UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Unidad Académica de los Ciclos Profesional y de Posgrado
del Colegio de Ciencias y Humanidades

Proyecto: Maestría de Educación Matemática

GEOMETRIA FRACTAL EN EL BACHILLERATO: UNA PROPUESTA DIDACTICA

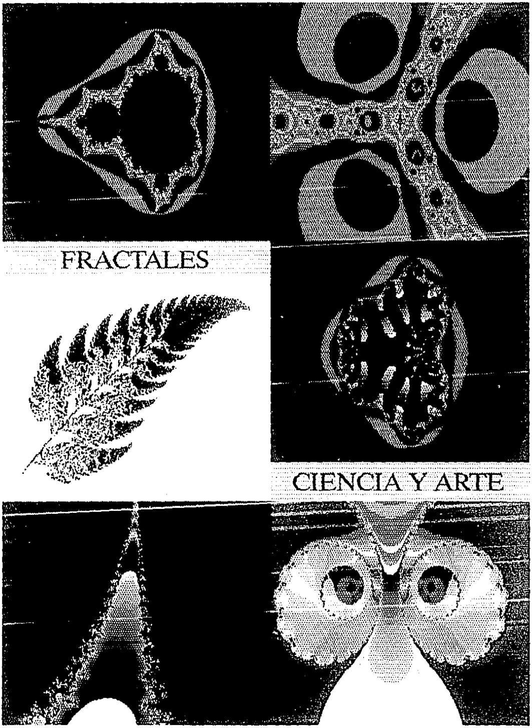
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN EDUCACION EN MATEMATICAS

P R E S E N T A:

MIGUEL MERCADO MARTINEZ

1994


FRACTALES
CIENCIA Y ARTE

AGRADECIMIENTO:

Manifiesto mi más sincero agradecimiento al Dr. Armando M. Martínez Cruz, director de la tesis, quien siempre manifestó una gran disposición e interés para lograr su culminación.

DEDICATORIAS:

A la memoria de la Dra. Elfriede Wenzelburger G. †

A Linda y Miguel Angel.

A quienes en forma callada y desinteresada contribuyeron al logro de éste fin.

COMITE REVISOR:

DR. ARMANDO M. MARTINEZ CRUZ.
DR. LUZ MANUEL SANTOS TRIGO.
M. EN C. AGUSTIN ONTIVEROS PINEDA.
DR. ENRIQUE RUIZ VELASCO
M. EN C. JUAN MANUEL ESTRADA MEDINA.

CONTENIDO

CAPITULO I

EL ESTUDIO

En este documento se plantea una propuesta didáctica para la incorporación de tópicos de las matemáticas contemporáneas, como son los Sistemas Dinámicos Discretos, la Teoría del Caos y la Geometría Fractal, al currículo del bachillerato, la propuesta contempla el diseño, implementación y reflexión de una experiencia en el salón de clase. En este primer capítulo se presenta una breve discusión de la problemática de la enseñanza de la matemática, se menciona el impacto de las nuevas tecnologías en la Educación Matemática y se destacan algunas características del modelo educativo del CCH. Esto da un contexto en el que se deben considerar propuestas como la presente.

Planificación de la Enseñanza. Una de las lecciones que más a menudo aprenden los estudiantes en sus clases de matemáticas de varios niveles educativos, es la sensación de tener serias limitaciones para la comprensión y asimilación de las matemáticas; a lo que suele llamarse matemafobia o fobia a las matemáticas. Lo anterior, en muchos casos, conduce a la frustración del alumno llegando incluso al abandono escolar. Las convicciones negativas acerca de su propia capacidad no sólo están presentes en matemáticas, sino que también aparecen en otras situaciones, por ejemplo, cuando un individuo dice "no puedo aprender inglés, pues no tengo oído para los idiomas"; o bien, "no puedo flotar sobre el agua, no toco piso y siento hundirme, nunca aprenderé a nadar". La mayoría de las veces las creencias se repiten una y otra vez como supersticiones, creando un mundo de tabúes. Es entonces cuando las deficiencias se convierten en una identidad de la persona, y en el caso escolar estos tabúes son comunes en el aprendizaje.

Recuerdo que cuando estudié la preparatoria un profesor de matemáticas señalaba esas creencias. El maestro nos contó en clase que él como estudiante se propuso no aprender Química y lo había logrado con suma facilidad. Es común que cada uno de nosotros, a lo largo de nuestra vida, tenga alguna creencia de esta índole. Si bien estas auto-imágenes pueden ser superadas, en la vida de un individuo son extremadamente sólidas. Si una persona piensa que no puede hacer matemática, es casi seguro que tendrá éxito en impedirse cualquier tarea que reconozca como matemática. La consecuencia de este auto-engaño se refleja en un fracaso personal.

Es tarea del educador en matemáticas, de los investigadores en las ciencias cognitivas y de la educación, la búsqueda de mecanismos que permitan romper con esas barreras que impiden el aprendizaje de las matemáticas. La tarea no es nada sencilla. Para ilustrar lo complejo del problema, citaremos un caso que ejemplifica una evidencia clara de las dificultades que surgen al modificar los contenidos y metodologías de enseñanza de las matemáticas cuando se requiere adecuar los contenidos a las necesidades de la sociedad o bien para mantenerlos vigentes

En los inicios de la década de los sesentas, en los Estados Unidos de Norteamérica se dieron las condiciones propicias para que se elaborara e implementara un nuevo plan de estudios en la enseñanza de la matemática en los niveles preuniversitarios. A esta acción se le conoce como "La Reforma de las Matemáticas Modernas". Uno de sus objetivos consistía en la erradicación de la Geometría Euclidiana y entre los nuevos contenidos se encontraban: La Introducción a la Teoría de Conjuntos, El Simbolismo Moderno, La Introducción a las Estructuras Algebraicas y los Sistemas Axiomáticos, La Algebrización de la Trigonometría, etc. En cuestión de unos 15 años la enseñanza de las matemáticas modernas dominó a muchos países. Sin embargo, a pesar de contar con el dinero, el tiempo y las energías invertidas en el programa, los resultados fueron negativos, observándose en los alumnos con el transcurso del tiempo, una pobre formación matemática. A este hecho se le denominó el fracaso de las matemáticas modernas (Kline, 1976).

La modernidad se originó por la necesidad de adecuar la formación matemática al desarrollo científico y tecnológico de las principales sociedades occidentales de ese tiempo y también a ciertas condiciones políticas especiales. Entre los factores para que la reforma tuviera lugar se pueden señalar tanto la ideología y la filosofía de las matemáticas de la época como la acción de los matemáticos en las universidades. Sin embargo el fracaso fue una consecuencia quizá de la inmadurez del medio o bien porque estaba basada en premisas erróneas y objetivos equivocados (Ruíz, 1992).

El hecho anteriormente descrito nos pone de manifiesto que para planificar la enseñanza de las matemáticas en particular, no es suficiente con ser un experto en ellas. Por el contrario, además de conocerlas es menester tomar en cuenta otros elementos asociados al proceso de enseñanza-aprendizaje, como son los procesos cognitivos que tienen lugar, las diferentes metodologías de enseñanza existentes, los recursos didácticos al alcance del profesor y los resultados recientes de las investigaciones en educación matemática.

Nuevas Tecnologías y la Educación matemática. A nuestra era se le conoce como la era de la información, debido a la integración en nuestras actividades cotidianas del teléfono, la televisión y la computadora, los que nos permiten la transferencia de información desde cualquier parte donde el hombre se encuentre. La información es el nuevo capital y la nueva materia prima. La capacidad y la habilidad para comunicar información es el nuevo significado de producción, ya que la información sólo tiene valor si es controlada y organizada para un propósito bien definido.

Las computadoras han invadido rápidamente nuestra vida cotidiana ocupando un lugar muy importante en ella; las encontramos en todas partes desde objetos de uso cotidiano como relojes de cuarzo, calculadoras de bolsillo (que suelen llevar calendario, agenda, reloj despertador, etc.), hasta aplicaciones como vuelos espaciales y las fábricas completamente automatizadas en donde los robots suplen la mano de obra humana (Shaff, 1985).

La tecnología es catalizadora de los cambios que afectan tanto las actividades que realizamos como las formas de pensar. Durante el siglo XVIII fue desarrollada por James Watt la máquina de vapor, que posteriormente se adaptó a la producción de hierro forjado. El resultado fue el incremento en quince veces la producción de hierro, iniciándose en Inglaterra la Revolución Industrial. La Revolución no sólo tuvo impacto en la tecnología, también lo tuvo en la estructura social, en los gobiernos, en las ciudades, en las familias, en el arte y hasta en el concepto de tiempo; la sociedad industrial reemplazó a la sociedad agraria.

En la actualidad la nueva máquina que se oculta tras la centellante señal en el monitor de una computadora, es una máquina que "piensa" a diferencia del reloj, del telescopio o del tren (Turkle, 1984), lo que traerá como consecuencia la aparición de nuevas formas de ser productivo en la sociedad. Así, la era de la información reemplazará a la sociedad industrial.

Los cambios implican que los educadores innovativos se deben anticipar a las necesidades de los tiempos debido a que nuestros estudiantes serán los ciudadanos del siglo XXI y la cultura necesariamente será diferente; se requiere de una reestructuración fundamental en el ambiente educacional del modelo común de trasmisión del conocimiento al modelo basado en la estimulación del aprendizaje. La transición involucra cambios fundamentales en los contenidos, en la modalidad de instrucción, en la formación de profesores y en los métodos de evaluación (Sowder, 1989).

La Educación Matemática enfrenta una herencia escolar, donde el enfoque tradicional acepta a la matemática como una entidad dada, como una ciencia ya terminada y se esfuerza por hallar modos de enseñarla, llega a usar computadoras con ese propósito obligando al estudiante a "tragar" material indigerible (Papert, 1981). Como una alternativa debería plantearse cómo reconstruir la matemática de modo que sea significativa para el alumno; que la antigua idea de adiestrarse en una actividad para toda la vida se sustituya por el poder de aprendizaje que depende de las habilidades para entender y para comunicarse.

Las nuevas tecnologías han provocado cambios en el uso y aplicación de las matemáticas. Las actividades de abstracción, de generalización y de demostración como una cadena de deducciones a partir de un conjunto de axiomas sigue siendo una herramienta de gran utilidad para hacer matemáticas. Sin embargo, debido a los medios electrónicos de cálculo con el propósito de aplicar o hacer matemática, se han tenido que adoptar metodologías de trabajo de otras ciencias, como son la exploración, la observación, la simulación de situaciones reales y el control de variables. No obstante la matemática nunca será una ciencia puramente experimental.

Las computadoras son manipuladoras extraordinarias de símbolos. Principalmente en materias donde hay necesidad de manipular una gran cantidad de símbolos, las computadoras tienen un valor incalculable, pero es necesario erradicar la creencia errónea en el alumno de que cualquier problema puede resolverse por medio de una computadora altamente sofisticada. La computadora tiene una diversidad de aplicaciones en matemáticas. Una aplicación sobresaliente fue en la solución del problema clásico de los cuatro colores, que mantuvo ocupados a los matemáticos sin encontrar su solución, durante más de un siglo. El problema surgió de la manera siguiente, alrededor del año de 1850 Francis Guthrie (1831-1899) discípulo de Augustus De Morgan, notó que cuatro colores eran suficientes para distinguir los condados de un mapa de Inglaterra. Posteriormente indicó mediante un argumento insatisfactorio que cuatro colores eran suficientes para colorear un mapa sobre un plano o una esfera, donde los países compartiendo una frontera común tenían colores diferentes. La conjetura se conoce como el problema de los cuatro colores. Muchos matemáticos trabajaron en su solución, encontraron varios esquemas reducidos que limitaban el tipo de mapa, sin embargo, a pesar de las variadas pruebas, el problema permaneció inmune. Fue hasta 1976 cuando Kenneth Appel y Wolfgan Haken probaron la conjetura mediante un análisis inmensamente complicado, auxiliados por una computadora, invirtiendo una buena cantidad de horas/máquina en el proceso (Eves, 1983).

Modelo Educativo del C.C.H. En la actualidad, el bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM realiza una revisión de sus planes y programas de estudio. La primera versión de los programas de estudio de las cuatro primeras asignaturas de matemáticas se dió a conocer en un documento (Cuadernillo 22, Dic. 1993). En este documento se ratifican los principios que dieron origen al Colegio de Ciencias y Humanidades, en los que se plantea una enseñanza activa en la cual el estudiante no es un simple receptor de información, sus objetivos son: que el alumno aprenda a aprender; aprenda haciendo; y aprenda a ser. Para que dichos objetivos sean vigentes, toda propuesta debe tomar en cuenta las modificaciones de la cultura y de la vida social del individuo, en nuestro caso el desarrollo continuo y creciente de las tecnologías, entre las que se destacan las computacionales, junto con las investigaciones en el campo de la educación, en particular la Educación Matemática.

El modelo educativo del C.C.H. fue creado con el propósito de ser un motor permanente de innovación de la enseñanza universitaria (González, 1983), para promover cambios en las estructuras universitarias forjando una nueva manera de alcanzar y desarrollar conocimiento científico, estableciendo una nueva forma de conexión entre Universidad y Sociedad. Su filosofía está encaminada hacia objetivos que persiguen el desarrollo integral del estudiante, su realización como individuo y su desempeño como miembro de la sociedad. Para ello se supone una educación que centra sus intereses en el aspecto formativo y no en la mera trasmisión de conocimientos. Su metodología gira en torno a la filosofía de la enseñanza activa, la cual asigna al alumno un papel protagónico en la búsqueda del conocimiento, el alumno debe aprender a aprender, debe aprender a hacer y debe aprender a ser. Sitúa al maestro como guía y orientador hacia tal propósito dentro de una enseñanza interdisciplinaria, con lo que la relación maestro-alumno se modifica.

No es propósito de este trabajo hacer un análisis de la primera versión de los programas de estudio señalados con anterioridad; más bien el trabajo tiene como objetivo presentar una propuesta que incorpore dentro de revisiones futuras más elementos a considerar que nos conduzcan a lograr los fines que dieron origen al Colegio de Ciencias y Humanidades, "ser un motor permanente de innovación de la enseñanza", en nuestro caso la enseñanza de las matemáticas.

Matemáticas Contemporáneas en el Bachillerato. En este trabajo se propone la incorporación al currículo del bachillerato de temas de las matemáticas contemporáneas, como son los sistemas dinámicos, la Teoría del caos y la Geometría Fractal. Para su adopción no es necesario que los alumnos tengan conocimientos sobre matemáticas avanzadas, ya que los pre-requisitos indispensables son los que tiene un educando de este nivel. Los temas anteriores permiten explotar la potencia de cálculo y la capacidad gráfica que poseen las computadoras personales y/o las calculadoras gráficas, resultando ser excelentes auxiliares didácticos dentro de este enfoque. Si se logran cambios en los contenidos tradicionales y se incluyen tópicos de la matemática actual, que son idóneos para la inclusión de un estilo visual y experimental se podrían iniciar cambios fundamentales en el desempeño de los alumnos (Goldenberg, 1989).

De acuerdo con algunos científicos, el caos, los sistemas dinámicos y los fractales constituyen la tercera revolución científica de este siglo. La primera revolución se debe a Albert Einstein con su Teoría de la Relatividad en la que se permite entender el universo de lo infinitamente grande. La segunda revolución fue la mecánica cuántica ó física de lo infinitamente pequeño, creada por un conjunto de notables científicos entre ellos Max Plank, Louis de Broglie, Niels Bohr, Erwin Schorödinger, Werner Heisenberg, Enrico Fermi, Paul M. Dirac, etc. (Del Río, 1990). La creación de la Teoría de los Fractales se le debe al matemático Benöit Mandelbrot, descubierta durante la década de los sesentas y pasa a formar parte significativa de la cultura de finales del siglo XX.

Aún cuando haya reformas educativas todavía queda la necesidad de desarrollar los materiales, probar o refutar su adecuacidad en el salón de clases y sugerir metodologías para su implementación. En este trabajo se aborda esta problemática del educador matemático en el contexto de reforma y revolución descrito en las páginas anteriores.

Organización del trabajo. Con esa óptica, el trabajo sigue una experiencia del autor dentro de un curso de Geometría Euclidiana en un grupo de matemáticas III del plantel Sur del Colegio de Ciencias y Humanidades, presenta el desarrollo de los materiales, describe las diferentes actividades en la implementación del curso, el análisis de los resultados logrados y da a conocer los hallazgos en el salón de clase.

El trabajo presenta la siguiente estructura. En el primer capítulo se presenta una breve discusión sobre la problemática que enfrenta particularmente la enseñanza de las matemáticas, se menciona el impacto de las nuevas tecnologías en la Educación Matemática, se señala uno de los propósitos del modelo educativo del CCH, "ser un órgano permanente de innovación", como una de las justificaciones para la incorporación de temas de la Matemática Contemporánea en el currículo del bachillerato y con ella hacer las matemáticas más dinámicas y significativas al alumno, en la construcción del conocimiento. En el segundo capítulo se encuentra una breve descripción del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele; también una breve descripción del desarrollo histórico de la Geometría, desde la Geometría de Euclides hasta llegar a la Geometría Fractal, se puntualizan algunos problemas que motivaron el surgimiento de otras Geometrías y se destaca la influencia de las computadoras en la creación de una nueva Geometría; la Geometría Fractal. En el capítulo tres, se hace una descripción de la experiencia realizada con un grupo de alumnos del tercer semestre, en el plantel sur de C.C.H. donde se impartió un curso sobre los tópicos de Sistemas Dinámicos, Caos y Fractales; en este capítulo se presentan el contenido temático y la metodología empleada. El capítulo cuarto presenta los materiales que se elaboraron y que fueron empleados durante el curso. En el capítulo cinco y último de la tesis, se discuten los resultados observados a lo largo de la experiencia, y se dan las conclusiones sobre la incorporación de temas de la matemática contemporánea al currículo del alumno del bachillerato.

CAPITULO II

LITERATURA AFIN

Este capitulo contiene la literatura relacionada con la presente propuesta para incorporar el curriculo del nivel medio superior algunos temas de la Geometría Fractal. Primero se hace una breve descripción del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, posteriormente se describen algunas de las consideraciones más importantes que dieron origen al desarrollo de la geometria y que motivaron el surgimiento de las Geometrías no Euclidianas. También se hace referencia a las Geometrías Proyectiva y Moderna y luego se aborda la Geometría Fractal, como una modeladora de objetos de la naturaleza. Finalmente se analiza el papel de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, enfatizando su importancia al incorporar temas de la matemática actual en el currículo del bachillerato.

Generalidades. Desde la gran época de los Griegos y probablemente hasta los inicios del siglo XX, se pensaba que cualquier descripción del espacio debía ser mediante la Geometría Euclidiana, y que cualquier otra descripción no basada en esta geometría debería ser incompatible y contradictoria. Es Albert Einstein, quien en el desarrollo de la Teoría General de la Relatividad, emplea un modelo geométrico diferente al de Euclides; un modelo geométrico Riemanniano.

A partir del siglo XVIII, nuevas contribuciones enriquecieron a la Geometria dando origen a la Geómetría Moderna, la Geometría Proyectiva y más tarde a las Geometrías Hiperbólica y Elíptica llamadas Geometrías no Euclidianas.

No obstante la vasta y rica producción geométrica, con ningún modelo geométrico se logró modelar a la naturaleza, es decir, construir imágenes de ríos, de costas, de montañas, de flores, de hojas, de árboles, de nubes, etc., ya que a partir de los elementos con que cuentan esas Geometrías sólo se logran aproximaciones ásperas de tales objetos. La imposibilidad parte fundamentalmente de que las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son semicírculos, etc.

Durante la década de los setentas en este siglo, Benöit Mandelbrot logró representaciones de la naturaleza gracias a una nueva geometria creada por él, a la que llamó

Geometría Fractal, del adjetivo latino *fractus* que significa interrumpido o irregular. Su desarrollo está íntimamente ligado al avance tecnológico en el campo de la computación electrónica, conjuntamente con la gran capacidad gráfica de esos dispositivos.

La relación entre las computadoras y los fractales es simple. Sin la ayuda de la computadora hubiera sido prácticamente imposible crear y visualizar los fractales, debido a que las fórmulas que los generan requieren de muchos cálculos iterativos. El número de iteraciones llega a ser del orden de millones de veces. En la actualidad una computadora que llega a tener las dimensiones de un archivero, puede realizar alrededor de 55 millones de operaciones por segundo (Sierra, 1993), por lo que el número elevado de cálculos necesarios para generar los fractales en la actualidad ya no es una limitación. Las computadoras personales al igual que las calculadoras gráficas, por su costo relativamente bajo, cada día se encuentran más al alcance de los alumnos y de los profesores. En muchas escuelas, inclusive, existe una tendencia creciente al suministro de equipos de cómputo para usos en la enseñanza como apoyo didáctico.

Antes de abordar la temática sobre el uso de la tecnología como apoyo didáctico para la enseñanza de los fractales, se hará una breve descripción del modelo de Van Hiele, ya que se encuentra directamente relacionado con el aprendizaje geométrico de los alumnos, consecuentemente se relaciona directamente con la propuesta que se presenta en este documento.

El Aprendizaje de la Geometría en los Estudiantes. La evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes puede ser descrito con el modelo de Van Hiele. Sus autores son los esposos Pierre M. Van Hiele y Diana Van Hiele Geldof que en los años 50's eran profesores de geometría en Holanda. El trabajo fue expuesto por primera vez en sus tesis doctorales en el año de 1957 (Fuys, 1988).

El modelo de Van Hiele está formado por dos partes: la primera es la descripción de los distintos niveles de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el reconocimiento visual hasta el razonamiento formal o abstracto; la segunda parte es una descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los alumnos tengan acceso a un nivel de razonamiento superior al que tienen; son las fases de aprendizaje. Los niveles se encuentran numerados del cero al cuatro y en cada uno se observan algunas de las características más importantes. Los niveles son:

Nivel 0: Reconocimiento: el estudiante percibe los objetos en su totalidad como unidades. No reconoce explícitamente las componentes ni las propiedades de los objetos. Describe los objetos por su aspecto físico y los diferencia o clasifica en base a las semejanzas o diferencias físicas entre ellos.

Nivel 1: Análisis: el estudiante, percibe los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, pero no identifica las relaciones entre ellas, deduce nuevas relaciones entre componentes de manera informal a partir de la experimentación y puede describir los objetos de manera informal mediante el reconocimiento de sus componentes y propiedades.

Nivel 2: Clasificación: el estudiante reconoce la relación entre las propiedades, describe las figuras de manera formal. No es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad y tampoco comprende la estructura axiomática de la geometría. Un alumno en este nivel comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, no entiende el encadenamiento de los pasos ni la estructura de una demostración.

Nivel 3: Deducción: el estudiante comprende la estructura axiomática de la geometría. Acepta la posibilidad de llegar el mismo resultado desde premisas distintas y es capaz de realizar razonamientos lógicos formales.

Nivel 4: Rigor: el estudiante establece teoremas en diferentes sistemas axiomáticos y analiza y compara esos sistemas.

El modelo de Van Hiele propone una secuencia cíclica de cinco fases de enseñanza para ayudar a progresar al estudiante desde un nivel de pensamiento al nivel siguiente, ya que no es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin haber superado todos los niveles inferiores. Las fases son las siguientes:

Información: En esta primera fase, el alumno obtiene información sobre el campo de investigación y sobre cuáles son los problemas que va a tratar de resolver.

Orientación dirigida: En esta fase, el estudiante hace tareas que involucran diferentes relaciones de la estructura que está formando y explora el campo de investigación.

Explicitación: En esta fase, el alumno se hace consciente de las relaciones en la estructura, explicita verbalmente estas relaciones y aprende el lenguaje técnico que acompaña a la materia en cuestión (los estudiantes aprenden a expresarse con precisión dentro de las características de su nivel de razonamiento).

Orientación libre: En esta fase, el estudiante aprende haciendo tareas más complejas y encuentra sus propias formas en la estructura de relaciones formada (conoce las propiedades de un tipo de formas e investiga estas propiedades en una nueva forma).

Integración: En esta fase, la final, el alumno integra todo lo que ha aprendido sobre la materia, refleja sus acciones y obtiene una visión global de la estructura de las relaciones, ahora ya disponibles, (son resumidas las propiedades de una figura).

Este modelo tiene 5 propiedades que son de particular importancia para los diseñadores de estrategias didácticas.

1.- El modelo es secuencial, es decir, para funcionar apropiadamente en un nivel, un estudiante deberá adquirir las estrategias de los niveles que le proceden, en forma ordenada.

2.- El modelo es progresivo, el avance (o necesidad de él) de un nivel al nivel siguiente depende del contenido y los métodos de instrucción recibidos, más que de la edad del alumno.

3.- El modelo es intrínseco y extrínseco, o sea que los objetos inherentes en un nivel resultan los objetos de estudio del nivel que le sigue.

4.- El modelo asocia un lenguaje a cada nivel. "Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y su propio sistema de relaciones que conectan estos símbolos".

5.- El modelo prevee coherencia, o sea, si el estudiante está a un nivel y la instrucción está en un nivel diferente, el aprendizaje deseado y el progreso pueden no ocurrir (Crowley, 1987).

El propósito de este trabajo de tesis es únicamente hacer una propuesta didáctica en el campo de la Geometría Fractal, por ello se ha considerado el modelo de Van Hiele, como un medio para guiar el aprendizaje del alumno. Actualmente en la bibliografía especializada, no se conoce algún estudio que aplique el modelo de Van Hiele a la enseñanza de la Geometría Fractal, por lo que existe la necesidad que dentro de la Educación Matemática sea explorada esa relación.

GEOMETRÍAS. Breve reseña histórica. En esta sección se presenta una breve reseña histórica del desarrollo de la Geometría. Se señala la importancia de la Geometría Euclidiana como prototipo de un sistema axiomatizado, se analizan algunos axiomas de la Geometría de Euclides y se destaca cómo del análisis del quinto postulado de esa Geometría, surgieron las Geometrías no Euclidianas, lo que no sólo enriqueció a la Geometría, sino que fue de gran trascendencia a la matemática. Posteriormente se hace referencia a la Geometría Proyectiva, luego a la Geometría Moderna y finalmente se aborda la Geometría Fractal.

La Geometría Euclidiana y las Geometrías no Euclidianas. Desde los días de Euclides (siglo III A.C.), la Geometría ha sido el prototipo de una disciplina axiomatizada. El método axiomático es una de las grandes aportaciones de la Geometría Euclidiana. En términos generales el método axiomático puede describirse como sigue: probar un teorema en un sistema deductivo consiste en hacer ver que el teorema es una consecuencia lógica y necesaria de ciertas proposiciones previamente establecidas, que a su vez deben ser probadas con otras proposiciones, y así sucesivamente hasta llegar a un conjunto de proposiciones llamadas postulados o axiomas, los que son aceptados como verdaderos y no requieren ninguna demostración. La elección de las proposiciones aceptadas como axiomas es en cierta medida arbitraria, no obstante es necesario que cumplan con normas, así los postulados o axiomas deben ser compatibles, (no deben deducirse de ellos dos teoremas que sean contradictorios entre sí); deben poseer la propiedad de completez, (todo teorema del sistema es deducible de ellos) y deben ser independientes, (ningún axioma es consecuencia lógica de los restantes).

El libro I de la obra de Euclides trata sobre la Geometría Plana; consta de veintitres definiciones, cinco postulados (P), cinco nociones comunes (NC) y cuarenta y ocho teoremas. Los cinco postulados y las cinco nociones comunes, se pueden considerar los axiomas de la Geometría Euclidiana y son los siguientes:

Nociones Comunes.

NC1.-Las cosas que sean iguales a la misma cosa también son iguales entre sí.

NC2.-Si a cantidades iguales se suman otras también iguales, los totales serán iguales.

NC3.-Si se restan cantidades iguales de otras también iguales, los totales serán iguales

NC4.-Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

NC5.-El todo es mayor que una parte.

Postulados

P1.-Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro punto cualquiera.

P2.-Una recta finita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada o indefinida.

P3.-Una circunferencia puede describirse con un centro y una distancia.

P4.-Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

P5.-Si una recta que corta a otras dos forma con éstas ángulos interiores del mismo lado de ella que sumados sean menores que dos ángulos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos ángulos rectos.

El quinto postulado (P5) es conocido como el postulado de las paralelas, que como se podrá observar no habla de rectas paralelas. Este postulado es bastante diferente a los otros nueve axiomas (las 5 nociones comunes y los postulados P1 a P4), por que estos últimos son proposiciones simples que parecen estar en completo acuerdo con nuestra experiencia sobre el mundo que nos rodea. No así el postulado quinto que es largo y difícil de entender, por lo que resulta de utilidad usar un esquema para comprenderlo.

Desde el punto de vista de los griegos, un axioma es una verdad evidente por sí misma, lo que debe tomarse con reservas, ya que si se analiza por ejemplo la NC5 "el todo es mayor que una de sus partes", se puede probar que el axioma no siempre es válido, sobre todo si se aplica a conjuntos infinitos. Por ejemplo, sean:

$\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\ldots, n,\ldots\ldots\}$ y
$\mathbb{N}p$, el conjunto de los números naturales pares, $\mathbb{N}p = \{2,4,6, \ldots\ldots,2n, \ldots\ldots\}$

Es claro que $\mathbb{N}p \subseteq \mathbb{N}$, sin embargo se puede establecer una relación uno a uno entre los dos conjuntos:

$$\begin{array}{llllll} \mathbb{N} = \{1, & 2, & 3, & \ldots\ldots\ldots, & n, & \ldots\ldots\ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathbb{N}p = \{2, & 4, & 6, & \ldots\ldots\ldots, & 2n, & \ldots\ldots\ldots\} \end{array}$$

de tal manera que a todo elemento de $\mathbb{N}$ le corresponda un elemento de $\mathbb{N}p$ y recíprocamente a cada elemento de $\mathbb{N}p$ se le puede asociar un elemento de $\mathbb{N}$. De aquí se puede concluir que ambos conjuntos contienen el mismo número de elementos, porque no existe un elemento de $\mathbb{N}$ al que no pueda asociársele un elemento de $\mathbb{N}p$ y a su vez no hay un elemento en $\mathbb{N}p$, al que no pueda asociársele un elemento de $\mathbb{N}$. Esto claramente contradice la proposición, o sea que el todo no siempre es mayor que la parte.

La diferencia entre el postulado de las paralelas y los otros axiomas fue notado por los griegos, así como por otros matemáticos posteriores quienes generalmente lo consideraban más bien como teorema que debía ser probado con el resto de axiomas lo que condujo a que durante aproximadamente 2000 años los matemáticos se dieron a la tarea de demostrarlo. Los intentos generalmente convergían a la suposición implícita de algún principio geométrico tan difícil como el mismo postulado Euclidiano o la supuesta demostración contenía un error lógico.

El intento más sobresaliente fue del Jesuita italiano, Girolamo Saccheri (1667-1733) quien intentó probar el postulado de las paralelas por el método llamado "reducción al absurdo"; el cuál consiste en suponer la falsedad del postulado y entonces mostrar que esta suposición conduce a una contradicción de algo verdadero (un absurdo). Sin embargo Saccheri obligó a que entrara en juego una contradicción no convincente donde intervenían nociones confusas sobre elementos infinitos, lo que condujo a que no se le considerara como descubridor de las Geometrías no Euclidianas.

La Geometría puede ser comparada con los juegos. Cualquiera que guste de éstos probablemente ha cambiado las reglas. Algunas veces cambiando una sola regla, el juego resulta completamente diferente. En Geometría, los postulados pueden considerarse las reglas, entonces si se cambia un postulado, se puede crear una nueva Geometría. El cambio puede consistir en la negación de un postulado. Justamente esto es lo que dió origen al surgimiento de otras Geometrías, en particular, la negación al quinto postulado de la Geometría de Euclides.

El postulado de las paralelas es lógicamente equivalente al axioma de Playfair, (1748-1819) que es la versión quizás más conocida de ese postulado donde se establece: por un punto dado "A" que no está en una recta "m" pasa a lo más una recta que no corta a "m".

Tomando el postulado de Playfair y entendiendo por rectas paralelas aquellas que al prolongarlas indefinidamente no se intersectan, se pueden construir dos negaciones diferentes:

a) Por un punto fuera de una recta pasa más de una paralela a la recta dada.

b) Por un punto fuera de una recta no pasan paralelas a la recta dada.

Durante el siglo XIX, los trabajos de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), de Nicolai Lobachevsky (1793-1856) y Janos Bolyai (1802-1860), hicieron la primera suposición: a través de un punto fuera de una recta dada pasan al menos dos rectas paralelas a la recta dada. Esta suposición condujo a una nueva Geometría no Euclidiana que no contradice ninguno de los otros postulados de Euclides, de igual manera tampoco se contradicen los teoremas que no dependen del quinto postulado en la misma Geometría. Esta Geometría es llamada Geometría Hiperbólica.

No es difícil encontrar un modelo que satisfaga las condiciones anteriores. Un modelo puede ser el conjunto de puntos limitados por un círculo, incluidos los del círculo, (figura 1). En nuestro modelo algunas "rectas" son *m, n, q* y *l*. En el modelo consideramos "rectas" a los segmentos de recta contenidos en el círculo y "puntos" a cualquier punto del círculo. Es hasta cierto punto sencillo ver que por el "punto" *P* pasan las rectas *m, n, q,* y mucho más "rectas" que no cortan a la "recta" *l* por lo que se pueden considerar "rectas paralelas" a *l* ya que ninguna intersecta a dicha recta.

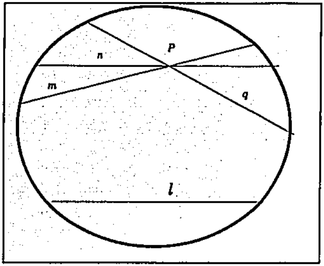


Fig. 1: Modelo de Geometría con varias Paralelas.

Georg Friedrich Bernard Riemann (1826-1866), hizo la segunda suposición: a través de un punto fuera de una recta dada, no pasarán rectas que sean paralelas a la recta dada. Esta suposición conjuntamente con ciertos ajustes a otros postulados, condujeron a una segunda Geometria que no contradice a ninguno de los demás axiomas de Euclides así como tampoco a ningún teorema que no dependa del postulado de las paralelas. A dicha Geometría se le conoce como Geometría Elíptica.

Como ejemplo imaginemos que somos seres de dos dimensiones únicamente y que habitamos la superficie de una esfera. En nuestro mundo el arco del círculo máximo tendría todas las propiedades de la línea recta: por ejemplo, este arco sería el camino más corto entre dos puntos dados. Encontraríamos que en nuestro mundo no existen rectas paralelas, además de que todas las rectas se cortarían.

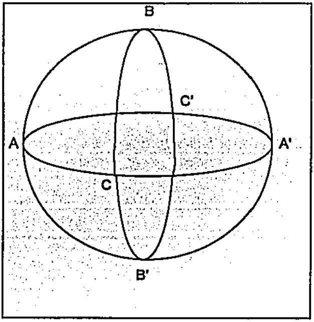


Fig. 2: Modelo Geométrico sin Paralelas.

En este caso se puede usar la superficie de una esfera como modelo. En el modelo se hacen dos cambios en los postulados de Euclides. Primero, hay que reemplazar la palabra "recta" por la frase "círculo máximo" (un círculo máximo es un círculo que forma sobre la superficie de una esfera un plano que pasa por el centro de la esfera). Segundo, llamar a cada pareja de puntos diametralmente opuestos (puntos en los extremos de un diámetro) sobre la esfera un punto simple y reemplazar la palabra "punto" con la frase "pareja de puntos".

A y A' forman una pareja de puntos, así como BB' y CC'. Más de un círculo máximo pueden pasar por AA' o por cualquier pareja de puntos en el modelo. Sin embargo, solamente un círculo máximo puede pasar a través de ambos AA' y BB', en la figura 2 es el círculo que pasa por los puntos AA' y BB', es el círculo que pasa por CC'.

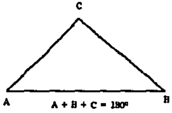
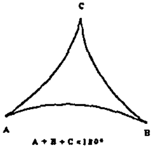
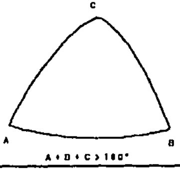
Geometría Euclidiana (siglo III, A.C.)	Geometría Lobachevskiana (ca 1830)	Geometría de Riemann (ca 1850)
Dado un punto P fuera de una recta m, puede trazarse exactamente una recta paralela a m, a través de P.	Dado un punto P fuera de una recta m, a través de P, pueden trazarse más de una recta paralela a m.	Dado un punto P fuera de una recta m, a través de P no puede trazarse ninguna recta paralela a m
Dos triángulos con ángulos de la misma medida pueden tener lados con medidas diferente (hay congruencia y semejanza)	Dos triángulos con ángulos de la misma medida deben tener sus lados de la misma medida (hay congruencia y no hay semejanza)	Dos triángulos con ángulos de la misma medida deben tener sus lados de la misma medida (hay congruencia y no hay semejanza)
Dos rectas se encuentran cuando más en un punto.	Dos rectas se encuentran cuando más en un punto.	Dos rectas se encuentran exactamente en dos puntos, (una pareja de puntos en el modelo anterior)
Dados tres puntos distintos en una recta, uno se encuentra situado entre los otros dos.	Dados tres puntos distintos en una recta, uno se encuentra situado entre los otros dos.	En el modelo de la esfera, como las rectas son diámetros máximos, un punto cualquiera siempre queda situado entre los otros dos puntos.
		

Tabla 1: Comparación de Geometrías.

Albert Einstein en su teoría General de la Relatividad aplica un modelo de Geometría Riemanniana. Luis Enrique Erro (1986), en un ensayo sobre El Pensamiento Matemático Contemporáneo dice:

> Quizá se piense que las otras Geometrías no Euclidianas conducen a conclusiones que repugnan al buen sentido. No sé qué será el buen sentido, pero seguramente no repugnan al bien pensar. Si por buen sentido se entiende un conjunto de juicios acumulados en cada uno de nosotros, sin mayor crítica, y resultado de nuestra apresurada percepción del universo y de nuestra convivencia con seres y cosas, el buen sentido no merece mayor respeto.

Con la creación de las Geometrías no Euclidianas, no sólo se amplió el horizonte de la Geometría, sino que fue de gran impacto para las matemáticas, emergiendo ésta como una creación de la mente humana y no como algo impuesto por la naturaleza. En la actualidad un axioma no es una verdad evidente por sí misma, de hecho se pueden elegir los postulados de un sistema en forma arbitraria, siempre y cuando sean compatibles.

Antes de que las Geometrías no Euclidianas vieran la luz, se pensaba que únicamente existía una Geometría posible, naturalmente la de Euclides y que cualquier descripción del espacio opuesta a esa Geometría, debería ser incompatible y contradictoria.

Se pueden establecer diferencias en algunas de las proposiciones de las Geometrías Euclidiana, Lobachevskiana y Riemanniana, según la tabla 1.

Geometría Proyectiva. En 1639 Gérard Desargues (1593-1662) publicó un tratado original sobre las secciones cónicas donde aprovechaba la idea de proyección; sin embargo el trabajo no tuvo éxito y fue olvidado. En 1845, Michael Charles encontró una copia manuscrita del trabajo de Desargues, hecha por uno de sus discípulos y desde entonces el trabajo fue reconocido como un clásico en el desarrollo primitivo de la Geometría Proyectiva.

Posteriormente, Jean Vincent Poncelet (1788-1867) impulsó el resurgimiento de la Geometría Proyectiva, con la publicación de su obra *Traité des propiétés projectives des figures* en el año de 1922, iniciando el periodo de la Geometría Proyectiva que se llamó "gran período". Un resultado notable derivado de los trabajos de la Geometría Proyectiva fue el clasificar las propiedades geométricas en dos categorías: primero, las propiedades métricas, en las que intervienen las medidas de las distancias y los ángulos, (por ejemplo el teorema de Pitágoras habla de una propiedad métrica de los triángulos rectángulos); y segundo, las propiedades descriptivas o de posición, en las que sólo se trata la relación de las posiciones de los elementos geométricas entre sí, (por ejemplo el teorema del "hexagrama místico" de Blaise Pascal que dice: si un hexágono se inscribe en una cónica entonces los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos son colineales, y, recíprocamente, si los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos de un hexágono son colineales, entonces el hexágono está inscrito en una cónica). Se puede decir que al menos para el caso de las figuras planas, las propiedades descriptivas no se alteran cuando se somete la figura a una proyección. En contraste, las propiedades métricas pueden ya no verificarse cuando se proyecta la figura. El estudio de las propiedades descriptivas de las figuras geométricas se conoce como Geometría Proyectiva.

Geometría Moderna. En la era posterior al renacimiento europeo (Siglo XVIII), se extendió a la Geometría más allá de la que nos heredaron los griegos. En ese momento de la historia se descubrieron una gran cantidad de nuevas proposiciones relacionadas con la circunferencia y las figuras rectilíneas deducidas de las enunciadas en los elementos de Euclides: tratándose de una continuación o extensión de la Geometría Euclidiana, se conoce como Geometría Moderna elemental (contribuyeron a su desarrollo, Gergonne, Nagel, Casey y Euler, entre otros).

Geometría Fractal. No obstante el desarrollo de otras Geometrías que tuvieron sus orígenes en las Geometrías no Euclidianas, con ellas al igual que con la Geometría de Euclides no es posible modelar a la naturaleza o sea dibujar diversos elementos del mundo que nos rodean tales como: costas, árboles, plantas, montañas, ríos, nubes, planetas, etcétera, ya que únicamente se logran aproximaciones burdas de éstos, porque las costas no son círculos, la corteza de los árboles no es lisa, las montañas no son conos, ni los planetas ni las nubes son esferas. Benöit Mandelbrot (1987), dice: "La Geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del Cálculo diferencial."

En la actualidad el modelaje de la naturaleza ha sido posible mediante una nueva geometría, la Geometría Fractal, llamada así por su descubridor Benöit Mandelbrot. La palabra "fractal" proviene del adjetivo latino *Fractus* que significa fraccionado o partido.

Los fractales son figuras geométricas que poseen la propiedad de autosemejanza: son figuras que no cambian su forma si se amplía o se reduce la escala, cada una de sus partes es parecida al todo cualquiera que sean sus dimensiones. Dicho en otras palabras, si se toma una imagen fractal y se amplía un sector, generalmente la figura que resulta es semejante a la figura original. Los fractales pueden ser perfectamente autosemejantes o fractales donde la autosemejanza es de tipo estadístico, ahí interviene el caos. En el caso de las nubes y el humo los fractales cambian continuamente, sus formas se encuentran dominadas por el azar (representan sistemas dinámicos, porque cambian con el tiempo), hay otros que preservan su estructura por períodos más largos de tiempo, como por ejemplo el sistema vascular del cuerpo, los árboles, las plantas, las costas, etc. A partir de ciertos procesos recursivos se pueden generar imágenes fractales que son perfectamente autosemejantes, entre ellos se pueden considerar los polvos de Cantor, la curva de Koch, el triángulo se Sierpinski, etc. En ellos se puede observar que la parte es perfectamente semejante al todo, figura 3.

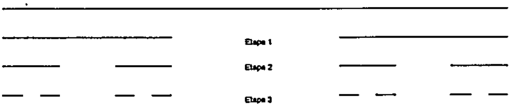


Fig. 3: Polvos de Cantor.

El principio de autosemejanza es una idealización de la realidad ya que ninguna estructura real se puede aumentar indefinidamente. Sin embargo, hay muchos fenómenos naturales en los cuales se observa este principio en forma aproximada, como en costas, ríos, flujo turbulento de líquidos o la organización jerárquica de los seres vivos.

Los procesos que generan estructuras autosemejantes son procesos simples de retroalimentación, esto es, una operación se repite una y otra vez de tal manera que el resultado (condición final) de un paso constituye el inicio (condición inicial) del paso siguiente, lo que se denomina recursividad. Por ejemplo se puede aplicar a la función matematica $f(x) = x^2$, si se toma un valor inicial diferente de la unidad, al elevarlo al cuadrado se produce un valor distinto al inicial, el nuevo valor se eleva al cuadrado y se obtiene otro valor, otra vez este último valor se eleva al cuadrado y se encuentra un nuevo valor. La operación puede repetirse un gran número de veces, lo que constituye un proceso recursivo. Aunque es necesario aclarar que a partir de este proceso no se genera una imagen autosemejante.

Dicho de otra forma si $f(x) = x^2$ y x_0 es un valor inicial cualquiera, se puede elevar al cuadrado el valor inicial x_0, al resultado llamarle x_1, a este valor elevarlo otra vez al cuadrado llamándole x_2 y así sucesivamente. O bien tomar un valor inicial x_0, extraerle raíz cuadrada, al resultado denominarle x_1, extraerle raíz cuadrada a x_1, para encontrar a x_2 y repetir el proceso una y otra vez, un gran número de veces. Esto se denomina en matemáticas, iteración recursiva de la función f(x) (figura 4).

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0) = x_0^2 \text{ ó } x_1 = f(x_0) = \sqrt{x_0} \\
x_2 &= f(x_1) = x_1^2 \text{ ó } x_2 = f(x_1) = \sqrt{x_1} \\
x_3 &= f(x_2) = x_2^2 \text{ ó } x_3 = f(x_2) = \sqrt{x_2} \\
&\vdots \\
x_n &= f(x_{n-1}) = x_{n-1}^2 \text{ ó } x_n = f(x_{n-1}) = \sqrt{x_{n-1}}
\end{aligned}
$$

Fig. 4: Iteración de Funciones

Los procesos recursivos tienen su origen en el período comprendido entre 1875 y 1925 donde matemáticos de la talla de Poincaré, Cantor, Peano, Sierpinski y Koch, manejaron esta idea y construyeron ciertas curvas monstruosas, curvas verdaderamente patológicas que aparentemente no tenían relación alguna entre ellas, ni tampoco una aplicación práctica. El mérito de Mandelbrot fue vincularlos y encontrarles aplicaciones, entre las que se destacan el sintetizar imágenes de relieves diversos, (costas, ríos, montañas, etc.) y el análisis de fenómenos tan diversos como: turbulencias, bolsa de valores, coloides, dispersión del humo, etc.

Existen paquetes que le dan a la computadora capacidad para realizar tareas matemáticas (resolver ecuaciones, derivar una función, graficar expresiones algebraicas, etc.) como son Derive, Calcula, MathCad, Mathlab, Mathematica y otros más, que nos permiten hacer exploración matemática. Otros paquetes permiten al usuario realizar gráficas a partir de elementos geométricos, entre ellos se cuentan el Paintbrush, el Page Maker, Drawing, Harvard Graphics, etc. Con estos programas y la computadora es posible implementar procesos recursivos y presentar sus imágenes en la pantalla de un monitor o con una impresora imprimirlas en papel. Existe también Software dirigido a la exploración de fractales, entre ellos se cuenta con el Fractint y con el Chaos que son sencillos de manejar. Finalmente, por medio de lenguajes de programación como el BASIC, LOGO, PASCAL, etc. que se pueden agregar a la computadora, es posible generar y visualizar figuras fractales.

Los Sistemas Dinámicos Discretos (sistemas que cambian con el tiempo), la Teoría del Caos y los Fractales, son temas de las matemáticas actuales que se encuentran íntimamente relacionados; para su desarrollo se parte de procesos recursivos: Las fórmulas que los generan requieren una gran cantidad de cálculos que llega a ser del orden de millones, por lo que las computadoras son una herramienta muy valiosa para su generación y representación gráfica.

Los fractales además de ser estructuras autosemejantes, cuentan con otras propiedades. Son figuras que tienen una longitud infinita limitada por un área finita, representan funciones que siendo continuas no son derivables en ninguno de sus puntos o sea que están formadas por puros picos, en general tienen dimensión diferente a las dimensiones clásicas euclidianas, cero, uno, dos o tres. Además en los fractales se abre la posibilidad de encontrar el orden que se esconde tras una multitud de fenómenos aparentemente caóticos, se puede decir que los fractales representan un "verdadero nexo entre la ciencia y el arte" (Ruíz, 1990), ya que son figuras de gran belleza, (figura 5).

Conjunto de Mandelbrot | Conjunto de Julia | Conjunto de Newton

Fig. 5: Imágenes Fractales.

Las formas euclidianas tienen tamaños característicos. Una esfera se caracteriza por su radio, un triángulo por sus ángulos y sus lados, etc., en tanto que los fractales son independientes de la escala. La Geometría Euclideana es útil para representar los objetos hechos por el hombre como son los planos de edificios, puentes, diagramas de circuitos eléctricos, etc., se describe con fórmulas por ejemplo la expresión algebraica $X^2+Y^2= 25$ representa una circunferencia con centro en el origen de un sistema de coordenadas y tiene un radio $r = 5$. Sin embargo es inapropiada para las formas naturales. La Geometría Fractal es apropiada para las formas naturales, se describe con procedimientos recursivos y son necesarias las computadoras. En Geometría euclidiana, un conjunto de puntos tiene dimensión cero, una línea tiene dimensión uno, una superficie tiene dimensión dos y un volumen tiene dimensión tres. En Geometría Fractal los objetos tienen dimensiones entre cero y tres, por ejemplo una hoja de papel aluminio tiene dimensión dos, pero si se arruga y se extiende, ya no es una superficie pero tampoco tiene un volumen, en consecuencia posee una dimensión entre dos y tres; una costa muy accidentada no llena una superficie pero por lo accidentado es algo más que una línea, por lo que tendrá una dimensión comprendida entre uno y dos, etc. La tabla No. 2, resume algunas de las diferencias más notables entre la Geometría Euclidiana y la Geometría Fractal.

Existen diversas formas de generar imágenes fractales entre las que destaca la representación gráfica de la iteración de funciones, a partir del triángulo de Pascal, mediante el juego del caos, a través de procesos recursivos usando elementos de la Geometría clásica, etc. En un capítulo posterior se describen algunos métodos para generar fractales, en los que sólo es indispensable conocer algunos conceptos elementales de matemáticas como son álgebra, Geometría euclidiana, trigonometría, etc.

GEOMETRÍA EUCLIDIANA	GEOMETRÍA FRACTAL
Tradicional más de 2000 años.	Reciente, alrededor de una década
Basada en tamaño o escalas características	No se basa en tamaño o escalas específicas
Describe objetos hechos por el hombre	Apropiada para formas naturales
Admite sólo dimensiones enteras	Admite dimensiones no enteras
Se describe con fórmulas	Se describe con algoritmos recursivos

Tabla No 2: Diferencias entre Geometrías Euclidiana y Fractal

El estar repitiendo una y otra vez un mismo procedimiento hace de los procesos recursivos una tarea bastante tediosa, aburrida y mucho muy tardada, lo que tal vez provocó que las ideas de recursividad no tuvieran pleno desarrollo en el pasado. En la actualidad gracias al vertiginoso desarrollo tecnológico en las últimas cuatro décadas en el campo de la computación electrónica se han diseñado dispositivos de cálculo y manejo de información de gran capacidad y velocidad, características que día con día son superadas. Para darse una idea de lo último, el año de 1950 una computadora realizaba 1000 operaciones por segundo, lo que impactó en esa época. En la actualidad un dispositivo de esa naturaleza es capaz de efectuar 55 millones de operaciones por segundo (Sierra, 1993). Además de que cada vez son mas pequeñas: mientras que la computadora del año de 1950 pesaba 7 toneladas y contenía 5000 bulbos, las actuales usan microcircuitos y tienen el tamaño de un archivero. También se han diseñado [illegible]computadoras personales que son de tamaño más reducido, llegan a ser de las dimensiones de un libro tamaño carta, pero con una enorme versatilidad

La capacidad de cálculo o de manejo y almacenaje de información, la facilidad para representar gráficas o cualquier tipo de datos en pantallas de video o la impresión en papel, el costo relativamente bajo del equipo, han permitido el uso de la micro computación en los campos más diversos incluido el de la educación.

Papel de las Nuevas Tecnologías en la Educación Matemática. El aprendizaje activo y la exploración dirigida hacen la matemática más interesante y más atractiva, adoptando un estilo visual y experimental de explorar matemáticas. Los alumnos aprenden contenidos matemáticos y hábitos para construir el conocimiento, el vehículo pueden ser las computadoras o las calculadoras gráficas (Goldenberg, 1989), conjuntamente con algunos temas de la matemática contemporánea como son los sistemas dinámicos, teoría del caos y Geometría Fractal

Como se señaló en el primer capítulo, las calculadoras y las computadoras han cambiado la naturaleza de muchos procedimientos matemáticos, han dado potencia de cálculo y facilidad de representación gráfica, por lo que la matemática ha extendido su aplicación a campos de la ciencia muy diversos e inusitados como la medicina, la composición musical y la coreografía (Wenzelburger, 1992). Como consecuencia el tipo de habilidades matemáticas que el individuo necesita en la sociedad actual, para ser productivo, ha cambiado como resultado del poder y accesibilidad de esas herramientas, por lo que es necesario realizar cambios curriculares en diversa formas.

Con las computadoras y las calculadoras gráficas se tiene un excelente medio disponible para hacer que las matemáticas sean más significativas y excitantes al alumno, por medio de problemas relevantes o problemas de desafío en el salón de clase

Por la disponibilidad de las computadoras y las calculadoras gráficas, los temas de la representación externa en la instrucción matemática condujeron a la discusión del impacto de las nuevas tecnologías, en el aprendizaje de las matemáticas, aspecto nuevo de la investigación en Educación Matemática que no ha sido investigado y de resultados aún no predecibles por ahora (Sowder, 1989). Las imágenes son muy importantes para la percepción y comprensión, porque las imágenes pueden representar información en una estructura bidimensional o tridimensional. Se puede afirmar que uno de los usos fundamentales para las gráficas se ubica en las ciencias y en la educación.

Las nuevas tecnologías pueden cambiar, no sólo cómo enseñar matemáticas, sino también qué enseñar en matemáticas (Fey, 1984). Las representaciones gráficas son un buen medio para desarrollar el pensamiento matemático (Goldenberg, 1992). Una manera como una computadora o una calculadora gráfica pueden ser usadas como herramienta en el salón de clase, es la representación de una expresión algebraica junto con la gráfica de la función. Cuando un estudiante hace cambios en los parámetros de la expresión, rápidamente observa los cambios en la gráfica de la función, lo que le permite realizar exploración en la matemática y posiblemente lo conduzca a realizar conjeturas que puede verificar de inmediato, haciendo que el conocimiento sea más significativo. Antes de los graficadores (las computadoras personales y las calculadoras gráficas) el tratar de hacer exploración significaba una gran inversión de paciencia y tiempo.

Muchos investigadores argumentan la importancia de las representaciones múltiples ligadas, a fin de desarrollar entendimiento matemático (NCTM, 1989). Si se logra cambiar los contenidos tradicionales e incluir tópicos de la matemática contemporánea, como son los Sistemas Dinámicos, la teoría del Caos y la Geometría Fractal, que se prestan para la adopción de un estilo de aprendizaje visual y experimental, se podrían iniciar cambios dramáticos y fundamentales en el desempeño de los alumnos (Goldenberg, 1989).

Con una calculadora gráfica se pueden obtener en la pantalla gráficas de una o más expresiones algebraicas, si es necesario en forma simultánea. Con la capacidad de programación que tienen estos dispositivos es posible realizar la iteración recursiva de funciones o simular procesos recursivos, que requieren de la repetición de una misma tarea una gran cantidad de veces, y presentar los resultados gráficamente.

Al contar con una computadora personal, el poder de operación y representación gráfica, se incrementa de acuerdo con la capacidad misma de la máquina y la disponibilidad de Software con que se cuente. El Software se puede decir que es un conjunto de programas que permite la interacción entre el usuario y la computadora, para la realización de un sinnúmero de funciones (programadora, procesador de texto, hoja electrónica, manejador de bases de datos, graficadores, etc.).

Resumen. En este capítulo se describió un modelo de razonamiento geométrico (Van Hiele, 1957), se reseñó brevemente el desarrollo histórico de la geometría, se presentaron algunas características sobresalientes de la Geometría Fractal y se destacó la importancia de las nuevas tecnologías en la enseñanza como apoyo didáctico y su relación con algunos temas de la matemática contemporánea. El siguiente capítulo presenta la descripción de la experiencia didáctica que se tuvo, al planear e implementar un curso sobre tópicos de la matemática contemporánea, con alumnos de curso de matemáticas III, en el plantel sur del Colegio de Ciencias y Humanidades, como parte de este trabajo.

CAPITULO III

EXPERIENCIA DIDACTICA

La propuesta didáctica que se presenta en este trabajo, fundamentalmente gira en torno a la inclusión en el curriculum del bachillerato de algunos tópicos de las matemáticas contemporáneas, como son los Sistemas Dinámicos Discretos, la Teoría del Caos y la Geometría Fractal. En este capítulo se presenta, la descripción de una experiencia didáctica que se tuvo al implementar un curso de Geometría Fractal con alumnos de bachillerato. Una justificación de la presente propuesta precede la descripción.

Justificación de la Propuesta. Primero, muchos alumnos al nivel bachillerato creen que las matemáticas terminaron en los tiempos de Euclides o de Pitágoras, o bien si sus cursos de matemáticas llegaron hasta el cálculo diferencial e integral, cuando más a los tiempos de Newton y Leibniz. Estos alumnos sienten que la matemática es una ciencia muerta; y que como profesión, conduce únicamente a la enseñanza, con la única finalidad de perpetuar una disciplina muerta (Devaney, 1990). Con la inclusión de los Sistemas Dinámicos Discretos, la Teoría del Caos y la Geometría Fractal, se presenta una oportunidad para dar a los estudiantes un acercamiento a lo nuevo y excitante en la matemática, logrando que les resulten más significativas. Estos tópicos constituyen una importante área de la investigación contemporánea en matemáticas, que tiene la gran ventaja de ser muy accesible a los no-matemáticos y con ello a los estudiantes en el nivel bachillerato.

Segundo, el hombre desde siempre ha transformado el ambiente de acuerdo con sus necesidades. Se pueden identificar dos tipos de ambientes: los ambientes "naturales" creados por la naturaleza y los ambientes "artificiales" creados por el hombre. Existe una gran diferencia entre estos ambientes; mientras que los ambientes "naturales" son prácticamente estáticos, excepto por eventos catastróficos, los ambientes "artificiales" sufren una metamorfosis continua. El cuerpo se adapta físicamente al medio que lo rodea; la adaptación es automática, a un nivel subconsciente. Los ambientes "artificiales" que ha creado el hombre han requerido del desarrollo de habilidades de adaptación. Sin embargo en la actualidad, en un ambiente que cambia continuamente, es riesgoso pensar que las habilidades que desarrollamos hoy serán de utilidad para mañana, en estos ambientes son nuestras mentes las que deben adaptarse y la adaptación es a un nivel consciente (Sierra, 1993).

Durante muchos siglos los cambios en la complejidad de la vida fueron muy lentos y ocurrían en varias generaciones. En los últimos años los cambios ambientales son cada vez más rápidos, debido principalmente al desarrollo tecnológico. La rapidez de los cambios se incrementa continuamente, pues en las últimas cuatro décadas los microprocesadores han alcanzado un gran desarrollo en términos de velocidad, capacidad de memoria, confiabilidad y costo. Los cambios inducidos por el vertiginoso progreso tecnológico afectan las economías de los pueblos; se avanza hacia economías post-industriales, donde el conocimiento y manejo de la información reemplazan al capital físico y financiero. La información es la nueva materia prima y la habilidad para su manejo es el nuevo significado de producción, pero la información sólo tiene valor si puede ser controlada y organizada para un propósito definido.

A su vez, la tecnología rápidamente se vuelve obsoleta, lo que implica que el individuo "calificado" tiene que estar adaptándose continuamente a esos cambios, una adaptación más bien mental a un nivel consciente y no corporal a un nivel subconsciente. Las habilidades del individuo "calificado" deben ser las de pensar, hacer generalizaciones, organizar información para analizar problemas, etc. Entonces el individuo debe ser versado no sólo en la informática, sino también ser capaz de transformar la información en conocimiento útil. Por lo tanto es esencial entender los cambios a los que nos tenemos que adaptar; principalmente al impacto del progreso tecnológico en nuestra sociedad y como educadores tenemos que preparar a los estudiantes para que se encuentren listos para enfrentar los dramáticos cambios en la forma de percibir al mundo y al universo que se avecinan. Un medio para esa preparación puede ser mediante el estudio de temas de la matemática contemporánea conjuntamente con el uso de las nuevas tecnologías en el campo de la computación (Barnsley, 1988; Devaney, 1990; Goldenberg, 1989; NCTM, 1989).

Finalmente, la tercera razón se debe a que actualmente el bachillerato universitario, en particular el del Colegio de Ciencias y Humanidades, se encuentra en una etapa de revisión de planes y programas de estudio, por lo que surge la imperiosa necesidad de contemplar materiales que versen sobre temas que posiblemente hagan ver a las matemáticas en forma más significativa, para la construcción del conocimiento de los alumnos del nivel medio superior y a la vez preparar al estudiante para que su formación se encuentre acorde con los cambios que se están dando.

Diseño de Materiales. Un propósito del trabajo fue el diseño de los materiales que contendría la propuesta. Con este objetivo, se realizó una investigación bibliográfica bajo los siguientes antecedentes. La Geometría Fractal no obstante de que parte de algunas ideas que surgieron a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, es de muy reciente creación. Su creador Beniöt Mandelbrot (1924,), publicó la obra que tituló *"Les Objets Fractals: forme, hasard et dimensión"*, en el año de 1975, donde introdujo por primera vez las ideas de la Geometría Fractal. Por lo que el material que se ha recopilado, en relación a los temas de la Geometría Fractal, los Sistemas Dinámicos y la Teoría del Caos, dentro de ese enfoque, en su generalidad aparece publicado de la década de los 80's a la fecha. Son de destacarse algunas publicaciones aparecidas en revistas especializadas Educación Matemática Mathematics Teacher y los trabajos de Devaney (1990) y Peitgen et.al (1992).

Tomando como fuente la bibliografía recopilada, se inició la elaboración de los materiales. Se reprodujeron las imágenes clásicas de fractales como son los polvos de Cantor, la curva de Koch o copo de nieve, el triángulo de Sierpinski y algunas modalidades de éstos, que se obtienen al cambiar las reglas del proceso de recursión. Los materiales fueron elaborados a base de papel y lápiz en unos casos, en otros con el apoyo de una calculadora gráfica y otros por medio de la computadora personal unas veces usando un simulador de la calculadora gráfica, otras con un paquete graficador, o con lenguajes de programación LOGO y BASIC o con dos paquetes de software especialmente diseñados para la exploración de fractales, (FRACTINT y CHAOS). Los materiales se han trabajado en acetatos y diapositivas con la finalidad de emplearlos como materiales de apoyo en las presentaciones de los productos. Las diapositivas fueron obtenidas tomando fotografía a las imágenes creadas en el monitor de una computadora personal con los paquetes de software, Fractint y Chaos.

Con el propósito de auxiliar a los alumnos en el dibujo de imágenes fractales por ejemplo, los Polvos de Cantor, el Triángulo de Sierpinski, la Curva de Koch y otros derivados de ellos, se diseñaron un par de hojas punteadas que se les proporcionó a los estudiantes durante el curso, el apéndice D contiene trabajos hechos en esos formatos.

Con la intención de que los materiales se sometan a juicio de expertos (Flagg, 1990) y sean considerados los cambios pertinentes en la propuesta, se han enviado trabajos que contienen parte del material a diversos congresos y reuniones, tanto nacionales como internacionales. Con las criticas hechas por expertos educadores matemáticos se han realizado las modificaciones necesarias al material. Esto ha permitido el enriquecimiento del trabajo tras una continua revisión. En el capítulo IV se presentan los materiales diseñados.

Experiencia Didáctica. Con la finalidad de evaluar parte del material elaborado y la implementación de la presente propuesta con alumnos del nivel bachillerato, se impartió un curso con contenidos de temas de Sistemas Dinámicos Discretos, Teoría del Caos y Geometría Fractal. El curso tuvo efecto durante el periodo comprendido entre los días 10 y 28 de enero de 1994 al terminar el curso de geometría elemental. El grupo seleccionado pertenecía al C.C.H Sur y cursaba matemáticas III.

El curso diseñado tenía varios propósitos. Uno de ellos fue que los alumnos percibieran durante el desarrollo del curso, que la matemática es una ciencia en constante evolución. En el pasado la evolución fue lenta y en la actualidad el desarrollo se verifica con una rapidez increíble. En el caso de la geometría, ésta ha tenido diversas contribuciones por diferentes matemáticos ilustres en diferentes épocas, motivando el surgimiento de otros modelos geométricos como las geometrías no Euclidianas además de la geometría Euclideana. Otro propósito consistió en que el alumno notara que con tales geometrías, únicamente es posible representar objetos creados por el hombre y que no es posible con esas herramientas modelar elementos de la naturaleza, como son árboles, hojas, ríos, etc., por lo que era necesaria un nuevo modelo geométrico. Ese nuevo modelo resultó ser la geometría fractal, que se encuentra estrechamente vinculada al desarrollo tecnológico en el campo de la computación electrónica. El último propósito fue el de detectar en los alumnos, si los conceptos manejados resultan significativos en su aprendizaje, si los temas que se manejaron resultaban de interés, les parecían importantes, de utilidad y los aceptaban, si mostraba indiferencia o había rechazo, ya que el carácter de nuevo, implica una nueva terminología (autosemejanza, recursión, iteración) y en la mayoría de los casos también nueva para el docente.

El curso se desarrolló con el apoyo de materiales didácticos que se elaboraron con ese fin. Los materiales incluyen acetatos, diapositivas y programas para la calculadora gráfica. Con un dispositivo con que cuenta la calculadora gráfica, (View Screen) y un retroproyector, fueron presentados los distintos materiales sobre fractales en el salón de clase. También en la microcomputadora se elaboraron algunos materiales en lenguajes de programación LOGO y BASIC, que fueron presentados con el auxilio de un retroproyector y un Data Show.

Bosquejo del Curso. El contenido temático del curso inicia con un breve desarrollo histórico de la geometría, se describe lo que es un sistema axiomático y se hace notar cómo del análisis del quinto postulado de la geometria de Euclides surgen otras geometrías llamadas geometrías no Euclidianas. Posteriormente se plantea a la geometría fractal como modeladora de la naturaleza, una geometría útil para representar diversos elementos de la naturaleza. En geometría fractal se analizan los conceptos de recursividad, iteración, autosemejanza, curvas con longitud infinita que siendo continuas están formadas por puros picos (y por lo tanto no son derivables en ninguno de sus puntos). El análisis se realiza a partir de la construcción de estructuras fractales con diferentes métodos recursivos, se establecen vínculos entre los sistemas dinámicos discretos, la teoria del caos y los fractales. Se plantea un problema clásico en geometría fractal, la medición de la longitud de una costa y su modelación, para establecer la relación entre estructuras de la geometría fractal y elementos de la naturaleza.

En particular se comparó la longitud de la curva de Koch con la longitud de una costa, observando que la longitud de la curva de Koch aumenta conforme se aumenta el número de la etapa en su construcción y que la longitud de la costa también se incrementa al disminuir la escala de medición. En cuanto a su modelación se discutieron las limitaciones que tendrian los modelos determinísticos de fractales como la curva de Koch pero que al introducir ciertos elementos aleatorios se obtienen figuras que semejan más a la costa. Sin embargo para lograr un modelaje mas adecuado de una costa es necesario realizar un análisis más detallado de la forma de la costa.

Proyecto de un curso de Fractales en el Curso de Matemáticas III.

1.- Otras Geometrías (2 hrs.)

a).- Enriquecimiento de la Geometría Euclidiana.

b).- Geometria Euclidiana y los sistemas axiomáticos.

c).- Análisis del quinto postulado de Euclides y sus consecuencias.
Geometria de Lobachevski, ejemplo de geometría sin paralelas
Geometría de Riemann, ejemplo de geometria con más de una paralela.

d).- Geometría Fractal como modeladora de algunos objetos de la naturaleza.

2.- Introducción a los Fractales. (3 hrs.)

a).- Conceptos de: Proceso iterativo y Proceso recursivo.

b).- Propiedades de los fractales: autosemejanza, longitud "infinita" limitada por una área finita, gráficas continuas formadas por picos c).- Generación de Fractales: Polvos de Cantor, Curva de Koch, Triángulo de Sierpinski (el modelo determinista y el modelo aleatorio), Juego del Caos.

d).- (Actividad extra clase). Generación de variaciones de los ejemplos dados (para esta actividad se proporcionaron hojas que facilitan la realización de las figuras en clase y las de tarea).

3.- Medición de la longitud de una curva fractal. (2 hrs).

a).- Usando la Curva de Koch, medir la longitud y el área que encierra la Curva para las primeras 5 etapas de su construcción, llenar la siguiente tabla:

No de Etapa	0	1	2	3	4	5
Longitud de Curva						
Área de Curva						

b).-Analizar los datos y verificar que en cada etapa la longitud de la curva aumenta por un factor mayor que la unidad. "La curva crece etapa tras etapa sobrepasando cualquier valor, al generalizar la expresión que encuentra la longitud". "Etapa con etapa el área aumenta, aun cuando no sobrepasa al área del circulo o de un exágono circunscrito a la curva de Koch". Con los datos construir la gráfica No. de etapa contra longitud de la curva.

4.- Explorar las funciones : $y = 10^x$; $y = 2^x$. (1 hr)

a).- Con la finalidad de observar que el exponente "x" es el logaritmo de un número verificar los logaritmos de algunos números en base diez con calculadora y realizar la gráfica de las funciones.

5.- Planteamiento del problema de la medición de una costa muy rocosa. (2 hrs).

Por no poder tener acceso a una costa, el problema se resolverá tomando el mapa de la República Mexicana. En particular se tomará todo el Golfo de México, la Costa del Pacífico desde Chiapas hasta Sonora y toda la Península de Baja California.

Proceso de medición: La medición se llevará a cabo con el auxilio de un compás con diferentes aberturas (8, 4, 2, 1, 0.5, 0.25 cm.), contando el número de pasos que son necesarios para recorrer el mapa. (Es necesario hacer la analogía con lo que ocurriría en la medición en la costa directamente, indicando los posibles obstáculos).

Con los datos se construye la tabla:

No. de Ensayo.	1	2	3	4	5	6
Tamaño de Escala(cm.)	8	4	2	1	0.5	0.25
Longitud Costa (cm.)						

Para cada costa constrúyanse las gráficas: Longitud de la costa contra Número de ensayo y Longitud de la costa contra Tamaño de escala

a).- De las tablas y las gráficas observar cómo a medida que disminuye la escala de la medición, aumenta la longitud de la costa (es menester hacer referencia a la situación real).

6.- Conexión al concepto de fractal. (2 hrs).

Con los datos del punto 2 construir la tabla y la gráfica de:

No. Etapa	0	1	2	3	4	5
Logaritmo (Long.Curva Koch)						

Con los datos del punto 4 construir la tabla y la gráfica de:

No. Ensayo	1	2	3	4	5	6
Log.(long. costa).						

Comparar las gráficas y hacer notar que en ambos casos se trata de líneas rectas.

Inducir la conclusión de que la longitud de una costa es un fractal como el caso de la curva de Koch.

Concluir que lo accidentado de una costa se relaciona con la inclinación de la recta y que eso conduce a otra caracteristica de los fractales, llamada Dimensión.

7.- En la última sesión se aplicó un cuestionario a los alumnos, que intenta colectar datos sobre la asimilación del concepto de fractal y los conceptos asociados con ellos.

8.- Así mismo se llevó un control de las actividades desarrolladas por los alumnos, tanto en el salón de clase como tareas extraclase, con la finalidad de dar una calificación para el promedio de los alumnos y hacer una evaluación del proyecto.

A fin de que el lector pueda comprender la implementación del curso, se dará a continuación información al respecto. Esta información surge de las notas del autor.

Implementación del Curso. En esta sección se describen las actividades que se realizaron en el salón de clase durante el curso de geometría fractal, sistemas dinámicos y teoría del caos, en un grupo del plantel Sur del Colegio de Ciencias y Humanidades. La implementación del curso se realizó con el propósito de conducir con un grupo de alumnos una experiencia que nos permita hacer una evaluación de los contenidos de la propuesta didáctica. La descripción señala puntualmente el conjunto de actividades que se realizaron en cada una de las sesiones en el salón de clase.

Clase No. 1.- Otras Geometrías. (2 hrs).

Se señalaron los objetivos del curso, el contenido, la dinámica de trabajo y la forma de evaluación. Se informó a los alumnos que al final del curso se entregaría al profesor titular del grupo un reporte de las actividades realizadas por cada uno de los participantes durante el curso, el que sería considerado para la evaluación final de la asignatura de matemáticas III (Geometría Elemental).

Se procedió a dar inicio a la secuencia didáctica. Para dar continuación al tópico sobre Geometría Euclidiana recién finalizado, se procedió primero a dar una introducción a las Geometrías no Euclidianas. Se hizo notar cómo a partir del análisis del quinto postulado de Euclides surgen otros modelos geométricos, que tienen como diferencia significativa con la Geometría de Euclides, el número de paralelas. Se mostró por medio de un ejemplo, que la Geometría de Lobachevski, es un modelo de Geometría que se caracteriza por tener más de una paralela, una recta dada. También mediante un ejemplo se mostró un modelo de Geometría de Riemann, donde la característica sobresaliente es no tener líneas paralelas. Se discutieron algunas semejanzas y diferencias entre los tres modelos geométricos.

En esta parte del curso, la metodología de enseñanza que se empleó, fue de tipo expositivo a cargo del profesor, sin embargo en el desarrollo de la clase, se plantearon preguntas hacia los alumnos de tal manera que los condujera a la reflexión y a la discusión de las ideas expuestas. Las ideas principales de las geometrías no Euclidianas, por ejemplo que en esos modelos la suma de los ángulos interiores de un triángulo es diferente de 180 grados, chocan con el sentido común de los estudiantes, y es ahí donde se aprovechó para discusión.

Esta parte del curso tenía como objetivo primordial que el estudiante observara que es posible construir otros modelos geométricos diferentes a la geometría clásica, a partir de definir un conjunto de axiomas propios de cada modelo. Con ese antecedente se presentó una nueva Geometría que permite modelar algunos objetos de la naturaleza, la Geometría Fractal. Se señalaron algunas de las propiedades más significativas de esa nueva Geometría.

Clase No. 2.- Geometría Fractal. (1 hrs.).

La clase tuvo como propósito general explorar los conceptos de proceso recursivo e iteración, fundamentales en la Geometría Fractal. Se hizo un resumen de lo visto sobre las Geometrías no Euclidianas en la clase anterior, estableciendo algunas diferencias y semejanzas entre los distintos modelos geométricos tratados hasta ese momento, resaltando que Albert Einstein utilizó la Geometría de Riemann para representar su Teoría de la Relatividad Lo anterior abrió la posibilidad a la existencia de varios modelos de Geometría. Se señaló que con las Geometrías descritas sólo se logró una representación burda de la naturaleza y que para lograr un mejor modelaje es necesaria una nueva Geometría, que es la Geometría Fractal.

Hasta el momento la clase se asemeja a una conferencia, en la que el profesor se dedicó a exponer el contenido y los alumnos fueron receptores. A lo largo de la exposición el profesor formuló preguntas hacia los alumnos, por ejemplo al analizar las proposiciones de Euclides se pregunto "¿crees que de acuerdo con la Geometría Euclidiana, el todo es mayor que cualquiera de sus partes?". Después de escuchar respuestas y su justificación se indicó la no universalidad del axioma creando un ambiente para la discusión. Se analizaron algunos contraejemplos a la proposición; uno de los cuales fue hacer ver que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los números naturales y los números naturales pares y que por lo tanto ambos conjuntos tienen la misma cardinalidad; con lo que se concluyó que el todo no siempre es mayor que cualquiera de la parte.

Se inició el tema de Geometría Fractal, apuntando algunas de las propiedades que tienen los fractales. Dentro de las propiedades se señala la de autosemejanza y su significado, que son curvas formadas por puros picos, que tienen un perímetro infinito limitado por una área finita, que para su generación se requiere de procesos recursivos, etc.

generando algunos ejemplos de éstos. Se habló del concepto de recursión como la repetición de un mismo procedimiento una gran cantidad de veces, donde el resultado final de un paso es el inicio del paso siguiente, que cuando se aplica un proceso de esta naturaleza a cualquier función, se le llama iteración de la función. Se tomaron como ejemplos las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = \sqrt{x}$, para ilustrar la facilidad de iterarlas con la calculadora.

Los alumnos fueron parte activa de la clase, construyendo paralelamente con el profesor algunas imágenes fractales en sus cuadernos e iterando las funciones antes señaladas para verificar algunas propiedades de los fractales.

Clase No. 3.- Construcción de Imágenes Fractales. (2 hrs)

Con el objetivo de que los estudiantes reforzaran el concepto de proceso recursivo y se aplicara a la construcción de imágenes fractales, se dotó a los alumnos de unas hojas punteadas, diseñadas especialmente para que el alumno tenga menos dificultades para dibujar las imágenes fractales. Se construyeron los polvos de Cantor, el triángulo y el cuadrado de Sierpinski, y la curva de Koch. En cada caso, se partió de una etapa cero y aplicando una regla de transformación ó generador, se avanzó en la construcción del fractal, etapa tras etapa, hasta lograr el objetivo. En las gráficas se hicieron notar las propiedades de autosemejanza, perímetro infinito limitado por una área finita y proceso recursivo propias de los fractales. Se señaló que al modificar las reglas generadoras en los procesos recursivos en cada uno de los casos se encuentra una variante de la imagen fractal.

Se dieron sugerencias para modificar las reglas generadoras de los fractales y se pidió como tarea que realizaran los dibujos correspondientes. A partir de este día, el curso se apoyó con las construcciones de los fractales hechas en acetatos para una mejor presentación de los temas.

Clase No. 4.- Longitud de las Curvas Fractales. (2 hrs.)

La finalidad de esta sesión fue verificar que la longitud o perímetro de una curva fractal es infinita. Para alcanzar esta meta, se planteó el problema de medir la longitud de la curva de Koch, como antecedente a la medición de la longitud de una costa. Se enfatizó en los distintos generadores de la curva de Koch y se dió inicio a la medición de la curva a partir de un triángulo equilátero que fue la etapa cero continuando hasta la etapa cuatro. En cada etapa, se contó el número de lados, se "midió" la longitud del lado y se encontró la longitud o perímetro de la curva, (producto del número de lados por su longitud), también se encontró el área que encierra la curva tratando en ambos casos de llegar a un patrón o fórmula para encontrar el perímetro y el área de la curva en cualquier etapa.

Se indicó que la propiedad de autosemejanza que tienen los fractales puede ser de tipo determinístico; esto es que son figuras perfectamente autosemejantes o de tipo estadístico (aleatorio) dónde las figuras sólo conservan rasgos característicos. Se formaron equipos de 5 alumnos como máximo, y se les enseñó el juego del caos, dejando como tarea por equipo la construcción de la figura con el juego del caos.

Clase No. 5.- Las Curvas Fractales tienen longitud infinita. (1 hrs).

Con el fin de verificar que una curva fractal tiene una longitud infinita, se retomó el problema de la medición de la longitud de la Curva de Koch y se encontró una expresión para calcularla en cualquier etapa, por la observación que el perímetro aumentaba en un factor de (4/3) etapa tras etapa. A partir de algunos trabajos realizados sobre el juego de caos, se empezó a sospechar que la figura seguía un patrón característico ya conocido -el triángulo de Sierpinski-, sin embargo no había un convencimiento absoluto en los alumnos sólo sospechas. Se dejó como tarea construir la gráfica del número de etapas contra la longitud de la curva de Koch.

Clase No. 6.- Juego del Caos. (2 hrs).

Se exploraron casos de las funciones exponencial y logarítmica. Haciendo notar que son funciones recíprocas se investigaron algunas propiedades de los logaritmos, con la finalidad de que los alumnos supieran qué es el logaritmo de un número, entendieran su significado, obtuvieran el logaritmo de un número y el proceso inverso (conocido el logaritmo de un número encontrar el número). Se dejó de tarea graficar el número de etapa contra el logaritmo del perímetro de la curva de Koch.

Apoyado en una calculadora gráfica T1-85 Texas instruments, se simuló el juego del caos y fue presentado a los alumnos por medio de un mini-datashow de la misma calculadora, para 100, 200, 500 y 2000 lanzamientos de un dado con lo que los alumnos quedaron mucho más satisfechos de que la figura que genera el juego del caos es el triángulo de Sierpinski.

Se presentó una forma más para generar imágenes fractales, a partir de la construcción del triángulo de Pascal. Se mostró que cuando se construye el triángulo de

Pascal de tal manera que se sustituyan los valores por cero y la unidad cuando estos sean pares o impares, la figura que se genera es semejante al triángulo de Sierpinski. Al cambiar las reglas de sustitución, múltiplos del tres por ejemplo, se obtienen otros patrones. Se mencionó que esto constituye una aplicación simple de los autómatas celulares.

Finalmente se formaron equipos de 5 integrantes más o menos para medir la longitud de una costa. Se tomó el mapa de la República Mexicana, y se dividió en tres sectores que se etiquetaron como Costa del Golfo, Costa del Pacífico y Costa de Baja California. A cada equipo se le dió un mapa y se le asignó una costa para realizar la medición. Se definió que ésta se realizaría por medio de un compás con diferentes aberturas (8, 4, 2, 1, 0.5 y 0.25 cm.). En cada etapa los alumnos midieron el número de pasos necesarios para recorrer la costa.

Clase No. 7.- Longitud de una Costa. (2 hrs).

Se realizó la medición de la costa con diferentes escalas, haciendo alusión a lo que sucedería en la realidad. Con los datos fue construida la tabla que contenía el tamaño de escala contra la longitud de la costa. En esta clase prácticamente se llevó a cabo la medición y se construyeron las gráficas, se aprovechó el momento para presentar imágenes de fractales por medio de la computadora.

Se dejó de tarea hacer las gráficas: tamaño de escala contra longitud de la costa y tamaño de escala contra logaritmos de la longitud de la costa.

Clase No. 8.- La Longitud de una Costa es un Fractal. (1 hrs).

Se compararon las gráficas de la longitud de la curva de Koch y de la longitud de la costa, tanto en escala normal como en escala logarítmica. Se observó que las gráficas mostraban similitudes; entonces se indujo a los alumnos a la conclusión de que se trataba de dos cosas semejantes, por lo que una costa también representa un fractal por el hecho de poseer la propiedad de tener una longitud que crece indefinidamente al disminuir la escala de medición, además de que una costa es estadísticamente autosemejante de acuerdo con una serie de fotografías de una costa, tomadas en diferentes escalas, que fueron presentadas a los alumnos en acetatos durante el curso, y de que un objeto de la naturaleza es fractal si lo es la figura que conforma su modelo.

En la última sesión se aplicó un cuestionario, con la finalidad de recopilar información que nos aproxime a observar el impacto de los temas de las matemáticas actuales que fueron expuestos ante los estudiantes de ese nivel y fundamentar una propuesta para la incorporación de tópicos de Geometría Fractal, Teoría del Caos y Sistemas Dinámicos en el curriculum del bachillerato, en términos de viabilidad y grado de aceptación de los materiales por parte de los alumnos.

Un cambio en los contenidos de los cursos y en la metodología de enseñanza, como el que se pretende, también lleva implícito un cambio de las formas de evaluación del aprendizaje de los alumnos (Yearbook. NCTM, 1993). En el caso particular la evaluación se llevo a cabo llevando un registro de las actividades desarrolladas por los alumnos durante la clase y la realización de los trabajos extraclase que se propusieron. Al final del curso se entregó un informe de actividades al titular del curso.

Evaluación de la Experiencia. El papel que tiene la investigación es suministrar conocimiento fiable sobre aspectos importantes asociados a un estudio. La recolección de evidencia y la construcción de argumentos son los medios por los cuales los investigadores sustancían sus conjeturas. Esta es una tarea ardua e interminable que requiere de métodos adecuados, de adiestramiento y de esfuerzo. Cuando se establecen conjeturas en el terreno de la ciencias naturales y la industria entre otras, la información que se obtienen generalmente es de tipo numérico y algunas de las variables pueden ser controladas, lo que permite una validación altamente sofisticada con la herramientas de la estadística. Las ciencias sociales como la Antropología y la Sociología usan otro método para validar sus conjeturas, el llamado Análisis Cualitativo de Datos, que tienen como elemento principal de análisis palabras en lugar de números. En la actualidad son cada vez más los investigadores en campos con un énfasis tradicionalmente cuantitativo, como la Psicología, los que se han cambiado a un paradigma más cualitativo (Miles, 1991).

En la investigación de la Educación Matemática más que llegar a generalizaciones, la mayoría de las veces descontextualizadas, los investigadores prefieren descripciones cualitativas, muchas veces de casos individuales, que los guíen a un mejor entendimiento de las situaciones específicas del proceso de la enseñanza aprendizaje. Actualmente, en la Educación Matemática, al no tener una metodología propia se han adoptado metodologías propias de ciencias como la Antropología y la Sociología; éstos son los métodos cualitativos.

Los datos cualitativos son una fuente de ricas descripciones y explicaciones bien fundadas de procesos que ocurren en contextos locales. Con datos cualitativos se puede preservar un flujo cronológico, valorar causalidad local y derivar explicaciones fructíferas, con lo que probablemente se conduzca a encontrar hallazgos y nuevas integraciones teóricas.

Por lo anterior, además de las observaciones y trabajos en clases hechas por el instructor y con la finalidad de recabar información sobre el impacto de los temas de la matemática actual, que les fue dado dentro del curso, se diseñó y aplicó un cuestionario a los alumnos.

El cuestionario fue diseñado considerando los objetivos propuestos por el curso. Primeramente se elaboró un precuestionario que fue sometido a la consideración del Director del trabajo de tesis, Dr. Armando Martínez C., y conjuntamente se analizaron los objetivos propuestos en el curso y se contrastaron con las preguntas del precuestionario, realizando los cambios o los ajustes a las preguntas o incorporando otras nuevas, hasta lograr tener un cuestionario válido. El cuestionario aparece en el apéndice A.

Resumen.- Este capítulo presentó inicialmente una justificación de la propuesta didáctica contenida en este trabajo, se discutió el diseño de los materiales para la propuesta, se presento el proyecto para un curso de Geometría Fractal y se describió la experiencia al impartir el curso en un grupo del plantel Sur del Colegio de Ciencias y Humanidades. El siguiente capitulo contiene los materiales desarrollados y utilizados durante el curso.

En el capítulo V se presentan las conclusiones y recomendaciones sobre la propuesta didáctica que contempla la inclusión de la Geometría Fractal al currículo del bachillerato, objetivo de esta tesis, a partir del análisis de las respuestas que se obtuvieron en la aplicación del cuestionario junto con las observaciones que se tienen en las diferentes presentaciones de los materiales en las diversas reuniones de profesores

CAPITULO IV

Geometría Fractal.

En este capítulo se presentan los materiales que se usaron en el curso que se impartió sobre Geometría Fractal en un grupo del plantel Sur del Colegio de Ciencia y Humanidades. Primero se hace una vinculación entre los Sistemas Dinámicos Discretos, la Teoria del Caos y los Fractales, temas que se encuentran relacionados. En la sección que sigue se describen los procesos para construir algunas estructuras fractales que se pueden considerar clásicos (la Curva de Koch, los Polvos de Cantor, el Triángulo de Sierpinski), y se aplica el método en la construcción de árboles. En la sección que sigue se vincula el triángulo de Pascal y los autómatas celulares a la construcción de fractales. En todo momento se señalan las propiedades de recursión autosemejanza, longitud infinita, etc. En las siguientes secciones se aborda el tema de los sistemas dinámicos discretos y se habla sobre la teoria del caos. En una sección siguiente se plantea un problema clásico en fractales, que es la medición de la longitud de una costa. Finalmente en la última sección se trata sobre la dimensión fractal. Debe advertir que durante la impartición del curso los temas no fueron abordados en ese orden ya que comúnmente se presentaron varios tópicos en una clase y en la siguiente nuevamente se retomaron algunos aspectos anteriores.

Generalidades. Al hablar de sistemas dinámicos generalmente se asocia el tema con las ecuaciones diferenciales, lo cual entra en franca contradicción con lo expresado con anterioridad en el sentido que sólo son necesarias las matemáticas elementales para la construcción de ese concepto. Los sistemas dinámicos son el campo de las matemáticas que estudian los sistemas en movimiento o sistemas que cambian con el tiempo, por ejemplo el movimiento de las estrellas y las galaxias o el movimiento de un péndulo, entre otros. El proceso de iteración de una función elemental tal como una función cuadrática en una variable real o compleja, también representa un proceso dinámico; por ejemplo al tomar la función $f(x)=\lambda x(1-x)$ e iterarla para diferentes valores de λ, en particular entre cero y cuatro, se observa que para algunos valores de la constante su comportamiento resulta tan impredecible como, el stock de mercados, el flujo turbulento en una caída de agua, la dispersión del humo del cigarro, entre otros muchos casos. A este comportamiento tan impredecible se le ha llamado caos. La representación gráfica del proceso iterativo de la función cuadrática produce lo que se conoce como imagen fractal.

Los acontecimientos presentes están relacionados con los precedentes mediante un vínculo basado en el principio evidente de que nada puede suceder sin una causa que lo produzca. Todos los acontecimientos incluso aquellos que por su insignificancia parecen no seguir leyes de la naturaleza, son una consecuencia de ésta. Cuando el ser humano, incluidos los científicos, desconocen las relaciones que unen cada acontecimiento con el sistema total del universo, esto es, no los pueden percibir de una manera lógica, tienden a calificarlos de caóticos.

El caos comúnmente se encuentra en todo lo que nos rodea; está presente en el alza y la baja de la bolsa de valores, en los incontrolables patrones del humo del cigarro, etc. y está íntimamente relacionado con los sistemas dinámicos y los fractales. Al tomar ciertos elementos geométricos y recursivamente repetir con ellos una y otra vez un mismo proceso se producen objetos geométricos complicados; son figuras fractales. Los fractales los encontramos por todos lados. La geometría fractal es la que la naturaleza utiliza para sus representaciones, un objeto real es fractal si lo es la figura que conforma su modelo, la recursividad significa que el resultado de un paso cualquiera es el inicio del paso siguiente. La teoría de los fractales representa un verdadero nexo de unión entre la ciencia y el arte (Ruíz, 1990).

En los fractales se encuentra una teoría de carácter novedoso y útil que abarca desde la simulación de objetos de la naturaleza como: flores, hojas, árboles, cristales, montañas, valles, ríos, líneas costeras, etc., hasta la investigación en campos como: la superconductividad, los coloides, el magnetismo y la termodinámica. Son de un carácter matemático elemental y por su vinculación con la computadora y la calculadora gráfica resultan acordes con los nuevos valores y destrezas que se buscan actualmente en la enseñanza de las matemáticas (Goldenberg, 1989). Es amplia la gama de conceptos que se pueden reconstruir con los alumnos del bachillerato dentro del salón de clase, entre los que se pueden citar: tópicos de las matemáticas discretas, iteración de funciones, recursividad y algoritmos en ambientes geométricos, geometría de exploración, matemáticas del crecimiento (progresiones, sucesiones), aproximación al concepto de infinito, el concepto de límite a través de la geometría, logaritmos y escalas logarítmicas, concepto y papel de las escalas, concepto de dimensión, etc. Además, con el concepto de recursión se puede fomentar la creatividad en el alumno, en virtud de tener la posibilidad de crear sus propias imágenes fractales con sólo realizar variaciones a los patrones de construcción que se le establezcan, inventando nuevas reglas de construcción o simplemente ilustrando las ya existentes con otros colores.

Los Sistemas Dinámicos Discretos, la Teoría del Caos y la Geometría Fractal, son temas de las matemáticas contemporáneas que se encuentran íntimamente relacionados o sea que en diversas situaciones, con un caso, se pueden estudiar las tres teorías. Por ejemplo, la función cuadrática $f(x) = \lambda x(1-x)$ que representa un sistema dinámico, cuando es iterada para valores de λ comprendidos en el intervalo cerrado de cero a cuatro y para valores de x entre el cero y la unidad, si los resultados se grafican, se obtiene una figura que resulta ser una imagen fractal porque posee todas las características de éstas, o sea que es una figura autosemejante, la parte contiene al todo, entre otras muchas cosas. También es posible observar cómo para algunos valores del parámetro λ, el comportamiento de la función se comporta de una manera bastante caótica.

En las secciones siguientes, se describen algunos métodos que nos conducen a la construcción de imágenes fractales, en los que se enfatizan los conceptos de recursión y de iteración, se resaltan muchas de las propiedades que tienen los fractales y sus vínculos con los sistemas dinámicos discretos y la teoría del caos. También se proponen algunas actividades que conducen al enriquecimiento de la presentación de los temas. Finalmente se aborda un problema clásico en fractales, que es la medición de la longitud de una costa.

Geometría Fractal. Los fractales son figuras virtuales compuestas por una curva infinita contenida en una superficie finita. Son curvas que aún siendo continuas no son derivables en ninguno de sus puntos. En los tiempos que aparecieron por primera vez, fueron denominadas curvas patológicas; objetos degenerados de incalificables características. Sin embargo, las curvas que no admiten tangentes son la regla, las curvas "regulares" aunque son objetos mucho más fáciles de manejar con las herramientas habituales del cálculo diferencial, constituyen la excepción, por lo tanto, la geometría de las formas naturales está mal representada por el orden perfecto que reina en las formas usuales de Euclides o del calculo diferencial (Mandelbrot, 1987).

Los fractales preservan su estructura al reducir la escala o al amplificar la imagen, el todo está contenido en la parte ya que estas figuras tienen infinitas copias de sí mismo. Tienen como característica la recursividad, término que expresa la repetición al infinito de un mismo proceso por lo que se puede afirmar que son procesos simples de retroalimentación. En la figura 6 se esquematiza el proceso, éste consta de unidad de entrada, unidad de salida y unidad de proceso. Se indica cómo a partir de la alimentación de una condición inicial X_n, entra a una unidad de proceso donde sufre una transformación y entrega como resultado X_{n+1}, la que posteriormente se transforma en una nueva alimentación X_n del mismo proceso, que a su vez entregará una nueva salida X_{n+1}. El proceso se puede repetir una y otra vez, una gran cantidad de veces, y es ahí donde las tecnologías resultan de gran valor.

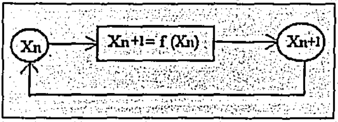


Fig. 6 Proceso de Retroalimentación.

Otra característica más de los fractales es su dimensión. En la geometría clásica un conjunto de puntos, tiene dimensión cero, una línea tiene dimensión uno, una superficie dimensión dos y un cuerpo tiene dimensión tres. En el caso de los objetos fractales se introduce el aterrador concepto de dimensión no entera. Por ejemplo, la línea que describe una costa rocosa, es muy irregular y ocupa más espacio que el de una línea, pero menos que un plano, por lo tanto su dimensión deberá estar entre uno y dos. Si se arruga una hoja de papel aluminio y después se extiende, al final el papel aluminio ya no formará una superficie lisa y suave más bien aparecerá una superficie muy rugosa, por lo que ocupara más espacio que una superficie lisa pero menos espacio que el de un volumen, por lo que su dimensión debe estar entre dos y tres. Entonces la dimensión (entre uno y dos) mide de alguna manera, qué tan quebrada es una línea, qué tan arrugada es una superficie o en general se mide qué tanto un cuerpo llena el espacio euclídeo en que se encuentra sumergido.

Encontramos a los fractales tan frecuentemente que nos pasan desapercibidos. Las montañas, los ríos, las nubes, los pulmones, la distribución de galaxias en el universo, las fallas en las redes telefónicas, los árboles, el comportamiento de la bolsa de valores, las colas, el mapeo logístico, son de naturaleza fractal.

En este apartado se describen los métodos para generar objetos fractales, que vieron luz entre los años 1875 y 1925, conociéndolos por el nombre del autor que los creó. Se inicia con los Polvos de Cantor.

Polvos de Cantor. (1845-1918). El método para generar esta imagen fractal o cualquier otra estructura fractal, se divide en etapas. En el caso de los polvos de Cantor, el proceso consiste en tomar un segmento de línea recta, dividirlo en tres partes iguales y eliminar el tercio central. La etapa cero consta de un segmento de recta de una longitud determinada, en la etapa uno se obtienen dos segmentos de recta cada uno de longitud 1/3 de la longitud del segmento original, separados una longitud 1/3, para la etapa dos se parte de los dos segmentos de la etapa uno, se divide a cada uno en tres partes iguales y se elimina el tercio central, el resultado es de cuatro segmentos de longitud (1/9), (figura 7). El proceso se repite recursivamente, o sea a cada uno de los cuatro segmentos de la etapa 2 se dividen en tres partes iguales y se elimina el tercio central, el resultado es de ocho segmentos de longitud 1/27 de la longitud original. El proceso se repite una y otra vez una gran cantidad de veces, la imagen que resulta es un fractal y se puede verificar que tiene la propiedad de autosemejanza, o sea que posee infinitas copias de sí mismo. Para verificar esa propiedad basta con tomar una parte de la imagen y amplificarla lo suficiente para observar que es semejante a la figura original. No importa de que tamaño se seleccione la región que se amplifique, se podrá constatar que la estructura de la figura es independiente de la escala. Otra propiedad que será verificada posteriormente, es que su dimensión se encuentra entre cero y la unidad, en particular la dimensión es $D = \log 2/\log 3 = 0.6309$, o sea que los polvos de Cantor representan algo más que un conjunto de puntos, pero menos que una línea.

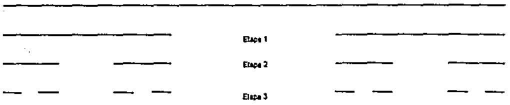


Fig. 7: Polvos de Cantor, primeras 3 etapas.

Actividad 1: Se puede hacer una modificación al proceso en el caso de la construcción de los polvos de Cantor, por ejemplo, se toma el segmento de recta se divide en cinco partes iguales, se suprimen la parte segunda y cuarta, si el proceso se repite recursivamente, la imagen que resulta es un fractal. Pedir al alumno que genere algunas etapas del proceso descrito.

Triángulo de Sierpinski: (1882-1969). La imagen se construye partiendo de un triángulo equilátero, (etapa cero). Para pasar a la etapa 1, se toman los puntos medios de cada lado del triángulo y se unen por medio de segmentos de línea recta, lo que divide a la figura original en cuatro triángulos congruentes entre sí y semejantes al triángulo original. Se elimina el triángulo central. El resultado son tres triángulos equiláteros congruentes de lado 1/3 del lado del triángulo original. Para la construcción de la etapa 2 se procede de la misma manera, se divide cada uno de los triángulos en cuatro triángulos congruentes, eliminando al triángulo central. El proceso se repite recursivamente para la construcción de las etapas subsiguientes. La figura que resulta es un fractal (figura 8).

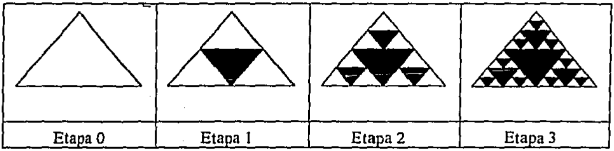


Fig. 8: Triángulo de Sierpinski

Una modalidad al triángulo de Sierpinski, la encontramos si en lugar de un triángulo equilátero, se toma un cuadrado en la etapa cero. Se divide al cuadrado en nueve cuadrados congruentes y se elimina al cuadro central para construir la etapa uno. La etapa dos se construye dividiendo a cada cuadro resultante de la etapa uno en nueve cuadros congruentes y eliminando en cada uno de ellos el cuadro del centro. El proceso se repite una y otra vez un gran número de veces, formando el tapete de Sierpinski (figura 9). Ambas figuras se pueden construir en tres dimensiones, en el caso del cuadrado, la figura inicial sería un cubo, al construir las etapas sucesivas, se formará lo que se denomina esponja de Sierpinski.

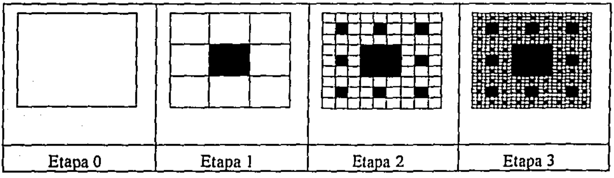


Fig. 9: Tapete de Sierpinski

En ambas figuras fractales se tiene la propiedad de autosemejanza, o sea si una parte de la gráfica es amplificada, la figura que resulta es semejante a la figura original. También se puede verificar que la longitud es infinita, no obstante de que se encuentra limitada por un área finita.

Actividad 2: En la construcción del triángulo de Sierpinski se partió de un triángulo equilátero. Se pudo haber tomado un triángulo isósceles, escaleno, rectángulo, obtusángulo o acutángulo: el resultado es semejante. O en lugar de un cuadrado, tomar un rectángulo, cualquier otro cuadrilátero o un polígono cualquiera (figura 13 y 14). También se puede eliminar otro u otros elementos que sean distintos del elemento central de la figura, en las etapas sucesivas del proceso recursivo y construir un fractal diferente. Practique cambiar las reglas del proceso recursivo y genere la imagen fractal.

Curva de Koch. En la etapa 0, se parte de un triángulo equilátero. Para construir la etapa 1 se toma cada uno de los lados y se divide en tres segmentos iguales, se elimina el tercio del centro y se sustituye por dos segmentos de igual longitud de acuerdo con el esquema que se muestra en la (figura 10). Al segmento original se le llama iniciador y a la figura que lo sustituye se le llama generador. Entonces al sustituir en la etapa cero a cada lado del triángulo por el generador indicado en la figura 10, se construye la etapa 1. La figura que resulta es un polígono de 12 lados de longitud 1/3, cada uno, de la longitud inicial del lado del triángulo, como se podrá apreciar en la misma figura 10. Para la etapa 2, se toma cada una de las aristas del polígono de la etapa 1, se divide en tres partes iguales de longitud 1/9 cada uno, se elimina el tercio central y se sustituye por dos segmentos de 1/9 de la longitud original en forma semejante al generador inicial. El resultado que se obtiene es un polígono de 48 lados, cada uno de longitud 1/9 de la longitud original del lado del triángulo. El proceso se repite una y otra vez en forma recursiva. La figura final es conocida como curva de Koch o copo de nieve.

La imagen fractal se encuentra circunscrita a una circunferencia, con el propósito de observar intuitivamente, cómo al aumentar las etapas en la construcción del copo de nieve la figura no sobrepasará el área de la circunferencia. Esto nos puede conducir a deducir de una manera intuitiva, que mientras la longitud de la figura crece sin limite etapa tras etapa, el área aún cuando también crece, no sobrepasará el área del circulo (figura 10). Lo anterior se verificará en forma más formal, en otro apartado en este mismo capitulo.

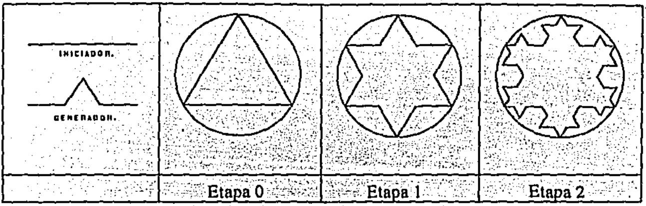


Fig. 10: curva de Koch con iniciador y generador.

Por medio de la curva de Koch, es posible verificar también la propiedad de autosemejanza, o sea que una parte de la curva es una copia de la figura original. También esta curva se presta para observar como en el límite, o sea cuando el proceso recursivo se repite una y otra vez, un número infinito de veces, la curva aún siendo continua no es derivable en ninguno de sus puntos, ya que en el límite de su construcción, estará formada por puros picos. Las figuras tales como los círculos, las parábolas, las elipses y muchas más, tienen la propiedad común que en su construcción, los cambios de dirección son de manera uniforme, desde un trazo suave. Sin embargo al construir un polígono, como un cuadrilátero, el trazo de sus lados es uniforme, es suave, pero cuando se llega a un extremo de un lado, para continuar el trazo del lado que le sigue es necesario cambiar de dirección rápidamente en forma repentina formando un pico en la figura, pues bien las estructuras fractales en el límite de su construcción están formadas solo por picos. En este caso la dimensión se encuentra entre uno y dos ya que cubre más espacio euclidiano que una curva, pero no llena una superficie. En cierta manera se puede decir que la dimensión fractal entre uno y dos mide qué tan "picuda" es una figura fractal ya que conforme aumenta el número de picos del generador, aumenta la dimensión (figura 11). También es de hacerse notar que cualquier porción de la curva de Koch de cualquier tamaño, posee una longitud infinita.

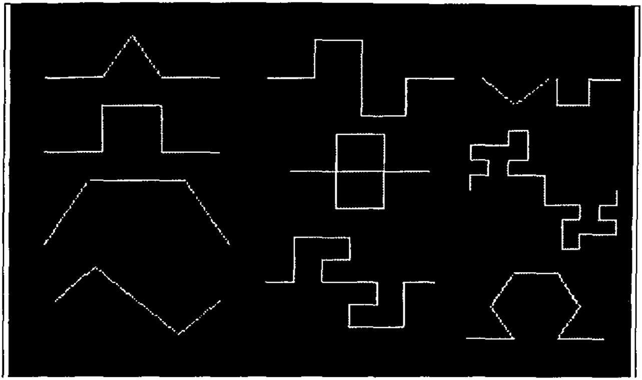


Fig. 11: Diferentes tipos de Generador.

Actividad 3: Se pueden diseñar otros tipos de generadores. La figura 11 presenta varias alternativas diferentes de generador. También se puede partir de otras figuras geométricas diferentes a un triángulo equilátero, tales como otros tipos de triángulos no necesariamente equiláteros, cuadrados, rectángulos o cualquier otro polígono. La única norma será, que sea un proceso recursivo que garantice que la figura sea autosemejante, ya que como se ejemplificará, en algunas situaciones el proceso aún siendo recursivo puede conducir a figuras que no son fractales. Construya la figura fractal que resulta al tomar un cuadrado como etapa cero y como generador, cualquiera de los que aparecen en la figura 11. También invente un generador y construya su imagen fractal.

Construcción de Arboles. Mediante un proceso recursivo, se puede dar inicio a la construcción de elementos de la naturaleza, como son los árboles, (aunque la construcción que se presenta aún es limitada para un verdadero modelaje de la naturaleza). Para modelar un árbol, se parte de un segmento de recta en posición vertical en la etapa cero, se divide en dos partes y se elimina la parte superior y es sustituida por dos segmentos de igual tamaño separados por un ángulo de 90 grados, cada uno colocado a uno y otro lado del segmento eliminado, formando un ángulo de 45 grados con la vertical que fue eliminada. El proceso se repite una y otra vez recursivamente, en la construcción de las etapas que siguen, obteniendo al objeto fractal, (figura 12).

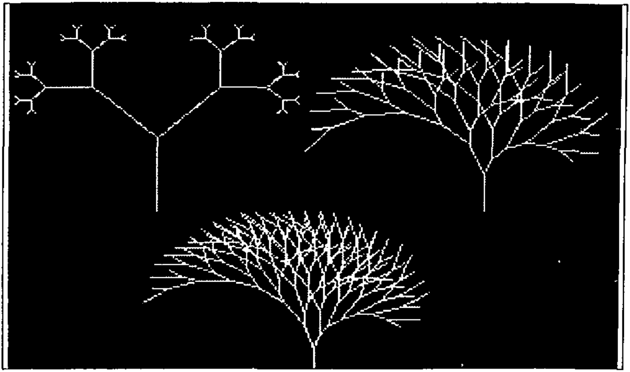


Fig. 12: Arboles

Se puede hacer variantes al proceso y se encontrarán otras figuras fractales que se aproximan más a la imagen de un árbol o mejor dicho a una planta. Por ejemplo se puede modificar el ángulo deseparación entre las ramas del árbol que se construye, así en lugar de estar a 90 grados, pueden estar a 60 grados, 30 y 30 grados de la línea eliminada y simultáneamente hacer una rama más corta que la otra. Dos opciones diferentes se presentan en la figura 12. Las gráficas fueron elaboradas con el programa LOGO, aunque se pueden elaborar con papel y lápiz. También con ese lenguaje de programación, así como con el lenguaje BASIC, se construyeron las imágenes fractales de la curva de Koch, y el triángulo de Sierpinski (Figuras 13 y 14) y fueron elaboradas en acetatos, y presentados a los alumnos durante el curso, para verificar algunas de sus propiedades (por ejemplo: la autosemejanza). Aunque los procesos con los que se generaron es un tanto diferente a los descritos en esta sección, esencialmente son procesos recursivos. La figura 13 se construyó en lenguaje BASIC y se tomó como base el triángulo de Pascal, que se describe en otra sección de este capítulo. La figura 14 fue generada en LOGO y se presentan varias etapas de su desarrollo; para construirla se tomó un generador que aparece incluido en la figura 11 de este capítulo, la figura generadora está compuesta por tres lados adyacentes de un hexágono regular. En el apéndice B se presentan los programas que los generan.

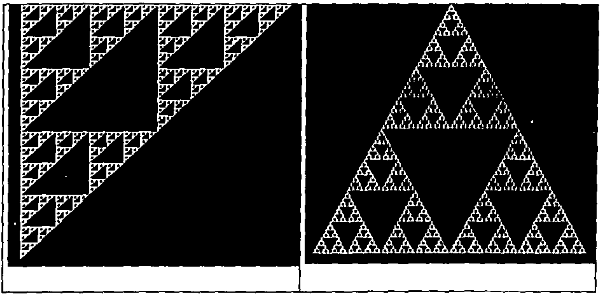


Fig. 13: Triángulos de Sierpinski generado con Lenguaje BASIC.

Actividad 4: Construya un árbol con las reglas descritas con anterioridad. Modifique el ángulo de separación de las ramas, cambie la longitud de las ramas de tal forma que una sea más larga que la otra.

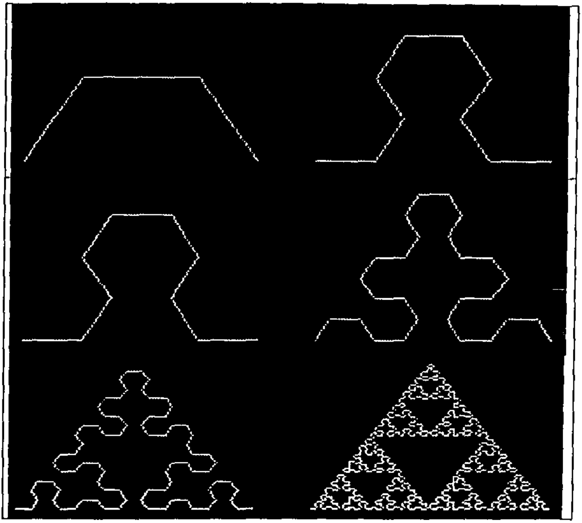


Fig. 14: Triángulo de Sierpinski generado con el Lenguaje LOGO

El Triángulo de Pascal y los Fractales. A partir del triángulo de Pascal, también es posible la construcción de una imagen fractal. El triángulo de Pascal es un arreglo triangular de números naturales que generan los coeficientes de la expansión del binomio $(1 + X)^n$, donde n es número natural igual o mayor que cero. El triángulo puede obtenerse de una manera sencilla. En un arreglo triangular, en un primer renglón se coloca el número uno, en el segundo renglón contiguo al primero, se coloca el dígito uno a ambos lados del elemento del primer renglón, para el tercer renglón se inicia colocando el número uno por debajo y a la izquierda del primer elemento del renglón anterior, el siguiente número se obtiene al sumar los dos números que se encuentran colocados por encima del número, a uno y otro lado de él, y el último elemento nuevamente es la unidad. Para generar los renglones posteriores, se siguen las mismas reglas, se inicia y termina con el número uno y los elementos intermedios son el resultado de sumar los términos que están por encima de él a su izquierda y a su derecha (figura 15).

1	1
1 1	11
1 2 1	101
1 3 3 1	1111
1 4 6 4 1	10001
1 5 10 10 5 1	110011
1 6 15 20 15 6 1	1010101
1 7 21 35 35 21 7 1	11111111
1 8 28 56 70 56 28 8 1	100000001
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	1100000011
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1	10100000101
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1	111100001111
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1	1000100010001
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1	11001100110011
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1	101010101010101
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1	1111111111111111
Triángulo de Pascal	Triángulo de Pascal en sistema binario

Fig. 15: Triángulo de Pascal.

Una importante interpretación del triángulo de Pascal, es por medio de los coeficientes del desarrollo binomial, o sea, los coeficientes de los polinomios mostrados en la tabla 3.

$(1+X)^0 =$	1
$(1+X)^1 =$	$1 + 1X$
$(1+X)^2 =$	$1 + 2X + 1X^2$
$(1+X)^3 =$	$1 + 3X + 3X^2 + 1X^3$
.	.
.	.
.	.
$(1+X)^n =$	$1 + A_1X + \ldots + A_nX^n$

Tabla 3: Coeficientes Binomiales

Los coeficientes se pueden obtener mediante la expresión matemática:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \ ; \ 0 \leq k \leq n, \text{ donde:}$$

$$n! = (1)(2)(3) \ldots (n), \text{ para } n \geq 0 \text{ y } 0! = 1$$

Al desarrollar el factorial de un número, éste crece rápidamente cuando n crece, por ejemplo, 10! = 3,628,800, el factorial de 100 tiene 158 dígitos y el factorial de 1000 tiene 2568 dígitos, lo que hace que el cálculo de los coeficientes binomiales sea un tanto complicado, aún con una computadora por medio de la fórmula anterior. Sin embargo al emplear el triángulo de Pascal, no es necesario el cálculo de factoriales ya que como se apuntó con anterioridad un elemento cualquiera en una celda, resulta de la suma de los elementos de las celdas vecinas a uno u otro lado por encima de ellas, en símbolos:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

aunque también los coeficientes binomiales crecen rápidamente conforme el número n crede, así podemos observar que cuando n=34 y k=17 el valor del coeficiente es igual a 2,333,606,220.

Afortunadamente para el propósito que se persigue en este trabajo no es necesario el valor del coeficiente binomial. Para nuestro fin basta saber si el coeficiente tiene una cierta divisibilidad, por ejemplo el investigar si un coeficiente binomial es par o impar es suficiente para conocer su divisibilidad por dos. Cuando se quiere expresar el triángulo de Pascal en código binario, se aplican las reglas que se muestran en la tabla 4.

Cuando en el triángulo de Pascal, sustituimos los números pares por el número cero y los números impares por el número uno, se obtiene un patrón como el que aparece en la figura 15. Si se observa la imagen detenidamente, aparece nada menos que el triángulo de Sierpinski! Esto se puede verificar con más detalle, si en lugar de ceros y unos usamos pequeños cuadros negros y blancos, de tal forma que los ceros se sustituyen por un cuadro vacío (blanco) y los unos por un cuadro relleno de color negro, y en este caso la figura que aparece, es semejante al triángulo de Sierpinski, o sea un fractal, (figura 16).

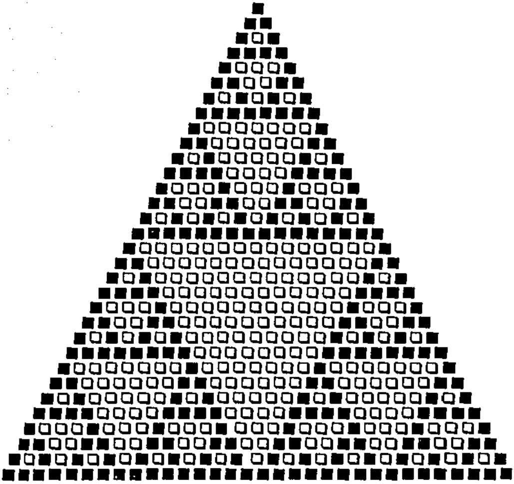


Fig. 16: Triángulo de Pascal, en Sistema Binario

$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$
Par + Par = Par
Impar + Par = Impar
Par + Impar = Impar
Impar + Impar = Par

Tabla 4: Reglas para Sumar

La construcción del triángulo de Sierpinski en numeración binaria, suministra una liga con los autómatas celulares. Existe toda una clase de autómatas celulares que se encuentran íntimamente relacionados a los patrones de divisibilidad en el triángulo de Pascal, se podría decir que dicho triángulo es el primer autómata celular. Los autómatas celulares son una herramienta muy importante en el modelaje y simulación en la Ciencia y Tecnología de la Física, la Química y la Biología.

Los autómatas celulares son máquinas perfectas de retroalimentación, un esquema que muestra un proceso de retroalimentación se presentó en la figura 6, en donde el estado final de una etapa es el inicio de la etapa subsiguiente; son estados matemáticos finitos en los cuales se cambia el estado de las celdas paso por paso. Los autómatas celulares pueden estar formados de una sola dimensión, donde las celdas se encuentran simplemente alineadas en forma semejante a una cadena como en el caso anterior, o bien su arreglo puede tener más de una dimensión.

Para correr un autómata celular, es necesario conocer dos entidades de información. Primero, un estado inicial de las celdas también llamado capa inicial, que es una fila alineada de celdas rellenas (negras) o vacías (blancas), como en el triángulo de Pascal de la figura 16 que está formada con cuadros llenos o vacíos. Segundo, un conjunto de reglas o leyes, para el triángulo de Pascal en sistema binario las reglas aparecen en la figura 17.

Estas reglas describen cómo una celda en una nueva capa, en el siguiente paso, es determinada del estado de un grupo de celdas de la capa que le antecede. Las reglas no dependen de la posición del grupo de celdas dentro de la capa. Entonces se puede especificar por medio de una tabla o si es posible mediante una fórmula; por ejemplo para construir el triángulo de Pascal en una base binaria, se tienen las reglas que se indican en la figura 17.

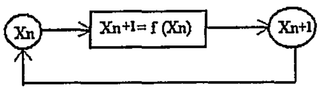
Fig. 17: Reglas para el Autómata celular

Que en sí, son las reglas que determinan si la suma de dos números enteros es par o impar, conociendo si los sumandos a su vez son pares o impares. Se pueden obtener modificaciones de la imagen fractal que se observa en la figura 16, cuando son modificadas las reglas, por ejemplo al tomar en el triángulo de Pascal los múltiplos de otros números, como por ejemplo, múltiplos del tres, múltiplos del cinco, etc.

Actividad No. 5. A partir del Triángulo de Pascal, sustituir los valores que sean múltiplos del número tres por el dígito uno y los que no sean múltiplos de tres por el dígito cero, para la construcción de otra figura fractal. Buscar el patrón de reglas que se derivan de la construcción del Triángulo de Pascal con múltiplos del tres, para que se pueda construir como un autómata celular.

Sistemas Dinámicos Discretos. Un ejemplo típico de un sistema dinámico, es el movimiento de las órbitas de los cuerpos celestes. Su estudio requiere de las herramientas del cálculo, en particular de las ecuaciones diferenciales. El proceso de interacción de una función también describe un sistema en movimiento, de ahí que se adopte una terminología similar a la de los cuerpos celestes. Entonces previo al estudio de un sistema dinámico discreto, se iniciará la sección presente con la descripción de la terminología.

La iteración de una función, ya se sabe que es un proceso simple de retroalimentación, donde el resultado de una etapa es el inicio de la etapa que le sigue. El proceso se puede resumir por medio del esquema mostrado en la figura 18, que representa una máquina de retroalimentación la cual procesa números y está caracterizada por una fórmula de iteración $X_{n+1} = f(X_n)$, donde $f(X)$ puede ser una función de X. Se requiere un número de entrada y la maquina regresa un nuevo número, el resultado de la fórmula, como salida. Estas máquinas son muy usadas como herramienta en matemáticas y se han desarrollado principalmente para la solución de problemas complejos.



$$x_{n+1} = \left\langle \begin{matrix} f_1(x_n) \\ f_2(x_n) \\ f_3(x_n) \end{matrix} \right\rangle,$$

La función depende del azar

Fig. No 18: Máquina de retroalimentación, con tres posibles salidas

Iterar significa repetir un proceso una y otra vez una gran cantidad de veces. En dinámica, el proceso que se repite es la evaluación de una función matemática. Una función expresada algebraicamente se puede ver como una operación que convierte ciertos números en otros números posiblemente diferentes. Por ejemplo para iterar la función $f(x) = \sqrt{x}$ es necesario tomar un valor inicial de x y extraerle la raíz cuadrada, al resultado nuevamente extraerle la raíz cuadrada y así sucesivamente (Tabla 5). Si se toma el valor inicial x = 256, entonces calculamos en orden:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= f(X_0) = \sqrt{256} = 16\\
X_2 &= f(X_1) = \sqrt{16} = 4\\
X_3 &= f(X_2) = \sqrt{4} = 2\\
X_4 &= f(X_3) = \sqrt{2} = 1.414214....\\
X_5 &= f(X_4) = \sqrt{1.414214} = 1.189207....\\
X_6 &= f(X_5) = \sqrt{1.189207} = 1.090508\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Tabla 5:

En símbolos, se puede representar al proceso como una composición de funciones (tabla 6):

$$
\begin{aligned}
X_1 &= f(X_0) = \sqrt{X_0}\\
X_2 &= f(X_1) = f(f(X_0)) = \sqrt{\sqrt{X_0}}\\
X_3 &= f(X_2) = f(f(f(X_0))) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{X_0}}}\\
&\vdots\\
X_{n+1} &= f(X_n)
\end{aligned}
$$

Tabla 6:

La lista sucesiva de resultados de las iteraciones de un punto o un número, por medio de una función $f(X)$, se llama órbita del punto. Así los números 16, 4, 2, 1.4142, 1.1892, 1.0905, ..., forman la órbita de $X_0 = 256$ bajo la función $f(X) = \sqrt{X}$. La órbita de un punto, puede crecer sin límite o sea en cada iteración crecer y crecer o bien se puede aproximar más y más a un valor determinado. En el primer caso se dice que se tiene un punto fijo repulsor y en el segundo se tiene un punto fijo atractor. Las órbitas también pueden ser periódicas o cíclicas. Cuando la iteración de una función eventualmente regresa a donde se inició la órbita de X_0, es cíclica. Si hay un número n, tal que $X_n = f(X_{n-1}) = X_0$, a X_0 se le denomina punto cíclico de periodo n, y a n periodo de la órbita.

Al iterar una función para conocer el comportamiento de las órbitas de los puntos, es necesario realizar los cálculos respectivos (que pueden resultar muy tediosos por lo laborioso). Una forma de reducir lo tedioso de los cálculos es sin duda si se efectúan en una calculadora gráfica, que tienen una gran capacidad para procesos iterativos de funciones, o bien con una computadora personal.

Existe otra técnica para observar el comportamiento de la órbita de un punto, a ésta se le denomina Análisis Gráfico. La gráfica de una función $f(X)$ se puede construir más fácilmente usando una computadora con un paquete graficador, lo que hará que la tarea resulte mucho más simple, para ello se puede usar alguno de los muchos paquetes de software disponibles para trazar las gráficas de funciones en la pantalla del monitor y/o en una impresora. También pueden ser construidas usando algún lenguaje de programación.

Existe un método geométrico simple para describir el comportamiento de las órbitas de una función $f(X)$. Para describir la órbita de un punto X_0, se puede auxiliar con la gráfica de la función identidad $Y = X$, la cual forma un ángulo de 45 grados con el eje X en un plano coordenado XY, y la gráfica de la función. Para ejemplificar el método y simultáneamente visualizar un punto fijo atractor y un punto fijo repulsor, consideremos las funciones simples $f(X) = X/2$ y $g(X) = 2X$, ambas funciones tienen al cero como punto fijo, sin embargo la dinámica es diferente en cada caso.

La construcción de la órbita de un punto X_0, para la función $f(X) = 1/2\ X$, usando un análisis gráfico, se realiza de la siguiente manera. Para obtener el valor de $X_1 = f(X_0)$, la gráfica de $f(X)$ y la función identidad $Y=X$ permiten leer este valor, cuando se traza una línea vertical desde X_0 localizado sobre el eje de las abscisas hasta la gráfica de la función $f(X)$, entonces se localiza $X_1 = f(X_0)$ gráficamente, la intersección de la vertical trazada desde X_0 con la gráfica de la función, es el punto (X_0, $f(X_0) = X_1$). Para ubicar a $X_1 = f(X_0)$ sobre el eje X, se traza una línea horizontal desde el punto (X_0, $f(X_0)$) localizado sobre la gráfica de la función f(X), hasta el eje y, la intersección de la horizontal con la función identidad f(X)=X es el punto de coordenadas (X_1, f(X)) porque $X_1 = f(X_0)$ ya que Y=X de acuerdo con la función identidad, entonces para ubicar a X_1 sobre el eje X, se traza una vertical del punto (X_1,$f(X_0)$) hacia el eje de las abscisas y la intersección de ambas, es el punto buscado. Si el proceso es repetido ahora con el punto X_1, se localiza a X_2, luego X_3 a partir de X_2 (fig. 19), es como recorrer la gráfica en escalera. El conjunto de valores de X que se forman sobre el eje X ó sobre la función identidad constituyen la órbita de X_0. Es de hacerse notar que independientemente del valor X_0 en el caso de la función f(X) = X/2 la órbita de X_0 se aproxima al valor de cero, entonces el cero es un punto fijo atractor de dicha función.

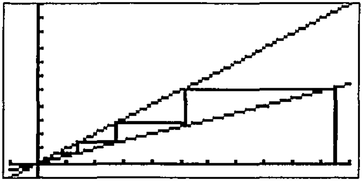


Fig. 19: Punto fijo Atractor.

La función f(X) = 1/2 X tiene a cero como un punto fijo y mediante un análisis gráfico se puede verificar que todas las órbitas tienden a cero bajo el proceso de iteración. El cero atrae a las órbitas de todos los puntos, lo que se puede verificar fácilmente con el uso de una calculadora o una computadora, entonces el cero es un punto fijo atractor de la función f(X) = 1/2 X.

Un análisis gráfico similar al anterior con la función g(X) = 2X muestra que todas las órbitas diferentes de cero se comportan en forma distinta que en el caso de la función f(X) = 1/2 X; en esta función las órbitas se mueven alejándose de cero, por lo que ahora se tiene un punto fijo repulsor (figura 20).

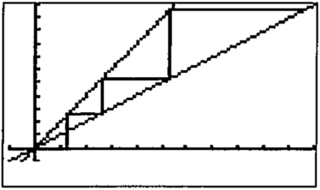


Fig. 20: Punto fijo Repulsor.

Para ser más precisos, el punto P de f(X)se llama punto fijo atractor si hay un intervalo $a < X < b$ que contiene a P en el cual todos los puntos tienen órbitas que tienden a P. Esto es, si X satisface $a < X < b$, entonces $X_n = f(X_{n-1}) \rightarrow P$ cuando $n \rightarrow \infty$. En forma semejante a los puntos fijos, las órbitas periódicas pueden también ser atractoras o repulsoras. Existe una diferencia fundamental entre puntos periódicos atractores y puntos periódicos repulsores. Los puntos periódicos atractores pueden ser vistos por medio de un análisis gráfico, usando la computadora y un graficador mientras que los puntos fijos repulsores no tienen esta cualidad.

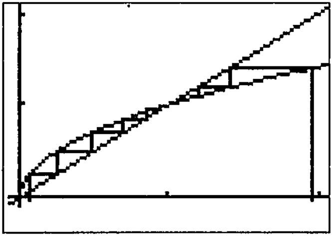


Fig. 21: Orbitas de la función $f(x) = \sqrt{x}$

Por lo anterior una órbita de un sistema dinámico es estable si tiene la propiedad de que al cambiar ligeramente la entrada inicial X_0, la órbita que resulta se comporta en forma similar. Por ejemplo todas las órbitas diferentes de cero de la función raíz cuadrada, son estables porque todas ellas tienden al punto fijo atractor uno, (figura 21). Un punto fijo atractor o un punto periódico siempre es estable, mientras que un punto repulsor nunca es estable.

Para un biólogo que estudie el crecimiento o agotamiento de la población de diferentes especies de pájaros, peces o animales, un problema importante es la construcción de un buen modelo matemático que permita predecir con precisión la población futura de una especie. Generalmente el investigador recurre a modelos matemáticos que son ideados para ayudar en la predicción o agotamiento de una población. A menudo, estos modelos producen sistemas dinámicos de un tipo o de otro.

Uno de los modelos más simples de sistemas dinámicos, es la ecuación logística $f(x) = \lambda x(1-x) = \lambda$. Este modelo puede ser usado para describir el comportamiento de la población de una especie simple que viva, se reproduzca y muera en un ambiente controlado tal como un laboratorio. Fue Verhulst quien en 1875 formuló esta ley por vez primera.

En cualquier ambiente, hay un número máximo L de especies que pueden estar presentes en cualquier tiempo. La limitación puede ser el espacio físico del laboratorio en la cual la especie está confinada, a ese número le podemos llamar L. El investigador denota por Pn el porcentaje de esta población límite, que vive en una generación n. La ecuación logística permite al biólogo calcular la población P_{n+1} de la generación precedente P_n. La ecuación es $P_{n+1} = C\, P_n\, (1-P_n)$. Donde C es una constante que depende de cosas tales como la cantidad de alimento disponible o la temperatura del laboratorio entre otras cosas. Usando esta ecuación, a partir de una población inicial P_0 se puede calcular cualquier población de una generación posterior.

No obstante, como se hará notar, este modelo simple, conduce a todo tipo de comportamiento complicado e inexplicable. La iteración de la función logística, se torna en uno de los más ricos e interesantes ejemplos de un sistema dinámico discreto. La función logística es una función cuadrática dada por: $f(X) = \lambda X(1-X)$, donde λ es una constante que generalmente se elige entre cero y cuatro. En poblaciones el valor inicial X_0 es elegido generalmente entre cero y uno.

Es aquí donde para iterar a la función para diferentes valores de λ y encontrar las órbitas de los diferentes valores de X_0, se hace indispensable el uso de la microcomputadora y algún software graficador o bien con un lenguaje de programación que puede ser BASIC, LOGO, PASCAL, etc., aunque también el proceso de iteración se puede realizar con una calculadora gráfica que ahora ya se encuentran comúnmente en el mercado.

La secuela de gráficas presenta las iteración de la función logística para valores de λ de 1, 3.2, 3.5, 3.9, y 4, así como para diferentes valores iniciales de X_0, estas figuras fueron realizadas en una microcomputadora empleando un programa en lenguaje BASIC. (figuras 22 a 31).

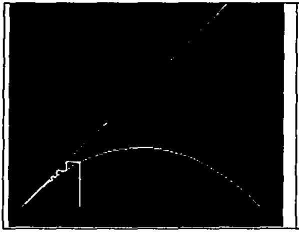


Fig. 22: $\lambda = 1$, $X_0 = 0.25$

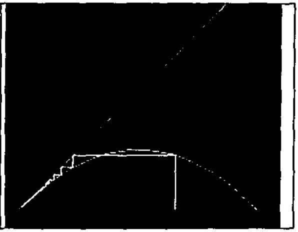


Fig. 23: $\lambda = 1$, $X_0 = 0.65$

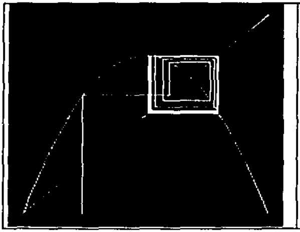


Fig. 24: $\lambda = 3.2$, $X_0 = 0.25$

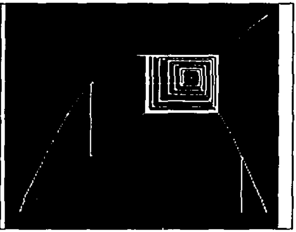


Fig. 25: $\lambda = 3.2$, $X_0 = 0.90$

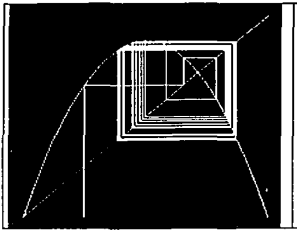


Fig. 26: $\lambda = 3.5$, $X_0 = 0.25$

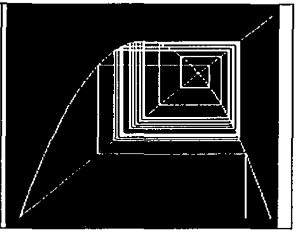


Fig. 27: $\lambda = 3.5$, $X_0 = 0.90$

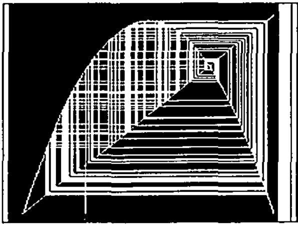


Fig. 28: $\lambda = 3.9$, $X_0 = 0.25$

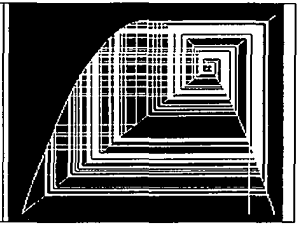


Fig. 29: $\lambda = 3.9$, $X_0 = 0.90$

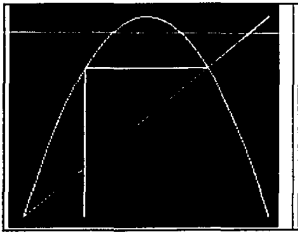


Fig. 30: $\lambda = 4.0$, $X_0 = 0.25$

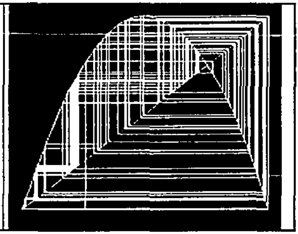


Fig. 31: $\lambda = 4.0$, $X_0 = 0.26$

Las gráficas expresan lo siguiente. Independientemente del valor inicial X_0, la órbita del punto muestra ser estable pues siempre converge a cero, por lo que el valor cero es un punto fijo atractor, cuando $\lambda = 1$. Para el valor de $\lambda = 3.2$ se encontró una órbita cíclica de periodo dos, los valores son: 0.5130456 y 0.799456, también se observa que independientemente del valor inicial X_0, las órbitas son estables, (fig. 24 y 25). Para un valor de $\lambda = 3.5$ aparece una órbita cíclica estable de periodo cuatro, los valores son 0.38282, 0.82694, 0.50088 y 0.87500 Sin embargo con el valor de $\lambda = 3.9$, se observa que las órbitas son inestables, cuando se toman diversos valores de X_0, las órbitas de los puntos no son periódicas ya que se encuentran en el más completo desorden. Una cosa semejante sucedió cuando se tomó el valor de $\lambda = 4$ para un valor inicial $X_0 = 0.26$, no obstante, cuando fue iterada nuevamente la función para $\lambda = 4$ y $X_0 = 0.25$ sorprendentemente se encontró un punto fijo atractor que es 0.75, lo que viene a mostrar que el comportamiento de ésta función cuadrática no es predecible para algunos valores de λ. En el apéndice B se encuentra el programa (escrito en BASIC)con que fueron obtenidas las figuras 22 a 31.

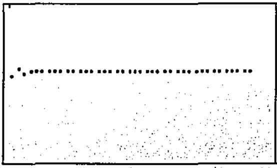


Fig. 32: $\lambda = 2.5$, $X_0 = 0.65$

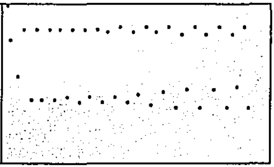


Fig. 33: $\lambda = 3.5$, $X_0 = 0.65$

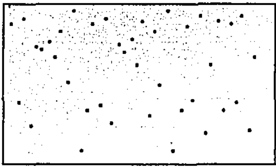


Fig. 34: $\lambda = 3.9$, $X_0 = 0.65$

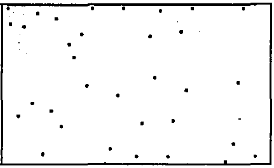


Fig. 35: $\lambda = 4.0$, $X_0 = 0.65$

Otra forma como se pueden obtener las órbitas de los puntos para valores de λ entre cero y cuatro y distintos valores del punto inicial X_0, es mediante un programa en una calculadora gráfica TI-81 aunque en este caso el programa indica en pantalla la gráfica de los puntos $X_n = f(X_{n-1})$ que resultan de las iteraciones sucesivas de la función. En las figuras 32 a 35 se presentan las gráficas para la iteración de la función logística, con valores diferentes de λ, valores distintos de X_0 y 40 iteraciones en cada ejemplo. Las figuras fueron obtenidas en una computadora personal, con un simulador de la calculadora TI-81 y cada gráfica contiene el valor de λ con que fue iterada. La figura 32 muestra que para un valor de λ = 2.5, se obtiene el punto fijo atractor 0.6 , si λ = 3.5, se obtienen los cuatro puntos cíclicos 0,875, 0.383, 0.827 y 0.501, pero si λ = 3.9 ó λ = 4.0, se observa un comportamiento caótico en las sucesivas iteraciones de la función logística, lo que fue visto anteriormente en las figuras 32 a 35.

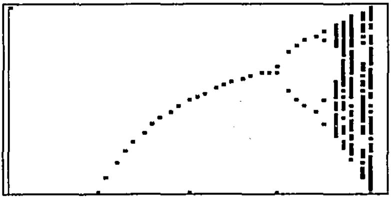


Fig. 36: Curva Logística con la calculadora TI-81

Si en una gráfica se dibujan los puntos fijos atractores o las órbitas cíclicas de $X_n = f(X_{n-1})$ contra el valor de λ se obtiene una gráfica como la mostrada en la figura 36. Esta gráfica fue elaborada usando un simulador de la calculadora TI-81 en una microcomputadora: se tomó un mismo valor inicial X_0 para cada caso y valores de λ desde 0.1 hasta 4.0 tomando incrementos para λ de 0.1 y 300 iteraciones de la función para cada conjunto de condiciones iniciales. De la gráfica se puede observar que para valores de λ entre cero y uno, las órbitas de los valores iniciales, tienen un punto fijo atractor en cero, tal es el caso de λ = 0.8 y X_0 = 0.5. Con estos valores se obtuvo el valor X_n de cero como se puede verificar en la figura 36.

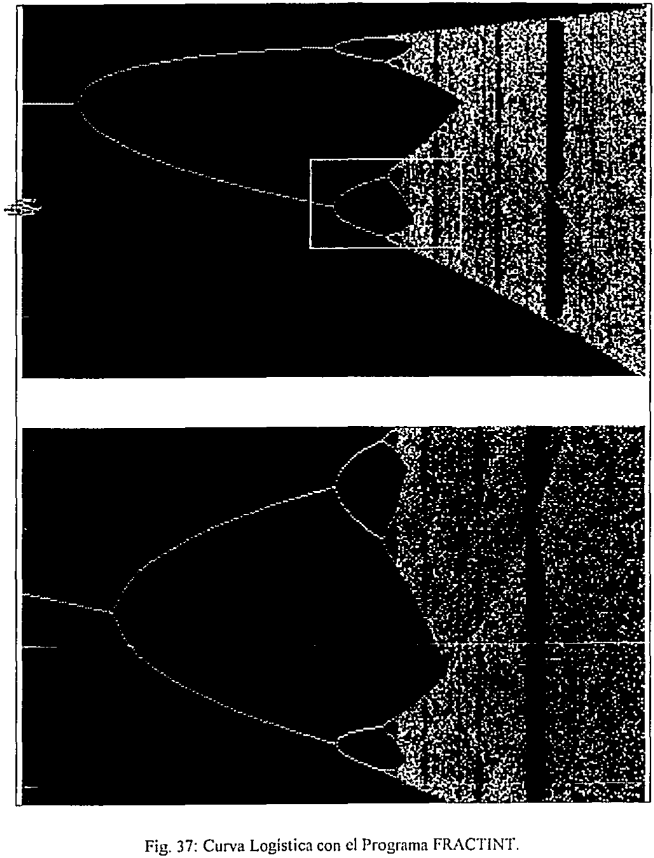


Fig. 37: Curva Logística con el Programa FRACTINT.

Para valores de λ mayores que uno y menores que tres, se tiene un punto fijo atractor que se mueve desde cero hasta un valor aproximado de 2/3. Si se toma $\lambda = 2.5$ y $X_0 = 0.5$ se obtiene $X_n = 0.6$ (Figura 36). Para valores de λ iguales o mayores de 3 aparece primero una órbita cíclica estable de periodo dos, por ejemplo para $\lambda = 3.0$ y $X_0 = 0.5$ se obtienen los valores de $X = 0.6994$ y $X = 0.6308$ para la órbita cíclica (Figura 36). Luego aparecen órbitas cíclicas de periodo 4, por ejemplo para $\lambda = 3.5$. Luego para $\lambda = 3.55$ aparece una órbita cíclica de periodo 8, sin embargo para valores desde $\lambda = 3.6$ hasta $\lambda = 4.0$ la gráfica no muestra un patrón determinado y se comporta en forma caótica (Figura 36).

Una gráfica con más puntos, se presenta en la figura 37. Para su construcción, se tomaron valores de λ mucho más próximos unos de otros. En la gráfica se puede observar cómo existen regiones negras donde no hay puntos como resultado de la iteración de la función logística. Finalmente la figura presenta una amplificación de una zona que se marcó con un recuadro en la primer gráfica. Como podrá observarse la figura es semejante a la primera, lo que viene a verificar nuevamente que el todo está contenido en la parte.

Como una consecuencia de todo lo anterior, se puede ver que aún el más simple de los sistemas dinámicos, tan simple como una función cuadrática, pueden exhibir un comportamiento completamente complicado y caótico.

Actividad 6. A partir de la función $f(X) = X^2 + C$ calcular algunas órbitas, para valores de $X_0 = 0$ y valores de C decreciendo desde 0.5 hasta cero.

Teoría del Caos. En la exploración de la función logística, cuando se toman ciertos valores de λ cercanos a cuatro, la función se comporta en una forma caótica, pues bien, se puede partir de un experimento puramente dominado por el azar para la construcción de una imagen fractal. En estos casos se podrá verificar cómo el caos es en cierta medida "ordenado", o sea que en el caos se encuentra el orden. Cuando se estudiaron sistemas dinámicos se constató cómo dentro del más estricto orden matemático, se encuentra la semilla del más completo caos, lo que nos conduce a conjeturar que el caos y el orden aparecen en completa armonía.

Muchos fractales están denominados por el azar y para comprender su significado construiremos un fractal con esa característica, lo llamaremos el juego del caos. Para su construcción, partimos de las siguientes reglas: en una cartulina seleccionar 3 puntos, que bien pueden ser los vértices de un triángulo equilátero, a los que llamaremos CASA, PARQUE Y ESCUELA, en el orden que desees. Las reglas del juego son las siguientes.

1). Seleccionar aleatoriamente un punto en la cartulina lo llamaremos punto P_0 (punto inicial).
2). Lanzar un dado. Si aparece 1 ó 2 seleccionar el vértice CASA, si aparece 3 ó 4 seleccionar el vértice PARQUE y si aparece 5 ó 6 seleccionar el vértice ESCUELA.
3). Encontrar el punto medio entre P_0 y el vértice seleccionado después del lanzamiento del dado y llamarle el punto P_1
4). Repetir el paso número 2 con P_1. Repetir el paso número 3 y al punto llamarle P_2. Con el punto P_2 repetir los pasos 2 y 3, para obtener el punto P_3, repetir los pasos 2 y 3 recursivamente para encontrar más puntos ¿Qué figura se observa en la nube de puntos que se genera?. La figura 38 indica el resultado para 100, 200, 500 y 2000 lanzamientos del dado ¡sorprendente aparece el triángulo de Sierpinski nuevamente!.

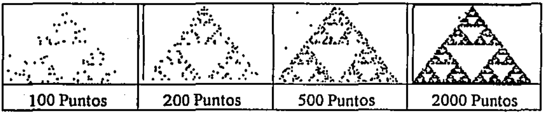


Fig. 38: Triángulo de Sierpinski por medio del juego del caos

El proceso se puede simbolizar por medio de una máquina de retroalimentación que se presenta en la figura 18. La máquina de retroalimentación contiene una entrada X_n y para la salida cuenta con tres opciones dentro de la unidad de proceso, de acuerdo con el resultado del lanzamiento del dado, la salida está dominada por las leyes del azar.

Cambiando las reglas del juego aparecen otras imágenes fractales (figura 39). Como se señaló con anterioridad los procesos recursivos son tediosos, aburridos y gastan una gran cantidad de tiempo. Las figuras que aparecen fueron obtenidas a partir de la simulación del experimento del Juego de Caos usando un simulador de la calculadora gráfica TI-81 en una microcomputadora y de ahí se insertaron en el procesador de texto. Esto viene a confirmar que el desarrollo de la teoría fractal fue posible en virtud del avance vertiginoso de las tecnologías en el campo de la electrónica.

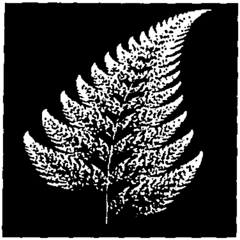


Fig. 39.

Lo sorprendente de la teoría del caos es que muestra que el determinismo matemático es en muchos casos solamente aparente, ya que nos conduce a resultados inusitados, pues no se puede predecir el comportamiento del modelo matemático, aún cuando este modelo sea suficientemente preciso. Entonces se puede decir que es dentro del más riguroso orden matemático donde encontramos la semilla del más completo caos.

Ese tipo de comportamiento, también aparece cuando se estudia el comportamiento de la función logística $f(X) = \lambda X(1-X)$, que representa un proceso dinámico muy simple. Sin embargo se comporta de una manera muy complicada; de una forma aleatoria. Se puede constatar por medio de un análisis gráfico que para algunos valores de λ, la función $f(X)$ salta alrededor de la línea de la función identidad en forma impredecible, como se puede apreciar en las figuras 28, 29 y 31. Esto es el concepto de caos, uno de los conceptos más importantes en la matemática actual.

Generalmente el Caos está presente en todo lo que nos rodea, aparece en los patrones del remolino de un huracán, sobre un radar, en las subidas y bajadas del stock de mercados, en los incontables patrones formados por el humo del cigarro, etcétera. Dichos fenómenos parecen ser totalmente impredecibles y están fuera de control. Estos ejemplos involucran a innumerables variables, sin embargo no es el número de variables lo que hace caótico a un sistema, ya que un sistema simple que consta de una sola variable como el caso de la función logística $f(X) = \lambda\ X(1-X)$, se comporta en forma impredecible para ciertos valores de λ, aún cuando únicamente depende de una sola variable.

Un prototipo de una función caótica es la función cuadrática $f(Z) = Z^2$, donde Z es un número complejo. En esta función no todas las órbitas de los puntos son impredecibles. Cuando $-1 < |Z| < 1$ la órbita de Z tiende al punto fijo atractor cero, pero si $|Z| > 1$ la órbita de Z tiende a infinito. Si a la función cuadrática, se le agrega una constante C, o sea que la función aparece como $f(Z) = Z^2 + C$, aparecen los conjuntos de Julia y Mandelbrot. En la figura 40, en el primer cuadro aparece la imagen fractal del Conjunto de Mandelbrot. Los siguientes cuadros son amplificaciones de un recuadro de la imagen anterior, señalada en la figura, se puede constatar que después de varias amplificaciones aparece nuevamente la imagen inicial, o sea que la parte contiene el todo, la figura posee infinitas copias de sí misma.

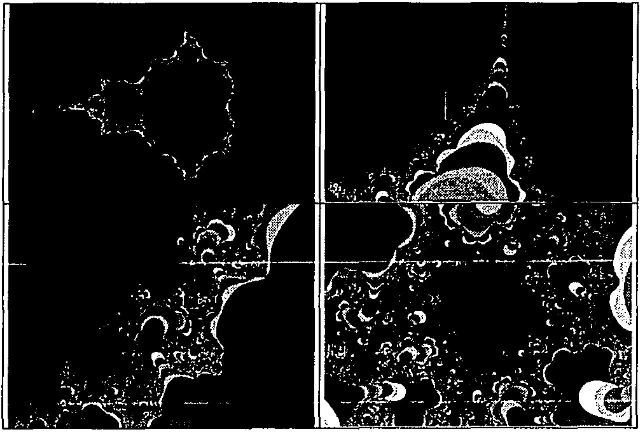


Fig. 40: Conjunto de Mandelbrot y amplificaciones sucesivas de la imagen.

Cabe señalar que no todo proceso recursivo genera imágenes fractales por ejemplo en la secuencia de gráficas de la figura 41 aparece una sucesión de figuras de perímetro constante cuyo límite es un cuadrado.

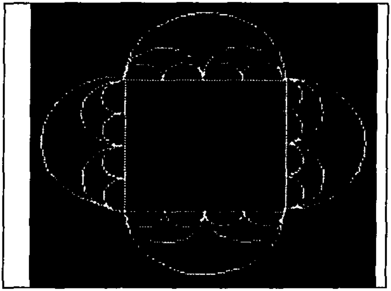


Fig. 41

Igualmente las gráficas de la figura 42, aún cuando se realizan mediante procesos recursivos, no son imágenes fractales, en ambos casos el perímetro es constante y el área tiende a cero.

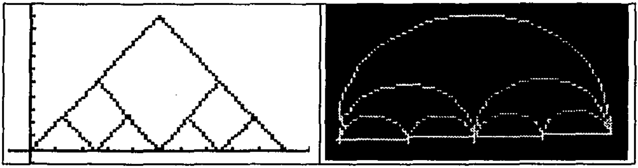


Fig. 42

Las figuras anteriores no pueden ser imágenes fractales debido a que los fractales tienen la propiedad de tener una longitud infinita y en los casos anteriores las figuras poseen una longitud finita que permanece constante al pasar de una etapa a la otra en la construcción de la figura.

Medición de la longitud de la Curva de Koch. Para realizar la medición de la longitud P de la Curva de Koch, procedamos considerando etapa tras etapa. La etapa cero consta de 3 lados, si la longitud de cada lado es unitaria entonces la longitud de la figura es $P_0 = (3)(1) = 3$ o sea que la longitud se obtiene al multiplicar el número de lados N_0 por la longitud del lado L_0, por lo tanto $P_0 = N_0L_0$. En la etapa uno, cada lado de la figura de la etapa cero se dividió en tres partes de un tercio de la longitud inicial, se eliminó el tercio central y fue sustituida por dos segmentos de igual longitud $L_1 = 1/3$. El resultado fue una figura de 12 lados iguales (ver figura 10) cuatro por cada lado de la etapa anterior, $N_1 = 4(3) = 12$, por lo que la longitud de la figura es $P_1 = N_1L_1 = 12(1/3) = (4/3)3$. La etapa dos se construye dividiendo cada lado de la etapa uno en 3 partes, cada uno de longitud $L_2 = 1/3(1/3) = 1/9$ eliminando la parte central y agregando dos segmentos de longitud 1/9, el resultado es $N_1 = (12)(4) = 48$ segmentos, por lo que la longitud total es $P_2 = N_2L_2 = 48(1/9) = 4(4)(3)/3^2 = (4/3)^2 3$. En la etapa tres, cada lado de la figura de la etapa dos se divide en tres partes iguales, $L_3 = 1/3(1/9) = 1/27$ de nueva cuenta eliminamos el tercio central y en su lugar colocamos dos segmentos de longitud L_3, el resultado es una figura de $N_3 = 4\ (48) = 192$ lados, la longitud total es consecuentemente $P_3 = N_3\ L_3 = 192/27 = 4(4)(4)(3)/3(3)(3) = (4/3)^3 3$.

Etapa	No de lados.	Long. del lado.	Perímetro
0	$N_0 = 3$	$L_0 = 1$	$P_0 = N_0L_0 = (3)(1) = 3$
1	$4(3) = 12$	$(1/3)(1) = (1/3)L_0$	$4(3)1/3(1) = (4/3)(3)$
2	$4(12) = 4^2(3)$	$(1/3)(1/3) = (1/3)^2(1)$	$4^2(3)(1/3)^2(1) = (4/3)^2(3)$
3	$4(48) = 4^3(3)$	$(1/3)(1/3)^2 = (1/3)^3(1)$	$4^3(3)(1/3)^3(1) = (4/3)^3(3)$
4	$4(192) = 4^4(3)$	$(1/3)(1/3)^3 = (1/3)^4(1)$	$4^4(3)(1/3)^4(1) = (4/3)^4(3)$
5	$4(768) = 4^5 5(3)$	$(1/3)(1/3)^4 = (1/3)^5(1)$	$4^5(3)(1/3)^5(1) = (4/3)^5(3)$
6	$4(3072) = 4^6(3)$	$(1/3)(1/3)^5 = (1/3)^6(1)$	$4^6(3)(1/3)^6(1) = (4/3)^6(3)$
n	$N_n = 4^n(N_0)$	$L_n = (1/3)^n(L_0)$	$P_n = (4/3)^n P_0$

Tabla 7.

En la tabla 7 se presentan algunas etapas de la curva de Koch, el número de lados, longitud del lado y la longitud total de la figura en cada etapa. Al analizar esta tabla se observa que conforme se pasa de una etapa a la otra, el número de lados aumenta por un factor de cuatro mientras que la longitud de los lados disminuye en un tercio, por lo que resulta fácil llegar a generalizar el resultado y observar cómo a medida que aumentan las etapas la longitud total de la curva aumenta en el factor (4/3) que es mayor que la unidad, etapa tras etapa. En matemáticas cuando una sucesión de números aumenta sin tener un límite, como en el caso del perímetro, se les llama sucesiones no convergentes.

Etapa	Longitud de la Curva.	Area dentro de la Curva
0	$P_0 = 3$	$A_0 = (\sqrt{3}/4) = 0.4330$
1	$P_1 = (4/3)3 = 4$	$A_1 = (\sqrt{3}/4) + (\sqrt{3}/4)(1/9)3 = 0.5773$
2	$P_2 = (4/3)^2 3 = 5.33$	$A_2 = (\sqrt{3}/4) + (\sqrt{3}/4)(1/9)3 + (\sqrt{3}/4)(1/9)2(3)(4) =$ 0.6415
3	$P_3 = (4/3)^3 3 = 7.11$	$A_3 = (\sqrt{3}/4) + (\sqrt{3}/4)(1/9)3 + (\sqrt{3}/4)(1/9)2(3)(4) + (\sqrt{3}/4)(1/9)3(3)(4)2 = 0.6700$
4	$P_4 = (4/3)^4 3 = 12.64$	$A_4 = (\sqrt{3}/4) + (\sqrt{3}/4)(1/9)3 + (\sqrt{3}/4)(1/9)2(3)(4) + (\sqrt{3}/4)(1/9)3(3)(4)2 + (\sqrt{3}/4)(1/9)4(3)(4)3 = 0.6827$
n	$P_n = (4/3)^n 3$	$A_n = (\sqrt{3}/4) + (\sqrt{3}/4)(1/9)3 + (\sqrt{3}/4)(1/9)2(3)(4) + \ldots + (\sqrt{3}/4)(1/9)^n(3)(4)^{n-1}$

Tabla 8.

Con la construcción de la curva de Koch, también se puede verificar otra propiedad que tienen los fractales: el poseer una longitud infinita encerrada en un área finita. Efectivamente al analizar la tabla se puede observar que el perímetro en cada etapa es cuatro tercios mayor que la etapa que la antecede, por lo que crecerá sin límite. Por el contrario, el área aún cuando aumenta etapa tras etapa, el aumento no es de la naturaleza del perímetro. Intuitivamente se puede observar que el área nunca sobrepasará el área de un círculo circunscrito a la gráfica de la curva de Koch. En cada etapa aumenta el área un cierto número de triángulos equiláteros cada vez mas pequeños, como en el caso de la longitud. Matemáticamente se puede obtener una fórmula general para el área que encierra la curva y se puede mostrar que la expresión para encontrar el área en cualquier etapa está formada por una sucesión de términos, a la que se le llama serie y se representa por A_n. (Tabla 8). Se podrá observar que cuando se aumenta el número de etapas, aumenta el número de términos en la expresión A_n. Sin embargo el área no sobrepasará el valor aproximado de 0.6928, lo que se demuestra mediante técnicas matemáticas que están fuera del propósito de este trabajo. El valor que no es alcanzado y por lo tanto no superado, se le conoce como límite de la serie (si la serie tiene límite, se dice que la serie es una convergente). Lo anterior verifica el hecho de que los fractales tienen una longitud infinita.

El problema de la medición de la longitud de una costa y su modelaje. Un problema clásico en el desarrollo de la geometria fractal fue la medición de la longitud de una costa. En efecto el padre de los fractales, Benoit Mandelbrot se planteó el problema de medir la costa de la Gran Bretaña. Por ejemplo, si se toma un trozo de costa marítima en una región accidentada para tratar de medir su longitud efectiva, la longitud debe ser igual o mayor que la distancia en línea recta entre los extremos de la curva. Si la costa fuera recta la distancia entre los extremos daria la solución al problema, no obstante una costa muy rocosa es sumamente sinuosa y resulta más larga que una línea recta, la longitud final resultará ser tan grande que para fines prácticos se le puede considerar infinita.

Un método de medición puede ser pasear un compás, con una abertura dada sobre la costa, iniciando cada paso donde termina el paso anterior. El valor de la abertura del compás multiplicado por el número de pasos nos dará una aproximación de la longitud de la costa. Si se repite la operación reduciendo cada vez más la abertura del compás, se encuentra que la longitud tiende a aumentar sin limite. Se puede decir que el principio en que se basa la medición consiste en reemplazar el objeto que se va a a medir, que es demasiado irregular, por una curva suavizada o regularizada. Es como imaginarse que un hombre camina a lo largo de la costa siguiendo el camino más corto posible sin separarse de ella más de una distancia fija n, luego, se repite el proceso, haciendo cada vez más pequeña la distancia n. Después se sustituye al hombre por un ratón, después por una hormiga. Cuanto mas cerca se quiera uno mantener de la costa, tanto mayor será la distancia por recorrer.

Cuando las costas son consideradas como figuras geométricas, éstas resultan ser desordenadas y complicadas. Sin embargo les subyace un orden y el grado de irregularidad que se presenta a distintas escalas, es a grosso modo igual. Esto es, cuando se observa una bahía o una península representadas en un mapa a cierta escala, y si son observadas nuevamente a una menor escala es asombroso ver que sus contornos están formados por innumerables sub-bahías y sub-penínsulas. Al cambiar nuevamente a una escala menor aparecen sub-sub-bahias y sub-sub-pinínsulas, y asi sucesivamente. La iteración no se puede continuar indefinidamente, los mapas en las distintas escalas son diferentes en lo específico sin embargo tienen el mismo carácter global, los mismos rasgos genéricos, se puede pensar que un mismo mecanismo puede generar tanto los detalles pequeños como los grandes, como si la escala no importara. Hablando estadísticamente cada pedazo de costa es semejante a la costa completa.

Con el propósito de simplificar el problema de la medición de una costa y su modelaje, se puede partir de una figura más regular, que sirva para medir el grado de irregularidad de las curvas por la intensidad de los grandes y pequeños detalles o sea por su relación de autosemejanza. Consideremos la costa de una isla trazada tan burdamente como un triángulo equilátero, a continuación se construye sobre el triángulo, la curva de Koch descrita con anterioridad, para hacer la medición de su longitud.

Medición de la Costa. La propiedad de autosemejanza que poseen los fractales puede ser determinística o de tipo estadístico. El primer tipo se refiere a que si se toma una porción de la figura y se amplifica, la figura que resulta es semejante a la figura original. El segundo tipo se refiere a que si se toma una porción de la gráfica y se amplifica la imagen que resulta conserva sólo algunos aspectos de la imagen original, figura 44

Aun cuando la Curva de Koch se ha introducido como modelo simplificado de una costa, el modelo es inaceptable, no porque sea demasiado irregular sino porque su irregularidad es demasiado sistemática en comparación con una costa. Se puede decir que su desorden no es excesivo sino insuficiente. De hecho si se desea modelar una costa por medio de la construcción de Koch, es necesario introducir elementos del caos. Una forma de hacerlo, es orientando el pico del generador de la curva de Koch en forma aleatoria. La figura 9 muestra la curva de Koch, en ella el pico del generador se orienta hacia afuera de la figura. Cuando se construye en forma aleatoria la curva, el pico puede orientarse hacia un lado o hacia el otro lado (figura 43).

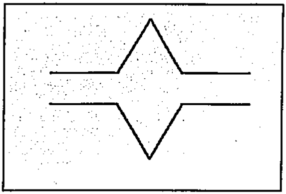


Fig. 43: Generador Aleatoria

Una variante en la construcción de la Curva de Koch se presenta si se modifica el ángulo del generador. Originalmente el ángulo que forma con la horizontal es de 60°, cuando se varía el ángulo y simultáneamente la elección del pico se aleatoriza. La curva modela de una manera mejor el contorno de una costa, sin embargo para realizarlo es recomendable utilizar algún lenguaje de programación y la computadora. La figura 44 muestra una porción de la curva de Koch generada con un ángulo diferente a la figura original y otra porción de una curva donde se modificó el ángulo y se aleatorizó la orientación del pico (figura 44).

Fig. 44: Variaciones de la curva de Koch.

Dado el tiempo en el que se desarrollará el curso y la limitación en el uso de la computadora no se hará la modelación de la costa, sin embargo, el proceso de medición de la longitud de la costa y la semejanza con la longitud de la curva de Koch, se llevarán a cabo durante el curso. Para la medición de la longitud de la costa, se tomará el mapa de la República Mexicana figura 45 y se dividirá en tres porciones: el Golfo de México, la Costa del Pacífico, desde Chiapas hasta Sonora y la costa de la península de Baja California. Para implementar el ejercicio se formaron grupos de alrededor de cinco integrantes y a cada grupo se les dio una de las costas. Los resultados para las longitudes usando diferentes escalas, están resumidos en la Tabla 9.

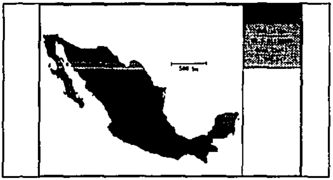
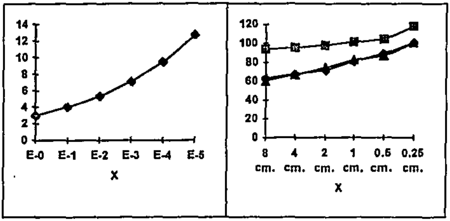


Fig. 45: Mapa de la República Mexicana.

		Longitud de las Costas.		
Etapa	Long. de Escala (cm.).	Golfo	Pacífico	Península
1	8	63.3	94.0	60.4
2	4	67.4	95.4	66.8
3	2	71.6	98.1	74.4
4	1	81.4	101.6	82.6
5	0.50	89.3	104.5	86.7
6	0.25	100.7	118.0	100.5

Tabla 9.

Con los datos obtenidos se construyen las gráficas de la figura 46. Una gráfica presenta la longitud de la curva de Koch contra el número de etapa que aparecen en la Tabla 8 y la otra gráfica contiene la longitud de la escala contra la longitud de la costa Tabla 9. Se notará que en forma semejante con la curva de Koch, la longitud de la costa aumenta al disminuir la escala o sea aumenta etapa tras etapa.



Etapa contra longitud de curva Escala contra longitud costa

Fig.: 46. Gráficas, de la curva de Koch y de las costas.

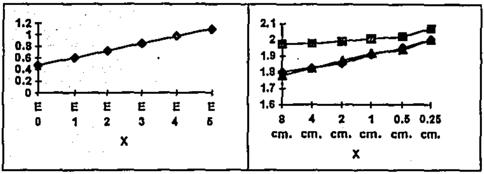
Conexión hacia los Fractales. Existe cierta similitud entre las gráficas de las longitudes de la curva de Koch y la de la costa. Para hacer más explícita la semejanza se construyen y grafican las tablas 10 y 11 que están formadas con el número de etapa y el logaritmo en base diez del perímetro de la curva de Koch y el número de etapa y el logaritmo en base diez de la longitud de las costas (figura 47).

No. Etapa	0	1	2	3	4	5
Log.(Long. Curva Koch).	0.4771	0.6021	0.7270	0.8519	0.9769	1.1018

Tabla 10.

No. Etapa	1	2	3	4	5	6
Log.(Long.Costa Golfo).	1.8014	1.8287	1.8549	1.9106	1.9509	2.0030
Log.(Long.Costa Pacífico)	1.9731	1.9795	1.9917	2.0069	2.0191	2.0719
Log.(Long.Costa Península)	1.7810	1.8248	1.8716	1.9170	1.9380	2.0022

Tabla 11



Log. de la longitud de Koch Log de la longitud de costas

Fig. 47.

Se podrá apreciar que las gráficas son rectas en el caso de la longitud de la costa y la longitud de la curva de Koch, lo que quiere decir que ambas representan cosas similares. ¡Ambas son Fractales! y se puede afirmar que un objeto de la naturaleza es un fractal, si lo es la figura que modela su contorno.

Es de destacarse que la inclinación de la recta o sea la pendiente, está relacionada con lo accidentado de la costa, mientras más sinuosa sea la costa, la recta tendrá una mayor pendiente, lo que quiere decir que la longitud de la costa aumentará mas rápidamente en un caso que en otro o que una costa es más rocosa que la otra. Por otro lado cuando las costas producen la misma pendiente de la recta, aunque sean diferentes en detalles dan la misma impresión cualitativa: "son igual de rocosas".

La pendiente de la recta está estrechamente vinculada a la noción de dimensión fractal, "dos curvas que tienen la misma pendiente, tendrán la misma dimensión fractal". Los fractales poseen una dimensión generalmente fraccionaria ya sea entre cero y uno, entre uno y dos o entre dos y tres.

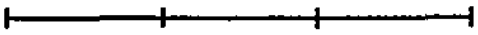
Dimensión Fractal. Otra de las características de los fractales, se refiere a la dimensión fractal. En Geometría Euclidiana es bien sabido que un punto o un número finito de puntos tienen dimensión cero, una línea es una figura de dimensión uno; un plano o cualquier otra superficie ordinaria es una figura de dimensión dos; un cubo o cualquier otra figura sólida, tiene dimensión tres. En Geometría Fractal, la dimensión D nos da el grado de irregularidad o interrupción, el grado de rugosidad o fragmentación, de una estructura fractal. La dimensión fractal, puede ser una fracción simple como: 1/2, 3/5; un número irracional por ejemplo; log 4/log 3 = 1.2618, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, etc.; o incluso un número entero uno o dos, sin parecerse en nada a una recta, ni a un plano. Ciertas curvas planas muy irregulares tienen una dimensión fractal entre uno y dos; las superficies rugosas o llenas de convulsiones tienen dimensión entre dos y tres; y los polvos sobre una recta (Polvos de Cantor) tienen una dimensión que se encuentra entre cero y uno.

Gran parte de los objetos naturales son sistemas, en el sentido de que están formados por muchas partes distintivas organizadas por fenómenos de carácter cooperativo. La dimensión fractal describe un aspecto de esa regla de articulación.

Existen varias definiciones de dimensión fractal, una de éstas definiciones es debida a Hausdorff (1919) y elaborada por Besicovitch, la fórmula es $Nr^D = 1$, donde: N es el número de componentes lineales; r es el factor de escala y D la dimensión. Cuando en la expresión dada se despeja la dimensión se tiene: D = log N/log (1/r).

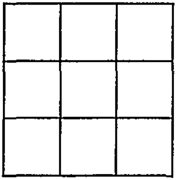
La dimensión fractal es un concepto más complicado, sin embargo al aplicar la relación anterior a diferentes situaciones, la fórmula se verifica, como se muestra a continuación:

i) en el caso de un segmento de recta, se tiene que la dimensión D = 1.



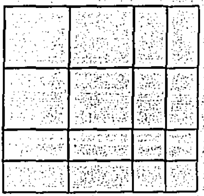
N = 3 y r = 1/3, se verifica que $Nr^D = 1$, ya que $3(1/3)^1 = 1$

iia). Si se parte de una superficie plana, donde D = 2.



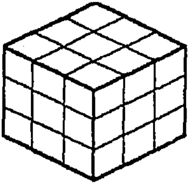
$N = 9$, $r = 1/3$. Entonces al aplicar $Nr^D = 1$, se tiene que $(9)(1/3)2 = 1$

iib). Otro ejemplo en $D = 2$.



$N = 6.25$, $r = 1/2.5$, $Nr^D = 1$, $(6.25)(1/2.25)^2 = 1$

iii). Cuando $D = 3$, se tienen cuerpos sólidos como el caso de un cubo.



$N = 27$, $r = 1/3$, $N(1/r)^3 = 1$, entonces $27(1/3)^3 = 1$, y se verifica la fórmula.

De lo anterior, es de esperarse que la dimensión esté dada por la relación:

$$D = \log N/\log(1/r)$$

Entonces al aplicarla en diferentes situaciones, se obtiene la dimensión fractal. En el caso de los Polvos de Cantor, se tiene que su dimensión es: $D == \log 2/\log 3 = 0.6309$

A partir de las dimensiones encontradas en estos generadores de fractales, se puede observar que a mayor número de elementos en el generador, la dimensión del fractal aumenta, entonces se puede pensar que la dimensión mide qué tan "quebrada" está la figura fractal, o también se puede pensar que la dimensión fractal aumenta con un número de picos de su generador, en dimensiones entre uno y dos. Para dimensiones entre dos y tres, se mide el grado de rugosidad de una superficie, mientras que para dimensiones entre cero y uno, se tendrá el nivel de rupturas de la estructura fractal.

El concepto puede verse intuitivamente de la siguiente manera. Cuando en una curva aumenta el número de picos más rápidamente en una construcción que en otra, aumenta la dimensión fractal. Por ejemplo si consideramos los generadores de la figura 48, las curvas fractales que generarian tendrán una dimensión fractal.

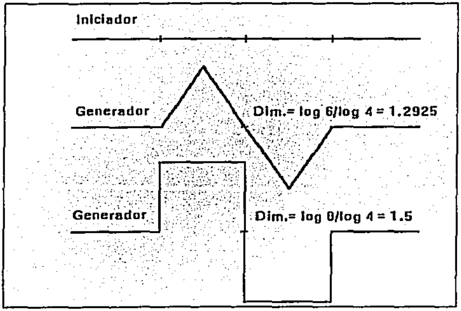


Fig. 48 Dimensión Fractal con dos generadores.

Se puede interpretar como que a medida de que la curva tiene un mayor número de dobleces o picos, aumenta la dimensión fractal, sin llegar a ser una superficie. En el caso de fractales con dimensiones entre uno y dos el significado sería de superficies rugosas, también se puede decir a medida que aumenta la dimensión la superficie resulta más rugosa.

Resumen.- En esta sección se presentaron los materiales desarrollados y se incluyó una discusión de su elaboración para la mejor implementación del curso sobre fractales. En el siguiente capítulo, el último de la tesis, se discuten las conclusiones y recomendaciones. Al final se presentan los apéndices del trabajo y la bibliografía correspondiente.

CAPITULO V

DISCUSION, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Este capítulo contiene una discusión de las respuestas que los alumnos dieron al cuestionario que se les aplicó al final del curso sobre fractales, el total del grupo fue de 34 alumnos, de los cuales 30 de ellos dieron respuesta al cuestionario. Después se presentan las conclusiones y al final se propone una serie de recomendaciones para la implementación de los temas de la matemática contemporánea al bachillerato, contemplando el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza como auxiliar didáctico. Al discutir las recomendaciones pedagógicas se hacen también recomendaciones para investigaciones futuras.

Discusión. El cuestionario (Apéndice A) contiene 13 preguntas. Hemos dividido la discusión del cuestionario en grupos de preguntas afines para facilitar la interpretación de sus datos. El grupo uno, Geometrías no Euclidianas, consta de las dos primeras preguntas y con ellas se quiere observar si los alumnos captaron los fundamentos que dieron origen al surgimiento de las Geometrías no Euclidianas y si podían establecer algunas diferencias entre estas Geometrías y la Geometría de Euclides. En el grupo dos, Relación entre la Geometría Clásica y Geometría Fractal (preguntas tres y seis), se persigue observar si los alumnos relacionan la Geometría Clásica y la Geometría Fractal y pueden establecer diferencias entre ellas. El grupo tres, Geometría Fractal y sus propiedades, contiene las preguntas 4, 5, 7, 8, 9 y 10, en ellas se interroga al alumno sobre lo que cree que son los fractales, cuales son sus propiedades y la utilidad que le encuentran. En el grupo cuatro, impacto de la Geometría fractal en el alumno, en el se pretende investigar hasta qué punto el tema de fractales fue del agrado del estudiante, (preguntas once y doce). Finalmente, el grupo cinco, evaluación del curso (pregunta trece), intenta que el alumno evalúe al profesor en la impartición del curso y presentación del contenido. Los datos se discuten en los párrafos siguientes; esta discusión contiene otros datos cualitativos como son las observaciones del instructor y los trabajos que los alumnos realizaron durante las sesiones del curso. Las respuestas dadas al cuestionario aparecen en el apéndice B.

Las Geometrías no Euclidianas tienen como propósito observar en el alumno si percibe que además de la Geometría de Euclides, al modificar los postulados, es posible encontrar otros modelos geométricos y a su vez establecer alguna diferencia entre la

Geometría Euclidiana y las Geometrías no Euclidianas. Así la primera pregunta del cuestionario interroga al alumno sobre lo que motivó el surgimiento de Geometrías no Euclidianas. A pocos alumnos les quedó precisa la idea; únicamente dos alumnos lo hicieron en forma adecuada, en tres casos se dieron respuestas aparentemente sin sentido como "La Geometría se basa en postulados, leyes, etc., creadas por el hombre". Sin embargo en aproximadamente la mitad de los alumnos se encontraron respuestas asociadas con la Geometría Fractal. Una cosa similar ocurrió con las respuestas a la pregunta número dos, donde se pidió a los alumnos que establecieran diferencias entre la Geometría Euclidiana y las Geometrías no Euclidianas, donde casi uno de cada tres alumnos respondieron con argumentos de la Geometría Fractal. En esta pregunta el número de estudiantes que contestó en forma más congruente se aproximó al 50%. Es posible que la razón para que los alumnos ligaran estas preguntas con la Geometría Fractal, haya sido porque a las Geometrías no Euclidianas, se les dedicó en el curso muy poco tiempo en la clase ya que el tiempo se concentró hacia la Geometría Fractal que constituía el objetivo primario del curso. Es evidente que un estudio de las Geometrías no Euclidianas sería de gran provecho, pero su implementación requeriría del alumno un mayor grado de abstracción para su comprensión, por lo tanto en el curso se contempló su inclusión con el único propósito de que el alumno se diera cuenta de la existencia de otros modelos geométricos distintos al de Euclides y cómo habían surgido éstos. Con un antecedente de esa naturaleza se esperaba que los estudiantes observaran que las matemáticas son dinámicas y están en continua evolución, hasta llegar a la Geometría Fractal que es de muy reciente creación y nos permite modelar a la naturaleza. Las siguientes preguntas se encuentran enfocadas a observar en el alumno, los efectos de estos temas en su formación y modo de ver las matemáticas como objeto de estudio.

Relación entre las Geometrías Euclidiana y Geometría Fractal, en la pregunta tres, se pide a los estudiantes que establezcan algunas de las limitaciones que tiene la Geometría Euclidiana para representar objetos de la naturaleza; mientras que en la pregunta seis se les pide establecer algunas diferencias entre ambas Geometrías. Estas dos preguntas pueden relacionarse en sus respuestas así que de acuerdo con esto, la pregunta tres aunque sigue involucrando a la Geometría de Euclides, tiene la intención de que el alumno enfoque su atención hacia la Geometría Fractal y se le pregunta las limitaciones que tiene la Geometría Clásica para modelar algunos elementos de la naturaleza. Aquí se detectaron en los alumnos problemas de orden lógico o problemas de comunicación. En este caso ningún alumno dió un argumento convincente que nos conduzca a deducir que el alumno tiene interiorizadas algunas de las limitaciones que hay para construir elementos de la naturaleza a partir de la

Geometría de Euclides, pero si se observaron respuestas del tipo "no se puede porque sus trazos son rectilíneos", otras son del tipo "describe a la naturaleza toscamente y sólo sirve para hacer planos". Se aprecia que hay un cierto manejo de la terminología sobre fractales pero sin una precisión sobre los significados. Aproximadamente en la mitad de los alumnos se detectó una idea sobre aspectos de la Geometría Fractal.

La pregunta seis busca que el alumno mencione las principales diferencias entre la Geometría Euclidiana y la Geometría Fractal. Por las respuestas dadas, se puede establecer que en la mayoría de los casos, se establece una contrastación adecuada entre los dos modelos geométricos apoyándose en argumentos que son adecuados tales como que la Geometría de Euclides tiene dimensiones enteras, mientras que la Geometría Fractal comúnmente tiene una dimensión fraccionaria. Sin embargo casi en la totalidad de los casos únicamente se mencionó una diferencia entre las dos Geometrías en lugar de las dos diferencias que se le pidieron. Se observó nuevamente que hay un buen número de casos donde se confunde la pregunta con las características que tienen los elementos ya sea de la Geometría Fractal o de la Geometría Euclidiana y que también se encontraron un número significativo de respuestas que no tienen aparentemente relación con la pregunta que se les formuló; como por ejemplo un alumno respondió que "depende de escalas y la no Euclidiana utiliza más de una paralela".

El bloque tres, pretende que el alumno exteriorice los conceptos que sobre Geometría Fractal le fueron significativos durante el curso, así como también poder observar si quedaron en su interior algunos de los elementos que permitieron que esta importante disciplina de la matemática actual viera luz y a su vez rindiera frutos. En la pregunta número cuatro se pide al alumno que explique con sus propias palabras qué es un fractal. Por las respuestas dadas, se puede inferir que para la gran mayoría de los estudiantes queda en mente una idea lo suficientemente clara de lo que son los fractales. Las respuestas generalmente están conectadas con las propiedades que tienen los fractales. Las propiedades de los fractales que más comúnmente enumeraron los alumnos son: la de autosemejanza, que es una figura construida por procesos recursivos, que son de longitud infinita limitada por un área finita y la capacidad de modelar a la naturaleza. Sólo en un par de casos las respuestas están fuera de contexto, por ejemplo un alumno escribió "es la remodelación de una figura geométrica sacada en varias dimensiones". Esta respuesta sugiere que el alumno tiene ciertas dificultades para conectar un conjunto de ideas aparentemente dispersas y que se queda con una idea inicial o con un ejemplo específico de lo que es un fractal.

En la pregunta número cinco, se le pide a los alumnos que mencionen dos factores que permitieron el desarrollo de la Geometría Fractal. Poco más de la mitad del grupo atribuyó este desarrollo a los medios electrónicos de cálculo y la visualización gráfica, que tienen las computadoras, otros casos señalan como un factor a la necesidad de representar a la naturaleza. Sin embargo en un buen número de alumnos se percibe que existe una confusión entre los conceptos de la Geometría Fractal y las Geometrías no Euclidianas, confusión que quizá surja por lo novedoso del tema. Hubo una respuesta que en particular me llamó mucho la atención. Un alumno escribió como respuesta sólo la palabra "sabiduría". Al analizar la respuesta únicamente, la misma no tendría tal vez un significado, pero en particular sé que la respuesta fue dada por un alumno al que le causaron una gran impresión los tópicos sobre Geometría Fractal, motivándole a trabajar con mucha creatividad tanto en el salón de clase como en las actividades extraclase. De hecho fue uno de los alumnos que mejor trabajaron. Al analizar las respuestas a los cuestionarios la impresión entonces se transfirió hacia mi persona ya que esa palabra "sabiduría" encierra un contenido bastante amplio que quizá el alumno no pudo expresar en forma más explicita y que tal vez con más tiempo para el estudio y por medio de una entrevista, se hubiera podido indagar todo el contenido que el alumno le quiso dar a este vocablo.

Las preguntas siete, ocho y nueve pretenden que los alumnos enuncien y/o expliquen con sus palabras algunas de las propiedades que caracterizan a los fractales, por lo tanto en la pregunta que continúa, se les pide que den dos ejemplos de procesos recursivos. En la mayoría de las respuestas mencionan ejemplos de fractales vistos en clase. En esta pregunta se observó que dos estudiantes dejaron la pregunta sin respuesta, otros dos construyeron figuras que no representan fractales y un alumno contestó lo que era un proceso recursivo. Los alumnos que dieron ejemplos sólo mencionaron como ejemplo los Polvos de Cantor, el Triángulo de Sierpinski o la Curva de Koch en su mayoría. Poco menos de la mitad de alumnos argumentaron la respuesta haciendo las gráficas de los fractales. En su mayoría de nueva cuenta fueron los Polvos de Cantor, el Triángulo de Sierpinski y la Curva de Koch los más populares. En general se observó que para los alumnos existe una relación entre procesos recursivos y fractales.

La pregunta número ocho, se refiere al significado de autosemejanza. Aproximadamente en el 70% de los casos, se observó una idea hasta cierto punto clara del concepto de autosemejanza; aunque algunas ocasiones expresado en un lenguaje limitado como cuando algunos alumnos expresaron "es casi igual a la figura original, pero más chica". En un caso se expresó que mediante procesos recursivos se obtienen figuras semejantes. Se encontraron dos casos donde se confundió la respuesta y dos casos donde no se encontró sentido a las respuestas dadas.

Posteriormente se les pidió que explicaran la propiedad que tienen los fractales de poseer una longitud infinita, encerrada en un área finita. Se encontró que 20 alumnos que representan más del 60% del total de alumnos de la clase, si tenían una idea clara de la respuesta; sin embargo su lenguaje para describir la propiedad es todavía limitada, porque la respuesta más común fue "los fractales pueden aumentar su longitud conforme se aumentan las etapas y esta puede extenderse sin sobrepasar un área determinada". En este caso tres alumnos no dieron respuesta, tres respondieron sin un significado claro y tres más confunden la pregunta con otra cuestión asociada a los fractales.

La pregunta número diez cuestionó a los alumnos sobre la utilidad que se encontraba en los fractales. Con los problemas propios para expresar las ideas en un lenguaje claro, se puede decir que casi todos los alumnos le encontraron utilidad a la Geometría Fractal y sólo en un caso se aprecia una respuesta sin sentido, ya que dice "poder sacar cálculos en dimensiones grandisimas". Sin embargo de los que responden en forma más adecuada, la mitad del grupo indica que la Geometria Fractal sirve para modelar a la naturaleza, argumento que fue muy puntualizado en clase. Algunos alumnos indicaron en sus respuestas, por ejemplo que era útil para desarrollar la imaginación y la creatividad, como un arte y más trabajo para el cerebro. Desde mi punto de vista los alumnos fueron más allá de lo que se les dijo y motivados por el tema, conjuntamente con los materiales presentados en clase y los trabajos que realizaron, formaron sus propias conjeturas sobre el tema. Aunque este tipo de respuestas fue alrededor de un 20% de los alumnos.

Las siguientes preguntas, bloque cuatro, tienen como propósito que los estudiantes emitan su opinión sobre el grado de aceptación o rechazo que les causó el tema. Así la pregunta número doce les pide que mencionen dos cosas que les gustó y dos que no les gustó del curso sobre fractales. La gran mayoría manifiesta que lo que les gustó del curso, fueron los materiales que se presentaron tanto en diapositivas como en acetatos y las presentaciones en la computadora; también manifestaron en un menor grado, que les gustó porque se enfrentaban con algo nuevo que generaba cosas inesperadas de gran belleza. Un alumno manifestó su gusto al descubrir un lado interesante de las matemáticas. Entre las cosas que manifiestan no haberles gustado, en aproximadamente un 25% de los casos, fue que se vieron fórmulas, que les resultaban complicadas y no les entendían o porque en ocasiones se requiere de mucho tiempo para desarrollar los fractales. Se mencionan otros aspectos que no les gustó del tema, entre ellos se destaca que finalmente no le habían entendido o que no les había gustado medir mapas entre otras cosas, pero fueron respuestas únicas.

Al preguntarles si le recomendarían a un amigo que tomara un curso de fractales, en la totalidad de los casos se contestó afirmativamente y al dar el porqué, éste fue desde un simple sí por lo fantástico y novedoso del tema, que permite modelar a la naturaleza, que desarrolla habilidades y fomenta la creatividad, hasta considerar que es la geometría del futuro. Lo anterior manifiesta que el tema impactó sobremanera a los estudiantes.

La última pregunta, única en el bloque cinco, tuvo como propósito que el alumno llevara a cabo una evaluación del desarrollo del profesor en el curso. Más o menos un 30% de los alumnos indicaron que no tenían ninguna sugerencia y que todo estaba bien. Un importante sector del grupo, sugirió que hubiera más materiales tanto para presentar en clase como para proponer como actividades. También hubo otras sugerencias de otra índole: que se explicara con términos más fáciles, que la clase fuera más dinámica o enseñar a dibujar con fractales, aunque estas sugerencias resultaron de tipo individual.

El apéndice B es una tabla, que presenta el concentrado de las respuestas que los alumnos dieron a cada una de las preguntas del cuestionario.

Conclusiones y Recomendaciones. Después de una discusión de los resultados observados en las respuestas formuladas por los alumnos, al cuestionario y con las observaciones que el autor realizó en el salón de clase, al estar exponiendo el tema de Geometría Fractal, se puede decir que el material de Geometrías no Euclidianas, en general fue de difícil acceso a los alumnos. Esto se debe quizá a que por un lado se le dedicó muy poco tiempo durante el curso, pero también porque para su comprensión se requiere de un alto grado de abstracción, que en el modelo de Van Hiele ocuparía el último nivel y como ya Estrada(1992) documentó, los alumnos del bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades no se encuentran en ese nivel. Ya en el terreno de la Geometría Fractal, fue difícil para los alumnos comprender cuáles son las limitaciones de la Geometría Euclidiana para modelar a la naturaleza, sin embargo se nota que en general los alumnos se apropiaron de varios conceptos de la Geometría Fractal, como el concepto de recursividad, figura autosemejante, conceptos que resultan muy importantes en dicha geometría.

En general creo que los alumnos quedaron gratamente impresionados con los conceptos vertidos durante el curso y mostraron mucho interés tanto en la clase como en las actividades que de ella se derivaron. No obstante al hablar de conceptos matemáticos, como iterar una función sencilla, por tabulación de los valores o el verificar que un fractal posee una longitud infinita, limitada por un área finita, el alumno por lo general manifestó cierto rechazo a la temática, sin embargo ese mismo concepto visto geométricamente, fue entendido mejor por los alumnos. De aquí la necesidad de explorar más el uso de la visualización en el salón de clases (Goldenberg 1989). Se siente que la inclusión de estos temas en el currículo del bachillerato, junto con auxilio de la computadora posiblemente motivará al alumno para aprender esta área de las matemáticas.

Aún cuando la propuesta se implementó dentro de un curso de geometría elemental, surge un cierto problema cuando se trata de ubicar los tópicos de la matemática actual, aquí sugeridos, en los contenidos programáticos de los cursos. Por su naturaleza el material puede ser esparcido en varias áreas dentro del currículo del bachillerato, para que con ello el alumno paulatinamente adquiera la terminología que generan los sistemas dinámicos, la teoría del caos y la geometría fractal. Así por ejemplo el material de iteración y análisis gráfico puede ser visto en los cursos donde se aborda el tema funciones y sus gráficas, aquí pueden generarse muy bien los conceptos de órbita de un punto, punto fijo tractor, punto fijo repulsor y aproximarse al concepto de límite. En un curso de álgebra se puede generar el concepto de fractal a través del triángulo de Pascal, como una aplicación muy simple de autómatas celulares. Al final del curso de geometría elemental, se puede explotar el concepto de recursión a partir de elementos geométricos para visualizar las maravillosas estructuras de los fractales. Al estar hablando de probabilidad, la teoría del caos puede ser un gran auxiliar mediante el juego del caos y sus modalidades. En un curso de cálculo pueden construirse las monstruosas curvas que aún siendo continuas no tienen derivada en ninguno de sus puntos. Al estar estudiando sucesiones, se puede llegar a la construcción de sucesiones acotadas y no acotadas al investigar el perímetro y el área de una figura fractal. En cursos de computación el material resulta de un gran valor ya que los procesos de iteración y recursión son muy sencillos de realizar con una computadora personal, incluso con una calculadora gráfica; un programa relativamente simple en lenguaje BASIC, PASCAL, LOGO, etc. de unas cuantas lineas, permite calcular cientos o miles de iteraciones de una función simple, o bien se pueden construir figuras a partir de recursiones con elementos geométricos simples. También el material podría ser adaptable para un curso optativo para alumnos sobre tópicos de las matemáticas contemporáneas, o bien como material de apoyo para un curso de formación y actualización de profesores sobre esa temática. Otros estudios similares a éste que investiguen cuál es la mejor opción de todas las mencionadas son necesarios.

En las aplicaciones que se señalan en un párrafo anterior es de destacarse la importancia que tienen las nuevas tecnologías, como son la computadora y la calculadora gráfica como auxiliares didácticos. Por su gran capacidad para realizar cálculos aunado al poder de visualización de resultados en forma gráfica si así se requieren, hacen de estos dispositivos herramientas muy valiosas para la generación de conceptos matemáticos con los alumnos en el proceso de construcción del conocimiento.

Por ejemplo cuando se analizó la construcción de la curva logística, se tuvo la oportunidad de verificar que la teoría de los fractales y otros tópicos de la matemática contemporánea se desarrollaron gracias a los avances tecnológicos en el campo de la computación electrónica. En efecto cuando se construye la curva logística, que es la función cuadrática de segundo grado $f(x) = \lambda x(1-x)$, para generar su gráfica, si λ cambia para valores entre cero y cuatro con incrementos de un décimo y realiza la iteración de la función 300 veces para cada valor de λ, es necesario repetir el proceso de cálculo 12,000 veces, empleando una calculadora gráfica alrededor de ocho minutos, presentando resultados parciales en forma gráfica por instrucciones del programador. Sin embargo aún es una aplicación limitada, ya que el número de iteraciones de la misma función para una mejor visualización es mucho más elevado en otros programas con computadora personal empleando tiempos que dependen del equipo usado. Por lo que es fácil comprender que sin las computadoras, la ciencia de los fractales muy posiblemente aún no tuviera luz.

En virtud de ser una primera experiencia, el curso se diseñó para que las actividades que desarrollaran los alumnos fuera con papel y lápiz. Sin embargo se contempla que en un futuro medio sea desarrollado el curso con apoyo de calculadoras gráficas y/o computadoras para que sean manipuladas por los alumnos, a la vez capacitados para el uso adecuado de dichas herramientas. Sin embargo, también hace falta documentar qué sucede en un curso como el propuesto en el que los alumnos tienen acceso libre e inmediato a la tecnología.

Con la finalidad de verificar que la longitud o perímetro de una curva fractal es infinita, se planteó el problema de medir la longitud de la curva de Koch, como antecedente a la medición de la longitud de una costa. Se enfatizó en los distintos generadores de la curva de Koch y se dió inicio a la medición de la curva a partir de un triángulo equilátero que fue la etapa cero continuando hasta la etapa cuatro. En cada etapa, se contó el número de lados, se "midió" la longitud del lado y se encontró la longitud (perímetro) de la curva, (producto del número de lados por su longitud), también se encontró el área que encierra la curva tratando en ambos casos de llegar a un patrón o fórmula para encontrar el perímetro y el área de la curva en cualquier etapa. Esta parte resultó ser de difícil acceso a los alumnos, sólo unos cuantos siguieron el proceso y algunos manifestaron no entender muchas cosas. Esto sugiere que es necesario preparar a los alumnos en la manipulación algebraica para poder representar los patrones simbólicamente y con ello puedan obtener mejor provecho del curso.

Otro aspecto que se manejó con los alumnos, con la finalidad de vincular el contorno de una costa con fractales por medio de la medición de su longitud, fue que supieran qué es el logaritmo de un número, entendieran su significado, obtuvieran el logaritmo de un número y el proceso inverso (conocido el logaritmo de un número encontrar el número). Esta parte del curso resultó poco alentadora a los alumnos, sin embargo la mayoría supo cómo obtener el logaritmo de un número usando la calculadora.

Fue notorio en los alumnos una buena disposición hacia la construcción de figuras novedosas e interesantes. En el apéndice D se presentan algunos de los muchos trabajos que los alumnos desarrollaron durante el curso, en ellos se aprecia la creatividad de los alumnos, la que puede ser incrementada con los contenidos novedosos de la Geometría fractal.

También la presentación de imágenes fractales por medio de diapositivas, en los alumnos resultó impactante y estuvieron de acuerdo con que "los fractales son un verdadero nexo entre la ciencia y el arte". Por ejemplo con la presentación de la imagen del conjunto de Mandelbrot, con una serie de amplificaciones, se contó con la oportunidad de verificar la propiedad de autosemejanza de tipo estadístico que tienen muchos fractales y que no es visible en lo inmediato. Fue aprovechada la oportunidad para comentar con los alumnos que las figuras se obtenían a partir de iterar una función cuadrática, pero en el campo de los números complejos. Lo anterior creó en algunos de ellos la inquietud de conocer ese campo, aunque fue reacción de unos cuantos.

Un cambio en los contenidos curriculares y en los métodos de enseñanza, que incorpore temas de las matemáticas contemporáneas y el uso de las nuevas tecnologías como apoyo didáctico, requiere a su vez de un replanteamiento de la evaluación del aprendizaje de los alumnos. Se debe reflexionar el propósito de la evaluación para que acorde con ello se encuentre un método adecuado de evaluación de los contenidos del conocimiento de los alumnos. En cursos tradicionales de matemáticas, es común que la evaluación se realice observando si el estudiante es capaz de aplicar un algoritmo a un problema dado, que requiere del estudiante una respuesta esperada. La evaluación no debe ser considerada como un fin de las experiencias educacionales, más bien debe servir de medio para alcanzar los objetivos educacionales.

La evaluación es la estimación comprensiva del conocimiento de los estudiantes (Webb. NCTM. 1993). Con un nuevo enfoque de enseñanza y con nuevos contenidos, la evaluación debe ser cambiada. En las nuevas formas de evaluar deben considerarse todas las actividades que el estudiante realiza, las habilidades que desarrolla, la capacidad de adaptación ante nuevas situaciones. El resultado de la evaluación debe servir al profesor para una retroalimentación de la instrucción. Martínez (1993) propone tres posibles alternativas congruentes con la reforma en la Educación Matemática para la evaluación de los alumnos.

Los cambios contenidos en cualquier propuesta sólo son realizables si quienes deben implementarlos se encuentran en condiciones para ello; esto conduce a la necesidad de programas sobre formación y actualización de profesores en los contenidos de la propuesta de éste trabajo, en los métodos de evaluación acordes con los nuevos enfoques y en el uso de la tecnología como apoyo didáctico. Es de esperarse que sin programas de formación de profesores, sin apoyo de las nuevas tecnologías y sin capacitación sobre el uso de éstas como apoyo didáctico en el salón de clase, difícilmente la propuesta es viable.

Respecto al curso de fractales que se impartió, en general se detectaron por parte de los alumnos actitudes positivas hacia el curso y hacia el uso de las tecnologías empleadas durante el mismo. En este renglón es necesario manifestar que para la realización del curso, se contó con el equipo suficiente.

Finalmente se puede manifestar que en virtud de los cambios esperados para la adecuación de los contenidos y metodologías a la época en que vivimos, este trabajo es una contribución a la reforma en la Educación Matemática, en particular para el nivel del bachillerato, que se realiza en nuestro país.

APENDICE A

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL SUR
CUESTIONARIO DE CONCEPTOS DE GEOMETRIA FRACTAL.

Nombre del alumno: ____

Asignatura: ______________________________ Grupo: ____________________

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada una de las preguntas, antes de contestar reflexiona y escribe las respuestas, sin importar el orden, en las hojas adicionales que se te proporcionan. Trata de ser lo más explícito posible, puedes usar diagramas o dibujos si lo consideras necesario.

1.- ¿Qué motivó el surgimiento de las geometrías no Euclidianas?
2.- ¿Cuál es la diferencia entre la geometría euclidiana y las geometrías no Euclidianas?
3.- ¿Qué limitaciones tiene la geometría de Euclides para modelar ciertos aspectos de la naturaleza, como por ejemplo, las nubes, las montañas, las plantas, los ríos, etc.?
4.- Explica con tus propias palabras qué es un fractal.
5.- Menciona dos factores que hayan permitido el desarrollo de la geometría fractal
6.- Enuncia dos de las principales diferencias entre la geometría de Euclides y la geometría fractal.
7.- Da dos ejemplos de procesos recursivos.
8.- ¿Qué significa para ti que un fractal sea una figura autosemejante?
9.- Explica con tus propias palabras la siguiente propiedad de los fractales, "los fractales poseen una longitud infinita encerrada en un área finita".
10.- ¿Qué utilidad le encuentras a la geometría fractal?
11.- Menciona dos cosas que te hayan gustado y dos que no te hayan gustado del curso sobre fractales y explica tu respuesta.
12.- Le recomendarías a un amigo que tomara este curso si se pudiera, ¿por qué?
13.- ¿Qué sugerencias le harías al instructor de este curso?

APENDICE B

Respuestas de los alumnos al cuestionario sobre conceptos de Geometría Fractal.

1.- ¿Qué motivó el surgimiento de las geometrías no Euclidianas? "Se debió a la necesidad de modelar (representar), (imitar), (describir), a la naturaleza"; "Que a los matemáticos siempre les ha interesado estar investigando (pensar) o inventando cosas o no se conforman con la geometría Euclidiana"; "Que la geometría Euclidiana tenía proposiciones (postulados) que no se cumplían (contradicción) en ciertos casos"; "Describir, (desarrollar), (descubrir) las dimensiones que nuestros sentidos no pueden describir (percibir)"; "Análisis del quinto postúlado"; "La geometria Euclidiana no era suficiente para responder preguntas respecto a otro universo de geometria."
2.- ¿Cuál es la diferencia entre la geometría euclidiana y las geometrías no euclidianas? "La Geometria Euclidiana usa fórmulas, las Geometrías no Euclidianas usa procesos recursivos"; "Muchas paralelas en una y sin paralelas otras (mencionaron Riemann. y Lobachevsky) fractal procesos recursivos"; "En las Geometrías Euclidianas no se puede hacer trazos de la naturaleza (solo planos) y con la Geometría no Euclidianas ya se puede hacer"; "Tamaño o escalas caracteristicas, describe objetos hechos por el hombre tiene dimensiones 1, 2, 3"; "Geometría Euclidiana paralela única; Riemann sin paralelas; Lobachevsky muchas paralelas"; "No tiene explicaciones o utilidad en la naturaleza."
3.- ¿Qué limitaciones tiene la geometría de Euclides para modelar ciertos aspectos de la naturaleza, como por ejemplo, las nubes, las montañas, las plantas, los ríos, etc. "Es deficiente ya que para modelar la naturaleza se necesita de procesos recursivos como las que tiene la Geometría Fractal"; "Basada en fórmulas y trazos con los que no puede lograrse una forma"; "Aplica (hay), (admite) dimensiones 1, 2, 3"; "No puede porque sus trazos son rectilineos"; "Describe la naturaleza toscamente y sirve para hacer planos."
4.- Explica con tus propias palabras qué es un fractal. "Figura autosemejante"; "Figura hecha por procesos recursivos"; "Aumenta la longitud al aumentar el número de etapas"; "En un área encierra la longitud infinita"; "Tener capacidad y destreza de poder modelar por un proceso (recursivo) a la naturaleza"; "Es una remodelación de una figura geométrica sacada en varias dimensiones"; "Geometría y arte"; "Figura sumamente bella formada después de repeticiones."
5.- Menciona dos factores que hayan permitido el desarrollo de la geometría fractal. "Geometría Euclidiana base de esta geometria idea (necesidad) de representar (ilustrar) a la naturaleza., idea de procedimiento recursivo"; "La computadora (calculadora) es indispensable para su realización"; "La aparición de muchas geometrías no Euclidianas"; "Encontrar una nueva geometría"; "Contradecir al 5° postulado y modelar la naturaleza"; "Sabiduria"; "Llegar a hacer figuras autosemejantes y procesos recursivos."

6.- Enuncia dos de las principales diferencias entre la geometría Euclidiana y la Geometría Fractal. "La geometría. fractal modela la naturaleza"; "La geometría. fractal se basa en procesos recursivos"; "La geometría. fractal se basa en tamaños o escalas"; Una se desarrolla con tamaños y escalas (características), la otra no se basa en tamaños o escalas"; "Geometría Euclidiana con más de 2000 años, Geometría Fractal alrededor de 10"; "Se describe con fórmulas una y la fractal con algoritmos"; "Geometría Euclidiana dimensión 1, 2 ó 3, Geometría Fractal dimensión fraccionaria"; "Geometría Euclidiana una paralela, Geometría fractal más de una recta"; "Geometría Euclidiana para construir edificios (planos), Geometría Fractal para describir la naturaleza"; "Depende de escalas y la no Euclidianas utiliza más de una paralela."
7).- Da dos ejemplos de procesos recursivos. "Polvos de Cantor"; "Triángulo de Sierpinski"; "Curva de Koch."; "Variación a la construcción de Koch"; "Juego del Caos"; "Árbol"; En la respuesta el alumno presentó gráficas de fractales del Triángulo o cuadrado de Sierpinski, curva de Koch, modificación a la curva de Koch, o los Polvos de Cantor; "Repetir una y otra vez un mismo procedimiento"
8).- ¿Qué significa para ti que una figura sea autosemejante?. "Por medio de procesos recursivos se obtienen figuras semejantes"; "Cuando se fracciona, la fracción es igual o semejante al original"; "Que por más pequeña que sea una de sus partes, siempre tiene una semejanza con la figura inicial (al amplificarla)"; "La parte se parece (es igual) al todo"; "Es casi igual a la figura original, pero más chica"; "Que siempre se parece a la figura base"; "Los fractales vienen de los procesos recursivos
9.- Explica con tus propias palabras la siguiente propiedad de los fractales, "los fractales poseen una longitud infinita encerrada en un área finita" "Los fractales pueden aumentar su longitud (área) conforme aumentan las etapas y esta puede extenderse sin sobrepasar un área determinada"; "Los fractales pueden aumentar su longitud (área) conforme aumentan las etapas y esta puede extenderse sin sobrepasar la circunferencia"; "La figura aumenta pero no sale de un círculo, la figura va a continuar infinita"; "Por más que aumenta su longitud no rebasa un cierto límite"; "Los procesos recursivos se repiten una y otra vez"; "Se limita por la longitud de la hoja"; "Dentro de un área normal se puede hacer lo que sea"; "Área cerrada, contracción infinita"
10.- ¿Qué utilidad le encuentras a la geometría fractal? Con ella se acabaron los límites para dibujar y configurar cosas por medio de trazos"; "Sirven para facilitar (surgen para) la representación de la naturaleza, (con más precisión)"; "Útil para medir cosas o figuras que no se pueda hacer con la geometría Euclidiana"; "Se pueden hacer muchas cosas"; "Proyecciones para cine (televisión)"; " Nos ayuda a hacer dibujos animados y paisajes por computadora"; "Es como arte"; "Desarrolla imaginación y creatividad"; "Poder sacar cálculos en dimensiones grandísimas (distintas)"; "Más trabajos para el cerebro"

11.- Menciona dos cosas que te hayan gustado y dos que no, del curso de fractales, explica.

"Me gustó porque es algo nuevo y porque me entretuve haciendo fractales (que parecían muy difíciles)"; "La geometría. fractal sobre la geometría Euclidiana"; "Me gustaron los helechos y las diapositivas (todo el material) fue novedoso y llama la atención (por el sin fin de figuras) (las figuras son impresionantes)"; "Geometría muy interesante y bonita (me gustó)"; "No me gusto porque en ocasiones se requiere mucho tiempo y paciencia (no la tengo)"; "No me gusto cuando se vieron fórmulas, son aburridas (complicado) (no entendí)"; "No le entendí a la mera hora (en muchas cosas)"; "No me gusto que haya habido poco tiempo (que dio clase)"; "Me gustó descubrir un lado interesante de las matemáticas"; "Me gusto ver que con procesos recursivos puede crear formas inesperadas"; "No me gusto medir los mapas": "No me gusto porque son procesos monótonos y hay que tener paciencia"; "Me gusto saber que con una computadora podemos crear cosas inimaginables"; "No me gustaron las clases de teoría (largas y aburridas)"; "Me gustó conocer cosas que nuestros ojos tienen limitaciones para ver"

12.- Le recomendarías a un amigo que tomara el curso de fractales. ¿Porque?

"Si la recomendaría, porque es fantástico modelar cualquier cuerpo (cosas del medio en que vive la naturaleza)"; "Si, porque es algo que desarrolla habilidades (creatividad) y es bonito"; "Si, porque es interesante e importante (hay muchas cosas por hacer)"; "Si, porque se pueden hacer manualmente o con computadora"; "Si, por conocer un nuevo (y diferente) camino hacia la geometría fractal"; "Si, porque es muy bonita y sorprendente, (impresionante), se ven cosas que no se imaginaba uno (le gustaría mucho)"; "Si, le ayudaría si va a una carrera donde se realicen imágenes de la realidad"; "Si, porque es una geometría que se usará en el futuro (es muy interesante"

13.- ¿Qué sugerencias le haces al instructor del curso de Fractales?

"Ninguna, (todo está bien). 2, 3, 5, 13, 19, 26"; "Que hubiera más figuras para construirlas (me gustaron todas las figuras proyectadas)"; "Más fractales para proyectar"; "Explicar con términos más fáciles"; "La clase más dinámica"; "Que escriba sobre fractales en español y los ponga al alcance de los estudiantes con asesoría y cursos (aunque cobre)"; "Traer a diario la computadora"; "Más explicación sobre otras geometrías"; "Enseñar a dibujar con fractales"

NOTA: A lo largo del cuestionario, varios alumnos al dar respuesta a las preguntas, manifestaron ser privilegiados por haber conocido el tema.

APENDICE C

Programa que genera un árbol en lenguaje LOGO (figura 12).

```
TO ARBOL1 :L
BK :L
FD :L
IF :L < 2 THEN [STOP]
LT 45
FD :L
ARBOL1 :L/2
BK :L
RT 90
FD :L
ARBOL1 :L/2
BK :L
LT 45
END
```

Arbol con variación del ángulo (figura 12).

```
TO ARBOL 2 :L :A :P
IF :P = 0 THEN [STOP]
LT :A
FD 2* :L
ARBOL2 :L :A :P-1
BK 2* :L
RT 2 * :A
FD :L
ARBOL2 :L :A :P-1
BK :L
LT :A
END
```

Modalidad al triángulo de Sierpinski (figura 14).

```
TO CURVA :N :L :P
IF :N = 0 THEN [FD :L STOP]
LT 60 * :P
```

```
CURVA :N-1 :L/2 (- :P)
RT 60 * :P
CURVA :N-1 :L/2 :P
RT 60 * :P
CURVA :N-1 :L/2 (- :P)
LT 60 * :P
END
```

Triángulo de Sierpinski (figura 14).

```
TO TRI :L :N1
IF :NI = 0 THEN [STOP]
REPEAT 3 [TRI : L/2 : N1-1 FD :L RT 120]
END
```

Curva de Koch.

```
TO KOCH :L :N
IF :N = 0 THEN FD :L STOP
KOCH :L/3 :N-1 LT 60
KOCH :L/3 :N-1 RT 120
KOCH :L/3 :N-1 LT 60
KOCH : L/3 :N-1 LT 60
END
```

Curva de Koch con variación del ángulo (figura 44).

```
TO KOCHAN :L :N :A
IF :N = 0 THEN FD :L STOP
KOCHAN :L/3 :N-1 :A LT :A
KOCHAN :L/3 :N-1 :A RT :A * 2
KOCHAN :L/3 :N-1 :A LT :A
END
```

Curva de Koch con variación del ángulo y generador aleatorio del pico (figura 44).

```
TO KOCHANA :L :N :A
IF :N =-1 [STOP}
IF :N = 0 [FD :L]
MAKE ".H RANDOM 2
```

```
IF H = 1 [KOCHANA :L/3 :N-1 :A RT :A
        KOCHANA :L/3 :N-1 :A LT :A * 2
        KOCHANA :L/3 :N-1 :A RT :A
        KOCHANA :L/3 :N-1 :A]
IF H = 2 [KOCHANA :L/3 :N-1 :A LT :A
        KOCHANA :L/3 :N-1 :A RT :A * 2
        KOCHANA :L/3 :N-1 :A LT :A
        KOCHANA :L/3 :N-1 :A]
```

Programa en lenguaje BASIC que cálcula y gráfica las órbitas de la función $f(x) = \lambda x(1-x)$, para un valor de λ y un valor inicial X_0 (figuras 22 a 31).

```
10 INPUT "PARAMETRO A, VALOR INICIAL X0", A, XO
20 L = 10
30 W = 180
40 M = 1
50 IMAX = 100
60 SCREEN 9
70 REM TRAZADO DE LA IDENTIDAD Y LA FUNCION
80 LINE 8L + W, L) - (L, L+W)
90 FOR I = 1 TO W
100     XN = I / W
110     FOR K = 1 TO M
120             XN = A * XN * (1 - XN)
130     NEXT K
140     LINE -(I + L, L + W * (1 - XN))
150 NEXT I
160 REM INICIO EN X0
170 XN = X0
180 PSET (L + W * XN, L + W)
190 FOR I = 1 TO IMAX
200     REM EVALUACION DE LA FUNCION
210     FOR K = 1 TO M
220             XN = A * XN * (1 - XN)
230     NEXT K
240     REM TRAZADO DE LAS RECTAS HORIZONTAL Y VERTICAL
250     LINE -(L + W * X0, L + W * (1 - XN))
```

```
260    LINE -(L + W * XN, L + W * (1 - XN))
270    X0 = XN
280 NEXT I
290 END
```

Programa en BASIC que genera el triángulo de Sierpinski (figura 13).

```
10 DEFINT X-Y
15 SCREEN 9
20 FOR Y = 0 TO 255
30      FOR X = 0 TO 255
40              IF (X AND Y) = 0 THEN PSET (X + 30, Y)
50      NEXT X
60 NEXT Y
```

Programa en BASIC para general el triángulo de Sierpinski (figura 13).

```
10 DEFINT X-Y
15 SCREEN 9
20 FOR Y = 0 TO 255
30      FOR X = 0 TO Y
40              IF (X AND (Y - X)) = 0 THEN PSET (X + 158 - .5 * Y, Y)
50      NEXT X
60 NEXT Y
```

Programa para la calculadora TI81 Texas Instrument que genera el juego del CAOS, con 2000 puntos (figura 38).

```
Prgm: CAOS
   :Cl rDraw
   :0->Xmin
   :1->Xmax
   :0->Ymin
   :1->Ymax
   :Rand->X
   :Rand->Y
   :0->I
   :Lbl 1
   :I+1->I
```

```
:PT-On(X,Y)
:If I>2000
:End
:Rand->N
:If N<=(1/3)
:Goto 2
:If N>(2/3)
:Goto 3
:.5X->X
:.5Y->Y
:Goto 1
:Lbl 2
:.5(X+1)->X
:.5Y->Y
:Goto 1
:Lbl 3
:.5(X+.5)->X
:.5(Y+1)->Y
:Goto 1
```

Programa para la Calculadora TI - 81 Texas Instruments que genera el juego del CAOS que calcula y grafica los valores para la iteración de la función $f(x) = \lambda x(1 - x)$, para un valor de λ, un valor inicial X_0 y un número dado de iteraciones (figuras 32 a 35).

Prgm: ORBITA

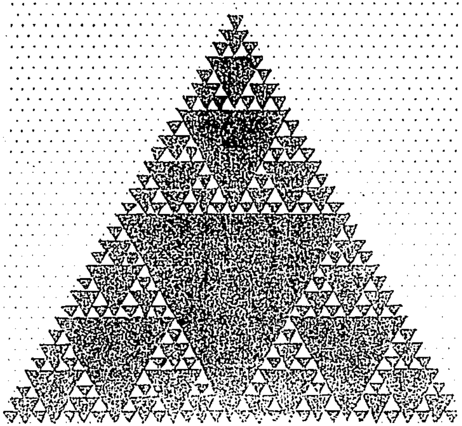
```
:Disp "LAMDA"
:Input C
:Disp "PTO INICIAL"
:Input X
:Disp "NO DE ITERAC"
:Input N
:ClrDraw
:0->Xmin
:N->Xmax
:0->Ymin
:1->Ymax
:1->I
```

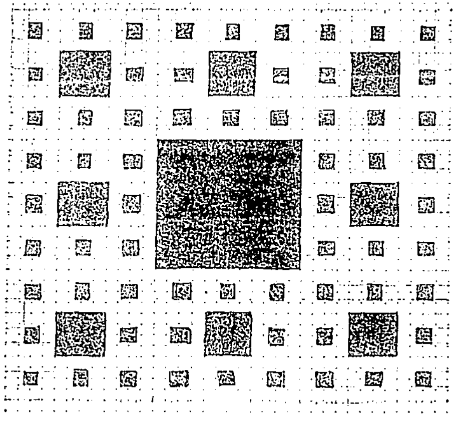
```
:Lbl 1
:C*X(1-X)->X
:PT-On(I,X)
:IS>(I,N+1)
:Goto 1
```

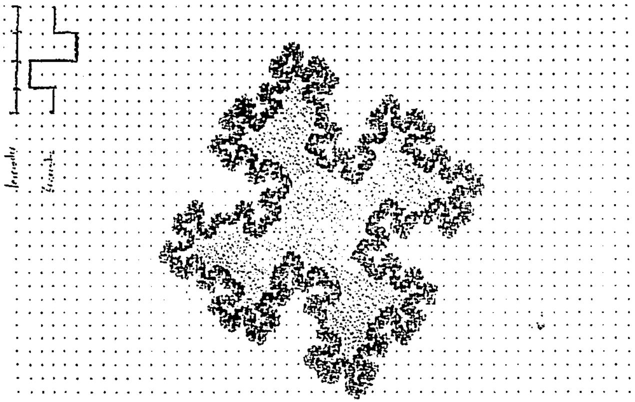
Programa para la Calculadora TI-81 Texas Instruments que genera la Curva logística (figura 36).

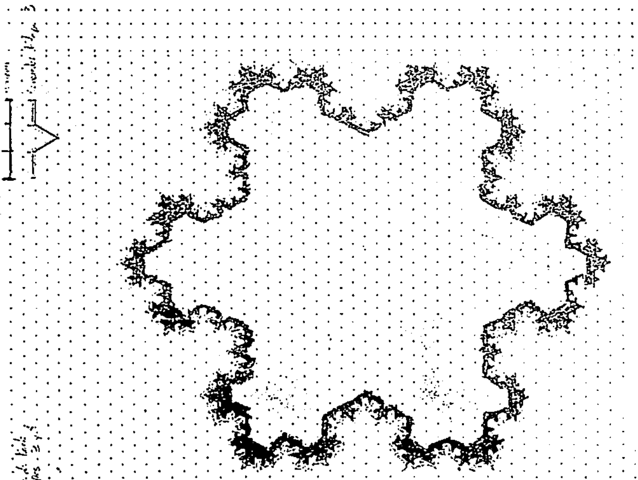
```
Prgm: LOGIS
:Disp "VALOR INICIAL"
:Input P
:Cl rDraw
:0->Xmin
:4->Xmax
:0->Ymin
:1->Ymax
:1-> I
:0->N
:P->X
:Lbl 1
:(I/10)->L
:L*X(1-X)->X
:N+1->N
:If N>300
:Goto 2
:If N>200
:PT-On(L, X)
:Goto 1
:Lbl 2
:I+1->I
:0->N
:P->X
:If I>40
:End
:Goto 1
```

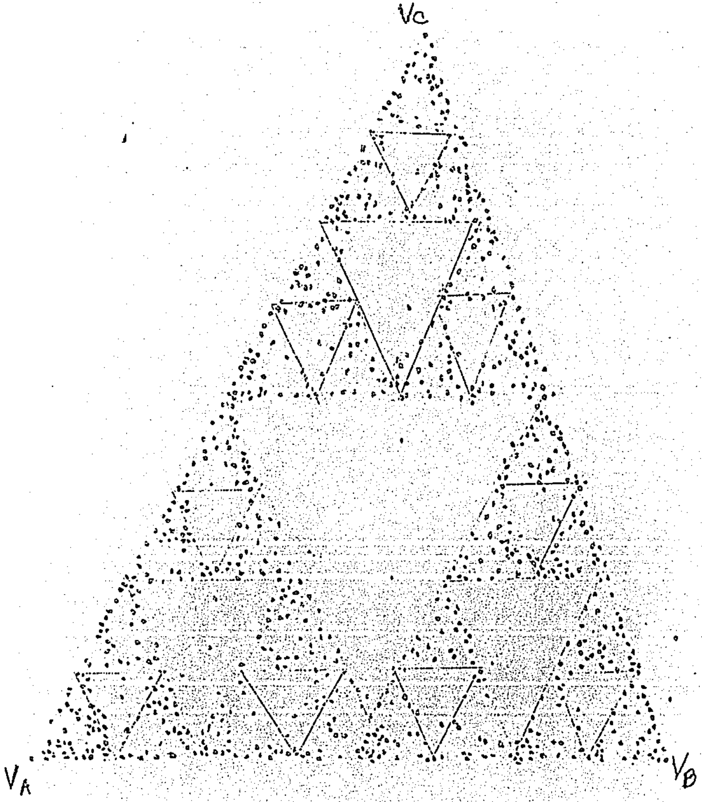
APENDICE D










Vc
V_A
V_B

BIBLIOGRAFIA.

Abelson, H. (1982). *Apple LOGO.* Byte/McGraw-Hill. USA.

Barnsley, M. (1988). *Fractals Everywhere.* Academic Press, Inc. USA .

Barnsley, M., Devaney, R., Fisher, Y., Mandelbrot, B., McGuire, M., Peitgen, H., Saupe, D., and Voss, R. (1988). *The Science of Fractal Images.* Springer-Verlag. USA .

Becker, K., Dorfler, M.(1990). *Dinamical Systems and Fractals: Computer Graphics Experiments in Pascal.* Cambridge University Press. Inglaterra.

Brigs, J., y Peat, D. (1990). *Espejo y Reflejo del Caos al Orden.* Gedisa. España.

Camp, D. (1991). *A Fractal Excursión.* Mathematics Teacher. Vol. 84, No.4, 265-275.

Crowley, D. (1987). *The Model Van Hiele of Development of Geometry Thought.* In M. M. Lindquist & A. Shulte (Eds.), Learning and Teaching Geometry: K-12. 1-15. Reston, V.A: NCTM. USA.

Del Rio, L. (1990). *Caos, Sistemas Dinámicos y el arte del pensamiento.* Contactos No. 1. UAM. México.

Devaney, R. (1990). *Chaos, Fractals and Dynamics, Computers Experiments in Mathematics.* Addison -Wesley. USA.

Erro, E. (1986). *El Pensamiento Matemático Contemporáneo.* IPN. México.

Estrada, J. (1991). Tesis: *Estudio Exploratorio sobre el Nivel de Desarrollo del Pensamiento Geométrico de los Estudiantes del C.C.H.* UACPYP, CCH, UNAM. México.

Euclides. (1956). *The Thirteen Books of the Elements. V*ol. 1 (Books I-II). Dover. USA.

Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrias.* UTEHA. México.

Eves, H. (1983). *Great Moments in Mathematics (After 1650).* The Mathematical Association of America. USA.

Flagg, B. (1990). *Formative Evaluation for Educational Technologies.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. USA.

Fernández, F., y Pacheco, M. (1991). *Valor Matemático Elemental de los Fractales.* SUMA No 9, 4-10.

Fey, J. (1984). *Computing and Mathematics. The Impact on Secondary School Curricula.* National Council of Teachers of Mathematics. USA.

Fuys, D., Geedes, D., Tischler, R. (1988). *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents. Journal for Research in Mathematics Education Monograph.* No. 3, NCTM. USA.

Gardner, M. (1976). *In Which "monster" curves force redefinition of the word "curve".* Scientific American Magazine. Extragalactic Supernova.

Gardner, M. (1992). *Fractal Music, Hypercards and more... :Mathematical Recreations from Scientific American Magazine.* W.H. Freeman and Company. USA

Goldenberg, P. (1989). *Seeing Beauty in Mathematics: Using Fractal Geometry to Build a Spirit of Mathematical Inquiry.* Journal of Mathematical Behavior. Vol. 8 No. 1, 169-204. USA

Goldenberg, E. Paul. (1992). *Making Connections With Geometry.* Education Develepment Center, Inc. 1-33. USA.

González, P. (1983). *6 de mayo de 1970 - 7 de diciembre de 1972.* UNAM. México.

Gleik, J. (1987). *Chaos, Making a new Cience.* Penguin Books. USA.

Kem, J. (1990). *C. Exploring Fractals: A Problem-Solving Adventure Using Mathematics and Logo.* Mathematics Teacher. Vol. 83 No. 3, 179-185,244.

Kline, M. (1976). *El Fracaso de la Matemática Moderna: Porqué Juanito no sabe sumar.* Siglo XXI. México.

Mandelbrot, B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature.* W.H. Freeman and Company. USA.

Mandelbrot, B. (1987). *Los Objetos Fractales: forma, azar y dimensión.* Tusquets Editores. España.

Mara, P. (1987). *Iteration of an Interesting Function.* Mathematics Teacher. Vol. 80 No. 5, 400-402.

Martinez, A. (1993). *Knowledge and Development of Functions in a Technology Enhanced High School Precaculus Class: a Case Study.* USA.

McGuire, M. (1991). *An Eye For Fractal: A Graphics and Photographics Essay By Michael McGuire.* Addison-Wesley Publishing Company. USA.

Miller, Ch., Heeren, V., Hornsby, J. Jr. (1990). *Mathematical Ideas.* Harper Collins Publishers. USA.

Miles, M., Huberman, M. (1991). *Qualitative Data Analysis: A Sourcebook of New Methods.* SAGE Publications. USA.

Papert, S. (1981). *Desafío de la mente: Computadoras y Educación.* Galápago. Argentina.

Peterson, I. (1988). *TheMathematical Tourist: snapshots of modern mathematics.* W.H. Freeman Company. USA.

Peitgen, H., Ritcher P.H. (1986). *The Beauty of Fractals.* Springer-Verlang. USA.

Peitgen, H., Jurgens, H., Soupe, D. (1992a). *Fractals for the Classroom.* Part One. Springer-Overlap. USA.

Peitgen, H., Jurgens, H., Soupe, D. (1992b). *Fractals for the Classroom.* Part Two. Springer-Overlap. USA.

Peitgen, H., Jurgens, H., Soupe, D. (1992c). *Fractals for the Classroom Estrategic Activities.* Part One. Springer-Overlap. USA.

Peitgen, H., Jurgens, H., Soupe, D. (1992d). *Fractals for the Classroom: Estrategic Activities.* Part Two. Springer-Overlap. USA.

Rietman, E. (1989). *Exploring the Geometry of Nature.* Windcrest. USA.

Rocha, R. (1992). *Logo 1: Para estudiantes de Educación Media.* Panorama, S.A. México.

Ruíz, A. (1992). *Las Matemáticas Modernas en las Américas: Filosofía de una Reforma.* Educación Matemática. Vol. 4 No. 1 10-20. México.

Ruíz, M. (1990). *Fractales, el orden que surgió del caos.* Muy Interesante. Año 6. No.8, 32-36.

Schaff, A. (1985). *¿Qué futuro nos aguarda?: Consecuencias Sociales de la segunda Revolución Industrial.* Crítica. España.

Sierra, H. (1993). *Hacia la era del Homo Informáticus.* Ciencia y Desarrollo. Vol. XIX, No. 112, 22-26. México.

Sφrensen, P. (1984). *FRACTALS... Exploring the rough edges between dimensions.* Graphics, 157-172.

Sowder, J. (1989). *Setting a Research Agenda, Research agenda for Mathematics Education.* Vol. 5 Reston, VA: Laurence Erlbaum Associates and NCTM.

Thomas, D. (1989). *Investigating Fractal Geometry Using LOGO.* The Journal Computers in Mathematics and Science Teaching. Vol. VIII, No.3, 25-31.

Turkle, S. (1984). *El segundo yo: las computadoras y el esptiritu humano.* Galápago. Argentina.

Vacc, N. (1992). *Fractal Geometry in Elementary School Mathematics.* Journal of Mathematics Behavior. Vol. 11 279-295. USA.

Webb, N. (1993). *Assessment for the Mathematics Classroom.* Assessment in the Mathematics Classroom, 1993 Yearbook, NCTM. USA.

Wenzelburger, E. *Informatica en la Matemática de la Escuela Secundaria.* Sección 4.2 Geometría de Fractales, 142-157.

Wenzelburger, E. (1992). *La Matemática Contemporánea y su papel en la Enseñanza del Nivel Medio Superior.* Educación Matemática, Vol.4, No.2, 55-60.