no hay término cuadrático, pero si quitamos denominadores y la ponemos en forma general tenemos:

$$(x - 2)\left(\frac{5}{x - 2} + 3x\right) = (x - 2)(2)$$

$$\frac{(x - 2)(5)}{x - 2} + (x - 2)(3x) = 2x - 4$$

$$5 + 3x^2 - 6x = 2x - 4$$

$$3x^2 - 6x - 2x + 5 + 4 = 0$$

$$3x^2 - 8x + 9 = 0$$

Obtuvimos una ecuación de segundo grado.

**Las soluciones ó raíces** de una ecuación de segundo grado son aquellos valores que satisfacen la ecuación, es decir si sustituimos algún valor que sea solución en lugar de la x la ecuación debe de reducirse a una identidad; si la ecuación de segundo grado está en la forma general la identidad debe de ser 0 = 0. Como la ecuación es de segundo grado tendrá dos raíces reales o imaginarias.

## 7.2 SOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS INCOMPLETAS.

### ALGO SOBRE RAICES CUADRADAS.

Para encontrar las soluciones o raíces de ecuaciones de segundo grado necesitaremos algunos conocimientos elementales sobre raíces cuadradas.

DEFINICIÓN 1: $\boxed{\sqrt{a} = b \text{ si y sólo si } b^2 = a}$

Al símbolo $\sqrt{\phantom{a}}$ se le llama **radical** y a es el **radicando**.

Ejemplos: $\sqrt{9} = \pm 3$ ya que $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$
$\sqrt{36} = \pm 6$ ya que $6^2 = 36$ y $(-6)^2 = 36$
$\sqrt{169} = \pm 13$ ya que $13^2 = 169$ y $(-13)^2 = 169$

Por esto es que decimos que la raíz cuadrada tiene dos resultados, un positivo y un negativo.

Pero si tratamos de calcular la raíz cuadrada de un número negativo veamos que pasa.

Para encontrar el valor de $\sqrt{-9}$ por la definición 1 hay que encontrar un número que al elevarlo al cuadrado nos dé -9, el cuál no existe en los números Reales; ya que toda potencia al cuadrado es positiva. A este tipo de números se les llama **números imaginarios**.

DEFINICIÓN 2: $\boxed{\sqrt{a} = a^{1/2}\text{, esto quiere decir que la raíz cuadrada es una potencia con exponente } \frac{1}{2}.}$

Usando esta definición podemos deducir lo siguiente:

$$\sqrt{a^2} = (a^2)^{1/2} = a^{2/2} = a^1 = a$$

Ésto nos dice que la raíz cuadrada de un número elevado al cuadrado es igual al número, comunmente se dice que la raíz cuadrada y el cuadrado se eliminan. Podemos afirmar que la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado y viceversa.

EJEMPLOS: $\sqrt{3^2} = 3$, $\sqrt{7^2} = 7$, $\sqrt{a^2} = a$, $(\sqrt{5})^2 = 5$, $(\sqrt{15})^2 = 15$.

DEFINICIÓN 3: La operación inversa de elevar al cuadrado es extraer raíz cuadrada, y la operación inversa de la raíz cuadrada es elevar al cuadrado.

**SOLUCIONES DE ECUACIONES INCOMPLETAS**

Las soluciones de una ecuación de segundo grado **incompleta** de la forma $ax^2 + c = 0$ se encuentran despejando la variable de la siguiente manera:

$$ax^2 + c = 0$$
$$ax^2 = -c$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$
$$\boxed{x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

OBSERVACIÓN: Para que **x** sea una **raíz real**, *a* ó *c* debe de ser menor que cero, así el radicando será positivo y existirá su raíz. Si ésto no sucede entonces las raíces serán imaginarias.

Puedes encontrar las soluciones haciendo el despeje ó simplemente sustituyendo en $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, de cualquier forma obtienes las mismas soluciones.

EJEMPLO 1) Encuentra las soluciones de $4x^2 - 9 = 0$.

SOLUCIÓN 1: Despejamos a **x** cómo se indicó.

$$4x^2 = 9$$
$$x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x = \pm\frac{3}{2}$$

Las soluciones son $\frac{3}{2}$ y $-\frac{3}{2}$

SOLUCIÓN 2: Como es una ecuación incompleta de la forma $ax^2 - c = 0$

sus soluciones son de la forma $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

En este caso $a = 4$ y $c = -9$.

Sustituimos y tenemos: $x = \pm\sqrt{-\frac{-9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$

Las soluciones son $\frac{3}{2}$ y $-\frac{3}{2}$

EJEMPLO 2) Encuentra las soluciones de $3x^2 - 12 = 0$.

SOLUCIÓN: Despejamos a **x** y tenemos:

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = \frac{12}{3} = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

Las soluciones son 2 y -2.

También se puede resolver sustituyendo en $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, se deja de ejercicio al lector.

Las soluciones de una ecuación de segundo grado **incompleta** de la forma $ax^2 + bx = 0$ se encuentran factorizando de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \quad ó \quad ax + b = 0 \quad \begin{cases}\text{Un producto es cero si alguno} \\ \text{de los factores es cero.}\end{cases}$$

$\boxed{x = 0}$ es una solución.

y de $\quad ax + b = 0 \longrightarrow \boxed{x = -\frac{b}{a}}$ segunda solución.

Puedes encontrar las soluciones haciendo la factorización paso por paso ó simplemente sustituyendo en $x = -\frac{b}{a}$ y la otra solución es $x = 0$, de cualquier forma obtienes las mismas soluciones.

EJEMPLO 1) Encuentra las soluciones de $2x^2 - 8x = 0$.

SOLUCIÓN 1: Factorizamos y tenemos:

$$2x^2 - 8x = 0$$

$$x(2x - 8) = 0$$

$$\boxed{x = 0} \quad ó \quad 2x - 8 = 0$$

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$\boxed{x = 4}$$

Las soluciones son 0 y 4.

SOLUCIÓN 2) Como nuestra ecuación es $2x^2 - 8x = 0$ entonces $a = 2$ y $b = -8$, sustituyendo en $x = -\frac{b}{a}$ tenemos:

$$x = -\frac{-8}{2} = 4$$ y la otra solución es $x = 0$.

Las soluciones son 0 y 4.

EJEMPLO 2) Encuentra las soluciones de $3x^2 + 5x = 0$.

SOLUCIÓN: Factorizamos y tenemos:

$$3x^2 + 5x = 0$$
$$x(3x + 5) = 0$$
$$\boxed{x = 0} \quad ó \quad 3x + 5 = 0$$
$$3x = -5$$
$$\boxed{x = -\frac{5}{3}}$$

Las soluciones son 0 y $-\frac{5}{3}$.

**EJERCICIO 7.2**

Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones.

| | |
|---|---|
| 1) $3x^2 - 27 = 0$ | 2) $-2x^2 + 8 = 0$ |
| 3) $x^2 - 25 = 0$ | 4) $4x^2 - 36 = 0$ |
| 5) $-2x^2 + 32 = 0$ | 6) $x^2 + 16 = 0$ |
| 7) $2x^2 + 18 = 0$ | 8) $-5x^2 - 5 = 0$ |
| 9) $2x^2 - 5x = 0$ | 10) $3x^2 + 12x = 0$ |
| 11) $-4x^2 + 20x = 0$ | 12) $x^2 + 5x = 0$ |
| 13) $7x^2 - 2x = 0$ | 14) $-3x^2 + 2x = 0$ |
| 15) $3x^2 - 6x = 0$ | 16) $8x^2 + 12x = 0$ |

## 7.3 SOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS POR FACTORIZACION.

Es más interesante tratar con ecuaciones de segundo grado en las cuales ninguno de sus coeficientes vale cero, a este tipo de ecuaciones se les llama **completas** y son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Uno de los principales métodos para encontrar sus soluciones es por factorización. Este método consiste en expresar el trinomio de segundo grado como producto de dos factores lineales.

Te recomiendo des un repaso a la factorización de trinomios, se encuentra en el TEMA III.

EJEMPLO 1) Encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$.

SOLUCIÓN: Factorizamos el trinomio $x^2 + 5x + 6$ y después se iguala a cero.

$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ entonces

$(x + 2)(x + 3) = 0$

$(x + 2) = 0$ ó $(x + 3) = 0$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Un producto es cero si alguno}\\ \text{de los factores es cero.}\end{array}\right.$

Si $x + 2 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = -2}$

Si $x + 3 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = -3}$

Las soluciones son -2 y -3.

Las comprobaciones de los resultados se dejan de ejercicio al lector.

EJEMPLO 2) Encontrar las soluciones de $2x^2 + x - 3 = 0$.

SOLUCIÓN: Factorizamos el trinomio $2x^2 + x - 3$ y se iguala a cero.

$2x^2 + x - 3 = (x - 1)(2x + 3)$ entonces:

$(x - 1)(2x + 3) = 0$

$(x - 1) = 0$ ó $(2x + 3) = 0$

Si $x - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 1}$

Si $2x + 3 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}}$

Las soluciones son 1 y $-\frac{3}{2}$.

EJEMPLO 3) Encontrar las soluciones de $5x^2 - 12x + 7 = 0$.

SOLUCIÓN: $5x^2 - 12x + 7 = (x - 1)(5x - 7)$ entonces:

$$(x - 1)(5x - 7) = 0$$

$$(x - 1) = 0 \quad ó \quad (5x - 7) = 0$$

$$\text{Si} \quad x - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\text{Si} \quad 5x - 7 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{7}{5}}$$

Las soluciones son $1$ y $\frac{7}{5}$.

**EJERCICIO 7.3**

Por factorización encuentra las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones.

1) $x^2 - 4x - 5 = 0$
2) $x^2 - x - 12 = 0$
3) $x^2 + 2x - 15 = 0$
4) $x^2 - 6x + 8 = 0$
5) $x^2 + 7x - 18 = 0$
6) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
7) $6x^2 + x - 12 = 0$
8) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
9) $5x^2 - 4x - 1 = 0$
10) $3x^2 - 8x - 3 = 0$
11) $7x^2 - 15x - 52 = 0$
12) $4x^2 - x - 3 = 0$

---

## 7.4 SOLUCION DE ECUACIONES COMPLETANDO TRINOMIOS CUADRADOS PERFECTOS

En algunas ocaciones utilizar el método de factorización se hace un poco difícil, por eso es conveniente saber otro método para encontrar las soluciones de una ecuación de segundo grado; este método también lo utilizaras como herramienta en temas posteriores.

Se te recomienda seguir los siguientes pasos para la utilización de este método.

1o) La ecuación debe de estar en la forma $x^2 + bx + c = 0$.
Observa que el coeficiente de $x^2$ es 1.

2o) Colocar el término independiente que es $c$ en el miembro derecho de la ecuación.

3o) Sumar a los dos miembro de la ecuación el cuadrado de la mitad del coeficiente de $x$, es decir sumar $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

4o) El trinomio que resulta en el miembro izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto, y se factoriza como el cuadrado de un binomio.

5o) Extraer raíz cuadrada a los dos miembros de la ecuación, del lado izquierdo se eliminará el cuadrado y la raíz.

6o) Despejar la variable y obtendremos sus valores.

EJEMPLO 1) Encontrar las soluciones de $2x^2 - 6x + 3 = 0$.

SOLUCIÓN:

1o) Convertiremos la ecuación a la forma $x^2 + bx + c = 0$.
Para que el coeficiente de la $x^2$ sea 1, dividimos entre 2 la ecuación $2x^2 - 6x + 3 = 0$ y tenemos:

$$\frac{2x^2 - 6x + 3}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 0$$

2o) Colocamos el término independiente en el miembro derecho de la igualdad. $x^2 - 3x = -\frac{3}{2}$

3o) Sumamos a los dos miembros de la ecuación el cuadrado de la mitad del coeficiente de $x$, este será $\left(\frac{3}{2}\right)^2$.

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

4o) Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto que está en el miembro izquierdo de la ecuación:

$$(x - \frac{3}{2})^2 = - \frac{3}{2} + \frac{9}{4}$$

5o) Extraemos raíz cuadrada de los dos miembros.

$$\sqrt{(x - \frac{3}{2})^2} = \sqrt{- \frac{3}{2} + \frac{9}{4}}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

6o) Resolvemos la ecuación y tenemos:

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Una solución es $\boxed{x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}}$, y la segunda es $\boxed{x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}}$

EJEMPLO 2) Encontrar las soluciones de $3x^2 - 7x - 3 = 0$.

SOLUCIÓN:

1o) Convertiremos la ecuación a la forma $x^2 + bx + c = 0$.

Para que el coeficiente de la $x^2$ sea 1, dividimos entre 3 la ecuación $3x^2 - 7x - 3 = 0$ y tenemos:

$$\frac{3x^2 - 7x - 3}{3} = \frac{0}{3}$$

$$x^2 - \frac{7}{3} x - 1 = 0$$

2o) Colocamos el término independiente en el miembro derecho de la igualdad. $x^2 - \frac{7}{3} x = 1$

3o) Sumamos a los dos miembros de la ecuación el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, la mitad al cuadrado es $\left(\frac{7}{6}\right)^2$.

$$x^2 - \frac{7}{3}x + \left(\frac{7}{6}\right)^2 = 1 + \left(\frac{7}{6}\right)^2$$

4o) Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto que está en el miembro izquierdo de la ecuación:

$$(x - \frac{7}{6})^2 = 1 + \frac{49}{36}$$

5o) Extraemos raíz cuadrada de los dos miembros.

$$\sqrt{(x - \frac{7}{6})^2} = \sqrt{1 + \frac{49}{36}}$$

$$x - \frac{7}{6} = \pm\sqrt{\frac{85}{36}}$$

6o) Resolvemos la ecuación.

$$x - \frac{7}{6} = \frac{\pm\sqrt{85}}{6}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{85}}{6} + \frac{7}{6}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{85}}{6}$$

Una solución es $\boxed{x = \frac{7 + \sqrt{85}}{6}}$, y la segunda es $\boxed{x = \frac{7 - \sqrt{85}}{6}}$.

En el ejemplo que sigue omitiremos la numeración de los pasos y resolveremos el ejemplo solo con las ecuaciones equivalentes.

EJEMPLO 3) Resolver la ecuación $5x^2 - 9x - 44 = 0$.

SOLUCIÓN: $$\frac{5x^2 - 9x - 44}{5} = \frac{0}{5}$$

$$x^2 - \frac{9}{5}x - \frac{44}{5} = 0$$

$$x^2 - \frac{9}{5}x = \frac{44}{5}$$

$$x^2 - \frac{9}{5}x + \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{44}{5} + \left(\frac{9}{10}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{9}{10}\right)^2 = \frac{44}{5} + \frac{81}{100}$$

$$\left(x - \frac{9}{10}\right)^2 = \frac{961}{100}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{9}{10}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{961}{100}}$$

$$x - \frac{9}{10} = \pm\frac{31}{10}$$

$$x = \frac{9}{10} \pm \frac{31}{10}$$

$$x = \frac{9 \pm 31}{10}$$

La primera solución es $x = \frac{9 + 31}{10} = \frac{40}{10} = 4$; $\boxed{x = 4}$

La segunda solución es $x = \frac{9 - 31}{10} = \frac{-22}{10} = -\frac{11}{5}$; $\boxed{x = -\frac{11}{5}}$

Recuerda que para verificar si efectivamente los valores encontrados son las soluciones correctas, solo tienes que sustituir cada uno de los valores en la ecuación original y checar que quede una igualdad verdadera.

Por medio de este método podemos encontrar la solución de cualquier ecuación de segundo grado.

EJERCICIO 7.4

Encontrar las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones de segundo grado completando trinomios cuadrados perfectos.

| | |
|---|---|
| 1) $x^2 - 4x + 3 = 0$ | 2) $x^2 - 9x + 8 = 0$ |
| 3) $x^2 - 6x + 2 = 0$ | 4) $x^2 - 5x + 7 = 0$ |
| 5) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ | 6) $4x^2 - x - 3 = 0$ |
| 7) $3x^2 - 5x - 2 = 0$ | 8) $2x^2 + 4x - 8 = 0$ |
| 9) $6x^2 + 13x - 5 = 0$ | 10) $5x^2 - 7x - 90 = 0$ |
| 11) $9x^2 - 17x - 2 = 0$ | 12) $4x^2 + 8x - 3 = 0$ |
| 13) $7x^2 - 8x + 1 = 0$ | 14) $3x^2 - 10x - 2 = 0$ |

## 7.5 SOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS POR LA FORMULA GENERAL.

Otro de los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas es utilizando la Fórmula General, es considerado el más simple de los métodos porque sólo se sustituyen los coeficientes y se resuelve la operación aritmética resultante. Por medio de la Fórmula General se pueden encontrar las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado ya sea completa ó incompleta.

Para saber cuál es la Fórmula General tenemos que resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, lo haremos completando un trinomio cuadrado perfecto.

SOLUCIÓN:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

Entonces tenemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} \quad \text{Como } \sqrt{4a^2} = \sqrt{(2a)^2} = 2a$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Es la Fórmula General que nos da dos soluciones que al separarlas son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Recuerda que si $b^2 - 4ac$ es negativo no existirá su raíz cuadrada y entonces las soluciones son **imaginarias**.

Para resolver una ecuación cuadrática usando la Fórmula General lo primero que hay que hacer es acomodar la ecuación que nos den en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, para tener bien definidos los valores de los coeficientes $a$, $b$ y $c$.

EJEMPLO 1) Encontrar las soluciones de la ecuación $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

SOLUCIÓN: En esta ecuación $a = 3$, $b = -5$ y $c = -2$ sustituyendo en la Fórmula General tenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

La primera solución es $x = \frac{5 + 7}{6} = \frac{12}{6} = \boxed{2}$

Y la segunda es $x = \frac{5 - 7}{6} = \frac{-2}{6} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

EJEMPLO 2) Encontrar las soluciones de $4x^2 - x - 5 = 0$.

SOLUCIÓN: En esta ecuación $a = 4$, $b = -1$ y $c = -5$ sustituyendo en la Fórmula General tenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(4)(-5)}}{2(4)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{8} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{1 \pm 9}{8}$$

La primera solución es $x = \frac{1 + 9}{8} = \frac{10}{8} = \boxed{\frac{5}{4}}$

Y la segunda es $x = \frac{1 - 9}{8} = \frac{-8}{8} = \boxed{-1}$

EJEMPLO 3) Encontrar las soluciones de $5x^2 - 7x + 2 = 0$.

SOLUCIÓN: En esta ecuación $a = 5$, $b = -7$ y $c = 2$ sustituyendo en la Fórmula General tenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(5)(2)}}{2(5)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{10} =$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{9}}{10} = \frac{7 \pm 3}{10}$$

La primera solución es $x = \frac{7 + 3}{10} = \frac{10}{10} = \boxed{1}$

Y la segunda es $x = \frac{7 - 3}{10} = \frac{4}{10} = \boxed{\frac{2}{5}}$

**EJERCICIO 7.5**

Encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones usando la Fórmula General.

| | |
|---|---|
| 1) $x^2 + 2x - 3 = 0$ | 2) $x^2 - 6x + 2 = 0$ |
| 3) $2x^2 - 3x - 1 = 0$ | 4) $2x^2 + 10x - 12 = 0$ |
| 5) $5x^2 + 12x + 4 = 0$ | 6) $2x^2 + 5x - 12 = 0$ |
| 7) $3x^2 - 10x - 2 = 0$ | 8) $5x^2 - 2x - 4 = 0$ |
| 9) $6x^2 - 5x - 6 = 0$ | 10) $7x^2 - 8x + 1 = 0$ |
| 11) $3x^2 - 14x + 5 = 0$ | 12) $8x^2 - 2x + 3 = 0$ |
| 13) $4x^2 + 3x - 22 = 0$ | 14) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ |

## 7.6 ECUACIONES REDUCIBLES A CUADRATICAS.

Cuando nos dan una ecuación en la cuál hay paréntesis ó fracciones éstas pueden escribirse en formas más sencillas y llevarse a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ la cuál se puede resolver por cualquier método ya vistos antes.

EJEMPLO 1) Encontrar las soluciones de $3(3x - 2) = (x + 4)(x - 4)$.

SOLUCIÓN: Efectuamos los productos, igualamos a cero y reducimos términos semejantes, y obtenemos:

$$9x - 6 = x^2 - 16$$

$$0 = x^2 - 9x - 16 + 6$$

$$x^2 - 9x - 10 = 0$$

Resolvemos la ecuación $x^2 - 9x - 10 = 0$ por factorización.

$x^2 - 9x - 10 = (x - 10)(x + 1)$ entonces

$(x - 10)(x + 1) = 0 \longleftrightarrow (x - 10) = 0$ ó $(x + 1) = 0$

esto sucede si: $\boxed{x = 10}$ ó $\boxed{x = -1}$

Las soluciones son: 10 y - 1.

Recuerda que para hacer la comprobación éstos valores se sustituyen en la ecuación original y debemos obtener una igualdad verdadera.

EJEMPLO 2) Encontrar las soluciones de $(x + 2)^3 - (x - 1)^3 = x(3x + 4) + 8$.

SOLUCIÓN: Sabemos que $(x + 2)^3 = x^3 + 3(x^2)(2) + 3x(2^2) + 2^3$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

También: $(x - 1)^3 = x^3 + 3(x^2)(-1) + 3x(-1)^2 + (-1)^3$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Entonces cómo: $(x + 2)^3 - (x - 1)^3 = x(3x + 4) + 8$

Se cumple: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 3x^2 + 4x + 8$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 3x^2 + 4x + 8$$

$$9x^2 + 9x + 9 - 3x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$6x^2 + 5x + 1 = 0$$

La resolvemos por la Fórmula General.

$a = 6$, $b = 5$ y $c = 1$; sustituimos en la Fórmula General y tenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(6)(1)}}{2(6)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} =$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{-5 \pm 1}{12}$$

Una solución es $\frac{-5 + 1}{12} = \frac{-4}{12} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

La segunda solución es $\frac{-5 - 1}{12} = \frac{-6}{12} = \boxed{-\frac{2}{4}}$

EJEMPLO 3) Encuentra las soluciones de $\frac{2}{x + 1} = \frac{4}{x - 2} - 1$.

SOLUCIÓN:

El MCM de los denominadores es $(x + 1)(x - 2)$, multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el MCM y tenemos:

$$(x + 1)(x - 2)\left(\frac{2}{x + 1}\right) = (x + 1)(x - 2)\left(\frac{4}{x - 2} - 1\right)$$

$$2(x - 2) = 4(x + 1) - 1(x + 1)(x - 2)$$

$$2x - 4 = 4x + 4 - x^2 + x + 2$$
$$x^2 - 5x + 2x - 6 - 4 = 0$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Resolvemos la ecuación Factorización:

$$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5) = 0$$

Entonces $(x + 2) = 0$ ó $(x - 5) = 0$

Si $x + 2 = 0$ entonces $\boxed{x = -2}$

Si $x - 5 = 0$ entonces $\boxed{x = 5}$

Una solución es -2 y la otra 5.

EJEMPLO 4) Encuentra las soluciones de

$$\frac{x - 6}{x^2 - 6x + 8} + \frac{x + 2}{x^2 - 3x - 4} = \frac{x + 4}{x^2 - x - 2}$$

SOLUCIÓN: Factorizamos cada trinomio de los denominadores.

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$
$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$$
$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$$

El MCM de los denominadores es: $(x + 1)(x - 2)(x - 4)$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el MCM.

$$(x+1)(x-2)(x-4)\left(\frac{x - 6}{x^2 - 6x + 8} + \frac{x + 2}{x^2 - 3x - 4}\right) = (x+1)(x-2)(x-4)\left(\frac{x + 4}{x^2 - x - 2}\right)$$

$$(x + 1)(x - 6) + (x - 2)(x + 2) = (x - 4)(x + 4)$$
$$x^2 - 5x - 6 + x^2 - 4 = x^2 - 16$$
$$2x^2 - 5x - 10 - x^2 + 16 = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Resolvemos la ecuación por Factorización:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0$$

Esto sucede si $(x - 2) = 0$ ó $(x - 3) = 0$

$$\text{Si} \quad (x - 2) = 0 \quad \text{entonces} \quad \boxed{x = 2}$$

$$\text{Si} \quad (x - 3) = 0 \quad \text{entonces} \quad \boxed{x = 3}$$

Una solución es 2 y la otra 3.

**EJERCICIO 7.6**

Encuentra las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones.

**1)** $x^2 - 5(x + 2) = 7(x - 3) - 5(x^2 - 1)$

**2)** $23 + (2x - 3)^2 = (x + 5)^2$

**3)** $2(x - 5)^2 - 25(1 - x) = x^2 + 27$

**4)** $(x - 5)(x + 5) + 2(x + 3)^2 = (x + 2)(x - 2) + 7(x - 1) + 1$

**5)** $x(3x + 4) - (x + 2)^3 = - 8 - (x - 1)^3$

**6)** $20x(x - 2) + 27 = (5x - 4)^2 - (3x + 5)(2x - 1)$

**7)** $\frac{3}{5} - \frac{x^2}{2} = \frac{x}{10}$ **8)** $\frac{x^2}{6} - 3(x - 5) = \frac{x}{2}$

**9)** $\frac{x - 15}{4x - 3} = 2x + 9$ **10)** $5 - \frac{1}{x - 2} = \frac{24}{x + 3}$

**11)** $\frac{2x}{3x + 2} - 3 = \frac{5x}{2x - 1}$ **12)** $\frac{3x - 1}{x} = \frac{7}{6} + \frac{2x}{2x - 1}$

**13)** $$\frac{2}{x^2 + 2x - 3} + \frac{22}{x^2 + 5x + 6} = \frac{3x}{x^2 + x - 2}$$

**14)** $$\frac{10}{x^2 - 2x - 3} = \frac{22}{x^2 + x - 12} + \frac{3x}{x^2 + 5x + 4}$$

**15)** $$\frac{8}{3x^2 - 10x + 3} + \frac{18x}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{19x}{2x^2 - 5x + 2}$$

## 7.7 PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR MEDIO DE UNA ECUACION DE 2o.GRADO

El planteo de algunos problemas conducen a una ecuación de segundo grado; que al resolverla nos da dos soluciones que serán las soluciones del problema dado siempre y cuando éstas satisfagan las condiciones del problema, y las que no satisfagan las condiciones del problema serán rechazadas.

EJEMPLO 1) Encontrar dos números naturales que sumen 23 y la diferencia de sus cuadrados supera en 41 al producto de los números.

SOLUCIÓN:

Sea $x$ un número y el segundo será $23 - x$ ya que suman 23.

La diferencia de sus cuadrados es: $x^2 - (23 - x)^2$.

La diferencia de sus cuadrados supera en 41 al producto de los números; para que sean iguales se le resta 41 al mayor y tenemos: $x^2 - (23 - x)^2 - 41 = x(23 - x)$

Quitamos paréntesis e igualamos a cero:

$$x^2 - (23^2 - 46x + x^2) - 41 = 23x - x^2$$

$$x^2 - 529 + 46x - x^2 - 41 - 23x + x^2 = 0$$

$$x^2 + 23x - 570 = 0$$

Factorizando: $(x + 38)(x - 15) = 0$

Si $x + 38 = 0$ entonces $x = -38$

Si $x - 15 = 0$ entonces $x = 15$

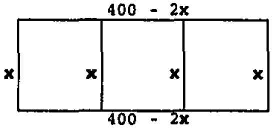
Como los números son naturales descartamos $-38$.

Los números son: 15 y 8.

EJEMPLO 2) Se pretende cercar un terreno rectángular y dividirlo en tres partes con dos cercas interiores y paralelas a uno de los lados. Encuentra las dimensiones del terreno si la longitud total de las cercas es de 800 mts. y el área del terreno es de 19200 $m^2$.

SOLUCIÓN: Sea $x$ el ancho del terreno, ver la figura.

Como la longitud de la cerca es 800, al colocarla en los 4 lados paralelos lo que nos resta es 800-4x que será para cercar los 2 lados restantes que son iguales, entonces cada uno mide la mitad de 800 - 4x que es 400 - 2x.




El área del terreno es *base x altura* = (400-2x)x y es igual a 19200 $m^2$, de ésto surge nuestra ecuación que es:

$$(400 - 2x)x = 19200$$
$$400x - 2x^2 = 19200$$
$$0 = 2x^2 - 400x + 19200$$

Dividimos toda la ecuación entre 2 y tenemos:

$$x^2 - 200x + 9600 = 0$$

Factorizando: $$(x - 80)(x - 120) = 0$$

Si $x - 80 = 0$ entonces $\boxed{x = 80}$

Si $x - 120 = 0$ entonces $\boxed{x = 120}$

Si la altura mide 80 entonces la base medirá 400 - 2(80) = 240m.
Si la altura mide 120 entonces la base medirá 400-2(120) = 160m.
Cualquiera de estas soluciones satisfacen las condiciones del problema.

EJEMPLO 3) Pedro compró varios sacos de azúcar por N$240. Si hubiera comprado 3 sacos más por el mismo dinero cada saco le habría costado N$4 menos. ¿Cuátos sacos compró y ha que precio?

SOLUCIÓN: Sea x el número de sacos que compró.
Entonces cada saco le costó $\frac{240}{x}$ .
Si hubiera comprado 3 sacos más serían x + 3 sacos, y por el mismo dinero entonces cada saco costaría $\frac{240}{x+3}$ que es N$4 menos que el primer precio; esto da lugar a la ecuación:

$$\frac{240}{x + 3} = \frac{240}{x} - 4$$

Para resolverla hay que llevarla a la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el MCM de los denominadores que es $x(x + 3)$, y tenemos:

$$x(x + 3)\left(\frac{240}{x + 3}\right) = x(x + 3)\left(\frac{240}{x} - 4\right)$$

$$240x = 240(x + 3) - 4x(x + 3)$$

$$240x = 240x + 720 - 4x^2 - 12x$$

$$240x - 240x + 4x^2 + 12x - 720 = 0$$

$$4x^2 + 12x - 720 = 0$$

Dividimos toda la ecuación entre 4 y nos resulta:

$$x^2 + 3x - 180 = 0$$

$$(x + 15)(x - 12) = 0$$

Si $x + 15 = 0$ entonces $\boxed{x = -15}$

Si $x - 12 = 0$ entonces $\boxed{x = 12}$

Como no se pueden comprar - 15 sacos esta solución se descarta. Entonces Pedro compro 12 sacos y cada uno costó $\frac{240}{12} = 20$.

La solución al problema es: Pedro compró 12 sacos de azúcar a N$20 cada uno.

EJEMPLO 4) Un pescador en su lancha puede recorrer 16 km. río abajo y regresar en un total de 6 horas. Si la velocidad de la corriente es de 2km. por hora, hallar la velocidad a la que el pescador puede remar en aguas tranquilas.

SOLUCIÓN: Sea $x$ la velocidad en km/h a la que puede remar el pescador en aguas tranquilas, entonces la velocidad río abajo será $x$ + velocidad de la corriente $= x + 2$ y la velocidad río arriba será $x$ - velocidad de la corriente $= x - 2$.

Usamos la fórmula de Física $d = v \cdot t \longrightarrow t = \frac{d}{v}$.

Tiempo que tarda en remar río abajo es $\frac{16}{x + 2}$.

El tiempo que tarda en remar río arriba será $\frac{16}{x - 2}$.

El tiempo que tarda en remar río abajo más el tiempo que tarda en remar río arriba es igual a 6 horas, de esto resulta la ecuación:

$$\frac{16}{x+2} + \frac{16}{x-2} = 6$$

Para resolverla hay que llevarla a la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el MCM de los denominadores que es $(x + 2)(x - 2)$, y tenemos:

$$(x+2)(x-2)\left(\frac{16}{x+2} + \frac{16}{x-2}\right) = (x+2)(x-2)(6)$$

$$16(x-2) + 16(x+2) = 6(x^2 - 4)$$

$$16x - 32 + 16x + 32 = 6x^2 - 24$$

$$0 = 6x^2 - 24 - 32x$$

Dividimos entre 2 a toda la ecuación y resulta: $3x^2 - 16x - 12 = 0$

Para encontrar sus soluciones usamos la Fórmula General, en la cuál $a = 3$, $b = -16$ y $c = -12$. Sustituyendo estos valores tenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(3)(-12)}}{2(3)} =$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{256 + 144}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{400}}{6} = \frac{16 \pm 20}{6}$$

Una solución es: $\frac{16 + 20}{6} = \frac{36}{6} = \boxed{6}$

Otra solución es: $\frac{16 - 20}{6} = \frac{-4}{6} = \boxed{-\frac{2}{3}}$

Como no puede haber una velocidad negativa descartamos $-\frac{2}{3}$.

Así que la velocidad a la que puede remar el pescador en aguas tranquilas es 6 km/h.

EJERCICIO 7.7

Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

1) El producto de dos números enteros consecutivos supera en 100 al cuádruplo del siguiente número consecutivo. Encontrar los tres números.
2) La suma de dos números es 26 y de sus cuadrados es 370. Encontrar los números.
3) La suma de dos números naturales es 22 y la diferencia de sus cuadrados supera en 71 al producto de los números. Hallar los números.
4) La diferencia de dos números es 2 y la suma de sus cuadrados es 74. Hallar los números.
5) La diferencia de dos números naturales es 7 y la suma de sus recíprocos es $\frac{13}{30}$. Encontrar los números.
6) La altura de un triángulo es 7 cm. mayor que su base, si el área del triángulo es de 135 $cm^2$. Encontrar la longitud de su altura y de su base.
7) Se pretende cercar un terreno rectángular y dividirlo en tres partes con dos cercas interiores y paralelas a uno de los lados. Encuentra las dimensiones del terreno si la longitud total de las cercas es de 800 mts. y el área del terreno es de 20000 $m^2$.
8) Una pintura con 6 cm. más de longitud que de anchura, tiene margenes superior e inferior de 3cm de ancho y los margenes laterales son de 2 cm de ancho. La pintura ocupa un espacio de 165 $cm^2$. Encuentra las dimensiones de la pintura con margenes.
9) Se cercará un terreno rectángular en sus cuatro lados y se dividirá en dos partes por una cerca interior y paralelas a uno de los lados. Encuentra las dimensiones del terreno si la longitud total de la cerca es de 600 mts. y el área del terreno es de 15000 $m^2$.
10) Un granjero desea cercar un terreno rectangular de 46 mts. de perímetro un río corre a lo largo de un lado, entonces no cercará ese

lado. Encontrar cuántos metros de cerca debe comprar para cercar los tres lados del terreno si éste tiene un área de 112 $m^2$.

11) La maestra de Jorge le dejo el trabajo de contruir una caja de cartón abierta. La caja debe de tener la base cuadrada, los lados de 9 cm. de altura y una capacidad de 5184 $cm^3$. Encontrar el tamaño de la pieza de cartón que debe comprar para construir la caja.

12) Anita compró varios libros por N$180. Si hubiera comprado 6 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado N$1 más. ¿Cuántos libros compró y cuanto le costó cada uno?

13) El viaje a una práctica de campo salió en N$448. Si hubieran ido 4 estudiantes más el costo por estudiante habría sido de N$2 menos. ¿Cuántos estudiantes fueron a la práctica de campo?

14) Un grupo de estudiantes compró una cámara fotográfica que costó N$1200. El dinero que paga cada estudiante excede en 194 al número de estudiantes que hicieron la compra. ¿Cuántos estudiantes compraron la cámara fotográfica?

15) Omar compró cierto número de paletas por N$24. Si cada paleta le hubiera costado N$1 menos, podría haber comprado 4 paletas más por el mismo dinero. ¿Cuántas plumas compró Omar y a que precio?

16) Un principiante de canotaje puede recorrer 12 km río abajo y regresar en un total de 5 horas. Si la velocidad de la corriente es de 1 km/h, encuentra la velocidad a la que puede remar el principiante en aguas tranquilas.

17) Un avión vuela entre dos ciudades separadas 300 km. Cuando el viento sopla a favor a 30 km/h, el avión alcanza su destino $\frac{1}{2}$ hora antes. ¿Cuál es la velocidad del avión?

18) Cesar vive a 30 km. de su trabajo. Si viaja en su bicicleta a 5 km/h más de lo usual, llega a su trabajo 5 minutos más temprano. ¿A que velocidad maneja normalmente su bicicleta?

TEMA VIII

# E X P O N E N T E S
# Y
# R A D I C A L E S

8.1 Otras propiedades de los exponentes.

8.2 Definición de radical.

8.3 Simplificación de radicales.

8.4 Adición de radicales.

8.5 Multiplicación de radicales.

8.6 División de radicales.

8.7 Racionalización.

En este tema completaremos el estudio acerca de los exponentes que ya abordamos en el TEMA II, y estudiaremos con mayor detalle a los Radicales ya que sólo hicimos mención a ellos en el TEMA VII.

Puedo decir que este Tema es complementario y optativo así que puede omitirse del programa ó dejarse como tema de estudio al alumno, ya que necesitará de éstos en estudios posteriores de Matemáticas.

---

## 8.1 OTRAS PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES.

Antes de continuar con las nuevas propiedades de los exponentes te recomiendo des un repaso a las primeras propiedades de los exponentes en el TEMA II, ya que a estas alturas es probable que hayas perdido habilidad en su manejo.

Recuerda que $x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ en donde el factor $x$ es llamado *la base* y 5 es el *exponente*, la expresión $x^5$ es llamada *potencia*.

Las primeras propiedades de los exponente son:

Si $X, Y \in \mathbb{R}$ con $X, Y \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{N}$ entonces se cumple:

1) $X^m X^n = X^{m+n}$

2) $(X^m)^n = X^{m \cdot n}$

3) $(XY)^n = X^n Y^n$

4) $\dfrac{X^n}{X^m} = \begin{cases} X^{n-m} & \text{si } n > m \\ X^{m-n} & \text{si } m > n \end{cases}$

5) $\left(\dfrac{X}{Y}\right)^n = \dfrac{X^n}{Y^n}$ con $Y \neq 0$.

Hasta aquí hemos trabajado con exponentes naturales, éstos se pueden ampliar a exponentes negativos y cero. Al hacerlo se debe de tener cuidado en respetar las propiedades de los exponentes naturales es decir que se sigan cumpliendo como lo hemos visto.

**EXPONENTE CERO.**

Al hacer las siguientes operaciones veamos que sucede:

$X^0X^3 = X^{0+3} = X^3$ .......aplicando la propiedad 1.

$\frac{X^5}{X^0} = X^{5-0} = X^5$ .......aplicando la propiedad 4.

Esto nos hace pensar que la potencia $X^0$ es igual a 1 y todo funciona bien, ya que se conservan las propiedades anteriores.

Veamos que pasa con la propiedad 5.

$$\frac{X^n}{X^n} = X^{n-n} = X^0$$

Por otro lado: $\frac{X^n}{X^n} = 1$ ya que todo número diferente de cero al dividirlo entre el mismo es igual a 1.

Y como $\frac{X^n}{X^n} = \frac{X^n}{X^n}$ entonces $X^0 = 1$

| |
|---|
| **PROPIEDAD 6:** Si $X \in \mathbb{R}$ con $X \neq 0$ entonces se cumple que: $X^0 = 1$ |

EJEMPLOS:
1) $5^0 = 1$
2) $(\frac{a}{2})^0 = 1$ con $a \in \mathbb{R}$.
3) $(X^3Y^2)^0 = 1$
4) $(X^4 - Y^3)^0 = 1$

Ahora analicemos a los exponentes negativos con algunos ejemplos.

$$a^2a^{-2} = a^{2+(-2)} = a^0 = 1 \qquad \text{con } a \neq 0.$$
$$b^{-3}b^3 = b^{-3+3} = b^0 = 1 \qquad \text{con } b \neq 0.$$
$$x^5x^{-5} = x^{5+(-5)} = x^0 = 1 \qquad \text{con } x \neq 0.$$

Esto nos hace pensar que $a^{-2}$ debe de ser el recíproco de $a^2$, que $b^{-3}$es el recíproco de $b^3$ y que $x^{-5}$ es el recíproco de $x^5$. Recuerda que un número es el recíproco de otro si al multiplicarlos el resultado es uno. En símbolos ésto quiere decir que:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad b^{-3} = \frac{1}{b^3} \qquad x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

Más general: Si $X \neq 0$, entonces $X^nX^{-n} = X^{n+(-n)} = X^0 = 1$

Es decir $X^{-n} = \dfrac{1}{X^n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

**PROPIEDAD 6:** Si $X \in \mathbb{R}$, $X \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $X^{-n} = \dfrac{1}{X^n}$

EJEMPLOS: 1) $y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$ 2) $-3x^{-7} = -3\left(\dfrac{1}{y^7}\right) = \dfrac{-3}{y^7}$

3) $\dfrac{7}{a^{-6}} = \dfrac{7}{\frac{1}{a^6}} = \dfrac{\frac{7}{1}}{\frac{1}{a^6}} = 7a^6$ 4) $\dfrac{a^{-2}}{b^{-5}} = \dfrac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^5}} = \dfrac{b^5}{a^2}$

Es conveniente volver a recordar que las propiedades de los exponentes sólo se aplican a productos, cocientes y potencias de otras potencias; **NO** a sumas y restas ya que son muy frecuentes los errores que se cometen al aplicar estas propiedades a expresiones algebráicas que no lo admiten.

EJERCICIO 8.1

Escribe con exponente positivo diferente de cero los siguientes términos, suponiendo que ninguna variable es cero.

1) $(168)^0 =$

2) $(a - b^2)^0 =$

3) $X^4X^0 =$

4) $\dfrac{Y^0}{Y^3} =$

5) $\dfrac{a^0}{a^0} =$

6) $(-X)^0Y^{-1} =$

7) $3y^{-2} =$

8) $\dfrac{5a^2}{3b^{-3}} =$

9) $\dfrac{m^{-2}}{n^{-2}} =$

10) $\dfrac{5x^{-1}}{2y^{-3}} =$

Simplifica los siguientes términos, los resultados no deben de tener exponente negativo ni ser cero. Se supone que ninguna variable en el denominador es cero.

11) $2(ab)^0 - (a - b)^0 =$

12) $\dfrac{(m - n)^0}{2^{-2}} =$

13) $2^3 \cdot 2^{-2} \cdot 2^0 \cdot 2^{-3} =$

14) $(3a)^2 - 4^{-1} =$

15) $5(x^{-3})(x^5) =$

16) $\dfrac{4x^0y^2}{2x^{-1}y^2} =$

17) $\dfrac{8m^{-2}n^{-4}}{6m^{-5}n^2} =$

18) $(x^3z^{-2})^{-3} =$

19) $(b^{-4})^{-2} + (a^2b^{-5}) + \dfrac{1}{(b^{-4})^2}$

20) $\left(\dfrac{x^2x^{-1}}{y^4y^{-6}}\right)^{-1} =$

Simplifica cada uno de los siguientes términos los resultados deben de ser con exponentes positivos distintos de cero, suponiendo que todas las variables en los denominadores son distintos de cero.

21) $8x^3(2xy)^2 =$

22) $\dfrac{10^{-2}}{10^{-3}} =$

23) $\dfrac{10^{23}\cdot 10^{-11}}{10^{3}\cdot 10^{-2}} =$

24) $(10^2\cdot 5^0)^{-1} =$

25) $\dfrac{6mn^{-2}}{3n^{-1}m^2} =$

26) $\left(\left(\dfrac{x^2y^{-3}z}{x^2y^{-1}z^2}\right)^2\right)^{-3} =$

27) $\left(\dfrac{2^2x^2y^0}{8x^{-1}}\right)^{-2}\left(\dfrac{x^{-2}}{x^{-5}}\right)^3 =$

28) $\left(\left(\dfrac{x^{-2}y^{-3}z^2}{x^{-1}y^{-2}z^5}\right)^{-3}\right)^{-1} =$

29) $\left(\dfrac{3^3x^0y^{-2}}{2^3x^3y^{-5}}\right)^{-1}\left(\dfrac{3^3x^{-1}y}{2^2x^2y^{-2}}\right)^2 =$

30) $(a^2 - b^2)^{-2} =$

31) $(m^{-2} + n^{-1})^{-1} =$

32) $(10^{-2} + 10^{-3})^{-1} =$

33) $\dfrac{12}{2^{-3} - 3^{-1}} =$

---

## 8.2 DEFINICION DE RADICAL.

Sabemos que la adición y la multiplicación tienen operaciones inversas, es por esto que nos preguntamos si la operación de elevar un número a una potencia no tendrá una operación inversa. Investiguemos esto.

Si nos preguntamos qué número elevado al cuadrado nos da 9, estamos hablando de una nueva operación que es la raíz cuadrada de 9. Y sabemos que el número al elevarlo al cuadrado nos da 9 es el número 3, así el 3 es la raíz cuadrada de 9; pero - 3 elevado al cuadrado también nos da 9 en consecuencia también el - 3 es la raíz cuadrada de 9. Observamos que la raíz cuadrada de 9 tiene dos resultados que son el 3 y el -3.

Análogamente, un número que elevado a la cuarta potencia nos de 625 es el 5 y el -5, por esto es que la raíz cuarta de 625 es 5 y -5.

Así mismo, el número que elevado a la sexta potencia nos da 64 es el 2 y el -2, de esto afirmamos que la raíz sexta de 64 es 2 y -2.

Pero si nos preguntamos que número elevado al cuadrado nos da - 16, nunca encontraremos dicho número ya que todo número elevado al cuadrado o a cualquier potencia par siempre es positivo.

Con este pequeño análisis llegamos a la conclusión de que las raíces pares tienen dos resultados uno positivo y otro negativo, además las raíces pares de números negativos no existen en los números Reales.

Esto es con relación a raíces pares, veamos que pasa con las raíces impares.

¿Qué número elevado al cubo nos de 8 ? y la respuesta es 2, es decir la raíz cubica de 8 es 2.

¿Qué número elevado al cubo nos da - 8 ?; y contestaremos que es el -2, es decir la raíz cubica de -8 es -2.

Similarmente el número elevado a la quinta potencia nos da 1024 es solo el 4, por esto la raíz quinta de 1024 es 4.

El número que elevado a la quinta potencia nos da -1024 es el -4, por esto es que la raíz quinta de -1024 es el -4.

Con esto concluimos que las raíces impares solo tienen una solución; si al número que se le extrae raíz es positivo su resultado es positivo, pero si el número al que se le extrae raíz es negativo el resultado es negativo, como lo hemos visto.

Con este breve análisis podemos contestar la pregunta que nos hicimos al principio del capítulo.

Así podemos afirmar que la operación de **elevar a una potencia** tiene una operación inversa que es la **extracción de raíz.**

**EJERCICIO 8.2.1**

Encuentra el número o los números que cumplan lo que se pide en cada caso.

1) Un número o números que elevados a la sexta potencia nos de 729.
2) Un número o números que elevados a la quinta potencia nos de 7776.
3) Un número o números que elevados a la séptima potencia nos de -128.
4) Un número o números que elevados a la octava potencia nos de 6561.
5) Un número o números que elevados a la sexta potencia nos de -64.
6) Un número o números que elevados al cubo nos de $27x^3$.
7) Un número o números que elevados al cuadrado nos de $81x^2y^4$.
8) Un número o números que elevados a la cuarta potencia nos de $-81m^3n^6$.
9) Un número o números que elevados al cuadrado nos de 0.
10) Un número o números que elevados a la potencia 15 nos de 1.

En general si **X** es un número que elevado a la potencia "n" nos da **Y**, entonces **X** es la raíz enésima de **Y**.

Esto es: $\boxed{\sqrt[n]{Y} = X \text{ siempre y cuando } X^n = Y.}$

No olvidemos que si "n" es par, existen dos soluciones y **Y** debe de ser mayor o igual a cero.

Y si "n" es impar existe una sola raíz, si **Y** es positivo el resultado es positivo y si **Y** es negativo el resultado es negativo.

De esto obtenemos la siguiente **definición 1:**

Si **X** y **Y** son números reales y n entero positivo entonces:

$$\sqrt[n]{Y} = \begin{cases} \pm X & \text{si } n \text{ es par y } Y \geq 0 \\ X & \text{si } n \text{ es impar y } Y > 0 \\ -X & \text{si } n \text{ es impar y } Y < 0 \end{cases}$$

$\sqrt[n]{Y}$ se lee como: "la raíz enésima de Y".

Donde "n" es el índice de la raíz, Y es el radicando y el símbolo $\sqrt{\phantom{x}}$ es llamado radical.

Ejemplos:

1) $\sqrt{16} = \pm 4$ ya que $(+4)^2 = 16$ y $(-4)^2 = 16$.

2) $\sqrt{25a^2} = \pm 5a$ ya que $(5a)^2 = 25a^2$ y $(-5a)^2 = 25a^2$.

3) $\sqrt[3]{X^6Y^3} = X^2Y$ ya que $(X^2Y)^3 = X^6Y^3$.

4) $\sqrt[5]{32b^{10}} = 2b^2$ ya que $(2b^2)^5 = 32b^{10}$.

En el capítulo anterior hablamos de exponentes enteros, pero yo creo que todos se preguntaran ¿no existirán exponentes fraccionarios?.

Para contestarnos esta pregunta, supongamos que si existen los exponentes fraccionarios y veamos si nos llevan a contradicciones aplicando las propiedades de los exponentes ya vistas.

EJEMPLO 1) Ya sabemos que $16 = (\pm 4)^2$ entonces:

$(16)^{1/2} = ((\pm 4)^2)^{1/2} = (\pm 4)^{2/2} = (\pm 4)^1 = \pm 4$

Observamos que 16 elevado al exponente 1/2 nos da ±4 y sabemos por otro lado que $\sqrt{16} = \pm 4$.

EJEMPLO 2) Sabemos que $27 = 3^3$ entonces:

$(27)^{1/3} = (3^3)^{1/3} = 3^{3/3} = 3^1 = 3$ .

Por otro lado sabemos que $\sqrt[3]{27} = 3$

EJEMPLO 3) Sabemos que $7776 = 6^5$ usándolo tenemos:

$(7776)^{1/5} = (6^5)^{1/5} = 6^{5/5} = 6^1 = 6$

Por otro lado $\sqrt[5]{7776} = 6$

Con estos tres primeros ejemplos no hemos encontrado con alguna contradicción y nos damos cuenta que los exponentes fraccionarios si tienen sentido, ya que cada uno de ellos nos está representando a un radical; vimos que el exponente 1/2 nos representa la raíz cuadrada, el exponente 1/3 nos representa la raíz cúbica, el exponente 1/4 nos representa la raíz cuarta y así sucesivamente. Ahora analicemos otro tipo de ejemplos.

EJEMPLO 4) ¿Cómo se representaría el radical $\sqrt{a^3}$ en forma de potencia con exponente fraccionario?

Sabemos que $\sqrt{a^3}$ al convertirlo a potencia es $a^3$ elevado al exponente 1/2 ya que el radical es raíz cuadrada, y nos queda así: $\sqrt{a^3} = (a^3)^{1/2}$ aplicamos las propiedades de los exponentes tenemos que $(a^3)^{1/2} = a^{3/2}$, es decir $\sqrt{a^3} = a^{3/2}$.

EJEMPLO 5) La presentación del radical $\sqrt[5]{X^2}$ como una potencia con exponente fraccionario sería:

Sabemos que $\sqrt[5]{X^2}$ es lo mismo que $X^2$ elevada al exponente 1/5 ya que el radical es raíz quinta, y aplicando las propiedades de los exponentes tenemos: $\sqrt[5]{X^2} = (X^2)^{1/5} = X^{2/5}$ es decir $\sqrt[5]{X^2} = X^{2/5}$.

EJEMPLO 6) La representación del radical $\sqrt[8]{Y^3}$ en potencia sería:

El radical $\sqrt[8]{Y^3}$ se representa como $Y^3$ elevado al exponente 1/8, después aplicamos propiedades de los exponentes y nos resulta que:

$$\sqrt[8]{Y^3} = (Y^3)^{1/8} = Y^{3/8} \quad \text{es decir} \quad \sqrt[8]{Y^3} = Y^{3/8}.$$

Con esta serie de ejemplos deducimos la siguiente definición.

DEFINICION 2: Si $X$ es un número real, $m$ y $n$ enteros positivos con $n \neq 0$, entonces $X^{n/m} = \sqrt[n]{X^m}$

Tomemos muy en cuenta la siguiente aclaración.

ACLARACION:

Por definición en las raíces pares por lo general siempre tomaremos la raíz positiva, a esta raíz positiva se le llama **Raíz Principal**. Si en algún caso llegásemos a utilizar la raíz negativa lo aclararemos.

EJEMPLOS:

1) Convertir la potencia $8^{3/2}$ en forma de radical.
El exponente de esta potencia es $3/2$ y por la definición anterior sabemos que $2$ será el índice de la raíz y $3$ del exponente del radicando, es decir $8^{3/2} = \sqrt{8^3}$

2) Convertir el radical $\sqrt[5]{3^2}$ en forma de potencia.
El índice del radical es $5$ y el exponente del radicando es $2$, entonces el exponente de la potencia resultante es $2/5$, es decir $\sqrt[5]{3^2} = 3^{2/5}$ .

3) Convertir el radical $\sqrt{2X^2Y}$ a una potencia.

El índice del radical es 2 y el exponente del radicando es 1 entonces el exponente de la potencia resultante es 1/2; así $\sqrt{2X^2Y} = (2x^2Y)^{1/2}$.

4) Convertir la potencia $(5a^2b)^{2/3}$ en un radical.

La base es $5a^2b$ será la base del radicando que estará elevado al exponente 2, y el índice del radicando será 3, es decir nos quedará así:

$$(5a^2b)^{2/3} = \sqrt[3]{(5a^2b)^2}$$

5) Convertir el radical $\sqrt[5]{25X^2Y^4}$ en forma de potencia.

El radicando que es $25X^2Y^4$ es igual a $5^2X^2Y^{2\cdot 2}$ y esto es igual a $(5XY^2)^2$ entonces $25X^2Y^4 = (5XY^2)^2$ así claramente observamos que el exponente del radicando es 2 y el índice del radical es 5, entonces el exponente de la potencia resultante es $(5XY^2)^{2/5} = \sqrt[5]{(5XY^2)^2}$.

**EJERCICIO 8.2.2**

Encuentra el valor de las siguientes raíces:

1) $\sqrt{49} =$ 2) $-\sqrt{36} =$

3) $2\sqrt[3]{8} =$ 4) $\sqrt[5]{7776} =$

5) $\sqrt[6]{64}$ =

6) $\sqrt{625}$ =

7) $5\sqrt[4]{81}$ =

8) $4\sqrt[7]{128}$ =

9) $\sqrt[8]{656}$ =

10) $7\sqrt[3]{-81}$ =

Encuentra los siguientes radicales, considerar que las variables son positivas.

11) $\sqrt{9x^2}$ =

12) $\sqrt{4K^4}$

13) $\sqrt{m^6}$ =

14) $\sqrt{X^2Y^8}$

15) $\sqrt[3]{m^6}$ =

16) $\sqrt[3]{4a^2}$ =

17) $\sqrt[3]{-8a^3}$ =

18) $\sqrt[4]{X^8Y^4}$ =

19) $\sqrt[5]{-32m^5n^{10}}$ =

20) $\sqrt[4]{16a^8b^{16}}$ =

Los siguientes radicales expresalos en forma de potencia con exponente fraccionario.

21) $\sqrt{3}$ =

22) $\sqrt[3]{5X^2}$ =

23) $\sqrt[3]{a^2}$ =

24) $\sqrt[9]{-Y^4}$ =

25) $\sqrt[5]{b^2}$ =

26) $\sqrt[4]{XY^2}$ =

27) $\sqrt[7]{2X}$ =

28) $\sqrt[6]{3a^2b^5}$ =

29) $2\sqrt[8]{X^3}$ =

30) $-5\sqrt[3]{X^7}$ =

Las siguientes potencias expresalas en forma de radical.

31) $X^{2/5}$ =

32) $4Y^{2/3}$ =

33) $Y^{3/4} =$

34) $(3XY)^{4/7} =$

35) $a^{1/7} =$

36) $\left(\frac{2}{3}X\right)^{1/5} =$

37) $(3b)^{4/5} =$

38) $(XYZ)^{5/8} =$

39) $2X^{1/3} =$

40) $-8(XY)^{3/7} =$

---

## 8.3 SIMPLIFICACION DE RADICALES.

Es muy frecuente representar a los radicales de otra manera para obtener un radical más simple o más útil. Esto se hace haciendo uso de las propiedades de los exponentes, que las heredan los radicales ya que un radical es una potencia con exponente fraccionario, así que enunciemos estas propiedades con Radicales.

Sean **X**, **Y** dos números reales, m y n enteros positivos, entonces se cumple:

a) $\sqrt[n]{X^n} = X$

b) $\sqrt[n]{X \cdot Y} = \sqrt[n]{X}\,\sqrt[n]{Y}$

c) $\sqrt[n]{\frac{X}{Y}} = \frac{\sqrt[n]{X}}{\sqrt[n]{Y}}$ con $Y \neq 0$.

d) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{X}} = \sqrt[m \cdot n]{X}$

e) $\sqrt[km]{X^{kn}} = \sqrt[m]{X^n}$

Las demostraciones se dejarán como ejercicio al alumno, ya que son muy parecidas a las de exponentes enteros.

EJEMPLOS:

1) Simplificar $\sqrt{50}$

Sabemos que $50 = 25\cdot 2$ entonces:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25\cdot 2} = \sqrt{25}\,\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$ Por b) de las propiedades de los Radicales.

2) Simplificar $\sqrt[3]{\frac{X}{27}}$

Aplicando el inciso c) de las propiedades de radicales tenemos:

$$\sqrt[3]{\frac{X}{27}} = \frac{\sqrt[3]{X}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{X}}{3}$$ Por c) de las propiedades de los Radicales.

3) Simplificar $\sqrt[6]{Y^4}$

Sabemos que $6 = 3\cdot 2$ y $4 = 2\cdot 2$ entonces:

$$\sqrt[6]{Y^4} = \sqrt[3\cdot 2]{Y^{2\cdot 2}} = \sqrt[3]{Y^2}$$ Por e) de las propiedades de los Radicales.

4) Simplificar $\sqrt{8X^3}$

Sabemos que $8 = 4\cdot 2$ y $X^3 = X^2X$ entonces:

$$\sqrt{8X^3} = \sqrt{4\cdot 2\cdot X^2\cdot X} = \sqrt{4\cdot X^2\cdot 2\cdot X} = \sqrt{4X^2}\,\sqrt{2x} =$$
$$= \sqrt{4}\,\sqrt{X^2}\,\sqrt{2X} = 2X\sqrt{2X}$$ Por b) de las propiedades de los Radicales.

5) Simplificar $\sqrt{12X^3Y^5Z^2}$

Sabemos que $12 = 4\cdot 3$ y $X^3 = X^2\cdot X$ , $Y^5 = Y^4\cdot Y$

entonces $\sqrt{12X^3Y^5Z^2} = \sqrt{4\cdot 3\cdot X^2\cdot X\cdot Y^4\cdot Y\cdot Z^2} =$

$\sqrt{(4X^2Y^4Z^2)\ (3XY)} = \sqrt{4X^2Y^4Z^2}\ \sqrt{3XY} =$

$\sqrt{4}\ \sqrt{X^2}\ \sqrt{Y^4}\ \sqrt{Z^2}\ \sqrt{3XY} = 2XY^2Z\sqrt{3XY}$ Por c) de las propiedades de los Radicales.

Una observación muy importante que hay que hacer notar es que:

> "Para extraer la raíz de un término, se extrae la raíz del coeficiente, y para extraer la raíz de los factores numéricos se divide el exponente de cada potencia entre el índice del radical. Y serán los exponentes de las nuevas potencias que obtengamos en el resultado".

EJEMPLOS:

1) Simplificar $\sqrt{9a^4}$

Sabemos que $\sqrt{9} = 3$, ahora el exponente de la potencia $a^4$ es 4 y el índice del radical es 2 entonces $4/2 = 2$ por esto es que

$$\sqrt{9a^4} = 3a^2.$$

2) Simplificar $\sqrt[3]{-8a^3b^6x^{12}}$

Primero $\sqrt[3]{-8}$, como las potencias del radicando son $a^3$, $b^6$ y $x^{12}$ sus exponentes son 3, 6, 12, respectivamente y el índice del radical es 3 tenemos que los nuevos exponentes son $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{12}{3} = 4$ así el resultado sería $-2ab^2x^4$ entonces:

$$\sqrt[3]{-8a^3b^6x^{12}} = -2ab^2x^4$$

3) Simplificar $\sqrt[3]{8a^7b^8}$.

Este ejemplo es un poco diferente a los anteriores, resolvámoslos.

$\sqrt[3]{8} = 2$, $a^7$ y $b^8$ tienen exponentes 7 y 8 el índice del radical es 3 entonces al dividirlos tenemos $\frac{7}{3}$ es 2 y sobra uno, $\frac{8}{3}$ es 2 y sobran 2.

Como las divisiones no fueron exactas los números que sobraron serán los exponentes de las potencias que quedarán en el nuevo radical, entonces nuestro redical queda de la siguiente forma:

$$\sqrt[3]{8a^7b^8} = 2a^2b^2\sqrt[3]{ab^2}$$

4) Simplificar $\sqrt[4]{32x^5y^7}$

$32 = 2^5$ y 5/4 es 1 y sobra 1, y $\frac{7}{4}$ es 1 y sobran 3 entonces los números que sobran serán los exponentes del nuevo radical.

Así $\sqrt[4]{32x^5y^7} = \sqrt[4]{2^5x^5y^7} = 2xy\sqrt[4]{2xy^3}$

EJERCICIO 8.3

Simplificar los siguientes radicales.

1) $\sqrt{45}$

2) $\sqrt{72}$

3) $\sqrt[3]{16}$

4) $\sqrt[3]{64X^3}$

5) $\sqrt{\dfrac{12XY^2}{100}}$

6) $\sqrt{\dfrac{8ab^2}{25}}$

7) $\sqrt[10]{32a^5}$

8) $\sqrt[8]{x^4y^6}$

9) $\sqrt[3]{\dfrac{27m^6}{n^3}}$

10) $-\sqrt{\dfrac{121}{25w^{12}}}$

11) $\sqrt[4]{86x^8y^{16}}$

12) $\sqrt[5]{\dfrac{a^5b^{10}}{32x^{15}}}$

13) $\sqrt[3]{-\dfrac{27a^3}{64x^9}}$

14) $\sqrt[3]{8x^2y^{13}}$

15) $\sqrt[5]{3^6m^7n^{11}}$

16) $\sqrt[4]{3a^6b^5}$

17) $\sqrt{18a^5b^6}$

18) $\sqrt[3]{16m^7n^8w^5}$

## 8.4 ADICION DE RADICALES.

Los radicales que tienen el mismo índice de radical y el mismo radicando son llamados **radicales semejantes**.

Para sumar o restar radicales hay que seguir los siguientes pasos:

1o) Simplificar aquellos radicales que no esten en su forma más simple.

2o) Sumar solo los coeficientes de los radicales **semejantes** y esta suma irá multiplicada por el radical, ésto se puede hacer por la ley distributiva.

EJEMPLOS:

1) Realizar la siguiente suma $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 8\sqrt{2}$

SOLUCIÓN: Como los tres términos son radicales semejantes y ya estan simplificados entonces solo sumamos los coeficientes 3, 5 y 8 que es igual a 16 e irá multiplicado por el radical $\sqrt{2}$.

Entonces $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

2) Sumar $2\sqrt[3]{xy^2} + 5\sqrt[3]{xy^2} + 7\sqrt[3]{xy^2}$

SOLUCIÓN: Como los tres términos son radicales semejantes solo sumaremos los coeficientes 2, 5 y 7 que es igual a 14 e irá multiplicado por el radical $\sqrt[3]{xy^2}$.

Entonces $2\sqrt[3]{xy^2} + 5\sqrt[3]{xy^2} + 7\sqrt[3]{xy^2} = 14\sqrt[3]{xy^2}$.

3) Sumar $5\sqrt[4]{mn^2} - 3\sqrt{mn} - 2\sqrt[4]{mn^2} + 7\sqrt{mn}$.

SOLUCIÓN: Los términos semejantes son $5\sqrt[4]{mn^2}$ con $-2\sqrt[4]{mn^2}$ y $-3\sqrt{mn}$ con $7\sqrt{mn}$ entonces sumamos 5 con -2 resulta 3, y -3 con 7 resulta 4 así el resultado es:

$$5\sqrt[4]{mn^2} - 3\sqrt{mn} - 2\sqrt[4]{mn^2} + 7\sqrt{mn} = 3\sqrt[4]{mn^2} + 4\sqrt{mn}$$

4) Sumar $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27}$.

SOLUCIÓN: Simplificamos cada radical.

$75 = 25\cdot 3$ y $27 = 3^3$ entonces tenemos:

$$2\sqrt{75} = 2\sqrt{25\cdot 3} = 2\sqrt{25}\ \sqrt{3} = 2\cdot 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

Por otro lado

$$4\sqrt{27} = 4\sqrt{3^3} = 4\cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

Al hacer la suma tenemos:

$$2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} = 10\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

5) Sumar $3\sqrt{24} - 3\sqrt{98} - \sqrt{54} + 4\sqrt{128}$

SOLUCIÓN: Simplificamos cada radical.

$24 = 4\cdot 6$ ; $98 = 49\cdot 2$ ; $54 = 9\cdot 6$ ; $128 = 64\cdot 2$

Entonces:

$$3\sqrt{24} = 3\sqrt{4\cdot 6} = 3\sqrt{4}\ \sqrt{6} = 3\cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

$$3\sqrt{98} = 3\sqrt{49\cdot 2} = 3\sqrt{49}\ \sqrt{2} = 3\cdot 7\sqrt{2} = 21\sqrt{2}$$

$$\sqrt{54} = \sqrt{9\cdot 6} = \sqrt{9}\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

$$4\sqrt{128} = 4\sqrt{64\cdot 2} = 4\sqrt{64}\sqrt{2} = 4\cdot 8\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$$

Sumamos y tenemos que:

$$3\sqrt{24} - 3\sqrt{98} - \sqrt{54} + 4\sqrt{128} =$$

$$6\sqrt{6} - 21\sqrt{2} - 3\sqrt{6} + 32\sqrt{2} = 3\sqrt{6} + 11\sqrt{2}$$

**EJERCICIO 8.4**

Efectúa las siguientes sumas con radicales.

1) $7\sqrt{2} - \sqrt{2} =$

2) $6\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$

3) $2\sqrt{a} - 7\sqrt{a} =$

4) $2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} =$

5) $\sqrt[5]{a} - 4\sqrt[5]{a} + 2\sqrt[5]{a} =$

6) $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{5} - \sqrt{5} =$

7) $\sqrt[4]{24} - 2\sqrt[4]{24} + 6\sqrt[4]{24} - 3\sqrt[4]{24} =$

8) $2x\sqrt{7} + 3x\sqrt{7} - x\sqrt{7} =$

9) $5a\sqrt[3]{y} - 2a\sqrt[3]{y} + 4\sqrt[3]{y} =$

10) $12\sqrt{b} - 2\sqrt{a} + 6\sqrt{b} - 3\sqrt{a} =$

11) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} =$

12) $3b\sqrt{c} - 2a\sqrt{x} + 6a\sqrt{x} - 4b\sqrt{c} =$

## 8.5 MULTIPLICACION DE RADICALES.

Para la multiplicación de Radicales usaremos el inciso b) de las propiedades de Radicales que dice:

$$\sqrt[n]{X}\ \sqrt[n]{Y} = \sqrt[n]{XY} \qquad X,\ Y \in \mathbb{R},\ X > 0,\ Y > 0 \ \text{ y } \ n \in \mathbb{N}.$$

EJEMPLO 1) Multiplicar $\sqrt{5}$ con $\sqrt{7}$ .

SOLUCIÓN:

$$(\sqrt{5})(\sqrt{7}) = \sqrt{5\cdot 7} = \sqrt{35}$$

EJEMPLO 2) Multiplicar $7\sqrt{3}$ con $9\sqrt{5}$.

SOLUCIÓN: Se hace lo mismo que en el anterior, pero aquí los números fuera del radical también se multiplican, entonces tenemos que:

$$(7\sqrt{3})(9\sqrt{5}) = (7)(9)\sqrt{3\cdot 5} = 63\sqrt{15}$$

EJEMPLO 3) Multiplicar el radical $2\sqrt{3}$ con la suma $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 6$.

SOLUCIÓN: El radical $2\sqrt{3}$ multiplica a cada término de la suma y nos queda así:

$$2\sqrt{3}\left(5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 6\right) = 2\sqrt{3}\left(5\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{3}\left(4\sqrt{3}\right) - 2\sqrt{3}(6) =$$

$$= 10\sqrt{3\cdot 2} + 8\sqrt{3\cdot 3} - 12\sqrt{3} =$$

$$= 10\sqrt{6} + 8\sqrt{9} - 12\sqrt{3} =$$

$$= 10\sqrt{6} + (8)(3) - 12\sqrt{3} =$$

$$= 10\sqrt{6} + 24 - 12\sqrt{3}$$

EJEMPLO 4) Multiplicar $5\sqrt{10} + 3\sqrt{7}$ con $4\sqrt{10} - 2\sqrt{7}$.

SOLUCIÓN: Cada término de la primera suma multiplica a cada término de la segunda suma, y tenemos:

$$\left(5\sqrt{10} + 3\sqrt{7}\right)\left(4\sqrt{10} - 2\sqrt{7}\right) = 5\sqrt{10}\left(4\sqrt{10}\right) + 5\sqrt{10}\left(-2\sqrt{7}\right) +$$
$$+ 3\sqrt{7}\left(4\sqrt{10}\right) + 3\sqrt{7}\left(-2\sqrt{7}\right) =$$
$$= 20\sqrt{10\cdot10} - 10\sqrt{10\cdot7} + 12\sqrt{7\cdot10} - 6\sqrt{7\cdot7}$$
$$= 20\sqrt{100} - 10\sqrt{70} + 12\sqrt{70} - 6\sqrt{49}$$
$$= 20(10) + 2\sqrt{70} - 6(7)$$
$$= 200 - 42 + 2\sqrt{70}$$
$$= 158 + 2\sqrt{70}$$

Como $\sqrt{70}$ no se puede simplificar, así queda el resultado.

EJEMPLO 5) Multiplicar $5\sqrt{m} + 2$ con $2\sqrt{m} - 3$.

SOLUCIÓN:

$$(5\sqrt{m} + 2)(2\sqrt{m} - 3) = 5\sqrt{m}\,(2\sqrt{m}\,) + 5\sqrt{m}\,(-3) + 2(2\sqrt{m}\,) + 2(-3)$$
$$= 10\sqrt{m}\sqrt{m} + (-15)\sqrt{m} + 4\sqrt{m} + (-6)$$
$$= 10(\sqrt{m}\,)^2 - 15\sqrt{m} + 4\sqrt{m} - 6$$
$$= 10m - 11\sqrt{m} - 6$$

EJERCICIO 8.5

Realiza la multiplicación de los siguientes radicales y simplifica lo más que se pueda:

1) $(\sqrt{5})(\sqrt{6}) =$

2) $(\sqrt{6})(\sqrt{2}) =$

3) $(2\sqrt{6})(3\sqrt{7}) =$

4) $(5\sqrt{7})(9\sqrt{20}) =$

5) $(4\sqrt{3})(3\sqrt{2})(6\sqrt{5}) =$

6) $(\frac{2}{3}\sqrt{7})(15\sqrt{14})(2\sqrt{2}) =$

7) $3\sqrt{5}(4\sqrt{11} + 9\sqrt{7}) =$

8) $2\sqrt{2}(5\sqrt{8} - 3\sqrt{2}) =$

9) $4\sqrt{15}(2\sqrt{3} + \sqrt{5} - 5\sqrt{2}) =$

10) $\sqrt{x}(\sqrt{2x} - \sqrt{18y}) =$

11) $(4\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 5) =$

12) $(3 + 4\sqrt{3})(3 - 5\sqrt{3}) =$

13) $(3\sqrt{7} - 2\sqrt{3})(5\sqrt{3} + 4\sqrt{7}) =$

14) $(\sqrt{a} - 2\sqrt{x})(3\sqrt{a} + \sqrt{x})$

15) $(3\sqrt{x} + 5\sqrt{y})(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}) =$

16) $(x\sqrt{2} - y\sqrt{5})(2x\sqrt{2} - y\sqrt{5}) =$

17) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{3}) =$

18) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) =$

19) $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{5}) =$

20) $(3\sqrt{a} - 2\sqrt{a + x})(2\sqrt{a} + 3\sqrt{a + x}) =$

21) $(\sqrt{a + 1} + \sqrt{a - 1})(\sqrt{a + 1} + 2\sqrt{a - 1}) =$

22) $(2\sqrt{a} - 3\sqrt{a - b})(3\sqrt{a} + \sqrt{a - b}) =$

## 8.6 DIVISION DE RADICALES.

Para dividir radicales usaremos la propiedad del inciso c) que nos dice:

$$\sqrt[n]{\frac{X}{Y}} = \frac{\sqrt[n]{X}}{\sqrt[n]{Y}} \qquad \text{con } X,\ Y \in \mathbb{R},\ X > 0,\ Y > 0 \ \text{ y } \ n \in \mathbb{N}.$$

Esta propiedad nos afirma que para dividir dos radicales con el mismo índice del radical, hay que dividir los radicandos y el resultado quedará en un radical con el mismo índice que los anteriores.

EJEMPLO 1) Dividir $9\sqrt{8x^2}$ entre $3\sqrt{2}$, x un número real.

SOLUCIÓN: Primero dividimos los coeficientes de los radicales y después aplicamos la propiedad mencionada y tenemos:

$$\frac{9\sqrt{8x^2}}{3\sqrt{2}} = \frac{9}{3}\sqrt{\frac{8x^2}{2}} = 3\sqrt{4x^2} = 3(2x) = 6x$$

EJEMPLO 2) Dividir $4\sqrt{20} - 7\sqrt{15}$ entre $\sqrt{5}$.

SOLUCIÓN: $\sqrt{5}$ divide a cada término de la diferencia, entonces $\sqrt{5}$ divide a $4\sqrt{20}$ y a $7\sqrt{15}$ y resulta:

$$\frac{4\sqrt{20} - 7\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{20}}{\sqrt{5}} - \frac{7\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{\frac{20}{5}} - 7\sqrt{\frac{15}{5}} =$$

$$= 4\sqrt{4} - 7\sqrt{3} = 4(2) - 7\sqrt{3} = 8 - 7\sqrt{3}$$

El resultado final es: $\frac{4\sqrt{20} - 7\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = 8 - 7\sqrt{3}$

EJEMPLO 3) Dividir $18\sqrt{40} - 10\sqrt{80}$ entre $2\sqrt{10}$.

SOLUCIÓN: El término $2\sqrt{10}$ divide a $18\sqrt{40}$ y divide a $-10\sqrt{80}$ es decir al hacer la división tenemos:

$$\frac{18\sqrt{40} - 10\sqrt{80}}{2\sqrt{10}} = \frac{18\sqrt{40}}{2\sqrt{10}} - \frac{10\sqrt{80}}{2\sqrt{10}} = \frac{18}{2}\sqrt{\frac{40}{10}} - \frac{10}{2}\sqrt{\frac{80}{10}} =$$

$$= 9\sqrt{4} - 5\sqrt{8} = 9(2) - 5\sqrt{8} = 18 - 5\sqrt{8}$$

Simplificamos $\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Entonces $5\sqrt{8} = 5(2\sqrt{2}) = 10\sqrt{2}$ y nuestro resultado final es $18 - 5\sqrt{8} = 18 - 10\sqrt{2}$

Finalmente $\dfrac{18\sqrt{40} - 10\sqrt{80}}{2\sqrt{10}} = 18 - 10\sqrt{2}$

Si resuelves cada uno de los siguientes ejercicios tendrás mayor facilidad para trabajar operaciones con radicales.

**EJERCICIO 8.6**

Efectúa las siguientes divisiones entre radicales y simplifica.

1) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

2) $\dfrac{12\sqrt{30}}{3\sqrt{6}}$

3) $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$

4) $\dfrac{8\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

5) $\dfrac{15\sqrt{30}}{3\sqrt{5}}$

6) $\dfrac{2\sqrt{3a}}{10\sqrt{a}}$

7) $\dfrac{\sqrt{75x^2y^3}}{5\sqrt{3xy}}$

8) $\dfrac{2\sqrt[3]{81x^7}}{3\sqrt[3]{3x^2}}$

9) $\dfrac{4x\sqrt{a^3x^2}}{2\sqrt{a^2x^3}}$

10) $\dfrac{3\sqrt[3]{16a^5}}{4\sqrt[3]{2a^2}}$

11) $\dfrac{6\sqrt{8} - \sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

12) $\dfrac{15\sqrt{12} - 10\sqrt{18}}{5\sqrt{3}}$

13) $\dfrac{\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{5}}$

14) $\dfrac{\sqrt{50} + \sqrt{98}}{\sqrt{2}}$

15) $\dfrac{18\sqrt{40} - 10\sqrt{18}}{2\sqrt{10}}$

16) $\dfrac{\sqrt{20} + \sqrt{80}}{2\sqrt{5}}$

17) $\dfrac{\sqrt{y^7} - \sqrt{y^5}}{\sqrt{y^3}}$

18) $\dfrac{10\sqrt{27x^3} + 15\sqrt{12x^3}}{\sqrt{3x}}$

19) $\dfrac{(\sqrt{2x} - \sqrt{3x})(\sqrt{2x} + \sqrt{3x})}{5\sqrt{x^2}}$

## 8.7 RACIONALIZACION.

Sólo nos falta un método que nos ayude a calcular cocientes entre radicales de una manera más sencilla.

Por ejemplo: Si queremos encontrar el valor de $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ encontramos el valor de $\sqrt{2}$ después el de $\sqrt{3}$ y finalmente efectuamos la división.

$\sqrt{2} = 1.4142136$ y $\sqrt{3} = 1.7320508$, entonces $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1.4142136}{1.7320508}$

Y efectúar este tipo de divisiones son cálculos bastante aburridos y además se presta a mayores errores ya que solo estamos trabajando con aproximaciones de las raíces, para evitar esto haremos lo siguiente:

El radical $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ lo multiplicamos por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ que no cambiará a nuestro radical en otro diferente ya que $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$ efectuamos el producto y tenemos:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

El radical $\sqrt{6} = 2.44948$ lo dividimos entre 3 esta operación es más sencilla que la primera y nos dará el resultado del cociente $\sqrt{2}$ entre $\sqrt{3}$ con una mejor aproximación.

A este método se le llama **racionalización**, que consiste en cambiar una fracción con radicales en el numerador o en el denominador por otra fracción en la cuál el numerador o denominador sea un número racional.

En este ejemplo que acabamos de hacer racionalizamos el denominador ya que quitamos el radical del denominador.

EJEMPLO 1) Racionalizar el denominador de $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2}$

SOLUCIÓN: Lo que debemos hacer es quitar todo radical que se encuentre en el denominador.

Procedemos de la misma forma que en el ejemplo anterior multiplicamos por 1 nuestra expresión que es lo mismo que multiplicar tanto al numerador como al denominador por el conjugado del denominador que es $\sqrt{6}+2$ y tenemos:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2} \cdot \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}+2} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{(\sqrt{6})^2+2\sqrt{6}+(-2)\sqrt{6}-(2)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{12}+2\sqrt{2}}{6-4} =$$

$$= \frac{\sqrt{4\cdot 3}+2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Observa que en este resultado ya no existen radicales en el denominador.

EJEMPLO 2) Racionalizar el numerador de $\frac{3 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$.

SOLUCIÓN: Lo que debemos hacer es quitar todo radical que se encuentre en el numerador.

Procedemos de la misma forma que en el ejemplo anterior multiplicamos por 1 nuestra expresión que es lo mismo que multiplicar tanto al numerador como al denominador por el conjugado del numerador que es $3 + \sqrt{2}$ y tenemos:

$$\frac{3 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{3 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{3 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{3(3) + 3\sqrt{2} + (-\sqrt{2})(3) + (-\sqrt{2})(\sqrt{2})}{1(3) + 1(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})(3) + \sqrt{2}\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{9 - (\sqrt{2})^2}{3 + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{9 - 2}{3 + 4\sqrt{2} + 2} =$$

$$= \frac{7}{5 + 4\sqrt{2}}$$ No hay radicales en el numerador.

EJEMPLO 3) Racionalizar el denominador de $\dfrac{19}{5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}$

SOLUCIÓN: Se multiplica tanto el numerador como al denominador por el conjugado del denominador que es $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ y tenemos:

$$\frac{19}{5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}} = \frac{19}{5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}} \cdot \frac{5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{19(5\sqrt{2}) + 19(4\sqrt{3})}{(5\sqrt{2})(5\sqrt{2}) + (5\sqrt{2})(4\sqrt{3}) + (-4\sqrt{3})(5\sqrt{2}) + (-4\sqrt{3})(4\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{95\sqrt{2} + 76\sqrt{3}}{(5\sqrt{2})^2 + 20\sqrt{2}\sqrt{3} - 20\sqrt{3}\sqrt{2} - (4\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{95\sqrt{2} + 76\sqrt{3}}{25(2) - 16(3)} =$$

$$= \frac{95\sqrt{2} + 76\sqrt{3}}{50 - 48} =$$

$$= \frac{95\sqrt{2} + 76\sqrt{3}}{2}$$ No hay radicales en el denominador.

EJEMPLO 4) Racionalizar el numerador de $\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{7 + 2\sqrt{10}}$.

SOLUCIÓN: Multiplicamos el numerador y denominador por el conjugado del numerador que es $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ y tenemos:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{7+2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{7+2\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}\sqrt{5} + (\sqrt{5})(-\sqrt{2}) + \sqrt{2}\sqrt{5} + (\sqrt{2})(-\sqrt{2})}{7\sqrt{5} + 7(-\sqrt{2}) + 2\sqrt{10}\sqrt{5} + (2\sqrt{10})(-\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{5})^2 - \sqrt{5}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{5} - (\sqrt{2})^2}{7\sqrt{5} - 7\sqrt{2} + 2\sqrt{10 \cdot 5} - 2\sqrt{10 \cdot 2}} =$$

$$= \frac{5 - \sqrt{10} + \sqrt{10} - 2}{7\sqrt{5} - 7\sqrt{2} + 2\sqrt{50} - 2\sqrt{20}} =$$

$$= \frac{5 - 2}{7\sqrt{5} - 7\sqrt{2} + 2\sqrt{25 \cdot 2} - 2\sqrt{4 \cdot 5}} =$$

$$= \frac{3}{7\sqrt{5} - 7\sqrt{2} + 2 \cdot 5\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{3}{7\sqrt{5} - 7\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 4\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{3}{3\sqrt{5} + 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$$ } No hay radicales en el numerador.

EJERCICIO 8.7

Racionalizar el numerador de los siguientes radicales y simplificar.

1) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 2) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$

3) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ 4) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2}$

5) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3}$ 6) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

7) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 8) $\dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}}$

Racionalizar el denominador de los siguientes radicales y simplificar.

9) $\dfrac{40}{\sqrt{8}}$ 10) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$

11) $\dfrac{10}{\sqrt{50}}$ 12) $\dfrac{12}{\sqrt{6}}$

13) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$ 14) $\dfrac{2}{\sqrt{10}-2}$

15) $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} + 3}$

16) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$

17) $\dfrac{3 - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 2}$

18) $\dfrac{\sqrt{6} - 2\sqrt{7}}{\sqrt{6} + \sqrt{7}}$

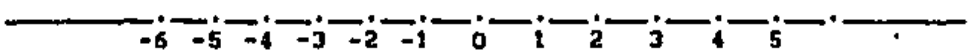
# TEMA IX

## DESIGUALDADES E INECUACIONES LINEALES

## 9.1 CONCEPTO DE "MAYOR QUE" Y DE "MENOR QUE"

En el TEMA I estudiamos a los números reales ($\mathbb{R}$) y vimos que hay una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos de una línea recta, es decir a todo número real le corresponde uno y solo un punto de la recta y a todo punto de la recta le corresponde uno y solo un número real. Recuerda que en la recta real se toma un punto cualquiera y se le asocia el cero llamado origen, y a partir de éste los números positivos estan del lado derecho y los negativos del lado izquierdo; por esta correspondencia esta recta recibe el nombre de *Recta Numérica*.

*Recta Numérica*



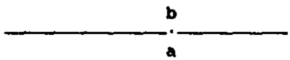

En la figura solo marcamos enteros pero siempre entre dos números cualesquiera hay otro número Real, entonces entre dos enteros hay una infinidad de números Reales.

Para dos números cualesquiera Reales **a** y **b** puede suceder lo siguiente:

1) **a** puede ser igual a **b**.
2) **a** puede estar a la derecha de **b**.
3) **a** puede estar a la izquierda de **b**.

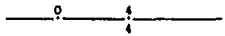
Analicemos cada caso.

1) Si **a** es igual a **b**, quiere decir que a y b son iguales y esto lo escribimos como **a = b**. En la recta numérica se ve así:



2) Si a está a la derecha de b, quiere decir que a es **mayor** que b y esto lo escribimos como **a > b**. En la recta numérica se ve así:


3) Si a está a la izquierda de b, quiere decir que a es **menor** que b y esto lo escribimos como **a < b**. Visto en la recta numérica:

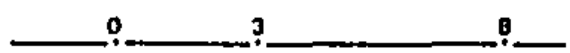

EJEMPLO 1) 4 es igual que 4: 4 = 4 


EJEMPLO 2) 7 es menor que 9: 7 < 9 

ó también 9 es mayor que 7: 9 > 7.

EJEMPLO 3) 5 es mayor que 1: 5 > 1 

ó también 1 es menor que 5: 1 < 5.

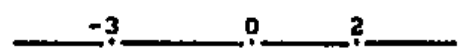
EJEMPLO 4) 3 es menor que 8: 3 < 8 

ó también 8 es mayor que 3: 8 > 3.

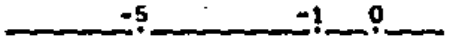
EJEMPLO 5) 6 es mayor que 2: 6 > 2 

ó también 2 es menor que 6: 2 < 6.

Observa que en la recta numérica el número **mayor** siempre estará a la **derecha**, y el **menor** a la **izquierda**; así que no debe de haber dificultades para distinguir el orden con los números negativos.

EJEMPLO 6) -3 es menor que 2: -3 < 2 

ó también 2 es mayor que -3: 2 > -3.

EJEMPLO 7) -1 es mayor que -5: $-1 > -5$ 


ó también -5 es menor que -1: $-5 < -1$.

OBSERVACIÓN: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Para todo número } n \in \mathbb{R}.\\ \text{Si } n > 0,\ n \text{ es positivo.}\\ \text{Si } n < 0,\ n \text{ es negativo.}\end{array}}$

Cuando se trate de determinar el orden con fracciones algunas veces es un poco tardado visualizarlo en la recta numérica por eso es que usaremos lo siguiente:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ siempre y cuando } ad < bc.$$

EJEMPLO 8) $\frac{5}{3} < \frac{7}{4}$, ya que $5(4) < 7(3)$
$20 < 21$

EJEMPLO 9) $-\frac{4}{5} < -\frac{6}{11}$, ya que $-4(11) < -6(5)$
$-44 < -30$

EJEMPLO 10) $-\frac{6}{15} > -\frac{7}{13}$, ya que $-6(13) > -7(15)$
$-78 > -105$

**EJERCICIO 9.1**

Escribe simbolicamente cada uno de los siguientes enunciados y dibuja su representación gráfica en la recta numérica.

1) 3 es menor que 8:
2) 9 es menor que 14:
3) 12 es mayor que 7:
4) 2 es mayor que -3:
5) -4 es menor que -1:

6) -13 es menor que - 7:

7) 5 es mayor que -11:

8) 2 es mayor que 0:

9) -5 es menor que -2:

10) -6 es menor que 0:

Escribe el símbolo "<" ó ">" según corresponda en cada uno de los siguientes enunciados.

11) $\frac{4}{7} \quad \frac{8}{3}$

12) $\frac{7}{3} \quad \frac{6}{5}$

13) $-\frac{3}{8} \quad \frac{1}{5}$

14) $\frac{15}{6} \quad -\frac{2}{7}$

15) $-\frac{5}{2} \quad -\frac{13}{7}$

16) $-\frac{9}{5} \quad -\frac{12}{17}$

17) $\frac{18}{21} \quad \frac{25}{32}$

18) $5 \quad \frac{28}{5}$

19) $-\frac{35}{19} \quad -\frac{29}{16}$

20) $-\frac{14}{9} \quad -1$

## 9.2 DESIGUALDADES

Una **desigualdad** es la negación de una igualdad, es decir si **a** no es igual a **b** entonces **a > b** ó **a < b**.

Podemos afirmar que una **desigualdad** es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra.

A los símbolos "<" y ">" se les llama símbolos de **desigualdades**.

Las expresiones o cantidades que se escriben a uno y otro lado del signo > (<) se les llama miembros de la desigualdad.

Otros símbolos que también son muy usados son: "≤" y "≥". También son llamados símbolos de desigualdad.

$\leq$ se lee menor ó igual que.

$\geq$ se lee mayor ó igual que.

Cada uno de estos símbolos se define de la siguiente manera:

$a \leq b$ si y solo si $a < b$ ó $a = b$.

$a \geq b$ si y solo si $a > b$ ó $a = b$.

Mas adelante veremos con mayor detalle la utilidad de estos símbolos.

Veamos con un poco de formalidad la definición de "Mayor que" y de "Menor que".

DEFINICIÓN:

| |
|---|
| $a > b$ si y solo si $a - b > 0$. |
| $a < b$ si y solo si $a - b < 0$. |

EJEMPLO 1) $8 > 3$ ya que $8 - 3 = 5 > 0$.

EJEMPLO 2) $2 < 7$ ya que $2 - 7 = -5 < 0$.

EJEMPLO 3) $13 < 28$ ya que $13 - 28 = -15 < 0$.

EJEMPLO 4) $35 > 17$ ya que $35 - 17 = 18 > 0$.

OBSERVACIÓN:

| |
|---|
| Que un número sea negativo no implica que forzosamente debe de ir precedido por el signo menos. |

EJEMPLO 5) Si $a = -4$, $a$ es negativo ya que $a < 0$ y $-a$ es positivo ya que $-a = -(-4) = 4 > 0$.

EJEMPLO 6) Si $b = -9$. $b$ es negativo ya que $b < 0$ y $-b$ es positivo ya que $-b = -(-9) = 9 > 0$.

## 9.3 INTERVALOS EN LOS NUMEROS REALES.

Un intervalo en los números Reales es un conjunto de números Reales que satisfacen cierta desigualdad.

DEFINICIÓN: Un intervalo **abierto** es el conjunto de números Reales comprendidos entre otros dos sin incluir a estos últimos que son llamados extremos del intervalo.

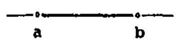
Es decir si tenemos dos números **a** y **b** donde $a < b$, entonces el intervalo abierto determinado por **a** y **b** es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre **a** y **b** sin incluir a los extremos **a** y **b**.

El intervalo abierto por lo general se escribe entre paréntesis redondos, así el intervalo abierto determinado por **a** y **b** es $(a , b)$.

En notación de conjuntos: $(a , b) = \{x | x \in R,\ a < x < b\}$

Se lee como " El intervalo abierto de **a** a **b**, es el conjunto de elementos **x** tales que son números Reales, con **x** mayor que **a** y menor que **b**".
Observa que **x** es estrictamente mayor que **a** y estrictamente menor que **b**, es decir nunca tomara los valores extremos.

Por esto podemos afirmar que todo elemento que pertenece al intervalo $(a , b)$ es mayor que **a** y menor que **b**.

Geométricamente el intervalo $(a , b)$ se representa: 


Se utilizan círculos huecos para hacer ver que no incluye a los extremos.

DEFINICIÓN: Un intervalo cerrado es el conjunto de números Reales comprendidos entre otros dos incluyendo a estos últimos que son llamados extremos del intervalo.

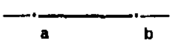
Es decir si tenemos dos números **a** y **b** donde **a** $<$ **b**, entonces el intervalo cerrado determinado por **a** y **b** es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b incluyendo a los extremos a y b.

El intervalo cerrado por lo general se escribe entre paréntesis cuadrados, así el intervalo cerrado determinado por **a** y **b** es $[a , b]$.

En notación de conjuntos: $[a , b] = \{x | x \in R, a \le x \le b\}$

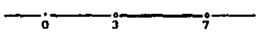
Se lee como " El intervalo cerrado de **a** a **b**, es el conjunto de elementos **x** tales que son números Reales, con **x** mayor o igual que **a** y menor o igual que **b**".

Aqui también es bueno hacer la observación de que se usa el símbolo "$\le$" menor ó igual ya que sí incluye el extremo.

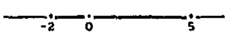
Geométricamente el intervalo $[a , b]$ se representa: 


Se utilizan puntos negros para hacer ver que incluye a los extremos.

EJEMPLO 1) Representar geoméricamente el intervalo abierto de 3 a 7.

SOLUCIÓN: $(3 , 7)$: 


EJEMPLO 2) Representar geométricamente el intervalo cerrado de -2 a 5.

SOLUCIÓN: $[-2 , 5]$: 


EJEMPLO 3) Escribir en notación de conjuntos el intervalo abierto de -1 a 3.

SOLUCIÓN: $(-1 , 3) = \{x | x \in R, -1 < x < 3\}$

EJEMPLO 4) Escribir en notación de conjuntos el intervalo cerrado de -7 a -2.

SOLUCIÓN: $[-7\ ,\ -2] = \{x|x \in \mathbb{R},\ -7 \le x \le -2\}$

EJEMPLO 5) Escribir en notación de intervalo a $\{x|x \in \mathbb{R},\ -4 < x < 6\}$.

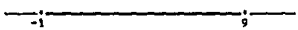
SOLUCIÓN: El conjunto que nos estan dando es el de los números Reales que estan entre los números -4 y 6, como se está usando el símbolo $<$ estrictamente menor quiere decir que no incluye los extremos entonces los paréntesis del intervalo deben ser redondos.



$(-4\ ,\ 6)$

EJEMPLO 6) Escribir el intervalo de los números Reales mayores ó iguales que -1 y menores ó iguales que 9.

SOLUCIÓN: Dibujemos en la recta numérica los números mayores ó iguales que -1 y menores ó iguales que 9, en este caso si incluye los extremos ya que se usa el símbolo $\le$ entonces los paréntesis del intervalo deben ser cuadrados.




$[-1\ ,\ 9]$

Además de los intervalos abiertos y cerrados tenemos los intervalos semiabiertos ó semicerrados que son:

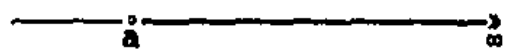
$$(a\ ,\ b] = \{x|x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$$

Nos dice que $(a\ ,\ b]$ es el conjunto de todos los números Reales que están entre a y b no incluyendo el extremo a pero si el extremo b.

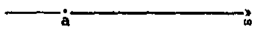
$$[a\ ,\ b) = \{x|x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$$

Nos dice que $[a\ ,\ b)$ es el conjunto de todos los números Reales que están entre a y b incluyendo al extremo a, pero no al extremo b.

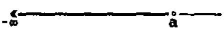
También usaremos los intervalos infinitos que son:

$(a\ ,\ \infty) = \{x | x \in \mathbb{R},\ a < x\}$ 

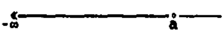

Es el conjunto de todos los numeros Reales que sean estrictamente mayores que a. Y el símbolo ∞ (infinito) no es un número, nos indíca que el intervalo se extiende indefinidamente hacia la derecha por lo mismo se usará junto con el paréntesis redondo.

$[a\ ,\ \infty) = \{x | x \in \mathbb{R},\ a \le x\}$ 

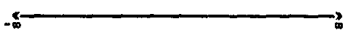

Es el conjunto de todos los números Reales que sean igual ó mayores que a.

$(-\infty\ ,\ a) = \{x | x \in \mathbb{R},\ a > x\}$ 


Es el conjunto de todos los números Reales que sean estrictamente menores que a. El símbolo -∞ (menos infinito) tampoco es un número, nos indica que el intervalo se extiende indefinidamente hacia la izquierda; también siempre se usará junto con el paréntesis redondo.

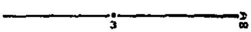
$(-\infty\ ,\ a] = \{x | x \in \mathbb{R},\ a \ge x\}$ 


Es el conjunto de todos los números Reales que sean iguales ó menores que a.

$(-\infty\ ,\ \infty) = \{x \in \mathbb{R}\}$ 

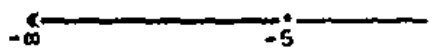

Es el conjunto de todos los números Reales.

EJEMPLO 7) Escribir en notación de conjuntos y hacer la representación geométrica de $(3\ ,\ \infty)$.

SOLUCIÓN: 

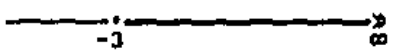
$(3\ ,\ \infty) = \{x | x \in \mathbb{R},\ x > 3\}$

EJEMPLO 8) Escribir en notación de conjuntos y hacer la representación geométrica de $(-\infty\ ,\ -5]$.

SOLUCIÓN: 

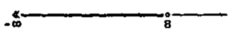
$(-\infty\ ,\ -5] = \{x|x \in \mathbb{R},\ x \leq -5\}$

EJEMPLO 9) Escribir en notación de intervalo al conjunto de los números Reales mayores ó iguales que -3.

SOLUCIÓN: 

$[-3\ ,\ \infty)$

EJEMPLO 10) Escribir en notación de conjuntos a $(-\infty\ ,\ 8)$.

SOLUCIÓN: 

$(-\infty\ ,\ 8) = \{x|x \in \mathbb{R},\ x < 8\}$

**EJERCICIO 9.3**

Representar geométricamente y en notación de intervalos los siguientes enunciados.

1) El intervalo abierto de -8 a -1.
2) El intervalo cerrado de -4 a 7.
3) El intervalo abierto de -6 a 2.
4) El intervalo cerrado de -5 a $-\frac{1}{2}$.
5) Los números Reales mayores que 7 y menores ó iguales que 12.
6) Los números Reales menores ó iguales que 4 pero mayores que -2.
7) Los números Reales mayores ó iguales que -3 pero menores que $-\frac{1}{3}$.
8) Los números Reales menores que 10 pero mayores ó iguales que 3.
9) Los números Reales menores que 7.
10) Los números Reales mayores que -5.
11) Los números Reales menores ó iguales que $-\frac{3}{2}$.
12) Los números Reales mayores ó iguales que $\frac{5}{2}$.

Representar en notación de conjuntos los siguientes intervalos, también graficarlos.

13) $(-12\ ,\ -5)$ :
14) $(3\ ,\ 15]$ :
15) $[\frac{3}{4}\ ,\ 5]$ :
16) $[-9\ ,\ -2)$ :
17) $(-8\ ,\ \infty)$ :
18) $(-\infty\ ,\ \frac{7}{3}]$ :
19) $[-\frac{7}{2}\ ,\ \infty)$
20) $(-\infty\ ,\ 15)$ :

Escribir los siguientes conjuntos en notación de intervalos.

21) $\{x|x \in \mathbb{R},\ 3 < x \le 14\}$

22) $\{x|x \in \mathbb{R},\ -5 \le x \le 4\}$

23) $\{x|x \in \mathbb{R},\ -\frac{2}{3} < x < 1\}$

24) $\{x|x \in \mathbb{R},\ \frac{5}{3} \le x < 8\}$

25) $\{x|x \in \mathbb{R},\ x \le -4\}$

26) $\{x|x \in \mathbb{R},\ x > -\frac{4}{5}\}$

27) $\{x|x \in \mathbb{R},\ x \ge 15\}$

28) $\{x|x \in \mathbb{R},\ x < 4\}$

---

## 9.4 INECUACIONES LINEALES.

Una inecuación lineal también llamada desigualdad de primer grado con una variable es una expresión algebraica de primer grado con una variable en la cuál vamos a tener algún símbolo de desigualdad.

EJEMPLOS: 1) $5x - 3 < x + 7$

2) $2(5 - x) \ge 3x - 5$

3) $5x - 2(4x + 1) \le 4$

4) $3(2x - 7) + 4 > 2x - 8$

Como ya lo mencionamos a la expresión del lado izquierdo se le llama miembro izquierdo, y a la expresión del lado derecho se le llama miembro derecho de la inecuación.

Podemos afirmar que una inecuación es una desigualdad que contiene variables.

Cuando dos desigualdades tienen su signo de desigualdad apuntando en la misma dirección, se dice que tienen el **mismo sentido**.

Ejemplo: $a < b$ y $m < n$ tienen el mismo sentido.

Cuando dos desigualdades tienen su signo de desigualdad apuntando en direcciones diferentes, se dice que tienen **sentidos opuestos**.

Ejemplo: $a > b$ y $m < n$ tienen sentidos opuestos.

Resolver una inecuación es muy parecido a resolver una ecuación como lo hicimos en el TEMA IV; a diferencia de las ecuaciones, en las inecuaciones el conjunto solución es infinito.

Recuerda que el conjunto solución serán todos aquellos valores que al sustituirse por la variable hacen verdadera la afirmación que se hace.

Para poder resolver una inecuación hay que conocer algunas propiedades prácticas que se aplicarán en dicho proceso.

**PROPIEDAD 1) Tricotomía**: Dados dos números Reales cualesquiera **a** y **b** se cumple: **a = b, a < b ó a > b.**

**PROPIEDAD 2) Transitividad:** Para números Reales **a, b** y **c** cualesquiera se cumple: Si **a < b** y **b < c** entonces **a < c.**

Esta propiedad y las demás propiedades que enunciaremos también se cumple para el símbolo > en lugar de <.

**PROPIEDAD 3)** Si **a < b** y **c** $\in \mathbb{R}$ entonces **a + c < b + c.**

| Nos dice que podemos sumar ó restar un mismo número a los dos miembros de una desigualdad para obtener otra del mismo sentido. |
|---|

EJEMPLO: $5 < 9$ le sumamos 2 a los 2 miembros y tenemos:

$$5 + 2 < 9 + 2$$

$$7 < 11$$

EJEMPLO: $3 < 7$ le restamos 5 a los dos miembros y tenemos:

$$3 - 5 < 7 - 5$$

$$-2 < 2$$

De esta propiedad podemos afirmar:

| En toda inecuación un término cualquiera puede pasar de un miembro a otro cambiando de signo, y no se altera el sentido de la desigualdad. |
|---|

**PROPIEDAD 4)** Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.

> Los dos miembros de una desigualdad pueden multiplicarse por un mismo número positivo, para obtener otra equivalente del mismo sentido.

EJEMPLO: $-3 < 5$ multiplicamos ambos miembros por 3 y tenemos:

$$3(-3) < 3(5)$$
$$-9 < 15$$

**PROPIEDAD 5)** Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

> Si multiplicamos por un número negativo ambos miembros de una desigualdad, ésta se transforma **cambiando** el sentido de la desigualdad.

EJEMPLO: $5 < 9$ multiplicamos ambos miembros por -2 y tenemos:

$$(-2)(5) > (-2)(9)$$
$$-10 > -18$$

Observa que cambió el sentido de la desigualdad.

Se deduce que las propiedades 4 y 5 también son válidas para la división, ya que dividir entre un número positivo ó negativo es lo mismo que multiplicar por sus recíprocos.

> El recíproco de todo número $n \neq 0$ es $\frac{1}{n}$

EJEMPLO: Dividir entre 3 ambos miembros de la desigualdad $3 < 12$ equivale a multiplicar ambos miembros por $\frac{1}{3}$ y se tiene:

$$\frac{1}{3}(3) < \frac{1}{3}(12)$$
$$\frac{3}{3} < \frac{12}{3}$$
$$1 < 4$$

EJEMPLO: Dividir entre -2 ambos miembros de la desigualdad $6 > -4$ equivale a multiplicar ambos miembros por $-\frac{1}{2}$ y tenemos:

$$-\frac{1}{2}(6) < -\frac{1}{2}(-4)$$
$$-\frac{6}{2} < \frac{4}{2}$$
$$-3 < 2$$

Existen muchas más propiedades para poder resolver inecuaciones más complejas que no abordaremos en este tema ya que por ahora no es necesario.

A continuación mostraré con varios ejemplos como se resuelven las inecuaciones lineales utilizando las propiedades antes mencionadas.

EJEMPLO 1) Encuentra el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$3x + 5 > x - 7$$

SOLUCIÓN:

$$3x + 5 - 5 > x - 7 - 5 \quad \text{.....por propiedad 3}$$
$$3x > x - 12$$
$$3x - x > x - 12 - x \quad \text{.....por propiedad 3}$$
$$2x > -12$$
$$\frac{1}{2}(2x) > \frac{1}{2}(-12)$$
$$\boxed{x > -6}$$

Su interpretación es: Los valores que hacen que $3x + 5$ sea mayor que $x - 7$ son cuando $x$ es mayor estrictamente que $-6$.
Asi el conjunto solución es: $x \in (-6, \infty)$ ó $\{x | x \in \mathbb{R},\ x > -6\}$

EJEMPLO 2) Encontrar el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{x - 2}{3} < 1 - x$$

SOLUCIÓN:

$$3\left(\frac{x-2}{3}\right) < 3(1 - x) \quad \text{.....por propiedad 4}$$
$$x - 2 < 3 - 3x$$
$$x - 2 + 2 < 3 - 3x + 2 \quad \text{....por propiedad 3}$$
$$x < 5 - 3x$$
$$x + 3x < 5 - 3x + 3x \quad \text{....por propiedad 3}$$
$$4x < 5$$

$$\frac{1}{4}(4x) < \frac{1}{4}(5) \qquad \text{....por propiedad 4}$$

$$\boxed{x < \frac{5}{4}}$$

Su interpretación es: Los valores que hacen que $\frac{x - 2}{3}$ es menor que $x - 1$ son cuando $x$ es estrictamente menor que $\frac{5}{4}$.
Asi el conjunto solución es: $x \in (-\infty\ ,\ \frac{5}{4})$ ó $\{x|x \in \mathbb{R},\ x < \frac{5}{4}\}$

EJEMPLO 3) Encontrar el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$12\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{2}\right) \le \frac{3x}{4}$$

SOLUCIÓN:

$$\frac{12(2)}{3} - \frac{12(x)}{2} \le \frac{3x}{4}$$

$$8 - 6x \le \frac{3x}{4}$$

$$4(8 - 6x) \le 4\left(\frac{3x}{4}\right) \qquad \text{.......por propieded 4}$$

$$32 - 24x \le 3x$$

$$32 - 24x - 32 \le 3x - 32 \qquad \text{.......por propiedad 3}$$

$$- 24x \le 3x - 32$$

$$- 24x - 3x \le 3x - 32 - 3x \qquad \text{....por propiedad 3}$$

$$- 27x \le - 32$$

$$- \frac{1}{27}(- 27x) \ge - \frac{1}{27}(- 32) \qquad \text{....por propiedad 5}$$

$$\boxed{x \ge \frac{32}{27}}$$

Su interpretación es: Los valores que hacen que $12\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{2}\right)$ sea menor o igual que $\frac{3x}{4}$ son cuando $x$ es mayor o igual que $\frac{32}{27}$.

Asi el conjunto solución es: $x \in (\frac{32}{27}\ ,\ \infty)$ ó $\{x|x \in \mathbb{R},\ x \ge \frac{32}{27}\}$

EJEMPLO 4) Encontrar el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{2x + 3}{4} + 1 \geq \frac{2 + 4x}{3}$$

SOLUCIÓN: El MCM de 4 y 3 es 12, multiplicamos ambos miembros por 12.

$$12\left(\frac{2x + 3}{4} + 1\right) \geq 12\left(\frac{2 + 4x}{3}\right) \qquad \text{....Propiedad 4}$$

$$3(2x + 3) + 12 \geq 4(2 + 4x)$$

$$6x + 9 + 12 \geq 8 + 16x$$

$$6x + 21 \geq 8 + 16x$$

$$6x + 21 - 21 \geq 8 + 16x - 21 \qquad \text{....Propiedad 3}$$

$$6x - 16x \geq - 13 + 16x - 16x \qquad \text{....Propiedad 3}$$

$$- 10x \geq - 13$$

$$- \frac{1}{10}(-10x) \leq - \frac{1}{10}(- 13) \qquad \text{....Propiedad 5}$$

$$\boxed{x \leq \frac{13}{10}}$$

Su interpretación es: Los valores que hacen que $\frac{2x + 3}{4} + 1$ sea mayor o igual que $\frac{2 + 4x}{3}$ son cuando $x$ es menor o igual que $\frac{13}{10}$.

Así el conjunto solución es: $x \in (-\infty , \frac{13}{10}]$ ó $\{x | x \in \mathbb{R},\ x \leq \frac{13}{10}\}$

EJEMPLO 5) Encontrar el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$(4x - 3)^2 - x(7x - 13) < (3x - 2)^2$$

SOLUCIÓN: Primero se desarrollan los cuadrados y el producto.

$$16x^2 - 24x + 9 - 7x^2 + 13x < 9x^2 - 12x + 4$$

$$9x^2 - 11x + 9 < 9x^2 - 12x + 4$$

$$9x^2 - 11x + 9 - 9x^2 < 9x^2 - 12x + 4 - 9x^2 \qquad \text{..Prop.3}$$

$$- 11x + 9 < - 12x + 4$$

$$- 11x + 9 - 9 < - 12x + 4 - 9 \quad .....\text{Propiedad 3}$$
$$-11x + 12x < - 12x - 5 + 12x \quad ...\text{Propiedad 3}$$
$$x < - 5$$

Su interpretación es: Los valores que hacen que $(4x - 3)^2 - x(7x - 13)$ sea menor que $(3x - 2)^2$ son cuando **x** es estrictamente menor que - 5.

Así el conjunto solución es: $x \in (-\infty , - 5)$ ó $\{x | x \in \mathbb{R}, x < - 5\}$

Para hacer la comprobación de que efectivamente los valores encontrados son las soluciones, se sustituyen algunos valores arbitrarios del conjunto solución y se checa que satisfacen la inecuación. Ya que todavía no contamos con los conocimientos necesarios para hacer una comprobación completa.

Veamos como haríamos las comprobaciones:

En el ejercicio 2) la inecuación es $\frac{x - 2}{3} < 1 - x$ y sus soluciones son $x \in (-\infty , \frac{5}{4})$, elegimos un número en ese intervalo que sea 1 y veamos que pasa al sustituirlo en la inecuación.

$$\frac{1 - 2}{3} < 1 - 1$$
$$- \frac{1}{3} < 0 \qquad \text{que es verdadero.}$$

Tomemos otro número en ese intervalo que sea -4 y al sustituirlo tenemos:

$$\frac{- 4 - 2}{3} < 1 - (- 4)$$
$$- \frac{6}{3} < 1 + 5$$
$$- 2 < 6 \qquad \text{que también es verdadero.}$$

Así todo número en el intervalo $(-\infty , \frac{5}{4})$ es solución de la inecuación.

La comprobación de los demás ejercicios se deja al lector.

EJERCICIO 9.4

Encontrar el intervalo o el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones.

1) $x + 8 \le 12$

2) $2x - 1 \ge 7$

3) $3x - 8 < 2x + 5$

4) $4 - 7x > x - 20$

5) $5(x - 2) < x + 2$

6) $3(2x - 1) \ge 2(x + 6) + 1$

7) $7 + 2(3x - 5) \le 3(5 - x)$

8) $3 - 2(7 - 8x) > 3(4 + 5x)$

9) $8 + x < 7 - 2(1 - x)$

10) $2x - \frac{5}{3} \ge \frac{x}{3} + 10$

11) $\frac{3 - x}{2} \ge 5$

12) $\frac{x - 4}{3} \le 4 - x$

13) $\frac{2}{3} + \frac{x}{2} > x + 1$

14) $8\left(\frac{x}{5} + 2\right) < 2 + \frac{x}{10}$

15) $\frac{2x}{3} + \frac{4}{5} < \frac{x + 3}{3}$

16) $\frac{3(2x - 6)}{4} + 2 < \frac{2x - 8}{2}$

17) $(x - 1)^2 + 7x > x(x + 1) + 7$

18) $(x - 2)(x + 3) \le (x + 1)(x + 2)$

19) $(x + 2)(4x - 3) - (2x + 1)(2x - 1) \ge 4x$

20) $\frac{x + 2}{x + 8} < \frac{x - 2}{x + 3}$

---

## 9.5 PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR MEDIO DE UNA INECUACION.

A estas alturas tu mente está llena de números, letras y símbolos de operaciones que quizá digas "bueno y ahora, ¿que hago?, ¿para que me sirve todo esto?". En un principio establecimos que te deberías de enriquecer de toda la herramienta algebraica para que cuando se te presentara un problema práctico de la vida cotidiana y más adelante en tus propios estudios sin mucha dificultad lo resolvieras.

En temas anteriores ya resolviste varios problemas en los cuáles tu necesitaste de estas técnicas que son bastante abstractas pero que son necesarias para poder resolver determinados problemas, y si estudiaste cada uno de los temas expuestos en este trabajo y resolviste sus ejercicios, cuentas con suficientes bases para continuar con los conocimientos Matemáticos posteriores.

La última parte que nos falta abordar es resolver otro tipo de problemas en los cuáles intervienen las desigualdades, que es muy probable ya no te parezcan muy difíciles ya que utilizaras las experiencias anteriores.

Te recomiendo sigas cada uno de los 6 pasos mencionados en el punto 4.4 Aprendiendo a resolver problemas del Tema IV, estos pasos están planteados para ecuaciones que son exactamente los mismos para las inecuaciones. Lo único que debes cambiar es la palabra "ecuación" por la palabra "**inecuación**".

Con varios ejemplos confirmaras que no es nada nuevo ni más difícil.

EJEMPLO 1) El cuádruplo de la suma de un cierto número y 3 es menor o igual que la suma del doble de dicho número con 6. ¿Qué números satisfacen dichas condiciones?.

SOLUCIÓN: Llamemos $x$ al cierto número desconocido.

La suma de este número con 3 es: $x + 3$

El cuádruplo de dicha suma será: $4(x + 3)$

El doble de dicho número es : $2x$

La suma de éste último con 6 es: $2x + 6$

Nuestra inecuación queda planteada así: $4(x + 3) \leq 2x + 6$

Resolvemos la inecuación como lo aprendimos anteriormente:

$$4(x + 3) \leq 2x + 6$$

$$4x + 12 \leq 2x + 6$$

$$4x - 2x \leq 6 - 12$$

$$2x \le -6$$
$$x \le -\frac{6}{2}$$
$$\boxed{x \le -3}$$

Las soluciones son: $x \in (-\infty\ ,\ -3]$ ó $\{x|x \in \mathbb{R},\ x \le -3\}$

Es decir los números que satisfacen las condiciones dadas en el problema son aquellos que sean menores o iguales que -3.

Recuerda que para hacer la comprobación debes de elegir algunos números del conjunto solución y ver que satisfacen las condiciones del problema.

EJEMPLO 2) El largo de un rectángulo mide 10 cm. Si su perímetro es menor de 30 cm. ¿Cuánto medirá su ancho?

SOLUCIÓN: Llamemos **x** al ancho del rectángulo.

Su perímetro es la suma de la longitud de sus 4 lados, es decir Perímetro $= 2x + 2(10)$

Como su perímetro es menor que 30 cm, tenemos la siguiente inecuación:

$$2x + 2(10) < 30$$

Resolvemos la inecuación: $2x + 20 - 20 < 30 - 20$

$$2x < 10$$
$$x < \frac{10}{2}$$
$$\boxed{x < 5}$$

Las soluciones de la inecuación son $x \in (-\infty\ ,\ 5)$

Al relacionarlas con el problema sabemos que no pueden haber magnitudes negativas ni cero, entonces los posibles valores del ancho son:

$$0 < x < 5:\ x \in (0\ ,\ 5)$$

EJEMPLO 3) La Sra. Piña tiene 12 años más que su prima. Si la suma de sus edades es menor que 58. ¿Qué edad puede tener su prima?

SOLUCIÓN: Supongamos que $x$ es la edad de la prima de la Sra. Piña.
La edad de la Sra. Piña será de $x + 12$.
Al sumar sus edades tenemos: $x + (x + 12)$
Pero dicha suma es menor que 58, es decir tenemos.

$$x + (x + 12) < 58$$

Resolvemos la ecuación: $x + x + 12 < 58$

$$2x + 12 < 58$$

$$2x + 12 - 12 < 58 - 12$$

$$2x < 46$$

$$\frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(46)$$

$$\boxed{x < 23}$$

La solución de la inecuación son $x \in (-\infty , 23)$.

Pero como no existen edades negativas, los posibles valores que son solución del problema deben de ser $x \in (0 , 23)$.

EJEMPLO 4) Luis tienen un número impar de libros y Paco tiene 2 libros más que Luis. De tal manera que el triple de los que tiene Luis es menor que el doble de los que tiene Paco. ¿Cuántos libros puede tener Luis?

SOLUCIÓN: Recuerda: Para que un número sea par hay que multiplicarlo por 2, entonces $2x$ es par. Si le sumamos 1 se vuelve impar, entonces $2x + 1$ es impar, claro que siempre que $x$ sea entero.

Supongamos que Luis tiene $(2x + 1)$ libros.
Considerando que $x$ es entero positivo.
Paco tendrá $(2x + 1) + 2 = 2x + 3$ libros, ya que tiene 2 libros más que Luis.
El triple de los que tiene Luis es: $3(2x + 1)$
El doble de los que tiene Paco es: $2(2x + 3)$
Nuestra inecuación se plantea así: $3(2x + 1) < 2(2x + 3)$

Resolvemos la inecuación: $3(2x + 1) < 2(2x + 3)$

$$6x + 3 < 4x + 6$$

$$6x + 3 - 3 < 4x + 6 - 3$$

$$6x < 4x + 3$$
$$6x - 4x < 4x + 3 - 4x$$
$$2x < 3$$
$$\frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(3)$$
$$\boxed{x < \frac{3}{2}}$$

Las soluciones de la inecuación son $x \in (-\infty\ ,\ \frac{3}{2})$

Pero como no puede haber un número negativo ni fracciones de un libro entonces las posibles soluciones de nuestro problema son: $\{0,\ 1\}$

EJEMPLO 5) El Sr. Gordillo pesa 30 kg más que su esposa. Sus pesos combinados es por lo menos 150 kg más que el de su hijo que pesa una tercera parte del peso del Sr. Gordillo. ¿Cuál es el peso mínimo del Sr. Gordillo?

SOLUCIÓN: Supongamos que la esposa del Sr. Gordillo pesa $x$ kilos.

El Sr. Gordillo pesará $x + 30$ kilos.

Su hijo pesará una tercera parte de su peso: $\frac{x + 30}{3}$

Los pesos combinados del Sr. Gordillo y su esposa es:

$$(x + 30) + x$$

Al decir por lo menos debemos interpretar que puede haber otros pesos mayores y por ésto utilizaremos el símbolo $\geq$.

Nuestra inecuación queda así:

$$(x + 30) + x \geq 150 + \frac{x + 30}{3}$$

Resolvemos la inecuación:

$$(x + 30) + x \geq 150 + \frac{x + 30}{3}$$
$$2x + 30 \geq \frac{450 + x + 30}{3}$$
$$2x + 30 \geq \frac{480 + x}{3}$$
$$3(2x + 30) \geq 3\left(\frac{480 + x}{3}\right)$$

$$6x + 90 \geq 480 + x$$
$$6x + 90 - 90 \geq 480 + x - 90$$
$$6x \geq 390 + x$$
$$6x - x \geq 390 + x - x$$
$$5x \geq 390$$
$$\frac{1}{5}(5x) \geq \frac{1}{5}(390)$$
$$\boxed{x \geq 78}$$

Las soluciones de la inecuación son $x \in [78\ ,\ \infty)$

El peso mínimo del Sr. Gordillo será $x + 30 = 78 + 30 = 108$ kilos.

EJEMPLO 6) Una fábrica de muebles para armar una mesa requiere de 20 minutos, y 25 minutos para armar una silla. La fábrica dispone de 140 horas-hombre de trabajo al día. Si se producen 4 sillas por cada mesa, hallar el número máximo de sillas que se pueden fabricar.

SOLUCIÓN: Supongamos que el número de sillas que se pueden fabricar es $x$.

Entonces el número de mesas que se fabricarán será de $\frac{x}{4}$.

Cada silla necesita 25 minutos para armarse, entonces $x$ sillas se armarán en $25x$ minutos.

Cada mesa necesita 20 minutos para armarse, entonces $\frac{x}{4}$ mesas se armarán en $20(\frac{x}{4})$ minutos.

Las sillas con las mesas se armarán en $25x + 20(\frac{x}{4})$ min.

Se dispone de 140 horas es decir de 8400 minutos.

El número máximo que se puede fabricar en 8400 minutos se representa por la inecuación: $25x + 20(\frac{x}{4}) \leq 8400$

Resolvemos la inecuación: $25x + 20(\frac{x}{4}) \leq 8400$
$$25x + 5x \leq 8400$$
$$30x \leq 8400$$
$$\frac{1}{30}(30x) \leq \frac{1}{30}(8400)$$

$$\boxed{x \leq 280}$$

Las soluciones de la inecuación son $x \in (-\infty\ ,\ 280]$

Entonces el número máximo de sillas que pueden armar en 140 horas es de 280.

EJERCICIO 9.5

Encuentra las soluciones de cada uno de los siguientes problemas.

1. La suma de cierto número con 7 es mayor que 23, encontrar que números satisfacen dicha condición.
2. El triple de un número disminuido en 2 es menor ó igual que cuatro, encuentra el conjunto solución que satisface dicho enunciado.
3. De dos números enteros consecutivos, el mayor de ellos es menor que la mitad del número menor más cuatro ¿Cuáles son los valores posibles de los enteros?
4. La base de un rectángulo es de 10 cm. Si su área es mayor que $65cm^2$, ¿Cuánto puede medir su altura?
5. Uno de los lados de un terreno rectángular mide 32m. Si el perímetro del terreno es menor que 512m, ¿que valores puede tomar el segundo lado del terreno?
6. Se desea hacer un mural rectangular de tal manera que su perímetro sea a lo más de 24m, si sabemos que el largo del mural es el doble de su ancho, encontrar los posibles valores que puede tomar el ancho del mural.
7. Carolina tiene un año más que el doble de la edad de Juanita. La suma de sus edades no llega a 51 años. ¿Cuántos años puede tener Juanita?
8. La Sra. García tiene 3 años más que el doble de la edad de su hijo. Si la suma de sus edades no es mayor que 67 años, ¿Qué edad puede tener el hijo de la Sra. García?

9. Una alcancía tiene 15 monedas de a ¢10 más que monedas de ¢5. Si el total de los valores de las monedas es más de N$55.5, ¿Cuántas monedas de ¢5 puede tener la alcancía?
10. Un vendedor de libros vendió en tres días más que su cuota que es de 160 libros. Si el segundo día vendió el doble de libros que el primer día y el tercer día vendió 8 más que el primer día. ¿Cuántos libros pudo haber vendido el primer día?
11. Un dietista le dijo a un paciente pasado de peso, que debe bajar por lo menos 30 kilos en 8 meses. Si pierde 9 kilos durante los dos primeros meses, ¿Cuántos kilos deberá perder en los siguientes 6 meses?
12. El Sr. Tapia pesa 15 kilos más que su esposa. Sus pesos combinados es por lo menos 120 kg más que el de su hija, que pesa la tercera parte del peso del Sr. Tapia, ¿Cuál es el peso mínimo del Sr. Tapia?
13. Julia pesa 5 kilos más de lo que pesa Lulú, y Elmira pesa 4 kilos menos que el doble de lo que pesa Lulú. La suma de sus pesos no supera 165 kilos. ¿Cuál será la mínima edad de cada una?
14. Un pintor de muebles, para barnizar una mesa de madera requiere de 6 horas, y 4 horas para pintar una silla. El pintor dispone de 300 horas para hacer ese trabajo. Si se producen 6 sillas por cada mesa, hallar el número máximo de sillas que se pueden pintar.
15. Una herencia de más de N$25 000 000 se va ha dividir entre una madre, su hijo y su hija. La madre deberá recibir N$9 000 000 más que el hijo, y la hija va a recibir el doble de lo que reciba el hijo. ¿ Cuánto será el mínimo que recibirá el hijo?
16. En la materia de Historia Gaby tiene las siguientes calificaciones 8.6, 7.5 y 8. ¿Cuál deberá ser su cuarta calificación para que el promedio de las cuatro calificaciones sea por lo menos de 8?.
17. Un agricultor necesita 12 $km^2$ de terreno para cosechar 1 tonelada de semilla de melón y 24 $km^2$ para una tonelada de semilla de sandía. Posee un total de 162 $km^2$ de terreno de cultivo y desea sembrar el doble de semillas de melón que de sandía, hallar el máximo de toneladas de semillas de melón que puede cosechar.

## B I B L I O G R A F I A:


1. Panel sobre cambios recientes en la educación media superior. El caso del Colegio de Ciencias y Humanidades. Fís. Rafael Velázquez C. Julio 1976.
2. Algebra Elemental; F. Zubieta Rusi.
3. Algebra; Lovaglia; Edit. Harla.
4. El Cálculo, con geometría analítica; Leithold y Gerber. Edit. Harla.
5. Análisis matemático, vol. 1; Haaser, LaSalle y Sullivan. Edit Trillas.
6. Algebra Elemental; Alfonse Gobran. Grupo Editorial Iberoamérica.
7. Fundamentos de Algebra, unidades de la I a la XII. Publicaciones SUA. UNAM.
8. Introducción a las matemáticas; Meserve Sobel. Edit. Reverté.
9. Algebra, un enfoque moderno; Max Peters y William l. Schaaf. Edit. Reverté Mexicana.
10. Algebra Elemental, estructura y aplicaciones; Barnett/Nolasco. Edit. McGraw Hill.
11. Algebra Elemental; Barnett Rich.; Edit. McGraw Hill.
12. Algebra Elemental; A. Baldor.; Edit. Mediterráneo.
13. Algebra 1; Eugene D.Nichols, Mervine L. Edwards, E Henry Garland,....., Edit. CECSA
14. Algebra Superior; Cardenas/Lluis/Raggi/Tomás. Edit. Trillas.
15. Algebra; Paul R. Rider. Edit. Herrero.
16. Fundamentos de Matemáticas; Arthur D. Kramer. Edit. McGraw Hill.
17. Algebra Elemental; Gordon Fuller. Edit. CECSA.
18. Elementos de álgebra para bachillerato; Drooyan y Wooton. Edit. Limusa.