

13-A
2010



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGON**

**APUNTES DE LA MATERIA DE MECANICA
DE MATERIALES II**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A
LUIS ESPINOSA VILLASANA

Director de Tesis: Ing. Gustavo A. Jiménez Villegas

MEXICO, D.F.

1994

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



VINERIAS NACIONAL
SECRETARIA DE
MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGON
DIRECCION

LUIS ESPINOSA VILLASANA
P R E S E N T E .

En contestación a su solicitud de fecha 23 de noviembre del año próximo pasado, relativa a la autorización que se le debe conceder para que el señor profesor, Ing. GUSTAVO A. JIMENEZ VILLEGAS pueda dirigirle el trabajo de Tesis denominado " APUNTES DE LA MATERIA DE MECANICA DE MATERIALES II ", con fundamento en el punto 6 y siguientes, del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobada su solicitud.

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
San Juan de Aragón, Méx., febrero 9 de 1988
EL DIRECTOR


Lic. SERGIO GUERRERO VERDEJO

c.c.p. Coordinación de Ingeniería (21).
Unidad Académica.
Departamento de Servicios Escolares.
Asesor de Tesis.

SGV'AMCP'11a.

A mis padres

Por el amor, comprensión y
apoyo que siempre me han -
brindado.

A mi esposa

Por lo mejor que nos hemos
entregado a lo largo de --
todos estos años.

A mis hermanos

Por ese deseo mutuo
de superación.

A Luis Uriel y Karla Daniela

Quienes forman el orgullo que
mueve mi vida.

Quiero agradecer al Ing. Gustavo Adolfo Jiménez Villegas su invaluable ayuda en la dirección de ésta tesis, pero mas - que eso, por contar con su trato como amigo, ya que sus comen- tarios y consejos me han dado una total confianza en mi capa- cidad técnica.

Tambien agradezco a las diversas Empresas de Ingeniería - donde he laborado, por las enseñanzas y experiencias que, sin interés alguno, me han brindado.

Finalmente, doy gracias a la Escuela Nacional de Estudios Profesionales Aragón de la Universidad Nacional Autónoma de -- México y a su personal docente, por haberme otorgado la oportu- nidad de realizar mis estudios profesionales y reiterar así, - el enorme orgullo de sentirme Universitario.

I N D I C E

CAPITULO		PAGINA
1		
	INTRODUCCION	1
1.1.	OBJETIVOS	1
1.2.	ANTECEDENTES	2
1.2.1	LOS MATERIALES	2
1.2.2	DESARROLLO DE LA MECANICA DE MATERIALES	6
1.2.3	LA INGENIERIA EN MEXICO	9
1.2.4	OBSERVACIONES	12
2		
	ESTADO GENERAL DE ESFUERZOS EN EL PLANO	13
2.1	ESFUERZOS EN PLANOS INCLINADOS EN UNA PIEZA SOMETIDA A CARGA AXIAL.	13
2.2	TRANSFORMACION DE UN ESTADO DE ESFUER- ZOS PLANOS AL CORRESPONDIENTE A OTRA- ORIENTACION	18
2.3	ESFUERZOS PRINCIPALES. DIRECCIONES CO- RRESPONDIENTES A ESFUERZOS PRINCIPA- LES.	21
2.4	CIRCULO DE MOHR. TRANSFORMACION DE ES- FUERZOS MEDIANTE EL CIRCULO DE MOHR.	25
EJEMPLO N° .1	TRANSFORMACION DE ESFUERZOS POR EL METODO DE LA CUÑA.	30
EJEMPLO N° .2	TRANSFORMACION DE ESFUERZOS ME- DIANTE ECUACIONES GENERALES.	33
EJEMPLO N° .3	TRANSFORMACION DE ESFUERZOS ME- DIANTE EL CIRCULO DE MOHR.	36

CAPITULO 3

ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO SUJETOS A FLEXION Y FUERZA CORTANTE

- 3.1 GENERALIDADES 39
- 3.2 DESCRIPCION DE COMPORTAMIENTO DE ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO SUJETOS A FLEXION PURA. HIPOTESIS FUNDAMENTALES DEL REGLAMENTO DEL D.F. 40
- 3.3 VIGAS RECTANGULARES SIMPLEMENTE ARMADAS SUJETAS A FLEXION PURA. PORCENTAJE BALANCEADO. DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE VIGAS SUBREFORZADAS. REVISION DE ESFUERZOS BAJO CARGAS DE SERVICIO. 46
- 3.4 VIGAS RECTANGULARES SUJETAS A FUERZA CORTANTE. DESCRIPCION DEL COMPORTAMIENTO. TENSION DIAGONAL. DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE SECCIONES CRITICAS EN CORTANTE. 52
- 3.5 DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE LOSAS QUE TRABAJAN EN UN SOLO SENTIDO Y DE VIGAS "T" CONSIDERANDO EFECTOS DE FLEXION Y FUERZA CORTANTE. 59
- 3.6 DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE VIGAS DOBLEMENTE ARMADAS SUJETAS A FLEXION Y FUERZA CORTANTE. 54
- 3.7 ADHERENCIA Y ANCLAJE. LONGITUDES DE DESARROLLO. GANCHOS ESTANDAR. ESTIMACION DE AGRIETAMIENTO. CALCULO DE DEFLEXIONES PARA CARGAS DE CORTA Y LARGA DURACION. PERALTES MINIMOS. 56
- EJEMPLO No. 4 DISEÑO A FLEXION DE UNA VIGA SIMPLEMENTE ARMADA 73
- EJEMPLO No. 5 DISEÑO DE UNA VIGA POR CORTANTE. 75
- EJEMPLO No. 6 DISEÑO A FLEXION Y CORTANTE DE UNA LOSA EN UNA DIRECCION. 78
- EJEMPLO No. 7 DISEÑO A FLEXION DE UNA VIGA "T". 81
- EJEMPLO No. 8 DISEÑO A FLEXION DE UNA VIGA DOBLEMENTE ARMADA. 84
- EJEMPLO No. 9 LONGITUD DE ANCLAJE DE UNA BARRA 87
- EJEMPLO No. 10 CALCULO DE DEFLEXIONES Y AGRIETAMIENTO DE UNA VIGA DE CONCRETO REFORZADO 89

CAPITULO 4

LOSAS DE CONCRETO REFORZADO	93
4.1 DESCRIPCION DEL COMPORTAMIENTO DE UNA PLACA. ECUACION DIFERENCIAL DE UNA PLACA PLANA.	93
4.2 DESCRIPCION DEL COMPORTAMIENTO DE UNA LOSA DE CONCRETO REFORZADO. CLASIFICACION DE LOSAS DE ACUERDO A SUS CONDICIONES DE APOYO.	95
4.3 DIMENSIONAMIENTO DE LOSAS PERIMETRALMENTE-APOYADAS UTILIZANDO COEFICIENTES DE MOMENTOS. PERIMETRO EFECTIVO Y PERALTES MINIMOS	99
EJEMPLO N°. 11 DISEÑO DE UNA LOSA PERIMETRALMENTE APOYADA.	104

CAPITULO 5

ELEMENTOS CORTOS SUJETOS A FLEXION Y CARGA AXIAL COMBINADOS.	108
5.1 FLEXOTENSIONES Y FLEXOCOMPRESIONES EN EL RANGO ELASTICO. LIMITACIONES DEL PRINCIPIO DE SUPERPOSICION. DETERMINACION DE DIAGRAMAS DE ESFUERZOS EN FLEXION BIAIXIAL Y FUERZA NORMAL COMBINADAS. NUCLEO CENTRAL.	108
5.2 CONCEPTO DE INTERACCION. DIAGRAMAS DE INTERACCION EN EL RANGO ELASTICO.	113
5.3 FLEXOTENSIONES Y FLEXOCOMPRESIONES EN EL RANGO INELASTICO. DIAGRAMAS DE INTERACCION	116
5.4 FLEXOCOMPRESION EN ELEMENTOS CORTOS DE CONCRETO REFORZADO. DETERMINACION DE GRAFICAS DE INTERACCION. DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE ELEMENTOS CORTOS DE CONCRETO REFORZADO EN FLEXOCOMPRESION. REQUISITOS DE REFUERZO TRANSVERSAL	120
5.5 DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE MUROS DE RETENCION. SEGURIDAD CONTRA VOLTEO Y DESLIZAMIENTO. DISTRIBUCION DE ESFUERZOS DE MUROS DE RETENCION.	128
EJEMPLO N°. 12 CALCULO DE UN DIAGRAMA DE INTERACCION DE UNA COLUMNA	136
EJEMPLO N°. 13 REVISION DE UNA COLUMNA CUADRADA DE CONCRETO SOMETIDA A FLEXOCOM-	

PRESION BIAXIAL	147
EJEMPLO N° 15 REVISION DE UN MURO DE RETEN- CION DE GRAVEDAD.	150

CAPITULO 6

ESTABILIDAD DE ELEMENTOS SUJETOS A COMPRESION - AXIAL	155
--	-----

6.1 INTRODUCCION AL PROBLEMA DE ESTABILIDAD EQUILIBRIO ESTABLE, INESTABLE E INDIFE - RENTE. CONCEPTO DE CARGA CRITICA.	155
6.2 CARGA CRITICA EN COLUMNAS ELASTICAS SU- JETAS A CARGA AXIAL. FORMULA DE EULER. CONCEPTO DE RELACION DE ESBELTEZ. EFEC- TO DE LAS CONDICIONES DE APOYO. LONGI- TUD EFECTIVA DE PANDEO. DETERMINACION- DE LONGITUDES EFECTIVAS MEDIANTE NOMO- GRAMAS.	158
6.3 LIMITACIONES DE LA FORMULA DE EULER. GE- NERALIZACION PARA EL RANGO INELASTICO	166
6.4 DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE COLUMNAS DE ACERO SUJETAS A CARGA AXIAL.	169
EJEMPLO N° 16 REVISION DE LA CAPACIDAD DE - UN ELEMENTO DE ACERO A TENSI- ON Y COMPRESION PURA.	172

CAPITULO 7

ELEMENTOS DE ACERO SUJETOS A FLEXION Y FUERZA COR- TANTE.	175
7.1 PANDEO LATERAL DE VIGAS. MOMENTO CRITICO	175
7.2 NOCIONES SOBRE PANDEO LOCAL EN PLACAS DE ELEMENTOS COMPUESTOS. DISTINCION ENTRE - VIGAS COMPACTAS Y NO COMPACTAS	179
7.3 INFLUENCIA DE LA FUERZA CORTANTE	185
7.4 DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE VIGAS DE- ACERO.	188
EJEMPLO N° 17 REVISION DE UNA VIGA A FLEXION Y CORTANTE.	192

CAPITULO 8

ELEMENTOS ESBELTOS SUJETOS A FLEXCOMPRESION	195
8.1 MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN. FACTOR DE AMPLIFICACION. EFECTO DE LA ESBELTEZ EN DIAGRAMAS DE INTERACCION EN EL RANGO ELASTICO	195
8.2 DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE VI GAS DE ACERO SUJETAS A FLEXOCOMPRESION	199
8.3 DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE COLUMNAS DE CONCRETO REFORZADO, CONSIDERANDO EFECTOS DE ESBELTEZ. METODO DE AMPLIFICACION DE MOMENTOS.	200
8.4 REVISION DE MUROS DE MAMPOSTERIA - INCLUYENDO EFECTOS DE ESBELTEZ. RESISTENCIA ANTE CARGA LATERAL. REVISION POR MOMENTO DE VOLTEO	203
8.5 DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE MUROS DE CONCRETO REFORZADO CONSIDERANDO EFECTOS. DE ESBELTEZ.	211
EJEMPLO N°. 18 REVISION DE UN ELEMENTO DE ACERO SUJETO A FLEXO COMPRESION.	218
EJEMPLO N°. 19 AMPLIFICACION DE MOMENTOS EN UNA COLUMNA ESBELTA.	221
TABLAS Y GRAFICAS	224
BIBLIOGRAFIA	247

"Todo lo que he hecho, es apoyarme sobre los hombros de gigantes"

Isacc Newton

CAPITULO

1

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1 OBJETIVOS

El propósito de este trabajo de tesis es, hasta donde la simplicidad lo permita y mediante términos sencillos, cubrir todos los puntos que marca el programa del curso de Mecánica de Materiales II que se imparte en la Escuela Nacional de Estudios Profesionales Aragón.

En la segunda parte de este capítulo, se da un breve panorama de los materiales más comunes que se utilizan en la construcción y una reseña del desarrollo de la Mecánica de Materiales en el mundo y de la Ingeniería en México. Esto último con el afán de motivar al estudiante de Ingeniería para que tenga una mejor comprensión de su papel como profesionista dentro de la sociedad.

En el capítulo 2, se ve el estado general de esfuerzos que actúan en una partícula y las posibles maneras de solución para problemas de este tipo: método de la cuña, ecuaciones generales y el círculo de Mohr. El capítulo 3 expone el diseño de vigas de concreto reforzado a flexión y cortante: simplemente y doblemente armadas, "T" y losas en un solo sentido, además de la revisión de sus estados límites de servicio.

El capítulo 4 muestra los tipos, comportamiento, dimensionamiento y revisión de losas de concreto reforzado. El capítulo 5 enseña la manera relativamente fácil de usar los diagramas de interacción para la resolución de problemas de elementos cortos sujetos a flexocompresión o flexotensión. Adicionalmente, se ve el dimensionamiento y revisión de muros de contención.

Los capítulos 6 y 7 tratan esencialmente elementos de acero. El primero de ellos muestra las bases teóricas del problema de pandeo y su aplicación al diseño de columnas (de acero). El segundo estudia las vigas de acero: su diseño a flexión y

cortante y algunas nociones básicas sobre pandeo lateral y momento crítico.

Finalmente, el capítulo 8 analiza el complejo problema de los momentos de segundo orden, sus efectos en las columnas de acero y concreto y la manera de diseñar estos elementos. Al término de este capítulo se ven de manera somera dos conceptos sumamente importantes para el estructurista: el diseño y revisión de muros de mampostería y concreto reforzado ante cargas laterales provocadas por viento o sismo.

Se ha intentado que las ecuaciones mostradas a lo largo de todo este libro, sean las más comúnmente utilizadas en el campo profesional; lo cual definitivamente no quiere decir que sean las únicas. Se usan principalmente las dadas por los reglamentos R.C.D.F., A.I.S.C. y muy ocasionalmente las del A.C.I. El método que se usa, es el de cargas últimas o elástico.

Al final de cada capítulo se dan ejemplos ilustrativos, y se hace una recomendación muy importante: recurrir, sin excepción a los reglamentos de construcción para considerar las limitaciones que ellos señalan. Las observaciones que los mismos hacen, están basadas en análisis y experimentos llevados a cabo por investigadores de alto nivel. Obviamente, estos señalamientos se deben respetar por la seguridad de las estructuras.

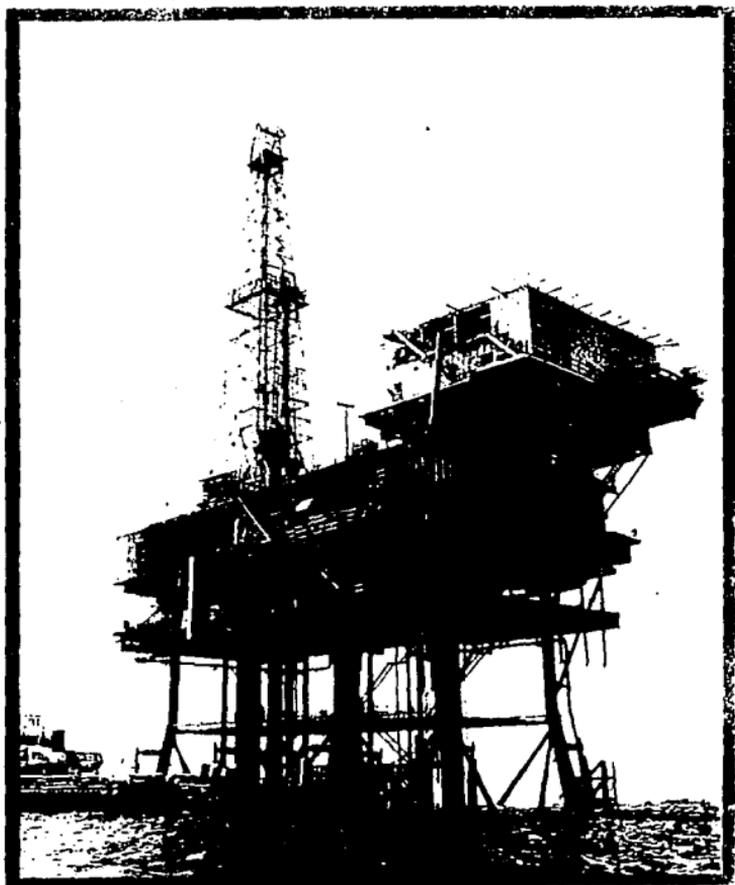
La realización de una estructura, requiere de varios pasos: conceptualizarla, analizarla, diseñarla y construirla. Todos y cada uno de ellos son importantes para su correcto funcionamiento. Es por eso, que el diseñador de estructuras debe dominar las bases teóricas y aplicaciones prácticas a la perfección.

Alguna vez, un catedrático universitario dijo: "para calcular estructuras, hay que sentirse estructura". Definitivamente. Los sucesos acaecidos en México, en Septiembre de 1985, deben llevar al Ingeniero a una reflexión profunda de sus capacidades y ante todo, de su responsabilidad.

1.2 ANTECEDENTES

1.2.1. Los Materiales.

El castor edifica sus castillos con troncos que corta con los dientes; la termita amasa arcilla y fibras vegetales con



saliva, para construir edificios de hasta 6 metros de altura - sobre sus nidos subterráneos; el oso pasa el invierno en cavernas.

El hombre primitivo, como el oso, también dormía en cavernas para resguardarse de las inclemencias del tiempo y protegerse de las fieras. Cuando vivía en terreno llano, se construía chozas con estacas y ramas entrelazadas, levantaba tiendas con pieles de animales o amontonaba piedras para aislarse.

Más tarde, al igual que el castor y la termita, el hombre cortó y trabajó la madera y construyó casas de tabique, pero - con el curso de los siglos los sobrepasó, y llegó a construir grandes ciudades, elevar rascacielos, cavar extensas galerías subterráneas. Siguió empleando los mismos materiales: la madera, la tierra amasada con agua y secada, la piedra; pero descubrió otros muchos nuevos: metales, vidrios, plástico, e ideó - además, materiales aglutinantes y artificiales.

En realidad, el hombre sigue empleando los mismos materiales que sus antepasados o que los animales. Su gran diferencia radica, en la modernidad de las técnicas con que los trabaja.

En la prehistoria, el hombre empleaba troncos de árboles pequeños que entrelazaba con ramas flexibles. Luego, logró - con piedras afiladas cortar en segmentos troncos mayores y con ellos construir cabañas que techaba con paja o ramas secas. Pasaron siglos antes de que el hombre pudiera aserrar o labrar la madera con facilidad. Primeramente, contó con sierras de bronce y después de acero. Pero aunque estas herramientas se accionaban a mano, lo que exigía mucho trabajo y tiempo, se lograron construir hermosas casas y grandes catedrales con este material.

La existencia actual de modernos aserraderos, con sierras eléctricas, permite transformar rápidamente un grueso tronco - en tablas regulares, finas molduras o angostas duelas. La madera puede hacerse -por medios químicos, térmicos o electrónicos- incombustible y resistente a la intemperie y a los insectos; además, es factible darle gran variedad de formas curvas o combinadas para adaptarse a diseños modernos y audaces.

El empleo actual de la madera es variado. Los tableros - de madera comprimida se usan como aislantes térmicos o acústicos; la madera terciada se destina a fabricar puertas armarios y otros elementos interiores; las duelas constituyen hermosos pisos de parquet o pegadas al concreto, forman elegantes dibujos geométricos; pero lo más impresionante son las secciones - de madera "contrachapadas" aglutinadas con pegamentos de fraguado electrónico, con los que se han construido arcos parabólicos de 70 ó más metros de claro, adaptados a cubiertas de hangares, arenas y estadios.

Probablemente el empleo de la piedra como material de construcción sea anterior al de la madera. Cuando en determinada región se encontraba en la superficie material rocoso en fragmentos sueltos, resultaba fácil seleccionarlos y colocarlos debidamente para formar un muro rudimentario.

Sin embargo, la construcción de un lugar para vivir, exigía ya labrar y pulir las piedras, para asegurar estabilidad en los muros y evitar hendiduras. Existen en varias regiones del mundo ruinas de grandes edificios y monumentos construidos con piedra, (el caso de templos y pirámides) los cuales, si se observan con detenimiento, se da uno cuenta el tremendo esfuerzo y paciencia de muchos hombres y sus rudimentarias herramientas de lograr esas obras, que aún hoy con medios modernos, serían difíciles de realizar.

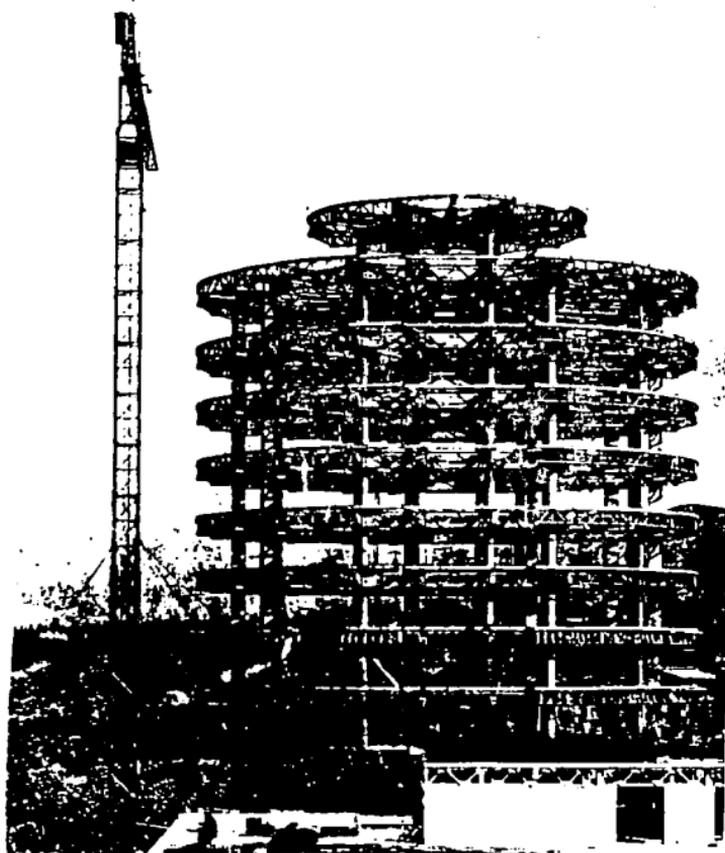
Existen muchas clases de piedras para la construcción, que pueden conseguirse en bloques o losas de diferente espesor según el uso al que se destine. La pizarra por ejemplo, se puede dividir fácilmente en delgadas lajas desde la misma cantera de la que se extrae y se usa mucho principalmente en Europa para cubrir tejados. El mármol al contrario, debido a su alto valor, se extrae en grandes bloques y se emplea como material de lujo o bien como complementario en pisos y escaleras.

El empleo del ladrillo, material ligero, pequeño y fácil de manejar, ha sido constante desde tiempos inmemoriales hasta nuestros días. En un principio, la arcilla mojada se amasaba con paja picada u otros materiales vegetales y se dejaba secar al sol en forma de grandes ladrillos planos. Este material llamado adobe, es todavía usado en algunas regiones, pero debe impermeabilizarse para evitar que se disgregue con el agua.

Por el contrario, el ladrillo cocido resiste perfectamente la lluvia y la humedad. Se fabrica con arcillas que se encuentran en todas partes y que contienen agua en diferentes proporciones.

No solo se fabrican tabiques o ladrillos con la forma clásica, sino que también se hacen losetas para cubrir pisos, tejas para techar y celosías. Con arcilla especial cocida en horno al rojo blanco, se obtienen ladrillos refractarios que se emplean en chimeneas, altos hornos de fundición, etc. O bien preparando una pasta a base de arcillas blancas, feldespastos y silicio, que se cuece al horno, se crea el azulejo, tan usado en baños y cocinas para cubrir fachadas de hasta grandes edificios.

Si se construyeran casas y edificios aplicando tabiques o piedras sin unión entre sí, resultarían verdaderos castillos de naipes que se derrumbarían antes de terminarse. Es indis-



pensable unir los elementos de construcción por medio de pastas fluidas conocidas como mortero, mezcla o argamasa.

Estas pastas, en las que se utilizan varios materiales -- aglutinantes como arcilla, yeso, cal o cemento, y a veces aditivos que los hacen impermeables o resistentes al calor, son capaces de endurecer y soldar los elementos constructivos entre sí, formando verdaderos bloques monolíticos, al grado de que en algunos casos, como demoliciones o daños por sismos, la fractura del material original se produce más fácilmente que la del aglutinante empleado.

Uno de los materiales más importantes empleados en la construcción moderna es el acero, que laminado en secciones o perfiles constructivos especiales (vigas T, doble T, ángulos, redondos, soleras, etc.) proporcionan el material indicado para todo tipo de construcciones metálicas. Ni la madera, ni la piedra tendrían la resistencia necesaria para soportar las grandes cargas que se producen en los modernos edificios de hasta 90 pisos y alturas superiores a los 300 metros.

Los romanos conocían el cemento, que hacían con cal y materias volcánicas halladas en los alrededores de la ciudad de Pozzuoli; al pie del Vesubio (de allí su nombre de puzolana). Este material tenía la propiedad de endurecerse bajo la acción del agua. Después de varios siglos en desuso, pero basándose en su modo de actuar y sus componentes naturales, el cemento se fabrica actualmente por modernas industrias, utilizando arcillas calcinadas en hornos. El producto (adicionándole cal, sílice y óxido de hierro) obtenido es el denominado "cemento portland" que al mezclarse con agua, fragua y se vuelve tan duro como una piedra.

Pero el cemento es también la base de un invento que revolucionó las técnicas de construcción. Se pensó que si permitía hacer un mortero para unir piedras tan duras como éstas -- mismas, podrían hacerse a la medida enormes bloques con mortero y pequeñas piedras. Así nació el concreto en el que se descubrió que la dosis de agua para la preparación de éste debe ser estrictamente controlada, pues la relación agua-cemento es de gran importancia para alcanzar su máxima resistencia.

El concreto aisladamente posee una gran resistencia para esfuerzos de compresión, pero es incapaz de soportar altas tensiones sin agrietamiento. En cambio, el acero resiste grandes esfuerzos de tensión. Las cualidades de estos materiales se combinan para formar el concreto armado.

Después de que el jardinero francés José Monier en 1867 -

se le concediera la patente de jardineras de concreto armado, su uso se extendió rápidamente a la construcción de edificios. Desde entonces, gracias al análisis técnico de los esfuerzos y a múltiples pruebas, puede calcularse exactamente su resistencia y es el sistema constructivo más empleado actualmente.

El concreto permite proyectar cubiertas, bóvedas y arcos de gran esbeltez y ligereza, que además de sus nuevas formas resuelve múltiples problemas utilitarios como grandes espacios libres, visibilidad e iluminación. Por su resistencia a las trepidaciones y los choques, se emplea para hacer grandes puentes, cimentaciones y construir fábricas que usan maquinaria pesada; es resistente a las explosiones; es económico y duradero e implica pocos gastos de conservación como pintura o revestimiento; resiste al fuego y se adapta a las formas de construcción más irregulares y caprichosas, las cuales se ejecutan con rapidez.

Actualmente, en el campo de la construcción se han introducido gran variedad de productos sintéticos que en su mayor parte se obtienen por polimerización de hidrocarburos de origen natural como petróleo, carbón, alquitrán y otros.

Cuando a la combinación a base de resinas y poliésteres se agrega fibra de vidrio, se produce el llamado plástico reforzado, que por su gran resistencia al impacto y a la fricción, encuentra numerosas aplicaciones en la construcción.

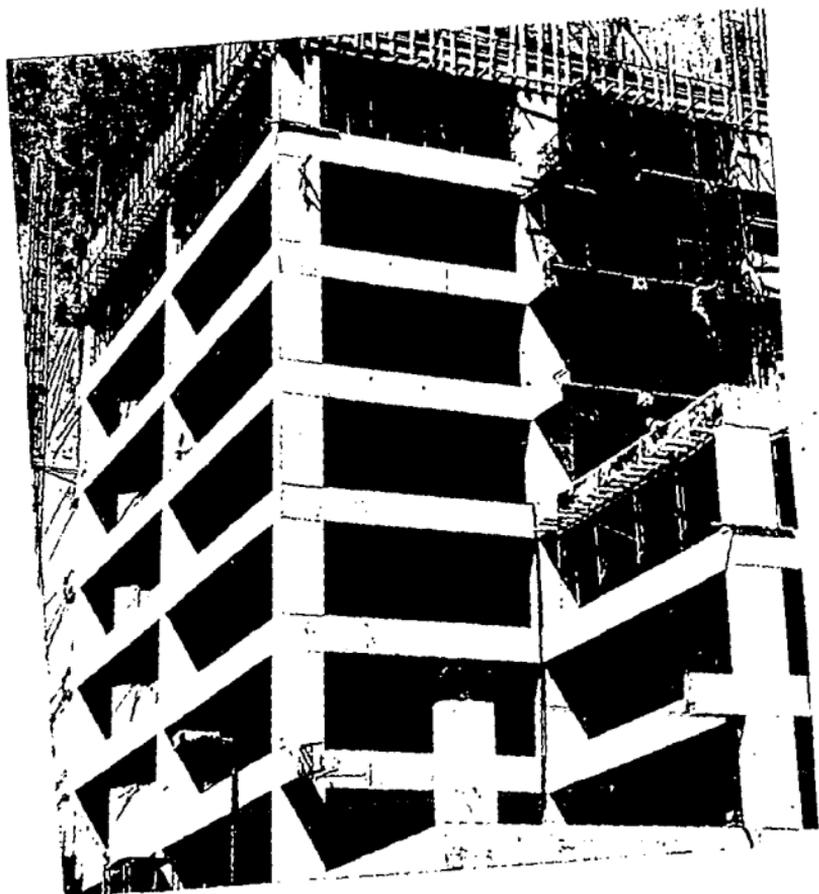
Otros plásticos se están usando para la construcción de paneles y estructuras laminadas, además de los metales raros como berilio, tungsteno, tántalo, molibdeno, cromo, vanadio y níobio.

El concreto reforzado con fibras es otro compuesto que se está estudiando y desarrollando con mucha actividad y se han observado algunas aplicaciones experimentales en condiciones de servicio. Los experimentos se han realizado con fibras de vidrio y acero, si bien la mayor parte de las pruebas se han realizado con éste último.

1.2.2. Desarrollo de la Mecánica de Materiales.

¿ Quiénes han sido los principales autores de las teorías, desarrollo matemático y en general, del conocimiento de las propiedades y comportamiento de los materiales?

Probablemente, el estudio de la mecánica de materiales inicia con los griegos alrededor del año 500 A.C. con la constru-



cción de montantes y dinteles en su arquitectura. Si bien los griegos avanzaron mas en el arte de construir, uno de sus filósofos, Arquímedes, fijó las bases de la mecánica estructural - al formular algunos principios fundamentales de la estática.

Después vinieron las aportaciones romanas al desarrollo - del arco, la bóveda, la cúpula, las armaduras de madera y el - concreto; la bóveda de arista y el arístón, también hechos por los romanos, datan de entre los años 500 y 100 D.C. Sin embargo, a pesar de haberse hecho muy competentes con éstas formas estructurales, tuvieron escaso conocimiento del análisis de es fuerza de dichas estructuras.

Cabe mencionar que otras antiguas civilizaciones de orí - gen constructoras - los egipcios por ejemplo - sin duda formula - ron reglas empíricas al realizar una construcción, pero no hay indicios de que hubieran desarrollado ni siquiera los princi - pios de una teoría sobre los elementos estructurales.

Durante la Edad Media (años 1000 a 1500), gran cantidad - de los conocimientos acumulados por griegos y romanos referen - tes a la mecánica de materiales se perdieron. Aún así, los -- constructores góticos utilizaron en las hermosas catedrales -- europeas los arcos apuntalados y los aéreos batatales.

En el renacimiento, los antiguos estudios de griegos y ro - manos se retomaron y se desarrollan a pasos agigantados gracias a dos de los más grandes genios científicos de todos los tiemp - os: Leonardo Da Vinci y Galileo Galilei.

Leonardo Da Vinci (1452 - 1519), artista, científico e in - geniero comprendió bien ciertos aspectos fundamentales del com - portamiento de los materiales estructurales. Desgraciadamente todas sus observaciones las hizo solo en sus notas que jamás - editó en forma de libro. De ahí que sus investigaciones, que parecen ser el principio del desarrollo de las estructuras, no hallan alcanzado suficiente difusión.

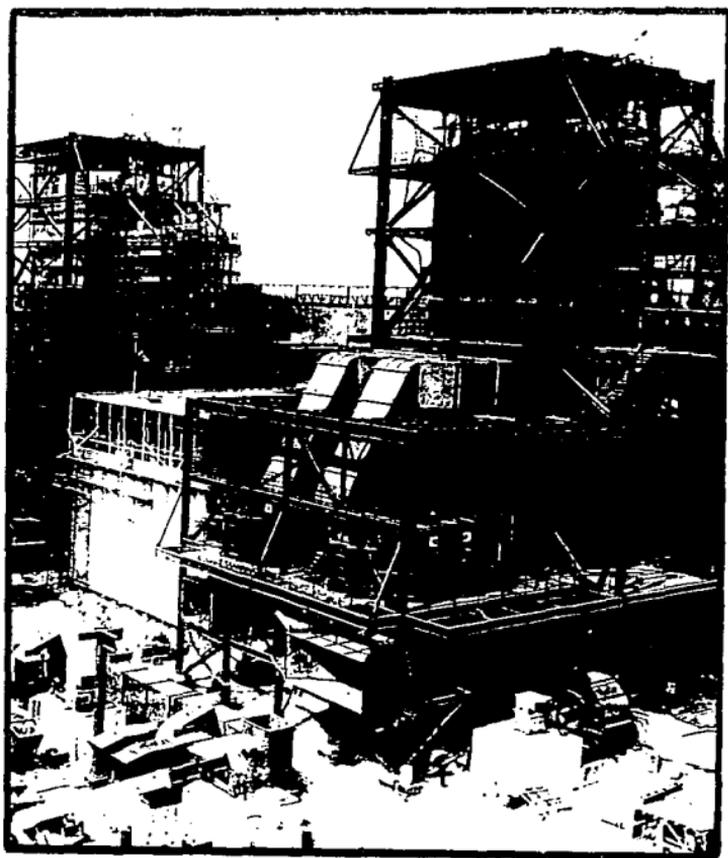
Galileo Galilei (1564 - 1642) ha sido reconocido no solo - como el fundador de la ciencia moderna, sino también como el - quien dió origen a la mecánica de materiales, pues fué el primum - en estudiar la resistencia de ciertos elementos estructu - rales (como la falla de una viga en voladizo).

Galileo al igual que Da Vinci, estaban interesados en pre - decir las resistencias de los elementos mas que las tensiones y deformaciones producidas en ellos con cargas menores que las de rotura. Es probable que si los investigadores de los últi - mos trecientos años, hubieran continuado con el interés por la resistencia, quizá hoy, el conocimiento de la mecánica de es - tructuras estuviera más equilibrado entre el comportamiento - elástico y la resistencia de las estructuras y los elementos - estructurales.

En el siglo XVIII una serie de investigadores aportaron - notables contribuciones dentro de la mecánica de materiales: - Robert Hooke, inglés (1635 - 1703) que estableció la ley que lleva su nombre sobre las deformaciones elásticas y maneja el concepto de límite de elasticidad; Abbe Edme Mariotte, francés, (1620 - 1684) que estudió las deformaciones elásticas de los cuerpos sólidos, enunciando la ley de Hooke al mismo tiempo que el físico inglés: Jacobo (1654 - 1705), Juan (1667 - 1748) y Daniel Bernoulli (1700 - 1782); Leonhard Euler, suizo (1707 - 1783) que junto con los Bernoulli monopolizaron el análisis matemático de todo ese siglo y aportó, el estudio sobre el pandeo de columnas; Louis de Lagrange, francés (1736 - 1813), que dió a conocer un importante sistema de ecuaciones generales para resolver problemas de dinámica; Charles-Augustin Coulomb, francés, (1736-1806) que dió a conocer un escrito donde se presentaba por primera vez un análisis elástico, totalmente correcto, de la flexión en vigas; y finalmente el genio inglés Issac Newton (1642 - 1727) cuyos conceptos fundamentales de la mecánica y sus tres axiomas que la satisfacen, son básicas en la ingeniería aplicada.

Un hecho importante; en 1826, Henry Navier, francés, --- (1785 - 1836) publica un libro de resistencia de materiales en el que se explica que las fórmulas deducidas hasta entonces para compartimiento elástico, debían aplicarse a elementos que se comportaran adecuadamente para establecer tensiones de seguridad que pudieran utilizarse en el diseño. Esto señala un porteaguas en la historia de la resistencia de materiales. Por primera vez, alguien - Navier - exponía lo importante que es conocer el límite hasta el cual se comportan elásticamente las estructuras. Es por esto que a Navier (y también a -- Coulomb) se les considera los fundadores de la moderna teoría de la resistencia de materiales.

El resto del siglo XIX se considera la época de auge de la teoría, hoy clásica, de las estructuras. Algunos contribuyentes importantes fueron: Gabriel Lame, francés, (1795-1870) que desarrolló la teoría matemática aplicada a la elasticidad; Emile Capleyron, francés (1799-1864); Alfred Clebsh, alemán, - (1833-1872); Rankine, (1820-1872); Airy (1801-1892); James --- Clerk Maxwell, inglés, (1831-1879); Carlos Alberto Castigliano, italiano (1847-1884), autor de una teoría de la elasticidad y sus famosos teoremas aplicado al análisis estructural; Cullman (1821-1881); Otto Mohr, alemán, (1835-1918), quien ideó un método semigráfico de transformación de esfuerzos, hoy llamado "Círculo de Mohr"; H. Muller-Breslau, alemán, (1851-1925), -- quien dió a conocer el principio que lleva su nombre y que sirve de base para construir líneas de influencias de estructuras hiperelásticas; Engesser (1848-1931); Wöhler, (1819-1914); A.-Föppl (1854-1924); Jourawsky (1821-1891); Bushinger (1833----1893); Von Tetmajer (1850-1905) y Jasinsky, (1856-1899). Todos estos hombres y sus contemporáneos, recopilaron, desarrollaron



y expusieron, las teorías de resistencia de materiales y del análisis estructural, de hecho, tal como se conoce hoy.

En 1930, en los E.U., el ingeniero Hardy Cross desarrolló un procedimiento que, usando medios teóricos extremadamente -- simples, permite determinar de una manera muy clara los momentos flexionantes en los nudos de vigas continuas, marcos, pórticos, etc. Este hecho significó una de las contribuciones -- más importantes en el siglo XX a la teoría estructural, pues -- permitió a ingenieros no especializados en las teorías clásicas de Müller-Breslau, Suter o Takabeya, analizar estructuras de manera sencilla.

Dentro de la mecánica de materiales, los principales avances en este siglo, se han dado en el desarrollo de las teorías de elasticidad, pandeo, plasticidad, placas, membranas y vibraciones; se han desarrollado instrumentos y técnicas para el en sayo de materiales y estructuras; la incorporación de nuevas -- investigaciones sobre la teoría de la resistencia a la ruptura y el comportamiento plástico de los materiales y estructuras a los métodos de diseño; un mejor conocimiento del comportamiento del concreto armado y el desarrollo y aplicación del concre to prefabricado y, en general, un amplio desarrollo de nuevos materiales estructurales como aceros, aluminio, plásticos, con cretos, maderas mejoradas, laminados y materiales cerámicos.

1.2.3. La Ingeniería en México

Es conveniente -- por el interés y motivación que despierta -- hacer una breve reseña del desarrollo y aportación de México de la Ingeniería Civil al mundo.

En la época prehispánica aparecen las primeras construcciones de las tribus sedentarias en Chihuahua; habitaciones de varios pisos hechas de lodo, fortificaciones, canales e incluso pequeños puentes primitivos. En Durango, estas mismas tribus derivaron corrientes de agua y utilizaron las columnas como elemento constructivo. En Zacatecas agricultores arcaicos trazaron caminos, levantaron columnas de mampostería seca -- sin argamasa de cal -- y al parecer inventaron los muros de sostenimiento. En Teotihuacan y Montealbán, aparece el empleo de la cantera, la cal, la arena y la arcilla, y en Mitla el manejo -- de sillares y dinteles ciclópeos de hasta 24 toneladas de peso. El ladrillo es característico de Zaachila, Oaxaca, pero no llegó a generalizarse.

A su vez, los mayas construyeron represas y labraron cisternas en la roca para recoger el agua de lluvia, usaron sop ortes de sección cuadrada, techos de viguería y bóvedas de pie--

dra salediza. Fueron también expertos en caminos y obras de irrigación y drenaje. Los aztecas formaron chinampas para uso agrícola, creando un sistema de canales no excavados donde discurría el transporte lacustre y construyeron un acueducto para llevar agua potable hasta el centro del islote. También tuvieron una noción muy clara de las cimentaciones, tanto de casas, como de palacios y pirámides. En estas perfeccionaron la técnica de contener los materiales en reposo, revistiendo los paramentos.

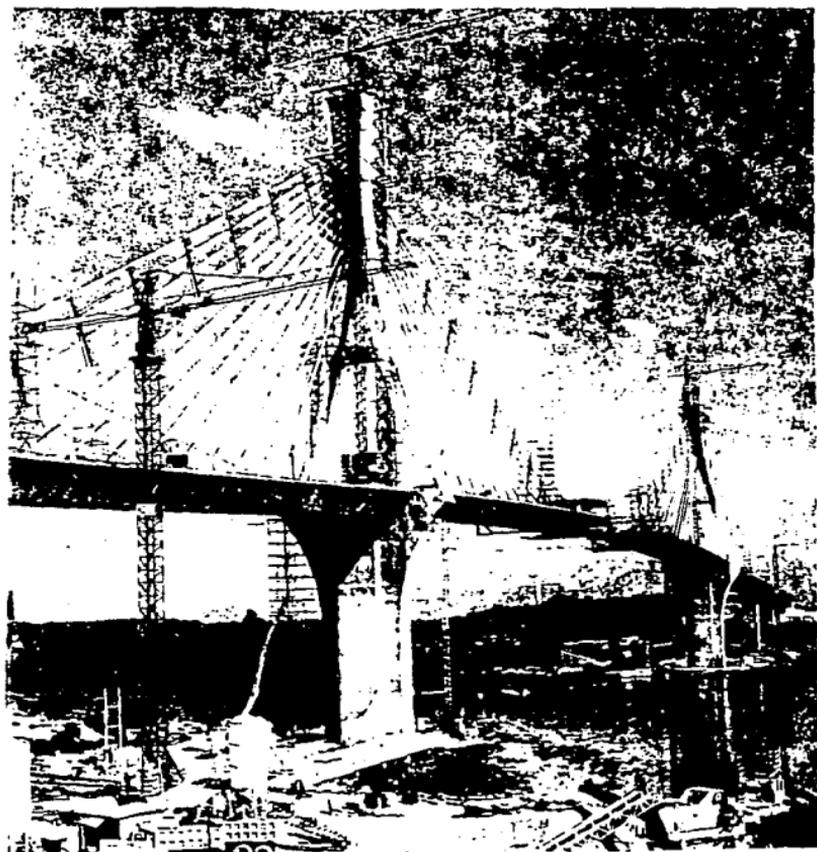
Un hecho notable es la construcción de esa portentosa obra de Ingeniería Hidráulica ordenada, proyectada y dirigida por Nezahualcōyotl: un extenso albarradón de 16 kilómetros de largo, que forma una cortina de piedra y barro, protegida con fuertes estacados de madera. Se hizo para evitar inundaciones a Tenochtitlan y además, para separar aguas saladas de las dulces.

En la época colonial, una de las principales preocupaciones fué la ampliación de la red vial, al convertir las veredas indígenas en caminos de herradura, todo esto motivado por el descubrimiento de minas, al norte del país. También se construyeron fuertes, muchos de los cuales se siguen usando aún, lo que indica el avance en técnica de construcción desarrollada en aquella época. Pero sin duda la obra más importante que se realizó en ese entonces, fué la utilización del tajo de Huehuetoca y el túnel de Nochistongo para llevar las aguas de los ríos que originaban inundaciones en la Ciudad de México. Esta obra se realizó en el tiempo sorprendente de un año, pero debido a derrumbes irreparables, en 1789 el primitivo socavón fué convertido en un corte a cielo abierto..

La época independiente se distingue en el aspecto académico al transformarse la Escuela especial de Ingenieros, en la Escuela Nacional de Ingeniería en 1883, marcando el inicio de la formación de especialistas en ingeniería. Entre los notables ingenieros surgidos en ese tiempo, destacan Manuel Marreroquín y Rivera que proyectó la desecación de la ciénega de Chapala, la captación de aguas en Xochimilco y la red de distribución de la capital; Roberto Gayol que hizo el alcantarillado y Bartolomé Vergara que introdujo nuevos métodos de cimentación.

El ingeniero Luis Espinosa, catedrático de la Escuela de Ingeniería, hizo los estudios necesarios para llevar a cabo otra gran obra: sacar las aguas del lago de Texcoco hasta el río Tequisquiác. Determinó con toda precisión que la obra debía tener una capacidad para un gasto de 17.5 metros cúbicos por segundo con tres objetivos: impedir inundaciones, expulsar aguas negras de la ciudad y controlar los excedentes del Valle, pudiendolos sacar cuando fuese necesario.

Esta obra inaugurada en 1900, consta de tres partes prin-



cipales: un canal de 47.5 kilómetros de longitud, un túnel de 100 kilómetros que cuenta con lumbreras con profundidades de -- hasta casi 100 metros, y un tajo de 2.5 kilómetros a cielo --- abierto. Los caudales llevados finalmente al río Tequisquiac, son aprovechados para generación de energía eléctrica e irrigación.

A principios de este siglo, la concepción y el diseño de las grandes obras eran realizadas por empresas extranjeras. Al amparo de estas construcciones se genera un buen número de ingenieros en el país, que demostrarían su capacidad profesional al terminar el movimiento armado de 1910 y crearse diferentes comisiones nacionales. A partir de 1926 se acentúa la aceleración de los conocimientos y empieza la especialización y el trabajo de equipo.

Por ejemplo, aparece la Mecánica de Suelos, especialidad nacida apenas en la tercera década de este siglo, gracias al primer libro del austriaco Karl Terzaghi, y casi inmediatamente después suscitó el interés de los ingenieros mexicanos a causa del carácter peculiar del terreno de la Ciudad de México. El ingeniero José A. Cuevas trabajó desde 1930 en este campo y probó sus hipótesis con la construcción del edificio de la Lotería Nacional. El Dr. Nabor Carrillo dió a conocer una teoría llamada de los centros de tensión referente a los hundimientos y también advirtió que la causa principal del hundimiento de la Ciudad de México era el abatimiento de los mantos freáticos. El Dr. Raúl J. Marsal ha acumulado informaciones experimentales en ésta disciplina y el Dr. Leonardo Zeevart ha hecho valiosas contribuciones a los problemas de cimentación.

En 1956 se crea en la U.N.A.M. el Instituto de Ingeniería como centro de investigación de varias ramas de la ingeniería civil. Esta dividida en seis secciones: ingeniería sísmica; estructuras y materiales de construcción; análisis experimental de esfuerzos; análisis numérico; mecánica de suelos y mecánica de fluidos.

Entre otras muchísimas cosas, el Instituto de Ingeniería ha dado las bases para ciertos capítulos del Reglamento de -- Construcción del Distrito Federal, por medio de modelos estudia la distribución de esfuerzos en edificios, presas y puentes. Sus investigaciones con material fotoelástico y medidores de esfuerzos han tenido aplicación hasta en medicina. Recientemente se creó un nuevo material: el Zinalco, aleación de zinc, aluminio y cobre que puede tener importantísimas aplicaciones a la construcción.

Diversos investigadores han hecho excelentes aportaciones a la ingeniería: los Dres. Roseblueth, Esteva y Meli en ingeniería sísmica, mundialmente reconocida; el ingeniero Oscar de Buen López en estructuras de acero y los talentosos ingenieros Heberto Castillo y Manuel González Flores con sus tridimensionales y pilotes de control respectivamente.

Finalmente diremos que dos obras han dado a los ingenieros mexicanos un vasto aprendizaje: la construcción del Drenaje Profundo y la del Metro de la Cd. de México. Estas monumentales realizaciones han forzado a la ingeniería mexicana a utilizar todos sus conocimientos en mecánica de suelos, estructuras, hidráulica, etc., al presentarle diversos y complejos problemas. Por ejemplo, el método para evitar fallas en los túneles estabilizando la perforación con lodos bentoníticos y colocándolos por flotación después el fondo y el muro, es una importante innovación realizada en México y que ha causado interés en el mundo entero.

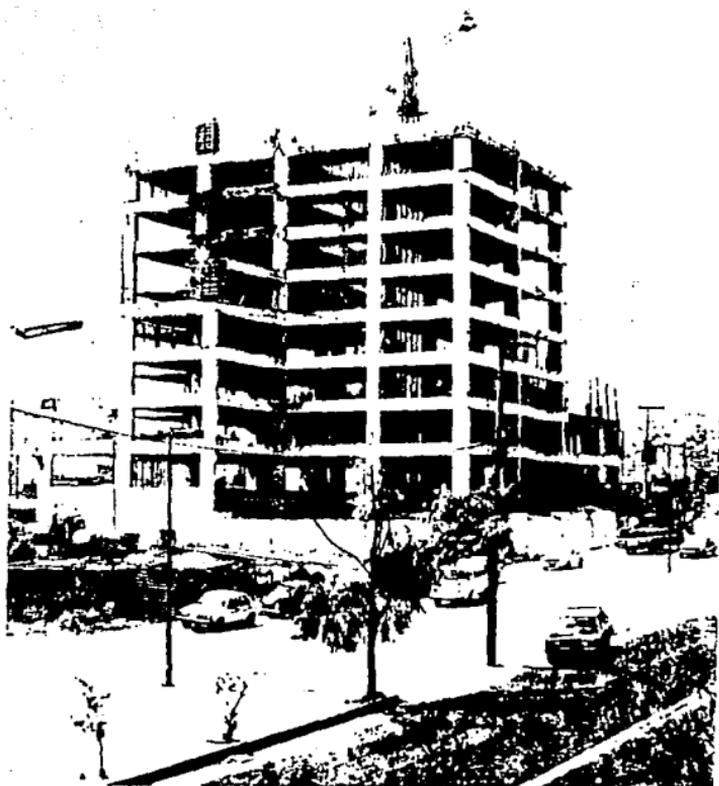
1.2.4 OBSERVACIONES

Tal vez al lector le surja la pregunta del porqué una breve reseña de la Ingeniería en México, si notamos que hay -desafortunadamente- muy poco referente a la mecánica de materiales.

Pues bien. En uno de sus libros, el escritor Gabriel Zaid comenta el hecho de que cierta enciclopedia, al mostrar un artículo referente al hielo, omite o ignora un suceso para él -interesante; información sobre la técnica usada por los ingenieros mexicanos, para congelar durante una semana, un manto de agua encontrado en la excavación de la cimentación del nuevo edificio de la Lotería Nacional, y poder continuar trabajar.

¿ Interesante ? Si. Como también el proceso constructivo de la cimentación de la Torre Latinoamericana. Y como fue movido un edificio en Guadalajara sin que se dejase de trabajar en él. Y la construcción de presas y puentes.

Si el proceso constructivo de éstas y muchísimas otras obras, es de interés para la gente en general, para el estudiante de ingeniería es, además, estimulante y provechoso, porque le permite darse cuenta de la enorme capacidad de los ingenieros mexicanos, aprender de su experiencia y desarrollar una profunda admiración y cariño hacia su carrera. De ahí el porqué, de este breve recuento.



"Lo construido solo es amado después de ser construido; lo que es creado, es amado antes de existir"

Gilbert Keith Chesterton

CAPITULO

2

C A P I T U L O 2

ESTADO GENERAL DE ESFUERZOS EN EL PLANO.

2.1 ESFUERZOS EN PLANOS INCLINADOS EN UNA PIEZA SOMETIDA A CARGA AXIAL

Un cuerpo está formado por un conjunto de partículas infinitamente pequeñas, situadas a determinadas distancias unas de otras y entre las cuales actúan fuerzas internas, que al estar en equilibrio hacen que el cuerpo conserve su forma. Si una fuerza externa al actuar sobre el cuerpo modifica las distancias entre partículas, se produce una DEFORMACION, y las fuerzas internas sufren un incremento a fin de equilibrar las fuerzas externas y de oponerse a la deformación; este incremento en las fuerzas internas constituye un ESFUERZO.

Sea una barra prismática de sección recta A sometida longitudinalmente a una fuerza P de tensión o compresión como se muestra en la fig. 2-1. Dicha fuerza P deberá pasar por el centroide de la sección recta, es decir, actuará axialmente a la barra para hacer posible la siguiente consideración: todas las fibras longitudinales de las barras tendrán un alargamiento o un acortamiento uniforme, por lo que las secciones rectas se conservarán planas después de la deformación, y por lo tanto, la fuerza P se distribuirá uniformemente sobre la sección recta, de manera que a cada unidad de superficie de dicha sección, le corresponda una fuerza unitaria

$$\sigma = P/A \dots (2.1)$$

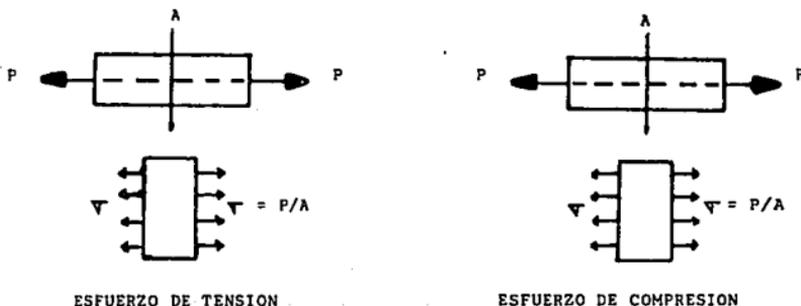


fig. 2-1

Ahora considerese el caso de una barra prismática sometida a una fuerza de tensión actuando sobre una sección p q inclinada con respecto al eje (fig. 2-2).

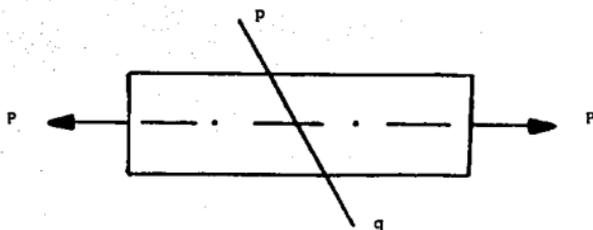


fig. 2-2

Debido a que todas las fibras longitudinales deben sufrir el mismo alargamiento, las fuerzas que actúan a la derecha de la barra estarán uniformemente distribuidas sobre la sección p q . Si aislamos la parte izquierda de la barra (fig. 2-3), - habrá un equilibrio entre éstas fuerzas y la carga P .

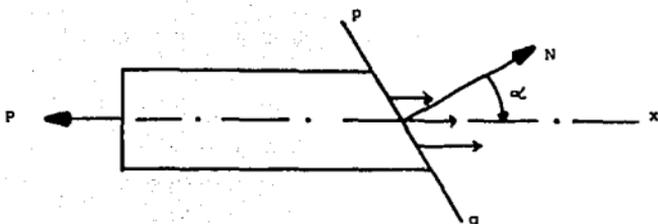


fig. 2-3

La fuerza por unidad de área de la sección $p q$ es el esfuerzo de ésta. Representando como A el área de la sección recta de la barra y por α el ángulo entre el eje x de la barra y la normal N a la sección $p q$, el área de esta sección será $A/\cos \alpha$, y el esfuerzo S correspondiente será $S = P \cos \alpha / A$, y si llamamos ∇x al esfuerzo actuante sobre una sección recta de la barra, tenemos

$$S = \nabla x \cos \alpha \dots (2.2)$$

De aquí observamos que el esfuerzo actuante sobre una sección inclinada es menor que el esfuerzo actuante sobre una sección recta de la barra, y que disminuye al aumentar el ángulo α . Por ejemplo, para $\alpha = \pi/2 = 90^\circ$, el esfuerzo S vale cero ($\cos 90^\circ = 0$), es decir, no existe presión entre las superficies laterales de la fibra longitudinal.

En las secciones oblicuas, el esfuerzo que tiene la dirección de la fuerza P no es perpendicular a la sección. Es común descomponerlos en dos direcciones como se indica en la fig. 2-4:

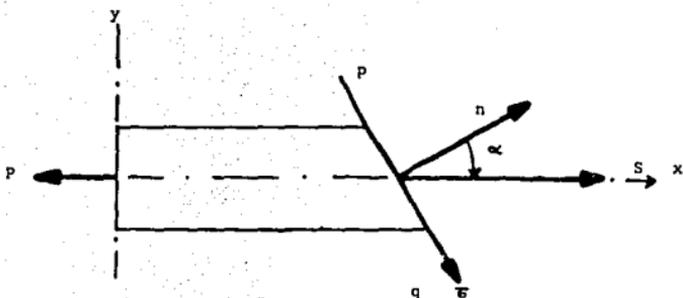


fig. 2-4

La componente ∇n perpendicular a la sección se le llama -
ESFUERZO NORMAL y su valor es

$$\nabla n = S \cos \alpha = \nabla x \cos^2 \alpha \dots (2.3)$$

La componente tangencial $\bar{\sigma}$, se denomina ESFUERZO CORTANTE y su valor es

$$\bar{\sigma} = S \sin \alpha = \nabla x \sin \alpha \cos \alpha = \nabla x \sin 2\alpha / 2 \dots (2.4)$$

Para saber que tipo de deformación produce cada componente del esfuerzo, considere un elemento separado de la barra mediante dos secciones oblicuas paralelas p q y p' q' (fig. -- (2.5)). Las fuerzas que actúan sobre ella, representan las acciones de las partes derecha e izquierda de la barra.

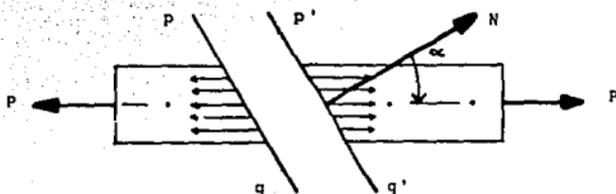


fig. 2-5

En las figuras 2-6 a y 2-6 b, obtenidas al descomponer dichas acciones en sus dos componentes y presentadas por separado su efecto, observamos que el esfuerzo normal ∇_n , produce una extensión del elemento en dirección de la normal N, y que el esfuerzo cortante produce un deslizamiento de la sección p q con relación a la p' q'.

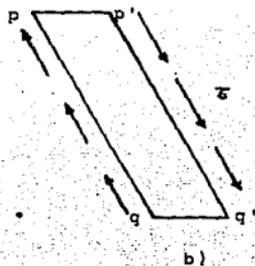
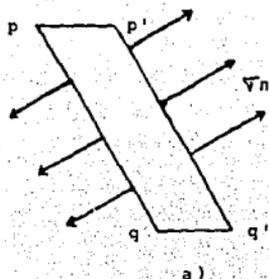


fig. 2-6

De la ecuación (2.3) se ve que el esfuerzo normal máximo - se presenta en la sección recta de la barra y es

$$(\nabla_n)_{\max} = \nabla_x \dots \dots (2.5)$$

Aunque el máximo esfuerzo cortante es la mitad del máximo esfuerzo normal, tiene una gran importancia debido a que hay materiales menos resistentes al esfuerzo cortante que al normal.

Las fórmulas (2.3) y (2.4) deducidos para el caso de tensión, también se pueden aplicar cuando la carga es de compresión simple. Basta para ello atribuir a ∇_x signo negativo en esas ecuaciones. En la fig. 2-7, se muestra la convención habitual de signos para los esfuerzos normal y cortante.

El máximo esfuerzo cortante tiene lugar, de acuerdo a la expresión (2.4), cuando el ángulo de la sección oblicua es 45° , y su valor es:

$$(\tau)_{\max} = \nabla_x / 2 \dots (2.6)$$

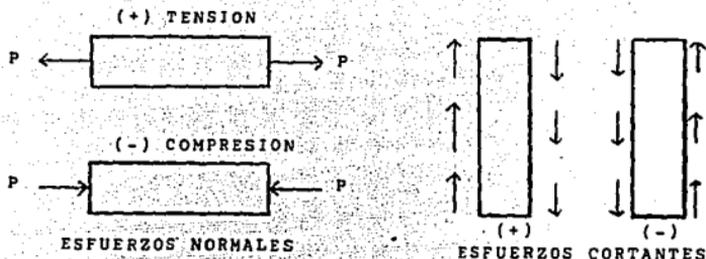


fig. 2-7

Para el esfuerzo normal, un signo positivo (+) indica que la partícula está sometida a tensión. Un signo negativo (-) será una carga de compresión. Para el esfuerzo cortante, será positivo (+) si las fuerzas provocan un par en sentido de las manecillas del reloj; y negativo (-) en caso contrario.

2.2 TRANSFORMACION DE UN ESTADO DE ESFUERZOS PLANOS AL CORRESPONDIENTE A OTRA ORIENTACION

Las leyes de suma vectorial, no se pueden aplicar a los esfuerzos, debido a que éstos son tensores de segundo grado y los esfuerzos lo son de primer grado. Los problemas de combinación de esfuerzos requieren para su solución de la suma y resta de vectores. Para poder hacerlo se recurre a la multiplicación de esfuerzos por sus respectivas áreas, transformándose de ésta manera en FUERZAS, las cuales son vectores.

Este método (llamado de "la cuña") además de requerir de mucho tiempo, solamente determina los esfuerzos a un ángulo particular de inclinación. Sin embargo, puede establecerse una forma de solución más general encontrando relaciones algebraicas que permitan obtener esfuerzos en un plano inclinado a partir de cierto estado de esfuerzos.

Consideremos que una parte pequeña del cuerpo (que comprende al punto) se separa de éste por planos, en los cuales los esfuerzos en el punto se suponen dados ó conocidos. Este pequeño bloque (fig. 2-8) constituye un nuevo cuerpo sobre el que actúan fuerzas externas a él (aunque internas con respecto al cuerpo completo): éstas fuerzas que actúan sobre las áreas DA de las caras del bloque lo mantienen en equilibrio.

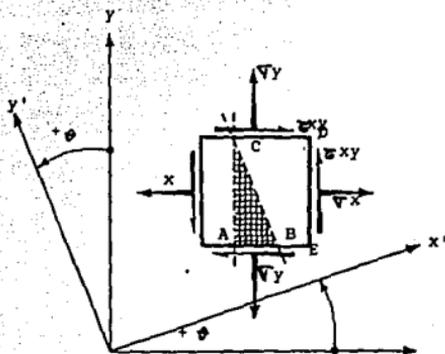


fig. 2-8

Cabe hacer notar que:

- 1.-) Los esfuerzos de tensión son positivos y los de compresión negativos.
- 2.-) El esfuerzo cortante positivo actúa hacia arriba sobre la cara derecha DE del elemento. Los sentidos de los otros esfuerzos cortantes están de acuerdo a los requisitos de equilibrio.
- 3.-) El ángulo θ que localiza al eje X' es positivo cuando se mide desde el eje X al eje Y en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- 4.-) Como las caras son muy pequeñas, la fuerza sobre cada una de ellas se puede considerar uniformemente distribuidas y por lo tanto, igual al esfuerzo sobre la cara multiplicado por el área de la misma.
- 5.-) ∇ representa el esfuerzo normal y el subíndice que aparece a su lado (X ó Y), el eje sobre el cual está actuando; para los esfuerzos cortantes τ es el signo que los representa y los subíndices (XY en este caso) significan, el primero de ellos el plano del área (es decir, el área es perpendicular a ese eje) y el segundo la dirección en la que actúa el vector fuerza cortante.

Ahora, se buscará transformar los esfuerzos del sistema $X-Y$ de ejes coordenados, al sistema $X'-Y'$.

Pasando un plano normal B C al eje X', a través del elemento se aísla la cuña ashurada de la fig. 2-8 y mostrada mas detalladamente en la fig 2-9a. La sección plana B C forma un ángulo θ con el eje vertical, y si tiene un área dA , las caras AC y AB serán respectivamente, igual a $dA \cos \theta$ y $dA \sin \theta$. Multiplicando los esfuerzos por las áreas respectivas que actúan sobre la cuña, obtenemos el diagrama de cuerpo libre que se ve en la fig 2.9b.

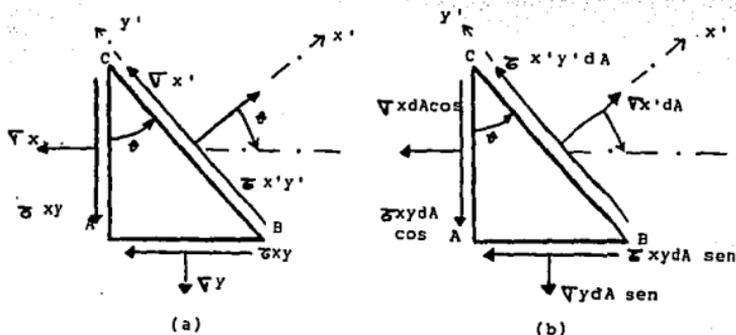


fig. 2-9

Aplicando las ecuaciones de equilibrio tenemos:

$$\sum F_{X'} = 0; \quad \nabla X' dA = \nabla X dA \cos \theta \cos \theta + \nabla Y dA \sin \theta \sin \theta + \tau_{XY} dA \cos \theta \sin \theta + \tau_{X'Y'} dA \sin \theta \cos \theta$$

utilizando entidades trigonométricas y desarrollando, finalmente se obtiene

$$\nabla X' = (\nabla X + \nabla Y / 2) + (\nabla X - \nabla Y / 2) (\cos 2\theta) + \tau_{XY} \sin 2\theta \dots (2.7)$$

$\sum F_{Y'} = 0; \quad \tau_{X'Y'} = -\nabla X dA \cos \theta \sin \theta + \tau_{XY} dA \cos \theta \cos \theta - \tau_{XY} dA \sin \theta \sin \theta - \nabla Y dA \sin \theta \cos \theta$ al igual que la ecuación anterior en su desarrollo, se encuentra al final

$$\tau_{X'Y'} = (-\nabla X - \nabla Y / 2) (\sin 2\theta) = \tau_{XY} \cos 2\theta \dots (2.8)$$

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) son las expresiones generales para obtener las magnitudes y sentidos del esfuerzo normal ∇ , y el esfuerzo cortante τ , en el punto considerado en cualquier plano formado por el ángulo θ y causado por un sistema de esfuerzos conocidos. Estas ecuaciones son las de TRANSFORMACION DE ESFUERZOS de un sistema de ejes coordenados a otro. Se vuelve nuevamente hacer notar que ∇X , ∇Y , y τ_{XY}

son valores conocidos inicialmente.

2.3 ESFUERZOS PRINCIPALES. DIRECCIONES CORRESPONDIENTES A ESFUERZOS PRINCIPALES.

Los esfuerzos en un punto situado sobre un plano inclinado según un ángulo θ , se pueden calcular a partir de las ecuaciones (2.7) y (2.8). Sin embargo, no se sabe si estos esfuerzos calculados con dichas expresiones son los mínimos o máximos para cualquier ángulo particular. Estos esfuerzos mínimos o máximos en un punto se llaman ESFUERZOS PRINCIPALES.

Un método para obtener los esfuerzos principales para un problema dado, es graficar los esfuerzos normales a partir de la ecuación (2.7), con los valores correspondientes de θ . Haciendo esto obtendríamos una gráfica semejante a la mostrada en la fig. 2-10. Las coordenadas de los esfuerzos A y B se podrían obtener graficamente, pero se tiene el inconveniente de ser muy laborioso y debe representarse para cada combinación numérica de esfuerzos que surja.

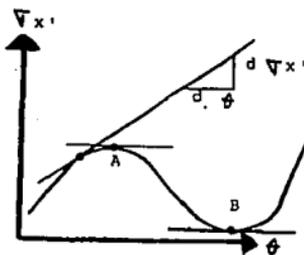


fig. 2-10

Pero es posible obtener fórmulas generales para los esfuerzos principales a partir del método anterior.

La pendiente de la gráfica de una ecuación en cualquier punto, es la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

Ahora bien, sabiendo que la pendiente de una curva continua es la primera derivada de la ecuación de esa curva, para la expresión (2.7), la primera derivada es $d\nabla X / d\theta$. En la fig 2-10 se observa que la pendiente de la curva en donde se presenta el esfuerzo principal es cero, pues es horizontal. Por lo tanto, se puede llegar a tener una ecuación general para los esfuerzos principales resolviendo un problema de máximos y mínimos, esto es, se deriva la ecuación (2.7) y se iguala a cero. Los valores de θ para esa pendiente (cero), serán los valores correspondientes a los esfuerzos principales. Entonces derivando la ecuación (2.7) tenemos

$$d\nabla X' / d\theta = -(\nabla X - \nabla Y) \operatorname{sen} 2\theta + 2\bar{\sigma}_{XY} \cos 2\theta = 0$$

finalmente

$$\operatorname{tang} 2\theta = \bar{\sigma}_{XY} / (\nabla X - \nabla Y / 2) \dots (2.9)$$

La ecuación (2.9) da los valores 2θ (con diferencia de 180°) correspondientes a los puntos A y B de la fig 2-10. Esto significa que las superficies oblicuas sobre las cuales ocurren los esfuerzos máximos y mínimos principales, se localizan con una diferencia de 90° .

La expresión (2.9) tiene dos raíces, debido a que el valor de la tangente de un ángulo en cuadrantes diagonalmente opuestos es el mismo. Esto se ve más claramente en la fig 2-11 y a partir de ella se sustituirán las funciones seno y coseno correspondiente al ángulo doble dado por la ecuación (2.9). Los coeficientes $2\theta'$ y $2\theta''$ se usan para diferenciar las dos raíces de la ecuación.

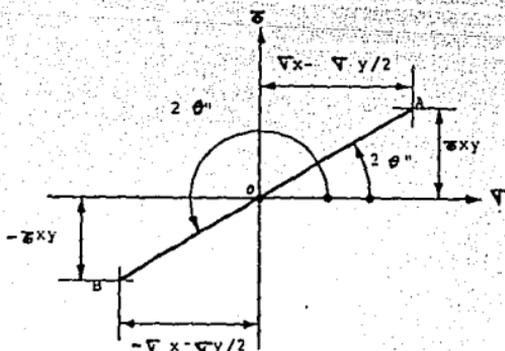


fig. 2-11

Los segmentos \overline{OA} y \overline{OB} son idénticos y tienen el mismo valor igual a

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt{(\sigma_x - \tau_{xy}/2)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

por lo que

$$\text{sen } 2\theta' = -\text{sen } 2\theta = \tau_{xy} / \sqrt{(\sigma_x - \tau_{xy}/2)^2 + (\tau_{xy})^2} \dots (2.10)$$

y

$$\text{cos } 2\theta' = -\text{cos } 2\theta = (\sigma_x - \tau_{xy}/2) / \sqrt{(\sigma_x - \tau_{xy}/2)^2 + (\tau_{xy})^2} \dots (2.11)$$

La magnitud de los esfuerzos principales se pueden obtener sustituyendo los valores de seno y coseno dados en la expresión (2.10) y (2.11) en la ecuación (2.7). Por lo tanto, desarrollando y simplificando esta operación tenemos las siguientes expresiones que son los esfuerzos principales (o normales máximos y mínimos):

$$\sigma_{x'} \text{ max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{(\sigma_x - \tau_{xy}/2)^2 + (\tau_{xy})^2} \dots (2.12)$$

y

$$\sigma_{x'} \text{ min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{(\sigma_x - \tau_{xy}/2)^2 + (\tau_{xy})^2} \dots (2.13)$$

Para saber en que plano actúan estos esfuerzos, basta con aplicar la fórmula (2.9).

Aparte de los esfuerzos principales existen también ESFUERZOS CORTANTES MAXIMOS Y MINIMOS y sus ecuaciones generales se pueden obtener de la misma manera como se hizo para los esfuerzos normales. Por lo que si la ecuación (2.8) se deriva y desarrolla tenemos:

$$\text{tang } 2\theta = - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \dots (2.14)$$

Nuevamente, la ecuación obtenida de dos valores de 2θ que tienen una diferencia de 180° . ¿Que significa esto? Que las secciones planas sobre las que ocurren los esfuerzos cortantes difieren en un ángulo $\theta = 90^\circ$. Debido a que la expresión (2.14) es la recíproca negativa de la (2.9), los valores correspondientes de 2θ difieren de 90° y los correspondientes a θ lo hacen en 45° .

De la igualdad dada por la ecuación (2.14) se puede construir el triángulo de la fig. 2-12, y a partir de él, encontrar relaciones de seno y coseno.

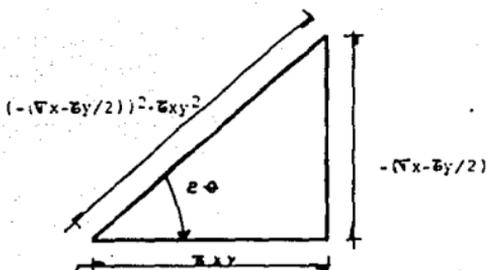


fig. 2-12

De la figura anterior tenemos que

$$\text{sen } 2\theta = - \frac{(\sigma_x - \sigma_y / 2)}{\sqrt{-(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + (\tau_{xy})^2}} \dots (2.15)$$

$$\text{cos } 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{-(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + (\tau_{xy})^2}} \dots (2.16)$$

Sustituyendo las expresiones (2.15) y (2.16) en la (2.8), desarrollando y simplificando, se tienen las dos siguientes ecuaciones, que son los esfuerzos cortantes máximos y mínimos:

$$\tau_{xy} \text{ max} = + \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + (\tau_{xy})^2} \dots (2.17)$$

$$\tau_{xy} \text{ min} = - \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + (\tau_{xy})^2} \dots (2.18)$$

Notemos que la única diferencia entre el esfuerzo cortante máximo y mínimo es el signo, y debido a que desde el punto de vista físico, dichos signos no tienen ningún significado, el mayor esfuerzo cortante, independientemente de su signo, se le denomina esfuerzo cortante máximo.

El sentido del esfuerzo cortante máximo se puede hallar por medio de la ecuación (2.14), indicando un resultado positivo -- que el esfuerzo actúa en el sentido que marca la fig. 2-13 y -- un negativo el de la fig. 2-13 b.

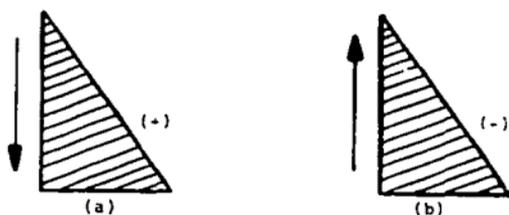


fig. 2-13

Comentaremos además, que si se deseara encontrar los planos en que no actúan esfuerzos cortantes, la ecuación (2.8) se iguala a cero y se hallaría que es igual a la relación obtenida en las expresiones (2.12) ó (2.13), lo que quiere decir que en los planos en que ocurren los esfuerzos principales no hay esfuerzos cortantes.

Contrariamente, en los planos en que actúan el esfuerzo cortante máximo si existen esfuerzos normales. Esto se observa sustituyendo el valor de θ obtenido de la ecuación (2.14), en la expresión (2.7), dando por resultado la nueva ecuación

$$\sigma' = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \dots (2.19)$$

que es el valor del esfuerzo normal que actúa al mismo tiempo que el esfuerzo cortante máximo.

Si los valores de σ_x y σ_y fueran los esfuerzos principales, τ_{xy} valdría cero y la ecuación (2.19) se simplificaría en

$$\sigma_{max} = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2 \dots (2.20)$$

2.4 CIRCULO DE MOHR. TRANSFORMACION DE ESFUERZOS MEDIANTE EL CIRCULO DE MOHR.

La valuación de los esfuerzos principales normal y cortante usando las ecuaciones (2.12), (2.13), (2.17) y (2.18) no es

la manera más fácil de hacerlo. Hay otro método, consistente en una solución semigráfica propuesta por el profesor alemán - Otto Mohr en 1882, para el análisis de esfuerzos.

Este sistema se basa en la característica de las ecuaciones (2.7) y 2.8) de representar, por su forma, la ecuación de un círculo. Es por esto que cuando se trazan un par de ejes coordenados, y se ubican los valores de $\sqrt{X'}$ y $\bar{\sigma}_{XY}$, correspondientes a un valor de θ , las coordenadas pertenecerán a un punto que quede situado en la circunferencia de un círculo.

La fig. 2-14 muestra un ejemplo típico de un CIRCULO DE MOHR PARA ESFUERZOS ó simplemente CIRCULO DE ESFUERZOS.

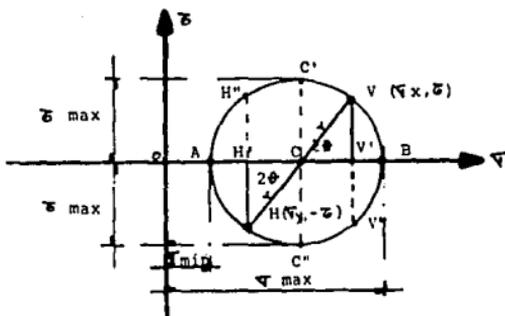


fig. 2-14

Del círculo mostrado en la fig, 2-14 comentaremos que:

- Las coordenadas de cualquier punto sobre la circunferencia representan los esfuerzos normal y cortante correspondientes, sobre un plano inclinado oblicuo según un ángulo i igual a la mitad del mostrado sobre el círculo de Mohr.
- El esfuerzo cortante máximo es igual a la longitud del radio del círculo. En la figura se marca por los puntos C' y C'' , debido a que se toma con su valor absoluto.
- Las coordenadas de los puntos V y H marcados en la periferia del círculo son los valores \sqrt{X} , \sqrt{Y} y $\bar{\sigma}$ correspondientes a dos caras mutuamente perpendiculares de una partícula elemental. La fig, 2-15 muestra esquemáticamente esta observación. En ella se tomaron los esfuerzos actuantes -

en las caras AC y AD, y los signos se respetaron según la convención de ellos señalados en la fig. 2-7.

COORDENADA PUNTO V: $(\sqrt{y}, +z)$

COORDENADA PUNTO H: $(\sqrt{y}, -z)$

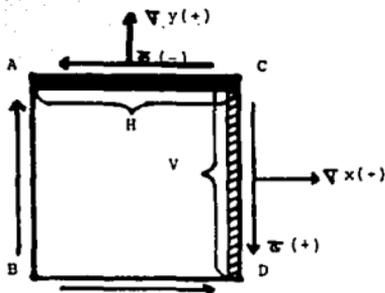


fig. 2-15

- Los puntos V' y H' son proyecciones sobre el eje de las x -abscisas de los puntos V y H, respectivamente. Sirven para formar los triángulos CVV' ó CHH', con los cuales se obtiene el valor del ángulo θ .
- Los puntos V'' y H'' se marcan continuando las proyecciones de V y H hasta cortar nuevamente la circunferencia. Como se verá más adelante, son útiles para hallar los planos en los que actúan los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo.

A continuación se sugieren una serie de pasos a seguir para la construcción de un círculo de Mohr. Esta seriación se divide en dos partes (aunque prácticamente es una sola): la primera es para hallar los esfuerzos principales y el plano en que actúan. La segunda es para encontrar el esfuerzo cortante máximo y los esfuerzos normales asociados junto con su plano de acción. Naturalmente, en ambas partes se cuantifica el valor del ángulo θ correspondiente.

1.- Esfuerzos Principales y su Plano de Acción.

- a) Hacer un croquis del elemento o analizar (fig. 2-15), indicando los valores y sentidos de los esfuerzos normales y cortantes que en él actúan. Para la convención de signos se recomienda acudir a la fig. 2-7.
- b) Encontrar las coordenadas de los puntos V y H, (\sqrt{X}, z) ,

(∇_y , $-\tau$), respectivamente, de acuerdo a los valores de los esfuerzos actuantes respetando sus signos. Nótese que el signo del esfuerzo cortante del punto H, es opuesto al que se encuentra para el punto V.

- c.-) Establecer un sistema de sus ejes coordenados rectangulares, cuyo eje horizontal sea el de los esfuerzos normales, y el eje vertical el de los cortantes. La designación de signos en los cuadrantes es la usual.
- d.-) Localizar y señalar el centro c, del círculo, que está sobre el eje horizontal a una distancia $(\nabla_x + \nabla_y)/2$ del origen. Por lo tanto, las coordenadas del centro son $((\nabla_x + \nabla_y)/2, 0)$.
- e.-) Marcar en el sistema de ejes la ubicación de los puntos V y H y trazar una línea vertical bajo cada uno de ellos hasta cruzar el eje horizontal. Así, se hallan los puntos V' y H' de la fig. 2-14.
- f.-) Unir con una línea los puntos V y H que, obligadamente toca el punto c (centro), del círculo. Con esto que dan formados dos triángulos rectangulares: el CVV' y el cHH', con lo que se evalúan dos parámetros:
- El esfuerzo cortante máximo τ_{max} que es igual al radio del círculo. Esto se calcula por el teorema de Pitágoras, pues observese en la fig. 2-14 que el radio del círculo es la hipotenusa de los triángulos formados.
 - El ángulo θ de inclinación que gira la partícula para estar en el plano que actúan los esfuerzos principales. De la fig. 2-14 se ve que la línea-HCV, forma, al cruzarse con el eje horizontal, ángulos internos de valor 2θ . Aplicando la definición de tangente a cualquiera de los triángulos formados, se despeja el valor de θ .
- g.-) De acuerdo al valor encontrado del radio, se dibuja el círculo completo. El círculo cruza dos veces el eje horizontal (fig. 2-14): una a la izquierda del centro (punto A), que es el esfuerzo normal mínimo, ∇_{min} , y otro a la derecha (punto B), que es el esfuerzo normal máximo, ∇_{max} . El valor de ambos se mide desde el origen hasta el punto considerado.
- h.-) Ubíquese los puntos V'' y H''. Trazando una línea que una los puntos B y V'', o bien A y H'' (ambas son paralelas), y sacándola fuera del círculo, dicha línea se convierte en el plano en que actúa el esfuerzo normal máximo, ∇_{max} . El esfuerzo normal mínimo, ∇_{min} , actúa en el plano perpendicular al del máximo. Observese que

las líneas BV ó AH forman, con una línea horizontal al ángulo θ .

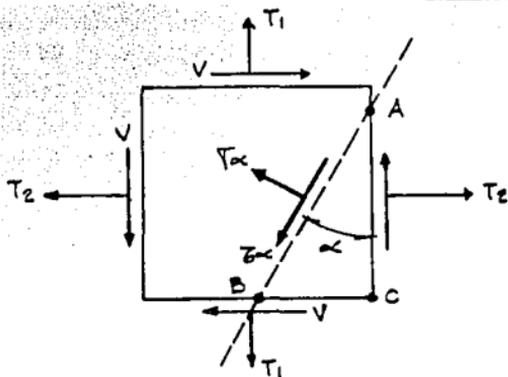
- B.- Esfuerzo Cortante Máximo con Esfuerzos Normales Asociados y su Plano de Acción.
- i) Trácese una paralela al eje vertical que pase por el centro del círculo, y corte a la circunferencia en sus extremos opuestos. De esta manera se hallan los puntos C' y C'' , cuyas coordenadas representan: con las abscisas, el valor de los esfuerzos normales asociados σ y con las ordenadas el valor (tomándose como absoluto) del esfuerzo cortante máximo.
 - j) La partícula gira 4° más que el ángulo θ para estar en el plano que actúa el esfuerzo cortante máximo, τ_{max} . Para hallarlo gráficamente basta con unir con línea los puntos B y V , y sacarla fuera del círculo. Esta línea representa el plano en el que actúa el esfuerzo cortante máximo.

Aunque en realidad se utilizan cálculos trigonométricos durante el uso del círculo de Mohr, es sumamente conveniente trazarlo, debido a la mayor visualización que se logra con el croquis para la solución de problemas de análisis de esfuerzos.

CAPITULO : 2

EJEMPLO : No 1

TRANSFORMACION DE ESFUERZOS POR EL METODO DE LA CUNA



DATOS :

$$T_1 = 1 \text{ T/CM}^2$$

$$T_2 = 3 \text{ T/CM}^2$$

$$V = 2 \text{ T/CM}^2$$

$$\alpha = 22.5^\circ$$

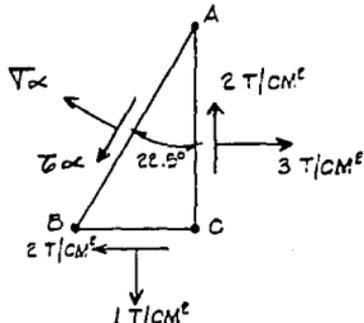
ESFUERZO NORMAL (T_α) SOBRE CARA AB = ?

ESFUERZO CORTANTE (T_α) SOBRE CARA AB = ?

PROCEDIMIENTO

EQUACION REFERIDA

SEPARANDO LA CUÑA FORMADA POR ABC DE LA PARTICULA MOSTRADA :



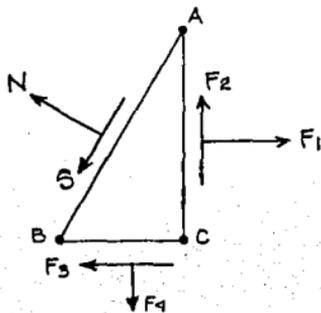
CONSIDERANDO EL AREA DE LA CARA AB = 1 cm^2 TENEMOS:

$$\text{AREA AB} = 1 \text{ cm}^2$$

$$\text{AREA AC} = (1)(\cos 22.5^\circ) = 0.924 \text{ cm}^2$$

$$\text{AREA BC} = (1)(\sin 22.5^\circ) = 0.383 \text{ cm}^2$$

AHORA, TRANSFORMAREMOS LOS ESFUERZOS EN FUERZAS, MULTIPLICANDOLOS POR SU AREA RESPECTIVA :



PROCEDIMIENTO

EQUACION REFERIDA

$$F_1 = (2)(0.924) = 2.78 \text{ TON.}$$

$$F_2 = (2)(0.385) = 1.85 \text{ TON.}$$

$$F_3 = (2)(0.385) = 0.766 \text{ TON.}$$

$$F_4 = (1)(0.385) = 0.385 \text{ TON.}$$

PARA DETERMINAR COMO FUERZAS LOS VALORES DE N Y S,
APLICAMOS LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESTADICO :

$$\sum F_N = 0$$

$$N = F_1 \cos \alpha - F_2 \sin \alpha - F_3 \cos \alpha + F_4 \sin \alpha$$

$$= 2.78(0.924) - 1.85(0.385) - (0.766)(0.924) + 0.385(0.385)$$

$$N = 1.29 \text{ TON.}$$

$$\sum F_S = 0$$

$$S = F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \alpha - F_3 \sin \alpha - F_4 \cos \alpha$$

$$= 2.78(0.385) + 1.85(0.924) - (0.766)(0.385) - 0.385(0.924)$$

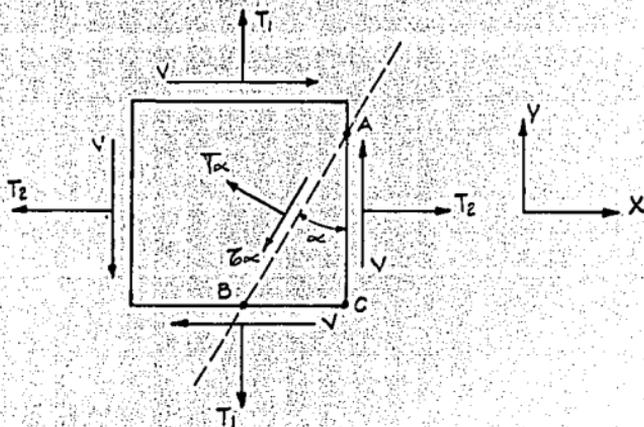
$$S = 2.12 \text{ TON.}$$

FINALMENTE TRANSFORMAREMOS LAS FUERZAS N Y S
EN SUS ESFUERZOS σ_α Y τ_α RESPECTIVOS,
DIVIDIENDOLOS EN SUS AREAS CORRESPONDIENTES :

$$\sigma_\alpha = \frac{N}{\text{AREA AB}} = \frac{1.29}{1} = 1.29 \text{ T/CM}^2$$

$$\tau_\alpha = \frac{S}{\text{AREA AB}} = \frac{2.12}{1} = 2.12 \text{ T/CM}^2$$

TRANSFORMACION DE ESFUERZOS MEDIANTE ECU'S. GENERALES



DATOS: (IGUALES A EJEMPLO No.1)

$$T_1 = 1 \text{ T/cm}^2$$

$$T_2 = 3 \text{ T/cm}^2$$

$$V = 2 \text{ T/cm}^2$$

$$\alpha = 22.5^\circ$$

ESFUERZO NORMAL (T_α) SOBRE CARA AB = ?

ESFUERZO CORTANTE (τ_α) SOBRE CARA AB = ?

PROCEDIMIENTO

ECUACION REFERIDA

PARA APLICAR LAS ECUACIONES GENERALES DE TRANSFORMACION DE ACUERDO A LA NOMENCLATURA DESARROLLADA, ACLAREMOS QUE :

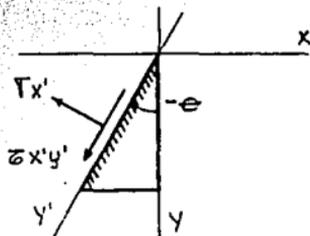
$$\begin{aligned} \alpha &= -\theta = -22.5^\circ && (\text{ANGULO DEL PLANO}) \\ T_1 = \tau_y &= 1 \text{ T/cm}^2 && (\text{ESF. NORMAL EN } y) \\ T_2 = \tau_x &= 3 \text{ T/cm}^2 && (\text{ESF. NORMAL EN } x) \\ V = \tau_{xy} &= 2 \text{ T/cm}^2 && (\text{ESF. CORTANTE EN } x \text{ E } y) \end{aligned}$$

FOR LO TANTO :

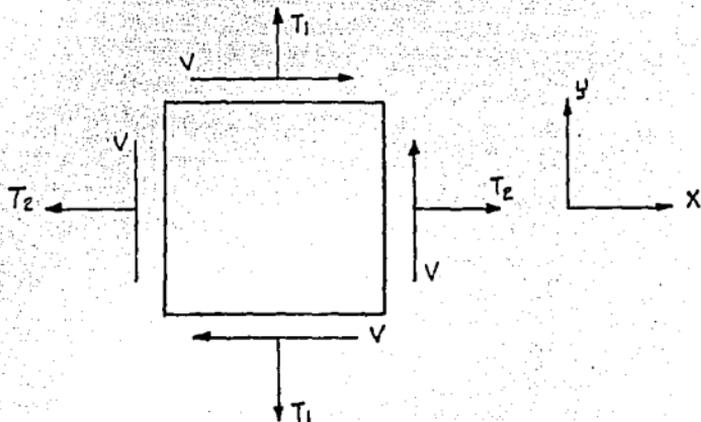
$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_{x'} &= \frac{3+1}{2} + \frac{3-1}{2} \cos(-45^\circ) + 2 \sin(-45^\circ) \dots 2.7 \\ &= 2 + 1(0.7071) - 2(0.7071) \\ &= +1.29 \text{ T/cm}^2 \quad (\text{TENSION}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{x'y'} &= -\frac{3-1}{2} \sin(-45^\circ) + 2 \cos(-45^\circ) \dots 2.8 \\ &= -1(-0.7071) + 2(0.7071) \\ &= +2.12 \text{ T/cm}^2 \end{aligned}$$

ACLARANDO POR MEDIO DE LA FIG. 2-8 :



TRANSFORMACION DE ESFUERZOS MEDIANTE EL CIRCULO DE MOHR



DATOS :

$$T_1 = 1 \text{ TON/cm}^2$$

$$T_2 = 3 \text{ TON/cm}^2$$

$$V = 2 \text{ TON/cm}^2$$

ESFUERZOS NORMAL MAXIMO (T_{MAX}) = ?ESFUERZOS NORMAL MINIMO (T_{MIN}) = ?

PROCEDIMIENTO

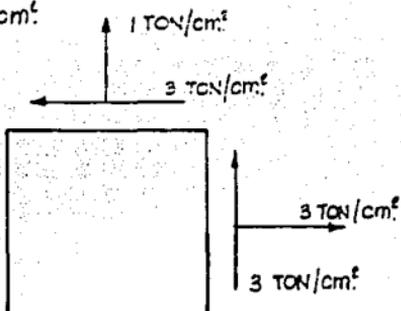
EQUACION
DEFINIDA

DE ACUERDO A LOS DATOS TENEMOS QUE :

$$T_1 = \nabla y = 1 \text{ TON/cm}^2$$

$$T_2 = \nabla x = 3 \text{ TON/cm}^2$$

$$V = \bar{z} \times y = 3 \text{ TON/cm}^2$$



CALCULAMOS LAS COORDENADAS DE V Y H :

$$V = (\nabla x, \bar{z} \times y) = (3, 3)$$

$$H = (\nabla y, -\bar{z} \times y) = (1, -3)$$

AHORA, LA COORDENADA DEL CENTRO DEL CIRCULO C :

$$C = \left(\frac{\nabla x + \nabla y}{2}, 0 \right) = (2, 0)$$

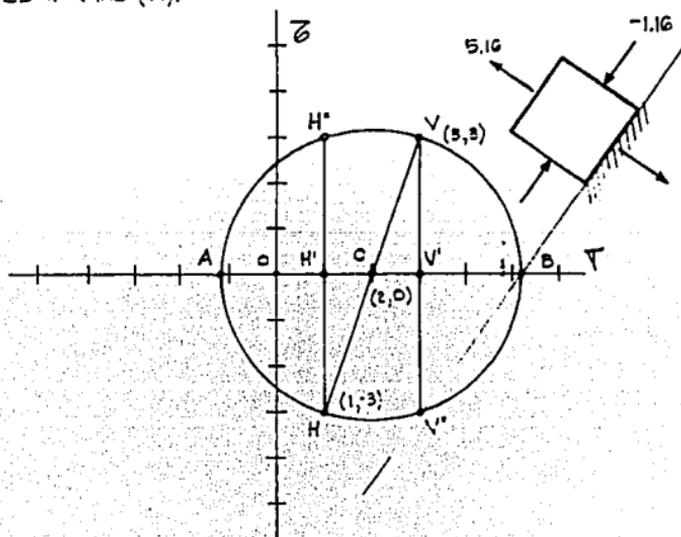
PROCEDIMIENTO

EJERCICIO
REFERIDA

TRAZAMOS EL CIRCULO EN UN EJE COORDENADO,
DONDE X SON LAS ABLICIAS Y Y SON LAS ORDENADAS

POSTERIORMENTE

- UNIMOS CON UNA RECTA V Y H
- DIBUJAMOS UNAS LINEAS VERTICALES DE V Y H HASTA TOCAR EL EJE DE LAS ORDENADAS Y HALLAMOS LOS PUNTOS V' Y H'
- LOS PUNTOS DONDE EL CIRCULO TOCA EL EJE DE ORDENADAS SON EL ESFUERZO NORMAL MAXIMO (B) Y EL MINIMO (A).



PROCEDIMIENTO

EQUACION
REFERIDA

- LOS PUNTOS OPUESTOS SOBRE EL CIRCULO DE H' y V', SON H'' y V'' RESPECTIVAMENTE.
- UNIENDO V'' y B'' c' H'' y A, OBTENEMOS LA DIRECCION DE LOS ESFUERZOS (PARALELOS A LA LINEA SON LOS MINIMOS Y PERPENDICULARES SON LOS MAXIMOS)

AHORA CALCULAMOS EL RADIO DEL CIRCULO :

$$r = \sqrt{\left(\frac{\nabla x - \nabla y}{2}\right)^2 + \nabla x y^2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3-1}{2}\right)^2 + 3^2}$$

$$r = 3.16$$

FOR LO TANTO EL ESFUERZO NORMAL MAXIMO ES:

$$B = C(x) + r = 2 + 3.16 = 5.16 \text{ T/M}^2$$

y EL MINIMO ES:

$$A = C(x) - r = 2 - 3.16 = -1.16 \text{ T/M}^2$$

EL SIGNO POSITIVO INDICA TENSION., y

EL SIGNO NEGATIVO INDICA COMPRESION.

"Un simple hallazgo es la simple
consecuencia de un buen razona-
miento"

Baudelaire

CAPITULO

3

C A P I T U L O 3

ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO SUJETOS A FLEXION Y FUERZA CORTANTE

3.1 GENERALIDADES

Son frecuentes los elementos estructurales sujetos a flexión tales como vigas, losas que trabajan en una sola dirección o aquellas columnas con cargas axiales muy bajas. Las cargas transversales que actúan en estos elementos producen momentos de flexión y fuerzas cortantes, acciones que dan lugar a fuerzas de tensión.

El concreto simple tiene una resistencia muy baja a este tipo de esfuerzos. De ahí la utilización de barras de refuerzo de acero en las zonas en las que las acciones externas producen tensión, que aunque no impiden el agrietamiento, si lo restringen. Esta combinación de concreto simple y barras de acero constituyen el material compuesto comúnmente llamado CONCRETO REFORZADO.

El dimensionamiento de elementos de concreto reforzado consiste en determinar las dimensiones de la sección de concreto y la cuantía y distribución del acero de refuerzo requeridas para tener un comportamiento adecuado y suficiente resistencia del elemento bajo condiciones de servicio, hechos que implican el desarrollo de procedimientos para predecir resistencia a flexión, fuerza cortante, de flexiones ó agrietamientos .

3.2 DESCRIPCION DEL COMPORTAMIENTO DE ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO SUJETOS A FLEXION PURA. HIPOTESIS FUNDAMENTALES DEL REGLAMENTO DEL D.F.

La fig. 3-1 es un esquema de elevación de una viga de concreto armado y las gráficas de sus elementos mecánicos. Esta viga es una muestra típica para ensayos de laboratorio: viga simplemente apoyada sometida a dos cargas concentradas y colocadas de modo simétrico. Este tipo de cargas produce una zona sujeta solo a momento flexionante, por simplicidad se comentará el comportamiento de un elemento exclusivamente con refuerzo a tensión.

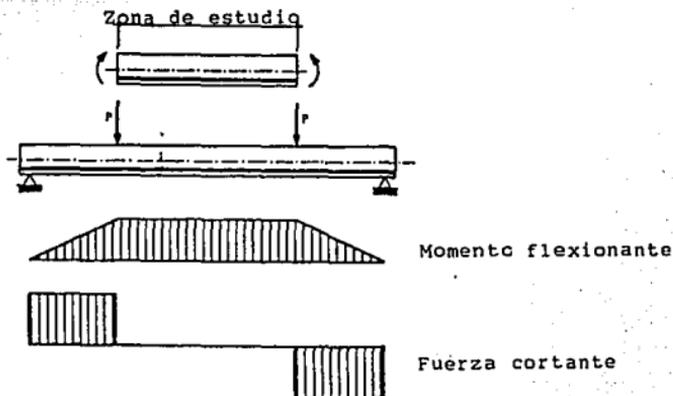


fig. 3-1

Al empezar a cargar la viga, el comportamiento de ésta es esencialmente elástico y toda la sección contribuye a resistir el momento exterior. Si la magnitud de las cargas verticales aplicadas aumenta, el alargamiento de las fibras inferiores de la viga sobrepasa la última deformación por tensión del concreto y éste se agrieta. Puesto que la deformación en la sección es proporcional a la distancia al eje neutro, a medida que la magnitud de las cargas aplicadas continúa aumentando, el esfuerzo unitario también aumenta y en consecuencia también crece el número, longitud y abertura de las grietas.

Estas grietas (que aparecen de abajo hacia arriba y en dirección del eje neutro, como muestra la fig. 3-2), suelen ser perpendiculares a la dirección de los máximos esfuerzos principales de tensión en el concreto. Por tanto, la inclinación de las grietas es función de los esfuerzos de flexión, cortante y normales a los que la sección está sometida.

Obviamente, cuando el concreto está agrietado, ya no es capaz de transmitir o resistir fuerzas de tensión; entonces estas fuerzas en la parte inferior de la viga deben ser resistidas por la barra de acero, y las fuerzas de compresión en la parte superior de la viga, lo serán por el concreto. Así pues, el área estáticamente útil para resistir la flexión es la indicada en la fig 3-3. El área rayada por encima del eje neutro es la zona de compresión, y el acero de refuerzo A_s es todo lo que resiste los esfuerzos de tensión abajo del eje neutro.

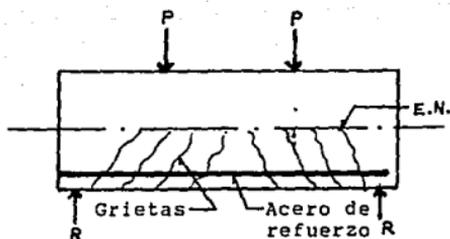


fig. 3-2

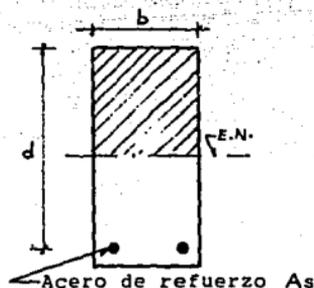


fig. 3-3

Cabe hacer notar que debido a que la resistencia del concreto es muy baja, las grietas se forman en una fase tal, que los esfuerzos de compresión en el concreto y los de tensión en el acero están por debajo de las resistencias de agotamiento de los materiales, y también las flechas y deformaciones asociadas con la formación de tales grietas, son aún muy pequeñas para que la apariencia y capacidad de la estructura se vea perjudicada.

Sin embargo, cuando el acero empieza a fluir, la deflexión crece sin que apenas aumente la carga, lo que provoca un incremento notable en la longitud y abertura de las grietas. Esto hace que el área de la zona de compresión se reduzca hasta llegar al grado de aplastamiento del concreto, al ser éste incapaz de tomar la compresión, y tener como consecuencia, el colapso de la estructura.

La capacidad de una sección de concreto reforzado para resistir la flexión se puede determinar en base al conocimiento de las gráficas esfuerzo-deformación del concreto y del acero, en la compatibilidad de deformaciones y en los principios de estática. Debido a que el procedimiento general es laborioso, se han hecho algunas hipótesis generales simplificadoras, en las cuales se basan algunos reglamentos de construcción:

- 1.-) Las secciones planas antes de la flexión continúan siéndolo después de la flexión.
- 2.-) Al llegar a su capacidad límite, los esfuerzos y las deformaciones no son proporcionales y la distribución de esfuerzos no es lineal.
- 3.-) Las tensiones serán tomadas íntegramente por el acero y se consideran aplicadas en el centro de gravedad del mismo.
- 4.-) La adherencia entre el acero y el concreto es perfecta y sus deformaciones son iguales a igual distancia del eje neutro.
- 5.-) Las fuerzas exteriores e interiores constituyen un sistema en equilibrio.

La hipótesis 2, es la ley de variación de los esfuerzos en el concreto y es probablemente la más importante, ya que como consecuencia de ésta, el diagrama de esfuerzos (fig.3-4), puede tomar cualquier forma teórica (rectangular triangular, parabólica, etc), siempre y cuando los resultados de las fórmulas obtenidas estén en completo acuerdo con los resultados experimentales.

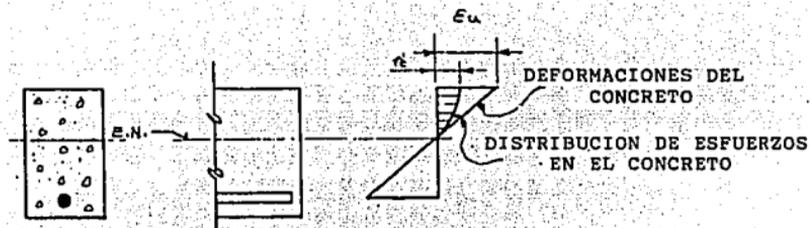


Fig 3-4

Por ejemplo, el reglamento del C.E.B. (Comité Europeo del Concreto) recomienda tres alternativas para la distribución de esfuerzos: rectangular, parabólica desde el eje neutro, y una combinación de ambos. El A.C.I. (Instituto Americano del Concreto), apoyándose en las hipótesis simplificadoras propone en lugar de la distribución real de esfuerzos, una distribución rectangular de ellos.

Por su parte, el R.C.D.F. (Reglamento de Construcciones del Distrito Federal) utiliza una distribución rectangular también, pero con algunas modificaciones con respecto al A.C.I.

La fig. 3-5 muestra los estados de deformación y esfuerzos en la sección transversal de una viga sujeta a flexión. La forma del diagrama de esfuerzos de compresión es parecida a la curva esfuerzo-deformación de un espécimen probado a compresión. El área del diagrama de esfuerzos de compresión C , se determina a partir de tres parámetros adimensionales: ζ_1 , ζ_2 , y ζ_3 , donde:

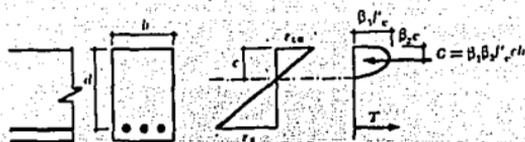


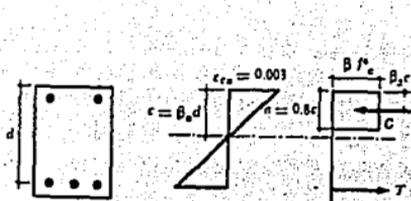
fig. 3-5

- β_1 es la relación entre el esfuerzo promedio y el máximo en la zona de compresión
- β_2 muestra la posición de la resultante de compresión,
- β_3 es la relación entre el esfuerzo máximo en flexión con la resistencia de los cilindros de control.

y además

- b , es la base la sección
- d , el peralte efectivo de la sección.
- c , es la distancia que hay entre el eje neutro y la fibra mas alejada sometida a compresión.
- E_{cu} , es la deformación unitaria máxima útil del concreto (0.003 para el A.C.I y el R.C.D.F. y 0.0035 para el C.E.B.)
- E_s , es la deformación del acero.
- f'_c , es la resistencia a la compresión del concreto.
- C y T , la resultante de compresión y tensión, respectivamente, actuando en la sección.

La fig. 3-6 muestra la hipótesis del R.C.D.F sobre la distribución de deformaciones y esfuerzos en la zona de compresión.



$\beta_1 = 0.40$ para sec. rectangulares

$$\beta = \left(1.05 - \frac{f_c^*}{1400} \right) < 0.85$$

$$I_s < I_s^*$$

$$f_s^* = \alpha f_s (1 - v)$$

$$I_v^* = \gamma I_v$$

v = coeficiente de variación del concreto
 α y γ = coeficientes que dependen del tipo de carga

fig. 3-6

Entre sus particularidades están que la relación en el volumen del bloque de esfuerzos correspondientes a concretos -- de alta resistencia se hace disminuyendo el valor del esfuerzo máximo $\propto f^*c$, y no reduciendo la profundidad del eje neutro como lo realiza el A.C.I., obteniéndose así ventajas en la preparación de gráficas y dimensionamiento.

Utiliza resistencias reducidas de los materiales, f^*c y f_s^* en lugar de las resistencias nominales $f^'c$ y f_y para así -- tomar en cuenta variaciones del control de calidad, e incluso, el tipo de carga. Anotemos que f^*c tiene un valor igual a $0.8 f^'c$.

Además, usa coeficientes de variación del concreto y coeficientes que dependen del tipo de carga, pero por simpleza, -- diremos que:

a, es la profundidad de la zona en que la distribución de esfuerzos de compresión en el concreto es uniforme y -- tiene un valor de $0.8c$.

f^*c , es el esfuerzo uniforme y se tomará igual a $0.85 f^'c$ si $f^'c \leq 250 \text{ kg/cm}^2$ e igual a $(1.05 - f^*c/1250) f^'c$ si $f^'c > 250 \text{ kg/cm}^2$.

$f_s \leq f_y$, ($f_s = f_y$ si la sección es subreforzada).

β_1 , igual a 0.40 para secciones rectangulares.

A_s , es el área de acero.

d.c. C y T, el significado ya visto.

3.3. VIGAS RECTANGULARES SIMPLEMENTE ARMADAS SUJETAS A FLEXION PURA. PORCENTAJE BALANCEADO, DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE VIGAS SUBREFORZADAS. REVISION DE ESFUERZOS BAJO CONDICIONES DE SERVICIO.

Se dice que una viga de concreto es rectangular cuando su sección transversal en compresión tiene esa forma. Es simplemente armada, cuando solo tiene refuerzo para tomar la componente de tensión del par interno.

En general, en una viga la ruptura puede ocurrir en dos formas, según la cantidad de acero longitudinal con que está reforzada la pieza, pues este puede fluir o no, antes de que alcance la carga máxima.

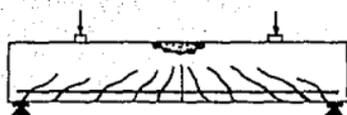
La primera forma de falla se presenta cuando el acero de refuerzo alcanza su límite de fluencia f_y , sin que el concreto -- llegue aún a su fatiga de ruptura. La viga se agrieta fuertemente del lado de tensión rechazando al eje neutro hacia las fibras más comprimidas, lo que disminuye el área de compresión, aumentando las fatigas de concreto hasta presentarse la falla de la pieza: Estas vigas se llaman SUBREFORZADAS y su falla, de tipo dúctil, ocurre más o menos lentamente y va precedida de fuertes deflexiones y grietas que la anuncian con anticipación (fig.3-7 a).

La segunda forma de ruptura se presenta cuando el concreto alcanza su límite, mientras el acero permanece debajo de su fatiga f_y . Este tipo de falla es súbita y prácticamente sin ningún anuncio previo, lo cual la hace muy peligrosa. Las vigas que se colapsan por compresión se llaman SOBREFORZADAS y su falla es de tipo frágil (fig. 3-7 b).

Pero también puede presentarse un tipo de viga cuya falla ocurre simultáneamente para ambos materiales, es decir, que el concreto alcanza su fatiga límite por compresión, a la vez que el acero llega también a su límite f_y . A éstas vigas se les da el nombre de BALANCEADAS.

La determinación del acero correspondiente a la condición balanceada es importante porque en los reglamentos y normas de diseño de estructuras de concreto, es usual imponer un límite al acero máximo que puede utilizarse en elementos sujetos a flexión, prohibiendo que se exceda un determinado porcentaje del acero b_a

balanceado que varía del 50% al 100%. Esto se hace para asegurar que la falla del elemento sea dúctil.



Subreforzada

a)



Sobreforzada

b)

fig. 3-7

La cuantificación del acero correspondiente a la condición balanceada se efectúa imponiendo las condiciones de deformación unitaria en la fibra externa comprimida máxima admisible (0.003 según R.C.D.F y A.C.I.) y la deformación unitaria en el acero, en la correspondiente al esfuerzo de fluencia, y además aplicando los principios de equilibrio y compatibilidad de deformaciones.

Analizemos pues, el caso de una viga rectangular simplemente armada y la deducción de fórmulas para calcular su resistencia a flexión, según el R.C.D.F.

La fig. 3-8 muestra una viga rectangular con refuerzo del lado de tensión únicamente. Se supone que la sección es sobreforzada, de manera que el acero fluye, y por lo tanto $f_s = f_y$.

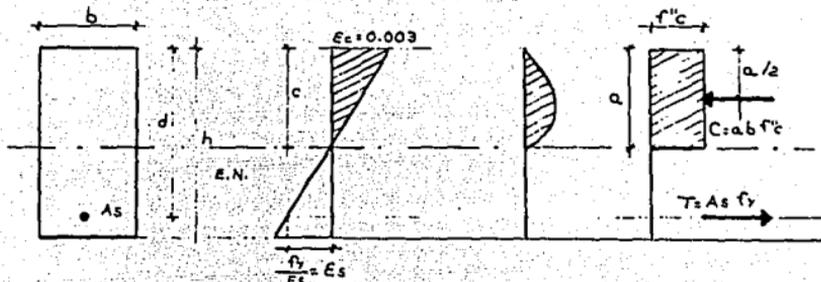


fig. 3-8

Tomando momentos con respecto a la resultante de compresión tenemos:

$$M_u = T \cdot (d - a/2) = A_s f_y (d - a/2) \dots (3.1)$$

Llamando (porcentaje de acero) a la relación entre el área de acero A_s y el producto bd , tenemos $A_s = pbd$, e igualando fuerzas de tensión y compresión:

$$C = T$$

$$f''c ab = A_s f_y, \text{ por lo que}$$

$$a = \frac{p f_y d}{f''c}$$

la cual se sustituye en la ecuación (3.1):

$$M_u = pbd^2 f_y \left(1 - \frac{p f_y}{2 f''c}\right)$$

multiplicando por $f''c/f''c$, y definiendo el índice de resistencia $q = p f_y / f''c$, tenemos:

$$M_u = bd^2 q f''c (1 - 0.5 q) \dots (3.2)$$

La ecuación (3.2) proporciona la resistencia ideal a flexión de una sección considerada. Para obtener la resistencia de diseño, dicha ecuación debe ser afectada por un factor de resistencia o reducción FR , que para flexión tiene un valor de 0.9, -- por lo que finalmente

$$MR = FR bd^2 f''c q (1 - 0.5 q) \dots (3.3)$$

El factor de resistencia FR toma en consideración la variación de los resultados de laboratorio de la aplicación de la fórmula y el tipo y consecuencia que se presenta de falla.

Ahora, de la misma fig. 3-8 obtendremos la fórmula de porcentaje balanceado:

$$\frac{E_c}{c} = \frac{E_c + E_s}{d}, \text{ o sea } \frac{0.003}{c} = \frac{0.003 + f_y/E_s}{d}$$

por lo que

$$c = \frac{0.003 d}{0.003 + f_y/E_s}$$

sabiendo que $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, tenemos que

$$c = \frac{6000}{6000 + f_y} d$$

igualando fuerzas de tensión y compresión, y teniendo que $\alpha = 0.8c$, se tiene finalmente:

$$\text{balanceado} = \frac{f_c c}{f_y} = \frac{4800}{6000 + f_y} \dots (3.4)$$

El R.C.D.F. recomienda que el porcentaje de acero se halle entre el porcentaje mínimo requerido para que el momento resistente de la sección sea 1.5 veces por lo menos, el momento de agrietamiento de la sección transformada no agrietada, y el 7 del porcentaje balanceado para así asegurar una falla dúctil, es decir,

$$p_{\min} \leq p \leq 0.75 p_b \dots (3.5)$$

donde p_{\min} se evalúa con la expresión aproximada

$$p_{\min} = 0.7 \sqrt{f_c} / f_y \dots (3.6)$$

El poder predecir las condiciones de ruptura de una pieza es sumamente importante, debido a que de ello depende la posibilidad de fijar un determinado coeficiente de seguridad a la estructura.

Debido a la variabilidad del módulo de elasticidad del concreto, la teoría elástica no puede dar resultados precisos del valor de los momentos resistentes últimos de una pieza.

Sin embargo, si se pueden revisar por este estado los valores de los esfuerzos de trabajo bajo las cargas de servicio, los cuales mantienen en general, en aproximadamente la mitad los esfuerzos de concreto, rango que acepta la variación lineal de los esfuerzos de compresión del concreto de las vigas.

La estimación de esfuerzos producidos en el concreto y el acero se hace, como ya mencionamos utilizando las hipótesis de la teoría elástica de vigas y además, el método de la sección transformada.

¿Porqué se usa la sección transformada? Debido a que la revisión de esfuerzos se hace usando la fórmula de la escuadría -- ($f = My/I$), la cual necesita que el elemento, en este caso una viga, sea homogéneo, que en nuestro caso no lo es, debido a que la viga está formada por concreto y acero.

La sección transformada homogeneiza la sección al convertir el área de acero en un área equivalente de concreto "n" veces mayor. La fig 3-9b muestra la sección transformada de la fig. 3.9a.

En estas figuras, "n" es la relación E_s/E_c de los módulos de elasticidad del acero y del concreto, y x es la profundidad del eje neutro. Entonces para revisar esfuerzos tenemos que:

- 1.-) Hallar el valor de "n", de acuerdo a los módulos de elasticidad que marquen los reglamentos.
- 2.-) Encontrar la profundidad del eje neutro x, tomando momentos con respecto al eje neutro de las áreas de concreto a compresión, y la hipotética de concreto trabajando a tensión ($n A_s$).
- 3.-) Calcular el momento de inercia I con respecto al eje neutro de la sección
- 4.-) Determinar los esfuerzos actuantes en el acero y el concreto mediante la fórmula de la escuadría:

$$f_c = My_1/I(\text{concreto}) \dots (3.7)$$

$$f_s = n My_2/I (\text{acero}) \dots (3.8)$$

donde y_1 y y_2 son las distancias del eje neutro a la fibra considerada.

Hay que procurar que al transformarse el acero en un área de concreto equivalente, las fajas sean de ancho unitario, para que el momento de inercia centroidal sea despreciable y hacer notar que únicamente la parte comprimida de la sección de concreto se considera, ya que la de tensión se agrieta, pero cuando los esfuerzos de tensión son bajos, es recomendable considerar la sección completa.

Cuando la zona de compresión contenga acero, la transformación de éste en concreto equivalente se hace con la ecuación

$$(n - 1) A_s \dots (3.9)$$

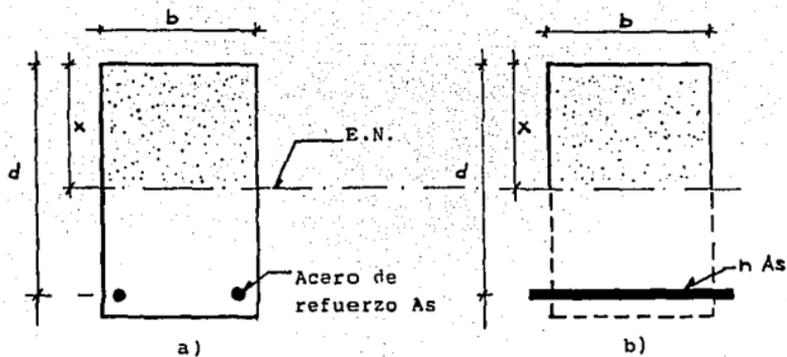


fig. 3-9

siendo $A's$ el área de acero en compresión.

3.4 VIGAS RECTANGULARES SUJETAS A FUERZA CORTANTE. DESCRIP-
 CION DEL COMPORTAMIENTO. TENSION DIAGONAL. DIMENSIONA-
 MIENTO Y REVISION DE SECCIONES CRITICAS EN CORTANTE.

En una viga sujeta a flexión simple, además del momento --
 flexionante debe tomarse en cuenta la presencia de una fuerza --
 que actúa paralelamente a las cargas verticales en el plano de --
 la sección transversal de la viga. Dicha fuerza se presenta al
 establecer las condiciones de equilibrio de la sección y recibe
 el nombre de FUERZA CORTANTE; los esfuerzos que produce se lla-
 man ESFUERZOS CORTANTES y se presentan tanto en un plano verti-
 cal como en el horizontal que pasa por un punto dado de la viga.

En una sección rectangular homogénea, el diagrama de esfuer-
 zos cortantes es una parábola como se muestra en la fig. 3-10.

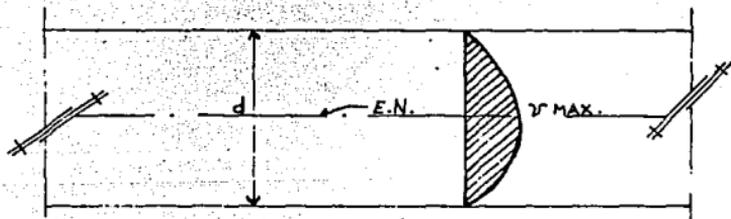


fig. 3-10

El valor del esfuerzo cortante horizontal unitario para ma-
 teriales HOMOGENEOS Y ELASTICOS vale

$$v = \frac{VAY}{Ib} \dots (3.10)$$

en la cual

- τ , es el esfuerzo cortante horizontal máximo en Kg/cm².
- A , el área situada encima de la fibra considerada.
- \bar{y} , distancia desde el centro de gravedad de A hasta el eje neutro.
- I , el momento de inercia de la sección
- b , el ancho del elemento en el eje neutro.

Sin embargo, si suponemos una viga con refuerzo longitudinal suficiente para resistir la flexión, pero sin refuerzo transversal, ésta ecuación (y otras convencionales de resistencia de materiales) serviría solo para cargas relativamente bajas, con las cuales el comportamiento de la viga fuera aproximadamente elástico.

Debido a que el concreto no es ni homogéneo, ni verdaderamente elástico, y los resultados de experimentos no coinciden con los de la ecuación (3-10), en la actualidad se emplean más bien los resultados experimentales para obtener fórmulas racionales para el cálculo de las piezas al esfuerzo cortante.

Pero los esfuerzos cortantes por si solos no son causas de falla en las vigas de concreto. El mecanismo complejo formado por el concreto y las barras de acero producen igualmente una forma muy compleja de resistencia a tales esfuerzos. No obstante que no hay una teoría muy precisa para explicar la relación entre esfuerzo cortante y falla, se sabe que la combinación de esfuerzos normales y tangenciales da origen a los esfuerzos de TENSION DIAGONAL -- (que veremos más adelante), y las fallas se deben a la tensión en el concreto, más que al esfuerzo cortante.

La fig. 3.11 muestra una partícula a la altura del eje neutro de una viga sin refuerzo transversal, en la cual los esfuerzos normales son nulos, pero que sin embargo, la combinación de los esfuerzos cortantes horizontales y verticales producen tensiones en planos a 45° respecto al eje neutro, que le provocan agrietamientos bajo cargas relativamente bajas.

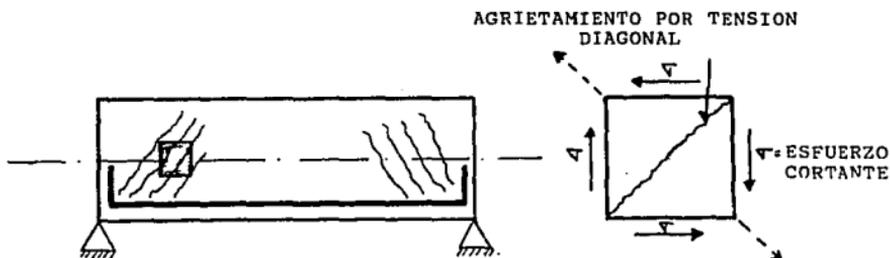


fig. 3-11

Veamoslo mas detalladamente,.. Una partícula sujeta a un estado de esfuerzo cortante puro (fig.3-12) queda sometida en realidad a un esfuerzo principal de tensión (f_1), de igual valor que el esfuerzo cortante y en un plano que forma un ángulo de 45° con el eje de la viga.

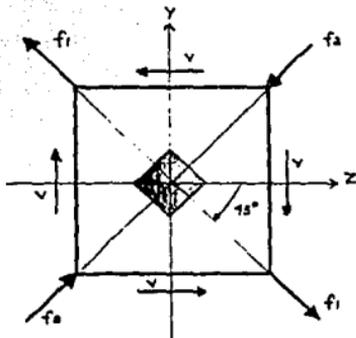


fig. 3-12

Perpendicularmente a ese esfuerzo, actúa otro de compresión (f_2), de igual valor que el primero. Este estado de esfuerzos se presenta en el eje neutro de la viga y probablemente ocurra algo semejante en la zona de tensión donde el concreto está fuertemente agrietado por efecto del momento flexionante.

El esfuerzo cortante es peligroso cuando da origen a la tensión diagonal que es el esfuerzo principal de tensión f_1 de la fig. 3-12 y llamado así por su inclinación característica y su existencia es lo que hace importante el estudio del esfuerzo cortante en vigas de concreto armado.

El comportamiento que tienen las vigas de concreto armado ante el esfuerzo cortante es diferente en dos tipos de vigas:

- 1.-) Vigas sin refuerzo transversal en el alma
 - 2.-) Vigas con refuerzo transversal en el alma
- y las observaciones experimentales muestran los siguientes resultados:

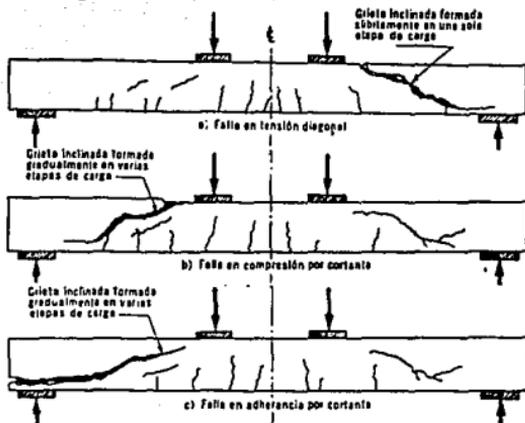
Para vigas sin refuerzo transversal: bajo el incremento de cargas aparece la grieta característica llamada GRIETA CRITICA DE TENSION DIAGONAL, la cual una vez formada, suele extenderse desde el acero longitudinal hasta la cara de compresión en forma repentina partiendo la viga en dos y causando su falla instantánea.

neá sin previo aviso. Este tipo de falla se denomina de tensión diagonal.

Otro tipo de falla se presenta también al aparecer la grieta inclinada, pero se detiene sin alcanzar la cara de compresión. La viga soporta en ésta condición un incremento de las cargas -- hasta que se aplasta el concreto arriba de las grietas. Este tipo de falla se llama de compresión por cortante. El primer tipo de falla aparece en general en vigas de longitud media y esbeltas, mientras que el segundo se da en vigas de claro corto y mayor peralte.

Algunos investigadores establecen un tercer tipo de falla, -- llamada de adherencia por cortante y caracterizada porque la viga alcanza su resistencia cuando se presentan extensos agrietamientos longitudinales al nivel del acero de tensión, al tiempo que hay un agrietamiento ligero en la zona de compresión en el extremo de la grieta inclinada. Estos tres tipos de falla se muestran en la fig. 3-13.

fig. 3-13



El refuerzo transversal en el alma de un elemento de concreto se coloca cuando la sección transversal no es suficiente para mantener el esfuerzo cortante por debajo de valores permitidos. El refuerzo puede consistir en doblar en forma diagonal algunas barras del refuerzo longitudinal (en donde ya no se requieren para efectos de flexión) o bien el de uso más común -- que es el ESTRIBO, que puede ser de dos o cuatro ramas, en "U" cerrados colocados verticalmente, aunque en ocasiones se colocan inclinados con respecto al eje del elemento en un ángulo -- que varía de 30° a 60°, siendo 45° el más común. La fig. 3-14 muestra los tipos de refuerzo transversal.

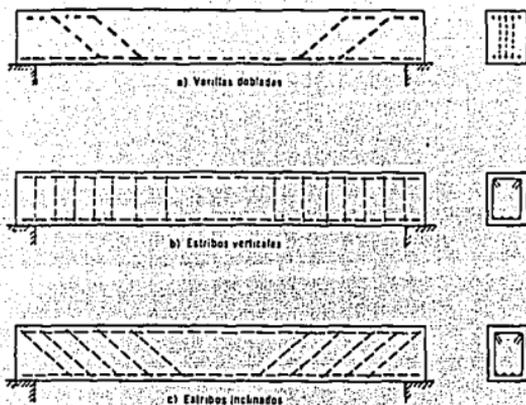


fig. 3-14

El comportamiento de vigas con refuerzo transversal en el alma es similar a las que lo carecen, hasta la aparición de las primeras grietas inclinadas, pero a partir de ahí el refuerzo transversal detiene el avance de las grietas inclinadas. Una viga bien reforzada en este aspecto, tendrá grietas inclinadas muy pequeñas y de poca importancia y la falla si se produce, será en flexión.

Para evaluar de manera convencional la magnitud de las tensiones diagonales inclinadas suele tomarse el valor del llamado ESFUERZO CORTANTE NOMINAL MAXIMO, que se calcula con la expresión

$$v_u = \frac{V_u}{bd} \dots (3.11)$$

siendo V_u la fuerza cortante última que actúa en la sección; b y d son el ancho y el peralte efectivo de la sección respectivamente.

El valor de v_u se compara con el que puede tomar la sección de concreto sin refuerzo transversal, v_{cr} , donde según el R.C.D.F. vale

$$v_{cr} = 0.5 FR \sqrt{f_c} \dots (3.12)$$

donde $FR = 0.8$ (para cortante):

La contribución total del concreto a la resistencia a fuerza cortante está dado por

$$V_{cr} = v_{cr} b d \dots (3.13)$$

si $v_u > v_{cr}$ o bien $V_u > V_{cr}$, el elemento debe llevar refuerzo transversal, pero V_u no debe ser superior a $2.5 FR_b d \sqrt{f_c}$.

Aunque el mecanismo de falla de un elemento con refuerzo -- transversal no ha podido establecerse hasta ahora, se han hecho idealizaciones para poder explicar las funciones del refuerzo -- transversal. En estas idealizaciones se basan los reglamentos. Veamos una de ellas.

La fig. 3-15 a, muestra una porción de viga con acero longitudinal y refuerzo transversal a base de estribos (o barras dobladas) inclinados un ángulo α , con respecto al eje de la viga y separados uniformemente a una distancia s . La fig. 3-15 b, es un detalle de la zona en estudio.

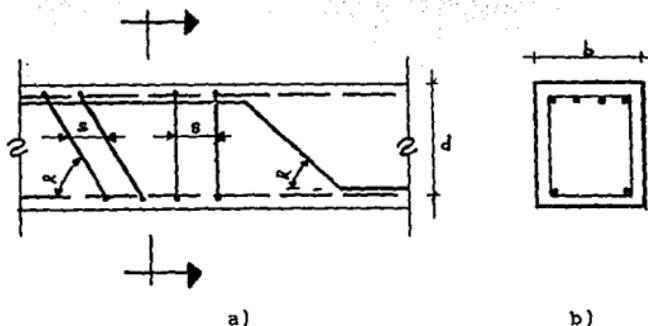


fig. 3-15

Si designamos como $v'u$ al excedente de tensión diagonal que sobrepasa la capacidad de absorción del concreto, éste refuerzo teniendo una inclinación de 45° con respecto al eje de la viga, contiene a la resultante de los esfuerzos en un intervalo s (separación entre estribos) llamada TD y valdrá

$$TD = v'u ab \dots (3.14)$$

siendo b el ancho de la viga y $a = s \cos 45^\circ$.

La tensión de la barra inclinada que toma tensión es

$$T_s = A_v f_y \dots (3.15)$$

donde A_v es el área de la sección transversal de dicha barra y f_y el límite de fluencia de la misma.

Pero la tensión efectiva (o tensión diagonal que toma la barra) debe medirse por la proyección de la tensión de la barra sobre la línea de acción de la propia tensión diagonal. Por lo tanto.

$$TD = Ts \cos(\alpha - 45^\circ) = Av f_y \cos(\alpha - 45^\circ) \dots (3.16)$$

sustituyendo en la ec. 3.16 la 3.14 y desarrollando -- con identidades trigonométricas tenemos finalmente

$$Av f_y = \frac{v'u b s}{(\sin \alpha + \cos \alpha)} \quad (3.17)$$

En la fórmula anterior, $v'u$ es el esfuerzo cortante que debe absorber el refuerzo, y si además $V'u$ es la fuerza cortante, hay la siguiente igualdad

$$v'u = \frac{V'u}{b d}$$

que sustituida en la ec. (3.17) obtenemos

$$Av = \frac{V'u s}{f_y d (\sin \alpha + \cos \alpha)} \quad \dots (3-18)$$

Como por lo regular se propone el refuerzo transversal y en consecuencia conocemos su área, despejamos la separación de dichas barras:

$$s = \frac{Av f_y d (\sin \alpha + \cos \alpha)}{V'u}$$

El R.C.D.F. usa un $FR = 0.8$ para cortante, y sabiendo que -- $V'u = Vu - V_{cr}$, la ecuación final es

$$s = \frac{FR Av f_y d (\sin \alpha + \cos \alpha)}{Vu - V_{cr}} \quad \dots (3.19)$$

donde s , es la separación del refuerzo transversal en cms.

FR , es el factor de reducción igual a 0.8.

Av , el área transversal total del refuerzo transversal (p.ej. para un estribo de dos ramas, son dos áreas).

f_y , es el límite de fluencia del refuerzo transversal

d , el peralte efectivo de la sección

α , es el ángulo de inclinación de los estribos o barras

Vu , la fuerza cortante última

y V_{cr} , la resistencia total del concreto o fuerza cortante, y que según el R.C.D.F se evalúa así:

$$\text{si } p < 0.01, V_{cr} = FR bd (0.2 + 30p) \sqrt{f'_c} \dots (3.20)$$

$$\text{si } p \geq 0.01, V_{cr} = 0.5 FR bd \sqrt{f'_c} \dots (3.21)$$

siendo p , el porcentaje de acero longitudinal.

Si $\alpha = 90^\circ$, es decir, los estribos fueran perpendiculares al eje de la pieza, la ecuación (3.19) se transforma en

$$s = \frac{FR Av f_y d}{V_u - V_{cr}} \dots (3.22)$$

Entre las restricciones que especifican los reglamentos están los siguientes:

1.- La separación máxima de estribos será

a) para estribos verticales:

$$s_{max} = 0.5 d$$

$$\text{si } V_u > V_{cr} \text{ pero } < 1.5 FR bd \sqrt{f_c}$$

$$\text{y } s_{max} = 0.25d$$

$$\text{si } V_u > 1.5 FR bd \sqrt{f_c}$$

b) para estribos a 45°

$$s_{max} = d$$

c) para barras dobladas a 45°

$$s_{max} = 0.75 d$$

2.- La separación "s" hallada por las ec. (3.19) y (3.22) será menor o igual a

$$\frac{FR Av f_y}{3.5 b}$$

3.5 DIMENSIONAMIENTO Y REVISIÓN DE LOSAS QUE TRABAJAN EN UN SOLO SENTIDO Y DE VIGAS "T", CONSIDERANDO EFECTOS DE FLEXIÓN Y FUERZA CORTANTE.

Veamos primeramente el caso de losas en un sentido. Las losas (elementos estructurales cuyas dimensiones en planta son relativamente grandes con respecto a su peralte) reciben sus cargas principales en dirección normal a su plano, a excepción en losas inclinadas que soportan cargas paralelas a ellas debido a la descomposición de sus componentes.

Las losas en una dirección trabajan en la perpendicular a sus apoyos. Dichos apoyos pueden ser vigas principales de un marco, vigas secundarias que se apoyan en los principales o en muros de mampostería que soportan directamente a la losa. La fig. 3.16 muestra una losa en una dirección.

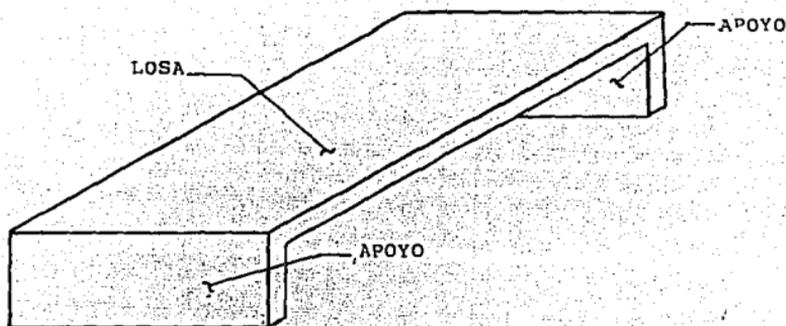


fig. 3-16

También se consideran como losas en una dirección a losas cuya relación entre lado corto y largo en el tablero sea mayor que dos, aunque dicho tablero esté apoyado en sus cuatro lados.

Las losas en una dirección se comportan esencialmente como vigas. Se pueden considerar como una viga con un ancho igual a la longitud del apoyo, pero regularmente se suponen que las losas están formadas por una serie de vigas paralelas independientes, de un metro de ancho que se flexionan uniformemente.

Debido a lo anterior, el R.C.D.F. señala que su dimensionamiento se puede hacer siguiendo las especificaciones para vigas, aunque tomando en cuenta algunos requisitos como los siguientes:

- 1.- Fijar un peralte que garantice que no habrá deflexiones excesivas.
- 2.- Respetar el recubrimiento marcado por el reglamento que se use.
- 3.- El análisis del elemento se hace considerando que es una viga de un metro de ancho.
- 4.- El claro de la viga se considerará a partir de los centros de los apoyos, excepto cuando el ancho de éstos sea mayor que el peralte efectivo, en cuyo caso, el claro se cuenta a partir de la sección que se halla a medio peralte efectivo del paño interior de los apoyos.
- 5.- El refuerzo por flexión se calcula usando las ecuaciones para vigas, considerando a b igual a 100 cm. El refuerzo obtenido se coloca en la dirección del claro.

considerado. En la dirección perpendicular es necesario también colocar refuerzo para tomar los esfuerzos producidos por contracción del concreto y por cambios de temperatura.

- 6.- El refuerzo mínimo será el mismo marcado por la ec. (3.6), pero no debe ser inferior al requerido por temperatura, el cual se calcula para elementos con dimensión mínima de 1.50 m. con la expresión

$$A_{st} = \frac{66000 h}{f_y(h+100)} \dots (3.23)$$

donde h es el espesor de la losa y f_y el límite de fluencia del acero a utilizar.

Para losas a la intemperie, el área de acero dada por la ec. (3.23) se debe duplicar. Otra manera de calcular este refuerzo, es usando un porcentaje de 0.002 o 0.004, para losas no expuestas / expuestas a la intemperie respectivamente.

- 7.- La fuerza cortante se revisa con la ecuación (3.21), que es la utilizable para elementos sin refuerzo en el alma. En caso de no resistir la sección la fuerza cortante, dicha sección debe aumentarse.

- 8.- Finalmente, para hallar la separación de las barras a flexión necesarias, dadas por la ecuación correspondiente, podemos usar ésta:

$$s = \frac{100 A_b}{A_s} \dots (3.24)$$

donde s , es la separación teórica de las barras, A_b el área de la barra a utilizar y A_s , el área de acero necesario en un metro de ancho.

En muchas construcciones de concreto armado y, particularmente en pisos, una losa de concreto se funde monolíticamente y se conecta con las vigas rectangulares de modo que se forman --- VIGAS "T". Dentro de ciertas especificaciones, se supone que la viga rectangular de ancho b' de la fig. 3-17 actúa estructuralmente con una parte de la losa de ancho b y espesor T . Así se forma la viga "T" ashurada en la figura. La parte de losa recibe el nombre de PATIN, y la parte baja el de NERVIO ó NERVADURA.

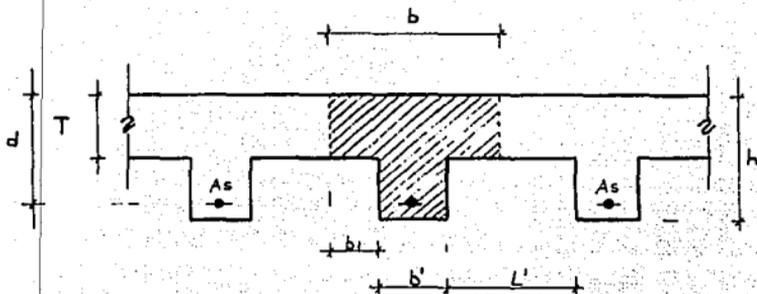


fig. 3-17

Para considerar a una viga como "T", es necesario que el eje neutro caiga más abajo del patín, o sea, que si el eje neutro cae dentro o en el límite del patín, la viga se analizará como rectangular con armado simple y ancho b igual al ancho del patín. En caso contrario, el área del patín no podrá resistir la fuerza de compresión y el eje neutro quedará localizado más abajo de la losa dando lugar a una viga "T".

El R.C.D.F. señala que el ancho del patín que trabaja a compresión, es el menor de los valores encontrados con las siguientes expresiones y basados en la fig. 3-17:

$$b1 = \begin{cases} L/8 - b'/2 & (L = \text{claro de la viga}) \\ L'/2 \\ 8T \end{cases}$$

Por lo tanto, $b = 2b1 + b' \dots (3.25)$
siendo b el ancho del patín de la viga "T".

Sabiendo que la profundidad del eje neutro "a" vale para una viga simplemente armada rectangular

$$a = \frac{As f_y}{f'_c b} \dots (3.26)$$

donde As se calcula

$$As = \frac{MR}{0.9 f_y z} \dots (3.27)$$

en la que

$$z = d - T/2 \dots (3.28)$$

siendo T el espesor de la losa.

Si a de la ec (3.26) es mayor que T, entonces la viga se dimensionará como "T".

El diseño por flexión se hace descomponiendo en dos partes a la sección "T": una sección compuesta por las aletas del patín en compresión y por el área Asp en tensión, que toma un momento M1, y otra sección formada por una viga rectangular de escuadría b'd y área de acero (As - Asp) que toma un momento M2, de tal manera que el elemento resistente total será $MR = M1 + M2$.

El valor de M1 se encuentra por la expresión

$$M1 = 0.9 Asp f_y (d - T/2) \dots (3.29)$$

donde Asp es el área de acero que tiene que equilibrar la compresión de las aletas del patín y vale

$$Asp = \frac{f''c (b - b') T}{f_y} \dots (3.30)$$

El momento M2 se encuentra restando al momento resistente-MR el valor de M1:

$$M2 = MR - M1 \dots (3.31)$$

Con el valor hallado de M2 encontramos el porcentaje de acero utilizando las fórmulas ya vistas anteriormente para una viga rectangular usando la escuadría de ésta como b'd.

Con el porcentaje obtenido hacemos la siguiente igualdad.

$$As - Asp = \rho b'd$$

donde finalmente

$$As = \rho b'd + Asp \dots (3.32)$$

que es el área necesaria de acero en la nervadura.

Debe revisarse el área de acero para que la viga falle por fluencia del refuerzo, es decir, tenga un tipo de falla dúctil. El R.C.D.F. recomienda hacer la siguiente comprobación:

$$As \leq As b$$

o sea

$$As \leq \frac{f''c}{f_y} \frac{4800}{6000 + f_y} b'd + Asp \dots (3.33)$$

La revisión por cortante se hace utilizando las expresiones para vigas rectangulares usando el ancho b' en lugar de b. Si el patín está a compresión, al producto b'd puede sumarse la cantidad T², siendo T el espesor del patín o de la losa.

3.6 DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE VIGAS DOBLEMENTE ARMADAS SUJETAS A FLEXION Y FUERZA CORTANTE.

A veces es deseable y hasta necesario, tener una sección-- con el menor peralte posible con el fin de satisfacer requisitos arquitectónicos o estructurales. Cuando a una sección se le dá un peralte menor que el correspondiente al diseño balanceado, ne cesitará una cantidad de acero tal que resulta sobreforzada.

Si se presenta esto, la fuerza de compresión admisible debe ser incrementada, y tal incremento se consigue con la adición de acero en la zona de compresión varias veces mayores que las de - concreto.

Una viga rectangular que presenta además del refuerzo en el lado de tensión, refuerzo en compresión se le denomina DOBLEMENTE ARMADA.

Las ecuaciones deducidas para una viga simplemente armada ya no son válidas para este caso, debido a que se había supuesto acero a tensión únicamente. Para vigas doblemente armadas se su pone que el momento último se compone de dos partes: una en que se considera la capacidad resistente del concreto y el acero balanceado (M_1) y otra, la capacidad resistente del acero de com - presión y una cantidad igual de acero a tensión (M_2). La fig.- 3-18 muestra la mecánica de la viga doblemente armada.

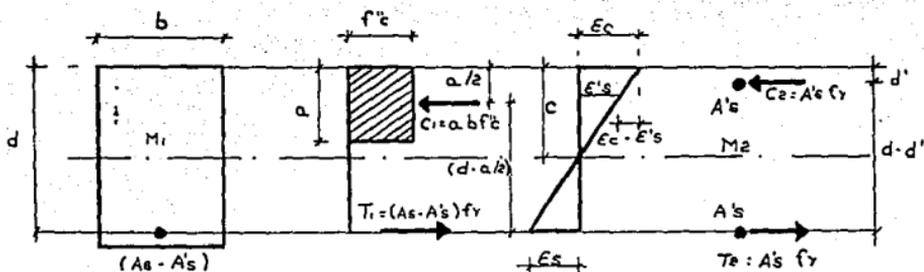


fig. 3-18

El momento resistente de la viga simplemente armada en que se ha dividido la doblemente armada vale:

$$M_1 = (A_s - A'_s) f_y (d - a/2) \dots (3.34)$$

El momento resistente del par de acero es.

$$M_2 = A'_s f_y (d - d') \dots (3.35)$$

Sumando ambas ecuaciones y afectandolas por el factor de resistencia FR para flexión, obtenemos el momento resistente para secciones rectangulares doblemente armadas:

$$MR = 0.9 (A_s - A'_s) f_y (d - a/2) + A'_s f_y (d - d') \dots (3.36)$$

donde $a = (A_s - A'_s) f_y / f'' c b$

A_s , el área de acero a tensión

A'_s , es el área de acero a compresión

d' , la distancia entre el centroide del acero a compresión y la fibra externa de compresión.

d , es el peralte efectivo.

Debe tomarse en cuenta que la ecuación (3.36) es válida solamente si se comprueba que el acero de compresión fluye cuando alcanza la resistencia de la sección. De la misma fig. 3-18 tenemos

$$\frac{E_c}{c} = \frac{E_c - E'_s}{d'}, \text{ de aquí } c = \frac{E_c d'}{E_c - E'_s}$$

si $E_c = 0.003$, $E'_s = f'_s / E_s$ y $f'_s = f_y$, encontramos

$$c = \frac{0.003 d'}{0.003 - f_y / E_s}$$

pero $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ por lo que

$$c = \frac{6000 d'}{6000 - f_y} \dots (3.37)$$

Igualando las fuerzas de compresión y tensión cuyos valores son

$$c = abf'' c + A'_s f_y \quad \text{y} \quad T = (A_s - A'_s) f_y + A'_s f_y$$

tenemos $abf'' c = (A_s - A'_s) f_y \dots (3.38)$

pero $c = 0.8C$, $A_s = pbd$ y $A'_s = p'bd$, por lo que sustituyendo estos valores en la ec. (3.38) encontramos.

$$0.8cf''c = (p - p') f_y d$$

de aquí $(p - p') = 0.8 c \frac{f''c}{f_y d} \dots (3.39)$

y sustituyendo la ec. (3.39) en la ec. (3.37) hallamos finalmente

$$(p-p') = \frac{4800}{6000+f_y} \frac{d'}{d} \frac{f''c}{f_y} \dots (3.40)$$

que es la ecuación que el R.C.D.F. da para comprobar si el acero en compresión fluye.

La revisión por cortante se hace de igual manera a la descrita para vigas simplemente armadas, pero respetando las exigencias del reglamento como colocar el refuerzo transversal para evitar el pandeo de las barras de compresión, utilizando como mínimo estribos del # 3 y a una separación no mayor que 16 veces el diámetro de las barras principales, ni a 48 veces el diámetro de los estribos.

3.7 ADHERENCIA Y ANCLAJE. LONGITUDES DE DESARROLLO. GANCHOS ESTANDAR. ESTIMACION DE AGRIETAMIENTO. CALCULO DE DEFLEXIONES PARA CARGAS DE CORTA Y LARGA DURACION. PERALTES MINIMOS.

Una de las hipótesis fundamentales para el diseño de elementos de concreto reforzado, dice que la adherencia entre acero y concreto es perfecta, es decir, no hay absolutamente ningún deslizamiento del acero de refuerzo dentro del concreto. Entonces podemos definir a la ADHERENCIA como la resistencia al deslizamiento y al esfuerzo que actúa a lo largo de la superficie de la barra como ESFUERZO DE ADHERENCIA.

Una barra corrugada de acero que ha sido embebida en un bloque de concreto (fig. 3-19), se somete a un esfuerzo de tensión T para arrancarla de su sitio, y quedando dicha fuerza equilibrada por la adherencia entre acero y concreto.

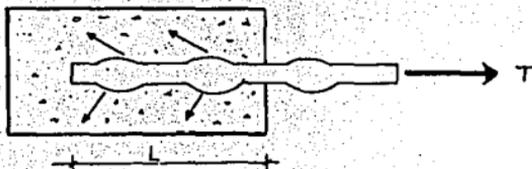


fig. 3-19

El esfuerzo de adherencia es máximo cerca de la superficie del concreto y va disminuyendo gradualmente a lo largo de la longitud embebida. Si "L" es suficiente habrá un punto en que el esfuerzo de tensión es nulo. Pero si T aumenta, empieza a desarrollarse una fuerza de fricción para impedir el arrancamiento. Si la fuerza de tensión se aumenta aún más, de modo que exceda los límites de adhesión y fricción, aún queda parte de adherencia debida a la deformación de la barra.

La varilla llega a arrancarse por desgarramiento en las rugosidades del concreto, o por el agrietamiento del mismo.

Los métodos para estimar los esfuerzos de adherencia se han desarrollado experimentalmente, pero no toman en cuenta una gran cantidad de variables que intervienen.

Debido a las diferencias entre algunas fórmulas y valores obtenidos en laboratorios, se le ha dado gran importancia al cálculo de longitudes de anclaje suficientes para desarrollar, por adherencia, el esfuerzo necesario en un punto considerado.

El ANCLAJE se define como la tensión que una barra puede desarrollar, por estar empotrada una cierta longitud en una masa de concreto:

La LONGITUD DE ANCLAJE O DESARROLLO es la longitud de barra requerida para desarrollar por adherencia un determinado esfuerzo en el acero, y depende del valor de $\sqrt{f'c}$. Según el R.C.D.F. la expresión para calcular la longitud necesaria para desarrollar la capacidad de una varilla es

$$Ldb = 0.06 \frac{As fy}{\sqrt{f'c}} \geq 0.006 db fy \dots (3.41)$$

donde Ldb, es la longitud de desarrollo de la barra
 As, el área de la sección de la barra
 fy, su esfuerzo de fluencia
 f'c, la resistencia a compresión del concreto.
 y db, diámetro de la barra.

Estas longitudes son básicas que deben modificarse de acuerdo a ciertas recomendaciones que marca el R.C.D.F., pero en ningún caso pueden ser menor a 30cm. y en barras a compresión, la longitud de desarrollo será al menos igual al 60% a la correspondiente a tensión, pero no menor a 20 cm.

Cuando en ocasiones no se tenga el suficiente espacio para alojar la longitud de desarrollo requerida, se hacen dobleces en el extremo de la barra de manera que se forman ganchos o escuadras que requieren de menor espacio que una sección recta para desarrollar un esfuerzo dado. Si estos gancho o escuadras reúnen determinadas características se denominan GANCHOS ESTANDAR.

Debido a que el R.C.D.F. no da recomendaciones explícitas-- para ganchos, se dan a continuación algunas disposiciones para considerar a un gancho como estándar, tomadas del reglamento --- A.C.I. La fig. 3-20 muestra los detalles de éstos.

- 1.- Un gancho semicircular, más una extensión recta no menor de cuatro diámetros de la barra, ni menor de 6 cm.
- 2.- Un doblez en ángulo recto, más una extensión de por lo menos 12 diámetros.
- 3.- Para anclaje de estribos exclusivamente, un doblez de 90° a 135°, más una extensión de por lo menos 6 diámetros, pero no menor a 6 cm.

El empleo de ganchos extremos es muy recomendable en miembros sujetos a intensas fuerzas accidentales (sismo o viento), o bien en barras de alta resistencia, debido a que ayudará a conservar la integridad de la estructura, aún en el caso que presentará algún deslizamiento del refuerzo.

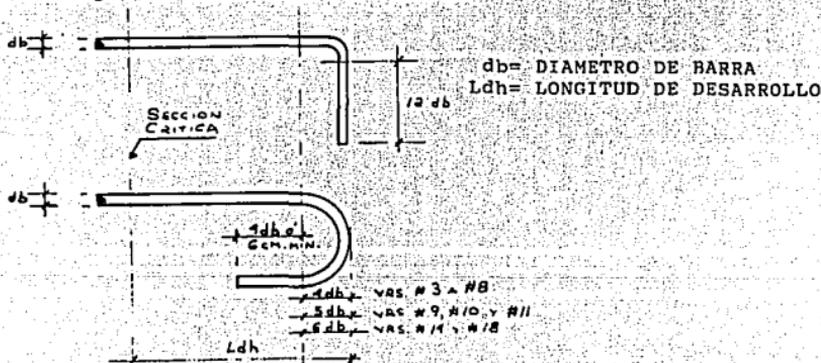


fig. 3-20

Los elementos de concreto tienden a agrietarse debido a la baja resistencia de éste a la tensión. Entre las causas que provocan agrietamientos al concreto, están las debidas a deformaciones por cambios volumétricos, por esfuerzos provocados por fuerzas axiales de tensión, por momentos flexionantes, o bien por fuerzas cortantes.

La apariencia, y el riesgo de corrosión del acero de refuerzo, son dos razones para controlar el agrietamiento y tomarse en cuenta en el diseño de estructuras. Esto ha llevado a desarro--

llar métodos para predecir el ancho de las grietas, y además establecer límites aceptables de éstas

Se ha hallado experimentalmente que el ancho de las grietas es mayor en barras lisas que en corrugadas, y que es directamente proporcional al espesor del recubrimiento. Además, el ancho de las grietas aumenta con el esfuerzo en el acero y depende del área de concreto que rodea a las barras de tensión, disminuyendo cuanto mejor se encuentra el acero distribuido en la zona.

Esto último es importante, ya que debido a la naturaleza -- aleatoria del agrietamiento, los cálculos de anchos de grieta so lo deben usarse como guía para tener una disposición del refuerzo, y no como valores para comparar físicamente el ancho de las grietas en las estructuras.

El R.C.D.F. al igual que el A.C.I., se basan en las ecuaciones que proponen los investigadores Gergely y Lutz. Se recomienda el siguiente criterio para agrietamientos, aplicable a elementos no expuestos a un ambiente muy agresivo y que no deben ser impermeables:

$$Z \leq 40\,000 \text{ kg/cm}^2 \dots (3.42)$$

siendo Z, el esfuerzo de alargamiento del acero y vale

$$Z = f_s \sqrt[3]{dc \cdot A} \dots (3.43)$$

donde f_s , es el esfuerzo del acero en condiciones de servicio.
 dc , el recubrimiento de la barra más próxima a la cara de la tensión, medida desde el centro de la barra.

A, es el área de concreto o tensión, que rodea el refuerzo principal de tensión y cuyo centroide coincide con el de dicho refuerzo, dividido entre el número de barras (cuando las barras no son iguales, se toma como número de barras, la división del área total de acero entre la barra de mayor diámetro).

El valor de f_s puede considerarse como

$$f_s = \frac{M}{0.9d \cdot A_s} \dots (3.44)$$

o bien como

$$f_s = 0.6 f_y \dots (3.45)$$

siendo M, el momento flexionante en condiciones de servicio, d, el peralte efectivo y A_s el área de acero a tensión.

El ancho de las grietas se estiman con la siguiente fórmula y se compara con los anchos permisibles, que según las condiciones de exposición, varían de 0.1 mm. a 0.5mm.

$$W_{max} = kr \frac{f_s}{E_s} \dots (3.46)$$

donde W_{max} , es el ancho máximo de la grieta
 k , una constante de valor igual a 3.3. para varillas co
rrugadas.
 r , el recubrimiento libre lateral.
 E_s , el módulo de elasticidad del acero.
 El significado y valor de f_s ya se anotó anteriormente, y puede-
 verse la fig. 3-21 para los conceptos dados.

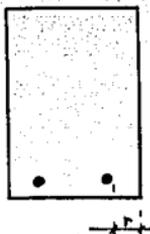


fig. 3-21

El análisis de deflexiones en estructuras se hace necesario por razones de seguridad, o por el aspecto de la respuesta humana, lo que ha llevado a los investigadores a encontrar, al igual que en los agrietamientos, métodos aproximados para calcular deflexiones y establecer límites tolerables para estos elementos estructurales.

A pesar de haberse realizado numerosas investigaciones para el cálculo de deflexiones, se continúa teniendo problemas en la obtención de resultados, debido a variables muy difíciles de estimar, como el comportamiento del concreto con el tiempo, condiciones reales de carga, humedad, temperatura y distribución aleatoria de grietas en el elemento entre otras. El aspecto de limitaciones en deflexiones, ha sido al contrario, muy poco investigado, y los reglamentos han establecido algunas reglas empíricas que limitan la relación deflexión/carga, o bien, valores absolutos de las deflexiones.

Las deflexiones bajo cargas de corta duración (o deflexiones inmediatas) se refiere a las deflexiones que se presentan al

instante de aplicadas cargas de servicio. Las principales variables que afectan al elemento en este tipo de flechas son: resistencia a la tensión del concreto, el módulo de elasticidad del concreto, el porcentaje de acero a tensión y el agrietamiento del elemento.

El R.C.D.F. utiliza un módulo de elasticidad igual a

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'c} \dots (3.47)$$

La expresión para calcular la flecha depende de las condiciones de apoyo y tipo de carga de la viga. Por ejemplo, para una viga simplemente apoyada y carga uniforme, la ecuación de la flecha es $5WL^4/384 EI$, donde W es la carga de servicio, L el claro de la viga, E el módulo de elasticidad del concreto (ec. 3.47), e I el momento de inercia de la sección.

Para esto último, hagamos notar que I se considera para elementos con bajo porcentaje de acero, el correspondiente a la sección total de concreto, no agrietada y sin considerar el acero. Para elementos con porcentaje alto de acero, se utiliza el momento de inercia de la sección transformada agrietada. En vigas continuas se toma un valor promedio de los momentos de inercia en las regiones de momento positivo y negativo.

Las deflexiones bajo cargas de servicio de larga duración (o deflexiones diferidas) se refieren al incremento de deflexiones que se producen en un elemento sometida a una carga sostenida durante un largo período de tiempo. El motivo de esto se debe a los fenómenos de contracción y de flujo plástico que sufre el concreto.

Para la estimación de esta deflexión adicional, el R.C.D.F. recomienda multiplicar la flecha calculada por corta duración, por un factor.

$$\Delta_d = \Delta_i \left(2 - 1.2 \frac{A's}{A_s} \right) \geq 0.6 \Delta_i \dots (3.48)$$

Δ_d , la deflexión inmediata

donde Δ_i , es la deflexión diferida

A's y A_s , son las áreas de acero en la zona de compresión y tensión respectivamente.

La ecuación (3.48) se compara con los valores que se consideran admisibles. Según el R.C.D.F.

$$f_{max} = 0.5 + \frac{L}{240} \text{ (cm)}$$

$$f_{max} = 0.3 + \frac{L}{480} \text{ (cm)}$$

La primera se utiliza para miembros cuyas deformaciones afectan elementos no estructurales, como muros de mampostería, que no sean capaces de soportar deformaciones apreciables. En ambas, L es la longitud del claro.

Los PERALTES MINIMOS fijados por algunos reglamentos se hacen debido a que a veces los porcentajes de acero suelen ser muy elevados (aún dentro del porcentaje balanceado), y se traducen en un número de barras muy grande, lo que provoca dificultades constructivas y además muestran altas deflexiones.

Cuando no se calculen deflexiones en vigas libremente apoyadas, el A.C.I. recomienda un peralte mínimo de $L/20$, es decir,

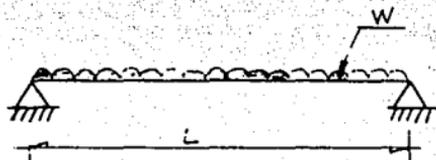
$$h_{\min} = L/20$$

siendo h , el peralte total de la viga.

CAPITULO : 5

EJEMPLO : No 4

DISEÑO A FLEXION DE UNA VIGA SIMPLEMENTE ARMADA



DATOS :

$$L = 500 \text{ cm.}$$

$$W = 1.0 \text{ T/M} = 10 \text{ Kg/cm.}$$

$$h = 35 \text{ cm}$$

$$b = 15 \text{ cm}$$

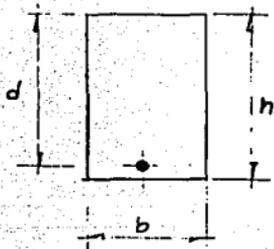
$$d = 32.5 \text{ cm}$$

$$f_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

REGLAMENTO : R.C.D.F.

$$F.C. = 1.4$$



PROCEDIMIENTO

Ecuación
Requerida

$$p_{min} = c \cdot \sqrt{200 / 4200} = 0.0023$$

3.6

$$p_{max} = (c \cdot f_c) \cdot (200 / 4200) \cdot (4800 / 600 + 4200) = 0.168$$

3.4

$$M_u = (1.4) \cdot (1.0) \cdot (500^2 / 8) = 437.500 \text{ Kg-cm} = MR$$

$$MR = (0.9) \cdot (15) \cdot (32.5^2) \cdot (q) \cdot (1 - 0.5 q)$$

3.3

$$437,500 = 2'851,875 q - 0.5 q^2$$

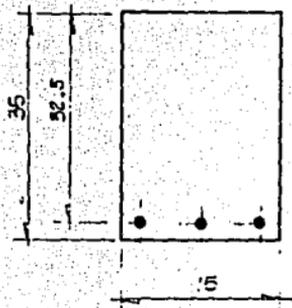
$$q = 0.153$$

COMO $q = \rho f_y / f_c c$

$$\rho = 0.0073 : \therefore \rho_{min} < \rho < \rho_{max}$$

$$A_s \text{ REQ} = (0.0073) \cdot (15) \cdot (32.5) = 3.56 \text{ cm}^2$$

PODEMOS UTILIZAR 3 VARB. #4, $A_s = (3) \cdot (1.27) = 3.81 \text{ cm}^2$



● 3 VARB. #4 ($d = 1.27$)

DISEÑO DE UNA VIGA POR CORTANTE



DATOS :

$$L = 500 \text{ cm}$$

$$W = 2.0 \text{ T/M} = 20 \text{ Kg/cm}$$

(INCLUYENDO PESO PROPIO)

$$h = 40 \text{ cm}$$

$$d = 37.5 \text{ cm}$$

$$b = 20 \text{ cm}$$

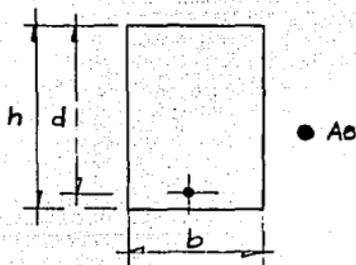
$$f'c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 2300 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\rho = 0.006 \text{ (SUPUESTO)}$$

R.C.D.F.

$$\phi_c = 1.4$$



PROCEDIMIENTO

Ecuación
Referida

$$p = 0.006 < 0.010$$

$$V_{cr} = (0.8)(20)(37.5)(0.2 + 30 \times 0.006)(\sqrt{160}) = 2884 \text{ Kg.} \quad 3.20$$

$$V_u = (1.4)(20)(500/2) = 7000 \text{ Kg.}$$

$V_u > V_{cr} \therefore$ SE REQUIEREN ESTRIBOS

PROPONIENDO VAR# $\phi = 1/4" (\#2)$, EN 2 RAMAS

$$A_v = (0.31)(2) = 0.62 \text{ cm}^2$$

$$s_1 = (0.8)(0.62)(2300)(37.5) / 7000 - 2884 = 10 \text{ cm.} \quad 3.22$$

REVISIÓN SEPACIONES MAXIMAS PERMISIBLES :

$$(0.8)(0.62)(2300) / (3.5)(20) = 16.29 \text{ cm } \hat{d}$$

$$(1.5)(0.8)(20)(37.5)(\sqrt{160}) = 11384 > V_u \therefore s_{max} = 18 \text{ cm}$$

CORTANTE A 50 cms. DEL APOYO :

$$V_u = (1.4)(5000 - 20 \times 50) = 5600 \text{ Kg}$$

$$s_2 = (0.8)(0.62)(2300)(37.5) / 5600 - 2884 = 16.75 \text{ cm.} \quad 3.22$$

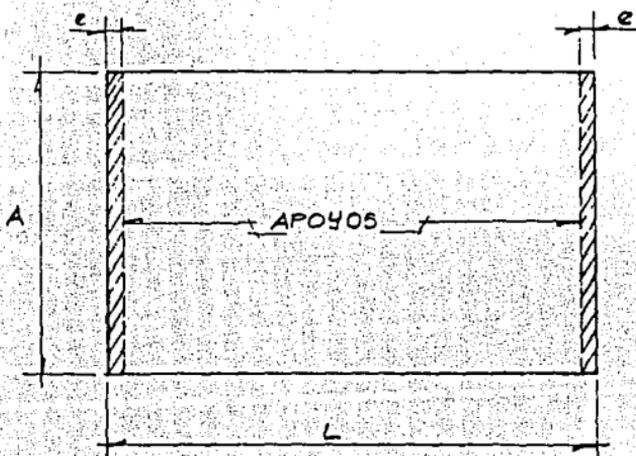
POR LO QUE SE RECOMIENDA USAR

6 ESTRIBOS CON $s = 10 \text{ cm.}$ Y EL RESTO,
CON $s = 15 \text{ cm.}$

CAPITULO : 3

EJEMPLO : No. 6

DISEÑO A FLEXIÓN Y CORTANTE DE UNA LOSA EN UNA DIRECCION



DATOS :

$$A = 300 \text{ cm}$$

$$L = 600 \text{ cm}$$

$$W = 1200 \text{ Kg/cm}^2 \text{ (INCL. p. PROPIO)}$$

$$e = 20 \text{ cm}$$

$$f'c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$fy = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F.C. = 1.4$$

R.C.D.F.

CAPITULO : 3

EJEMPLO No. 2

PROCEDIMIENTO

ECUACION
REFERIDA

ELEMENTOS MECANICOS :

PARA UNA FRANJA DE 1 m. DE ANCHO :

$$W = (1200)(1.0) = 1200 \text{ Kg/m.}$$

$$M_U = \frac{(1.4)(12.0)(600^2)}{8} = 756,000 \text{ Kg-cm}$$

$$V_U = \frac{(1.4)(12.0)(600)}{2} = 5040 \text{ Kg.}$$

PERALTE MINIMO :

$$h_{\text{min}} = \frac{L}{20} \quad (\text{PARA GARANTIZAR DEFLEXIONES NO EXCESIVAS})$$

$$= \frac{600}{20} = 30 \text{ cm}$$

USEMOS RECUBRIMIENTO DE 5 cm $\therefore d = 25 \text{ cm.}$

FLEXION : $p_{\text{min}} = 0.0023$
 $p_{\text{max}} = 0.168$

$$756,000 = (0.9)(100)(25^2)(200)(q)(1-0.5q)$$

$$q = 0.069$$

$$p = \frac{(0.069)(200 \times 0.8)}{4200} = 0.0026 < p_{\text{max}}$$

$$A_s = (0.0026)(100)(25) = 6.63 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{st} = \frac{(6600)(30)}{(4200)(30+100)} = 3.62 \text{ cm}^2/\text{m}$$

3.6
3.4
3.3

3.23

PROCEDIMIENTO

ECUACION REFERIDA

PARA EL SENTIDO PRINCIPAL, USAREMOS VRS. #4
($A_b = 1.27 \text{ cm}^2$) :

$$S = \frac{(100)(1.27)}{3.63} = 19.15 \text{ cm} \approx 20 \text{ cm}$$

3.24

EN EL OTRO SENTIDO, USAREMOS VRS. #3 ($A_b = 0.71 \text{ cm}^2$)

3.24

$$S = \frac{(100)(0.71)}{3.62} = 19.7 \text{ cm} \approx 20 \text{ cm}$$

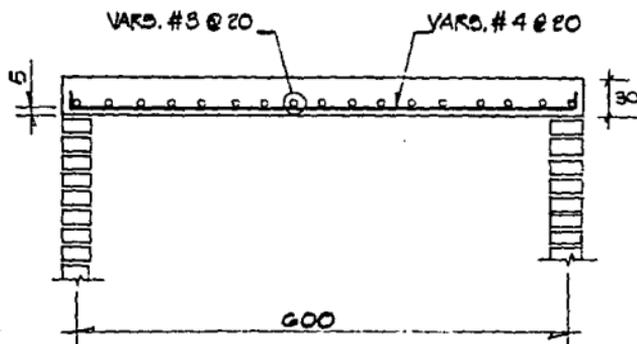
CORTANTE

$$V_u = 5040 \text{ Kg}$$

$$V_{cr} = (0.5)(0.8)(100)(25)(\sqrt{200 \times 0.8}) = 12,649 \text{ Kg}$$

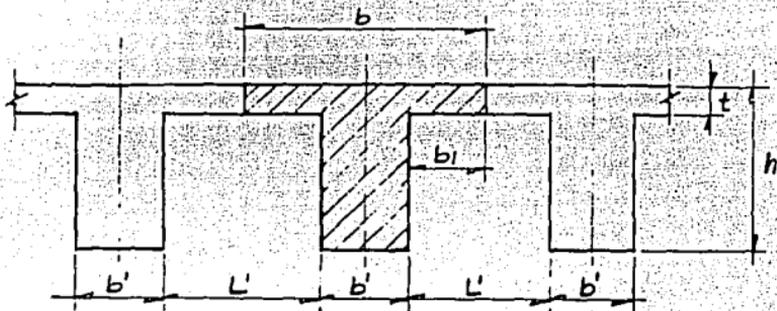
3.21

$V_{cr} > V_u$, SE ACEPTA EL PERALTE POR CORTANTE



NOTA : COMO $h = 30 \text{ cm} > 20 \text{ cm}$, DEBERAN COLOCARSE
2 LECHOS DE VARILLAS.

DISEÑO A FLEXION DE UNA VIGA "T"



DATOS :

CLARO DE VIGA : 900 cm

MACTUANTE : 48 t/m

 $b' = 35$ cm $b' = 30$ cm $L' = 70$ cm $t = 8$ cm $h = 55$ cm $r = 5$ cm $\therefore d = 50$ cm. $f'c = 200$ Kg/cm², $f^c = 160$ Kg/cm² $f4 = 4200$ Kg/cm.

F.C. = 1.4

REGLAMENTO : R.C.D.F

PROCEDIMIENTO

EVALUACION
REFERIDAANCHO DE PATIN A COMPRESION :

$$b1 \begin{cases} 900/8 - 30/2 = 97.5 \text{ cm} \\ 70/2 = 35 \text{ cm} \\ (8)(8) = 64 \text{ cm} \end{cases}$$

EL MENOR VALOR : 35 cm = b1

$$b = (2)(35) + 30 = 100 \text{ cm} \quad \dots \dots \dots 3.25$$

VERIFICACION COMO VIGA 'T' :

$$z = 50 - 8/2 = 46 \text{ cm} \quad \dots \dots \dots 3.26$$

$$A_s = \frac{(1.4)(48 \times 10^5)}{(0.9)(4200)(46)} = 38.64 \text{ cm}^2 \quad \dots \dots \dots 3.27$$

$$a = \frac{(38.64)(4200)}{(0.8)(200)(100)} = 10.14 \text{ cm.} \quad \dots \dots \dots 3.28$$

COMO $a = 10.14 > t = 8 \text{ cm}$, ES VIGA 'T'MOMENTOS EN PATINES :

$$A_{sp} = \frac{(0.8)(200)(100 - 30)(8)}{4200} = 21.33 \text{ cm}^2 \quad \dots \dots \dots 3.30$$

$$M1 = (0.9)(21.33)(4200)(50 - 8/2) = 3'709.440 \text{ Kg-cm} \quad 3.29$$

$$M2 = (1.4)(48)(10^5) - 3'709.440 = 3'010.560 \text{ Kg-cm} \quad 3.31$$

PORCENTAJES DE AGERO :

$$3'010.560 = (0.9)(30)(50^2)(160)(q)(1 - 0.5q)$$

$$q = 0.33$$

$$p = (0.33)(160)/4200 = 0.012$$

PROCEDIMIENTO

RECUERDA
REFERIR

$$A_s = (0.012)(30)(50) + 21.33 = 39.33 \text{ cm}^2$$

3.32

$$A_{sb} = \left(\frac{160}{4200}\right) \left(\frac{4800}{6000+4200}\right) (30)(50) + 21.33 = 48.22 \text{ cm}^2$$

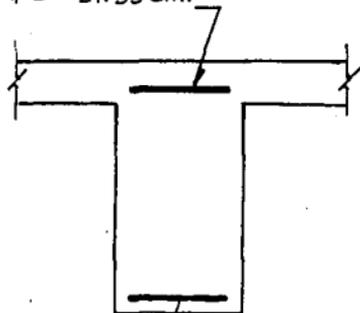
$$A_s < A_{sb}$$

.....

3.33

POR LO TANTO EL ACERO FLUYE, Y LA SECCION Y EL ARMADO ES ACEPTABLE.

$$A_{ps} = 21.33 \text{ cm}^2$$

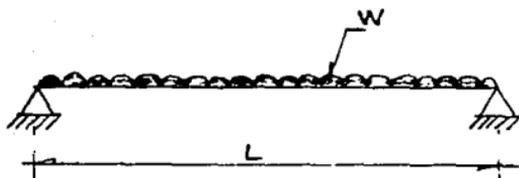


$$A_s = 39.33 \text{ cm}^2$$

CAPITULO : 3

EJEMPLO : No. 8

DISEÑO A FLEXION DE UNA VIGA DOBLEMENTE ARMADA



DATOS

$$L = 600 \text{ cm}$$

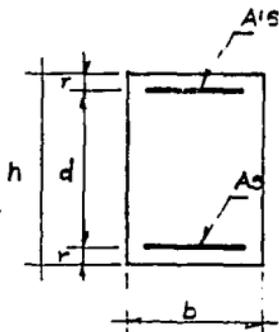
$$W = 8 \text{ t/m (INCL. PESO PO.)}$$

$$h = 55 \text{ cm}$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$d = 50 \text{ cm}$$

$$b = 30 \text{ cm}$$



$$f'_c = 250 \text{ Kg/cm}^2 ; f_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F.C. = 1.4$$

REGLAMENTO : R.C.D.F.

PROCEDIMIENTO

ECUACION
REFERIDA

ELEMENTOS MECANICOS :

$$M_{ACT} = (8)(6^2) / 8 = 36.0 \text{ t/m}$$

$$M_U = (1.4)(36) = 50.4 \text{ t/m}$$

PORCENTAJES DE ACERO PERMISIBLE :

$$p_{min} = (0.7)(\sqrt{250}) / 4200 = 0.0026 \quad \dots \quad 3.0$$

$$p_{max} = 0.75 p_b$$

$$= (0.75) \left(\frac{4800}{4200 + 6000} \right) \left(\frac{200}{4200} \right) = 0.0168 \quad \leftarrow 3.4$$

$$q_{max} = 0.55$$

MOMENTO RESISTENTE COMO VIGA SIMPLEMENTE ARMADO

$$M_{R1} = (0.9)(30)(50^2)(200)(0.35)(1 - 0.5 \times 0.35) = 3'898,125 \text{ Kg/cm} \quad 3.3$$

$$M_{R1} = 38.98 \text{ t-m} < M_U = 50.4 \text{ t-m}$$

∴ REQUIERE ACERO A COMPRESION

REVISION COMO VIGA DOBLEMENTE ARMADA

$$M_{R2} = 50.4 - 38.98 = 11.42 \text{ t-m}$$

$$A_s - A_s'_{max} = \frac{11.42 \times 10^5}{(0.9)(4200)(50 - 5)} = 6.71 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 6.71 + (0.0168 \times 36 \times 50) = 31.91 \text{ cm}^2$$

$$A_s' = \frac{6.71}{0.75} = 8.94 \text{ cm}^2$$

PROCEDIMIENTO

EQUACION
REFERIDA

$$p (A TENSION) = \frac{31.91}{30 \times 50} = 0.021$$

$$p' (A COMPRESION) = \frac{8.94}{30 \times 50} = 0.0059$$

VERIFICACION DE QUE FLUYA EL ACERO A COMPRESION

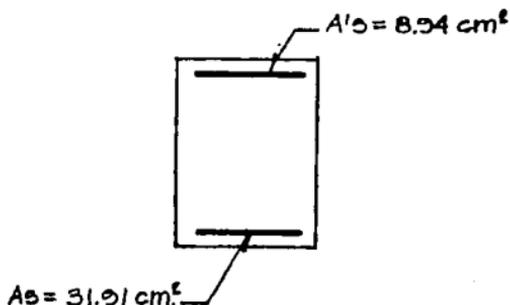
$$\left(\frac{4800}{6000 + 4800} \right) \left(\frac{5}{50} \right) \left(\frac{200}{4200} \right) = 0.0022$$

$$p - p' = 0.021 - 0.0059 = 0.0151$$

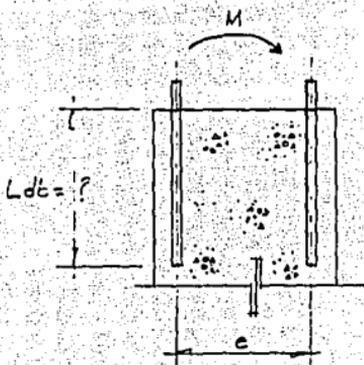
$$0.0151 > 0.0022$$

..... 3.40

∴ FLUYE EL ACERO A COMPRESION.



LONGITUD DE ANCLAJE DE UNA BARRA



DATOS

$$M = 2.0 \text{ T-m}$$

$$e = 57 \text{ cm}$$

$$f'c = 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$fy = 2830 \text{ Kg/cm}^2 \text{ (BARRA LISA)}$$

$$fy = 1265 \text{ Kg/cm}^2$$

REGLAMENTO R.C.D.F.

PROCEDIMIENTO

REACCIÓN
RESPUESTA

BARRA REQUERIDA :

$$T = \frac{2.0 \times 10^5}{57} = 3508 \text{ Kg.}$$

$$A_s = \frac{3508}{1265} = 2.77 \text{ cm}^2$$

SE USARA BARRA 3/4" : $A_s = 2.85$ $d_b = (1.90 \text{ cm})$

LONGITUD DE DESARROLLO RECTA :

$$(0.06)(2.85)(2530) / \sqrt{250} = 27.0 \text{ cm.}$$

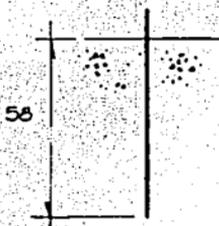
$$(0.006)(1.90)(2530) = 29.0 \text{ cm.} \quad \dots \text{ (RIGE)} \quad \dots \quad 3.41$$

POR SER BARRA LISA :

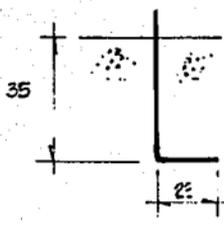
$$L_{db} = (29.04)(2) = 58.0 \text{ cm.}$$

CON GANCHO ESTANDAR :

$$\text{EXTENSION} = (12)(1.9) = 23 \text{ cm.}$$



RECTA



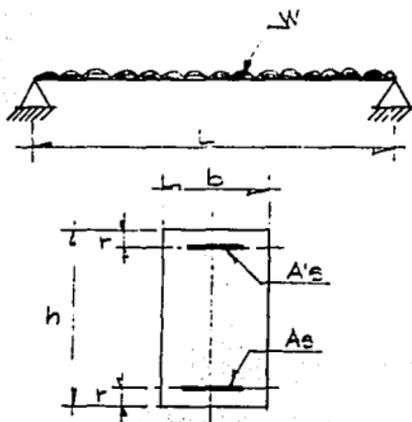
CON GANCHO ESTANDAR

CAPITULO :

E

EJEMPLO : No. 10

CALCULO DE DEFLEXIONES Y AGRIETAMIENTO
DE UNA VIGA DE CONCRETO REFORZADO



DATOS :

CARGA PERMANENTE : 1.5 T/M (INC. POFO)

CARGA VIVA : 2.8 T/M

CARGA VIVA POR

DEFLEXIONES DIFERIDAS : 0.8 T/M

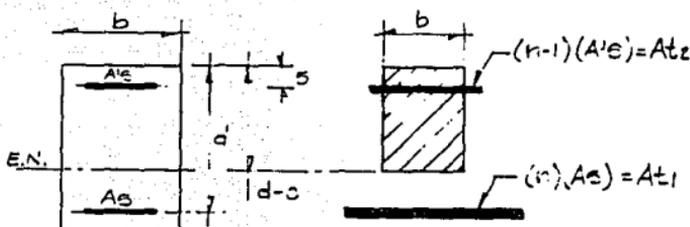
 $L = 550$ cm $b = 35$ cm $h = 70$ cm $r = 5$ cm $d = 65$ cm $A_e = 11.40$ cm² (4. VARS. # 6) $A's = 5.70$ cm² (2 VARS. # 6) $f'c = 250$ Kg/cm² $f_y = 4200$ Kg/cm²

CODIGO : R.C.D.F.

PROCEDIMIENTO

SECCION REFLEJADA

MOMENTO DE INERCIA SECCION TRANSFORMADA Y AGRIETADA



$$E_c = 10000 \sqrt{250} = 158113 \text{ Kg/cm}^2$$

$$E_s = 2'000,000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$n = \frac{2'000,000}{158,113} = 12.65$$

$$A_{t1} = (12.65)(1140) = 144.21 \text{ cm}^2$$

$$A_{t2} = (12.65-1)(570) = 64.40 \text{ cm}^2$$

TOMANDO MOMENTOS ESTATICOS RESPECTO AL EJE NEUTRO

$$(A_{t1})(d-c) = (b)(c)(c/2) + (A_{t2})(c-E)$$

$$(144.21)(65-c) = 17.5 c^2 + (64.40)(c-5)$$

DESPEJANDO Y RESOLVIENDO :

$$c = 18.26 \text{ cm}$$

$$A_e = (A_{t1})(d-c)^2 = (144.21)(65-18.26)^2 = 2'5,045 \text{ cm}^4$$

$$\frac{E_c}{E_s} = \frac{(35)(18.26)^2}{3} = 71.03 \text{ cm}^4$$

$$(A_{t2})(c-E)^2 = (64.40)(18.26-5)^2 = 11,676 \text{ cm}^4$$

$$I_{aa} = 327,751 \text{ cm}^4$$

3.47

PROCEDIMIENTO

REDUCCION
DEFLEXIONDEFLEXION INMEDIATA :

$$A_i = \frac{5wL^4}{384 EI}$$

$$w = (1.5 + 2.8) = 4.3 \text{ T/M} = 4.3 \text{ Kg/cm}$$

$$A_i = \frac{(5)(4.3)(550^4)}{(384)(158,119)(387,75)} = 0.81 \text{ cm}$$

DEFLEXION DIFERIDA :

$$A_d = A_i \left(2 - 1.12 \frac{A'_E}{A_E} \right) \geq 0.6 A_i \quad \dots \dots \quad 3.4B$$

$$\frac{A'_E}{A_E} = \frac{5.7}{11.40} = 0.5$$

$$A_d = 0.81 (2 - 1.2 \times 0.5) = 1.10 \text{ cm}$$

$$A_{\text{MAX PERM}} = 0.8 + \frac{L}{480} = 0.8 + \frac{550}{480} = 1.44 \text{ cm}$$

$$A_d = 1.10 < A_{\text{MAX PERM}} = 1.44 \therefore \text{ES ACEPTABLE.}$$

\therefore LA SECCION SE ACEPTA POR DEFLEXION

AGRIETAMIENTO :MOMENTO ACTUANTE

$$M_A = (4.3)(550^2) / 8 = 1'625,937 \text{ Kg/cm}^2$$

$$s_e = \frac{1'625,937}{(0.8)(65)(11.4)} = 2.438 \text{ Kg/cm}^2$$

3.4A

PROCEDIMIENTO

REACCION
RESPUESTA

$$d' f_s = (0.5)(4200) = 2100 \text{ Kg/cm}^2$$

$$d_c = r = 5 \text{ cm.}$$

$$A = \frac{(d_c)(2)(b^2)}{\# \text{ barras}} = \frac{(5)(2)(33)}{4} = 82.5 \text{ cm}^2$$

$$z = (2438) \sqrt[3]{(5)(82.5)} = 18136 \text{ Kg/cm}^2 \dots \dots \dots 3.43$$

$$z = 18.136 \text{ Kg/cm}^2 < 40,000 \text{ Kg/cm}^2 \dots \dots \dots 3.42$$

∴ LA SECCION SE ACEPTA POR AGRIETAMIENTO.

"Los reglamentos procuran hermanar dos
conceptos que tienen un punto de equi
librio difícil: seguridad y economía"

Oscar de Buen López

CAPITULO

4

CAPITULO 4

LOSAS DE CONCRETO REFORZADO

4.1 DESCRIPCION DEL COMPORTAMIENTO DE UNA PLACA. ECUACION -- DIFERENCIAL DE UNA PLACA PLANA.

Las LOSAS ó ELEMENTOS DE PLACA, es otro elemento estructural muy usado por razones de funcionamiento, economía o construcción. El comportamiento estructural de una placa se puede ver por semejanza, al de dos capas de franjas de vigas, en donde cada capa está formada por fajas yuxtapuestas o unidas lado a lado. Las capas están orientadas de modo que las direcciones de las franjas sean perpendiculares cuando se coloca una capa sobre la otra, como se ve en la fig. 4-1.

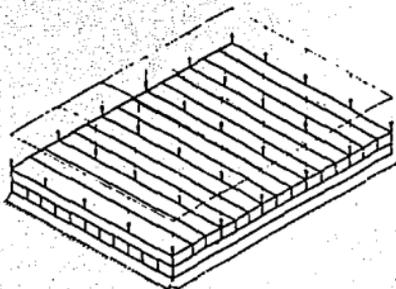


fig. 4-1

Si los bordes de tal placa están sustentados y está sometida a una carga transversal (en este caso vertical), ambas capas colaborarán para resistir la carga, flexionándose cada una de ellas y transmitiendo la carga al par de soportes de borde en los extremos de sus franjas de viga. Cabe hacer notar que para que sea correcto el funcionamiento supuesto, se debe considerar que el espesor de cada capa es igual al espesor total de la placa.

Usualmente se han analizado las losas como placas planas - delgadas, hechas de un material homogéneo y elástico que tienen igual resistencia y rigidez en todas las direcciones, es decir, de un material isótropo. Debido a que el concreto no cumple con estas características, los resultados que se obtienen utilizando la teoría de la elasticidad son solo aproximados y sólo se consideran válidos en la etapa de comportamiento lineal.

Debido a la aridez desde el punto de vista teórico ó matemático, solo anotaremos la parte final de la ecuación diferencial de una placa plana, obtenida de las condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones del elemento diferencial de losa mostrada en la fig. 4-2 (La fig. 4-2b muestra por medio de vectores, los momentos actuantes en la fig. 4-2a)

$$\frac{\delta^4 z}{\delta x^4} + 2\frac{\delta^4 z}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 z}{\delta y^4} = \frac{W}{N} \dots (4.1)$$

donde Z, son las deflexiones de la losa en dirección perpendicular a su plano.

X, Y, son las coordenadas en el plano de la losa.

W, es la carga aplicada.

y N, es la rigidez de la losa, igual a

$$N = \frac{E h^3}{12(1-2\mu)}$$

en la que a su vez, h, es el peralte total, E el módulo de elasticidad y μ el coeficiente de Poisson.

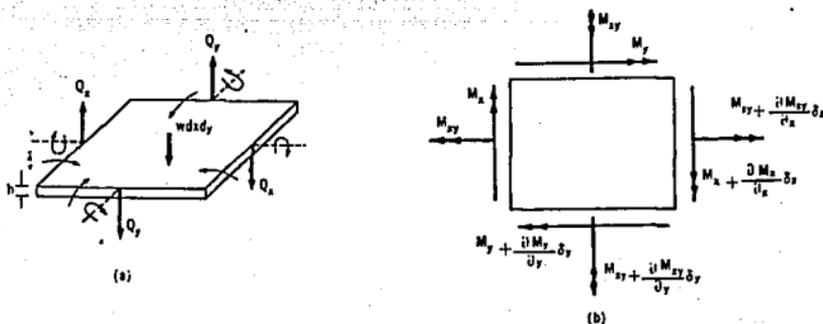


fig. 4-2

Además de las ecuaciones de equilibrio y continuidad de la ec. (4.1), deben cumplirse condiciones de frontera o condiciones de borde de la losa (borde empotrado, libremente apoyado, etc.) - que se satisfacen ajustando las constantes de integración que aparecen al resolver la ecuación diferencial dada en (4-1).

La solución de dicha ecuación diferencial se realiza usando un método de integración por series, lo cual tiene limitaciones en cuanto a forma de placa y condiciones de apoyo, o bien por el método de diferencias finitas o el de elementos finitos. Estos dos últimos métodos requieren del uso de computadoras debido al elevado número de ecuaciones lineales que de ellos resultan.

Como notamos, la determinación de acciones internas por el procedimiento atrás descrito, es muy laborioso para fines prácticos, además de sus limitaciones. Sin embargo, para fines de diseño se han elaborado, con algunas modificaciones, tablas que -- contienen coeficientes de cálculo, que más adelante veremos.

4.2 DESCRIPCIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE UNA LOSA DE CONCRETO REFORZADO. CLASIFICACIÓN DE LAS LOSAS DE ACUERDO A SUS CONDICIONES DE APOYO.

Las losas en dos direcciones son extremadamente complejas y estáticamente indeterminadas. Además de los métodos analíticos (como el descrito en el punto 4.1), se han desarrollado otros aproximados para determinar esfuerzos en las losas, como el de rigidez relativas que permite visualizar el comportamiento de ellas.

La losa mostrada en la fig. 4-3 está sometida a la acción de una carga vertical uniforme. Si la losa está apoyada en todos los bordes y que no pueden ceder, la deflexión en el punto "e" de una franja central "ab" debe ser igual a la deflexión en "e" de otra franja central "cd".

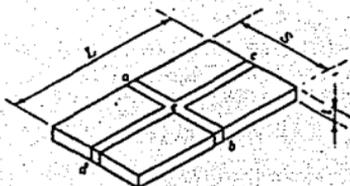


fig. 4-3

La deflexión de una viga simplemente apoyada con carga uniforme es, como ya habíamos visto, $5WL^4/384 EI$. Llamemos W_{ab} y W_{cd} a las partes de la carga transmitida a las franjas "ab" y "cd" respectivamente, e igualemos las deflexiones de cada franja en el punto "e".

$$\frac{5 W_{ab} S^4}{384 E I} = \frac{5 W_{cd} L^4}{384 E I}$$

que simplificando tenemos

$$\frac{W_{ab}}{W_{cd}} = \frac{L^4}{S^4} \dots (4.2)$$

Por condiciones de equilibrio la suma de cargas W_{ab} y W_{cd} debe ser la carga total W . Por lo tanto:

$$W_{ab} + W_{cd} = W \dots (4.3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (4.2) y (4.3) se obtiene.

$$W_{ab} = \frac{WL^4}{L^4 + S^4} \dots (4.4)$$

y

$$W_{cd} = \frac{W S^4}{L^4 + S^4} \dots (4.5)$$

Estas ecuaciones permiten obtener las cargas con las que se diseñan las franjas "ab" y "cd" como si fuesen vigas aisladas. Notemos que las cargas se reparten de manera inversamente proporcional a la cuarta potencia de los claros, es decir, la losa trabaja más en claro corto que en la dirección del claro largo.

Este método aunque muestra el comportamiento de una losa, y nos lleva a la obtención de coeficientes para distintas relaciones entre claro corto y claro largo (S y L respectivamente), adolece al igual que otros análisis elásticos, de no considerar -- entre otras cosas, la relación de Poisson, la torción, cambios de rigidez, capacidad última, restricciones en los bordes, variación de momentos a lo largo del claro, etc.

En la práctica, el análisis de las losas más común es el de la utilización de tablas de coeficientes de momentos obtenidos mediante algunos de los métodos más refinados ya descritos.

Podemos hacer una clasificación de las losas por su tipo de apoyos:

- 1.- LOSAS EN UNA DIRECCION
- 2.- LOSAS APOYADAS PERIMETRALMENTE
- 3.- LOSAS PLANAS

Las losas en una dirección, son aquellas que están apoyadas sobre vigas o muros paralelos en dos de sus lados, quedando libres en los otros dos (figura 3-14)

Las losas apoyadas perimetralmente, son las que lo están sobre vigas o muros en sus cuatro lados (figura 4-4).

Finalmente, las losas planas son las que se apoyan directamente sobre las columnas sin la intermediación de vigas. Dentro de este tipo de losas podemos subdividir las en PLACAS FUNGIFORMES (figura 4-5), y PLACAS PLANAS (figura 4-5b).

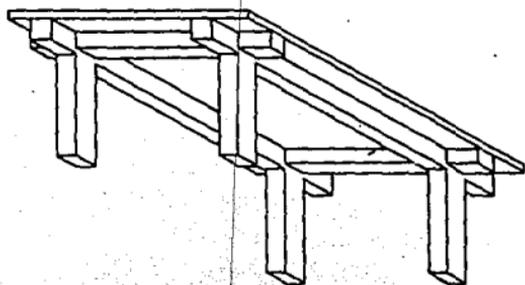


fig. 4-4

Las placas fungiformes constan de un ensanchamiento de forma tronco-cónica o de tronco de pirámide invertida llamada CAPITAL, y de una parte de la placa que generalmente es simétrica -- con respecto a las columnas, y tiene un aumento en el espesor -- por debajo de la misma, el cuál se denomina ABACO (figura 4-5c).

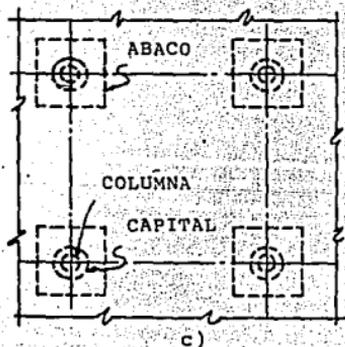
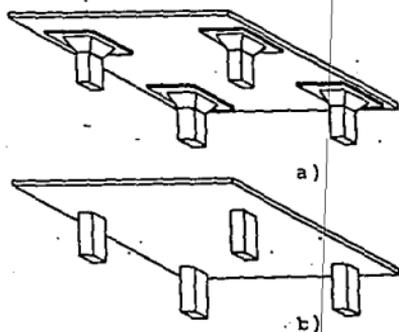


fig. 4-5

4.3 DIMENSIONAMIENTO DE LOSAS PERIMETRALMENTE APOYADAS UTILIZANDO COEFICIENTES DE MOMENTOS. PERIMETRO EFECTIVO Y PERALTES MÍNIMOS.

En el punto 4.2 comentamos que el diseño actual de losas se basa en el uso de coeficientes de momento señalados en los reglamentos. El R.C.D.F. muestra una tabla de dichos coeficientes basados en un método desarrollado por Siess y Newmark, y el dimensionamiento de losas perimetralmente apoyadas usando éste procedimiento tiene algunas restricciones.

Por ejemplo, el R.C.D.F. muestra coeficientes para losas coladas monolíticamente con sus apoyos y para las que no lo son (como losas apoyadas sobre vigas de acero), debido a las diferencias que hay en ambas por los giros que se producen en los apoyos.

Cuando en un apoyo común para dos tableros adyacentes haya momentos diferentes, se debe distribuir dos terceras partes del momento de desequilibrio entre dichos tableros, si son monolíticos con sus apoyos, o en su totalidad si no lo son. Para la distribución se supone una rigidez del tablero proporcional a a^3/a_1 .

Los coeficientes que se proporcionan corresponden a las franjas centrales en que se divide a la losa. Los valores para las franjas laterales o de borde se obtienen multiplicando los coeficientes por 0.60. La determinación de los anchos de las franjas (fig. 4-6) se hace de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{a_1}{a_2} < 0.5 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Franja Central} = a_2 - a_1 \\ \text{Franja de Borde} = \frac{a_1}{2} \end{array} \right. \\ \text{Si } \frac{a_1}{a_2} > 0.5 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Franja Central} = 0.5 \text{ del claro perpendicular} \\ \text{a ella} \\ \text{Franjas de Borde} = 0.25 \text{ del claro perpendicular} \\ \text{a ellas.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

siendo a_1 , el claro corto y a_2 el claro largo.

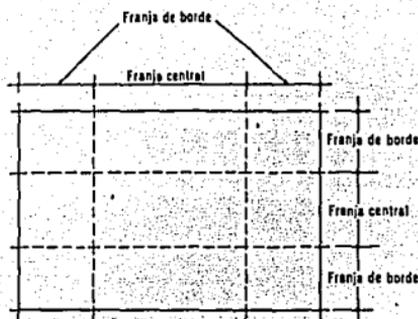


fig. 4-6

Los cortes y doblados de varilla se hacen, para bordes continuos hasta una longitud igual a $a/5$ para acero negativo, y -- $a/6$ para acero positivo (fig. 4-7). En el caso de borde discontinuo se usa $a/5$ para el acero negativo y $a/7$ para el positivo. Estos valores recomendados deben aplicarse en ambos sentidos de losa.

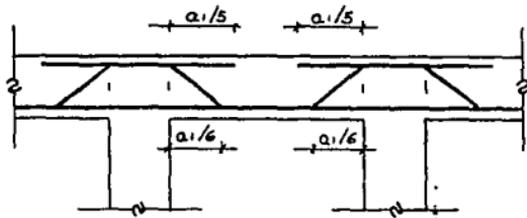


fig. 4-7

Entre las limitaciones que señala el R.C.D.F. para poder usar sus coeficientes están: que los tableros sean aproximadamente rectangulares, la distribución de la carga es aproximadamente

uniforme, la diferencia de momentos negativos en dos tableros adyacentes que acuden a un apoyo común no exceden entre sí por más del 50% y la relación de carga viva a muerta no es mayor que 2.5 para losas monolíticas con sus apoyos, ni mayor que 1.5 en otros casos.

El PERIMETRO EFECTIVO de una losa podemos considerarlo como el perímetro de la misma, más un incremento en la longitud de los lados discontinuos en un 50% si los apoyos de la losa no son monolíticos, y 25% si lo son.

Este perímetro efectivo así calculado, se utiliza para la estimación del PERALTE MINIMO que debe tener una losa, para omitir la revisión de deflexiones. En caso de que no se considere ese peralte mínimo, debe revisarse la flecha de la losa por algún análisis elástico.

Podemos seguir la siguiente serie de pasos para dimensionar una losa maciza:

- 1.-) Evaluar el perímetro efectivo de acuerdo a las condiciones ya señaladas.
- 2.-) Calcular el peralte mínimo de acuerdo a

$$d_{\min} = \frac{\text{Perímetro efectivo}}{300} \dots (4.6)$$

ecuación que solo podemos utilizar si

$$f_s \leq 2000 \text{ kg/cm}^2 \text{ y } W \leq 380 \text{ kg/cm}^2$$

donde f_s es el esfuerzo del acero en condiciones de servicio y puede considerarse igual a $0.6 f_y$ y W es la carga también en condiciones de servicio.

En caso de no cumplirse estas condiciones, el peralte mínimo obtenido por la ecuación (4.6) se debe multiplicar por un factor de amplificación igual a

$$0.034 \sqrt[4]{f_s W} \dots (4.7)$$

En losas alargadas no es necesario tomar un peralte mayor que el correspondiente a un tablero con $a_2=2a_1$.

- 3.-) Determinar la relación de claro corto a largo $m=a_1/a_2$ y dependiendo del tipo de tablero de la losa que sea, obtener los coeficientes de diseño K para cada claro de las tablas que muestran los reglamentos (R.C.D.F. ó A.C.I.).
- 4.-) Los momentos de diseño M_u se calculan con la expresión

$$\mu_u = K (10^{-4})(W_u)(a_l^2) \dots (4.8)$$

donde K, es el coeficiente de momento correspondiente al claro

W_u, es la carga última.

y a_l, el claro corto.

- 5.-) Calculados los momentos de diseño, el cálculo del refuerzo a flexión se hace como si fueran vigas de 1 metro de ancho y el peralte efectivo obtenido. El acero así obtenido es por unidad de ancho, y las limitaciones de separación es:

$$s_{\max} \begin{cases} \leq 50 \text{ cm.} \\ \leq 3,5 h \text{ (h es el peralte total)} \\ \leq 2,5 d \text{ (si hay cargas concentradas)} \\ \text{mayores a 1 tonelada)} \end{cases}$$

- 6.-) Es conveniente revisar el esfuerzo cortante último que actúa en la losa. Esto se calcula con la ecuación

$$V_u = \frac{(a_l/2 - d) W_u \dots (4.9)}{1 + \left(\frac{a_l}{a_2}\right)^6}$$

que se incrementará en un 15% si existen lados discontinuos. El valor de V_u deberá ser menor que el de resistencia a fuerza cortante de la losa que se supondrá

$$V_c = 0.5 FR bd \sqrt{f^*c} \dots (3.12)$$

que es la expresión ya vista para una viga sin refuerzo en el alma.

- 7.-) Otras notas importantes son:

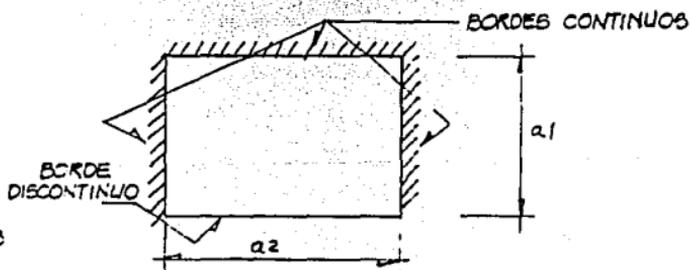
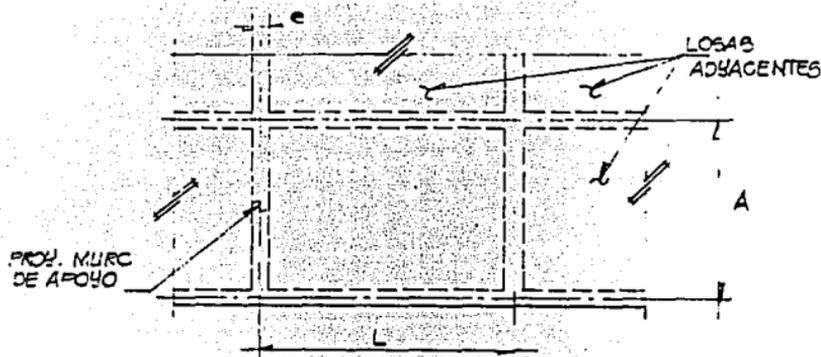
- a.-) El acero mínimo será el mismo que para losas en una dirección (ec. 3.23), duplicándose para losas a la intemperie.
- b.-) El valor de "d" se debe reducir 2cm. para el cálculo del acero de refuerzo negativo.
- c.-) Revisar el R.C.D.F. para el caso de que existan muros o cargas concentradas notorias sobre la losa. Este reglamento brinda fórmulas específicas para cada caso.
- c.-) Las losas con relación de lado corto a largo menor que 0.5 pueden considerarse como losas flexionadas

en el claro corto unicamente, pero debe propor--
cionarse un refuerzo nominal sobre los bordes --
cortos donde puede presentarse algo de momento -
negativo.

CAPITULO : 4

EJEMPLO : No. 11

DISEÑO DE UNA LOSA PERIMETRALMENTE APOYADA



DATOS

$$A = 300 \text{ cm.}$$

$$L = 600 \text{ cm.}$$

$$e = 25 \text{ cm.}$$

$$W = 1000 \text{ Kg/m}^2$$

(INCLUYENDO P_b y P_s)

$$\sigma_{ic} = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F.C. = 1.4$$

R.C.D.F.

PROCEDIMIENTO

REACCIÓN
REFERIDA

LADO CORTO Y LARGO :

$$a_1 = 300 - 25 = 275 \text{ cm}$$

$$a_2 = 600 - 25 = 575 \text{ cm}$$

PERIMETRO EFECTIVO : (25% MAS, EN BORDE DISCONTINUO)

$$275 + 575 + 275 + (1.25) \times (575) = 1844 \text{ cm.}$$

PERALTE EFECTIVO MÍNIMO :

$$d = \frac{1844}{300} \text{ G.L.}, \text{ PERC.} \dots \dots \dots$$

4.6

$$f_5 = (0.6)(4200) = 2520 \text{ Kg/cm}^2 > 2000 \text{ Kg/cm}^2 \text{ y}$$

$$W = 1000 \text{ Kg/m}^2 > 380 \text{ Kg/m}^2$$

$$d_{\min} = 6.14 \times 0.054 \sqrt{2520 \times 1004} = 8.5 \text{ cm.}$$

4.7

SI UTILIZAMOS UN RECUBRIMIENTO = 2.0 cm.

$$h = 8.5 + 2.0 = 10.5 \text{ cm.}$$

CONSIDEREMOS $h = 11.0 \text{ cm.}$

$$d(+)= 9.0 \text{ cm}$$

$$d(-)= 7.0 \text{ cm}$$

FLEXION :

$$p_{\min} = 0.0028 \dots \dots \dots$$

5.6

$$p_{\max} = 0.168 \dots \dots \dots$$

3.4

$$m = a_1/a_2 = 275/575 = 0.47$$

INTERPOLANDO LINEALMENTE DE LA TABLA _____ OBTENEMOS
PARA EL MOMENTO NEGATIVO DEL BORDE INTERIOR EN
SU LADO CORTO

$$K = 604$$

$$M_u = (1.4)(10^{-4})(1.4)(2.75^2) = 0.68 \text{ T.M.}$$

4.8

PROCEDIMIENTO

EQUACION REFERIDA

PORCENTAJE REQUERIDO, CON FRANJA DE 100 CM. DE ANCHO

$$0.68 \times 10^5 = (0.9)(100)(7^2)(200)(q)/(1-0.5q) \dots \dots \dots 3.5$$

$$q = 0.080 \therefore f = 0.0040 < f_{max.}$$

$$A_s = (0.0040)(100)(7^2) = 2.8 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

REFUERZO MÍNIMO POR CAMBIOS VOLUMÉTRICOS :

$$A_s = \frac{(660)(11)(100)}{(4200)(11+100)} = 1.55 \text{ cm}^2/\text{m} \quad 3.23$$

$$RIGI \quad 2.8 \text{ cm}^2/\text{m}$$

USANDO VAR. # 2.5 ($a_s = 0.49 \text{ cm}^2$)

$$e = \frac{(100)(0.49)}{2.8} = 17.5 \text{ cm.} \quad 3.24$$

$$s_{max} \begin{cases} 50 \text{ cm} & d' > 5 \\ (3.5)(11) = 35 & > 5 \end{cases}$$

SE UTILIZARAN VAR. # 2.5 @ 17.5 cm.

CORTANTE

$$V_u = \frac{(275/2 - (0.07)(1.4 \times 1064))}{1 + \left(\frac{2.75}{5.75}\right)^2} = 1221 \text{ Kg.} \quad 4.9$$

$$V_{cr} = (0.5)(0.8)(100)(7)(\sqrt{200 \times 0.8}) = 3542 \text{ Kg.} \quad 3.12$$

 $V_{cr} > V_u$, ES ACEPTABLE.

PARA LOS OTROS CLAROS, SIGUIENDO EL MISMO PROCEDIMIENTO Y VARILLAS:

CAPITULO :

4

EJEMPLO

No. 11

PROCEDIMIENTO

Ecuación
Refrida

MOMENTO	CLASE	COEF. K	MULTIPLICADOR	SEPARACION
(-) BORDES INTERIORES	CORTO LARGO	604 470	0.28 0.52	15 28.0
(-) BORDES DISCONTINUIDAD	CORTO	375	0.42	35
(+) ZONA CENTRAL	CORTO LARGO	352 145	0.32 0.16	35 35

"Es mi trabajo no estar nunca satisfecho"

Wernher Von Braun

CAPITULO

5

CAPITULO 5

ELEMENTOS CORTOS SUJETOS A FLEXION Y CARGA AXIAL COMBINADOS

5.1 FLEXOTENSIONES Y FLEXOCOMPRESIONES EN EL RANGO ELASTICO.- LIMITACIONES DEL PRINCIPIO DE SUPERPOSICION. DETERMINACION DE DIAGRAMAS DE ESFUERZOS EN FLEXION BIAIXIAL Y FUERZA NORMAL COMBINADAS. NUCLEO CENTRAL.

La determinación de los esfuerzos bajo flexión y carga axial combinados (flexotensión o flexocompresión) en el rango elástico, se complica por el efecto de la deformación de la estructura y de la carga axial P (que puede ser de tensión o compresión) sobre la magnitud del momento flexionante M , mostrado en la fig. 5-1. En dicha figura, M_0 es el momento flexionante en cualquier punto a lo largo del miembro debido a las cargas exteriores, despreciando el efecto de la deflexión del miembro. Si y es la deflexión eventual de un punto cualquiera debido al efecto de la flexión y la carga axial, y P es la magnitud de la carga de compresión, el momento flexionante real y total M , en cualquier punto es $M=M_0+P_y$.

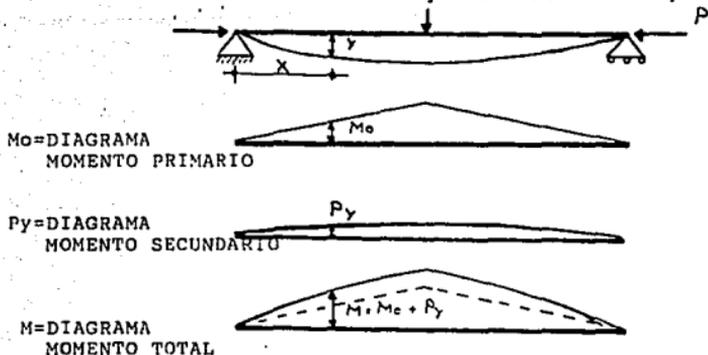


fig. 5-1

Lógicamente, las cargas de compresión tienden a aumentar la flexión y el efecto de la deflexión puede ser factor crítico de la resistencia, mientras que las cargas de tensión disminuyen la flexión en el miembro y puede llegar a desprejiciarse la deformación quedando dentro del lado de la seguridad.

Hay dos casos que pueden ocurrir de acuerdo a la forma de la viga que restringen la posibilidad del uso de la superposición de efectos:

- 1.-) Que la viga puede ser de longitud corta en relación con la altura, por lo que resulta relativamente rígida a la flexión. En este caso, las deformaciones por flexión son pequeñas y solo producirán un cambio insignificante en la línea de acción de la fuerza P . En este caso se pueden superponer los esfuerzos debidos a P y W .
- 2.-) O bien, que la viga puede ser delgada y flexible en cuyo caso las deformaciones por flexión pueden ser suficientemente grandes para producir un cambio en la línea de acción de la carga axial. Esta fuerza producirá entonces momentos flexionantes adicionales en la viga que hacen que la superposición de los efectos de la carga axial y el momento flexionante, calculados en forma independiente, no sea válida.

Esta segunda posibilidad da lugar a los llamados momentos de segundo orden que se verán más adelante. Ahora únicamente se verán elementos que caen dentro de la primera suposición.

La fig. 5-2a muestra una sección recta de viga con una fuerza axial P obrando en tensión sobre el cuerpo. Como esta viga es rígida se pueden superponer los esfuerzos axiales debido a P , y los de flexión producidos por W .

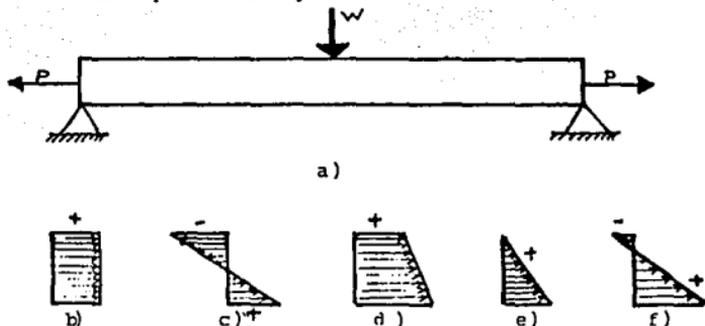


fig. 5-2

Las figuras 5-2b y 5-2c muestran respectivamente, el esfuerzo de tensión que produce la fuerza axial P (positivo) y el provocado por el momento flexionante originado a su vez por la carga W que muestra esfuerzos de compresión (negativos) en la parte superior de la sección y de tensión (positivos) en la zona inferior de la misma.

La distribución final de esfuerzos dependerá de la suma algebraica de los esfuerzos, y éstos pueden ser de manera tal que toda la sección esté a tensión (fig. 5-2d), en distribución triangular (fig. 5-2e), o bien que una parte esté a tensión y otra a compresión (fig. 5-2f).

El valor algebraico de los esfuerzos finales se encuentran con la siguiente ecuación:

$$f = \frac{P}{A} + \frac{M}{I} y \dots (5.1)$$

donde P es la fuerza axial, A es el área de la cara sobre la que actúa P, M el momento flexionante en la sección considerada, I el momento de inercia de la sección y y la distancia del eje neutro a la fibra más alejada a compresión.

Entonces, debido a los comentarios ya hechos, la superposición de esfuerzos es aplicable solo en problemas elásticos en que las deformaciones son pequeñas.

En ocasiones se presentan situaciones sobre miembros estructurales (columnas y a veces traveses) en las que una fuerza P paralela al eje del miembro está aplicada excéntricamente con respecto a dicho eje.

Las figuras 5-3a y 5-3b muestran un sólido prismático recto de sección rectangular sometido a una fuerza de compresión P que está en el plano X-Y, y es paralela al eje Z a una distancia "ex" sobre el eje X, y "ey" sobre el eje Y llamadas excentricidades. Como el sólido no es de proporciones esbeltas, las deformaciones son despreciables.

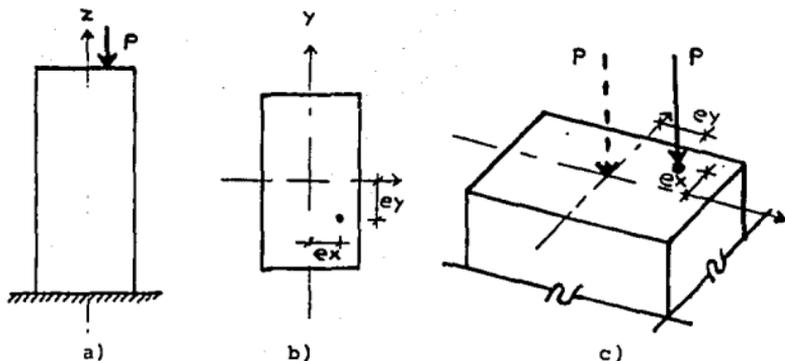


fig 5-3

La acción de la fuerza excéntrica equivale a la de una fuerza axial P que pasa por el centroide de la sección, y un momento flexionante $P e$ (fig. 5-3c).

Debido a que la fuerza P no está aplicada sobre uno de los ejes principales X e Y de la sección transversal, habrá flexión simultánea con respecto a ambos ejes. Entonces de la fig. 5-2c los momentos flexionantes respecto a los ejes X e Y valen;

$$M_x = P (e_y) \quad \text{y} \quad M_y = P (e_x)$$

Como el elemento tiene un comportamiento elástico y las deflexiones son insignificantes, los esfuerzos normales F originados por la carga axial y la flexión alrededor de los dos ejes de simetría se calculan con la expresión

$$f = \frac{P}{A} + \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} \quad \dots (1.2)$$

Los signos $+$ ó $-$ se toman de acuerdo a la siguiente convención: para la carga axial P será positivo si es de tensión o negativo si es de compresión. Los momentos M_x y M_y serán positivos cuando originen tensiones en las zonas donde x e y , respectivamente, sean positivos y negativos en caso contrario (fig. 5-4).

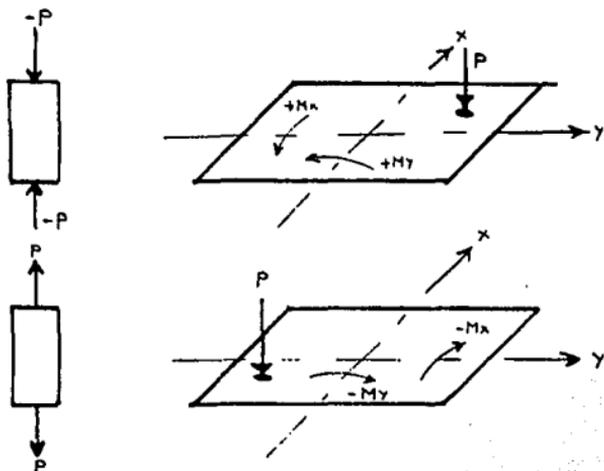


fig. 5-4

Si la ecuación (5-2) se iguala a cero, estamos suponiendo - que los esfuerzos normales son nulos, es decir, que de ésta manera podemos hallar la posición del eje neutro. Por lo tanto

$$\frac{P}{A} - \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} = 0 \dots (5.3)$$

que es la ecuación de una recta que no pasa por el origen y que puede o no cortar a la sección transversal dependiendo de la forma de ésta y a la magnitud de la carga axial P. Para hallar las coordenadas del eje neutro basta con igualar a y ó a X a cero y despejar la coordenada no anulada.

Cabe mencionar que el eje neutro pasa por el cuadrante -- opuesto al que se encuentra aplicada la carga y si la excentricidad "e" se reduce, el eje neutro se aleja del centro de la sección y viceversa.

Del párrafo anterior notamos que si la excentricidad es muy pequeña, podemos lograr que el eje neutro caiga fuera de la sección, logrando con esto que dicha sección tenga esfuerzos normales solo de compresión.

Se llama NUCLEO CENTRAL, al área interior dentro de la cual puede moverse el punto de aplicación de una carga axial de manera que el eje neutro se conserve tangente al perímetro, sin llegar a producir, por lo tanto, esfuerzos de tensión en algún punto de la sección recta.

Las dimensiones del núcleo central de una sección se pueden encontrar aplicando la ecuación (5.3) y repetimos: si la carga axial P cae dentro de ésta área, solo se generarán esfuerzos de compresión pura.

5.2 CONCEPTO DE INTERACCION. DIAGRAMAS DE INTERACCION EN EL RANGO ELÁSTICO.

La figura 5.6 muestra la sección transversal de un elemento sujeto a la acción combinada de carga axial P y momento flexionante M (flexocompresión), y la figura 5.6b un sistema estáticamente equivalente en el que $M=Pe$. En este elemento los efectos de esbeltez pueden despreciarse, es decir, es un elemento corto.

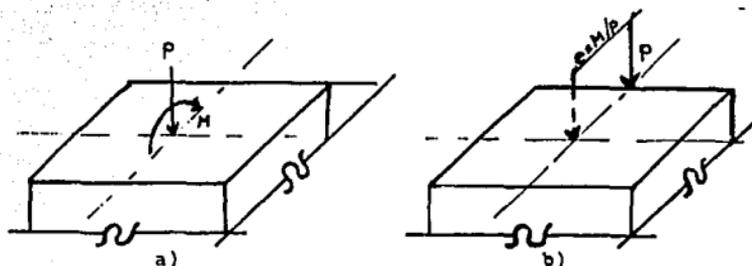


fig. 5-6

Si se hace variar P y M de manera proporcional en una sección transversal dada de una estructura, la excentricidad e , por su relación permanece constante. Entonces conservando e constante, podríamos variar P (partiendo de $P=0$) en forma progresiva y uniforme, podríamos observar que por la relación $M=Pe$, M variaría en proporción directa a P .

La igualdad $M = Pe$, representa la ecuación de una recta, -- siendo e la pendiente de la misma. Si graficamos dicha recta en un plano de ejes coordenados en los que tomamos los límites de la recta como los puntos de falla del material a carga axial y flexión (PRO y MRO respectivamente), tendríamos un diagrama como

el mostrado en la figura 5-7. La gráfica es para una excentricidad e_1 y para una excentricidad $e_2 > e_1$.

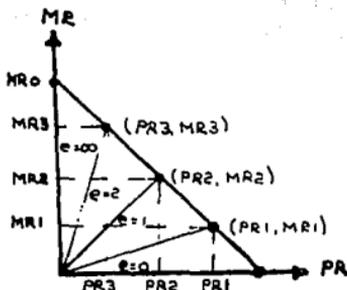


fig. 5-7

Igualmente podríamos variar las excentricidades para obtener múltiples combinaciones de PR y MR. Si usáramos $e=0$, la resistencia del elemento está dada solamente por la carga axial PRO. En caso contrario, si utilizáramos una excentricidad que se acerque a infinito (o sea que e es sumamente grande), se llegaría a la resistencia por flexión MRO únicamente.

Entonces observamos que un elemento puede alcanzar su máxima resistencia bajo innumerables combinaciones de carga axial y momento flexionante, desde $P_0 \neq 0$ y $M_0 \neq 0$, hasta $P_0 = 0$ y $M_0 = 0$. Al lugar geométrico de dichas combinaciones se le denomina DIAGRAMA DE INTERACCION.

Consideremos nuevamente el caso de una sección recta sometida a una combinación de esfuerzos de carga axial y momento flexionante, pero en su límite del rango elástico. Por lo tanto, el esfuerzo máximo se produce en el punto de fluencia límite f_y , y se puede estimar mediante la superposición de esfuerzos. Por esto, usaremos la fórmula de la escuadría (ecuación 5.1)

$$f = \frac{P}{A} + \frac{M}{I} \text{ y } \dots (5.1)$$

Gráficamente tendríamos lo que muestra la figura 5-8:

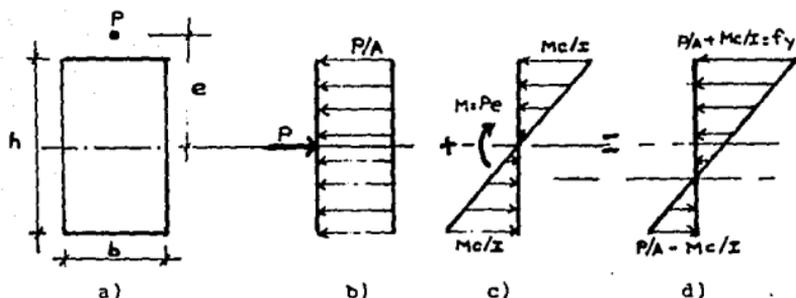


fig 5-8

Las figuras 5-8a, b, c y d muestran respectivamente, la sección, los esfuerzos por compresión, los esfuerzos por flexión y la suma final de esfuerzos.

Si solamente actuara la carga axial P, el esfuerzo máximo se obtendría haciendo $M=0$ en la ecuación (5.1), pero el esfuerzo máximo se iguala al límite de fluencia, por lo que

$$f_y = \frac{P}{A}$$

de la que despejamos la fuerza P, a la que llamaremos P_y por ser la carga axial que produce el esfuerzo de fluencia. Entonces

$$P_y = A f_y \dots (5.4)$$

Haciendo lo mismo para $P=0$, y llamando M_y al momento que produce un esfuerzo máximo de fluencia tendríamos

$$M_y = \frac{I}{Y} f_y \dots (5.5)$$

Si dividimos la expresión (5.1) entre $f_y = f_{max}$, y sustituyendo las ecuaciones (5.4) y (5.5) en ella, tendríamos finalmente

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M}{M_y} = 1 \dots (5.6)$$

que es la ecuación de una recta que nos representa gráficamente el diagrama de interacción de un elemento dentro del rango

elástico. Si usamos el signo positivo, el diagrama de interacción mostrará los esfuerzos máximos de compresión en la fibra de la sección mas alejada del eje neutro. En caso de usar el signo negativo tendremos esfuerzos máximos también, pero de tensión, actuando de igual manera en la fibra de la sección mas lejana del eje neutro. La fig. 5-9 muestra dos diagramas de interacción hechos a partir de la ecuación (5.6).

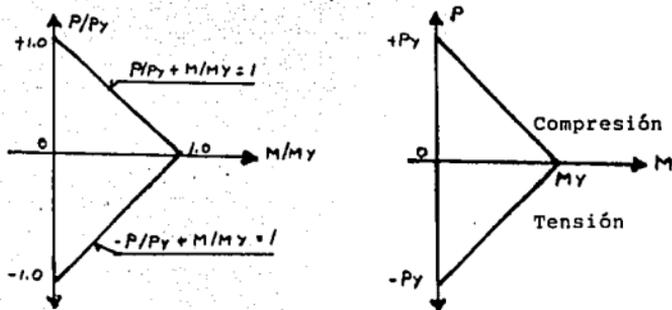


fig. 5-9

5.3 FLEXOTENSION Y FLEXOCOMPRESION EN EL RANGO INELASTICO. DIAGRAMAS DE INTERACCION

La sección de una viga rectangular se muestra en la figura-5-10a. A medida que el momento flexionante aumenta, debe haber una variación lineal del esfuerzo hasta alcanzar el esfuerzo de fluencia en las fibras mas alejadas. La fig. 5-10b es la variación del esfuerzo hasta el rango elástico. Si el momento flexionante continua aumentando, las fibras mas alejadas que han sido llevadas a su punto crítico, seguirán sometidas al mismo esfuerzo pero fluirán, y el momento resistente adicional necesario, recaerá en las fibras mas cercanas al eje neutro. Este proceso continuará en las siguientes fibras de la sección transversal de la viga llevada al punto de fluencia, como se muestra en las figuras 5-10c, y 5-10d, hasta alcanzar una distribución totalmente plástica, como se ve en la figura 5-10e.

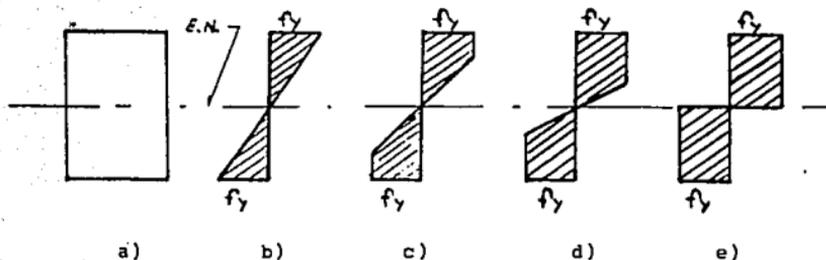


fig. 5-10

Analizemos el caso de una sección rectangular plastificada (fig. 5-11a), sujeta a flexocompresión y que se encuentra en un estado de esfuerzos como el mostrado en la fig. 5-11b.

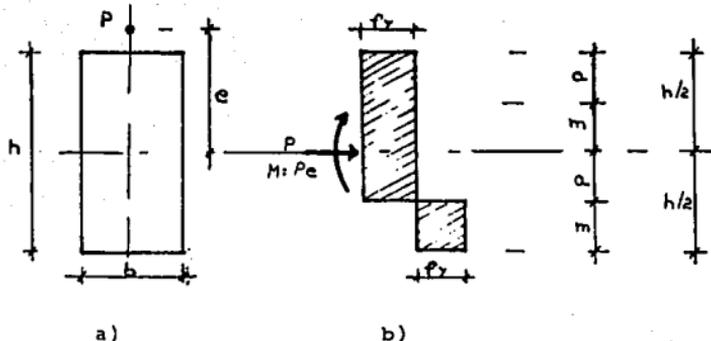


fig. 5-11

La fuerza axial la produce f_y actuando en el área $2mb$. Por simetría, estos esfuerzos no producen contribución alguna al momento. Las fuerzas que actúan en las áreas superior e inferior $ab = ((h/2) - m)b$, forman un par con un brazo de momento igual a $h-a = (h/2)+m$. Entonces tenemos que

$$P = 2 m b f_y \quad \text{donde} \quad m = \frac{P}{2b f_y} \dots (5.7)$$

$$y \quad M = ab f_y (h-a) \quad \text{donde} \quad M = \frac{bf_y h^2}{4} - b f_y m^2 \dots (5.8)$$

El valor izquierdo de la última ecuación es el del momento que sin actuar P origina la plastificación de la sección. A dicho momento lo llamaremos M_p :

$$M_p = \frac{bh^2}{4} f_y$$

por lo que la ecuación (5.8) queda así:

$$M = M_p - b f_y m^2 \dots (5.9)$$

Sabiendo que por la ecuación (5.5) $M_y = I f_y / y$, y además $I = bh^3/12$ con $y = h/2$, tenemos que

$$M_y = \frac{bh^2}{6} f_y$$

Buscando una relación entre esta última expresión, y la correspondiente a la definición de M_p , tenemos

$$M_p = \frac{3}{2} M_y$$

Sustituyendo este valor y el de la ecuación (5.7) en la ecuación (5.9) obtenemos, considerando que $bh = A$

$$\frac{M}{\frac{3}{2} M_y} = 1 - \frac{P^2}{f_y^2 A^2}$$

Recordando que $P_y = A f_y$, ordenando y simplificando:

$$\frac{M}{\frac{3}{2} M_y} + \left(\frac{P}{P_y} \right)^2 = 1 \dots (5.10)$$

Esta ecuación es la del diagrama de interacción de la sección supuesta y representa también a la ecuación de una parábola en el plano cartesiano de ejes (M,P), cuyo eje de simetría es M y su vertice $(3/2 M_y, 0)$; si $P=0$, $M=3/2 M_y$ y si $M=0$, $P=\pm P_y$. La figura 5-12 muestra el diagrama de interacción de una sección en el rango inelástico. La zona superior corresponden a puntos de flexocompresión y la inferior de flexotensión.

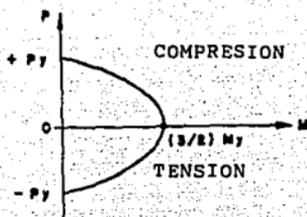


fig. 5-12

Otro diagrama de interacción que se puede construir es unidimensional (fig. 5-13). Este diagrama se traza usando unos ejes cartesianos dados por $(M/My, P/Py)$, obteniéndose también una parábola cuyo eje de simetría es M/My , y su vértice $(3/2, 0)$; si $P=0, M/My = 3/2$, y si $M=0, P/Py = \pm 1$. Al igual que el diagrama anterior, el cuadrante superior contiene puntos de flexocompresión y el inferior de flexotensión.

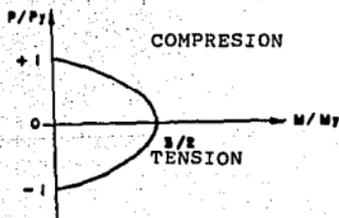


fig. 5-13

5.4 FLEXOCOMPRESION EN ELEMENTOS CORTOS DE CONCRETO REFORZADO
DETERMINACION DE GRAFICAS DE INTERACCION. DIMENSIONAMIEN
TO Y REVISION DE ELEMENTOS CORTOS DE CONCRETO REFORZADO-
EN FLEXOCOMPRESION. REQUISITOS DE REFUERZO TRANSVERSAL.

Para el diseño de elementos de concreto reforzado en los que no hay problemas de esbeltez (elementos cortos), el R.C.D.F. se --
basa en las suposiciones ya anotadas en el inciso 3.2 del capitulo III para elementos de concreto reforzado sometidos a flexión.

Ahora bien, para obtener las resistencias de diseño de un elemento (PR y MR), debemos adicionar a los factores de carga utilizados para la obtención de fuerzas y momentos últimos (Pu y Mu), un FACTOR DE REDUCCION DE RESISTENCIA, FR. Este factor se considera en flexocompresión igual a

$$\begin{aligned} \text{ó} \quad FR &= 0.85 && \text{si la falla es en tensión} \\ FR &= 0.75 && \text{si la falla es en compresión} \end{aligned}$$

debiendo cumplirse al revisar los elementos que $P_u \leq PR$ y $M_u \leq MR$.

¿Como saber si el elemento falla en tensión o en compresión? De igual manera que una viga sometida a flexión. Explicuemos:

La falla en compresión se produce por apiastamiento del concreto. El acero del lado mas comprimido fluye, en tanto que el - del lado opuesto no lo hace en tensión.

La falla en tensión se presenta cuando el acero sujeto a tensión fluye antes de que el concreto se aplaste en el lado contrario por compresión.

Cuando la deformación útil del concreto ($E_c = 0.003$) se presenta simultáneamente con la deformación de fluencia del acero, - se dice que la falla ocurre en una condición balanceada.

Entonces podemos escribir, que la tensión controla el diseño cuando $P_u < P_b$ (Resistencia balanceada) y la compresión lo hace - si $P_u > P_b$.

La figura 5-14 muestra un diagrama de interacción típico para una sección rectangular de concreto reforzado con acero simétrico y sujeta a carga axial y flexión en un solo plano. La comprensión de este diagrama no es difícil, ya que es similar a su funcionamiento a los mostrados anteriormente y solo haremos unos comentarios.

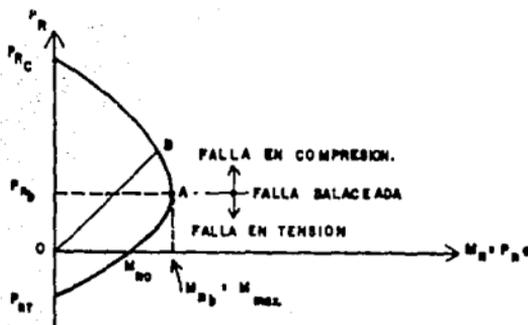


fig. 5-14

- Cualquier punto sobre la curva del diagrama representa -- una combinación de carga axial y momento flexionante que hace que el elemento alcance su máxima resistencia.
- Si la sección estuviera sometida únicamente a carga axial de compresión o tensión, el valor máximo de resistencia -- correspondería al punto PRC o PRT respectivamente. En el diagrama PRC es mayor que PRT debido a que el concreto no tiene capacidad a la tensión.
- Si la sección estuviese sometida únicamente a momento -- flexionante, el máximo que podría aplicarse sería el -- marcado con MRO. Este MRO corresponde a una carga axial no nula.
- El punto A (PRb, MRb) corresponde a la condición de falla balanceada de la sección. Por lo tanto, cualquier combinación de P y M que defina un punto en el diagrama por encima del punto A, producirá falla en compresión y, en caso contrario de tensión.
- Cuando se incrementa la carga externa con una excentricidad e constante, el momento flexionante y la carga axial crecen proporcionalmente debido a la relación $M = Pe$. La recta OB representa la historia de carga con pendiente -- igual al cociente $P/M = 1/e$.

El uso de diagramas de interacción es uno de los métodos más prácticos para conocer la resistencia de una sección cual --

quiera, bajo la acción combinada de carga axial P y momento -- flexionante M, en diferentes condiciones de carga.

La determinación de una GRAFICA O DIAGRAMA DE INTERACCION-- consiste en encontrar una serie de puntos en un sistema de ejes cartesianos (M,P), cada uno de los cuales corresponde a una condición de resistencia de la sección. El conocimiento necesario para llegar a ésta representación se ha hecho apoyándose en in-- vestigaciones experimentales y en las hipótesis del punto 3.2. Generalmente se sigue el siguiente procedimiento para hallar -- diferentes puntos del diagrama.

- 1.-) Se supone la profundidad del eje neutro, que junto con la deformación útil del concreto ($E_c = 0.003$), forma la distribución de deformaciones unitarias medidas paralelamente al eje neutro. La deformación unitaria -- del acero se estima mediante triángulos semejantes o -- interpolación lineal.
- 2.-) Obtenidas las deformaciones en el acero (de cada varilla longitudinal), el esfuerzo que se genera en él vale $f_s = E_s E_c$, respetando que $f_s \leq f_y$, es decir, sea -- menor o igual al límite de fluencia. La fuerza que ac -- túa en cada varilla se obtiene multiplicando el es -- fuerzo generado por el área de acero correspondiente: $F_s = f_s A_s$.
- 3.-) La fuerza de compresión que resiste el concreto es $C = ab f''c$, con el significado ya visto.
- 4.-) La carga axial resistente PR de la sección se obtiene -- como la suma de todas las fuerzas internas en el acero y en el concreto, afectados por el factor de reducción de resistencia, FR, correspondiente. De manera si -- milar, el momento flexionante resistente MR de la sec -- ción, se encuentra multiplicando por FR la suma de mo -- mentos producidos por cada fuerza respecto de un eje -- de la sección.

Si comparamos el desarrollo de este procedimiento con el u -- sado para encontrar fórmulas para la resistencia a flexión de -- una viga, vemos que casi es el mismo.

Para encontrar y formar de manera aproximada el diagrama de interacción de la figura 5-14 podríamos calcular los puntos PRC, MRO, A y PRT. Adicionalmente se pueden encontrar dos puntos in -- termedios: uno entre PRC y A y otro entre MRO y A. Hagamos no -- tar que

- a.-) El punto PRC corresponde a carga axial de compresión -- pura, por lo que se supone un estado de deformaciones --

unitarias de compresión uniforme (en secciones simétricas). Aquí FR vale 0.75.

- b.-) El punto MRO corresponde a un momento flexionante con carga axial nula, por lo que el estado de deformaciones unitarias es semejante al obtenido para cálculo de resistencia a flexión.
- c.-) Para el punto A correspondiente a la falla balanceada se supone un estado de deformaciones unitarias definidas por la deformación máxima útil del concreto en la fibra extrema de compresión y por la deformación de fluencia del acero ($\epsilon_y = 0.002$ para $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$), en el acero a tensión.
- d.-) El punto PRT corresponde a carga axial de tensión pura, en el que únicamente se considera la capacidad de tensión que brinda el acero, ya que el concreto no resiste este tipo de esfuerzos. En este caso $FR = 0.85$.
- e.-) El punto arbitrario entre PRC y A cae en la zona de falla a compresión, por lo que se supone un valor de la profundidad del eje neutro, c , mayor que el obtenido para la condición de falla balanceada.
- f.-) El punto cualquiera entre MRO y A, le corresponde falla en tensión. Por lo tanto, para definirlo se supone un valor de la profundidad del eje neutro, c , menor al correspondiente a la falla balanceada y por lo tanto, mayor al obtenido para el punto MRO.

La resistencia de una sección sujeta a flexión y carga axial puede ser obtenida de tres maneras

- 1.- Por fórmulas aproximadas
- 2.- Por tanteos
- 3.- Por diagramas de interacción.

Las fórmulas aproximadas que se pueden hallar en las referencias 11 y 12, se basan principalmente en las dadas por el reglamento A.C.I.. Cada ecuación mostrada es para un caso determinado: sección rectangular, circular, falla por tensión o compresión, sección cuadrada con acero en círculo y flexión biaxial.

Sin embargo, éstas ecuaciones semi-empíricas tienen deficiencias que se han reconocido, por lo que se obliga al calculista -- en caso de usarlas -- comprobar que el acero en compresión alcanza la fluencia para que el diseño sea aceptable.

El procedimiento por tanteos consiste en calcular los valores de P y M para una configuración supuesta de deformaciones -

unitarias como la usada para construir un diagrama de interacción. Determinada la fuerza P que equilibre las fuerzas internas, se halla el momento M que éstas producen. Se encuentra después la excentricidad $e = M/P$, y se compara con la excentricidad de la carga externa. Si coinciden las dos excentricidades el problema está resuelto. En caso contrario, se harán otros tanteos variando la configuración del diagrama de deformaciones unitarias hasta lograr la igualdad.

La obtención de la resistencia de una sección de concreto reforzado sujeta a flexocompresión usando su diagrama de interacción es ventajoso; desafortunadamente ese diagrama solo servirá para esa sección en particular y cualquier cambio en las dimensiones o refuerzo obligarán a construir otro diagrama de interacción.

El I.I de la U.N.A.M. ha elaborado una serie de gráficas para diseñar columnas de concreto armado, para secciones rectangulares o circulares, sometidos a flexocompresión uniaxial o biaxial. Dichas gráficas manejan valores variables de dimensiones, refuerzo, excentricidades de carga, resistencia del concreto y esfuerzo de fluencia del acero, que eliminan el inconveniente ya señalado de un diagrama de interacción para una sección dada.

¿Como se usan estos diagramas? Podemos anotar una serie de pasos sin que esto signifique que sea la manera de utilizarlos. Un análisis detenido de dichas gráficas pueden permitir al calculista despejar cualquier incógnita que se le presente en un problema de diseño o revisión.

- 1.-) Obtener los elementos mecánicos últimos M_u y P_u . Estos elementos son los hallados mediante un análisis bajo cargas de servicio y multiplicados por el factor de carga correspondiente.
- 2.-) Conocidos M_u y P_u , se calculan los parámetros R, K y e/h que según las gráficas valen, para el caso de flexocompresión uniaxial:

$$R = \frac{M_u}{FR b^3 h^2 f^3 c} \dots (5.11)$$

y

$$K = \frac{P_u}{FR b h f^3 c} \dots (5.12)$$

donde FR es el factor de reducción de resistencia, b la dimensión perpendicular al plano de la flexión (en cm.) y h la dimensión paralela al plano de la flexión (en cm.).

El valor de la excentricidad e, como ya habíamos visto es $e = M_u/P_u$.

- 3.-) Hallados los parámetros anteriores se encuentra por -- medio de las gráficas el valor del parámetro adimensional q , que como sabemos.

$$q = \frac{p \cdot f_y}{f''c}$$

de donde

$$p = \frac{q \cdot f''c}{f_y}$$

siendo p , el porcentaje de acero de refuerzo respecto al área de la sección transversal de la columna. Por lo que

$$A_s = p \cdot b \cdot h$$

En el caso de revisión de una sección de concreto reforzado lo que se busca es determinar el momento resistente M_R y la carga axial resistente P_R para una relación $e = M_R/P_R$ conocida. Por lo tanto, se puede proseguir de manera inversa al procedimiento ya descrito.

Para el caso de elementos sujetos a FLEXOCOMPRESION BIAIXIAL su diseño y revisión se puede realizar de dos maneras:

- 1.- Utilizando los diagramas de interacción para flexocompresión biaxial del I.I. de la U.N.A.M.
- 2.- Usando los diagramas de interacción para flexocompresión uniaxial y revisando por la fórmula de BRESLER.

El diagrama de interacción para flexocompresión biaxial resulta ser una superficie en tres dimensiones. Para transformarla en un problema de dos dimensiones, se hace un corte vertical a la superficie original. Cada corte corresponde a una relación fija entre los momentos adimensionales en dos direcciones -- (R_x/R_y).

En base a esto, el I.I. ha elaborado gráficas para valores de $R_x/R_y = 0.5$ y $R_x/R_y = 1.0$, que, considerando que el caso de flexocompresión uniaxial corresponde a $R_x/R_y = 0$ se pueden hallar todos los posibles casos de R_x/R_y mediante interpolación lineal.

Su uso es igual al narrado para flexocompresión uniaxial - considerando únicamente que R_x se encuentra con la ecuación --- (5.11) usando un $M_{ux} = P_u \cdot e_x$ y R_y igualmente pero con $M_y = P_u \cdot e_y$.

En caso de no contar con las gráficas de flexocompresión biaxial, se puede diseñar el elemento con las gráficas de flexo

compresión uniaxial aplicandose en cada uno de los sentidos y hallar finalmente su carga axial resistente por medio de la fórmula de Bresler:

$$PR = \frac{1}{\frac{1}{PR_x} + \frac{1}{PR_y} - \frac{1}{PR_o}} \dots (5.13)$$

siendo PR, la carga axial resistente aplicando las excentricidades e_x y e_y .

PR_o, la carga axial resistente para $e_x = e_y = 0$ y su valor es $PR_o = FR(b h f''c + A_s f_y)$.

PR_x, la carga axial resistente aplicando una excentricidad e_x , en un plano de simetría.

PR_y, la carga axial resistente aplicando una excentricidad e_y , en el otro plano de simetría.

Esta ecuación es válida solo si $PR/PR_o \geq 0.1$. En caso contrario se usará la expresión

$$\frac{M_{ux}}{MR_x} + \frac{M_{uy}}{MR_y} \leq 1.0 \dots (5.14)$$

donde M_{ux} y M_{uy} son los momentos últimos de diseño según los ejes x e y respectivamente, y MR_x y MR_y los momentos resistentes sobre los mismos ejes.

El R.C.D.F. exige que a la excentricidad calculada se le sume una excentricidad accidental igual a $0.05 h \geq 2 \text{ cm}$, donde h es la dimensión de la sección en la dirección en que se considera la flexión.

Además, especifica una serie de requisitos para el refuerzo vertical y transversal.

Para el esfuerzo vertical:

- El área de acero longitudinal mínima será

$$A_s \text{ min} \geq \frac{20}{f_y} b h \dots (5.15)$$

y la máxima

$$A_s \text{ max} \leq 0.08 b h \dots (5.16)$$

- El número mínimo de barras será de seis en columnas circulares y cuatro en rectangulares.

Para el refuerzo transversal:

- La fuerza de fluencia del estribo no será menor que 2% de -

de la fuerza de fluencia de la barra de mayor diámetro o el paquete mayor longitudinal que restringe.

- Todas las barras o paquetes de barras longitudinales se deben restringir contra el pandeo lateral con estribos o zuncho a una separación.

$$S \leq \begin{cases} 850 / \sqrt{f_y} \text{ veces el diámetro de la barra o de la barra más delgada del paquete.} \\ 48 \text{ diámetros de la barra del estribo} \\ \text{que la dimensión menor de la columna.} \end{cases}$$

- La separación máxima de estribos dada arriba, se reducirá a la mitad arriba y abajo de cada unión de columnas con traveses y losas a partir de una longitud no menor que

- la dimensión transversal máxima de la columna
- un sexto de la altura libre
- 60 cm.

- La distancia libre de las barras no restringidas a las restringidas será igual o menor a 15 cm. La distancia de separación centro a centro -- entre barras restringidas se limita 35 cm.
- Los estribos se rematarán en una esquina con dobleces de 135° o más, seguidos de tramos rectos de no menos de 10 diámetros de largo, o con dobleces de 90° seguidos de tramos rectos de no menos de 20 diámetros de largo.
- Todas las barras de esquina y cada barra alternada, estarán restringidas por la esquina de un estribo con un ángulo interno máximo de 135°
- Para barras que no sean de esquina pueden usarse grapas formadas por barras rectas cuyos extremos terminen en un doblez a 180° alrededor de la barra o paquete restringido, seguido de un tramo recto no menor a 10 veces el diámetro de la barra de la grapa. La separación máxima de las grapas se determina de igual manera que para los estribos.
- Para columnas zunchadas, el refuerzo transversal será una hélice continua de paso constante cuyo porcentaje volumétrico no será menor que

$$p' = 0.45 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \left(\frac{f'_c}{f_y} \right) \dots (5.17)$$

$$\text{ni que } 0.12 \frac{f'_c}{f_y} \dots (5.18)$$

donde A_c es el área transversal del núcleo hasta la circunferencia exterior de la hélice, A_g es el área transversal de la columna y f_y el esfuerzo de fluencia del acero de la hélice.

- La separación libre máxima entre dos vueltas consecutivas no excederá de 7 cm, ni será menor que una vez y media el tamaño máximo del agregado.
- El esfuerzo de fluencia del acero de la hélice no excederá de 4200 kg/cm^2 .
- Los traslapes tendrán una vuelta y media y se anclarán en los extremos de la columna mediante dos vueltas y media.

Además de satisfacer los requisitos mínimos mencionados, el refuerzo transversal debe proporcionar suficiente resistencia a fuerza cortante y tensión. La fig. 5-15 muestra algunos detalles del refuerzo transversal.

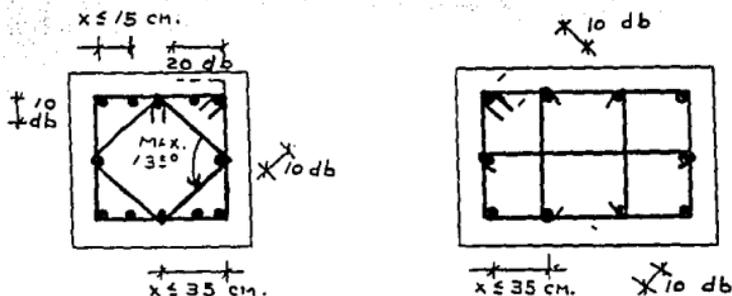


fig. 5-15

5.5 DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE MUROS DE RETENCION. SEGURIDAD CONTRA VOLTEO Y DESLIZAMIENTO. DISTRIBUCION DE ESFUERZOS DE MUROS DE RETENCION.

Las estructuras de retención son utilizadas para resistir -

los empujes laterales producidos por un material almacenado (silos), por un líquido (bordos), o bien por materiales sueltos a los que por determinadas razones no se puede permitir que adopten su talud natural (excavaciones, desmontes o terraplenes).

Los muros de retención se pueden clasificar en tres tipos:

1.- MUROS DE GRAVEDAD, que se construyen normalmente de mampostería o de concreto simple, y están sometidos a esfuerzos de compresión ya que su peso propio se utiliza para contrarrestar las fuerzas horizontales producidas por el empuje (fig. 5-16a).

2.- MUROS EN VOLADIZO, que son de concreto reforzado y se utilizan cuando no se desean tener grandes volúmenes de muro y evitar con esto, la transmisión de mayores esfuerzos a la cimentación. Su condición de equilibrio depende fundamentalmente de la base de sustentación (fig 5-16b).

3.- MUROS DE CONTRAFUERTE, muy similares a los que están en voladizo y son usados cuando la longitud del material por contener es grande, o bien cuando las presiones son altas. Se forma el muro a base de tableros de losa apoyados en los contrafuertes, donde éstos últimos se colocan con el objeto de rigidizar el muro y reducir los elementos mecánicos que actúan sobre los tableros (fig. 5-16c).

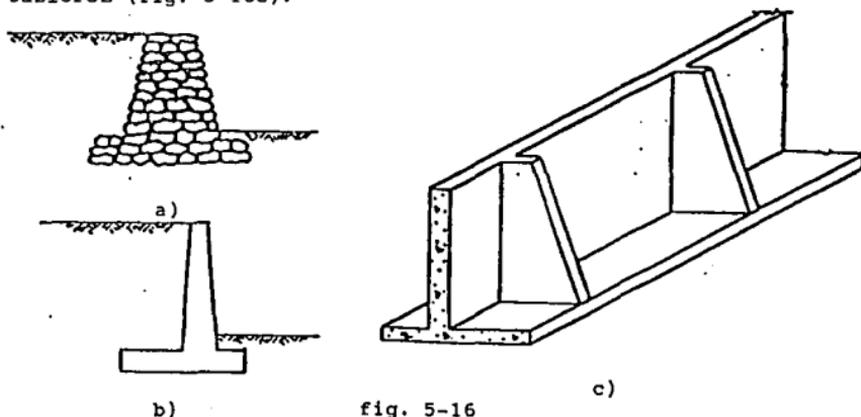


fig. 5-16

Las fuerzas principales que deben tomarse en cuenta para el análisis de cualquier tipo de muro de contención se muestran gráficamente (sus resultantes) en la figura 5-17, y que comentaremos a continuación

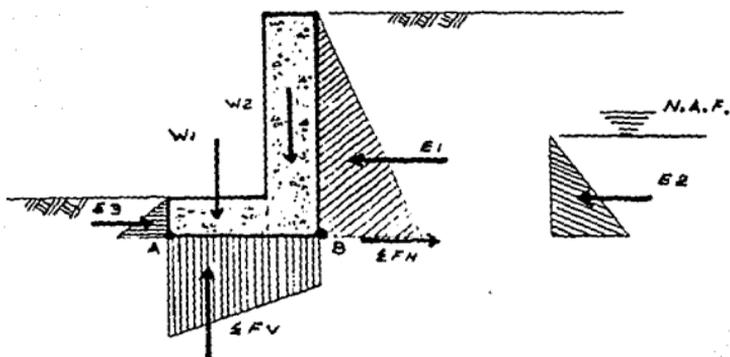


fig. 5-17

- a.-) El peso propio del muro, que se puede obtener con precisión si se conocen sus dimensiones. En la fig. 5-17- el peso total del muro es $WT = W_1 + W_2$.
- b.-) El empuje que ejerce la presión de la tierra contenida, el cuál no ha sido posible determinarlo con exactitud, sin embargo existen teorías como las de Rankine, Coulomb y Terzaghi, que son representados por ecuaciones de aplicación práctica y sencilla. Según éstas teorías, el empuje de tierras sigue una ley lineal que es directamente proporcional a la profundidad, o sea que la línea de presiones forma un triángulo cuya resultante pasa a un tercio de la altura y es igual al área del triángulo. En la figura 5-17, E representa el empuje resultante de tal presión.
- c.-) Generalmente los muros de retención deben proyectarse para soportar la presión hidrostática, pero se puede evitar la acumulación de agua colocando un sistema de drenaje adecuado. Estos drenes se deben colocar a aproximadamente 3.0 metros tanto en dirección vertical como horizontal. E2 representa la resultante del empuje hidrostático en la fig. 5-17.
- d.-) E3 representa (en la misma fig. 5-17), la resultante de la fuerza resistente que provoca la tierra que se encuentra frente al muro, debido al desplante necesario de la estructura para asegurar una adecuada capacidad de carga del terreno. Generalmente ésta fuerza se desprecia para así aumentar el coeficiente de seguridad.

dad.

- e.-) Las componentes normal y vertical ($\pm F_v$ y $\pm F_H$ en la fig 5-17) de las presiones que actúan en la cimentación. La primera de las componentes se considera linealmente distribuida a lo largo de la base, línea AB, dando lugar a su diagrama trapecial.

Hay otras acciones que aunque no se muestran en la figura 5-17, deben tomarse en cuenta en el análisis del muro. Entre otras están: alguna sobrecarga sobre el terreno contenido, las subpresiones que se generan contra los materiales que conforman el muro al tener un drenaje defectuoso y permitir al agua fluir por debajo de la estructura, los efectos de las heladas y los suelos expansivos, vibraciones y procesos de compactación y la fuerza sísmica.

El proceso a seguir en el cálculo de muros de contención -- consiste en la repetición sucesiva de dos pasos:

- 1.- Selección tentativa de las dimensiones de la estructura.
- 2.- Revisión de la estabilidad de la estructura bajo las fuerzas que la soliciten.

Para el dimensionamiento de muros pueden tomarse en cuenta las siguientes recomendaciones para un caso general y por razones prácticas.

- a.-) La corona debe ser suficientemente ancha tanto para facilitar la colocación del concreto o mampostería, como para tener resistencia para soportar la acción de fuerzas de impacto.
- b.-) La cara expuesta de los muros deberá tener una inclinación mínima de 1/50, para evitar la sensación de estar desplomados.
- c.-) En muros de gran longitud se deberán colocar juntas para que no se produzcan grietas o fallas por causa de las dilataciones o contracciones por variación térmica o efectos del fraguado.

Las figuras 5-18a, 5-18b y 5-18c muestran dimensiones preliminares de muros de gravedad, en voladizo y con contrafuerte respectivamente, que pueden servir de guía para facilitar el diseño.

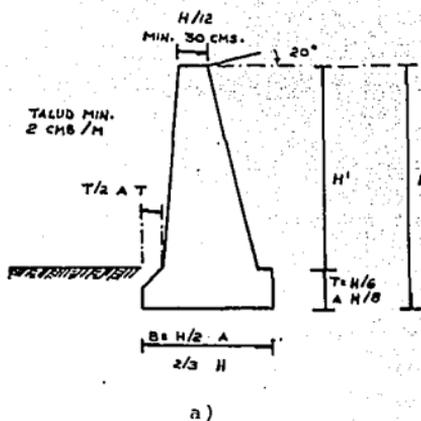
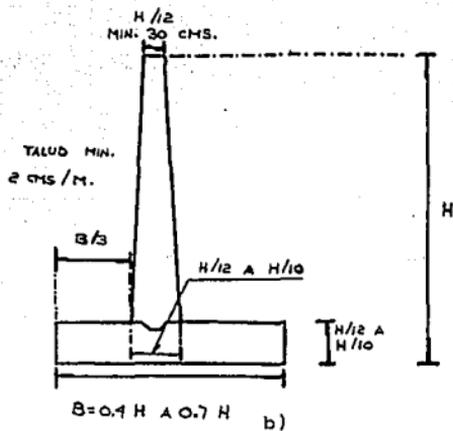


fig. 5-18



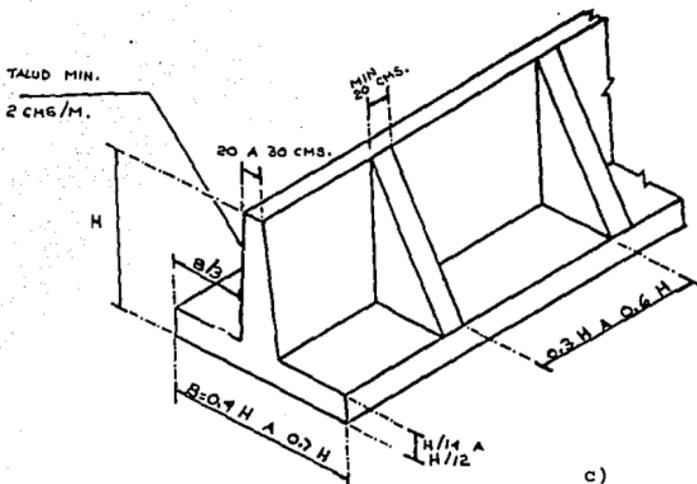


fig. 5-18

Si el análisis indica que la estructura no es satisfactoria, se ajustan las dimensiones y se realizan nuevos tanteos hasta lo grado que la estructura soporte los esfuerzos a los que va a estar sometida.

Para realizar el análisis, se determinan las magnitudes de las fuerzas principales que actúan por encima de la base de la cimentación (empuje del terreno, sobre cargas, peso propio del muro y peso del relleno) y revisar la estabilidad del muro con respecto a

- a.-) Volteo
- b.-) Deslizamiento
- c.-) Presiones sobre el terreno
- d.-) Resistencia como estructura.

La revisión a VOLTEO se refiere a que no debe producirse -- una rotación o giro alrededor del punto "A" (momento de volteo) de la figura 5-19, debido a la acción del peso del muro, de la zapata y del terreno, que forman el momento resistente que equilibra o evita el giro.

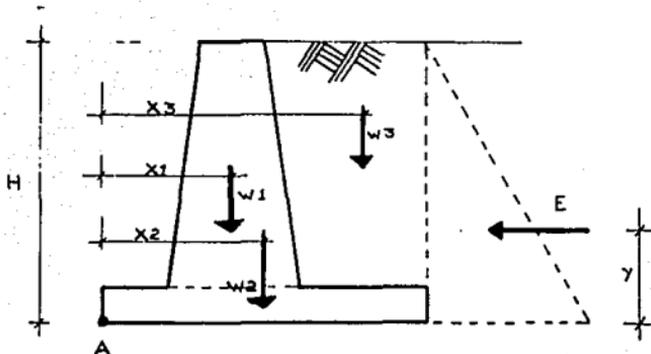


fig. 5-19

De la figura anterior observamos que el MOMENTO DE VOLTEO, - MV vale : $MV = E (y)$. Por otro lado, el MOMENTO RESISTENTE, MR, tiene un valor $MR = W1 (x1) + W2 (x2) + W3 (x3)$.

El factor de seguridad contra volteo (F.S.V.) se obtiene dividiendo el momento resistente entre el de volteo. Los valores del factor de seguridad que usualmente se usan son de 1.5 para materiales granulares y de 2.0 para cohesivos. Por lo tanto

$$F.S.V. = \frac{MR}{MV} > 1.5 \text{ a } 2.0 \dots (5.19)$$

La revisión a DESLIZAMIENTO se hace para asegurar que no se producirá éste, entre la base del muro y el terreno. Para realizar ésta revisión se procede a calcular la resistencia a fuerza rasante entre la base del muro y un material no cohesivo, que es igual a la suma total de la presión normal (ΣFV) multiplicado por un coeficiente de fricción, μ , que depende del material del muro y el tipo de terreno de cimentación. El producto anterior se divide entre la suma de todas las fuerzas horizontales que tienden a deslizar el muro. Este cociente recibe el nombre de factor de seguridad contra deslizamiento (F.S.D.), el cual no debe ser menor que 1.5. De ésta manera

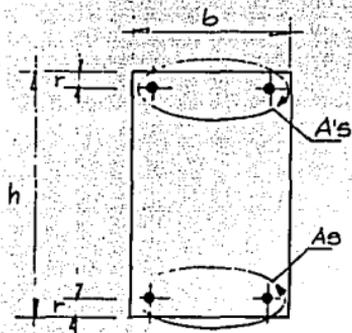
$$F.S.D. = \frac{\mu (\Sigma FV)}{\Sigma FH} > 1.5 \dots (5.20)$$

Las PRESIONES SOBRE EL TERRENO se revisan obteniendo las resultantes de éstas en la base del muro y comprobando que pasen -

sobre el tercio central de la base de la estructura, con el objeto de garantizar que no halla tensiones en el extremo de la misma. Estas presiones se calculan con la teoría de la flexión ($f = P/A \pm M/I$), y se checa que su magnitud sean menores que la capacidad del terreno en que está desplantado el muro.

La verificación de la RESISTENCIA COMO ESTRUCTURA del muro, es referente a que en ningún momento se excederán los esfuerzos permisibles de los materiales utilizados para la construcción -- del muro. Esta revisión se hace en un plano cualquiera paralelo a la base del muro o en una hilada arbitraria, ya sea el muro de concreto o mampostería. Los esfuerzos a revisar son los de cortante, compresión y tensión.

CALCULO DEL DIAGRAMA DE INTERACCION DE UNA COLUMNA



DATOS

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$h = 50 \text{ cm}$$

$$d = 45 \text{ cm}$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$A_s = 13.1 \text{ cm}^2 \quad (2 \text{ VARS. \# 8})$$

$$A_s' = 10.1 \text{ cm}^2 \quad (2 \text{ VARS. \# 8})$$

$$f_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

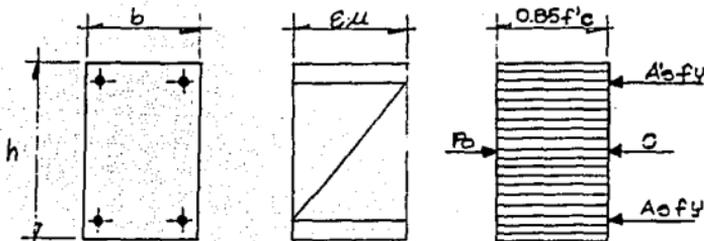
$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$E_s = 2.05 \text{ (COMPRESION)}$$

PROCEDIMIENTO

ECCACION
REFUERZO

PUNTO A: CARGA AXIAL PURA :



$$\text{DEFORMACION} = \epsilon_u = 0.003$$

$$\text{ESFUERZOS} = (0.85 f'c) = 170 \text{ Kg/cm}^2$$

FUERZA EN EL REFUERZO :

$$A_s f_y = A_s f_y = (10.1)(4200) = 42420 \text{ Kg.}$$

FUERZA EN EL CONCRETO :

$$C = (0.85)(200)(30 \times 50 - 2 \times 10.1) = 251,566 \text{ Kg.}$$

EQUILIBRANDO FUERZAS :

$$P_u = C + A_s f_y + A_s f_y$$

$$= 251,566 + 42420 + 42420 = 536,406 \text{ Kg.}$$

AFECTANDOLO POR EL FACTOR DE REDUCCION :

$$P_u = (0.85)(536,406) = 285,945 \text{ Kg.}$$

EL MOMENTO DE LAS FUERZAS ES NULO

$$M_u = 0$$

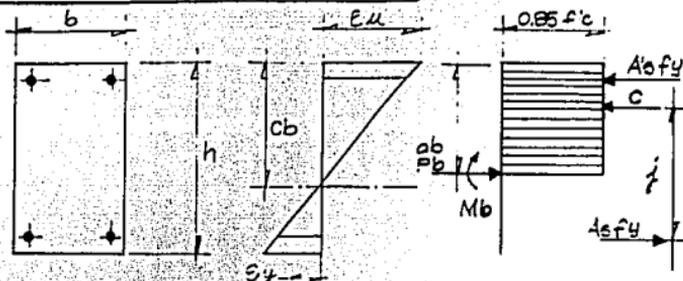
$$\text{PUNTO A} = (0, 285,945) \quad ; \quad \text{AFECTADO POR F.P.}$$

$$A_s = (0, 536,406) \quad ; \quad (\text{SIN AFECTARSE POR F.P.})$$

PROCEDIMIENTO

SECCION REFORZADA

PUNTO B: FALLA BALANCEADA



$$\text{DEFORMACION} = \epsilon_u = 0.008$$

$$\text{ESFUERZOS} = (0.85)(200) = 170 \text{ Kg/cm}^2$$

FUERZA EN EL REFORZO, POR SER ARMADO SIMETRICO Y ESTAR BALANCEADO:

$$A_s f_y = A'_s f_y = (10.1)(4200) = 42420 \text{ Kg}$$

PROFUNDIDAD DE CUÑA DE ESFUERZOS:

$$a_b = K \cdot c_b = \frac{(6000)(K)(d)}{6000 + f_y} = \frac{(6000)(0.85)(45)}{(6000 + 42000)} = 22.5 \text{ cm.}$$

BRAZO DE PALANCA:

$$j = d - \frac{a_b}{2} = 45 - (22.5/2) = 23.75 \text{ cm.}$$

FUERZA DE EL CONCRETO:

$$C = (0.85)(f'_c)(a_b)(b) = (0.85)(200)(22.5)(30) = 114,750 \text{ Kg.}$$

ESQUILIBRANDO FUERZAS:

$$F_b = 42,420 + 114,750 - 42,420 = 114,750 \text{ Kg.}$$

$$F_{bU} = (0.85)(114,750) = 97,537 \text{ Kg.}$$

PROCEDIMIENTO

EQUACION REFERIDA

SUMANDO MOMENTOS CON RESPECTO AL ACERO A TENSION

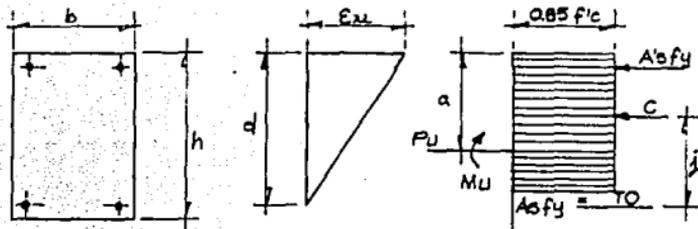
$$M_b = (42,420)(40) + (114,750)(33.75) - (114,750)(20) = 3'274,612$$

$$M_{bu} = (0.85)(3'274,612) = 2'783,420 \text{ Kg-cm}$$

PUNTO B : (2'783,420 , 97,537) (AFECTADO POR F.P.)

PUNTO B' : (3'274,612 , 114,750) (SIN AFECT POR F.P.)

PUNTO C : FALLA EN COMPRESION :

DEFORMACION = $\epsilon_u = 0.003$ ESFUERZO = $(0.85)(200) = 170 \text{ Kg/cm}^2$

FUERZA EN EL ACERO A COMPRESION :

$$A's f_y = (10.1)(4200) = 42,420 \text{ Kg}$$

FUERZA EN EL ACERO A TENSION

$$A_s f_y = 0$$

PROFUNDIDAD DE CUÑA A ESFUERZOS :

$$a = 0.85 d = (0.85)(45) = 38.3 \text{ cms.}$$

FUERZA EN EL CONCRETO :

$$C = (0.85)(200)(a)(b) = (0.85)(200)(38.3)(30) = 195,330 \text{ Kg.}$$

PROCEDIMIENTO

EQUACION
REFERIDA

BRAZO DE PALANCA :

$$j = d - a/2 = 45 - 38.3/2 = 25.8 \text{ cms.}$$

EQUILIBRANDO FUERZAS :

$$P_u = 42,420 + 195,330 - 0 = 273,750 \text{ Kg}$$

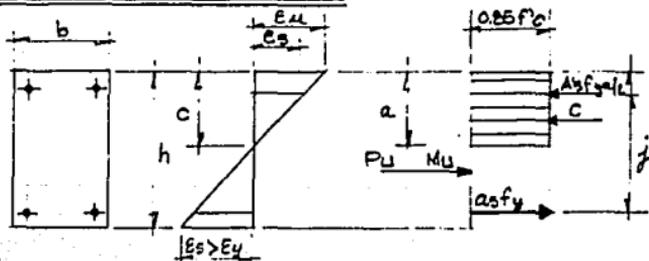
$$P_{uc} = (0.85)(273,750) = 202,087 \text{ Kg}$$

SUMANDO MOMENTOS CON RESPECTO AL ACERO A TENSION :

$$M_u = (42,420)(40) + (195,330)(25.8) - (273,750)(20) = 1'981,314$$

$$M_{uc} = (0.85)(1'981,314) = 1'684,116 \text{ Kg/cm}$$

$$\text{PUNTO C: } (1'684,116, 202,087) ; \text{ PUNTO C': } (1'981,314, 273,750)$$

PUNTO D: FALLA EN TENSION

PROFUNDIDAD MINIMA DEL EJE NEUTRO PARA QUE EL ACERO A COMPRESION FLUYA:

$$c_{\text{MIN}} = \frac{6000 d'}{6000 - f_y} = \frac{(6000)(5)}{(6000 - 4200)} = 16.67 \text{ cm.}$$

PROCEDIMIENTO

ECUACION REFERIDA

ELEGIMOS $c = 18 \text{ cm} > c_{\text{min}}$.

- DEFORMACION DEL CONCRETO : $\epsilon_c = 0.003$
- ANCHO CUÑA DE ESFUERZOS : $0.85 f'c$
- FUERZA EN EL ACERO A TENSION Y A COMPRESION

$$A_s f_y = (10.1)(4200) = 42,420 \text{ Kg.}$$

- PROFUNDIDAD CUÑA DE ESFUERZOS

$$a = k \cdot c = (0.85)(18) = 15.3 \text{ cm.}$$

- FUERZA EN EL CONCRETO :

$$C = (0.85)(f'c)(a)(b) = (0.85)(200)(15.3)(30) = 78,030 \text{ Kg.}$$

- BRAZO DE PALANCA :

$$j = d - a/2 = 45 - 15.3/2 = 37.35 \text{ cms}$$

EQUILIBRANDO FUERZAS, PARA HALLAR P_U :

$$P_U = 42,420 + 78,030 - 42,420 = 78,030 \text{ Kg.}$$

$$P_{TU} = (0.85)(78,030) = 66,325 \text{ Kg}$$

EQUILIBRANDO MOMENTOS PARA ENCONTRAR M_U :

ΣM CON RESPECTO a $A_s f_y$:

$$M_U = (42,420)(40) + (78,030)(37.35) - (78,030)(20) = 3'050,620 \text{ Kg-cms.}$$

$$M_{TU} = (0.85)(3'050,620) = 2'593,027 \text{ Kg/cm.}$$

PUNTO D : (2'593,027 , 66,325) AFECTADO POR FR.

PUNTO O : (3'050,620 , 78,030) SIN AFECTAR POR F.R.

CAPITULO : 5

EJEMPLO No. 12

PROCEDIMIENTO

SITUACION
REFERIDA

PUNTO E : CARGA AXIAL NULA :

SE REVISARA COMO VIGA SUBREFORZADA (POR LO QUE EL ACERO A COMPRESION NO INFLUYE)

$$q = \frac{(10.1)(4200)}{(30)(45)(200)} = 0.157$$

$$M_U = (\phi)(30)(45^2)(200)(0.157)(1-0.157)$$

NO SE CONSIDERARA EL COEFICIENTE ϕ :

$$M_U = 1'608,064 \text{ Kg-cm}$$

$$M_{MU} = (0.85)(1'608,064) = 1'366,854 \text{ Kg-cm}$$

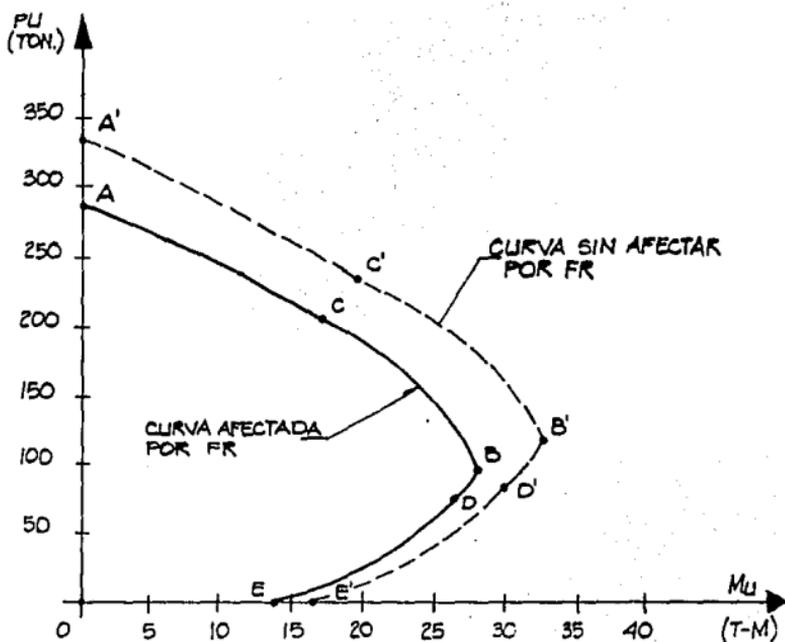
$$P_{MU} = 0$$

PUNTO E : (1'366,854, 0)

PUNTO E : (1'608,064, 0)

AFECTADO POR FR
SIN AFECTAR POR FR

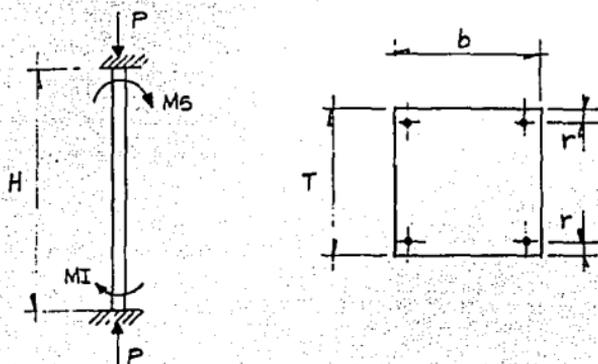
PROCEDIMIENTO

DIAGRAMA DE INTERACCION

CAPITULO : 5

EJEMPLO : No. 13

REVISIÓN DE UNA COLUMNA CUADRADA DE CONCRETO
SOMETIDA A FLEXOCOMPRESIÓN UNIAxIAL



DATOS :

$$H = 400 \text{ cm}$$

$$b = 40 \text{ cm}$$

$$T = 40 \text{ cm}$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$d = 35 \text{ cm}$$

$$P = 90 \text{ cm}$$

$$M_s = 15 \text{ TON}\cdot\text{m}$$

$$M_I = 20 \text{ TON}\cdot\text{m}$$

$$FC = 1.4$$

$$f'_c = 250 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

CODIGO : R.C.D.F.

PROCEDIMIENTO

SOLUCION
DEFINIDALIMITACIONES DE REFUERZO :

$$A_{s \text{ min}} = \frac{(20)}{(4200)} (40)(40) = 7.62 \text{ cm}^2 \quad \dots \dots \quad 5.15$$

$$A_{s \text{ max}} = (0.08)(40)(40) = 128 \text{ cm}^2 \quad \dots \dots \quad 5.16$$

REVISION :

$$P_U = (1.4)(90) = 126 \text{ TON}$$

$$M_{U5} = (1.4)(15) = 21 \text{ TON-M}$$

$$M_{U1} = (1.4)(20) = 28 \text{ TON-M}$$

$$\frac{d}{t} = \frac{95}{40} = 0.88 \quad \text{USAR GRAFICA}$$

$$f'_c = (0.85)(0.8)(250) = 170 \text{ Kg/cm}^2$$

$$e = 28/126 = 0.22 \text{ m} = 22 \text{ cm}$$

$$R = \frac{28 \times 10^5}{(0.85)(40)(40)(170)} = 0.3 \quad \dots \dots \quad 5.11$$

$$K = \frac{126 \times 10^3}{(0.85)(40)(40)(170)} = 0.54 \quad \dots \dots \quad 5.12$$

$$\frac{e}{h} = \frac{22}{40} = 0.55$$

DE LA GRAFICA, SE ENCUENTRA $q = 0.41$

$$p = \frac{(0.41)(170)}{4200} = 0.016$$

$$A_{s \text{ REQ}} = (0.016)(40)(40) = 25.6 \text{ cm}^2$$

$$A_{s \text{ min}} < A_{s \text{ req}} < A_{s \text{ max}}$$

CAPITULO : 5

EJEMPLO : No. 13

PROCEDIMIENTO

SE PROPONE EL SIGUIENTE ARMADO :

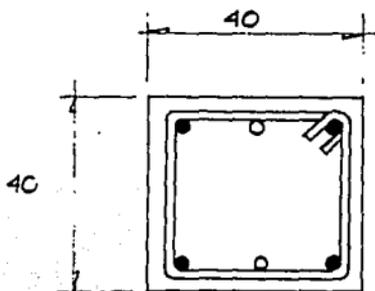
4 VARS. # 8 + 2 VARS. # 6 ($A_t = 25.98 \text{ cm}^2$)

PROPONIENDO ESTRIBOS DEL # 3, SU SEPARACION MAXIMA SERA :

$$\left(\frac{850}{\sqrt{4200}}\right)(1.9) = 25 \text{ cm} \quad \text{ó} \quad (48)(0.95) = 45 \text{ cm} \quad \text{ó}$$

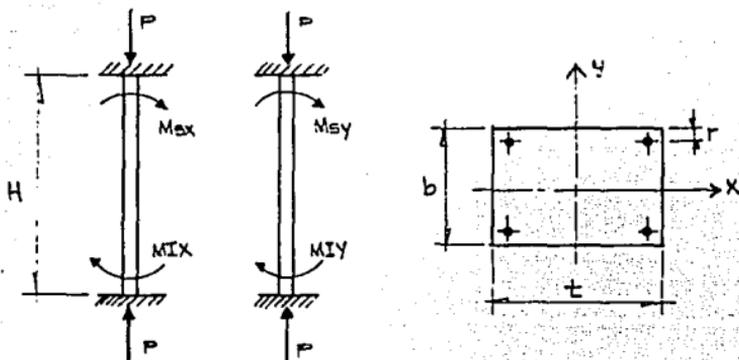
DIM. MIN. COL. = 40 cm.

USAR ESTRB. # 3 @ 25 cm.



- 4 VARS. # 8
 - 2 VARS # 6
- ESTRS. # 3 @ 25 cm.

REVISIÓN DE UNA COLUMNA RECTANGULAR DE CONCRETO SUJETA A FLEXOCOMPRESIÓN BIAxIAL



DATOS :

$$H = 400 \text{ cm.}$$

$$T = 60 \text{ cm.}$$

$$b = 40 \text{ cm.}$$

$$r = 5 \text{ cm.}$$

$$P = 20 \text{ TON.}$$

$$M_x = 30 \text{ TON-m}$$

$$M_y = 15 \text{ TON-m}$$

$$M_x = 18 \text{ TON-m}$$

$$M_y = 10 \text{ TON-m}$$

$$f'_c = 250 \text{ Kg/cm}^2 \quad \therefore \quad f^*_c = 200 \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{y} \quad f^*_s = 170 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

CODIGO : R.C.D.F.

F.C. : 1.1

PROCEDIMIENTO

INDICACION
REFERIDALIMITACIONES DE REFUERZO

$$\rho_{min} = \left(\frac{20}{4200} \right) = 0.004 \quad \dots \dots \dots 5.15$$

$$\rho_{max} = 0.08 \quad \dots \dots \dots 5.16$$

REVISION :

$$P_U = (1.1)(30) = 33.0 \text{ TON.}$$

$$M_{UX} = (1.1)(30) = 33.0 \text{ TON-M}$$

$$M_{UY} = (1.1)(15) = 16.5 \text{ TON-M}$$

$$M_{UX} = (1.1)(18) = 19.8 \text{ TON-M}$$

$$M_{UY} = (1.1)(10) = 11.0 \text{ TON-M}$$

$$\rho \text{ PROPUESTO : } 2\% = 0.02 > \rho_{min.} \text{ y } < \rho_{max.}$$

$$\therefore A_S = (0.02)(40)(60) = 48 \text{ cm}^2$$

PRO :

$$P_{RC} = 0.85 (40 \times 60 \times 170 + 48 \times 4200) = 518,160 \text{ Kg.} \quad \dots \dots \dots 5.13$$

PRX (DIMENSIONES SOBRE EJE X) :

$$e_x = 33.0 / 99 = 0.33 \text{ min} = 33 \text{ cm}$$

$$e_x / l_t = 33 / 60 = 0.55$$

$$d / l_t = 60 - 5 / 60 = 0.91 \quad \text{USAR GRAFICA}$$

$$q = \frac{(0.02)(4200)}{170} = 0.49 \quad \text{DE LA GRAFICA REFERIDA}$$

$$K = 0.47$$

$$P_{RX} = (0.47)(0.85)(40)(60)(170) = 162,596 \text{ Kg} \quad \dots \dots \dots 5.12$$

PROCEDIMIENTO

ECCACION
REFERIDA

PR4 (DIMENSIONES SOBRE EJE Y) :

$$e_y = 19.8/99 = 0.2 \text{ m} = 20 \text{ cm.}$$

$$e_y/t = 20/40 = 0.5$$

$$d/t = 40 - 5/40 = 0.87 \quad \text{USAR GRAFICA}$$

$$q = \frac{(0.02)(4200)}{170} = 0.49, \text{ DE LA GRAFICA REFERIDA :}$$

$$K = 0.50$$

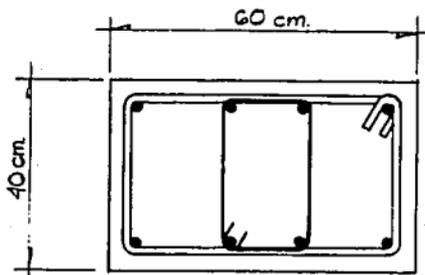
$$PR4 = (0.5)(0.85)(40)(60)(170) = 173,400 \text{ Kg} \quad \dots\dots 5.12$$

APLICANDO LA FORMULA DE BRESLER :

$$FR = \frac{1}{\frac{1}{162,996} + \frac{1}{173,400} - \frac{1}{518,160}} = 100,278 \text{ Kg} \quad \dots\dots 5.13$$

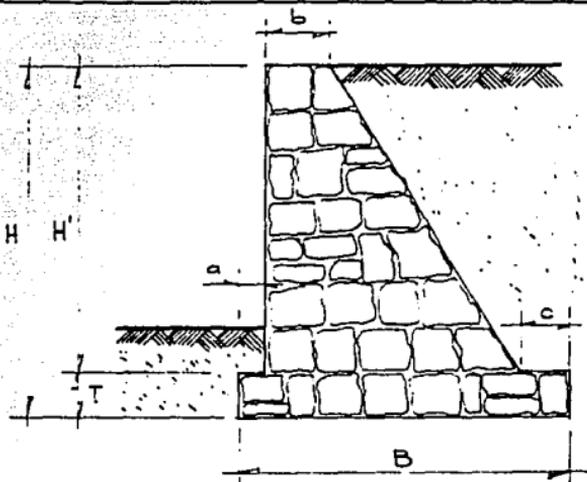
$$FR = 100.27 \text{ TON} > PU = 99 \text{ TON.}$$

LA SECCION ES ACEPTABLE :



● 10 VAR.S. #8
(AS = 50 cm²)

REVISION DE UN MURO DE RETENCION DE GRAVEDAD



DATOS :

$$a = 25 \text{ cm}$$

$$b = 40 \text{ cm.}$$

$$c = 25 \text{ cm}$$

$$B = 300 \text{ cm}$$

$$H = 450 \text{ cm.}$$

$$H' = 390 \text{ cm.}$$

$$T = 60 \text{ cm.}$$

$$\gamma_{\text{RELLENO}} = 1.95 \text{ TON/M}^3$$

$$\phi = 30^\circ$$

$$\gamma_{\text{RES. TERRENO}} = 16 \text{ TON/M}^3$$

$$\text{COEF. FRICCIÓN } \mu = 0.5$$

$$\gamma_{\text{MURO}} = 2.4 \text{ TON/M}^3$$

PROCEDIMIENTO

Ecuación
REFERIDA

DETERMINACION DE CARGAS :

SEGUN RANKINE , PARA EMPUJES DE TERRENO ,

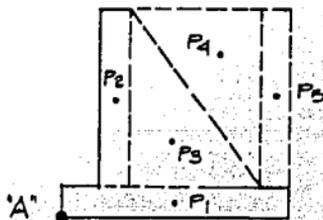
$$E_a = \frac{K_a \gamma^2 H^2}{2}$$

$$K_a = \frac{1 - \text{SEN } 30^\circ}{1 + \text{SEN } 30^\circ} = 0.33$$

$$E_a = \frac{(0.33)(1.95)(4.5^2)}{2} = 6.51 \text{ T/M.}$$

$$\gamma = \frac{H}{3} = \frac{4.5}{3} = 1.5 \text{ M.}$$

PARA CARGAS VERTICALES :



$$P_1 = (3.0)(0.6)(2.4) = 4.32 \text{ T/M.}$$

$$P_2 = (3.0)(0.4)(2.4) = 3.74 \text{ "}$$

$$P_3 = (2.10)(3.0) / 2 \times 2.4 = 2.83 \text{ "}$$

$$P_4 = (2.10)(3.0) / 2 \times 1.95 = 7.99 \text{ "}$$

$$P_5 = (3.0)(0.25)(1.95) = 1.90 \text{ "}$$

$$\Sigma T = 27.78 \text{ T/M.}$$

PROCEDIMIENTOEQUACION
REFERIDAREVISION A VOLTEO :

$$MV = (6.51)(1.5) = 9.77 \text{ T-M.}$$

MR :

CARGA	P (T/M)	BRAZO (M)	MR (T-M/M)
P ₁	4.32	1.50	6.48
P ₂	3.74	0.45	1.68
P ₃	2.88	1.35	3.87
P ₄	7.99	2.05	16.38
P ₅	1.90	2.88	5.47

$$\Sigma P = 27.78$$

$$\Sigma MR = 43.28$$

$$X\bar{x} = \frac{43.28}{27.78} = 1.56 \text{ m.}$$

$$MR = 43.28 \text{ T-M/M}$$

$$F.S.V = \frac{43.28}{9.77} = 4.4 > 2.0 \quad \dots \dots \dots 5.19$$

REVISION A DEBLIZAMIENTO :

$$\Sigma FV = 27.78 \text{ T/M}$$

$$\Sigma FH = 6.51 \text{ T/M}$$

$$F.S.D. = \frac{(0.5)(27.78)}{6.51} = 2.13 > 1.5 \quad \dots \dots \dots 5.20$$

NO SE CONSIDERA EL EMPUJE PASIVO AL
FRENTE, POR PROBABLE SOCAVACION!

PROCEDIMIENTO

SOLUCION
REFERIDA

ESFUERZOS EN TERRENO :

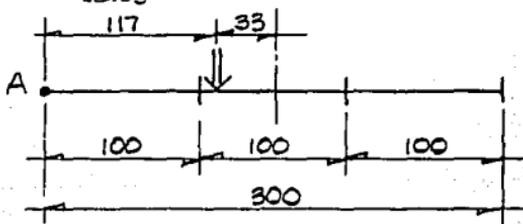
$$\text{RESULTANTE } R = \sqrt{(6.51)^2 + (27.78)^2} = 28.53 \text{ T/M.}$$

$$\alpha = \text{ang TANG } \frac{27.78}{6.51} = 77^\circ$$

RESULTANTE A PARTIR DEL PUNTO "A"

$$\sum M_A = 0 \quad MR - My = (Z)(R)$$

$$\therefore Z = \frac{43.28 - 9.77}{28.53} = 1.17$$



LA RESULTANTE CAE EN EL TERCIO MEDIO, LO CUAL ES MUY RECOMENDABLE.

$$T_1 = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$T_2 = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I}$$

$$P = 28.53 \text{ T/M.}$$

$$A = (3.0)(1.0) = 3.0 \text{ m}^2$$

$$M = (28.53)(0.33) = 9.42 \text{ T-M}$$

$$c = 1.5 \text{ m.}$$

$$I = (1.0)(3.0)^3 / 12 = 2.54 \text{ m}^4$$

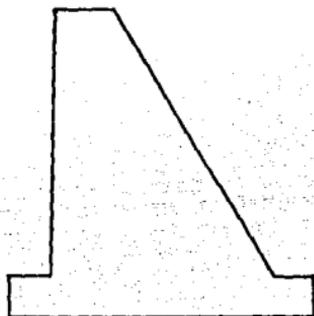
PROCEDIMIENTO

ECUACION
REFERIDA

$$\tau_1 = \frac{28.53}{3.0} + \frac{(9.42)(1.5)}{2.25} = 15.8 \text{ T/M}^2 < 16 \text{ T/M}^2$$

$$\tau_2 = \frac{28.53}{3.0} - \frac{(9.42)(1.5)}{2.25} = 3.23 \text{ T/M}^2 < 16 \text{ T/M}^2$$

POR LO QUE EL MURO ES ACEPTABLE.



"Me inquietan terriblemente los
ingenieros de Pizarrón"

Heberto Castillo

CAPITULO

6

C A P I T U L O 6

ESTABILIDAD DE ELEMENTOS SUJETOS A COMPRESION AXIAL

6.1 INTRODUCCION AL PROBLEMA DE ESTABILIDAD. EQUILIBRIO ESTABLE, INESTABLE E INDIFERENTE. CONCEPTO DE CARGA CRITICA.

La estabilidad de un cuerpo la podemos definir como una situación de equilibrio del mismo, caracterizado porque al separar ligeramente el cuerpo de su posición inicial, la nueva resultante de las fuerzas que actúan sobre él, tienden a devolverlo a su primitiva posición.

Consideremos un elemento corto, por ejemplo una barra de -- diámetro "d", sometida a una carga de compresión axial. Si ésta barra trabajando como columna fuera de longitud "d", no tendría problemas de INESTABILIDAD (efecto contrario al descrito en el primer párrafo) y dicho elemento soportaría una carga considerable hasta llegar al punto correspondiente a la resistencia última del material.

Por el contrario, si la misma barra tuviera una longitud de varios diámetros, al aplicársele una carga axial creciente, en un momento dado se produciría una deflexión súbita, y si se continuará incrementando la carga se presentaría el colapso de la pieza. La fuerza aplicada sería menor que la que puede soportar la pieza como corta, pues se tiene el problema de inestabilidad lateral que provoca el pandeo de la pieza y falla por este motivo antes que por aplastamiento del material.

Observamos que en el segundo caso (el de una columna esbelta), el problema radica en encontrar el valor límite de la carga, más allá del cuál, el más pequeño incremento desencadenará el -- pandeo y la falla de la columna. Este valor límite de la carga recibe el nombre de CARGA CRITICA, y el esfuerzo correspondiente ESFUERZO CRITICO.

De acuerdo a las definiciones anteriores de estabilidad y carga crítica, podemos encontrar tres posibles estados de equilibrio de un elemento esbelto. Veamos el caso de una columna esbelta del eje recto bajo la acción de una carga axial P . Esta columna permanecerá teóricamente recta y se comprimirá sin flexionarse, dependiendo del valor de P con respecto al de CARGA CRÍTICA (PCR). Por lo tanto la columna puede pasar por tres estados de equilibrio.

1.- EQUILIBRIO ESTABLE, que se presenta cuando P es menor que PCR. Mientras se cumple esta condición, al aplicar a la columna una fuerza horizontal F al elemento, se flexionará (fig. 6-1a), pero volverá a su condición recta al suprimir dicha fuerza (fig. 6-1b).

2.- EQUILIBRIO INDIFERENTE, que es el caso cuando la carga P , al ser incrementada gradualmente toma el valor de PCR. Entonces si aplicamos la fuerza F horizontalmente se produce en la columna una flecha (fig. 6-2a), que ya no desaparece al cesar la fuerza horizontal (fig. 6-2b).

3.- EQUILIBRIO INESTABLE, que se caracteriza porque el valor de P es mayor que el de PCR. Al aplicar en esta condición una fuerza horizontal F a la columna, ocurre el colapso de la pieza (fig. 6-3a y 6-3b). Las figuras 6-1c, 6-2b y 6-3c, son un par de analogías que sirven para visualizar mejor estas condiciones de equilibrio.

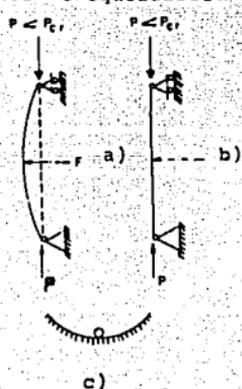


fig. 6-1

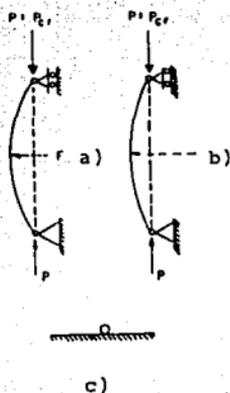


fig. 6-2

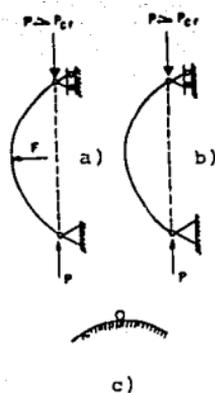


fig. 6-3

Veamos ahora un ejemplo sencillo para comprender el comportamiento de las columnas. Considere un miembro esbelto en com-

presión, articulado en sus extremos y sujeto a una carga axial P y a otra transversal F , que actúa a la mitad de su longitud (fig 6-4).

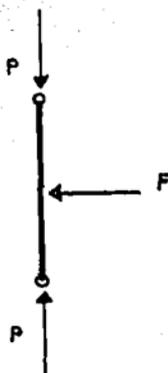


fig. 6-4

El comportamiento de ésta columna dentro del rango elástico se describe mediante las siguientes condiciones geométricas y de equilibrio:

$$My - \frac{F}{2} y + Px \dots (6.1)$$

$$My = -\frac{1}{4} EI \frac{d^2 x}{dy^2} \dots (6.2)$$

de lo cual resulta una ecuación diferencial cuya solución es

$$x = \frac{1}{2} \frac{F}{P} y \left(\frac{\operatorname{sen} ky}{ky \cos(KL/2)} - 1 \right) \dots (6.3)$$

donde

$$K = \left(\frac{P}{EI} \right)^{1/2}$$

siendo E el módulo elástico del material, e I el momento de inercia de la sección transversal.

Según la ecuación (6-3), cuando $\cos(KL/2)$ es cero, la deformación x es infinita, aún cuando F sea muy pequeña. Para ésta condición se debe cumplir que

$$\frac{KL}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad K = \left(\frac{P}{EI} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{L}$$

o bien

$$P = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \dots (6.4)$$

De esta manera se obtiene la carga crítica PCR para una columna simplemente apoyada en sus extremos sujeta a carga axial. Más adelante se darán ecuaciones para hallar la carga crítica de elementos con diferentes condiciones de apoyo. Hagamos notar -- que la teoría para obtener la ecuación (6.4) es válida si la deformación o flecha x conserva valores pequeños para no exceder el límite de proporcionalidad.

6.2 CARGA CRITICA EN COLUMNAS ELASTICAS SUJETAS A CARGA AXIAL.

FORMULA DE EULER. CONCEPTO DE RELACION DE ESBELTEZ. EFECTO DE LAS CONDICIONES DE APOYO. LONGITUD EFECTIVA DE PANDEO. DETERMINACION DE LONGITUDES EFECTIVAS MEDIANTE NOMOGRAMAS.

El desarrollo para la obtención de fórmulas que nos muestren el valor de la carga crítica P_{cr} en columnas elásticas, se hace en base a una serie de hipótesis para idealizar las columnas:

- a.-) El material es linealmente elástico y no excede en ningún caso el límite de proporcionalidad.
- b.-) El módulo elástico del material es el mismo en tensión que en compresión.
- c.-) El material es perfectamente homogéneo e isotrópico.
- d.-) El miembro es perfectamente recto y la carga axial está aplicada en el centroide de la sección transversal.

Si aceptamos que el pandeo se inicia cuando la carga axial P es igual a la carga crítica P_{cr} , llamaremos PANDEO ELASTICO al producido cuando P llega al valor de P_{cr} sin que los esfuerzos actuantes en la columna no pasen los límites de proporcionalidad.

De manera similar a como se obtuvo la ecuación (6.4) y considerando la forma de la elástica correspondiente (zonas asegurada de la fig. 6-5) para una serie de posibles casos de columnas, podemos dar las ecuaciones correspondientes para carga crítica P_{cr} y ESFUERZO CRITICO (P_{cr}/A). Las figuras siguientes son de columnas de longitud L , sección A y sometidas a fuerza compresiva P , que produce pandeo con las siguientes condiciones de apoyo:

- a.-) Dos extremos articulados
 b.-) Empotrada en su base y libre en su extremo superior.
 c.-) Empotrada en sus dos extremos.
 d.-) Empotrada en su base y articulado en su extremo superior.
 e.-) Articulada en sus extremos, pero P aplicada excentricamente.

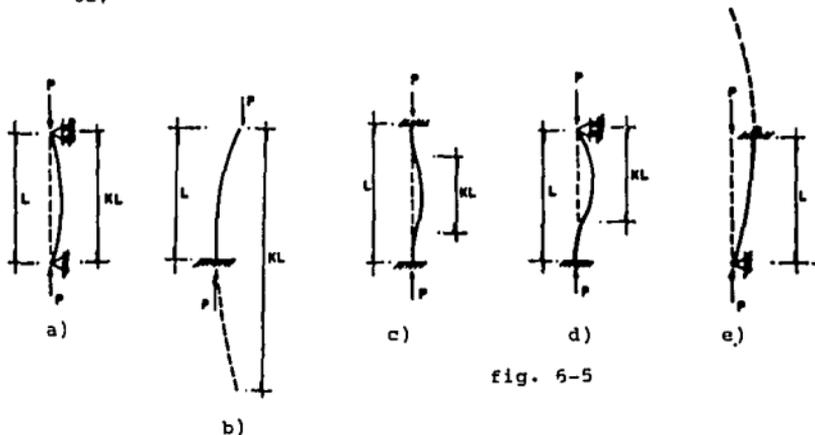


fig. 6-5

Notemos que:

- Los valores encontrados para la carga y el esfuerzo son valores críticos, por lo que habrá que dividirlos entre un -- cierto factor de seguridad para hallar una carga de diseño.
- La carga y el esfuerzo crítico son solo funciones de las -- propiedades elásticas del material y las dimensiones de la columna.
- El esfuerzo vará en razón inversa del cuadrado de la longitud de la columna y en razón directa del cuadrado del radio de giro.

Se mostró el comportamiento de una columna bajo carga axial con extremos articulados, porque este es el llamado CASO FUNDAMENTAL DE PANDEO y con el se verán un par de situaciones interesantes.

Una es su inestabilidad y comportamiento teórico como un elemento ideal y la comparación con el real. La fig. 6-6 muestra lo primero con una línea recta continua \overline{OAB} . El elemento tiene una deflexión x igual a cero con cargas P que aumentan hasta alcanzar un valor crítico P_{cr} . En este punto se presenta una bi -

furcación con $x = 0$, o bien x indeterminada para satisfacer la solución matemática. Pero esto no ocurre en la realidad debido a que el material no es perfectamente homogéneo e isotrópico, ni es recto inicialmente, ni tampoco la carga es concéntrica con el centroide de la sección.

Todo esto provoca que la deflexión lateral crezca en forma progresiva hasta tener un incremento súbito con cargas cercanas a $\frac{P_{cr}}{A}$, como se muestra en la fig. 6-6 con la línea discontinua-- $O A' B'$.

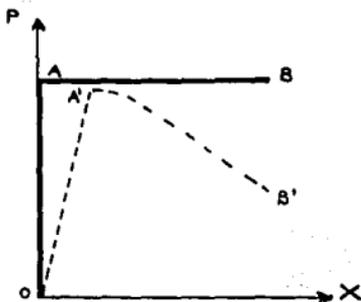


fig. 6-6

La otra situación a mostrar es muy importante. Supongamos que la columna cumple con los requisitos para ser considerada como ideal. Entonces el esfuerzo axial está distribuido uniformemente sobre la sección transversal para todos los valores de carga hasta llegar a la carga crítica, y por lo tanto, el esfuerzo crítico f_{cr} puede tomarse como

$$f_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} \dots (6.5)$$

Si llamamos RADIO DE GIRO MINIMO de la sección transversal a la relación

$$r = \left(\frac{I}{A} \right)^{1/2}$$

y la sustituimos en la ecuación (6-5), tenemos la expresión

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \dots (6.6)$$

siendo L la longitud de la columna y r, el radio de giro mínimo de la sección.

La ecuación (6.6) es conocida usualmente como FORMULA DE -- EULER, en honor al matemático suizo Leonhard Euler quien obtuvo esa expresión para la carga crítica Pcr en 1757. Esta ecuación, a la fecha, la única fórmula para columnas desarrollada en forma puramente teórica, pero que solamente tiene validez cuando las condiciones de apoyo son tratadas cuidadosamente. Sin embargo, para los casos reales en la práctica puede usarse la fórmula con resultados aceptables.

En base a la fórmula de Euler (ecuación 6.6) tenemos que

- . La carga de pandeo es independiente de la resistencia del material utilizado.
- . El esfuerzo crítico se define como una función del módulo elástico del material E.
- . El esfuerzo crítico está también en función de la RELACION-DE ESBELTEZ (L/r), característica geométrica adimensional de una columna ideal.

Además la fórmula de Euler es válida siempre que el esfuerzo crítico, fcr, sea menor o igual al límite de proporcionalidad -- del material, es decir, el pandeo de la columna es elástico.

La figura 6-7 muestra una gráfica del esfuerzo crítico, fcr, en columnas en función de su relación de esbeltez, L/r.

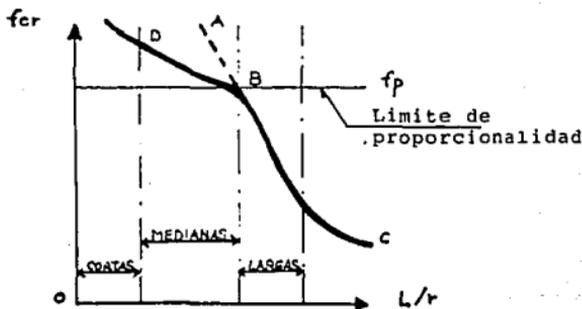


fig. 6-7

La curva (hipérbola) correspondiente a la ecuación de Euler, $f_{cr} = \pi^2 E / (L/r)^2$, es la graficada por los puntos ABC. Esta curva es válida físicamente solo si se encuentra por debajo del límite de proporcionalidad, f_p , es decir, en el tramo BC.

Si igualamos la ecuación (6.6) en el límite de proporcionalidad y luego despejamos el valor mínimo de esbeltez en el cual es aplicable la fórmula de Euler tenemos.

$$\frac{L}{r} = \left(\frac{\pi^2 E}{f_p} \right)^{1/2} \dots (6.7)$$

Por encima de este valor las columnas se pandean elásticamente y cuando su relación de esbeltez es igual o mayor que el valor límite, se dice que son COLUMNAS LARGAS.

En caso contrario, cuando las columnas tienen una baja relación L/r , no presentan problemas de pandeo y reciben el nombre de COLUMNAS CORTAS. La falla de estos elementos por carga axial ocurre por aplastamiento o fluencia del material. En este caso, no es aplicable la ecuación de Euler, puesto que el esfuerzo sobrepasa el límite de proporcionalidad (punto D de la figura 6-7) antes de que se inicie el pandeo.

Entre los rangos de columnas cortas y largas hay un intervalo de relaciones de esbeltez intermedia demasiado pequeñas para que rijan la estabilidad elástica y muy grande para hacer--

únicamente una consideración de resistencia. Estas COLUMNAS MEDIANAS se pandean elásticamente y se encuentra entre la curva -BD de la figura 6-7.

En la deducción de la fórmula de Euler (y también en la del módulo tangente que se verá más tarde) se consideró un miembro con articulación en sus extremos, condición que es sumamente difícil de reproducir en la práctica, debido a que existe fricción en las articulaciones, lo que evita una rotación libre de los apoyos del elemento.

Esta restricción en los apoyos provoca cambios importantes en la elástica de los elementos esbeltos sometidos a carga axial.

Para utilizar la fórmula de Euler con buen resultado en columnas prácticas, el valor de L (longitud) se toma como la distancia entre puntos de inflexión de la elástica (punto de momento nulo). Esta distancia se le llama LONGITUD EFECTIVA (L_e) de la columna. Para el caso fundamental de pandeo ya visto, los puntos de momento nulo se hallan en los extremos separados por una longitud real L (fig. 6-8), que es igual a la longitud efectiva L_e .

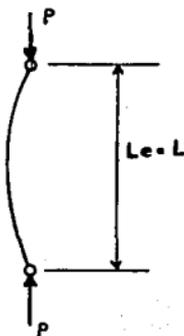


fig. 6-8

Sin embargo, para columnas con diferentes condiciones de apoyo, las longitudes efectivas son totalmente distintas debido a la elástica o deformación que sufren al aplicárseles una carga. La figura 6-9 muestra algunos casos de columnas con diferentes apoyos: a.-) columna doblemente empotrada; b.-) un extremo empotrado y otro articulado y c.-) un extremo empotrado y otro libre.

En todos ellos L es la longitud real y Le la longitud efectiva.

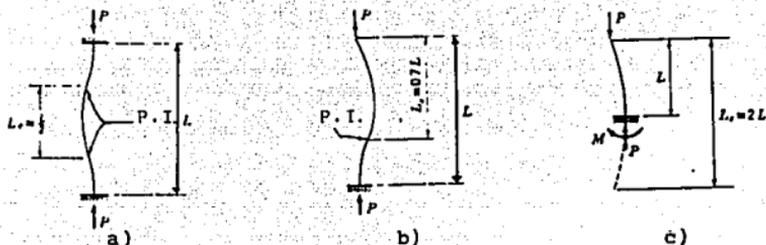


fig. 6-9

El significado físico de la longitud efectiva es notorio si comparamos el modo de pandeo de la figura 6-8 con el mostrado en 6-9c. Aunque la forma de pandeo de ambas es la misma, la longitud efectiva del primero es $L_e = L$ y la del segundo $L_e = 2L$. Si sustituimos en la ecuación (6.4) estos valores para encontrar el Pcr obtenemos

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ para la fig. 6-8}$$

y
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \text{ para la fig. 6.9c}$$

notando que la carga crítica de pandeo P_{cr} es mucho menor en un miembro con un extremo empotrado y otro libre, que en el caso de un elemento con dos extremos articulados.

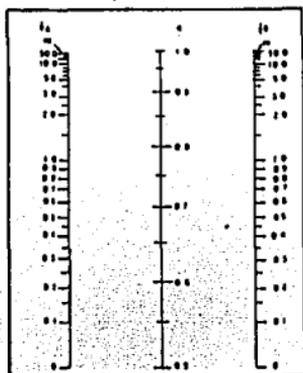
Generalmente el valor de L_e se sustituye por el de KL , siendo K el FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA, el cual depende de las restricciones de los extremos. La tabla muestra el valor teórico de K para una serie de casos comunes de condiciones de apoyos extremos y el valor de K recomendado para diseño con lo cual se toma en cuenta las diferencias de las condiciones existentes en las estructuras reales respecto a las ideales.

Para obtener las longitudes efectivas para columnas que forman parte de marcos, se utilizan los NOMOGRAMAS, debido a que es muy difícil identificar las condiciones de apoyo de los elementos. Estos nomogramas se dividen en dos:

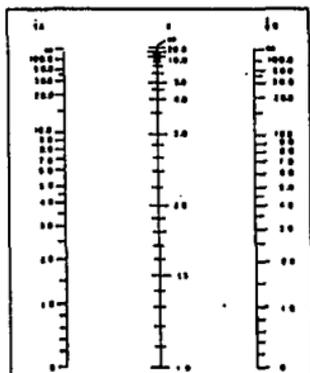
1.- Nomogramas para marcos arriostrados
(sin desplazamientos laterales)

2.- Nomogramas para marcos no arriostrados
(con desplazamientos laterales)

Esta división se hace por la notoria diferencia que tienen en su comportamiento las columnas. La figura 6-10a muestra la longitud efectiva de una columna que forma parte de un marco arriostrado. Los valores de K varían en 0.5 y 1.0. En cambio en las columnas de marcos que se desplazan (fig. 6-10b), el valor de K es siempre mayor que 1.0.



a) MARCOS ARRIOSTRADOS
(SIN DESPLAZAMIENTOS LATERALES)



b) MARCOS NO ARRIOSTRADOS
(CON DESPLAZAMIENTOS LATERALES)

fig. 6-10

A manera de visualizar mejor el comportamiento de los marcos, la figura 6-11 muestra los modos de pandeo para: a) un marco arriostrado y b) para un marco no arriostrado.

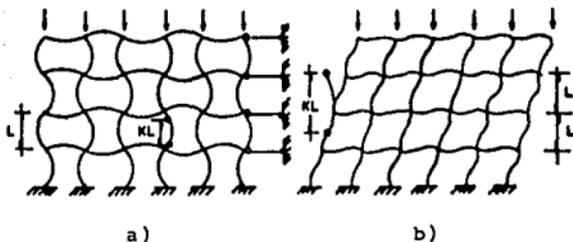


fig. 6-11

El uso de los nomogramas es sumamente sencillo. El valor de K depende de la restricción rotacional en las juntas. Por lo tanto, es necesario calcular los parámetros ΨA (parámetro de la junta en el extremo superior) y ΨB (parámetro del extremo inferior) de la columna. Su valor está dado por

$$\Psi (A \text{ ó } B) = \frac{\sum (I_c/L_c) \dots (6.8)}{\sum (I_b/L_b)}$$

donde $\sum (I_c/L_c)$ es la suma de las rigideces relativas de las -- COLUMNAS que concurren a la junta del extremo correspondiente, y $\sum (I_b/L_b)$ es la suma de las rigideces relativas de las TRABES U OTRO ELEMENTO (no columna) que llegan a la misma junta

El momento de inercia I, y la longitud libre L, del elemento considerado deben calcularse en el plano en que se considera el pandeo de la columna.

Con los valores calculados de ΨA y ΨB se acude a la tabla y se unen estos parámetros con una línea. La columna central da el valor de K. Estos nomogramas son para marcos arriostros y no arriostros.

6.3 LIMITACIONES DE LA FORMULA DE EULER. GENERALIZACION PARA EL RANGO INELASTICO.

Habíamos visto que la suposición del comportamiento linealmente elástico del material de una columna ideal solo es válida mientras el esfuerzo crítico f_{cr} no exceda del límite de proporcionalidad f_p . De ahí que al estar basada la fórmula de Euler - en éste principio, halla una discrepancia notable en valores de pruebas y valores de Euler cuando se usan esfuerzos por arriba del límite de proporcionalidad.

Observemos la figura 6-12, el cual es un diagrama esfuerzo-deformación de una columna real. En un cierto esfuerzo $f > f_p$, la pendiente de la curva esfuerzo-deformación se define por medio del MODULO TANGENTE ET, el cual es más pequeño que el módulo inicial E, basada en la relación lineal f-E. Por lo tanto, la carga crítica P_{cr} ya no es válida cuando f_{cr} excede al límite de proporcionalidad.

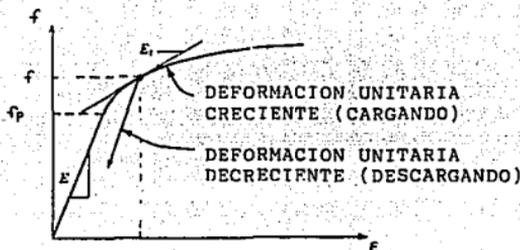


fig. 612

En 1889, Engesser dió a conocer la llamada TEORIA DEL MODULO TANGENTE, en la cuál sugiere que la carga crítica de pandeo de una columna cargada axialmente dentro del RANGO INELASTICO, se pueda definir por medio de la ecuación de Euler, remplazando al módulo de elasticidad E por el módulo tangente E_t que corresponda al esfuerzo crítico, es decir,

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2} \dots (6.10)$$

que es la llamada FORMULA GENERALIZADA DE EULER o bien FORMULA--DEL MODULO REFERIDO A LA TANGENTE.

Engesser consideró que la columna se conservaría recta hasta la falla, y que el módulo tangente era constante para toda la sección transversal de la columna, pues la deformación de todas las fibras de dicha sección seguirán la ley $(df/d\epsilon) = E_t$, y por lo tanto, no habría ninguna descarga en las fibras.

Pero si la columna está ligeramente curvada se origina un aumento del esfuerzo de compresión en el lado cóncavo y una disminución del mismo en el lado convexo. La disminución del esfuerzo de compresión sigue una relación lineal esfuerzo-deformación, mientras que el crecimiento no lo hace. Debido a esto, el mismo Engesser y Von Karman introdujeron en 1895 la teoría del MODULO REDUCIDO ó DOBLE MODULO, en la que se utiliza un módulo reducido E_r, un poco mayor que el módulo tangente E_t, o sea

$$E_t < E_r < E$$

y por lo tanto, las capacidades de cargas estimadas para la columna resultan mayores que las obtenidas con la teoría original de Engesser. Entonces, el esfuerzo crítico f_{cr} se da por

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E_r}{(L/r)^2} \dots (6.10)$$

Sin embargo en 1947, Shanley demostró que el esfuerzo crítico depende de las condiciones que proceden al pandeo, y que la teoría del módulo tangente fija un límite inferior del valor real del esfuerzo crítico. Esto, aunado a que los resultados de pruebas muestran que los valores del módulo tangente quedan del lado de la seguridad y los del doble módulo no, ha hecho que la expresión (6.9) sea considerada generalmente como la solución adecuada para el esfuerzo crítico dentro del rango inelástico. La figura 6-13 muestra las curvas obtenidas al usar las fórmulas de Euler, Módulo Tangente y Módulo reducido, para su comparación

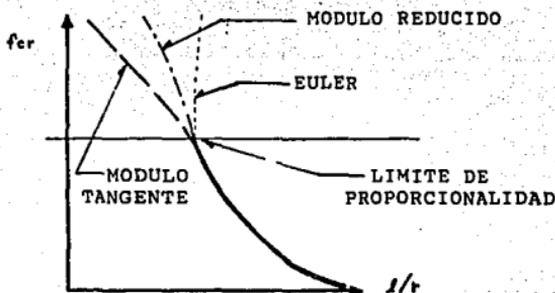


fig. 6-13

La ecuación (6.9) no puede resolverse directamente porque E_t y su correspondiente f_t (que debe ser igual a f_{cr}) son independientes, y f_{cr} debe conocerse antes de E_t . Por esto, es necesario considerar por tanteos valores de f_{cr} , y obtener el módulo tangente para cada uno de ellos, hasta que ambos sean constantes, utilizando para ello la curva esfuerzo-deformación específica para cada caso.

Entonces, para trazar una curva de la ecuación de Euler por encima del límite de proporcionalidad utilizando la teoría de Engesser, sustituamos los valores correspondientes de E_t y f_t en

la ecuación (6.9) y ponerlos en función de la relación de esbeltez:

$$\frac{L}{r} = \dots \left(\frac{\pi^2 BE}{ft} \right)^{1/2} \dots (6.11)$$

La figura 6-14 muestra un ejemplo de curva esfuerzo/relación de esbeltez, para columnas de acero estructural al carbono. Nótese que la curva del módulo tangente para el esfuerzo crítico en el rango inelástico, es una extensión de la curva de Euler en el rango elástico.

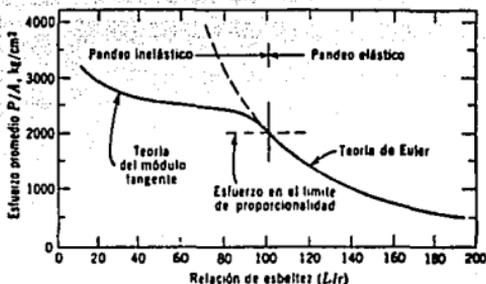


fig. 6-14

6.4 DIMENSIONAMIENTO Y REVISIÓN DE COLUMNAS DE ACERO SUJETAS A CARGA AXIAL.

Todas las ecuaciones fundamentales del pandeo vistas anteriormente se basan en miembros ideales y consideraciones teóricas. Se anotó de qué depende la resistencia de una columna y como se consideran esos parámetros. Resumiendo, la capacidad de una columna está en función de

- 1.- El tipo de carga: axial pura ó flexocompresión.
- 2.- Propiedades del material: módulo de elasticidad y lími-

te de fluencia.

3.- Longitud efectiva del miembro y sus condiciones de apoyo extremo.

Debido a las idealizaciones de las ecuaciones, y además, -- los defectos del material, forma e instalación del elemento, se hace necesario incluir factores de seguridad para el diseño de la estructura.

Los factores de seguridad están en función de la relación de esbeltez efectiva KL/r de las columnas. Basándose en ensayos de columnas, se han fijado dichos factores por medio de fórmulas empíricas.

Si se considera que el límite superior del pandeo elástico corresponde al 50% del límite de fluencia, y este esfuerzo se iguala con el de la ecuación de Euler tenemos

$$\frac{1}{2} f_y = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}$$

despejando a KL/r y designando a este valor como C_c obtenemos

$$C_c = \left(\frac{2 \pi^2 E}{f_y} \right)^{1/2} \dots (6.12)$$

donde C_c es el llamado COEFICIENTE DE COLUMNA que depende únicamente de las características del material y su valor define el valor límite de la relación de esbeltez a partir de la cual es aplicable la fórmula de Euler.

Por lo tanto, de acuerdo a lo ya visto anteriormente, podemos anotar que

si $KL/r \geq C_c$, el pandeo ocurre en el rango elástico, y si $KL/r < C_c$, el pandeo está en el rango inelástico.

Como el dimensionamiento de columnas sujetas sólo a carga axial consiste en definir un esfuerzo promedio $F_a = P_a/A$ que corresponde a una carga axial permisible P_a , es conveniente hallar un esfuerzo permisible F_a , para que ya conocido esto y la carga de diseño P , reste únicamente hallar el área transversal requerida A , o sea

$$A = \frac{P}{F_a} \dots (6.13)$$

Con este fin se han encontrado fórmulas correspondientes -- para elementos que se encuentran en el rango elástico o en el inelástico. Para los primeros se utiliza el esfuerzo de fluencia F_y y para los segundos su ecuación se basa en una curva parabólica.

Entonces se tiene que

$$F_a = \left(\frac{C_c^2}{2(KL/r)^2} \right) f_y \dots (6.14)$$

si $KL/r \geq C_c$ (rango elástico)

$$F_a = \frac{\left(1 - \frac{(KL/r)^2}{2 C_c^2} \right)}{F.S.} f_y \dots (6.15)$$

si $KL/r < C_c$ (rango inelástico).

Los FACTORES DE SEGURIDAD, F.S., que se utilizan en estas ecuaciones, están en función de C_c . Estos tienen un valor igual a

$$F.S. = \frac{23}{12} \doteq 1.92 \text{ para } KL/r \geq C_c \dots (6.16)$$

$$\text{y } F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8C_c} - \frac{(KL/r)^3}{(8C_c)^3} \text{ para } KL/r < C_c \dots (6.17)$$

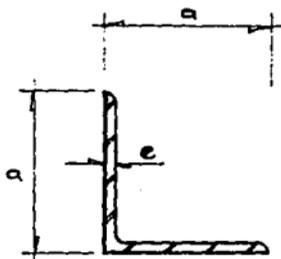
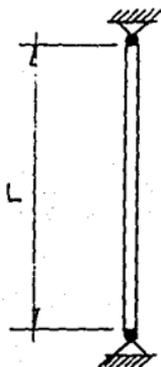
Todas las ecuaciones anteriores fueron desarrolladas por el AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION (A.I.S.C.) (las mismas que usa el R.C.D.F.), con lo cual se logran diseños más lógicos y económicos que los realizados con las expresiones antiguas.

Se recomienda revisar las restricciones que marcan los reglamentos para el diseño. Para ésto se pueden consultar las referencias.

CAPITULO : G

EJEMPLO : No. 16

REVISION DE LA CAPACIDAD DE UN ELEMENTO DE ACERO
A TENSION Y COMPRESION PURA



ANGULO LADOS IGUALES
3" X 3" X 1/4"

DATOS

$K = 1.0$ (POR SER DOBLE ARTICULACION)

$L = 150$ cm

$a = 7.62$ cm

$c = 0.64$ cm

AREA = 9.29 cm²

radio giro $X = y = 2.36$ cm

radio giro MINIMO $z = 1.59$ cm.

$F_y = 2530$ Kg/cm² (A-36)

$E = 2.039 \times 10^6$ Kg/cm²

CODIGO : A.I.B.C.

PROCEDIMIENTO

EQUACION
REFERIDAREVISION A TENSION :

$$F_t = (0.6)(f_y) = (0.6)(2530) = 1518 \text{ Kg/cm}^2$$

$$T = (F_t)(A) = (1518)(9.29) = 14,102 \text{ Kg.} \quad \dots\dots\dots \text{G.13}$$

$$\therefore T_{\text{MAX RESISTENTE}} = 14,102 \text{ Kg.}$$

REVISION A COMPRESION :

COEFICIENTE DE COLUMNA :

$$C_c = \left(\frac{2 \times \pi^2 \times 2.039 \times 10^6}{2530} \right)^{1/2} = 126 \quad \dots\dots\dots \text{G.12}$$

RELACION DE ESBELTEZ :

$$\frac{KL}{r} = \frac{(1.0)(150)}{1.59} = 94$$

$$\frac{KL}{r} = 94 < C_c = 126 \quad \text{PANDEO EN RANGO INELASTICO}$$

FACTOR DE SEGURIDAD :

$$F.S. = \frac{5}{3} + \frac{(3)(94)}{(8)(126)} - \frac{(94)^3}{(8)(126)^3} = 1.89 \quad \dots\dots\dots \text{G.17}$$

ESFUERZO PERMISIBLE A COMPRESION :

$$F_a = \frac{\left(1 - \frac{(94)^2}{(2)(126)^2} \right) (2530)}{1.89} = 966 \text{ Kg/cm}^2 \quad \dots\dots\dots \text{G.15}$$

CAPITULO : 6

EJEMPLO No. 16

PROCEDIMIENTO

**RELACION
REFERIDA**

CAPACIDAD MAXIMA A COMPRESION:

$$P = (960)(9.29) = 8.974 \text{ Kg.}$$

.....

G.15

$$\therefore P \text{ MAX. RESISTENTE} = 8.974 \text{ Kg.}$$

"Los libros son maestros que nos instruyen sin golpes, ni castigos, sin palabras ásperas, y sin ira. Si se acerca uno a ellos, nunca estarán dormidos. Si se les interroga, no ocultan nada. Si se les interpreta mal, no protestan. Si no se les entiende no se rien de uno.

RICHARD DE BURY.

CAPITULO

7

C A P I T U L O 7

ELEMENTOS DE ACERO SUJETOS A FLEXION Y FUERZA CORTANTE

7.1 PANDEO LATERAL DE VIGAS. MOMENTO CRITICO.

Al igual que en las columnas, también en las vigas se puede presentar el fenómeno de inestabilidad (pandeo), pues sabemos -- que una sección del elemento sometido a flexión, queda sujeta a fuerzas de compresión, y si dicha sección es demasiado delgada, su comportamiento puede ser estimado con el criterio usual de resistencia a la compresión.

Veamos un ejemplo sumamente sencillo, Supongamos que una hoja de papel puesta de canto la usaremos como "viga". Esta "viga" tendría una altura considerable y por lo tanto su momento de inercia en el plano vertical sería muy grande, lo que repercutiría teóricamente en una deflexión muy pequeña si se sometiera a una carga que actuara sobre ella. Sin embargo, la "viga" sufriría, aún sobre un claro pequeño, un pandeo lateral que ocasionaría su colapso.

Observemos ahora el elemento de la figura 7-1, el cual es una viga "I" de acero sujeta a momentos en los extremos. Esto ocasiona que el patín superior esté sometido a compresión y se puede considerar (el patín) como una columna sujeta a fuerza axial, la cual dependiendo del tipo de carga, puede ser constante o variable a lo largo del claro.

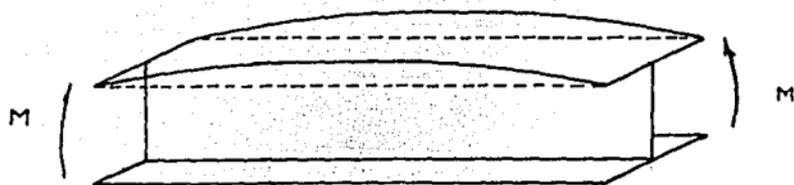


fig. 7-1

El patín en tensión (en este caso el inferior) tiende a permanecer recto y restringe el pandeo del patín a compresión, pero a medida que el momento flexionante aumenta, la tendencia al pandeo se hace lo suficientemente grande como para vencer esa restricción dada por la tensión. Cuando el patín de compresión empieza a pandearse (fig. 7-2a), se dá un fenómeno colateral de torsión (fig 7-2b) y a medida que la resistencia torsional de la viga disminuye, progresa más rápidamente la falla.

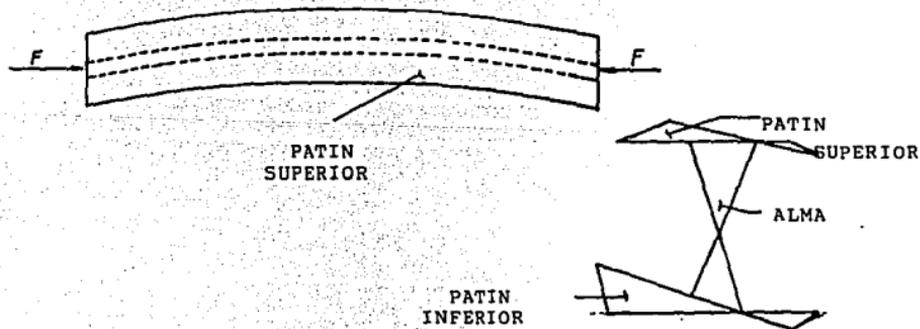


fig. 7-2

Los perfiles W, I y canales no tienen mucha resistencia al pandeo lateral, ni a la torsión resultante. Algunas otras formas

especialmente los perfiles armados en cajón, son mucho más resistentes. Sin embargo, una gran cantidad de vigas de acero están protegidas contra el pandeo lateral, pues a menudo las losas de concreto se cuelean junto con los patines superiores de la viga, lo que les suministra un apoyo lateral. Para losas que no son monolíticas con la viga, debe revisarse que la fricción proporcione realmente apoyo lateral completo.

El momento correspondiente a la falla por pandeo lateral se le denomina MOMENTO CRITICO, M_{cr} . El valor de M_{cr} depende de las propiedades del material, de la forma y dimensiones de la viga, de la longitud del claro, de las condiciones de apoyo y del tipo de carga.

La fórmula teórica para el momento crítico de pandeo lateral, M_{cr} , se puede seguir a partir de la figura 7-3 (aunque se explique de manera muy general. Su deducción íntegra se puede consultar en las referencias bibliográficas 15 y 19.

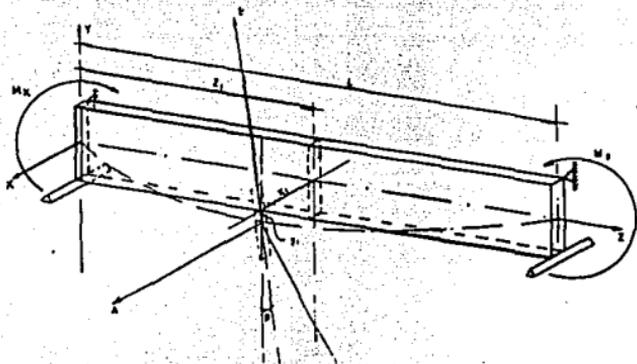


fig. 7-3

La figura 7-3, es una viga esbelta de claro L , con extremos libremente apoyados y restringidos contra desplazamientos laterales y giros en el eje Z . Los momentos M_x en los extremos, someten a flexión pura a la viga.

Cuando ocurre la flexión lateral, el centroide se mueve de su posición original (x_0, y_0), a otra desplazada (x_1, y_1), además de que se produce una rotación ϕ alrededor del eje Z debido a la torsión de la sección de la viga.

A su vez, internamente en la viga ocurren efectos para equilibrar los externos:

- 1.- Se generan momentos resistentes para la flexión lateral-- en el plano de la sección transversal flexionada.
- 2.- Se presenta una resistencia a la torsión en la sección transversal de la viga, en la que actúan
 - a.-) El momento torsionante necesario para hacer girar a la sección alrededor de su eje longitudinal, venciendo a la rigidez torsional de la pieza.
 - b.-) Otro momento de torsión, adicional, importante en algunas piezas (viguetas I, por ejemplo), que se produce al alabearse las secciones planas después de la deformación.

Estas consideraciones se han desarrollado matemáticamente para hallar, finalmente, la siguiente ecuación, la cual da un valor teórico del MOMENTO CRITICO, M_{cr} , para el cuál se produce el pandeo lateral de una viga:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{E I_y G K_t \left(1 + \frac{E K_b \pi^2}{G K_t L^2} \right)} \dots (7.1)$$

en la cual

M_{cr} , es el momento crítico para el cual ocurre el pandeo lateral de la viga

L , la longitud efectiva del claro.

E , es el módulo de elasticidad o de Young,

I_y , el momento de inercia en el eje y de la sección transversal.

G , el módulo de rigidez al cortante que puede considerarse como $G = 3E/8$.

K_t , es la constante de torsión, que se usa en lugar del momento polar de inercia J , y cuyo valor puede consultarse en la referencia.

y K_b , es la constante de alabeo y depende de la forma de la sección. Su valor también puede consultarse en la referencia.

La ecuación anterior tiene algunas limitaciones que hacen necesario afectarla por algunos coeficientes de tal manera que la expresión sea mas general.

Por ejemplo, una de las limitaciones de la ecuación (7.1), es que solo es aplicable dentro del comportamiento elástico del material. Sin embargo, en el caso de que sobrepase el límite de proporcionalidad, basta con sustituir los módulos de elasticidad, E , y de rigidez al cortante, G , por sus respectivos módulos tangentes E_t y G_t .

Otra limitación, es que la fórmula considera un momento flexionante constante a lo largo de la viga. En caso de no ocurrir así, se ha encontrado una ecuación para hallar el valor de

la CARGA CRITICA ,Pcr, que produce el pandeo lateral:

$$P_{cr} = \frac{K}{L^2} \sqrt{E I_y G K_t} \dots (7.2)$$

donde el significado de L,E,Iy,G y Kt es el mismo que el señalado para la expresión (7.1), y K es una constante que depende de las condiciones de casos y apoyo y cuyos valores para algunos -- casos típicos, pueden verse en la figura 7-4.

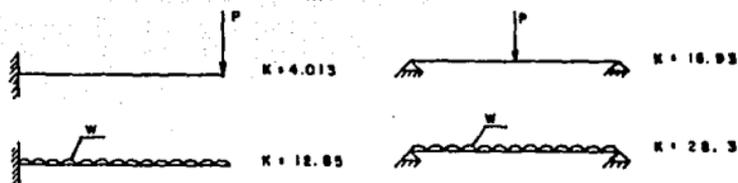


fig. 7-4

7.2 NOCIONES SOBRE PANDEO LOCAL EN PLACAS DE ELEMENTOS COM - PUESTOS. DISTINCION ENTRE VIGAS COMPACTAS Y NO COMPACTAS

Entre las consideraciones que se hicieron para hallar la -- fórmula de momento crítico Mcr, hay una que supone que no hay -- distorsiones o inestabilidad local en el miembro antes de que se pandee en conjunto.

Sin embargo, debido a que las estructuras metálicas que toman con efectividad los esfuerzos de compresión, se fabrican generalmente por medio de placas y éstas son relativamente delgadas, se hace necesario considerar el comportamiento de dichas -- placas sometidas a diferentes condiciones de esfuerzo.

La figura 7-5 muestra las diferentes formas de pandeo elástico que puede sufrir una placa rectangular delgada, sometida a compresión uniforme, con diferentes condiciones de apoyo: a.-) con los bordes articulados y b.-) con los bordes empotrados.

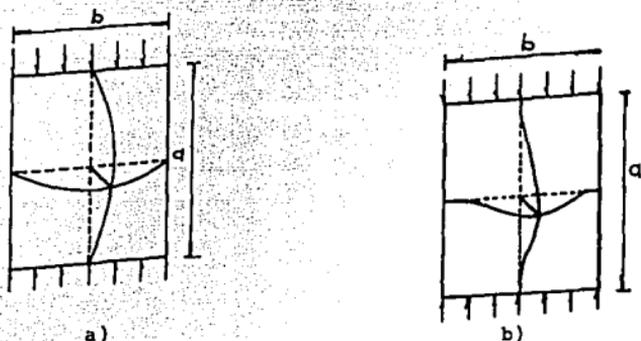


fig. 7-5

Las placas se pandearán cuando alcanza un esfuerzo crítico y la magnitud de dicho esfuerzo elástico de pandeo, f_{cr} , tiene un valor

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 k \dots (7.3)$$

siendo E , el módulo de elasticidad, μ el módulo de Poisson, a , la longitud de la placa, t el espesor de la misma y k un coeficiente que depende de la relación de aspecto a/b y las restricciones de borde de la placa.

Pero se ha comprobado que las placas rectangulares largas, se pandean formando ondulaciones, las cuales son de amplitud aproximada al ancho b de la placa. Esto muestra que el esfuerzo de pandeo es mas sensible a los cambios de la longitud total a . Si además tomáramos el valor del módulo de Poisson μ , como 0.3- (este módulo puede tener valores tan bajos como 0.1 para concretos y tan altos como 0.5 para el caucho), la ecuación (7-3) se puede simplificar a

$$f_{cr} = Kc E \left(\frac{t}{b}\right)^2 \dots (7.4)$$

donde Kc , al igual que el factor K de la expresión (7.3), es un coeficiente que depende de las restricciones en los bordes, de -

la relación de aspecto a/b y del módulo de Poisson. La tabla muestra algunos valores teóricos de K_c .

Si observamos dicha tabla de valores de K_c , notamos que la capacidad de carga de una placa geoméricamente determinada, aumenta en forma considerable si se empotra o rigidiza en sus lados longitudinales. Esto tiene como consecuencia, el permitir que elemento alcance su capacidad máxima como conjunto, pues si se presenta el pandeo local, esto disminuye significativamente la capacidad de carga del miembro.

Si a la ecuación (7.4) la igualamos con el límite de fluencia f_y del material, podemos encontrar las dimensiones de las placas individuales, de tal forma que no ocurra el pandeo de la placa hasta que el esfuerzo crítico f_{cr} , llegue a dicho límite:

$$f_{cr} = K_c E \left(\frac{t}{b}\right)^2 \geq f_y$$

por lo que
$$\frac{b}{t} \leq \sqrt{\frac{K_c E}{f_y}} \dots (7.5)$$

Debido a imperfecciones y a esfuerzos residuales de la pieza, y además, se ha comprobado experimentalmente que el pandeo de la placa puede ocurrir en tres rangos (elástico, endurecimiento por deformación y rangos intermedios) como muestra la figura 7-6 recomienda usar la fórmula (7.6) para encontrar la relación ancho-espesor, b/t , máxima del elemento.

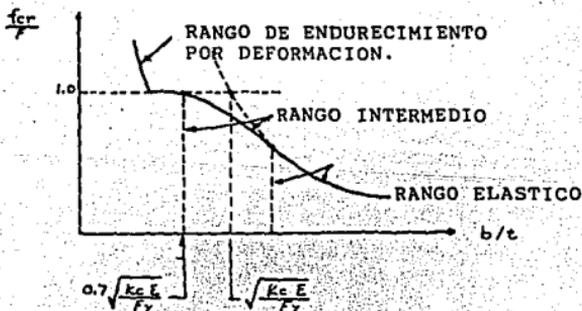


fig. 7-6

$$\frac{b}{t} \leq 0.7 \sqrt{\frac{K_c E}{f_y}} \dots (7.6)$$

En la ecuación anterior, los valores de K_c deben tomarse de tal manera que se aproximen a la condición real de restricción del borde. Para algunos perfiles típicos, la figura 7-7 muestra sus valores respectivos de K_c .

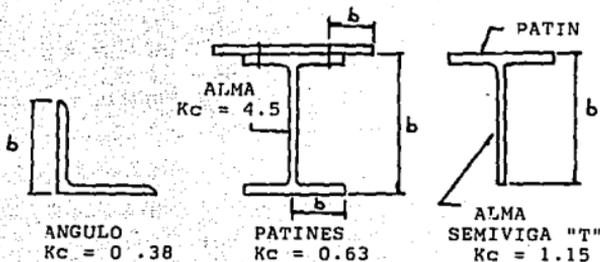


fig. 7-7

En el punto 7-4 de este capítulo, se encuentran las expresiones que recomiendan los reglamentos para usarse en el diseño o revisión de placas que forman un miembro. Estas fórmulas más prácticas, están basadas en las teorías mostradas por las ecuaciones (7.5) y (7.6).

En el posible caso de que los esfuerzos provocaran un pandeo inelástico de la placa, la magnitud de esos esfuerzos se pueden encontrar sustituyendo en la ecuación (7.5), el módulo elástico E , por el módulo tangente E_t , o bien de manera más aproximada por el valor $\sqrt{E E_t}$.

También comentaremos que un alma delgada puede pandearse cuando se somete a esfuerzos de flexión o cortante puro. Los esfuerzos de PANDEO POR FLEXION, f_{br} , y de PANDEO POR CORTANTE, f_{vcr} , se pueden calcular con las siguientes expresiones:

$$\text{FLEXION : } f_{br} = K_b E \left(\frac{t}{b} \right)^2 \dots (7.7)$$

$$\text{CORTANTE : } f_{vcr} = K_v E \left(\frac{t}{b} \right)^2 \dots (7.8)$$

donde K_b y K_v son coeficientes para flexión y cortante, respectivamente, cuyos valores teóricos se pueden ver en la tabla.

Además de las posibles fallas por pandeo debido a flexión-

y cortante, también puede ocurrir por aplastamiento. El esfuerzo crítico por APLASTAMIENTO, f_{ccr} , se divide en dos posibles casos:

1.- Alma sin atiesadores

$$f_{ccr} = K_w E \left(\frac{t}{h}\right)^2 \dots (7.9)$$

2.- Alma con atiesadores

$$f_{ccr} = K_w E \left(\frac{t}{h}\right)^2 + 3.6 E \left(\frac{t}{a}\right)^2 \dots (7.10)$$

siendo E y t el módulo de elasticidad y el espesor de la placa respectivamente. El valor del coeficiente K_w y el significado de h y a, se muestran en la figura.7-8.

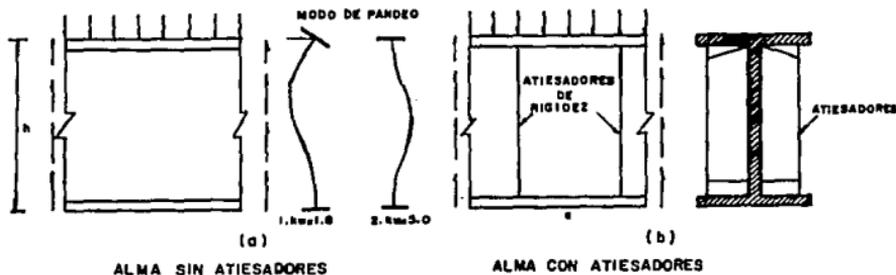


fig. 7-8

Debido a que se puede presentar una combinación de esfuerzos por cortante, flexión y compresión por aplastamiento, se recomienda utilizar la siguiente expresión para revisar una placa plana:

$$\frac{f_c}{f_{ccr}} + \left(\frac{f_b}{f_{bcr}}\right)^2 + \left(\frac{f_v}{f_{vcr}}\right)^2 \leq 1.0 \dots (7.11)$$

en la que f_c , f_b , y f_v son los esfuerzos de compresión por aplastamiento, flexión y cortante, respectivamente y f_{ccr} , f_{bcr} y f_{vcr} , los esfuerzos críticos de pandeo bajo la carga, obtenidos por las ecuaciones (7.11), (7.7) y (7.8) de manera correspondiente.

La diferenciación que se hace entre SECCIONES COMPACTAS y SECCIONES NO COMPACTAS es debido a que las primeras tienen características geométricas tales que evitan que aparezca el pandeo local, antes de que se llegue a la carga axial o momento flexionante considerado para el diseño del elemento.

La SECCION COMPACTA se define estableciendo ciertos límites para la relación ancho-espesor (b/t) de los elementos en compresión de modo que se puedan desarrollar grandes deformaciones plásticas, antes de que sellegue al pandeo inelástico.

Para considerar una sección como "compacta", debe cumplir las siguientes condiciones:

- 1.- La relación de ancho-espesor (b/t) de los elementos proyectados del patín en compresión, no deben exceder de $425/\sqrt{f_y}$, aceptándose un 3% más para perfiles laminados (fig. 7-9a).
- 2.- La relación ancho espesor (b/t) de las placas de patín en secciones tipo cajón y cubreplacas de patines comprendidas entre líneas longitudinales de remaches, tornillos o soldaduras, no deberá exceder de $1600/\sqrt{f_y}$ (figuras 7-9b, 7-9c y 7-9d).
- 3.- La relación peralte-espesor (d/t') del alma no excederá de $3540/\sqrt{f_y}$ (figuras 7-9a y 7-9b).
- 4.- Los patines de las secciones "compactas" deberán conectar se al alma o almas de una manera continua; tales miembros se consideran soportados lateralmente, cuando la distancia en centímetros entre los arriostramientos del patín de compresión, no exceda de $640 bf/\sqrt{f_y}$, ni de $1'400,000 - Af/d f_y$, siendo Af el área del patín de compresión y bf el ancho del mismo.

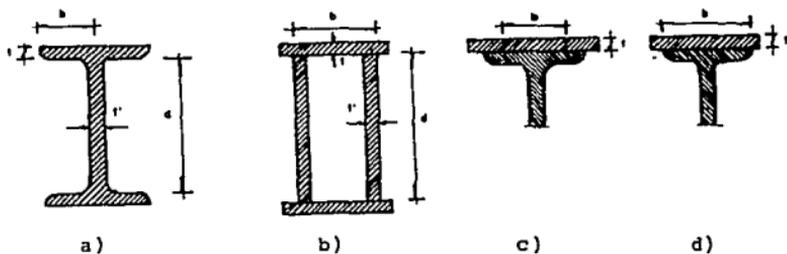


fig. 7-9

7.3 INFLUENCIA DE LA FUERZA CORTANTE

En la viga de la figura 7-10a. —sometida a las cargas P mostradas— actúan dos tipos de esfuerzos tangenciales: uno transversal y el otro longitudinal. El primer esfuerzo cortante de éstos tiende a deslizar la parte izquierda de la viga (fig. 7-10b) hacia arriba con respecto a lo que queda a la derecha de la sección. El otro tipo de cortante (fig. 7-10c), debido a la flexión de la pieza, ocasiona alargamiento o acortamientos en las fibras superiores o inferiores, con respecto a las del plano neutro que permanecen invariables. Debido a esto, las fibras de arriba o de abajo se deslizan sobre las otras, siendo el valor más alto del cortante horizontal, el que ocurre en el eje neutro.

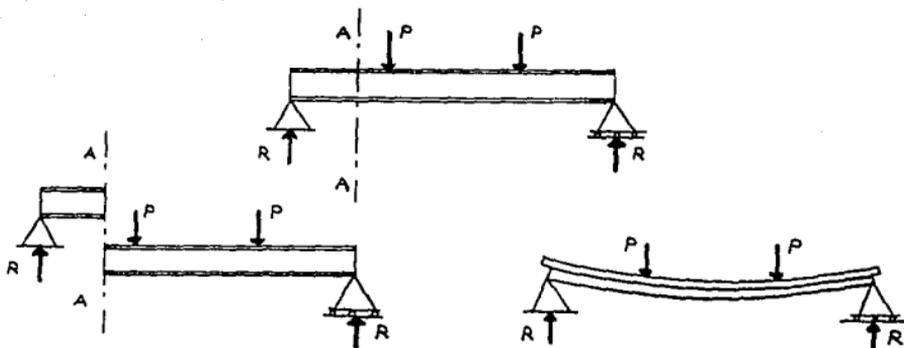


fig. 7-10

Ambos esfuerzos aparecen simultáneamente y no ocurren el uno sin el otro. El esfuerzo cortante transversal realmente no se presenta en una viga común de acero porque el DESGARRAMIENTO-DEL ALMA actúa primero.

Para revisar esto, las vigas y traveses de alma llena deben diseñarse tal que los esfuerzos de compresión en la raíz de la unión del alma al patín, resultantes de cargas concentradas y -- que no son soportados por atiesadores, no excedan de $F_p = 0.75 f_y$. de otra manera deberán colocarse atiesadores. Las ecuaciones a usar son:

1.- Para reacciones en apoyos:

$$f_p = \frac{P}{t(N+2K)} \leq 0.75 f_y \dots (7.12)$$

2.- Para cargas interiores:

$$f_p = \frac{R}{t(N+K)} \leq 0.75 f_y \dots (7.13)$$

donde P ó R , es la carga concentrada o reacción del apoyo
 t , el espesor del alma.

N , la longitud de empuje, no menor que K para reacciones.

y K , la distancia.

En caso de que $f_p \geq F_p$, se requerirán atiesadores. La figura 7-11 muestra los conceptos anteriores para una mayor compren-

sión.

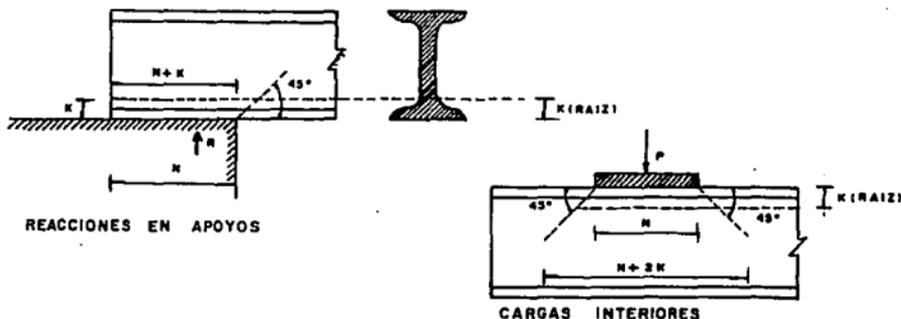


fig. 7-11

El esfuerzo cortante longitudinal (el que tiende a deslizar la fibra), se contrarresta por la resistencia al cortante que tiene el material. La fuerza cortante máxima, generalmente ocurre cerca de los apoyos, aunque se presenta a lo largo de toda la viga. El valor del cortante máximo vale

$$fv = \frac{V}{I t}$$

siendo V la fuerza cortante considerada, Q el momento estático de la porción de la sección que queda arriba de manera paralela al eje neutro, I el momento de inercia de la sección total con respecto al eje neutro, y b el ancho de la sección donde se calcula el esfuerzo cortante unitario.

Debido a que por lo regular el valor de la ecuación anterior es solo ligeramente mayor que el esfuerzo cortante promedio, fv , en casi todos los elementos que trabajan a flexión, se usa para diseño el valor dado por la siguiente expresión.

$$fv = \frac{V}{Aw} \dots (7.14)$$

donde Aw es el área efectiva del alma. Este valor no debe exceder el esfuerzo cortante admisible igual a

$$Fv = 0.4 fy \dots (7.15)$$

siendo fy , el límite de fluencia del material.

Aunque el elegir un perfil de acero para viga, raramente sea controlado por el esfuerzo cortante, éste debe verificarse siempre, y de manera especial, si las vigas son cortas, están despatinadas, si existen cargas concentradas muy grandes o bien, están excesivamente cargadas.

7.4 DIMENSIONAMIENTO Y REVISIÓN DE VIGAS DE ACERO.

Se puede anotar a continuación una serie de pasos a seguir para el diseño de elementos de acero sujetos a flexión, que aunque no se sigan de manera estricta, pueden servir de guía para su dimensionamiento y revisión.

- 1.- Conociendo el momento flexionante máximo, se elige un perfil considerando su capacidad de resistencia a flexión sin que exceda el esfuerzo permisible en sus fibras.

Esto se hace basándose en el concepto de MODULO DE SECCION $S = I/c$, (siendo I el momento de inercia de la sección y c la distancia del eje neutro a la fibra mas alejada a compresión) y la fórmula de la escuadría a flexión, $f = Mc/I$, ya vista anteriormente. Tenemos entonces que

$$f = \frac{Mc}{I} \text{ por lo que } \frac{M}{f} = \frac{I}{c}$$

entonces $s = \frac{M}{f} \dots (7.15)$

Si en la ecuación anterior tomamos a M como el momento flexionante máximo y a f como el esfuerzo permisible a flexión (que puede ser tomado inicialmente como $0.6 f_y$), podemos elegir un perfil que tenga un módulo de sección s , aproximado al obtenido por la expresión (7.15).

- 2.- Elegido el perfil, se procede a determinar el esfuerzo permisible " f_b " en ambos sentidos por separado. Esto se realiza llevando a cabo lo señalado por los siguientes incisos (éstas ecuaciones solo son válidas para perfiles laminados, traveses de alma llena y miembros compuestos que tienen sus ejes de simetría en el plano de su alma. Por lo tanto, se excluyen a las traveses tipo cajón):

- a.-) Hallar el radio de giro del patín de compresión más $1/6$ del área del alma. Entonces, de la figura 7-12-- tenemos

$$I_f = \frac{t_f b_f^3}{12} \dots (7.16)$$

$$r = \sqrt{\frac{I_f}{A_f + A_w/6}} \dots (7.17)$$

siendo I_f el momento de inercia del patín y r , el radio de giro del patín más $1/6$ del área del alma.

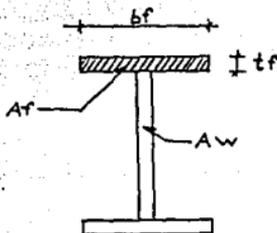


fig. 7-12

b.-) Con la longitud entre soportes laterales del patín de compresión, L , y el valor de r , se determina en que rango ocurre el pandeo:

$$\text{si } 2677 \sqrt{\frac{b}{F_y}} \leq L/r \leq 5987 \sqrt{\frac{b}{F_y}} \dots (7.18)$$

ocurre PANDEO INELASTICO, y

$$\text{si } L/r > 5987 \sqrt{\frac{b}{F_y}} \quad (7.19)$$

ocurre PANDEO ELASTICO.

En éstas ecuaciones C_b es el llamado GRADIENTE DE MOMENTO y vale

$$b = 1.75 - 1.05 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) + 0.30 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \leq 2.30 \dots (7.20)$$

donde M_1 y M_2 son los momentos menor y mayor respectivamente en los extremos de la viga. Para la relación M_1/M_2 , el cociente será positivo para flexión en curvatura simple y negativo para flexión en curvatura doble.

c.-) Determinado en que rango se encuentra el pandeo, se halla el esfuerzo permisible f_b , con cualquiera de las siguientes ecuaciones:

$$f_b = \left(\frac{2 - f_y (L/r)^2}{3 \cdot 1076 \times 10^5 \cdot b} \right) f_y \dots (7.21)$$

si el pandeo es inelástico, ó

$$f_b = \frac{1195 \times 10^4 \cdot C_b}{(L/r)^2} \dots (7.22)$$

si el pandeo es elástico

Ambas ecuaciones se deben comparar con la siguiente:

$$f_b = \frac{843,700 \cdot C_b}{L_d / A_f} \dots (7.23)$$

y elegir la de mayor valor.

3.- Debe verificarse que el valor encontrado de f_b no exceda de

$$F_b = 0.6 f_y \dots (7.24)$$

ó $F_b = 0.66 f_y$ (secciones compactas) ... (7.25)

Para el caso en que la flexión sea con respecto al eje de menor momento de inercia de una sección "I" (fig. 7-13)

$$F_b = 0.75 f_y \dots (7.26)$$

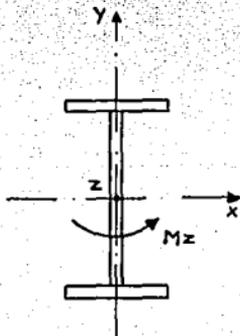


fig. 7-13

4.- Por lo ya visto en el inciso 7.2 de éste capítulo, se hace necesario revisar la relación b/t del patín de compresión más 1/6 del área del alma por la expresión

$$b/t \leq c\sqrt{K} \dots (7.27)$$

en la cual para el acero A-36 si

$$0 < L/r \leq 126.1, \quad c = \frac{38.20 \sqrt{L/r}}{\sqrt{31802 - 6(L/r)^2}} \dots (7.28)$$

$$\text{ó } L/r > 126.1, \quad c = 0.303 L/r \dots (7.29)$$

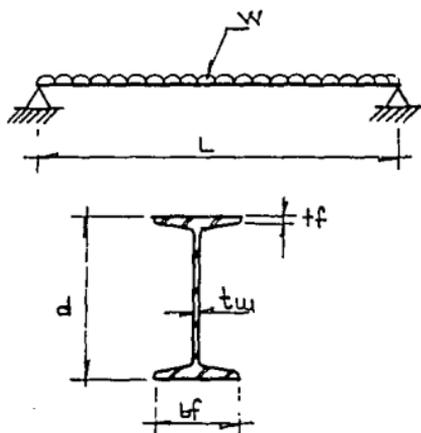
El valor de C_b se obtiene con la ecuación (7.20) y el de K igual que para compresión simple (punto 6.2 del capítulo VI).

- 5.- Revisar la posibilidad de desgarramiento en el alma con las ecuaciones (7.12) y (7.13).
- 6.- Comprobar que el esfuerzo cortante que actúa en la sección sea menor que el permisible con las expresiones --- (7.14) y (7.15).
- 7.- Para vigas canal, el valor de f_b será el obtenido por la ecuación (7.23) y para vigas cajón será igual a 0.60 f_y .

CAPITULO : 7

EJEMPLO : No.17

REVISION DE UNA VIGA DE ACERO A FLEXION Y CORTANTE



DATOS :

$W = 3.0 \text{ TON./m}$ (INCL. p. propio)

$L = 500 \text{ cm.}$

$d = 38.1 \text{ cm.}$

$b_f = 14 \text{ cm.}$

$t_f = 1.58 \text{ cm.}$

$t_w = 1.04 \text{ cm.}$

$A = 80.58 \text{ cm}^2$

$I_x = 18,387 \text{ cm}^4$

$I_y = 608.5 \text{ cm}^4$

$r_x = 15.11 \text{ cm.}$

$r_y = 2.75 \text{ cm.}$

$S_x = 963.2 \text{ cm}^3$

ACERO A-36 : $f_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$

CODIGO A.I.S.C.

PROCEDIMIENTO

SECCION
REFERIDAREVISION A FLEXION :

$$I_f = \frac{(1.58)(14)^3}{12} = 361.2 \text{ cm}^4 \quad \dots \dots \dots 7.16$$

$$r = \sqrt{\frac{361.2}{(14 \times 1.58) + (34.34 \times 1.04/6)}} = 3.58 \text{ cm} \quad \dots \dots \dots 7.17$$

RANGO DE PANDEO :

$$\frac{L}{r} = \frac{500}{3.58} = 139.64$$

SE TOMARA CONSERVADORAMENTE $C_b = 1.0$

$$\left. \begin{aligned} 2677 \sqrt{\frac{1}{2530}} &= 53 \\ 5987 \sqrt{\frac{1}{2530}} &= 119 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 7.18$$

COMO $\frac{L}{r} = 139.64 > 119$, EL PANDEO ES ELASTICO

$$F_b = \frac{(1195 \times 10^4) \times (1.0)}{(139.64)^2} = 612.84 \text{ Kg/cm}^2 \quad \dots \dots \dots 7.22$$

$$\delta F_b = \frac{(845700)(1.0)}{(500)(38.1)/(14 \times 1.58)} = 979 \text{ Kg/cm}^2 \quad \dots \dots \dots 7.23$$

SE ELIGE f_b DE MAYOR VALOR :

$$F_b = 979 \text{ Kg/cm}^2 < (0.6)(2530) = 1518 \text{ Kg/cm}^2 \quad \dots \dots 7.24$$

EL MODULO DE SECCION NECESARIO ES :

$$S = \frac{937,500}{979} = 957 \text{ cm}^3 < S \text{ PROPUESTO} = 963 \text{ cm}^3$$

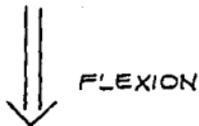
∴ SE ACEPTA EL PERFIL POR FLEXION.

PROCEDIMIENTO

ECUACION
REFERIDAELEMENTOS MECANICOS :

$$M = \frac{WL^2}{8} = \frac{(3.0)(5.0^2)}{8} = 9.37 \text{ T-M} = 937,500 \text{ Kg-cm}$$

$$V = \frac{WL}{2} = \frac{(3.0)(5.0)}{2} = 7.5 \text{ TON} = 7500 \text{ Kg.}$$

REVISION POR CORTANTE :

$$F_v = (0.4)(2530) = 1012 \text{ Kg/cm}^2 \quad \dots \dots \dots 7.15$$

$$f_v = \frac{7500}{(3.81)(1.04)} = 189 \text{ Kg/cm}^2 \quad \dots \dots \dots 7.14$$

$$f_v < F_v$$

∴ EL PERFIL SE ACEPTA POR CORTANTE.

"Vale más saber algo de todo ,
que saberlo todo acerca de una
cosa".

PASCAL

CAPITULO

8

C A P I T U L O 8

ELEMENTOS ESBELTOS SUJETOS

A FLEXOCOMPRESION

8.1 MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN. FACTOR DE AMPLIFICACION. EFECTO DE LA ESBELTEZ EN DIAGRAMAS DE INTERACCION EN EL RANGO ELASTICO.

En el capítulo VI vimos la influencia que tiene en un miembro, la relación de su longitud respecto a las dimensiones de su sección transversal, pues si dicha relación es muy grande, aparece el llamado EFECTO DE ESBELTEZ, el cual provoca una reducción en la resistencia del elemento sujeto a compresión pura o flexocompresión.

Para reafirmar este concepto hagamos un resumen basándonos en la figura 8-1:

- 1.- Sea una columna articulada en sus extremos sometida a carga axial P y momento flexionante M (fig. 8-1a).
- 2.- Esta columna tiene un sistema equivalente al de la figura 8-1b, y su diagrama de momentos flexionantes es el de 8-1c.
- 3.- Sin embargo al aplicarse la carga P al sistema mostrado en 8-1b, ésta se deforma y como consecuencia, la excentricidad aumenta en una distancia " y " (fig. 8-1d).
- 4.- Por lo tanto, el momento flexionante en la columna es

$$M = P e + P y = P (e + y)$$

siendo el momento máximo el dado por

$$M_{\max} = P (e + y_{\max})$$

La fig. 8-1e muestra el diagrama final de momentos flexio

nantes considerando ya los adicionales:

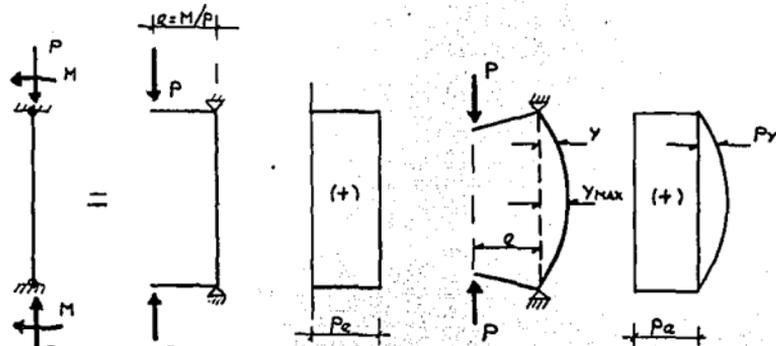


fig. 8-1

Es fácil notar que los momentos adicionales P_y reducen la resistencia del elemento, pues al sumarse al momento P_e conforman uno de mucho mayor valor.

Pero el problema de esbeltez puede deberse también al desplazamiento lateral relativo entre dos extremos de la columna, como ocurre en marcos no contraventeados sujetos a carga lateral o que presentan asimetría en cargas o geometría.

La figura 8-2a muestra un marco en el cual la rigidez de la trabe es infinita, sometida a cargas axiales P verticales y a una fuerza lateral F .

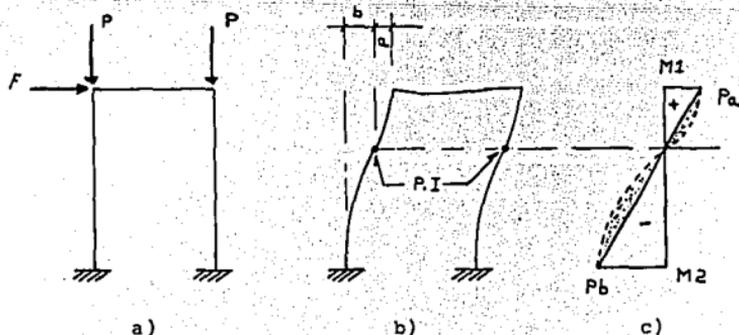


fig. 8-2

En 8-2 b aparece el mismo marco pero ya desplazado lateralmente debido a la fuerza F . Aquí "b" es la distancia que hay del centro de gravedad del apoyo al PUNTO DE INFLEXIÓN (P.I) de la columna, y "a" la distancia del mismo punto de inflexión al punto de aplicación de la carga P .

La figura 8-2 c es finalmente, el diagrama de momentos flexionantes en el cual

- M_1 y M_2 son los MOMENTOS DE PRIMER ORDEN, entendiéndose a estos como los que no consideran las deformaciones de la columna y

- P_a y P_b son los MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN, que son los momentos adicionales debidos a las deformaciones de las columnas.

Los momentos de segundo orden se pueden obtener aplicando la carga P en el punto de inflexión de la columna, y multiplicando dicha carga por el desplazamiento de los extremos respecto al punto de inflexión. Es obvio que los marcos no contraventeados tienen mayor desplazamiento y en consecuencia, la reducción de resistencia por esbeltez en las columnas es mas grande.

Entre las variables mas notables que influyen en la resistencia de columnas esbeltas están las siguientes, que sin embargo, no resumen en su totalidad el comportamiento de éstas columnas.

- a) Rigidez a la flexión de las trabes que restringen a la columna.
- b) Rigidez a flexión de la columna
- c) Relación de excentricidad en los dos extremos de la columna y tipo de curvatura.
- d) Desplazamiento lateral relativo entre los dos extremos de la columna.
- e) Duración de las cargas.

El análisis de las estructuras con columnas esbeltas es complejo debido al comportamiento inelástico en el caso de concreto reforzado y a los efectos de contracción, agrietamiento y flujo plástico que provocan deflexiones muy difíciles de evaluar, y además que los momentos adicionales traen nuevas deflexiones y éstas otros momentos adicionales, y así sucesivamente.

Para evitar un análisis por medio de aproximaciones sucesivas que calculen momentos y deflexiones de tal manera que sus incrementos sean mas pequeños, se han ideado métodos simplificados que se pueden dividir en tres grupos:

- 1.- Métodos del momento complementario
- 2.- Métodos del factor reducido.
- 3.- Métodos de amplificación de momentos.

Para el primer método se calculan los valores P y M mediante un análisis de primer orden y se obtiene una excentricidad $e=P/M$ sin considerar efectos de esbeltez. Después se agrega una excentricidad adicional $e_1=Pe_1$. El momento total es la suma del momento de primer orden y el momento adicional.

El segundo método utiliza un factor de reducción menor a la unidad que divide a los valores de P y M obtenidos de un análisis de primer orden, con lo que se obtienen valores amplificados para los cuales se dimensiona la columna.

El tercer método obra de manera inversa al segundo, pues en él se calculan los valores de P y M por medio de un análisis de primer orden y se multiplican por un FACTOR DE AMPLIFICACION mayor que la unidad, dando por resultado momentos amplificados para el diseño.

La figura 8-3 muestra un diagrama de interacción comparativo del comportamiento de una columna corta, una columna esbelta y una columna muy esbelta. En esta figura notemos que

- a.-) La línea O-A, que representa el comportamiento de un elemento corto, muestra que los efectos de esbeltez no son muy apreciables y su falla se presenta por compresión si se aumenta la carga progresivamente.
- b.-) En cambio la línea O-B, característica de un elemento esbelto, demuestra que aunque la carga se incremente progresivamente, su resistencia es menor que la del elemento corto, pues su diferencia entre dos líneas correspondientes a un nivel dado de carga, se debe a los momentos adicionales P_y .
- c.-) En ambas, sus posibles combinaciones de P y M están representadas por sus respectivas líneas y su resistencia por la intersección de dichas líneas o curvas con el diagrama de interacción.
- d.-) Finalmente, la curva O-C correspondiente a una columna muy esbelta que falla por inestabilidad, ni siquiera alcanza a cortar el diagrama de interacción al llegar a su valor máximo de carga. La falla de éste elemento se debe pues, al pandeo.

$$a.-) (F'e) x \delta y = \frac{10'480,000}{(KL/r x \delta y)^2} \dots (8.1)$$

KL/r x δy , se calcula con las ecuaciones y nomogramas ya vistos para elementos de acero sujetos a carga axial.

b.-) Cmx δy , que dependiendo de las condiciones del elemento puede valer

Cmx $\delta y = 0.85$ para miembros sujetos a traslación lateral de sus juntas.

Cmx $\delta y = (0.60 - 0.40 \frac{M_1}{M_2}) \geq 0.40$ para miembros sin

traslación en sus juntas y sin carga transversal entre los soportes en el plano de flexión. M1 y M2 son los momentos menor y mayor respectivamente.

Para miembros comprimidos sin traslación de las juntas y con carga transversal entre los soportes

Cmx $\delta y = 0.85$, con extremos restringidos

Cmx $\delta y = 1.00$, sin restricción en los extremos

5.- Verificar si la sección en análisis es adecuada para el caso de flexocompresión, si satisface las expresiones de interacción (fórmula de Bresler) siguientes,

para $f_a/F_a \geq 0.15$

$$\frac{f_a}{f_a} + \frac{C_{mx} f_{bx}}{(1-f_a/F'e_x)F_{bx}} + \frac{C_{my} f_{by}}{(1-f_a/F'e_y)F_{by}} \leq 1.0 \dots (8.2)$$

para $f_a/F_a < 0.15$

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.00 \dots (8.3)$$

El factor que se obtiene de la relación $C_m/(1-f_a/F'e_x \delta y)$ -- es realmente un factor de amplificación, por lo que podemos decir que los pasos anteriores son los de un método simplificado de amplificación de momentos, y ha sido adoptado por el A.I.S.C. con pequeñas diferencias a los usados para elementos de concreto.

8.3 DIMENSIONAMIENTO Y REVISIÓN DE COLUMNAS DE CONCRETO REFORZADO, CONSIDERANDO EFECTOS DE ESBELTEZ. MÉTODO DE AMPLIFI

CACION DE MOMENTOS.

El método propuesto por el R.C.D.F. para considerar efectos de esbeltez, es similar al usado por el A.C.I. a diferencia que éste último utiliza una excentricidad mínima que el mismo propone, y el del D.F. adiciona una excentricidad accidental a la ya calculada.

Para el dimensionamiento y revisión de columnas de concreto con posibles efectos de esbeltez se procede de la siguiente manera:

- 1.- Hallar mediante un análisis de la estructura, los momentos últimos por cargas gravitacionales y accidentales (M_u y M_{us} , respectivamente), la carga axial última (P_u) y las dimensiones geométricas del elemento.
- 2.- Revisar si deben considerarse los efectos de esbeltez para dos posibles casos:
 - a.-) Miembros con extremos no restringidos.
 - b.-) Miembros con extremos restringidos.

Para el primer caso, se pueden despreciar los efectos de esbeltez si

$$\frac{H'}{r} < 22 \dots (8.4)$$

siendo r el radio de giro que puede valuarse como $r=0.3h$ para secciones rectangulares y $0.25d$ para secciones circulares (h d son la sección paralela a la fuerza considerada y el diámetro del elemento, respectivamente) y H' es la longitud efectiva del elemento.

Para el segundo caso, los efectos de esbeltez se desprecian si

$$\frac{H'}{r} \leq 34 - 12 \frac{M_1}{M_2} \dots (8.5)$$

en la que M_1 y M_2 son los momentos menor y mayor que actúan en los extremos del miembro y el cociente M_1/M_2 es positivo si el elemento se flexiona en curvatura simple y negativo si lo hace en curvatura doble.

Para la evaluación de M_1 y M_2 es necesario incluir la excentricidad accidental e_{acc} , cuyo valor es

$$e_{acc} = 0.05 h \geq 2.0 \text{ cm} \dots (8.6)$$

por lo tanto

$$M1 \text{ ó } M2 = P_u (e1 \text{ ó } e2 + e_{acc}) \dots \dots \dots (8.7)$$

en la que el $e1$ ó $e2$ es la excentricidad superior o inferior hallada de acuerdo a la combinación más desfavorable de momentos últimos en los extremos de las columnas. La excentricidad accidental debe tomarse con su signo más desfavorable.

3.- Si no pueden despreciarse los efectos de esbeltez, el miembro debe diseñarse para la carga axial de diseño P_u obtenida por un análisis convencional, y un momento amplificado M_c , obtenido con los siguientes criterios.

a.- Para elementos con extremos restringidos lateralmente.

$$M_c = F_a M_2 \dots \dots (8.8)$$

donde M_2 es el mayor de los momentos, en valor absoluto, que actúa en los extremos del miembro (ecuación 8.7), y F_a , es un FACTOR DE AMPLIFICACION cuyo valor es

$$F_a = \frac{C_m}{1 - P_u/P_c} \geq 1.0 \dots \dots (8.9)$$

donde a su vez, C_m es un FACTOR DE REDUCCION que se calcula como

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \dots \dots (8.10)$$

en la cual P_c es la CARGA CRITICA :

$$P_c = \frac{FR \pi^2 EI}{(H')^2} \dots \dots (8.11)$$

siendo $FR=0.85$ y H' la longitud efectiva de pandeo y además

$$EI = 0.4 \frac{E_c I_g}{(1 + u)} \dots \dots (8.12)$$

donde $E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c}$

I_g , es el momento de inercia de la sección bruta de concreto

y u , la relación entre el máximo momento de diseño por carga muerta y el máximo momento de diseño total.

b.- Para elementos con extremos no restringidos lateralmente

mente el momento de diseño se obtiene con la expresión (8.8), pero F_a vale

$$F_a = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{\sum P_c}} \geq 1.0 \dots (8.13)$$

donde $\sum P_u$ y $\sum P_c$ son las sumatorias de las cargas últimas y las cargas críticas, respectivamente, que actúan en todas las columnas del entrepiso.

- 4.- Conocidos los momentos de diseño, se calcula el área de acero y se hace su revisión de igual manera que para columnas cortas sujetas a flexocompresión (ver sección 5.4 -- del capítulo V).
- 4.- Si el valor de H'/r es mayor que 100 no se permite el método simplificado descrito anteriormente y debe hacerse un análisis de segundo orden.

8.4 REVISIÓN DE MUROS DE MAMPOSTERÍA INCLUYENDO EFECTOS DE ESBELTEZ. RESISTENCIA ANTE CARGA LATERAL. REVISIÓN POR MOMENTO DE VOLTEO.

El análisis de una estructura se realiza considerando dos tipos de fuerzas: verticales, provocadas por cargas gravitacionales (cargas vivas más permanentes) y horizontales, causadas por las cargas accidentales (viento o sismo). En esta sección y la siguiente, se verá un poco sobre la influencia que tienen las cargas horizontales o laterales sobre los muros de mampostería y concreto reforzado, el comportamiento de éstos frente a dichas fuerzas.

Supongamos una fuerza horizontal V que actúa en el extremo de un muro, en dirección de su eje y a una altura h de su apoyo inferior (figura 8-4). Esta fuerza provoca otra de reacción en la base del muro, igual en magnitud y de sentido contrario que llamaremos T . Ambas fuerzas producen momentos: uno de acción M_1 , cuyo valor es $M_1 = Vh$, y otro de reacción y equilibrio M_2 , que vale $M_2 = TL$. Este segundo momento trabaja en sentido inverso al primero (figura 8-4b).

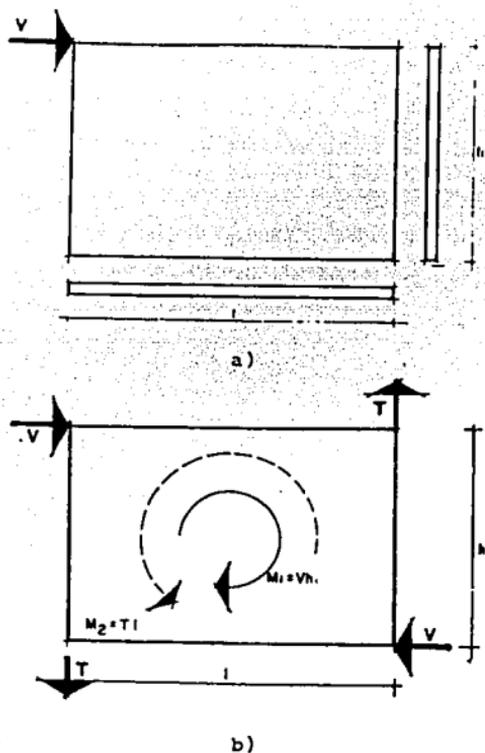
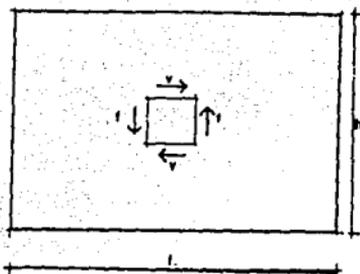
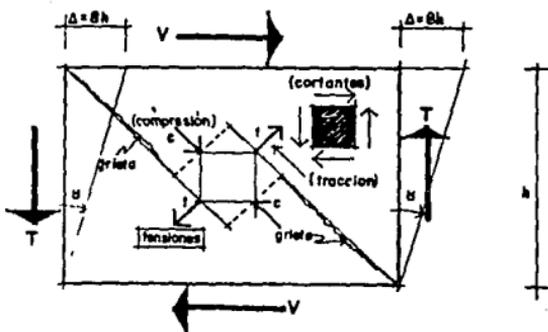


fig. 8-4

Si aisláramos una partícula elemental del muro, observaríamos que queda sujeta a las fuerzas mostradas en la figura 8-5 a. Si después analizáramos esa partícula por medio del círculo de Mohr, obtendríamos las resultantes de compresión y tensión que actúan sobre ella. La figura 8-5 b muestra los efectos finales de la fuerza horizontal sobre el muro: deformación en conjunto de éste, produciéndose las tensiones y compresiones máximas a 45° y los agrietamientos y desplazamientos (Δ), que sufre el muro.



b)



b)

fig. 8-5

El R.C.D.F. recomienda dos métodos para revisar la resistencia a cargas verticales y horizontales de los muros de mampostería: el METODO SIMPLIFICADO DE DISEÑO y el METODO DETALLADO DE DISEÑO.

Para poder usar el método simplificado es necesario que el muro cumpla con los siguientes requisitos:

- 1.- Las piezas que constituyen el muro debe cumplir con los requisitos generales de calidad especificados por la D.G. N.
- 2.- Las deformaciones de los extremos superior o inferior del muro en la dirección normal a su plano están restringidos por el sistema de piso o por otros elementos.
- 3.- No hay excentricidades mayores que $t/6$ en la carga axial aplicada, siendo t el espesor del muro.
- 4.- La relación altura, h , a espesor, t , del muro no excede de 20.
- 5.- Los muros están reforzados para cumplir con los requisitos establecidos por el R.C.D.F. para muros confinados o reforzados interiormente.

Todas estas limitaciones tienden a evitar situaciones que puedan dar lugar a momentos flexionantes importantes o efectos de esbeltez en los muros. Cuando un muro cumple con estas disposiciones, la resistencia a cargas verticales se determina con la expresión

$$PR = FR FE f^*mAT \dots (8.14)$$

donde AT, es el área transversal del muro.
F*m, es la resistencia nominal en compresión de la mampostería utilizada.
FR, es un factor de reducción igual a 0.6.
FE, es un factor reductor por excentricidad y esbeltez que se tomará como
0.7 para muros interiores que soportan que no difieren en más de 50%.
0.6 para muros extremos o con claros asimétricos y para casos en que las cargas vivas o muertas tengan una relación mayor a 1.0

Para los casos anteriores, si los muros están ligados a otros transversales a una separación no mayor a 3.0 metros, FE valdrá 0.8 y 0.7 respectivamente.

La resistencia del muro obtenida por la ecuación (8.14) deberá ser mayor o igual a la carga última, o sea:

$$PR \geq Pu$$

La resistencia ante cargas laterales por este método se expresa en términos de un esfuerzo cortante resistente de la mampostería

tería, el cual depende del tipo de pieza y del mortero. Esta resistencia se calcula por la ecuación

$$VR = FR (0.7 \cdot v^* \cdot At) \dots (8.15)$$

en la que AT es el área transversal bruta del muro, FR se tomará como 0.6 y v^* es el esfuerzo cortante nominal de la mampostería. Valores típicos de f^*m y v^* pueden verse en la referencia.

La suma de la resistencia a fuerza cortante (VR) de todos los muros debe ser mayor o igual a la fuerza cortante que actúa en el entrepiso.

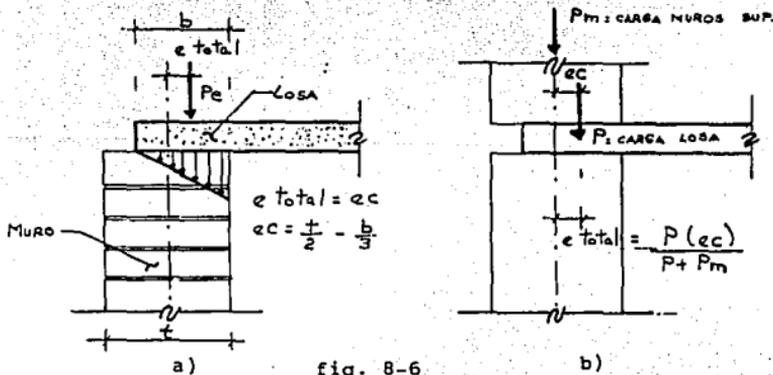
El método detallado de diseño se aplica cuando no se cumplen los requisitos necesarios para aplicar el método simplificado o bien cuando se desea una revisión minuciosa.

Es necesario para el diseño tomar en cuenta los momentos debido a

- Voladizos que se empotran en el muro, o debidos a empujes de viento o sismo normales al plano del muro ó
- La excentricidad con que se transmite la carga de la losa del piso inmediatamente superior en muros extremos. Tal excentricidad se toma igual a

$$ec = \frac{T}{2} - \frac{b}{3} \dots (8.16)$$

las figuras 8-6 a y b muestran estos coeficientes.



Para la evaluación de la resistencia a cargas verticales se usa la ecuación (8.14), pero tomando a FR como 0.6 para muros con finados o reforzados interiormente y 0.3 para no reforzados, además, FE se calcula como

$$FE = 1 - \frac{2e'}{t} \dots (8.17)$$

siendo t el espesor del muro y

$$e' = Fa (ec + ea) \dots (8.18)$$

en la que ec es la excentricidad calculada por la ecuación (8.16) ea , es una excentricidad accidental que depende de la uniformidad de dimensiones de la pieza y se estima con la expresión

$$ea = K (T + H/10) \dots (8.19)$$

el coeficiente K se tomará como 1/50 para piezas cuyas dimensiones no difieren en más de 3% de las nominales y 1/30 en caso contrario. Fa es un factor de incremento de la excentricidad por el efecto de esbeltez y se obtiene como

$$Fa = \frac{Cm}{1 - \frac{Pu}{Pc}} \geq 1.0 \dots (8.20)$$

en la cual, Pu es la carga vertical de diseño.

$$Cm = 0.6 + 0.4 \frac{e_{c1}}{e_{c2}} \geq 0.4 \dots (8.21)$$

donde e_{c1} y e_{c2} son, respectivamente, la menor y mayor de las excentricidades calculadas en los extremos del muro. El cociente e_{c1}/e_{c2} se considera positivo cuando el muro se flexiona en curva pura simple y negativo cuando es doble. En caso de considerar únicamente la excentricidad accidental Cm se tomará igual a 1.0; Pc (carga crítica de pandeo) se estimará como

$$Pc = \frac{\pi^2 EI}{(H')^2} \dots (8.22)$$

siendo I el momento de inercia de la sección bruta dividida entre 2.5

H' es la altura efectiva del muro que se determinará a partir de la altura no restringida H , a partir de los siguientes criterios:

$H' = 2H$ para muros libres en uno de sus extremos.

$H' = 0.75H$ para muros limitados por dos losas continuas.

$H' = H$ para muros extremos en que se apoyan losas.

E , es el módulo de elasticidad de la mampostería y cuyo valor es, para mampostería de tabique y bloques de concreto

$E = 600 f^*m$ para cargas de corta duración

$E = 250 f^*m$ para cargas sostenidas.

En caso de que los extremos del muro considerado estén ligados a muros transversales o contrafuertes, se restringe la de formación lateral, por lo que el efecto de esbeltez se reduce. Entonces la resistencia se calcula así

$$PR = PL + (Pc - PL) B \dots (8.23)$$

donde Pc , es la resistencia de diseño sin tomar en cuenta efectos de esbeltez ($Fa = 1.0$)
 PL , es la resistencia calculada considerando efectos de esbeltez (ec. 8.20)
 y B , es un factor correctivo que depende de la separación de los elementos rigidantez L' , y cuyos valores se pueden ver en la referencia.

Los muros transversales se consideran efectivos para restringir el desplazamiento lateral, solo cuando su longitud sea 6 ó más veces el espesor del muro que rigidizan.

La resistencia a cargas laterales debe revisarse para el efecto de la fuerza cortante, del momento flexionante en su plano, y ocasionalmente momentos debidos a empujes normales a su plano.

El esfuerzo cortante que resiste la mampostería, se basa en el esfuerzo cortante medio de diseño, V^* (ecuación 8.15), -- que para determinados elementos vale

a.-) Muros diafragma

$$VR = FR (0.85 V^* At) \dots (8.24)$$

b.-) Muros confinados, reforzados interiormente y no reforzados.

$$VR = FR (0.5 V^* At + 0.3 P) \leq 1.5 FR V^* At \dots (8.25)$$

El factor de reducción FR , se tomará como 0.6 para muros diafragma, confinados y con refuerzo interior, y 0.3 para muros no reforzados.

El momento flexionante aplicado en el plano que resiste el muro en flexocompresión, MR , se calcula de la siguiente manera:

$$MR = Mo + 0.30 P u d, \text{ si } Pu \leq PR/3 \dots (8.26)$$

6

$$MR = (1.5 Mo + 0.15 PR d) (1 - Pu/PR), \text{ si } Pu > PR/3 \dots (8.27)$$

donde Pu es la carga axial total de diseño que actúa sobre el muro, considerandose positiva si es de compresión.

d , es el peralte efectivo del refuerzo de tensión

PR , es la resistencia del muro a carga vertical (ver ec. 8.14)

6 ec. 8.23)

M_o , es el momento flexionante aplicado en el plano que resiste el muro en flexión pura, cuyo valor es

$$M_o = FR AS f_y d' \dots (8.28)$$

en la cual FR , es igual a 0.6

AS , es el área de acero colocado en el muro

f_y , es el esfuerzo de fluencia del acero.

y d' , es la distancia entre los centroides del acero--colocado en ambos extremos del muro.

Es obvio que todas éstas ecuaciones se utilizan para muros reforzados interior o exteriormente. Para muros no reforzados, la resistencia a flexión y flexocompresión en el plano del muro se calcula según la teoría de la resistencia de materiales, suponiendo una distribución lineal de los esfuerzos en la mampostería, y considerando que ésta no resiste tensiones y que la falla ocurre cuando aparece en la sección crítica un esfuerzo de compresión igual a f^*m .

Los MOMENTOS DE VOLTEO en los muros se calculan suponiendo que cada muro es un voladizo independiente, sujeto a un momento flexionante igual al producto de la fuerza lateral actuante en la parte superior del muro en cada nivel, por el brazo de palanca correspondiente.

Para mayor claridad explicaremos un poco más detallado este concepto y su aplicación. El momento final de volteo para diseño de muros, esta dado de manera general por la expresión.

$$M_u = V_u h_v FR \dots (8.29)$$

siendo V_u la fuerza cortante total de diseño en los muros y es igual a la suma de los cortante directos, VD , y por torsión, VT , usando un factor de carga, $F.C$, igual a 1.1. Por lo tanto, el valor de la fuerza cortante total de diseño, V_u es

$$V_u = 1.1 (VD + VT)$$

además, h_v es la altura a la cual se localiza la resultante V de todas las resultantes sísmicas, F , con respecto al desplante de la estructura sobre la cimentación. Esta altura queda fijada por la expresión

$$h_v = \frac{\sum F_i x_i h_i}{\sum F_i x_i}$$

donde $\sum F_i x_i$ es la suma de todas las fuerzas horizontales sísmicas que actúan en cada uno de los entrepisos de la estructura, y $\sum F_i x_i h_i$ es la suma de los productos de cada fuerza de entrepiso por su respectiva altura a partir de la base de la edificación.

FR es un factor reductivo del momento de volteo que se estima con la expresión.

$$FR = 0.8 + 0.2 Z$$

siendo Z la relación entre la altura h a la que se calcula el factor reductivo por momento de volteo y la altura total H de la construcción, pero no menor que el producto de la fuerza cortante en el nivel en cuestión multiplicado por su distancia al centro de gravedad de la parte de la estructura que se encuentra por encima de dicho nivel.

Por lo tanto, el momento final de volteo ya reducido para diseño de los muros será

$$M = (1.1(VD + VT)) hv (0. + 0.2 h/H)...(8.30)$$

Este momento de volteo M_u debe compararse con el momento resistente, M_R obtenido en las ecuaciones (8.26) ú (8.27) para revisión.

8.5 DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE MUROS DE CONCRETO REFORZADO CONSIDERANDO EFECTOS DE ESBELTEZ.

Los muros de cortante o rigidez de concreto reforzado son elementos que además de las cargas laterales, también soportan cargas gravitacionales. Es por esto que este tipo de muros resultan afectados por problemas de esbeltez.

Se ha visto el buen comportamiento de los muros de cortante de concreto -- reforzado ante cargas, por la protección contra el daño que dan a elementos no estructurales y por la reducción a los desplazamientos de los edificios de ciega alta que provocan.

Existen tipos diferentes de muros de cortante debido a su tipo de falla:

- 1.- Muros de cortante en voladizo
- 2.- Muros de cortante acoplados.
- 3.- Muros de cortante de poca altura.

Los MUROS DE CORTANTE EN VOLADIZO, a pesar de su gran tamaño, son lo suficientemente esbeltos para que puedan ser tratados como miembros estructurales ordinarios y su comportamiento cumple con los principios básicos del concreto armado.

La respuesta de un muro de cortante en voladizo ante -- cargas laterales es gobernada por la flexión. Por ejemplo, la figura 8.7 a, que consiste en un solo muro en voladizo, los momentos de volteo máximo ocurren en la base con la posibilidad de que allí se forme una articulación plástica, como se muestra en la figura 8-7 b.

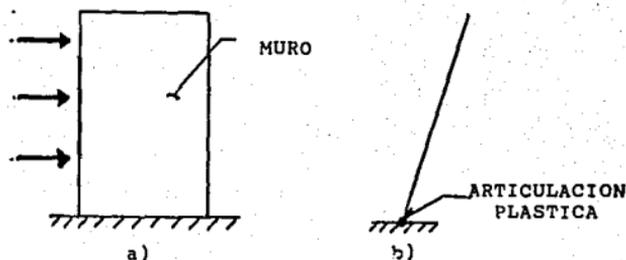


fig. 8-7

De ahí la conveniencia de concentrar el refuerzo en los extremos, aunque se puede esperar que las demandas de ductilidad - que impera en este mecanismo puedan ser satisfechas por los muros si se cuida que las cargas axiales no sean altas y que no se produzcan problemas de pandeo lateral.

La ductilidad de un muro depende de la distribución del refuerzo. Por lo tanto se recomienda en secciones rectangulares - distribuir el refuerzo vertical de tal manera que el porcentaje en el alma sea el mínimo valor permisible y el refuerzo adicional se concentre cerca de los extremos de la sección del muro. Además, los patines ó un engrosamiento de los extremos del muro también aumentan la ductilidad de la curvatura del mismo.

Debe tomarse en cuenta que la longitud que puede abarcar la articulación en la base es del orden de uno o dos pisos, y que es allí donde ocurren los cortantes máximos, por lo que hay que detallar perfectamente éstas zonas para prevenir fallas por adherencia, por compresión de algún extremo, o por cortante, y lo -- grar que rijas la falla de tensión por compresión.

Con frecuencia los muros de rigidez están unidos por vigas - a marcos o a otros muros. Este tipo de muros se denominan MUROS DE CORTANTE ACOPLADOS. Si sabemos que la efectividad de una estructura ante cargas laterales, es su habilidad para disipar energía, podemos hacer una serie de consideraciones acerca de esta clase de muros.

En un muro rectangular en voladizo, el esfuerzo cortante -- máximo se induce a lo largo de la fibra en el eje neutro en toda la altura del muro. Si ésta fibra o una cercana es débil puede-

ocurrir una falla por cortante deslizante como muestra la figura 8-8.

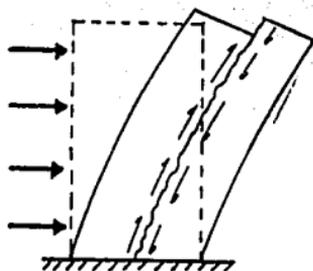


fig. 8-8

Si se lograra hacer dúctil éste mecanismo de falla, se podría usar entonces como un mecanismo viable disipador de energía. Si a esto sumamos la energía que disipa una articulación plástica se notaría la conveniencia de este tipo de sistema. La figura 8-9a es un caso particular de dos muros ligados entre sí por una hilera de vigas. En la figura 8-9b aparecen las articulaciones plásticas que se generarían en la estructura.

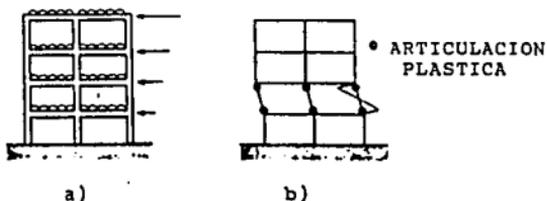


fig. 8-9

Sin embargo, en éstos casos las cargas laterales generan en las vigas de acoplamiento fuerzas cortantes y momentos flexionantes altos. Es conveniente por ésto, reforzar y detallar éstas -

vigas de forma tal que tengan capacidad de rotación suficiente para que la energía introducida por cargas laterales se disipe mediante el mecanismo ya mostrado en la figura 8-9b.

Se debe tener cuidado especial cuando las vigas de acoplamiento entre dos muros tienen una relación claro a peralte menor que aproximadamente 2.0. porque en estas circunstancias no se puede prevenir la falla por cortante mediante el refuerzo convencional de estribos verticales.

La mejor forma de evitar una falla por cortante en las vigas de acoplamiento, es usando refuerzo diagonal en lugar del horizontal por flexión y vertical por cortante común. Estas vigas han demostrado ser extremadamente dúctiles siempre y cuando se evite el pandeo de las varillas de compresión diagonales. La referencia 13 muestra un tipo de detalle de este refuerzo.

En edificios de poca altura, la de un muro de cortante puede ser menor que su longitud. Este tipo de muros (MUROS DE CORTANTE DE Poca ALTURA), no pueden diseñarse con las técnicas comunes de la teoría del concreto reforzado. Sin embargo, debido a que la carga sísmica rara vez resulta crítica, un diseño aproximado que garantice cierta ductilidad generalmente es suficiente.

La figura 8-10a, muestra un muro de cortante de poca altura, en el que se observa que el cortante horizontal - después de aparecer el agrietamiento diagonal - introducido en la parte superior del muro, necesita descomponerse en fuerzas de compresión diagonal y otras de tensión vertical.

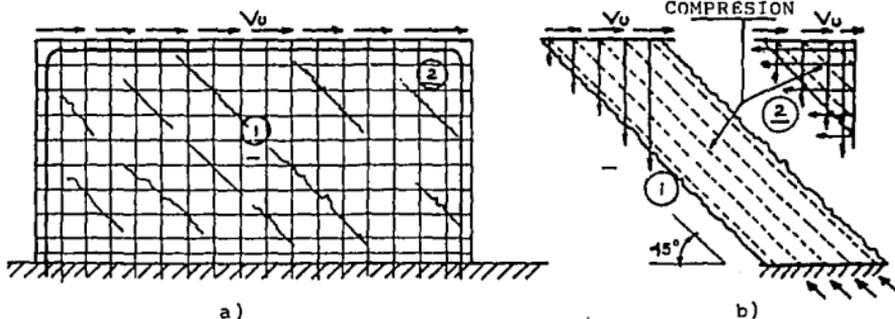


fig. 8-10

Es por ésto, que el refuerzo vertical por flexión permite, además, que el cortante se transmita a la cimentación (cuerpo 1-1 de la figura 8-10b). Cuando el campo de compresión diagonal no encuentra un apoyo en el nivel de la cimentación (cuerpo

libre 2 de la figura 8-9 b), se requiere una cantidad igual de refuerzo horizontal por cortante.

Por consiguiente, la figura 8-9 muestra que para un muro de cortante bajo se requerirá una malla de acero igual área en ambas direcciones, si se supone un campo de compresión a 45°. Además, la resistencia a flexión en la base se debe evaluar cuidadosamente, tomando en cuenta la contribución de todas las varillas verticales, para asegurarse de que es posible proporcionar la resistencia al cortante requerida. De ésta forma, pueden hacerse dúctiles la mayoría de los muros de cortante bajo, y así evitar una falla frágil.

Ahora veremos algunas disposiciones que proporciona el R.C. D.F. para el diseño de muros de concreto armado.

1.- Muros sujetos a cargas verticales axiales ó excentricas.

Estos muros se dimensionarán por flexocompresión como si fueran columnas.

a.-) Para tableros cuyos bordes tengan suficiente restricción, la longitud efectiva de pandeo H' , se calculará como sigue:

$$H' = H, \quad \text{si } H/L \leq 0.35 \dots (8.31)$$

$$H' = (1.3 - 0.85 H/L) H, \quad \text{si } 0.35 < H/L < 0.8 \dots (8.32)$$

$$H' = L/2, \quad \text{si } H/L \geq 0.8 \dots (8.33)$$

donde H es la altura del muro y L la longitud horizontal del tablero. Se entiende por tablero una porción de muro limitado por elementos estructurales verticales, o todo el muro si no hay dichos elementos o solo existen en los bordes del muro. Para considerar una suficiente restricción lateral, los elementos estructurales deben estar ligados al tablero en sus bordes verticales, -- siempre que su dimensión perpendicular al plano no sea menor que 2.5 veces el espesor del mismo.

b.-) En tableros cuyos bordes no poseen suficiente restricción lateral

$$H' = H \quad \text{si } H/L \leq 0.35 \dots (8.34)$$

$$H' = 0.215 (H/L + 4.3) H \leq 2H \dots (8.35)$$

si $H/L > 0.35$

siendo L la longitud horizontal del muro.

c.-) Para cargas concretadas, se tomará como ancho efectivo una longitud igual a la de contacto, más cuatro veces el espesor del muro, pero sin exceder, el valor de la distribución centro a centro de cargas.

2.- Muros sujetos a fuerzas horizontales a su plano.

a.-) Para muros con relación L/t no mayor a 90, cuyos bordes tienen suficiente restricción lateral y no sujetos a cargas verticales considerables.

. Efectos de flexión

$$MR = FR As fy Z \dots (8.36)$$

siendo Z el brazo del par interno cuyo valor se estima así

$$Z = 0.8 L, \text{ si } H/L \geq 1.0$$
$$Z = (0.4 + 0.4 H/L)L, \text{ si } 0.5 < H/L < 1.0$$
$$Z = 1.2 H, \text{ si } H/L \leq 0.5$$

donde H es la altura total del muro, L su longitud y t su espesor.

. Fuerza cortante

$$VcR = 0.85 FR \sqrt{f \cdot c} t L, \text{ si } Mu/VuL \leq 1.0 \dots (8.37)$$

si $Mu/VuL > 1.5$, se usarán las expresiones () y () del capítulo III, sustituyendo a b por el espesor del muro t, y el peralte efectivo d se determinará en base al ancho de distribución del refuerzo,

Para valores intermedios de Mu/VuL comprendidos entre 1.0 y 1.5 se puede interpolar linealmente.

Si Vu es mayor que VcR se requiere refuerzo por fuerza cortante. Para esto, la cuantía del refuerzo horizontal, h no será menor que

$$\frac{Vu - VcR}{FR fy d t} \dots (8.38)$$

ni que la necesaria por condiciones volumétricas (ec.). El espaciamiento del refuerzo horizontal, sh , no sea mayor que el obtenido por la expresión () ni que $L/5$

La cuantía del refuerzo vertical, pv , no será menor que

$$0.0025 + 0.5 (2.5 - H/L)(ph - 0.0025) \dots (8.39)$$

ni que la necesaria por cambios volumétricos (ec.) pero no necesariamente mayor que ph . El espaciamiento vertical, sv , no será mayor que el ob-

tenido por la ecuación (. .). En lo anterior

$$p_h = \frac{A_{vh}}{s_h t} \quad \text{y} \quad p_v = \frac{A_{vv}}{s_v t}$$

siendo A_{vh} , el área de refuerzo horizontal comprendida en una distancia s_h .

A_{vv} , el área de refuerzo vertical comprendida en una distancia s_v .

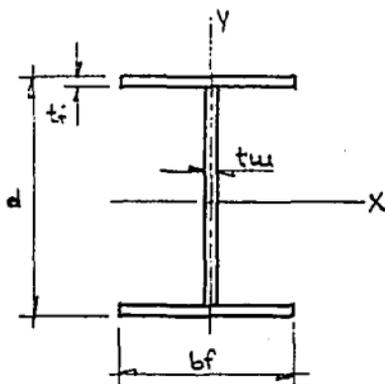
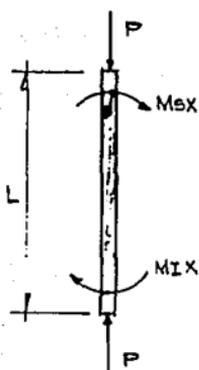
H y L , la altura total y longitud horizontal del muro.

y t , el espesor del muro.

Para muros con relación L/t mayor a 90 y muros con bordes - carentes de restricción, debe reducirse la capacidad de éstos para resistir fuerzas horizontales, debido a la posibilidad de pandeo. En muros donde además actúen cargas verticales de consideración, la relación L/t se limitará a 40 y se aplicarán las disposiciones señaladas en el inciso 1 de esta sección.

Además, las cuantías del refuerzo horizontal y vertical no serán menores que 0.0025; su espaciamiento no excederá de 35 cm. y éste se colocará en dos capas siempre que el espesor del muro sea mayor a 15 cm., o el refuerzo cortante promedio en el muro debido a cargas de diseño sea superior a $\sqrt{f'c}$.

REVISIÓN DE UN ELEMENTO DE ACERO
SUJETO A FLEXOCOMPRESIÓN



DATOS:

$P = 180 \text{ TON.}$

$M_{SX} = 5 \text{ TON-M}$

$M_{IX} = 3 \text{ TON-M.}$

$K_X = 1.25 \quad (\text{SUPUESTO})$

SE SUPONE TRASLACION LATERAL EN SUS EXTREMOS

$L = 600 \text{ cm.}$

$d = 35.6 \text{ cm.}$

$b_f = 35.56 \text{ cm.}$

$t_f = 2.22 \text{ cm.}$

$t_w = 1.27 \text{ cm.}$

$A = 197.58 \text{ cm}^2$

$I_x = 47,171 \text{ cm}^4$

$S_x = 2658 \text{ cm}^3$

$r_x = 15.44 \text{ cm}$

ACERO A-36, $f_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$

CODIGO : A.I.S.C.

PROCEDIMIENTO

RELACION
REFERIDAREVISION A COMPRESION DE SERVICIO :

$$f_a = \frac{150\,000}{197.59} = 911 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\frac{K \cdot L}{Y} = \frac{(1.25)(600)}{15.44} = 48.6$$

OBTENEMOS F_a DIRECTAMENTE DE LA TABLA 9

$$F_a = 1297 \text{ Kg/cm}^2 \quad \dots \quad 6.15$$

$$\frac{f_a}{F_a} = \frac{911}{1297} \quad 0.70 > 0.15$$

POR LO QUE USAREMOS PARA

REVISION A FLEXION :

$$\frac{(Cm_x)(Fbx)}{(1 - f_a/F_{cx}) Fbx} \quad \dots \quad 8.2$$

 $Cm_x = 0.85$, POR TENER JUNTAS CON TRANSLACION LATERAL

$$Fbx = \frac{(843700)(1.0)}{(600)(25.56)/35.52 \times 2.22} = 3121 \text{ Kg/cm}^2 \quad \dots \quad 7.23$$

$$\delta fbx = (0.6)(2530) = 1520 \text{ Kg/cm}^2 \text{ , RIGI} \quad \dots \quad 7.24$$

$$F_{cx} = \frac{10'480,000}{(48.6)^2} = 4436 \text{ Kg/cm}^2 \quad \dots \quad 8.1$$

$$fbx = \frac{5 \times 10^5}{2653} = 189 \text{ Kg/cm}^2 \quad \dots \quad 7.15$$

SUSTITUYENDO EN LA ECUACION 8.2 TENEMOS

$$\frac{(0.85)(189)}{(1 - \frac{911}{4436}) 1520} = 0.133 \quad \dots \quad 8.2$$

CAPITULO : 8

EJEMPLO No. 18

PROCEDIMIENTO

ECUACION
REFERIDA

VERIFICACION POR COMBINACION DE ESFUERZO
FLEXION Y COMPRESION (FLEXOCOMPRESION)

APLICACION A LA FORMULA DE BRESLER :

$$0.7 + 0.153 = 0.853 < 1.0$$

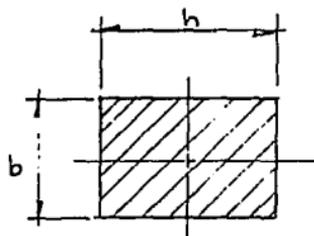
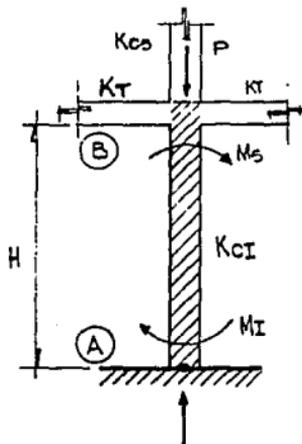
..... 8.2

∴ EL PERFIL SE ACEPTA POR FLEXOCOMPRESION

CAPITULO : 8

EJEMPLO : No. 19

AMPLIFICACION DE MOMENTOS EN UNA COLUMNA ESDELTA



MARCO NO RESTRINGIDO LATERALMENTE

DATOS :

$$h = 60 \text{ cm.}$$

$$b = 40 \text{ cm.}$$

$$H = 600 \text{ cm.}$$

$$K_T = 770 \text{ cm}^4 \quad (I/L \text{ SUPUESTO})$$

$$K_{CS} = 2060 \text{ cm}^4 \quad (\text{IDEM})$$

$$K_{CI} = 1200 \text{ cm}^4 \quad (\text{IDEM})$$

$$P = 150 \text{ TON.}$$

$$M_S = C_Y + C_M = 3.0 + 7.0 \text{ TON./M.}$$

$$C_A = 40 \text{ TON./M.}$$

$$M_I = C_Y + C_M = 6.0 + 14.0 \text{ TON./M.}$$

$$C_A = 60 \text{ TON./M.}$$

$$f'_c = 250 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

PROCEDIMIENTOINDICACION
REFERIDAREVISION DE ESBELTEZ :

$$\psi_A = 0 \quad (\text{POR SER EMPOTRAMIENTO})$$

$$\psi_B = \frac{\sum K_G}{\sum K_T} = \frac{2060 + 1200}{770 + 770} = 2.1$$

SEGUN NOTOGRAMA DE GRAF. 1 , PARA $\psi_A = 0$
Y $\psi_B = 2.1$

$$K_1 = 1.28$$

POR LO TANTO

$$\frac{(1.28)(600)}{(0.3)(60)} = 42.6 > 22 \quad \dots \dots \dots$$

8.5

POR LO QUE LA COLUMNA ES ESBELTA.

FACTOR DE AMPLIFICACION :

$$F_a = \frac{C_m}{1 - \frac{P_U}{P_C}} \quad \dots \dots \dots$$

8.9

 $C_m = 1.0$ PORQUE LA ESTRUCTURA
PUEDE DESPLAZARSE $\dots \dots \dots$

8.10

$$P_U = 150 \text{ TON.}$$

$$P_C = \frac{FR \pi^2 EI}{(H')^2} \quad \dots \dots \dots$$

8.11

$$EI = 0.4 \frac{E_c I_g}{(1 + \mu)} \quad \dots \dots \dots$$

8.12

PROCEDIMIENTO

EJEMPLO
REFERIDA

$$U = \frac{6.0}{60.0} = 0.10$$

$$I_g = \frac{(40)(60)^3}{12} = 720,000 \text{ cm}^4$$

$$E_c = 10,000 \sqrt{250} = 158,113 \text{ Kg/cm}^2$$

$$EI = \frac{(0.4)(158,113)(720,000)}{(1+0.10)} = 4.13 \times 10^{10} \text{ Kg/cm}^2 \dots \dots \dots 8.12$$

$$P_c = \frac{(0.85)(\pi^2)(4.13 \times 10^{10})}{(1.28 \times 600)^2} = 588,794 \text{ Kg} \dots \dots \dots 8.11$$

$$F_a = \frac{1}{1 - \left(\frac{1500,000}{588,794}\right)} = 1.34$$

FINALMENTE, EL MOMENTO MAYOR AMPLIFICADO ES

$$M_A = (1.34)(6.0 + 14.0 + 60) = 107.2 \text{ T-M.}$$

TABLAS Y

GRAFICAS

PROPIEDADES DE VARILLAS.

Var. No.	Diámetro		Peso Kg/m.	Radio da (ro(m.m.))	Número de Varillas										cm ² / cm	
	Fulg.	mm.			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	cm ²	cm
2	1/4	6.3	0.248	1.575	0.32	0.64	0.96	1.28	1.60	1.92	2.24	2.56	2.88	3.20	Áreas perímetros	
					1.99	3.98	5.97	7.96	9.95	11.94	13.93	15.92	17.91	19.90		
2.5	5/16	7.9	0.384	1.975	0.49	0.98	1.47	1.96	2.45	2.94	3.43	3.92	4.41	4.90	Áreas perímetros	
					2.43	4.96	7.44	9.92	12.40	14.88	17.36	19.84	22.32	24.80		
3	3/8	9.5	0.557	2.375	0.71	1.42	2.13	2.84	3.55	4.26	4.97	5.68	6.39	7.10	Áreas perímetros	
					2.96	5.96	8.94	11.92	14.90	17.88	20.86	23.87	26.82	29.80		
4	1/2	12.7	0.995	3.175	1.27	2.54	3.81	5.08	6.35	7.62	8.89	10.16	11.43	12.70	Áreas perímetros	
					3.99	7.98	11.97	15.96	19.95	23.94	27.93	31.92	35.91	39.90		
5	5/8	15.9	1.550	3.975	1.99	3.98	5.97	7.96	9.95	11.94	13.93	15.92	17.91	19.90	Áreas perímetros	
					5.00	10.00	15.00	20.00	25.00	30.00	35.00	40.00	45.00	50.00		
6	3/4	19.1	2.250	4.775	2.87	5.74	8.61	11.48	14.35	17.22	20.09	22.96	25.83	28.70	Áreas perímetros	
					6.00	12.00	18.00	24.00	30.00	36.00	42.00	48.00	54.00	60.00		
7	7/8	22.2	3.034	5.550	3.87	7.74	11.61	15.48	19.35	23.22	27.09	30.96	34.83	38.70	Áreas perímetros	
					6.97	13.94	20.91	27.88	34.85	41.82	48.79	55.76	62.73	69.70		
8	1	25.4	3.975	6.750	5.07	10.14	15.21	20.28	25.35	30.42	35.49	40.56	45.63	50.70	Áreas perímetros	
					7.99	15.98	23.97	31.96	39.95	47.94	55.93	63.92	71.91	79.90		
9	1 1/8	28.6	5.035	7.150	6.42	12.84	19.26	25.68	32.10	38.52	44.94	51.36	57.78	64.20	Áreas perímetros	
					8.93	17.86	26.74	35.92	44.90	53.88	62.86	71.84	80.82	89.80		
10	1 1/4	31.8	6.225	7.950	7.94	15.88	23.82	31.76	39.70	47.64	55.58	63.52	71.46	79.40	Áreas perímetros	
					9.99	19.98	29.97	39.96	49.95	59.94	69.93	79.92	89.91	99.90		
12	1 1/2	38.1	8.938	9.525	11.43	22.86	34.29	45.60	57.00	68.40	79.80	91.20	102.60	114.00	Áreas perímetros	
					11.97	23.94	35.91	47.88	59.85	71.82	83.79	95.76	107.73	119.70		

TABLA 1
224

Los diámetros, áreas y pesos se ajustan a la norma de la Secretaría de Industria y Comercio, D.G.N. 5-6-1955.

DIAMETROS INTERIORES PARA DOBLECES DE VARILLAS.

$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ (NO TORCIDO EN FRIO)

VAR	Ø	DIAM.(CMS.)	$f_c' = 150 \text{ kg/cm}^2$		$f_c' = 200 \text{ kg/cm}^2$	
			90°	180°	90°	180°
			D (CMS.)	D (CMS.)	D (CMS.)	D (CMS.)
2.5		0.79	5.7	5.7	4.9	4.9
3		0.95	5.7	5.7	4.9	5.7
4		1.27	5.7	7.6	5.1	7.6
5		1.59	6.4	9.5	6.4	9.5
6		1.91	9.5	11.4	9.5	11.4
7		2.22	13.3	13.3	13.3	13.3
8		2.54	15.2	20.3	15.2	20.3
9		2.86	22.9	22.9	22.9	22.9
10		3.18	25.4	25.4	25.4	25.4
12		3.81	30.5	30.5	30.5	30.5

VAR	Ø	DIAM. (CMS.)	$f_c' = 250 \text{ kg/cm}^2$		$f_c' = 300 \text{ kg/cm}^2$	
			90°	180°	90°	180°
			D (CMS.)	D (CMS.)	D (CMS.)	D (CMS.)
2.5		0.79	4.4	4.8	4.0	4.8
3		0.95	4.4	5.7	4.8	5.7
4		1.27	5.1	7.6	5.1	7.6
5		1.59	6.4	9.5	6.4	9.5
6		1.91	9.5	11.4	9.5	11.4
7		2.22	13.3	13.3	13.3	13.3
8		2.54	15.2	20.3	15.2	20.3
9		2.86	22.9	22.9	22.9	22.9
10		3.18	25.4	25.4	25.4	25.4
12		3.81	30.5	30.5	30.5	30.5

TABLA 2

DIAMETROS INTERIORES PARA DOBLECES DE VARILLAS.

$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ (TORCIDO EN FRIO)

VAR	Ø	DIAM. (CMS.)	$f'_c = 150 \text{ kg/cm}^2$		$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$	
			90°	180°	90°	180°
			D (CMS.)	D (CMS.)	D (CMS.)	D (CMS.)
2.5		0.79	5.7	5.7	4.9	4.9
3		0.95	5.7	5.7	4.9	4.9
4		1.27	5.7	5.7	5.1	5.1
5		1.59	6.4	6.4	6.4	6.4
6		1.91	9.5	9.5	9.5	9.5
7		2.22	11.1	11.1	11.1	11.1
8		2.54	12.7	12.7	12.7	12.7
9		2.86	17.1	17.1	17.1	17.1
10		3.18	19.1	19.1	19.1	19.1
12		3.81	22.9	22.9	22.9	22.9

VAR	Ø	DIAM. (CMS.)	$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$		$f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$	
			90°	180°	90°	180°
			D (CMS.)	D (CMS.)	D (CMS.)	D (CMS.)
2.5		0.79	4.4	4.4	4.0	4.0
3		0.95	4.4	4.4	4.0	4.0
4		1.27	5.1	5.1	5.1	5.1
5		1.59	6.4	6.4	6.4	6.4
6		1.91	9.5	9.5	9.5	9.5
7		2.22	11.1	11.1	11.1	11.1
8		2.54	12.7	12.7	12.7	12.7
9		2.86	17.1	17.1	17.1	17.1
10		3.18	19.1	19.1	19.1	19.1
12		3.81	22.9	22.9	22.9	22.9

TABLA 3

LONGITUDES BASICAS L_{db} Y LONGITUDES DE TRASLAPES.

$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ Acero Torcido en Frio

VAR #	DIAM.(cms)	$f'_c = 150 \text{ kg/cm}^2$		$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$		$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$		$f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$		$f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$		$f'_c = 400 \text{ kg/cm}^2$	
		L_{db} (cms)	L. Tr (cms)										
2.5	0.79	20	29	20	29	20	29	20	29	20	29	20	29
3	0.95	24	34	24	34	24	34	24	34	24	34	24	34
4	1.27	32	46	32	46	32	46	32	46	32	46	32	46
5	1.59	41	57	40	57	40	57	40	57	40	57	40	57
6	1.91	70	93	61	81	58	77	58	77	58	77	53	77
7	2.22	96	128	83	110	74	98	68	90	67	89	77	89
8	2.54	125	166	108	144	97	129	88	117	82	109	77	102
9	2.86	156	210	137	182	123	164	112	149	104	138	97	129
10	3.18	195	259	169	225	151	201	138	184	128	170	120	160
12	3.81	282	373	244	325	218	290	199	265	184	245	172	229

* Si bajo la barra hay más de 30 cms de concreto, estas longitudes se multiplicarán por 1.4 * Si el concreto es ligero, por 1.35
 * Si se cumplen ambas condiciones, por 1.62 * En ningún caso, la longitud de anclaje se afectada de sus factores, será menor de 30 cms. ni la de traspaso menor de 40 cms.

TABLA 4

227

LONGITUDES BASICAS L_{db} Y LONGITUDES DE TRASLAPES.

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Acero no Torcido}$$

VAR #	DIAM(cma)	$f'c=180 \text{ kg/cm}^2$		$f'c=200 \text{ kg/cm}^2$		$f'c=250 \text{ kg/cm}^2$		$f'c=300 \text{ kg/cm}^2$		$f'c=350 \text{ kg/cm}^2$		$f'c=400 \text{ kg/cm}^2$	
		L_{db} (cma)	L.Tr. (cma)										
2.5	0.79	20	29	20	29	20	29	20	29	20	29	20	29
3	0.95	24	34	24	34	24	34	24	34	24	34	24	34
4	1.27	32	46	32	46	32	46	32	46	32	46	32	46
5	1.59	41	57	40	57	40	57	40	57	40	57	40	57
6	1.91	59	78	51	69	48	69	48	69	48	69	48	69
7	2.22	80	104	69	92	62	82	56	80	56	80	56	80
8	2.54	104	138	90	120	81	108	74	96	68	91	64	91
9	2.86	132	176	114	152	102	136	93	124	86	114	81	108
10	3.18	163	217	141	188	126	168	115	153	107	142	100	133
12	3.81	235	313	203	270	182	242	166	221	154	205	144	192

* Si debajo de barra hay más de 50cms. de concreto, estas longitudes se multiplicarán por 1.4. Si el concreto es ligero, por 1.5.

** Si se cumplen ambas condiciones, por 1.882. En ningún caso, la longitud de anclaje ya indicada de sus tablas, será menor de 50cms. ni la de traslape menor de 40cms.

COEFICIENTES PARA DETERMINAR MOMENTOS FLEXIONANTES EN LOSAS

TABLERO	MOMENTO	CLARO	Momentos en losas cortas o largas, $m = a_1/a_2$													
			0.5		0.6		0.7		0.8		0.9		1.0			
			I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II		
INTERIOR TODOS LOS BORDES CONTINUOS	NEG. EN BORDES INTERIORES	CORTO	500	1010	550	550	401	400	432	429	391	357	333	338	286	252
	LARGO	516	961	500	431	331	342	371	353	347	301	320	330	288	255	
	POSITIVO	CORTO	453	501	512	522	715	276	228	236	192	159	153	124	120	130
	LARGO	177	101	131	154	113	119	135	133	120	133	127	131	120	130	
DE BORDE UN LADO CORTO	NEG. EN BORDES INTERIORES	CORTO	909	1010	568	550	501	553	451	470	403	431	357	300	315	340
	LARGO	516	544	409	431	331	412	372	395	350	329	325	341	327	211	
DISCONTINUO	POSITIVO	CORTO	320	0	250	0	248	0	236	0	222	0	203	0	120	0
	LARGO	630	468	320	303	292	306	236	251	208	210	107	101	150	114	
DE BORDE UN LADO LARGO	NEG. EN BORDES D.S.	CORTO	1000	1143	425	425	316	360	453	431	397	420	346	304	297	31
	LARGO	587	650	405	345	442	313	411	470	379	420	347	334	313	346	
DISCONTINUO	POSITIVO	CORTO	651	0	352	0	321	0	285	0	250	0	219	0	150	0
	LARGO	751	912	334	358	255	312	241	203	202	210	104	175	123	135	
DE ESQUINA DOS LADOS ADYACENTES DISCONTINUOS	NEG. EN BORDES INTERIORES	CORTO	1050	1143	592	650	530	582	471	529	419	404	371	412	324	304
	LARGO	620	713	475	504	455	541	425	501	394	437	300	410	324	300	
	POSITIVO	CORTO	651	0	232	0	321	0	277	0	250	0	219	0	190	0
	LARGO	320	0	250	0	240	0	235	0	222	0	208	0	190	0	
AISLADO CUATRO LADOS DISCONTINUOS	POSITIVO	CORTO	751	912	353	416	304	354	250	281	216	247	176	165	137	153
	LARGO	191	212	152	168	146	163	142	158	140	150	138	154	137	153	
	NEG. EN BORDES DISCONTINUOS	CORTO	570	0	350	0	330	0	470	0	430	0	330	0	330	0
	LARGO	330	0	350	0	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0	
	POSITIVO	CORTO	1100	1670	730	1543	800	1330	720	1110	640	1070	570	950	500	500
	LARGO	200	250	300	320	500	830	500	830	500	330	500	830	500	830	

Caso I Losa colada monolíticamente con sus apoyos

Caso II Losa no colada monolíticamente con sus apoyos

Los coeficientes multiplicados por $10^{-4} wa^2$ dan momentos por unidad de ancho

Para el caso I, a_1 y a_2 pueden tomarse como los claros libres entre paños de vigas;

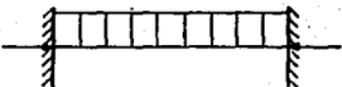
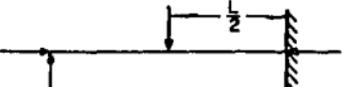
para el caso II se tomarán como los claros entre ejes, pero sin exceder el claro libre más dos veces el espesor de la losa

TABLA 6

La línea punteada indica la forma de la columna pandeada	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
						
Valores teóricos de K	0.50	0.70	1.0	1.0	2.0	2.0
Valores de K recomendados para diseño cuando las condiciones reales se aproximan a las ideales	0.65	0.80	1.2	1.0	2.10	2.0
Condiciones en los extremos	   	Rotación y traslación impedidas Rotación libre y traslación impedida Rotación impedida y traslación libre Rotación y traslación libres				

Valores del coeficiente K para determinar la longitud efectiva de columnas aisladas

TABLA 7

CASO	ψ	C_M
	0	1.0
	-0.3	$1 - 0.3 \frac{P_U}{P_E}$
	-0.4	$1 - 0.4 \frac{P_U}{P_E}$
	-0.2	$1 - 0.2 \frac{P_U}{P_E}$
	-0.4	$1 - 0.4 \frac{P_U}{P_E}$
	-0.6	$1 - 0.6 \frac{P_U}{P_E}$

Valores de los coeficientes ψ y C_M , en elementos flexocomprimidos para varias condiciones de cargas intermedias

TABLA 8

RESISTENCIA DE DISEÑO PARA MIEMBROS EN COMPRESION
ACERO A-36; FY=2530 KG/CM²

KL/R	ESF	KL/R	ESF	KL/R	ESF	KL/R	ESF	KL/R	ESF
1	2148	51	1880	101	1322	151	662	201	373
2	2146	52	1872	102	1308	152	653	202	370
3	2143	53	1863	103	1294	153	645	203	366
4	2141	54	1854	104	1280	154	636	204	362
5	2138	55	1845	105	1266	155	628	205	359
6	2136	56	1836	106	1252	156	620	206	355
7	2133	57	1827	107	1238	157	612	207	352
8	2130	58	1818	108	1223	158	604	208	349
9	2126	59	1809	109	1209	159	597	209	345
10	2123	60	1800	110	1194	160	589	210	342
11	2120	61	1790	111	1180	161	582	211	339
12	2116	62	1780	112	1165	162	575	212	335
13	2113	63	1771	113	1150	163	568	213	332
14	2109	64	1761	114	1135	164	561	214	329
15	2105	65	1751	115	1120	165	554	215	326
16	2101	66	1741	116	1105	166	547	216	323
17	2097	67	1731	117	1090	167	541	217	320
18	2092	68	1720	118	1075	168	535	218	317
19	2088	69	1710	119	1059	169	528	219	314
20	2083	70	1700	120	1044	170	522	220	311
21	2079	71	1689	121	1028	171	516	221	309
22	2074	72	1678	122	1012	172	510	222	306
23	2069	73	1667	123	997	173	504	223	303
24	2064	74	1656	124	981	174	498	224	300
25	2059	75	1645	125	965	175	493	225	298
26	2053	76	1634	126	949	176	487	226	295
27	2048	77	1623	127	936	177	481	227	293
28	2042	78	1612	128	921	178	476	228	290
29	2036	79	1600	129	907	179	471	229	287
30	2031	80	1589	130	893	180	466	230	285
31	2025	81	1577	131	879	181	460	231	282
32	2019	82	1565	132	866	182	455	232	280
33	2012	83	1553	133	853	183	450	233	278
34	2006	84	1541	134	840	184	446	234	275
35	2000	85	1529	135	828	185	441	235	273
36	1993	86	1517	136	816	186	436	236	271
37	1986	87	1505	137	804	187	431	237	268
38	1979	88	1492	138	792	188	427	238	266
39	1973	89	1480	139	781	189	422	239	264
40	1965	90	1467	140	770	190	418	240	262
41	1958	91	1455	141	759	191	413	241	259
42	1951	92	1442	142	748	192	409	242	257
43	1944	93	1429	143	738	193	405	243	255
44	1936	94	1416	144	728	194	401	244	253
45	1928	95	1403	145	718	195	397	245	251
46	1921	96	1389	146	708	196	393	246	249
47	1913	97	1376	147	698	197	389	247	247
48	1905	98	1363	148	689	198	385	248	245
49	1897	99	1349	149	680	199	381	249	243
50	1888	100	1336	150	671	200	377	250	241

LA RESISTENCIA DE DISEÑO EN KG. SE OBTIENE MULTIPLICANDO
LOS COEFICIENTES POR EL AREA DE LA SECCION EN CM²

TABLA 9

CARGAS CRITICAS DE PANDEO ELASTICO PARA ACERO A-36
 FY=2530 KG/CM²

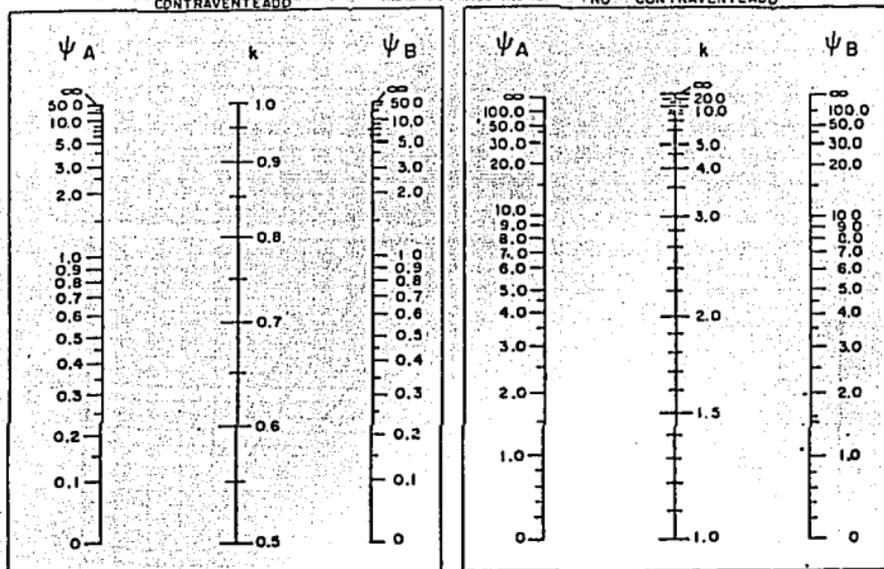
NL/R	FE	NL/R	FE	NL/R	FE	NL/R	FE	NL/R	FE
21	38807	67	3812	113	1340	159	676	205	407
22	35359	68	3701	114	1316	160	668	206	403
23	32351	69	3594	115	1294	161	660	207	399
24	29711	70	3492	116	1271	162	652	208	395
25	27382	71	3394	117	1250	163	644	209	391
26	25316	72	3301	118	1229	164	636	210	388
27	23475	73	3211	119	1208	165	628	211	384
28	21828	74	3125	120	1188	166	621	212	380
29	20349	75	3042	121	1168	167	613	213	377
30	19015	76	2962	122	1149	168	606	214	373
31	17808	77	2886	123	1131	169	599	215	370
32	16712	78	2812	124	1113	170	592	216	366
33	15715	79	2742	125	1095	171	585	217	363
34	14804	80	2674	126	1077	172	578	218	360
35	13970	81	2608	127	1061	173	571	219	356
36	13205	82	2545	128	1044	174	565	220	353
37	12501	83	2484	129	1028	175	558	221	350
38	11851	84	2425	130	1012	176	552	222	347
39	11251	85	2368	131	997	177	546	223	344
40	10696	86	2313	132	982	178	540	224	341
41	10180	87	2261	133	967	179	534	225	338
42	9701	88	2209	134	953	180	528	226	335
43	9255	89	2160	135	939	181	522	227	332
44	8839	90	2112	136	925	182	516	228	329
45	8451	91	2066	137	911	183	511	229	326
46	8087	92	2021	138	898	184	505	230	323
47	7747	93	1978	139	885	185	500	231	320
48	7427	94	1936	140	873	186	494	232	317
49	7127	95	1896	141	860	187	489	233	315
50	6845	96	1856	142	848	188	484	234	312
51	6579	97	1818	143	836	189	479	235	309
52	6329	98	1781	144	825	190	474	236	307
53	6092	99	1746	145	813	191	469	237	304
54	5868	100	1711	146	802	192	464	238	302
55	5657	101	1677	147	791	193	459	239	299
56	5457	102	1644	148	781	194	454	240	297
57	5267	103	1613	149	770	195	450	241	294
58	5087	104	1582	150	760	196	445	242	292
59	4916	105	1552	151	750	197	440	243	289
60	4753	106	1523	152	740	198	436	244	287
61	4599	107	1494	153	731	199	432	245	285
62	4452	108	1467	154	721	200	427	246	282
63	4311	109	1440	155	712	201	423	247	280
64	4178	110	1414	156	703	202	419	248	278
65	4050	111	1389	157	694	203	415	249	276
66	3928	112	1364	158	685	204	411	250	273

LA CARGA CRITICA DE PANDEO ELASTICO EN KG. SE OBTIENE
 MULTIPLICANDO LOS COEFICIENTES POR EL AREA DE LA SECCION EN CM²

TABLA 10

CONTRAVENTEADO

NO CONTRAVENTEADO



ψ = cociente de $\sum(I/L)$ de las columnas, entre $\sum(I/L)$ de los miembros de flexión que llegan a un extremo de una columna, en el plano considerado

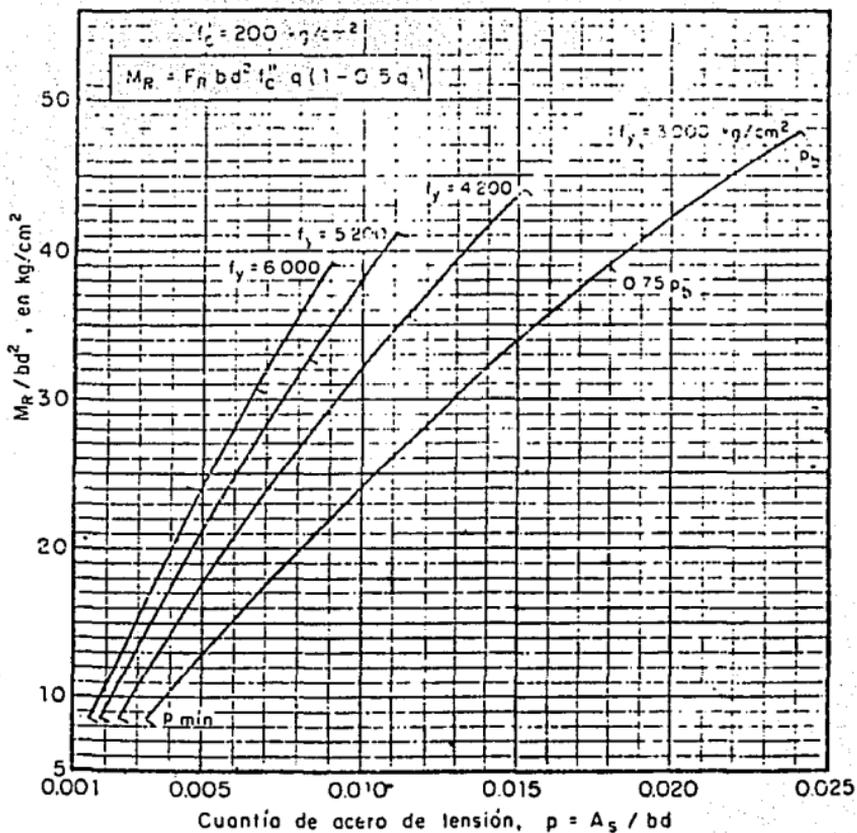
$H' = kH$

A y B son los extremos de la columna

Nomogramas para determinar longitudes efectivas, H' , de miembros a flexocompresión

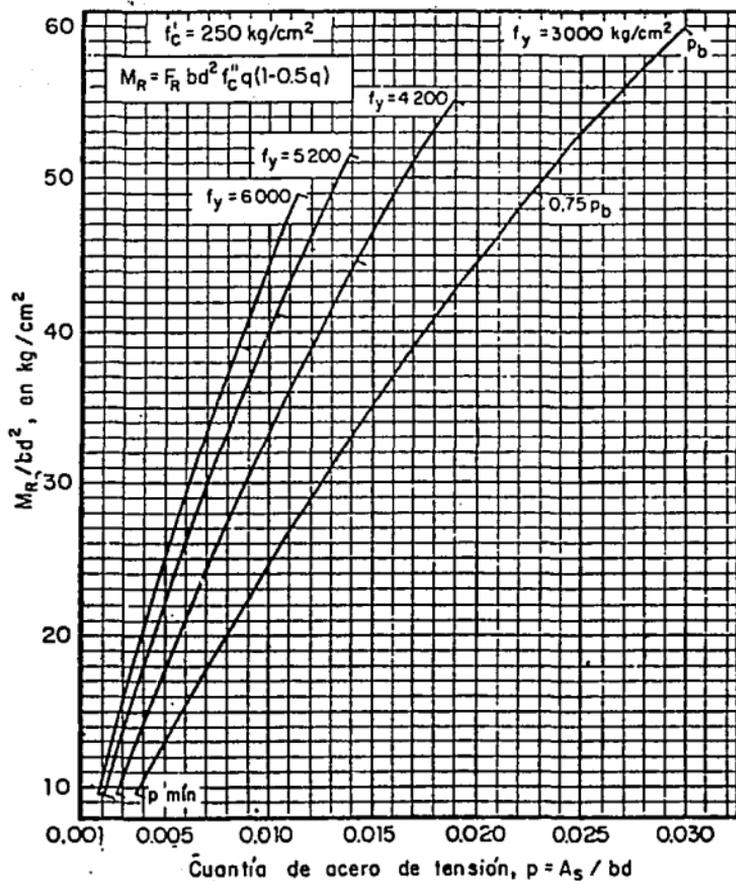
GRAFICA 1

MOMENTOS RESISTENTES DE SECCIONES RECTANGULARES

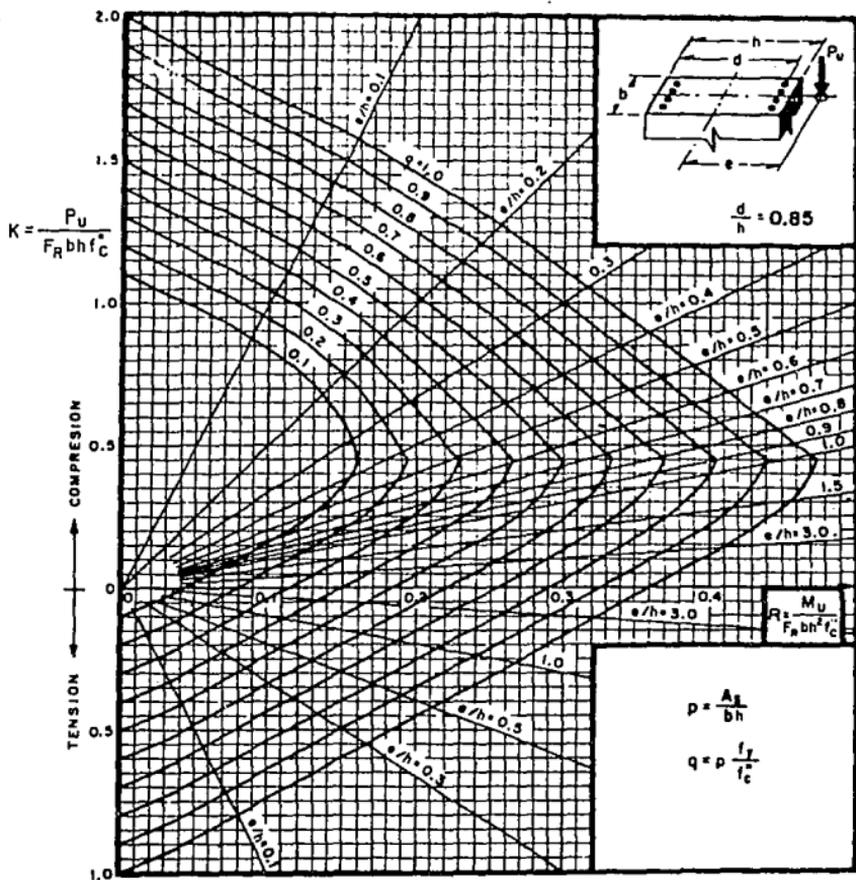


GRAFICA 2

MOMENTOS RESISTENTES DE SECCIONES RECTANGULARES



GRAFICA 3



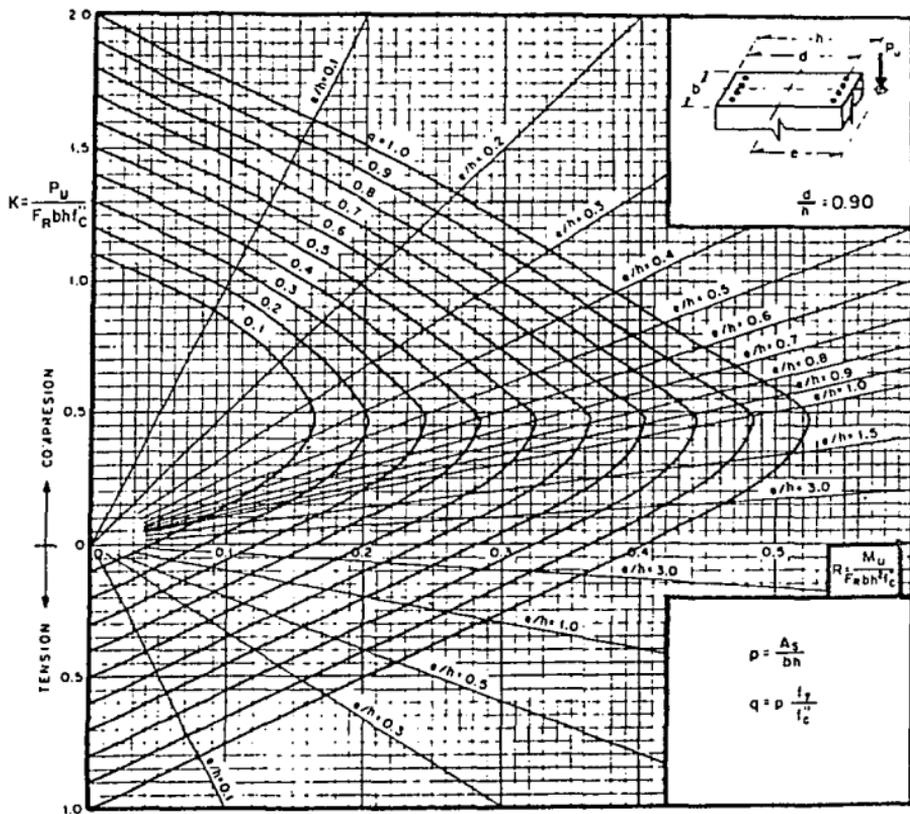
A_s = Area total de refuerzo

$f_c^* = 0.85 f_c$; si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c^* = \left(1.05 - \frac{f_c^*}{1250}\right) f_c^*$; si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$

M_u = Momento flexionante de dise\~no

P_u = Carga axial de dise\~no

GRAFICA 4



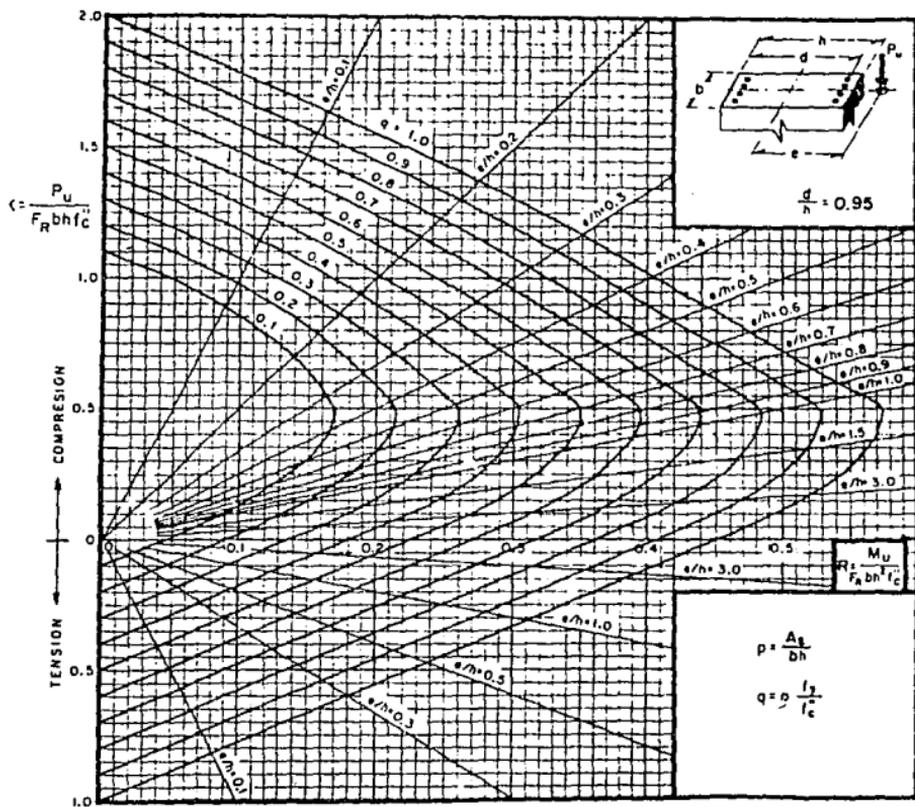
A_s = Area total de refuerzo

$f_c^* = 0.85 f_c$; si $f_c \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c^* = \left(1.05 - \frac{f_c}{1250}\right) f_c$; si $f_c > 250 \text{ kg/cm}^2$

M_U = Momento flexionante de diseo

P_U = Carga axial de diseo

GRAFICA 5



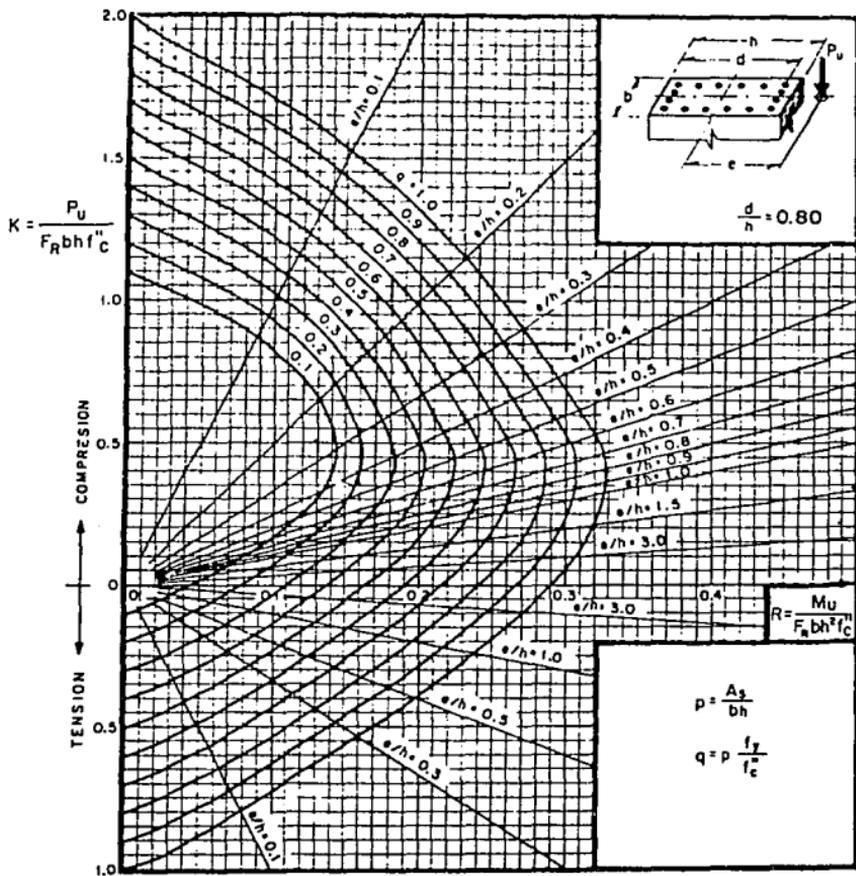
A_s = Area total de refuerzo

$f_c' = 0.85 f_c$; si $f_c' \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c' = \left(1.05 - \frac{f_c'}{1250}\right) f_c'$; si $f_c' > 250 \text{ kg/cm}^2$

M_u = Momento flexionante de dise\~no

P_u = Carga axial de dise\~no

GRAFICA 6



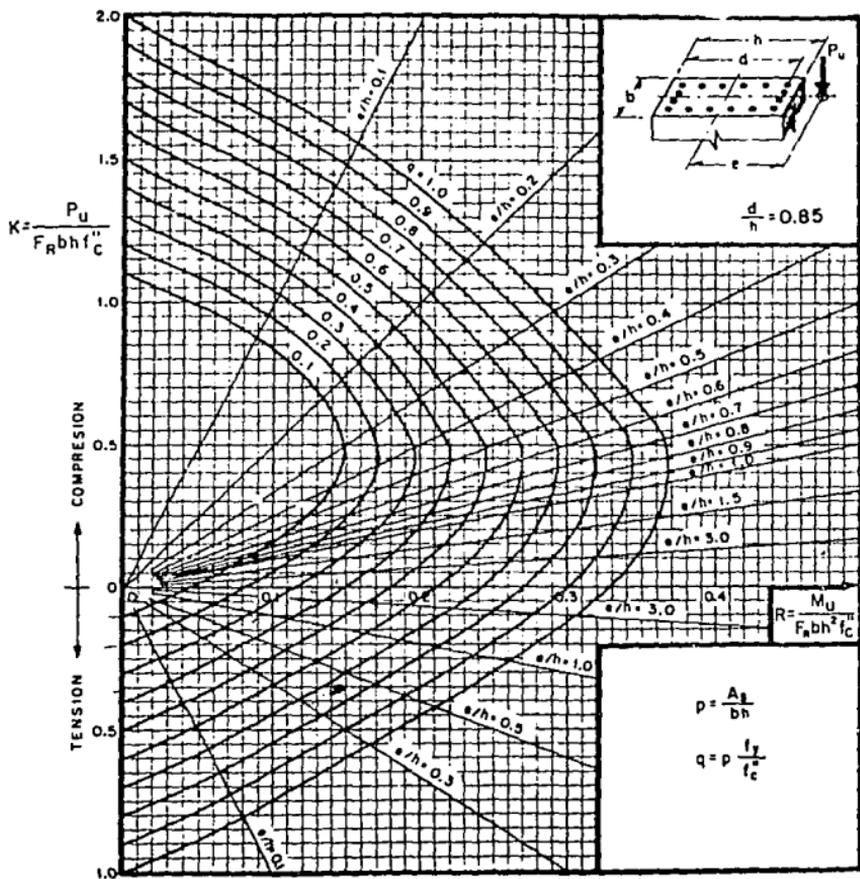
A_s = Area total de refuerzo

$f_c' = 0.85 f_c^o$; si $f_c^o \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c' = (1.05 - \frac{f_c^o}{1250}) f_c^o$; si $f_c^o > 250 \text{ kg/cm}^2$

M_u = Momento flexionante de diseño

P_u = Carga axial de diseño

GRAFICA 7



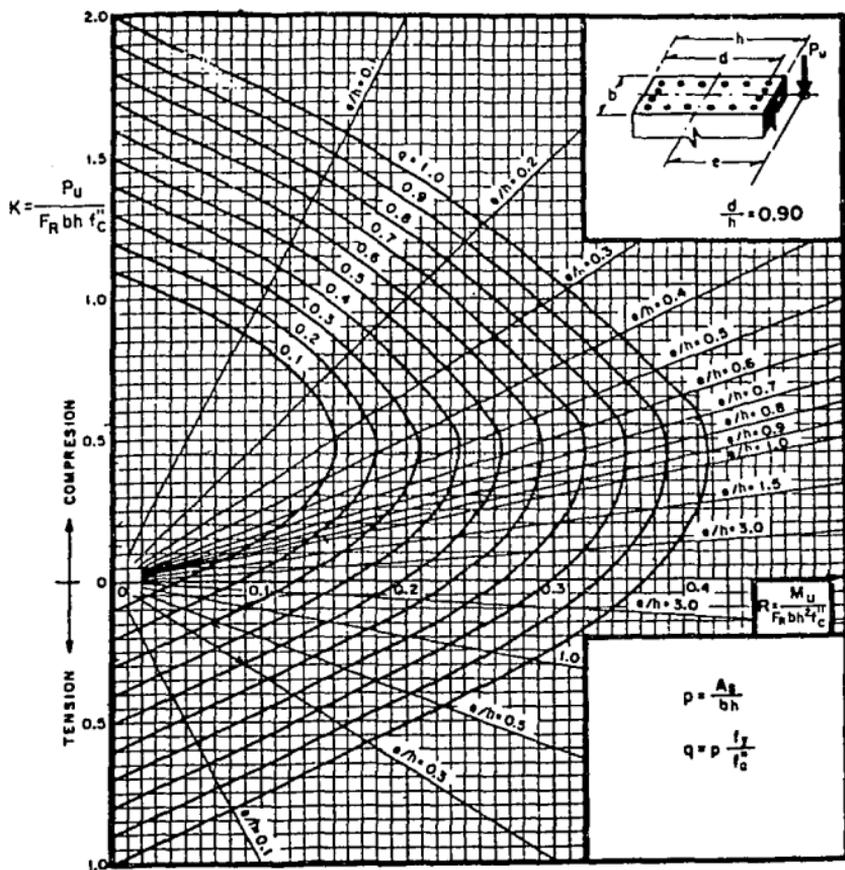
A_s = Area total de refuerzo

$f_c' = 0.85 f_c^o$; si $f_c^o \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c' = \left(1.05 - \frac{f_c^o}{1250}\right) f_c^o$; si $f_c^o > 250 \text{ kg/cm}^2$

M_u = Momento flexionante de dise\~no

P_u = Carga axial de dise\~no

GRAFICA 8



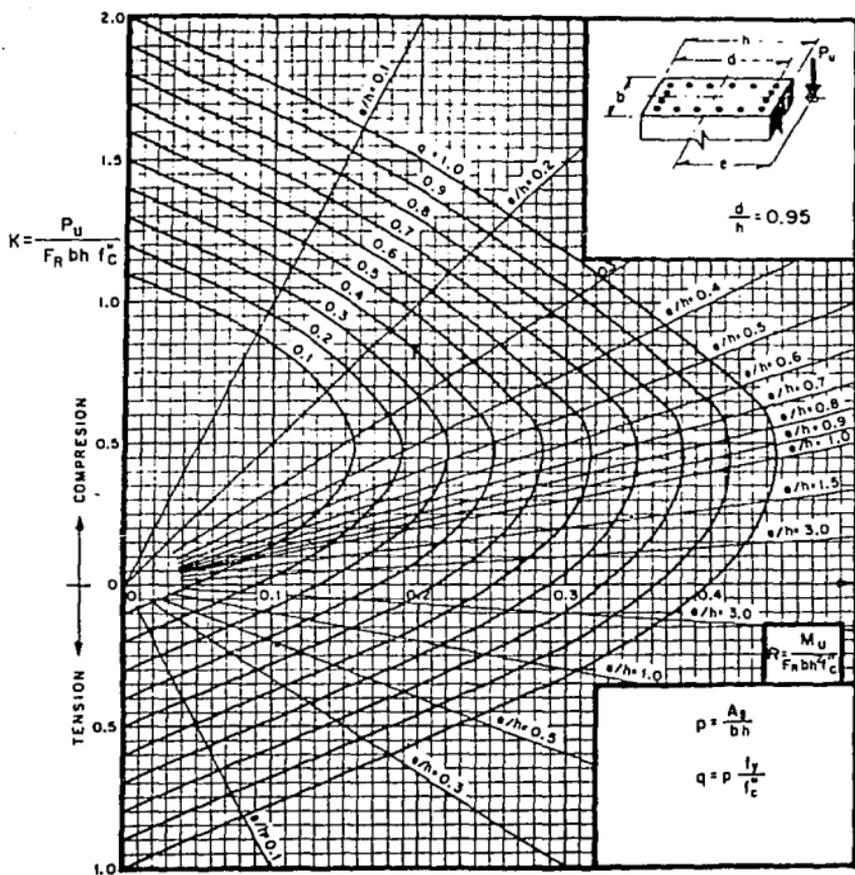
A_R = Area total de refuerzo

$f_c^* = 0.85 f_c^*$; si $f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c^* = (1.05 - \frac{f_c^*}{1250}) f_c^*$; si $f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$

M_u = Momento flexionante de dise\~no

P_u = Carga axial de dise\~no

GRAFICA 9



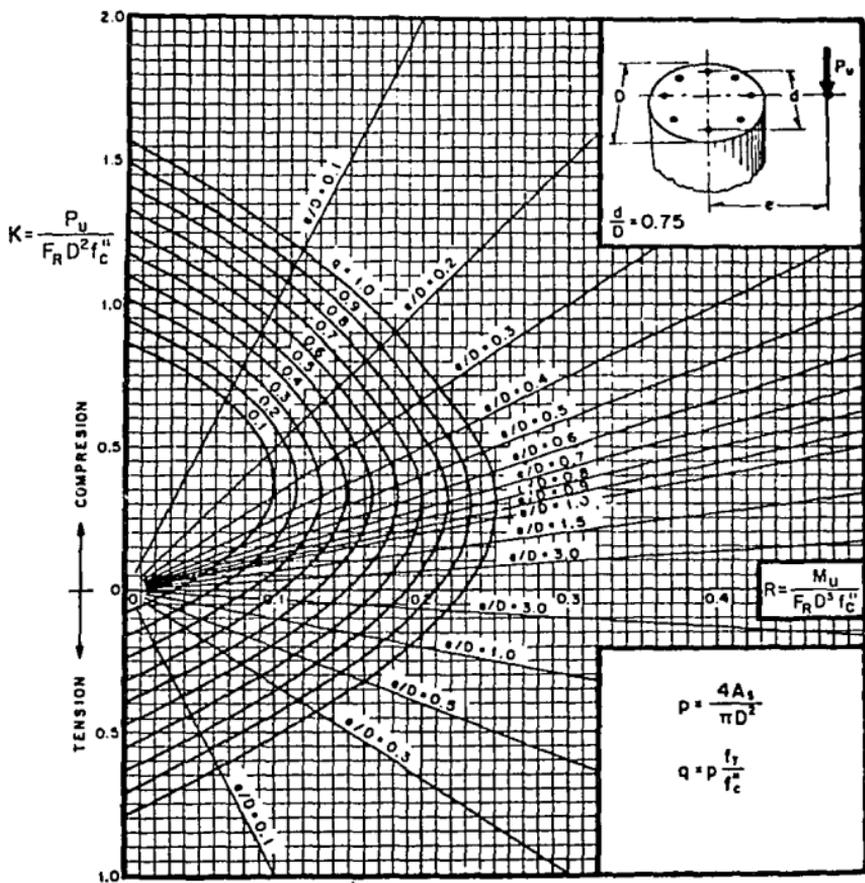
A_s = Area total de refuerzo

$f_c^* = 0.85 f_c$; si $f_c \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c^* = (1.05 - \frac{f_c}{1250}) f_c$; si $f_c > 250 \text{ kg/cm}^2$

M_u = Momento flexionante de diseo

P_u = Carga axial de diseo

GRAFICA 10



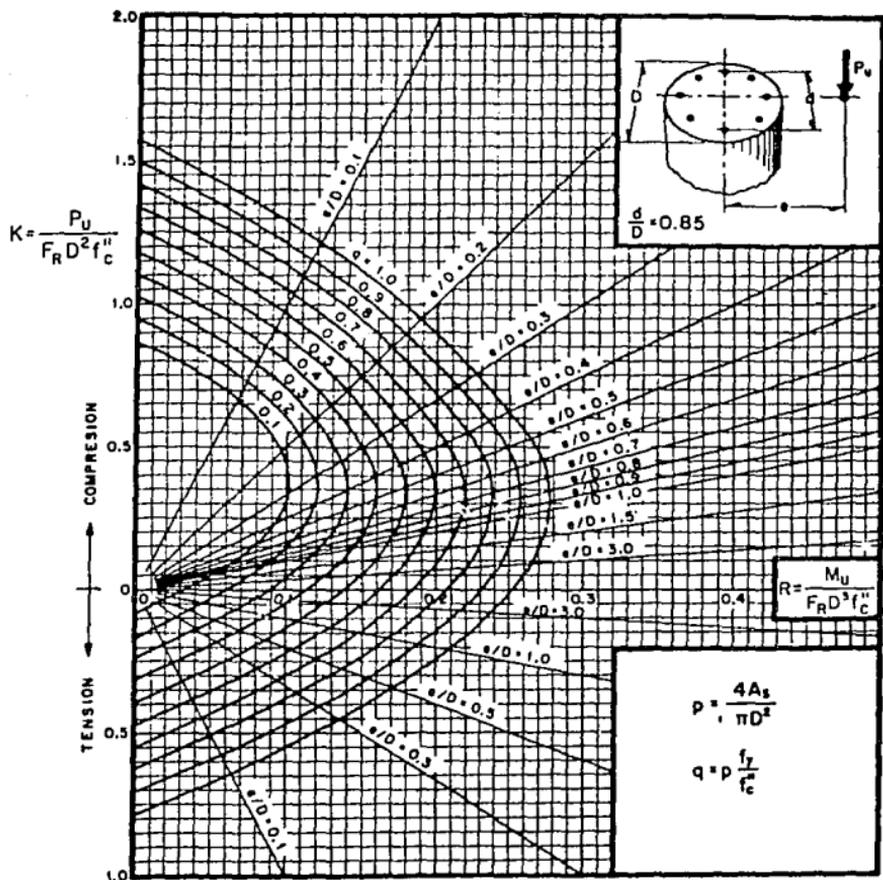
A_s = Area total de refuerzo

M_u = Momento flexionante de diseño

P_u = Carga axial de diseño

$f_c^c = 0.85 f_c^o$; si $f_c^o \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c^c = (1.05 - \frac{f_c^o}{1250}) f_c^o$ si $f_c^o > 250 \text{ kg/cm}^2$

GRAFICA 11



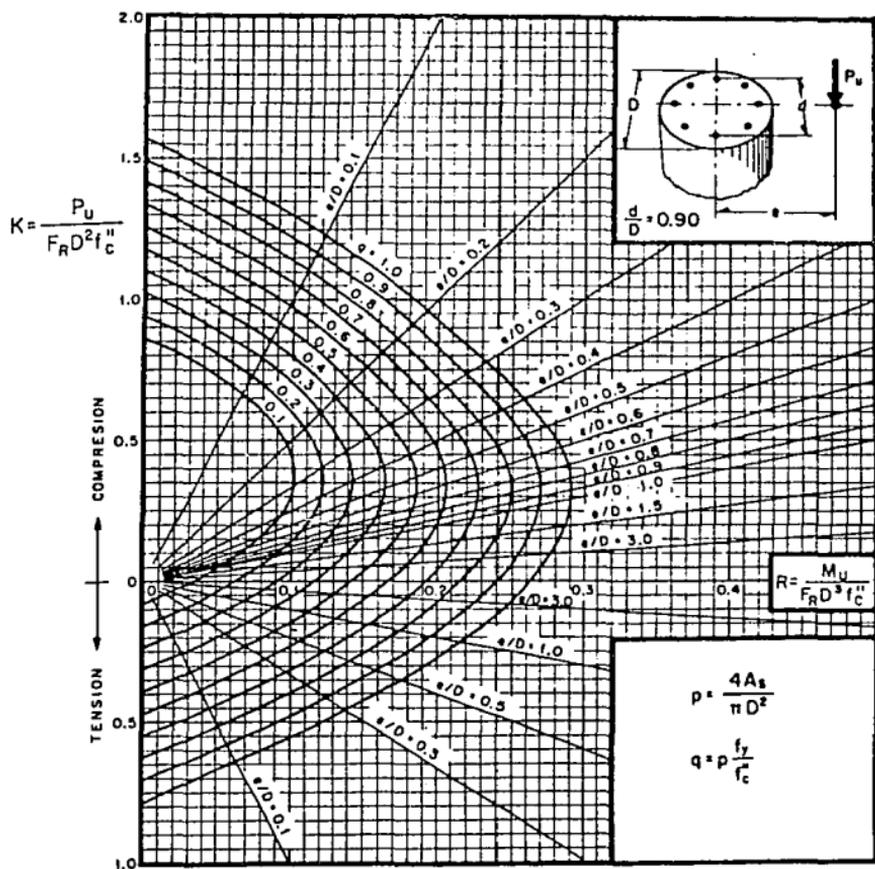
A_s = Area total de refuerzo

M_u = Momento flexionante de diseño

P_u = Carga axial de diseño

$f_c^* = 0.85 f_c$; si $f_c \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c^* = \left(1.05 - \frac{f_c}{1250}\right) f_c$; si $f_c > 250 \text{ kg/cm}^2$

GRAFICA 12



A_s = Area total de refuerzo
 M_u = Momento flexionante de diseño
 P_u = Carga axial de diseño
 $f_c'' = 0.85 f_c'$; si $f_c' \leq 250 \text{ kg/cm}^2$; $f_c'' = \left(1.05 - \frac{f_c'}{1250}\right) f_c'$; si $f_c' > 250 \text{ kg/cm}^2$

GRAFICA 13

BIBLIOGRAFIA

- Nueva Enciclopedia Tematica, tomo V, 27ava. ed. Editorial Cumbre, S.A., México. 1981.
- Enciclopedia Salvat Tomo IV, 2da. ed. Salvat Editores, S.A. Barcelona. 1971.
- Peshard E. Resistencia de Materiales. 1a. ed. Facultad de Arquitectura, U.N.A.M., México. 1983.
- Popov Egor E. Introducción a la Mecánica de Sólidos. 1a. ed. Editorial LIMUSA, México. 1981.
- Fitzgerald Robert W. Resistencia de Materiales. 2a. ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. México. 1970.
- Seely Fred B. Mecánica de Materiales. 2a. ed. Editorial LIMUSA, México. 1980.
- Timoshenko S.P. y Gere J.M. Mecánica de Materiales. Editorial U.T.E.H.A. México. 1974.
- Apuntes de Mecánica de Materiales II. Facultad de Ingeniería U.N.A.M., México. 1978.
- Harry Parker S. Estructuras de Concreto. 2da. ed. Editorial LIMUSA, México. 1988.
- Gonzalez Cuevas O.M. y Robles F. Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado. 2da. ed. Editorial LIMUSA, México. 1984.
- Torres H. M. A. Concreto. Diseño Plástico. Teoría Elástica. 2da. ed. Editorial Patria, México. 1983.
- Everard Noel J. y Tanner John L. Diseño de Concreto Armado. 1a. ed. Editorial Mc. Graw-Hill. 1981.
- Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. N.T.C. # 401 Instituto de Ingeniería, U.N.A.M., México. 1985.
- Head Norris CH., Benson Wilbur J. y Utku S. Análisis Elemental de Estructuras. 2da. ed. Editorial Mc. Graw-Hill, México. 1982.

- Díaz Canales M. Apuntes de Mecánica de Materiales III. Facultad de Ingeniería, U.N.A.M., México. 1984.
- Guyot Alfonso. Estructuras Rígidas de Contención. Notas de Diseño de I.S.T.M.E., México. 1980
- Manual de Diseño de Obras Civiles Tomo C.1.1. Comisión Federal de Electricidad. México. 1979
- Mc. Cormack Jack C. diseño de Estructuras Metálicas. 2da. ed. Representación y Servicios de Ingeniería, S.A., México. 1979.
- Bresler B., Lin T.Y. y Scalzi J.B. Diseño de Estructuras de Acero 1a. ed. Editorial LIMUSA, México. 1983.
- J.L.H. y M.S.M. Apuntes de Estructuras Metálicas. Notas para el curso de la E.N.E.P. Aragón, México. 1983.
- Manual para Constructores. Fundidora Monterrey, S.A., México. 1979
- Diseño y Construcción de Estructuras Metálicas, N.T.C. # 402 Instituto de Ingeniería, U.N.A.M., México. 1985.
- Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería. N.T.C. # 403 Instituto de Ingeniería, U.N.A.M., México. 1985.
- Roseblueth Emillo (Coordinador) I.M.C.Y.C. Diseño de Estructuras Resistentes a Sismos., México. 1982.
- Fariás Arce Rafael. Muros de Carga. Sismo. 2da. ed. U.N.A.M., México. 1984.
- Bazan Enrique y Meli Roberto. Manual de Diseño Sísmico de Edificios D-18. Instituto de Ingeniería U.N.A.M., México. 1977.
- Iglesias Jesús. Comentarios de las Modificaciones al Reglamento de Construcciones de D.F. Revista de U.A.M., México. 1985.
- Ciencia y Desarrollo. Revistas del CONACYT., México.