Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

LA GEOMETRIA EN LA PINTURA DEL RENACIMIENTO Y LOS INICIOS DE LA GEOMETRIA PROYECTIVA.

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

OLIVIA ORTIZ BARRERA

DIRECTOR DE TESIS:

JUAN GONZALEZ HERNANDEZ

MEXICO, D. F.

1994

Dedico esta tesis a:

la memoria de mi padre

el DR. BENJAMIN ORTIZ V.

y

a mi mamá

la SRA. JOSEFINA BARRERA F.

LA GEOMETRIA EN LA PINTURA DEL RENACIMIENTO
Y LOS INICIOS DE LA GEOMETRIA PROYECTIVA.

I N D I C E

Capítulo IV

GEOMETRIA PROYECTIVA

Capítulo V

APENDICE

LA RAZON AUREA

INTRODUCCION
GENERAL

El objetivo de esta tesis es relacionar la geometría y la pintura del Renacimiento.

Ya desde la Edad Media hay relación de la geometría en el dibujo;un ejemplo son los dibujos geometrizados de Villard de Honnecourt en el año 1240 en Francia.

En este periodo de la Edad Media la pintura se caracterizaba por ser de figura plana sin profundidad;se utilizó figuras geométricas como el cuadrado,la circunferencia,triángulos, octágonos. Dentro de las matemáticas se conocían los Elementos de Euclides,se estudiaba el álgebra de Al-Khuwarizmi,la solución de las ecuaciones de primer y segundo grado,se introdujo la trigonometría,y los resultados de Ptolomeo y Menelao.

En 1453 finalizó la Edad Media y surgió el Renacimiento en Italia como movimiento cultural.Esta influencia del Renacimiento se dejó sentir en los campos de la literatura,la filosofia, la ciencia,la arquitectura,la escultura y la pintura.En el Renacimiento las pinturas ya no son de figuras tan planas,empiezan a tener profundidad,la perspectiva adquiere importancia,en los trabajos de pintura se toman líneas rectas que convergen en un punto y sobre esas líneas se trabajaba.Pintores como Vinci,Durero,Rafael utilizaron la geometría,la perspectiva y trataron de representar la realidad física. Las matemáticas se desarrollaron en el Renacimiento con los trabajos de Chuquet que introduce el exponente fraccionario de una potencia,Tartaglia se interesó en la resolución de ecuaciones cúbicas,Cardano en las ecuaciones de cuarto grado,Viete introduce el problema sobre la busqueda del producto infinito,Neper investigó la teoria general de logaritmos.En este trabajo,siendo el objetivo relacionar la geometría y la pintura del Renacimiento,tendremos a Alberto

Durero desde 1535 en que se publicó las Instituciones de Geometría sobre la geometría y la pintura afirmaba que "Que los pintores que no hayan percibido su error se debe a que no aprendieron geometría sin la cual ninguno puede hacerse o ser artista perfecto y es el verdadero fundamento de todo el arte del dibujo" . Además utilizó la perspectiva en su libro IV de las Instituciones de Geometría explica mediante un cubo iluminado y su sombra proyectada y la perspectiva de un cubo dibujado,prolongando líneas y concurriendo en puntos.

Se mantuvo el interes de la perspectiva,la pintura y la geometría en el Renacimiento. Leonardo Vinci (1452-1519) en Florencia sobre la perspectiva decía que todos los problemas de la perspectiva quedan aclarados por los cinco términos de las matemáticas que son el punto, la línea,el ángulo,la superficie y el sólido. La teoría de la perspectiva se extendió considerablemente a principios del siglo XVII por un pequeño grupo de matemáticos franceses cuyo animador fue Gerard Desargues, un ingeniero y arquitecto de Lyons,que influido por artistas y arquitectos pudo crear una teoría más profunda de la perspectiva.

Desargues publicó en Paris en 1639, un notable tratado original sobre las secciones cónicas en que aprovechó la idea de proyección. Por otra parte se desarrollo la noción de que un conjunto de líneas paralelas puede considerarse pasando por un punto en el infinito,se planteo la idea y surgio la noción de ampliar el plano euclideano al añadirles puntos al infinito. Esta geometría del plano extendido es una geometría de puntos líneas e intersecciones; cualquier teorema sobre los puntos,las líneas y las intersecciones que sea verdadero en ese plano correspon- den a la geometría proyectiva.

Los teoremas de Desargues y Pascal se han hecho básicos en la teoría actual de la geometría proyectiva, el teorema de Desargues para dos triángulos fue dada por el mismo en un trabajo de perspectiva en 1636.

Matemáticos como Blaise Pascal (1623-1662) escribió "Ensayo sobre las conicas",además demostró el teorema del "Hexagrama Místico".

Poncelet (1788-1867) hizo del teorema de Desargues de los dos triángulos el fundamento de su teoría de figuras homológicas. En 1822 escribió el "Tratado de propiedades proyectivas de las figuras".Poncelet fue de los primeros en apreciar que esta materia era verdaderamente una rama de las matemáticas completamente nueva.

Veremos en esta tesis como a partir de los problemas de la pintura, la perspectiva y geometría se desarrolló la geometría en otra rama: la geometría proyectiva.

CAPITULO I

ANTECEDENTES HISTORICOS

La Edad Media

(1) La Edad Media fue el período de la Historia Universal comprendido entre 476 D.C. y 1456. En los primeros siglos de la Edad Media el Imperio Romano cayó víctima de su debilidad interna y del ataque de pueblos extraños a él como los bárbaros que eran unos de origen germánico y otros de origen asiático. Las invasiones de los germanos fueron más o menos pací ficas al principio y después violentas,sobre todo cuando se vieron empujados a ellas por las invasiones que sufrieron a su vez de parte de los asiáticos; hubo guerras y se formaron estados nacionales. Con los territorios que los germanos ocuparon se formaron los Estados de Francia,España e Italia.

Puede decirse que,en general, la vida económica medieval descansó en la agricultura,la ganadería,la artesanía y el comercio. Este floreció sobre todo en la Edad Media, a tra - vés de las carreteras,los ríos y el mar. Algunas ciudades italianas,flamencas y alemanas fueron centros activísimos del comercio. Entre los siglos XI-XV se da en Europa la división del trabajo entre la ciudad y el campo,crecen las ciudades y se desarrollan las relaciones monetarias mercantiles.

Europa se subdividió en múltiples señoríos gobernados por los señores feudales. Estos poseían poder sobre un territorio determinado y vivían rodeados de las tierras en las que habitaban y trabajaban sus siervos.El cristianismo en la Edad Media se extendió por todo el suelo europeo. En los últimos siglos de la Edad Media hubo un desarrollo apreciable del poder de las ciudades en algunos países. En ellas los ciudadanos llegaron a gozar de mayores libertades que los siervos,algunas ciudades en Italia y Alemania fueron centros comerciales,

(2) La base económica de la Edad Media quedó constituida en el sistema feudal y su expresión intelectual y administrativa era la iglesia.Dentro de ésta los frailes utilizaron la persuasión para impedir la propagación de la herejía;surgieron las obras filosóficas como las de San Alberto (1193-1280) y Sto.Tomás de Aquino (1227-1274) quienes mostraron interes en Aristóteles,el gran defensor del orden.Es difícil estimar la eficacia de esta persuasión, en comparación con los esfuerzos más brutales de las cruzadas y la inquisición,pero lo cierto es que las herejías fueron reprimidas durante tres siglos.

No obstante a pesar de los esfuerzos de los frailes en los últimos dos siglos de la Edad Media se produjo un definido debilitamiento de la iglesia. Por influencia de las ciudades y con el transcurso del tiempo se requirió de una base intelectual más amplia que la que ofrecía el mero rescate de la erudicción clásica. El clero se fue adiestrando para pensar y escribir. Esta necesidad fue satisfecha por las escuelas adscritas a ciertas catedrales,como la de Chartres y Reims.

Hacia el siglo XII se hizo indispensable ampliarlas transformándolas en universidades con series de cursos en que se enseñaban las siete artes liberales,la filosofía y, sobre todo,la teología. La primera y más famosa de éstas fue la Universidad de París cuyo reconocimiento tuvo lugar en 1160.

La idea de una universidad-studium generale- donde se pudiera hacer conjuntamente estudios de todas las materias no era enteramente nueva. En la antiguedad habían ya existido las escuelas de Atenas y el Museo de Alejandría. La enseñanza se hacía por medio de disertaciones y discusiones,los libros eran escasos.

---

(1) Historia Universal Contemporánea,Carlos Alvear,Edit.Jus México 1972.

(2) La Ciencia en la Historia,John D.Bernal,UNAM./Edit.Nueva Imagen,México 1979.

(3) Dentro de la ciencia en la Edad Media se puede mencionar a Jordanus Nemorarius (hacia 1237) en experimentos de mecánica en una explicación más bien simple de la teoría de la palanca, anticipó el principio de la igualdad del trabajo ejecutado por una máquina y del impulso que actua sobre ella, pero no pudo tener efecto alguno sobre la mecánica de su tiempo debido al estado de la técnica.

En la Edad Media, quienes pensaban de manera distinta a la teología, se veian perseguidos como herejes o se ignoraban .

Hubo gran movimiento mercantil y de artesanos agrupados estos últimos en gremios, movimientos que vinieron a coincidir con una estabilidad que permitió el desarrollo cultural.

A fines de la Edad Media se operaron grandes cambios en lo político, en lo económico, en lo religioso y en lo cultural.

---

(3) Historia de las matemáticas, K Ribnikov, Edit. Mir Moscu.

El Renacimiento

(1) Los historiadores llaman Edad Moderna al periodo comprendido de 1453 a 1789. Alrededor de los siglos XV y XVI existió el desarrollo cultural e ideológico en una serie de paises de Europa Occidental y Central; este desarrollo se conoce bajo el nombre de Renacimiento.

El Renacimiento surgió en Italia a fines de la Edad Media como un movimiento cultural que derivó en una revaloración de lo humano, un "nuevo nacimiento" de los grandes valores griegos y latinos. Se encontró en ellos inspiración,ejemplo y guía lo mismo en la producción literaria que en las elaboraciones de la arquitectura,de la escultura,de la pintura,de la filosofía y de las ciencias.

(2) Dentro de la ciencia en la época del Renacimiento se puede mencionar a Nicolás Copérnico quien nació en Polonia,en 1473, estudió astronomía en Bolonia, medicina en Padua y derecho en Ferrara,pasando la mayor parte de su vida como canónigo en Frauenburgo.Copérnico tuvo que ocuparse de los menesteres derivados de la guerra y la administración; su interés principal estuvo siempre en la astronomía, se esforzó por encontrar una imagen más racional de los cielos,misma que estableció en su forma final en su libro De Revolutionibus Orbiun Coelestium que fue impreso el mismo año de su muerte,en 1543.

Copérnico postuló un sistema de esferas que giraban alrededor del sol, y no de la Tierra, introduciendo la rotación de nuestro planeta y demostrando detalladamente cómo este sistema podía explicar todas las observaciones astronómicas.

Copérnico mantuvo un espíritu de innovación,lo que indicó un rompimiento con la Edad Media.

Kepler, astrónomo alemán (1571-1630), dentro de la ciencia trató de encontrar el mejor modo de representar los movimientos planetarios mediante una sola curva.

Kepler encontro que la única explicación del movimiento observado del planeta Marte era la que de su órbita es una elipse en la cual el sol ocupa uno de sus focos.

La hipótesis de las órbitas elípticas, y las otras dos leyes con las cuales explicó Kepler la velocidad de los planetas al describir sus trayectorias, no solamente destruyeron la principal objeción astronómica a la hipótesis de Copérnico sino que también terminaron con la concepción Pitagórico-Platónica sobre la necesidad de que los cielos tuvieran únicamente movimientos perfectos, es decir, circulares, que incluso Copérnico había mantenido.

El telescopio llego a ser el mayor instrumento científico de la época. La noticia de su invención llegó a oídos del profesor de física, Galileo Galilei (1564-1642) el cual se decidió a construir uno y con el cual observó el cielo encontrando que la Luna en vez de ser una esfera perfecta, está cubierta por mares y montañas.

Galileo logró una descripción matemática del movimiento de los cuerpos que expuso en sus "Diálogos acerca de dos nuevas ciencias", impugno los conceptos aceptados sometiéndolos a prueba por medio del nuevo método el método experimental; utilizó el péndulo y el plano inclinado para efectuar mediciones precisas de la caída de los cuerpos.

Al hacer esto suministró el primer ejemplo claro de los métodos de la física que ha[illegible]an de dar lugar a un enorme desarrollo en los siglos sigu[illegible]ntes.

En el Renacimiento surgió como parte esencial el Humanismo o estudio de las letras griegas y romanas inspiradoras de las obras nuevas y por este medio fue apareciendo también un nuevo estilo de vida en el que el hombre fue objeto de mayor atención y exaltación. Se estudiaron los originales griegos de Platón,Aristóteles,Demócrito y Arquímides.

El movimiento humanístico se inicio realmente en Italia a principios del siglo XIV con el poeta Petrarca y el escritor Bocaccio.

Hubo hombres de valía en los campos diversos de la cultura y el arte;no faltaron protectores o"mecenas", lo mismo entre eclesiásticos que entre seglares,que otorgaran su favor a quienes tenían algo que decir o expresar en estas materias.

En su tiempo no hubo interferencia del mecenas con las ideas del artista respecto al tema;el mecenas proporcionaba el proyecto y el artista seguia su propia inspiración. En este clima de libertad floreció un gran arte y surgieron grandes personalidades artísticas,especialmente porque gracias a la filosofía de la época el artista se sentia resuelto y obligado a alcanzar altos niveles de calidad.

(3) Uno de los comerciantes más famosos en Florencia en el Renacimiento fue Cosimo de Medici; hijo de un pequeño comerciante que creó un negocio independiente y alcanzó la posición más alta en Florencia. El largo periodo de paz que disfrutó Florencia bajo la dirección oculta pero omnipresente de Cosimo había incrementado la riqueza de la ciudad y la fortuna personal. El éxito de la banca y las poderosas relaciones que se establecieron con los papas,príncipes y reyes,convirtieron a la siguiente generación de comerciantes Medici en señores.

Cosimo murió en 1464, Piero su hijo se lanzo a la caza de manuscritos y creó la famosa biblioteca y colección Medici. Piero murió en 1469 y le sucedió su hijo Lorenzo (1449-1492) de Medici llamado "El Magnifico". Fue modelo de mecenas y caballero renacentista,contribuyó al engrandecimiento de Florencia,fue excelente prosista y original poeta,protector incondicional de las letras y las artes,colaboró para hacer de la lengua toscana el idioma nacional de Italia. Fue un personaje clave en el Renacimiento que runió en su corte a artistas de la talla de Botticelli,Miguel Angel Buonarroti,creando las obras maestras que distinguen a este periodo de la historia.

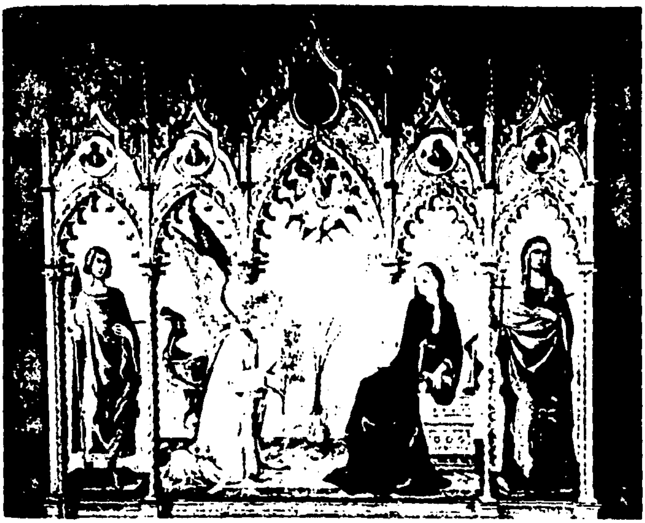
Lorenzo El Magnifico dedicó su vida al cultivo y protección de las artes,como la expreción más profunda y duradera del hombre.

En ese regreso a la antiguedad la misión no sólo era la imitación del arte antiguo o de la naturaleza de forma directa,se pretendía con la ayuda de la enseñanza del arte antiguo y de métodos nuevos crear, una representación que reproduciría la realidad desde el punto de vista del artista.

(1) Historia Universal Contemporánea,Carlos Alvear Acevedo, Edit.Jus, México,1972
(2) La Ciencia en la Historia,John D.Bernal,UNAM/Edit.Nueva Imagen, Mexico,1979.
(3) Introducción a la Historia del Arte,El Renacimiento, Rosa Maria Letts,Edit. Gustavo Gili,S.A. Barcelona,1985.

La pintura en la Edad Media

Los pintores medievales,que buscaban ante todo representar y embellecer los temas centrales del drama cristiano,se con - formaron con expresarse en términos simbólicos. Representaban a la gente y a los objetos de una forma enteramente estilizada generalmente sobre fondo dorado como si subrayaran que el tema del cuadro no tenía conexión con el mundo real. Un ejemplo de este estilo,que los críticos condideran como lo mejor de la pintura medieval, es la "Anunciación" de Simone Martini.

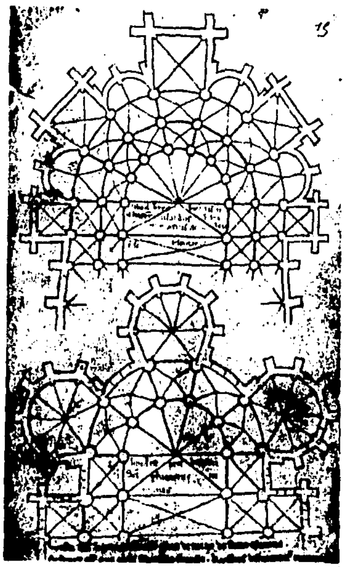


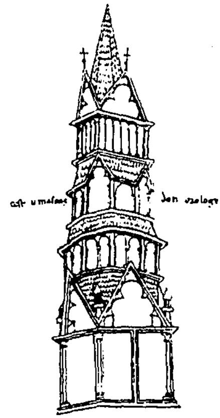
Posteriormente los pintores se interesan cada vez más por la realidad física y la reproducción precisa del aspecto de las cosas. Como consecuencia la perspectiva adquirió importancia fundamental para los artistas.

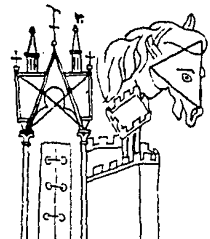
Dentro de la Edad Media en los siglos XII y XIII en la pintura y en la arquitectura surgió el estilo gótico que se caracterizó por tener figuras muy elevadas verticales, ojivales ternarias. Este estilo se integró además a la escultura, vidrieria,pintura mural.

El álbum de Villard de Honnecourt de 1240 en Francia presenta figuras humanas y de animales teniendo como base principal la figura geometrica en sus dibujos.

Villard de Honnecourt,en su álbum,deja el resumen dibujado de sus experiencias como arquitecto,trazados geométricos para ordenar las figuras,como él dice "una manera para facilitar el trabajo obrero", máquinas de levantamiento,planos y elevaciones. De sus apuntes textualmente se encuentra escrito: "Aquí comienza el arte de los elementos del dibujo, tal como los enseña la disciplina de la geometría, explicados para hacer fácil el trabajo".







Los países más representativos de la pintura en la Edad Media y que registran obras de mayor antiguedad se encuentran en Francia,Inglaterra,Noruega,Italia,España,Portugal, y Alemania.

En Francia la pintura en miniatura se aprecia en el manuscrito que ilustra pasajes de la Biblia,que lleva por titulo Blanca de Castilla en 1230; se encuentra en París en la Biblioteca del Arsenal.

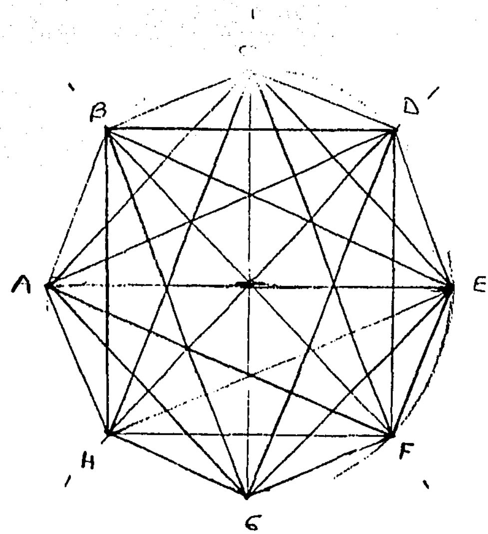
En estos hay figuras de astrónomos,fueron hechas sobre líneas internas de un hexágono inscrito en una circunferencia -- cuyo diámetro esta determinado por la altura del rectángulo, la mitad de la altura del rectángulo es el radio de la circunferencia,para el hexágono se tiene $360/6 = 60^{\circ}$.

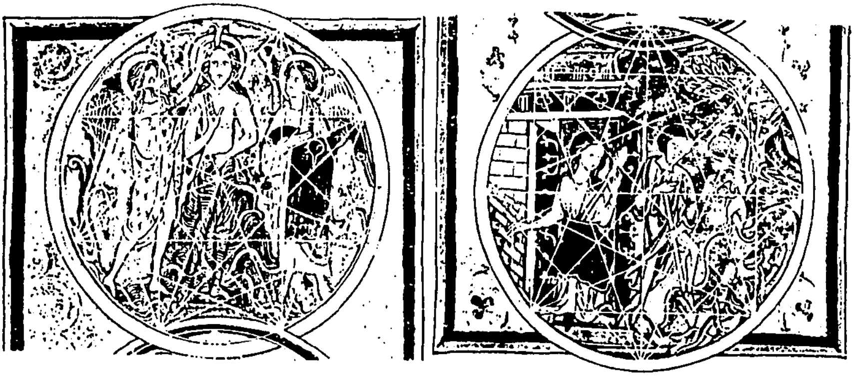
Se trazaron líneas de F a H, de F a K, de G a I y de G a J, se dividio el lado G H del hexágono y por la mitad se prolonga una línea hasta dividir F J, el lado I F del hexágono se divide por la mitad se prolonga una línea hasta dividir el lado G K del hexágono,resultando triángulos y cuadriláteros.

Justamente en la intersección de las líneas de la altura y las líneas F H y G I queda colocada una mano que sostiene un astrolabio,adentro de los triángulos quedan las caras de los astrónomos,libros,manos y ropas,hay dos cuadriláteros donde quedan adentro dos árboles.

Este dibujo se baso en la geometría plana en la construcción de un hexágono y en la intersección de líneas.


A
B
G
F
D

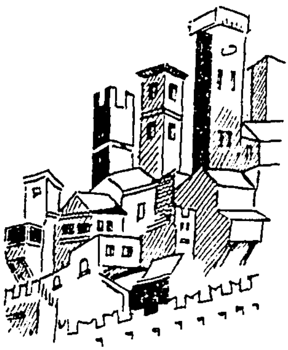




Se utilizaron octágonos y sobre las líneas internas de estos se realizaron dibujos y pinturas.
En esta forma en la Edad Media se utilizaba el compás,la construcción de hexágonos,cuadriláteros,triángulos.

Alrededor del año 1300 en Italia los trabajos de pintura que se realizaban eran de influencia religiosa cristiana.

Un pintor representativo de la Edad Media fue Giotto Di Bondone (1266-1337). En Roma pinta figuras de profetas en la iglesia de Santa María. También se dirige a Asís, donde decora la nave central de la Basílica; sus pinturas ilustran hechos de la vida de San Francisco.

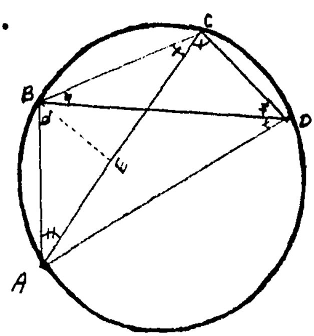


Sus pinturas no presentan mucha profundidad; representan figuras humanas al frente, mediante unos pequeños cubos figuran casas, balcones, portales y ventanas. También aparecen peldaños y rocas. Se observa que las líneas de los cubos o las líneas oblicuas no tienen convergencia hacia ningun punto.

Sus pinturas presentan aspectos planos y la falta de perspectiva.

Las matemáticas en la Edad Media

En la Edad Media ya se conocian los elementos de Euclides y los matemáticos europeos comenzaron a conocer el álgebra a principios del siglo XII. La fuente de sus conocimientos sobre el álgebra fue la obra de Al Khuwarizmi, el cual vivió en la primera mitad del siglo IX. Se estudió la solución de las ecuaciones de primer y segundo grado y las ecuaciones cúbicas.
(1)A estas últimas conducían diferentes problemas: a) la divición de la esfera por un plano; b) la trisección del ángulo; c) la búsqueda del lado de un polígono regular de 7 lados.
Uno de los problemas de óptica: encontrar en una circunferencia dada un punto tal que, el rayo indidente de un punto dado A se refleja en otro punto dado B,conducia a una ecuación de cuarto grado. Además se introdujo la trigonometría, se estudio a (2)
Ptolomeo del siglo II se intereso en la geometría y astronomía en esta última su obra máxima es la Sintaxis matemática en 13 libros, más conocida como Almagesto en este escribe un teorema de cuadriláteros .
Teorema de Ptolomeo Sea A,B,C,D un cuadrilátero inscriptible en una circunferencia entonces $AC \cdot DB = AB \cdot DC + BC \cdot AD$
El producto de las diagonales es igual a la suma del producto de lados no adyacentes.



(1) Ribnikov, Historia de Matemáticas,Edit. Mir.
(2) J. Rey P. Historia de las Matemátiwas, Edit. Espasa Calpe.

Demostración.

Sea E en $\overline{AC}$ $\ni$ $\measuredangle AEB = \measuredangle BCD$

comparando $\triangle BCA$ y $\triangle BCD \Rightarrow \measuredangle BAC = \measuredangle BDC$

como la suma de los ángulos de un $\triangle$ es 2 rectos (θ 180°) $\Rightarrow \measuredangle EBA = \measuredangle CBD$

$\Rightarrow \triangle AEB \cong \triangle BDC$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow AE \cdot DB = AB \cdot DC \quad (1)$$

Por otro lado comparando

$\triangle BAC$ y $\triangle BAD \Rightarrow \measuredangle BCA = \measuredangle BDA$

como $\measuredangle ABE = \measuredangle DBC$

$\Rightarrow \measuredangle ABD = \measuredangle ABE + \measuredangle EBD = \measuredangle DBC + \measuredangle EBD$

$= \measuredangle EBC$

Como la suma de los ángulos es 2 rectos (θ = 180°)

$\Rightarrow \measuredangle BEC = \measuredangle BAD$

$\Rightarrow \triangle BEC \cong \triangle BAD$

$$\Rightarrow \frac{EC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow EC \cdot BD = BC \cdot AD$$

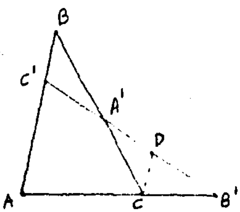
sumando con (1)

$$AE \cdot DB + EC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$$

$$\Rightarrow AC \cdot DB = AB \cdot DC + BC \cdot AD$$

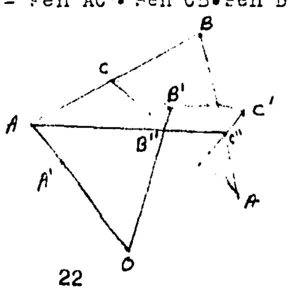
En la Edad Media se estudio a Menelao de Alejandría del siglo I, astrónomo y geómetra escribió Esférica en tres libros en este trabajo se observa el desarrollo griego de la trigo - nometría, se intereso en los triángulos planos y esféricos.

(2) El teorema de Menelao expresa que si en un triángulo ABC una transversal corta sus lados en los puntos A', B', C', el producto de la terna de segmentos que no tienen extremos comunes es igual al producto de la otra terna de segmentos en esas condiciones . Basta considerar por ejemplo $CD \parallel AB$, y de las parejas de triángulos semejantes se deduce: $AC':CD=AB':B'C$; $BC':CD = BA':A'C$, que por división resulta : $AC'\cdot CB'\cdot BA' = AB'\cdot BC'\cdot CA'$.



Sí en cambio, los triángulos son esféricos y se consideran los planos del triángulo ABC y el del círculo máximo A'B'C', esos dos planos se cortarán en la recta A''B''C'' se considera como transversal del triángulo plano ABC da, según el teorema plano: $AB''\cdot BC''\cdot CA'' = AC''\cdot CB''\cdot BA''$, que puede escribirse $AB'' : CB'' = (AC'' : BC'')\ (BA'' : CA'')$ se hacen sustituciones trigonomé - tricas por la razón de los senos de los arcos homólogos $\operatorname{sen} AB' : \operatorname{sen} CB' = (\operatorname{sen} AC' : \operatorname{sen} BC')\ (\operatorname{sen} BA' : \operatorname{sen} CA')$, de donde el teorema de Menelao para los triángulos esféricos es

$\operatorname{sen} AB'\cdot \operatorname{sen} BC'\cdot \operatorname{sen} CA' = \operatorname{sen} AC'\cdot \operatorname{sen} CB'\cdot \operatorname{sen} BA'$.



Se encontro un sistema de trigonometría en la obra de Nasireddin (1201-1274) "Tratado sobre el cuadrilátero completo", donde 1) Se expone la teoría de las figuras constituídas por cuatro rectas que se intersecan de dos en dos, 2) Se agrupan los métodos de resolución de triángulos planos y esféricos, 3) Se resuelve el problema de la determinación de los lados de un triángulo esférico por sus tres ángulos.

Dentro del desarrollo de las matemáticas en Europa estuvo la creación de los centros de ensañanza. Uno de los primeros cdntros fue organizado en la ciudad de Reims (Francia) por -- Geberto (940-1003) quien más tarde fue papa romano bajo el nombre de Silvestre II. En la escuela de Geberto, además de otras ciencias, enseñaban cálculo con el uso de la pizarra de calcular, el ábaco, perfeccionado por el cambio de fichas en blanco, cada una de las cuales tenía el valor de la unidad, por fichas con cifras escritas sobre ellas. Entre los partidarios de las diversas tradiciones del cálculo había dos partidos enemigos: los abaquistas y los algorítmicos. Los primeros en lo fundamental se distinguían por la exigencia del uso del ábaco y la numeración duodecimal romana. Los algorítmicos utilizaban las notaciones escritas de las cifras hindúes, el cá--lculo lo realizaban en papel. En las discusiones se formarón los sistemas de numeración y los métodos de cálculo aritmético, cada vez más próximos a los sistemas y procedimientos habituales a nosotros.

En los siglos XII-XIII, fueron surgiendo en Europa las primeras universidades, que fueron las italianas en Boloña, Salerno y otras ciudades. Tras estas fueron abiertas universidades en Oxford y París (1167), Cambridge(1209), Nápoles (1224), Praga (1347) y Viena(1367). Las matemáticas formaban parte de las

---

(1) Historia de las Matemáticas, K.Ribnikov, Edit.Mir Moscu.1987.

(2) Historia de las Matemáticas J.Rey Pastor, Edit.Calpe, Argentina 1971.

siete artes libres;se estudiaban en la facultad de artes. Todo el ciclo de estas artes se dividía en dos períodos: El primero lo componía el trivium: gramática,retórica,o sea el arte de expresar oralmente las ideas y dialéctica o habilidad de llevar a cabo las discuciones. El segundo período, el cuadrivium,incluía la aritmética,geometría,astronomía y música.

Los conocimientos matemáticos no se perfeccionaban en los centros de enseñanza europeos. Ellos eran introducidos desde el exterior; en la mayor parte los conocimientos científicos se adquirían por la vía de la traducción de las obras del árabe al latín. Por esta vía los europeos conocieron los "Elementos" de Euclides y el "Almagesto" de Ptolomeo.

Las matemáticas en el siglo XIII tuvieron relación con los factores: la lucha contra la escolástica y la teología,comenzada por Roger Bacon (1214-1294),y los trabajos matemáticos de Leonardo de Pisa alrededor del año 1200.

El primero de ellos en su aguda crítica se opuso a los dogmas basados en la fé,tomando la experiencia como única fuente de conocimientos científicos. Los méritos de Leonardo en las matemáticas fueron de otro género. El recibió una buena formación matemática en Argelia; alrededor del año 1202 escribió el "Libro sobre el ábaco". Este contiene 15 partes; en las siete primeras están expuestas el cálculo de números enteros segun el sistema posicional y operaciones con fracciones comunes. Las partes ocho al once contienen aplicaciones y cálculos comerciales: regla de tres simple y compuesta,división proporcional y problemas sobre la determinación de la calidad de las monedas. La búsqueda de soluciones de números enteros de ecuaciones indeterminadas de primer grado,adición de progresiones arítmeticas y de los cuadrados de los números naturales constituyen las partes doce y trece. En la parte catorce tiene el calculo de raíces cuadradas y cúbicas,operaciones con binomios, esto es,expresiones de la forma $a \pm \sqrt{b}$.

Culmina el "Libro sobre el ábaco" con la parte quince que contiene una breve exposición del álgebra,problemas sobre las fracciones numéricas continuas y problemas geométricos que se reducen a la aplicación del Teorema de Pitágoras.

Otra obra de Leonardo,"Geometría Práctica",escrita alrede - dor del año 1220,está dedicada a la medida de las áreas de los polígonos y el volumen de los cuerpos,incluso del volumen de la esfera. Las demostraciones de los teoremas están toma - dos de los trabajos de Euclides y Arquímides;se encuentran problemas que evidencian el conocimiento de Leonardo de Pisa en los elementos de trigonometría.

Se conoce otra obra más de Leonardo sobre la teoría de los números. En ella se trata sobre las propiedades de los núme - ros, sumas de la forma $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} n^2$, $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$ y la búsqueda de soluciones racionales de las ecuaciones. $y^2 = x^2 + a$ $z^2 = x^2 - a$

El profesor de la Universidad de París Nicole Oresme(1328-1382) generalizó el concepto de potencia introduciendo los exponentes fraccionarios,las reglas de realización de las ope - raciones con ellos y una simbólica especial.

por ejemplo: $\frac{\boxed{1 \cdot p}}{\boxed{2 \cdot 27}} = 27^{1/2}$ $\frac{\boxed{1 \cdot p}}{\boxed{3 \cdot 3}} = 3^{1/3}$ $\frac{\boxed{2 \cdot p}}{\boxed{3 \cdot 8}} = 8^{2/3}$

A propósito,Oresme introduce el largo y el ancho de un rectángulo plano y utiliza las coordenadas rectangulares introducidas para la representación gráfica de la intensidad de los fenómenos físicos en dependencia del tiempo.

En la Edad Media las matemáticas empezaban a desarrollarse, para ello tomaron en cuenta el trabajo de los árabes y los Elementos de Euclides.Además se abrieron centros de enseñanza y Universidades,las matemáticas se ampliaron con trajos de matemáticos como Leonardo de Pisa y Ofesme.

Problemas que dieron lugar a ecuaciones de primero y segundo grado

a) La división de la esfera por un plano

Sea $ax + by + cz + d = 0$ un plano

con vector normal (a, b, c)

Sea $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

una esfera

b) Haciendo el cambio de coordenadas

(Traslacion al centro de la esfera)

$x_1 = x - x_0 \quad . \quad y_1 = y - y_0 \quad . \quad z_1 = z - z_0$

obtenemos

$a x_1 + b y_1 + c z_1 + d_1 = 0$

con, $d_1 = a x_0 + b y_0 + c z_0 + d$

y $(x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2 = r^2$

c) Haciendo el cambio de coordenadas

(rotación con el eje de z fijo)

$x_1 = x_2 \cos\theta - y_2 \operatorname{sen}\theta$

$y_1 = x_2 \operatorname{sen}\theta + y_2 \cos\theta$

$z_1 = z_2$

con $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

θ = angulo con respecto al plano x, y

obtenemos para el plano

$a(x_2 \cos\theta - y_2 \operatorname{sen}\theta) + b(x_2 \operatorname{sen}\theta + y_2 \cos\theta) + c z_2 + d_1 = 0$

$x_2 (\underbrace{a \cos\theta + b \operatorname{sen}\theta}_{\sqrt{a^2+b^2}}) + y_2 (\underbrace{-a \operatorname{sen}\theta + b \operatorname{sen}\theta}_{0}) + c z_2 + d_1 = 0$

$$a_2 X_2 + c_2 Z_2 + d_2 = 0 \qquad \text{con} \quad a_2 = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$c_2 = c$$

$$d_2 = d_1$$

θ = ángulo con respecto al eje X

y para la esfera

$$(X_2 \cos\theta - Y_2 \operatorname{Sen}\theta)^2 + (X_2 \operatorname{sen}\theta + Y_2 \cos\theta)^2 + (Z_2)^2 = r^2$$

$$X_2^2 \cos^2\theta - 2X_2Y_2 \cos\theta \operatorname{Sen}\theta + Y_2^2 \operatorname{sen}^2\theta + X_2^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2X_2Y_2$$

$$\operatorname{Sen}\theta \cos\theta + Y_2^2 \cos^2\theta + Z_2^2 = r^2$$

$$X_2^2 \underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta)}_{1} + Y_2^2 \underbrace{(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} + Z_2^2 = r^2$$

$$X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = r^2$$

d) Haciendo el cambio de coordenadas (rotación con el eje y fijo)

$$X_2 = X_3 \cos\theta - Z_3 \operatorname{Sen}\theta \qquad \qquad \cos\theta = a_2$$

$$Y_2 = Y_3 \qquad \text{con} \qquad \operatorname{Sen}\theta = c_2$$

$$Z_2 = X_3 \operatorname{sen}\theta + Z_3 \cos\theta$$

obtenemos para el plano

$$a_2(X_3 \cos\theta - Z_3 \operatorname{Sen}\theta) + c_2(X_3 \operatorname{Sen}\theta + Z_3 \cos\theta) + d_2 = 0$$

$$X_3 \underbrace{(a_2 \cos\theta + c_2 \operatorname{sen}\theta)}_{=1} + Y_3 \underbrace{(-a_2 \operatorname{Sen}\theta + c_2 \cos\theta)}_{=0} + d_2 = 0$$

$$X_3 + d_2 = 0$$

y la esfera (similarmente a en b)

$$X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2 = r^2$$

2) Así que nos reducimos al caso en que el plano es de la forma $x+d=0$

y la esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$

En cuyo caso la intersección es el círculo de radio r^2-d^2 en el plano $x=-d$

b) La Trisección del angulo

No se puede trisectar con regla y compas usando las reglas de la suma de senos y cocenos tenemos que.

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta)\\
&= \cos 2\theta(\cos\theta) - \operatorname{Sen} 2\theta(\operatorname{Sen}\theta)\\
&= (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)(\cos\theta) - (2\operatorname{Sen}\theta(\cos\theta))(\operatorname{Sen}\theta)\\
&= \cos^3\theta - \operatorname{Sen}^2\theta\cos\theta - 2\operatorname{Sen}^2\theta\cos\theta\\
&= \cos^3\theta - 3\operatorname{Sen}^2\cos\theta\\
&= \cos^3\theta - 3(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta\\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

$\cos 3\theta = \cos 60^\circ$

$= 1/2$ Esto nos lleva a la ecuación

$1/2 = 4x^3 - 3x$ Tomado del libro Herstein Algebra Moderna pag. 222

$1 = 8x^3 - 6x$

$0 = 8x^3 - 6x - 1$

Veamos que es ireducible

$8(x+2)^3 - 6(x+2) - 1 = 8(x^3+6x^2+12x+8) - 6(x+2) - 1$

$= 8x^3 + 48x^2 + 90x + 51$

$P = 3$

$3 \nmid 8$, $3/48$, $3/90$, $3/51$

$3^2 = 9 \nmid 51$

Tomando el criterio de Eisenstein $\therefore$ $8x^3+48x^2+90x+51$ es ireducible

$\therefore$ $8x^3 - 6x - 1$ es ireducible y de grado 3

$\therefore$ con regla y compas no se puede Trisectar un angulo de 60°

c) La busqueda del lado de un poligono regular de 7 lados.

No se puede construir un heptagono regular con regla y compás. $\alpha = 2\cos(2\pi/7)$ α satisface x^3+x^2-2x-1

x^3+x^2-2x-1 Tomado del Herstein Algebra Moderna pag 223

$$(x+2)^3+(x+2)^2-2(x+2)-1 = x^3+6x^2+12x+8+x^2+4x+4$$
$$-2x-4-1 = x^3+7x^2+14x+7$$
$$p = 7$$

$7\nmid 1$, $7|7$, $7|14$, $7|7$ y $7^2\nmid 7$

$\therefore$ Por Eisenstein
$x^3+7x^2+14x+7$ es irreducible

$\therefore$ x^3+x^2-2x-1 es irreducible

$\therefore$ $8x^3+4x^2-4x-1$ es irreducible

$\therefore$ No se puede construir un heptagono con regla y compás

. Uno de los problemas de optica:

Encontrar en una circunferencia dada un punto tal que el rayo incidente de un punto dado A se refleja en otro punto dado B conducia a una ecuacion de 4° grado

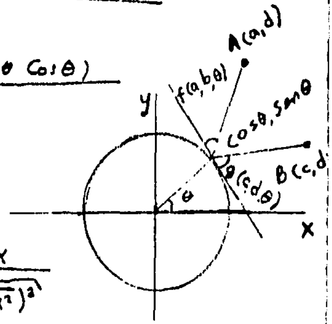
$$f(a,b,\theta) = \frac{\langle (a,b) - (\cos\theta, \operatorname{Sen}\theta), (-\operatorname{Sen}\theta, \cos\theta)\rangle}{\|(a,b) - (\cos\theta, \operatorname{Sen}\theta)\|}$$

$$g(c,d,\theta) = \frac{\langle (c,d) - (\cos\theta, \operatorname{Sen}\theta), (-\operatorname{Sen}\theta, \cos\theta)\rangle}{\|(c,d) - (\cos\theta, \operatorname{Sen}\theta)\|}$$

Igualando $f=g$

$$\Rightarrow \frac{-a\operatorname{Sen}\theta + b\cos\theta - (-\cos\theta\operatorname{Sen}\theta + \operatorname{Sen}\theta\cdot\cos\theta)}{\|(a-\cos\theta, b-\operatorname{Sen}\theta)\|}$$

$$= \frac{-c\operatorname{Sen}\theta + d\cos\theta - (-\cos\theta\operatorname{Sen}\theta + \operatorname{Sen}\theta\cos\theta)}{\|(c-\cos\theta, d-\operatorname{Sen}\theta)\|}$$



Sea $\cos\theta = \alpha$
$\operatorname{Sen}\theta = \sqrt{1-\alpha^2}$

$$\frac{-a\sqrt{1-\alpha^2} + b\alpha}{\sqrt{(a-\alpha)^2 + (b-\sqrt{1-\alpha^2})^2}} = \frac{-c\sqrt{1-\alpha^2} + d\alpha}{\sqrt{(c-\alpha)^2 + (d-\sqrt{1-\alpha^2})^2}}$$

$$(a^2(1-\alpha^2) - 2a\sqrt{1-\alpha^2}\; b\alpha + b^2\alpha^2)(c^2 - 2c\alpha + \cancel{\alpha^2} + d^2 - 2d\sqrt{1-\alpha^2} + 1 - \cancel{\alpha^2})$$

$$= (c^2(1-\alpha^2) - 2c\sqrt{1-\alpha^2}\, d\alpha + d^2\alpha^2)\;(a^2 - 2a\alpha + \alpha^2 + b^2 - 2b\sqrt{1-\alpha^2} + 1 - \alpha^2)$$

$$\Rightarrow (\alpha^2(b^2-a^2) + \alpha\sqrt{1-\alpha^2}(-2ab) + a^2)(\alpha(-2c) + \sqrt{1-\alpha^2}(-2d) + c^2 + d^2 + 1)$$

$$= (\alpha^2\, cd^2 - c^2) + \alpha\sqrt{1-\alpha^2}(-2cd) + c^2)(\alpha(-2a) + \sqrt{1-\alpha^2}(-2b) + a^2 + b^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \alpha^3(b^2-a^2)(-2c) + \alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}(b^2-a^2)(-2d) + \alpha^2(b^2-a^2)(c^2+d^2+1)$$

$$+ \alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}(4abc) + \alpha(1-\alpha^2)(4abd) + \alpha\sqrt{1-\alpha^2}(-2ab)(c^2+d^2+1)$$

$$+ \alpha(-2a^2c) + \sqrt{1-\alpha^2}(-2a^2d) + a^2(\cancel{c^2} + d^2 + 1)$$

$$-b^2c^2-b^2d^2-b^2+a^2c^2+a^2d^2+a^2$$
$$d^2b^2+d^2b^2+d^2-c^2a^2-c^2b^2-c^2$$
$$-2b^2c^2+2a^2d^2+a^2+d^2$$

$$=\alpha^3(d^2-c^2)(-2a)+\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}(d^2-c^2)(-2b)+\alpha^2(d^2-c^2)(a^2+b^2+1)$$
$$+\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}\,4acd+\alpha(1-\alpha^2)(4bcd)+\alpha\sqrt{1-\alpha^2}(-2cd)(a^2+b^2+1)$$
$$+\alpha(-2ac^2)+\sqrt{1-\alpha^2}(-2bc^2)+c^2(a^2+b^2+1)$$

$$\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}\left[(b^2-a^2)(-2d)+4abc+(d^2-c^2)(2b)-4acd\right]$$
$$\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\left[(-2ab)(c^2+d^2+1)+2cd(a^2+b^2+1)\right]+\sqrt{1-\alpha^2}\left[-2a^2d+2bc^2\right]$$

$\Longrightarrow$
$$\alpha^3\left[(d^2-c^2)(-2a)+(b^2-a^2)(2c)-4bcd+4abd\right]$$
$$+\alpha^2\left[-(b^2-a^2)(c^2+d^2+1)+(d^2-c^2)(a^2+b^2+1)\right]$$
$$+\alpha\left[4bcd-2ac^2-4abd+2a^2c\right]+c^2(b^2+1)-a^2(d^2+1)$$
$$\left(\sqrt{1-\alpha^2}\left[\alpha^2(b^2-a^2)(-2d)+4abc+(d^2-c^2)(2b-4acd)+\alpha\left((-2ab)(c^2+d^2+1)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2cd(a^2+b^2+1)\right)+(-2a^2d+2bc^2)\right]\right)^2$$

$$=\left(\alpha^3\left[(d^2-c^2)(-2a)+(b^2-a^2)(2c)-4bcd+4abd\right)\right.$$
$$+\alpha^2(a^2+d^2+2a^2d^2-2b^2c^2)$$
$$+\alpha(4bcd-2ac^2-4abd+2a^2c)$$
$$\left.+c^2(b^2+1)-a^2(d^2+1)\right)^2$$

$$\Longrightarrow\sqrt{1-\alpha^2}\left[\alpha^2a_2+\alpha a_1+a_0\right]$$

$$=\alpha^3a_3+\alpha^2b_2+\alpha b_1+b_0$$

con $a_2 = (b^2 - a^2)(-2d) + 4abc + (d^2 - 1^2)(2b) - 4acd$

$a_1 = (-2ab)(c^2 + d^2 + 1) + 2cd(a^2 + b^2 + 1)$

$a_0 = -2a^2 d + 2bc^2$

$b_3 = (d^2 - c^2)(-2a) + (b^2 - a^2)2c - 4bcd + 4abd$

$b_2 = a^2 + d^2 + 2a^2 d^2 - 2b^2 c^2$

$b_1 = 4bcd - 2ac^2 - 4abd + 2a^2 c$

$b_0 = c^2(b^2 + 1) - a^2(d^2 + 1)$

$$\Rightarrow (1-\alpha^2)\left[\alpha^4 a_2^2 + \alpha^2 a_1^2 + a_0^2 + 2\alpha^3 a_2 a_1 + 2\alpha^2 a_2 a_0 + 2\alpha a_1 a_0\right]$$

$$= \alpha^6 b_3^2 + \alpha^4 b_2^2 + \alpha^2 b_1^2 + b_0^2 + 2\alpha^5 b_3 b_2 + 2\alpha^4 b_3 b_1 + 2\alpha^3 b_3 b_0$$
$$+ 2\alpha^3 b_2 b_1 + 2\alpha^2 b_2 b_0 + 2\alpha b_1 b_0$$

$$\Rightarrow \alpha^6(-a_2^2) + \alpha^5(-2a_2 a_1) + \alpha^4(a_2^2 - a_1^2 - 2a_2 a_0)$$
$$+ \alpha^3(2a_2 a_1 - 2a_1 a_0) + \alpha^2(a_1^2 + 2a_2 a_0 - a_0^2) + \alpha(2a_1 a_0) + a_0^2$$
$$= \alpha^6(b_3^2) + \alpha^5(b_3 b_2) + \alpha^4(b_2^2 + 2b_3 b_1) + \alpha^3(2b_3 b_0 + 2b_2 b_1)$$
$$+ \alpha^2(b_1^2 + 2b_2 b_0) + \alpha(2b_1 b_0) + b_0^2$$

$$\Rightarrow \alpha^6(b_3^2 + a_2^2) + \alpha^5(b_3 b_2 + 2a_2 a_1) + \alpha^4(b_2^2 + 2b_3 b_1 - a_2^2 + a_1^2 - 2a_2 a_0)$$
$$+ \alpha^3(2b_3 b_0 + 2b_2 b_1 - 2a_2 a_1 + 2a_1 a_0) + \alpha^2(b_1^2 + 2b_2 b_0 - a_1^2 - 2a_2 a_0 + a_0^2)$$
$$+ \alpha(2b_1 b_0 - 2a_1 a_0) + b_0^2 - a_0^2 = 0$$

Es una ecuación de 6º grado.

====================================

La vida económica medieval se apoyó en la agricultura, la ganadería,la artesanía y el comercio.

Europa se subdividió en múltiples señorios gobernados por los señores feudales; éstos poseían poder sobre un territorio determinado y vivían rodeadas de las tierras en las que habitaban y trabajaban sus siervos.

El cristianismo en la Edad Media se extendió a todo el suelo europeo.En la filosofia surgierón obras de San Alberto y Sto. Tomás de Aquino.

Roger Bacon en la ciencia buscó su confirmación en la experiencia y la ciencia con fines de uso.

Al finalizar la Edad Media se operaron grandes cambios en lo político,en lo económico, en lo religioso y en lo cultural.

Ya en el Renacimiento alrededor de los siglos XV y XVI existió el desarrollo cultural e ideológico en una serie de países de Europa Occidental y Central este desarrollo se conoce bajo el nombre de Renacimiento.

Se puede mencionar a Nicolás Copérnico dentro de la ciencia.

En la astronomía postuló que un sistema de esferas giraban alrededor del sol;introduciendo la rotación de nuestro planeta.

Kepler trató de encontrar el mejor modo de representar los movimientos planetarios mediante una sola curva.

Galileo mediante un telescopio observó que la luna está cubierta por mares y montañas hizo descripciones matemáticas del movimiento de los cuerpos de la física.

En el Renacimiento también surgió como parte esencial el Humanismo en Italia a principios del siglo XIV con el poeta Petrarca y el escritor Bocaccio.

Uno de los mecenas más importantes fue Lorenzo de Medici llamado el"Magnifico" fue prosista original, poeta, protector incondicional de las letras y las artes.

En los siglos XII y XIII en la arquitectura surgió el estilo gótico .Hay pruebas en la Edad Media de la geometría en el dibujo. Un testimonio del año 1240 en Francia es el álbum de Villard de Honnecourt; sus dibujos muestran conexión entre arquitectura, geometría y figuración humana y animalística. En este periodo se utilizó la geometría para realizar dibujos y pinturas del siglo XII,posteriormente en el Renacimiento es cuando surgen trabajos de pintura con mayor profundidad apoyados de la geometría.

Dentro de las matemáticas en la Edad Media ya se conocían los Elementos de Euclides y comenzaron a conocer el álgebra a principios del siglo XII. La fuente principal de sus conocimientos sobre el álgebra fue la obra de Al-Khuwarizmi.

Se estudiaron soluciones de las ecuaciones de primero y segundo grado y las ecuaciones cúbicas,se introdujo la trigonometría,resultados de Ptolomeo y Menelao.

Leonardo de Pisa en el año 1200 escribió el "Libro sobre el ábaco" donde expone los números enteros según el sistema decimal,operaciones con fracciones comunes,cálculos comerciales,regla de tres simple y compuesta,exposiciones de álgebra y el Teorema de Pitágoras.

Las matemáticas se desarrollaron tomando en cuenta los trabajos de griegos y árabes.

CAPITULO II

LA PERSPECTIVA EN LA PINTURA

La pintura en el Renacimiento

(1) Alrededor del año 1453 finalizó la Edad Media y surgió el Renacimiento en Italia como movimiento cultural;esta influencia del Renacimiento se dejó sentir en los campos de la literatura,la filosofia,las ciencias,la arquitectura y la escultura.

Dentro de la pintura se desarrollaron cambios respecto a la pintura de la Edad Media. Hay admiración por la figura humana, principalmente buscaban la representación física,real,de las cosas. Sus trabajos expresaban la distancia,el volumen,el espacio y la perspectiva adquirió importancia fundamental .

(2) Uno de los pintores más representativos fue Piero della Francesca (1420-1492) quien nació en Umbría,estudió pintura en Florencia y a partir de 1470 se dedica a las matemáticas.

Una de sus obras más famosas es "Virgen con el Niño"; realizada en (1472-1474); es oleo sobre tabla. En este trabajo consigue dar a las figuras una posición de perspectiva casi perfecta,existiendo el equilibrio,la armonia de las proporciones,la serenidad de las imágenes y la arquitectura basada en la geometría.

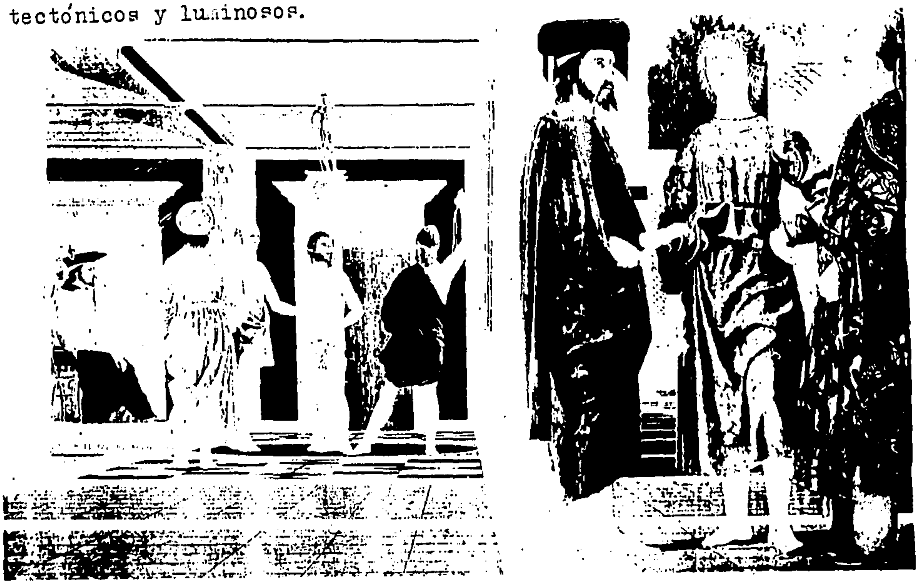
Otro de sus trabajos es la pintura "La Flagelación de Cristo" del Palacio Ducal de Urbino,fechado en 1459. La obra muestra dos niveles distintos de realidad en dos espacios diferentes gobernados por un orden arquitectónico interior y exterior de suma armonía de proporciones. En el ámbito cubierto se desarrolla la flagelación de Cristo ante Pilatos,mientras en el descubierto y en primer término aparecen tres personajes conversando.

(1) Historia Universal del Arte,tomo 5,Edit. Planeta.
(2) Introducción a la Historia del Arte, El Renacimiento,Rosa Ma. Letts, Edit. Gustavo Gili,Barcelona,1985.

"Virgen con el niño" autor Piero della Francesca en el año 1472.

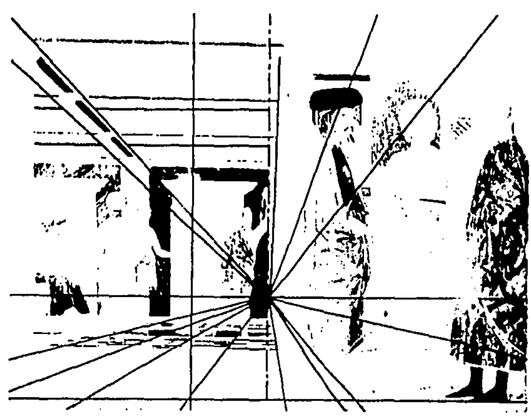
. Lo notable de la obra es la perfección con que Piero relaciona y a la vez distancía las dos escenas mediante la perspectiva y las proporciones.

Piero della Francesca valoró la geometría en el dibujo, y se sirvió de la perspectiva para perfeccionar los espacios arquitectónicos y luminosos.



"Flagelación"

esquema perspectivo de la misma.



(1) Entre los pintores del Renacimiento se encuentra Pietro Vanuci,llamado Perugino (1445-1523). Estableció su taller en la ciudad de Umbra. Trabajo con Piero della Francesca y se sintió atraído por el orden geométrico de Piero. Una de sus más famosas pinturas es el fresco "La entrega de las llaves" Perugino se revela ya poseedor de un arte que sintetiza las principales aportaciones renacentistas.El espacio en que transcurre la acción,con dos arcos de triunfo y un edificio de planta central como límite de horizonte arquitectónico,no es ni un espacio visual,ni un espacio teórico,sino una media de ambos.

(1) Historia Universal del Arte, Vol. 5 , Edit.Planeta.

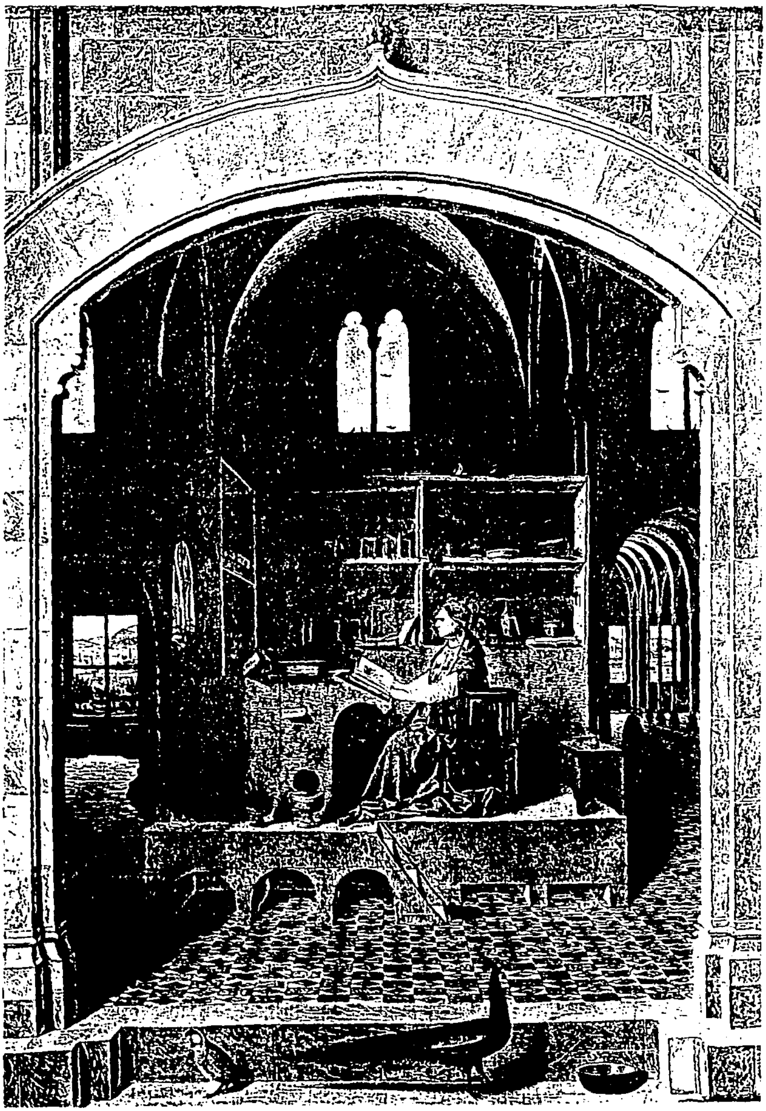
.(2) Andrea Mantegna (1431-1506) nacido en Venecia, presenta en sus trabajos más conocidos "La muerte de la Virgen", la profundidad del paisaje que conduce a la perspectiva de la pintura, las figuras de los apostoles, de la Virgen, el orden de las líneas del suelo, trazados tomando en cuenta la distancia, el volumen y el espacio.

(2) Introducción a la Historia del Arte, El Renacimiento Rosa Ma. Letts, Edit Gustavo Gili, Barcelona 1985.

Antonello da Messina (1430-1479) tiene un trabajo que se titula "San Geronimo en su estudio".

Esta obra es un manifiesto de la pintura renacentista.

En ella se observa por las ventanas un pisaje infinito que le da realidad al estudio del santo. Es un cubo geométrica - mente tallado para presentar la figura de aquel totalmente de perfil en aparente cotidianeidad. El santo aparece en su estudio como un humanista, pero no como un eremita penitente.



(1)Sandro Botticelli (1444-1510) en su famosa obra "La Primavera hecha en tabla en 1477, en esta describe el jardín de Venus, el jardín de la eterna primavera y de los cielos sin nubes, los naranjos rodean a la bella deidad.

La diosa radiante y luminosa,enmarcada por la verde sombra del mirto, de Venus, vigila el desfile de la Primavera. A la derecha, Céfiro, el viento de principios de marzo que calienta la tierra con sus primeros alientos, alarga sus brazos para apoderarse de la ninfa Cloris, sin adorno alguno y desnuda como la tierra en invierno,grita con la vana esperanza de escapar. Pero de sus labios entreabiertos sólo salen flores. Luego reaparece,transformada por la Primavera en la figura ricamente ataviada de Flora, como una figura de triunfo y opulencia. La propia diosa Venus dirige nuestra atención hacia su hijo Cupido, que está dispuesto a golpear con sus dardos a una de las Tres Gracias. Son las acompañantes de Venus, unidas ahora en la danza pero no por mucho tiempo.Las flechas de Cupido atravezarán sus corazones. Mercurio, el guardián armado del reino de Venus, aparta unas nubes impertinentes que podrían perturbar la serenidad del desfile de la Primavera.

Botticelli fue un pintor que se caracterizó por realizar elegantes, armoniosas figuras que parecen salir de las poesias de un asunto mitológico.

(1)-Int. a la Historia del Arte,El Renacimiento,Rosa Ma. Letts,Edit.Gili,Barcelona,1985.

Los temas principales en la pintura del Renacimiento fueron la figura humana,motivos religiosos cristianos,espacios arquitectónicos y paisajes. Se caracterizó además por expresar la realidad física, el volumen,la distancia,el espacio y el color.

Sus trabajos se apoyaron en la figura geométrica y en la perspectiva.

Los avances del arte italiano no quedaron estancados en los límites geográficos de la península itálica.

Posteriormente en Alemania,Alberto Durero (1471-1528) daría a conocer sus trabajos de pintura,grabado,geometría y perspectiva.

Inicio de la perspectiva en la pintura

(I) Los inicios de la perspectiva en la pintura se dieron con los trabajos de Piero della Francesca (1420-1492) y Leon -- Battista Alberti (1404-1472).

(II) Alberti fue arquitecto,humanista,erudito al servicio del papado rompe con las tradiciones medievales y las simples recopilaciones de recetas técnicas y artesanales; escribió libros de pintura,de escultura y arquitectura .

Como arquitecto en Mantua trazó la zona central y longitudinal de la Iglesia de San Andres (1), trazó fachadas de Iglesias como la de San Sebastian (2), y la de Santa Maria con -- naves o capillas laterales (3).

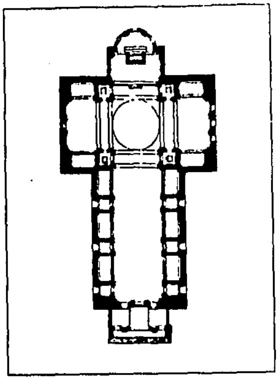
(I) Afirmaba Alberti en su libro de pintura "Yo deseo que el pintor sepa todo lo posible acerca de todas las artes liberales,pero deseo,sobre todo,que sea versado en geometría" .

Además el propio Alberti intuyó que no sólo la distancia con respecto al ojo del expectador hacía variar la dimensionalidad de las figuras,sino que el carácter de las mismas,su materialidad,su definición,su cromatismo,variaban según el aire y por tanto también la distancia que se interponía entre és y el espectador. Por ello con la lejanía,las figuras se desdibujaban y los colores pierden intensidad: "Yo creo-afirmaba Alberti en su libro de pintura- que la causa de esto se encuentra en el hecho de que los rayos,al pasar a través del aire -- denso,pierden algo de su masa de luz y de color.

De aquí se deriva la siguiente regla: cuanto mayor es la distancia,tanto menos intensa y sin luz aparecerá la superficie observada".

Posteriormente estos principios de la llamada perspectiva atmosférica o aérea, serían llevados a la práctica por Piero della Francesca.

(I) Historia Universal del Arte,Vol.5, Edit. Planeta
(II) El Arte del Renacimiento, Fernando Franco,Grupo Anaya, Edit. Española,1990.



1

2

3

(1) Alberti comparó la pintura con "una ventana transparente" a través de la cual contemplamos una parte del mundo visible.

Objetos de igual tamaño empiezan a disminuir en cuanto se alejan del espectador; las paredes, los suelos y techos que delimitan el interior o la base en la cual fueron dispuestos los elementos de un paisaje empiezan a alejarse hacia el fondo; y tales líneas que forman ángulos rectos en el plano pictórico evolucionarón en líneas de fuga, en perspectiva tendián a converger hacia un centro.

Este centro ya había tomado carácter de único "punto de fuga" en el cual las ortogonales convergián con precisión al -- menos en un plano libre.

Alrededor de 1425 se observó que las líneas horizontales de una construcción cúbica asentadas sesgadamente en el espacio parecían converger en dos puntos situados simétricamente en una horizontal. En esta forma no era aun posible determinar la sucesión correcta de transversales equidistantes.

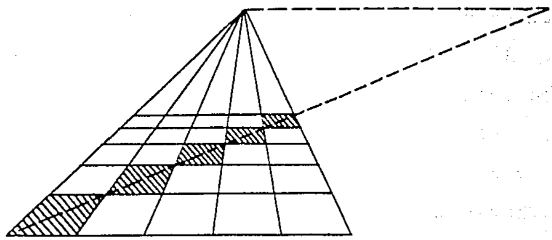
Alberti condena una práctica en 1435 por la que los espacios entre una transversal y la siguiente eran disminuidos mecáni-- camente y desde luego equivocadamente.

Posteriormente se descubrió que todas las ortogonales y no sólo las situadas en un plano tenían que converger en un punto de fuga que establecío así el "horizonte general de la pintura" y el problema de determinar la disminución gradual de transversales equidistantes fue resuelto por el recurso de trazar una línea oblicua a través de las ortogonales convergentes.

Se pensó que tal línea oblicua cortaría las ortogonales convergentes,para formar la diagonal común de una serie continua de pequeños cuadrados iguales,que determinarían la sucesión

(1)Durero como matemático, Erwin Panofsky, Cap. 2 , Sigma el mundo de las matematicas, Vol. 4 .

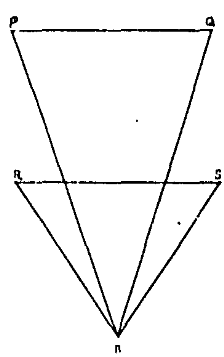
correcta de otras tantas transversales.



Fué también descubierto que esta diagonal cortaría el "horizonte en el mismo punto que las diagonales de las hileras adyacentes de pequeños cuadrados, constituyendo así "un punto de fuga lateral", que cuanto más agudo se haga el escorzo del sistema completo, más pequeña es la distancia entre este "punto de fuga lateral" y el "punto de fuga central" es decir el punto de convergencia de las "ortogonales", y que si las diagonales fueran dibujadas de izquierda a derecha, lo mismo que de derecha a izquierda, los dos "puntos de fuga laterales" serían equidistantes del "punto de fuga central".

Euclides en sus trabajos de Optica en el segundo, postulado dice que los rayos visuales forman un cono alrededor del contorno del objeto como base, y con el vértice del cono en el interior del ojo. El séptimo postulado dice que los objetos vistos por mayor cantidad de rayos son más claros. Veamos lo que significa. Se emplea este postulado para probar la proposición 2 que dice: entre los objetos situados a cierta distancia, los que se encuentran más cerca son más claros.

Euclides toma dos segmentos lineales iguales y paralelos PQ y RS y emplea el séptimo postulado. El ángulo RBS es mayor que el ángulo PBQ y por lo tanto contiene más rayos divergentes. Según el postulado 7 es lógico que RS parece más claro que PQ.



Euclides trato de representar las imagenes visuales mediante postulados y proposiciones en su trabajo de óptica.

Brunelleschi orfebre y arquitecto en 1420 propuso y concibió la idea de cortar la pirámide euclidea con un plano puesto entre el objeto y el ojo y de esta manera"proyectar"la imagen visual en esta superficie.Así una representación pictórica llego a ser definida como "una sección cruzada atraves de la pirámide o cono visual"

En la obra de Piero della Francesca"De Prospectiva Pingendi"describe construcciones que requieren dos dibujos preparatorios,a saber la elevación y el plano horizontal del sistema visual completo.En cada uno de éstos,la pirámide o cono visual se representa por medio de un triángulo que tenga su vértice en un punto representando el ojo, mientras que el plano de proyección se representa por una vertical que corta este triángulo . En el dibujo de elevación ,el objeto tiene que ser mostrado en diagrama vertical y en el de plano horizontal,en diagrama horizontal.

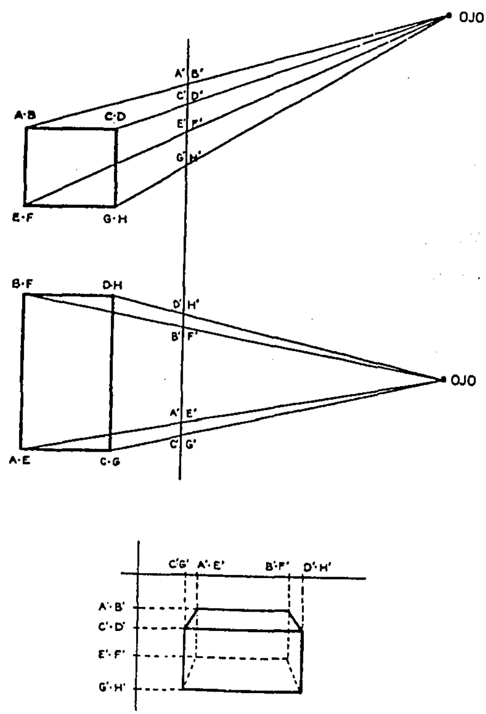
Cada diagrama es unido al punto que representa el ojo,y los puntos de intersección entre las líneas de unión y la vertical determinaran el orden de valores requerido a saber las cantidades verticales y transversales de la imagen en perspectiva. Finalmente pueden combinarse simplemente estos dos dibujos en un tercer dibujo.

Esta "construcción legitima" requiere dos diagramas del objeto uno horizontal y otro vertical presupone familiaridad con el método de proyección paralela,por el cual cualquier diagrama requerido, puede ser obtenido de otros dos con tal que se coloquen en planos formando entre sí ángulos rectos.

(1) Esta "costruzione legitima" se trato extensamente en los trabajos de Piero della Francesca. En la actualidad ni siquiera el pintor más escrupuloso compondría objetos individuales ni dejaría figuras solas desarrollando primero dos diagramas y proyectándolos después en el plano pictórico.

En la actualidad el estilo de dibujar y de pintar es diferente en cada pintor o dibujante este ha cambiado de acuerdo al tiempo.

Se consideró suficiente un sistema que podría ser desarrollado fácilmente un cuadrado escorzado, dividido en una cantidad de pequeños cuadrados, sobre bases empíricas.

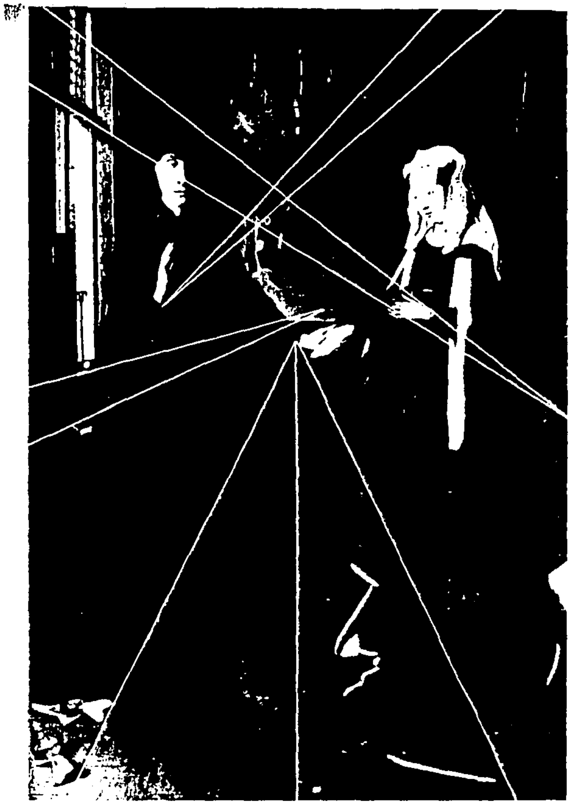


Construcción perspectiva sistemática de un cuerpo tridimensional (Construzione legitima")

(1) Durero como matemático, Erwin Panofsky, Cap.2. Sigma el mundo de las matemáticas, Vol. 4 .

Una definición importante y fundamental sobre perspectiva de Piero della Francesca y que el llamó "Perspectiva artificialis" es la siguiente:

"La perspectiva es una rama de la pintura que comprende cinco partes: la primera es el órgano de la vista, es decir el ojo; la segunda es la forma del objeto visto; la tercera es la distancia entre el ojo y el objeto; la cuarta son las líneas que se inician en la superficie del objeto y se dirigen al ojo; la quinta es el plano que está entre el ojo y el objeto donde quiera que uno intente colocar los objetos".



Jan Van Eyck inventor del óleo es uno de los primeros en realizar un retrato realista como es el cuadro Giovanni Arnolfini y su prometida; en esta pintura se encuentran cuatro puntos de fuga, fue realizada en 1434.

Los inicios de la perspectiva en la pintura se dieron con los trabajos de Piero della Francesca y Leon Battista Alberti

Alberti se intereso porque los pintores tuvieran conocimientos degeometría y además afirmaba que los rayos al pasar a através del aire denso pierden algo de su masa,de su luz y de color. Estos principios dieron lugar a la perspectiva atmos - férica o aérea. Comparo la pintura como "una ventana transparente através de la cual contemplamos una parte del mundo visible"observó que los objetos disminuían en cuanto se alejan del espectador las paredes,suelos techos,que delimitan el interior o la base en la cual fueron dispuestos los elementos de un paisaje empiezan alejarse hacia el fondo y tales líneas que forman ángulos rectos en el plano pictórico evolucionan en "líneas de fuga" en perspectiva que tendían a converger hacia un centro.

Las ideas de Euclides sobre la visión fueron tomadas en cuenta para los trabajos de perspectiva por Brunele[illegible] y Piero della Francesca este último llega a dar una importa[illegible]e definición de perspectiva.

En los trabajos de perspectiva para la pintura trataron de representar la realidad física y para esto se apoyaron en la perspectiva,la geometría y la óptica de Euclides.

Alberto Durero

Nació en Nuremberg Alemania en 1471,su padre lo puso de aprendiz de pintura por tres años con el pintor Michael Wohlgemut en Nuremberg.en el año de 1486. Después pasó cuatro años seguidos viajando por Europa trabajando con varios pintores,grabadores,tallistas e impresores.

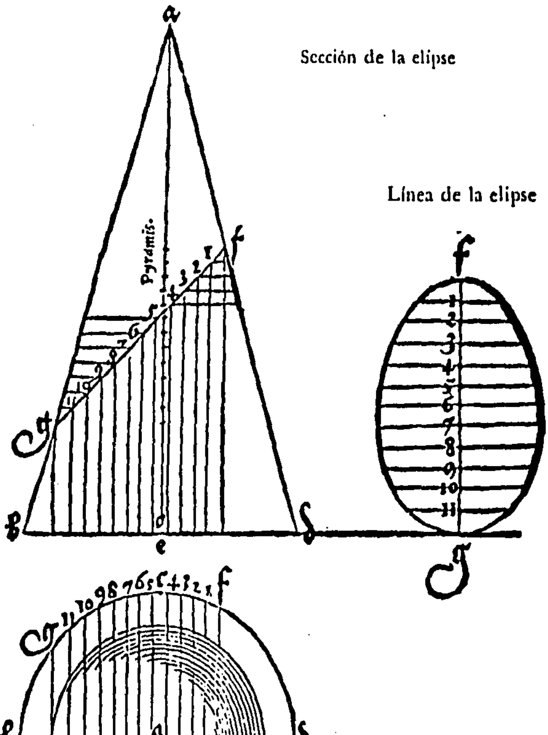
Regresa a trabajar a Nuremberg en 1494, hace visitas a Italia y a otros países europeos donde alcanzó gran fama por sus grabados en cobre y en madera retratos y retablos.

Escribió libros de geometría y perspectiva también un libro sobre proporciones humanas. Muere el 6 de abril de 1529.

Alberto Durero escribe las Instituciones Geométricas en 1535 este trabajo lo divide en 4 libros.

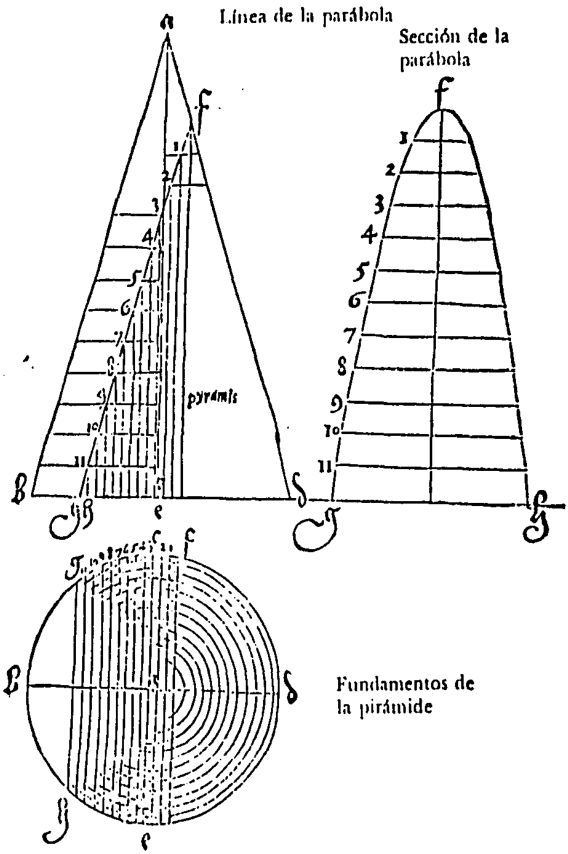
El Libro Primero de Las Líneas incluye en el punto nueve Tres secciones de la pirámide y trata sobre la elipse, la parábola, la hipérbola,no investiga sus propiedades matemáticas solo las construye mediante el método de la proyección paralela. (1) Representó el cono,cortado según el caso,en elevación lateral y en el plano horizontal y trasladó un número suficiente de puntos de la primera representación a la última. Entonces la hipérbola normal-producida por una paralela en sección transversal al eje del cono- puede ser interpretada directamente,cuando se desarrolla una elevación central de los otros dos diagramas,mientras que las parábolas y elipses prolongadas por secciones oblicuas y apareciendo por lo tanto en reducción en cualquier diagrama,excepto en la elevación lateral,deben ser obtenidas alargando proporcionalmente sus ejes principales.

Durero para la elipse traza primero el cono a,b,c,d,e. dentro de él desde el punto a se traza la perpendicular , después traza la linea oblicua f, g. dividiqesta sección en 11 puntos,debajo de la pirámide dibujo su base,con centro en a y su circunferencia b,c,d,e, traslada líneas de la recta f g hacia la circunferencia ,con las medidas de los arcos de la circunferencia construye la elipse.

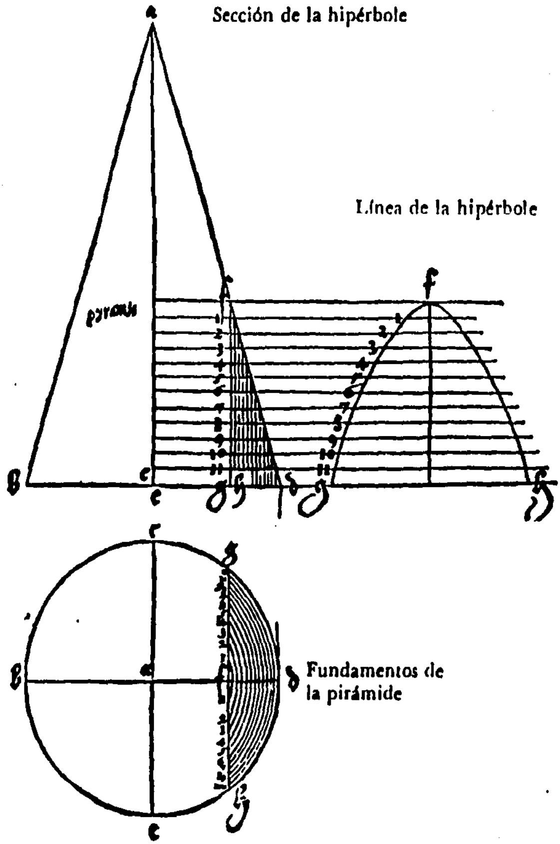


Durero para el trazo de la parábola utiliza el trazo de la pirámide abcd y en ella el eje a, corta la pirámide en una paralela al lado a b de la pirámide y llámese f, g, h, a este corte, divide en 12 espacios iguales, lleva líneas transversales por todos los puntos de la misma f, g.h, y llevó por los puntos, que están hacia el lado a d, unas líneas transversales, desde la línea levantada a hasta el mismo lado.

Debajo de la pirámide en una circunferencia se trasladan líneas, utiliza el compás para los arcos, con las transversales hace intersecciones con los arcos, en esta forma construye la parábola.

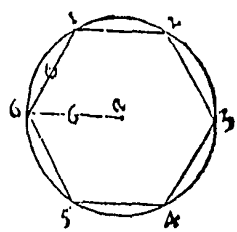


Durero mediante transversales, líneas, puntos, saca las secciones de la hipérbola.

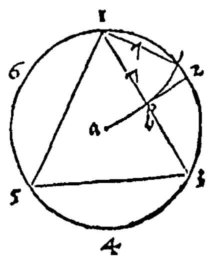


En el Libro Segundo de las Superficies pasa de las figuras unidimensionales a las bidimensionales recalcando especialmente la cuadratura del círculo y la construcción de aquellos polígonos regulares que no pueden derivarse del cuadrado y del triángulo equilátero como el pentágono ó el hexágono.

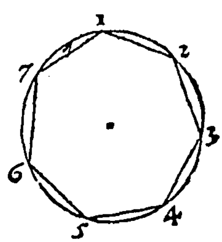
(3) Alberto Durero sobre la manera de dibujar superficies equiángulas escribe: Ahora mostraré de qué manera pueden dibujarse en una superficie plana las figuras equiángulares, como son las triángulares cuadrangulares, pentagonales y hexagonales. El hexágono en primer lugar dibuja el hexágono, el cual proporcionará el compás por si mismo con una sola abertura. toma pues el compás y pónlo con un pié en el centro a y con el otro de línea una circunferencia del tamaño que quieras, en seguida, sin mover el compás, mide la circunferencia, tendrás seis partes, anótalas con los números 1,2,3,etc. Hecho esto une los puntos 1 2, 2 3,etc. mediante el trazo de lineas rectas y resulta el hexágono. Y no podrás equivocarte, pues del centro a la circunferencia hay una sexta parte. Así mismo cada lado del hexágono entre dos puntos también es una sexta parte como lo puse aquí.



El triángulo Corresponde ahora que, mediante el hexágono. dibujemos un triángulo dentro de la circunferencia,de este modo. Toma la periferia anterior con sus seis puntos,de los cuales une 1 y 3 , 3 y 5, 5y1,mediante el trazo de líneas rectas,y resultará que el triángulo tocará a la circunferencia y será equiángulo y equilátero conforme se puede ver - aquí.

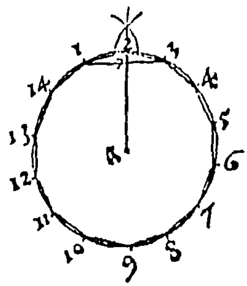


Ahora,con el susodicho trígono y su circunferencia,por la vía ordinaria que utilizamos por brevedad en las obras, dibujaré un heptágono así.Llevo una línea recta del centro a la nota 2 y se cortará el lado 1 3 del trígono por en medio,ahí escribo b; asi pues,la longitud 1b dara vuelta 7 veces como lo mostré en la figura precedente y también lo he dibujado aquí.



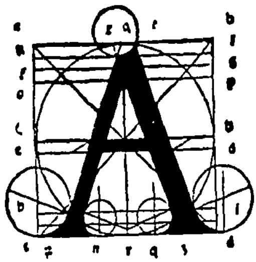
. El tetradecágono podemos facilmente deducir del heptágono ya descrito una figura de catorce lados y ángulos iguales de este modo. Toma el arco del círculo del heptágono entre 1 2 y divídelo en dos partes y con esta longitud mide la circunferencia y resultaran en ella 14 puntos, une estos con líneas rectas y tendras una figura de catorce lados y ángulos iguales, como aquí aparece evidentemente.

En este libro segundo sobre las superficies planas indica la manera de dibujar las superficies equiángulas.

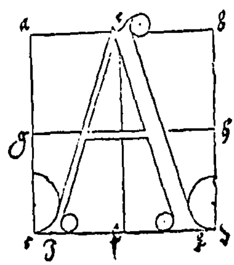


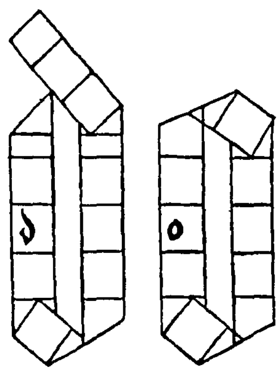
El Libro Tercero de los Cuerpos Sólidos es de caracter práctico pretende ilustrar la aplicación de la geometría a las tareas concretas de la arquitectura, la ingeniería la decoración y la tipografía, Durero era estudioso admirador de Vitrubio.

(2) Al final del libro tercero Durero hace la construcción geométrica de las letras romanas

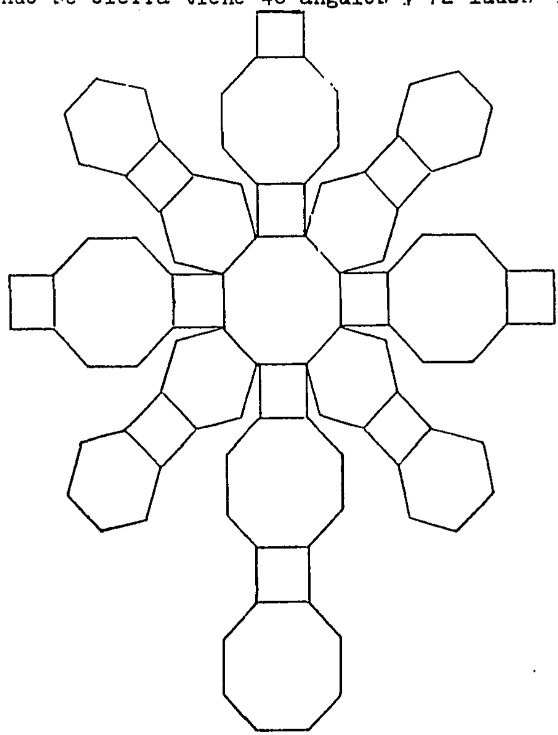


Durero además construye sus letras góticas con arreglo a un principio totalmente distinto.Prescinde de los arcos de la circunferencia, y en lugar de inscribir la letra en un cuadrado grande la construye a partir de cierto número de unidades geométricas pequeñas,tales como cuadrados,triángulos o trapezoides





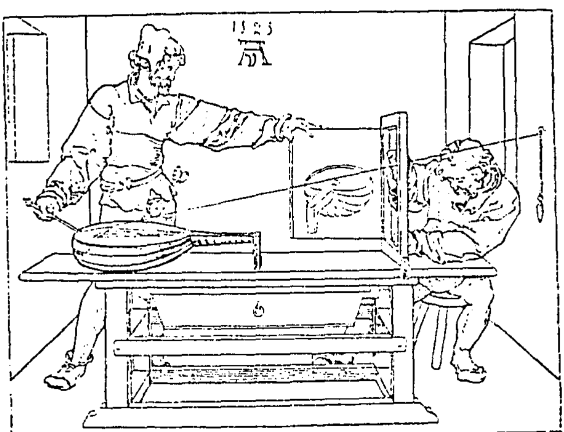
En el Libro Cuarto de los Cuerpos Sólidos.(Continuación)Representa a los sólidos desarrollándolos primero sobre el plano de tal manera que las facetas constituyan una"red"coherente que, recortada en papel y debidamente doblada por las uniones de facetas contiguas,forme un modelo real tridimensional del cuerpo en cuestión, asi sobre esta figura Durero escribe. Cuando está abierto tiene 6 superficies octángulas y 8 sexángulas y 12cuadrángulas;y cuando se cierra tiene 46 ángulos y 72 lados agudos.



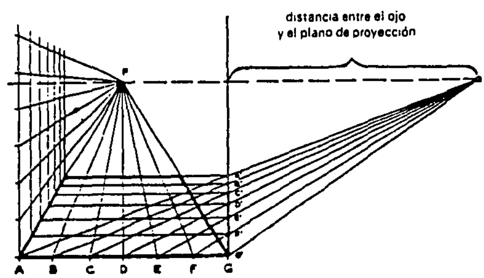
"Red" de Durero para el Cuboctahedron truncum.

Dentro de este Libro Cuarto Durero explica la manera de dibujar lo que se ve por un vidrio en el ojo del observador, se fija mediante un visor graduable y entre éste y el objeto se inserta ó bien una placa de vidrio, se puede obtener una imagen más o menos correcta simplemente copiando los contornos del modelo tal como estos aparecen sobre la placa de vidrio y trasladándolos despues a la tabla o dibujo mediante calca,

Durero en este libro cuarto también explica la técnica con la que cualquier cosa que se ve y que no está muy -- lejos de la vista ha de ser medida con tres hilos y así transferirlo a la pintura. Este instrumento elimina por completo el ojo humano: consiste en una aguja clavada en la pared y un trozo de cordel, pero el trozo de cordel tiene una clavija en un extremo y un peso en el otro; entre el agujero de la aguja y el objeto, se coloca un marco de madera en el cual cada punto puede ser determinado por dos hilos móviles formando ángulo recto al cruzarse. Cuando la clavija se pone en un cierto punto del objeto el lugar por donde pasa la cuerda a través del marco determina la situación de aquel punto en el cuadro futuro. Este punto se fija ajustando los dos hilos móviles y en seguida se registra sobre el papel colocado en el marco y repitiendo este procedimiento el objeto entero puede ser trasladado gradualmente a la hoja del dibujo.



Sobre la perspectiva en la pintura Durero conoce la perspectiva sistemática abreviada. En este método abreviado se divide la línea frontal del futuro cuadrado básico en un número arbitrario de partes iguales y se unen los puntos divisorios con el "punto de fuga" central P. Pero la secuencia de las transversales equidistantes se determinan sobre una base euclidiana es decir llevando el ya conocido alzado de perfil del cono o pirámide visual sobre el sistema de líneas de fuga levantamos una vertical- que representa el plano pictórico- en una de las esquinas frontales del futuro cuadrado básico y escogemos, sobre la horizontal determinada por el punto de fuga, un punto que represente el ojo . Si unimos este punto con los extremos y puntos divisorios de la linea frontal del futuro cuadrado básico, los puntos de intersección de las líneas de union con la vertical indicarán, sobre esta última, la secuencia correcta de transversales equidistantes



Construcción perspectiva sistemática abreviada.

Alberto Durero alemán estudió pintura grabados en madera, cobre, impresiones, escribió libros de geometría, perspectiva y proporciones humanas.

En el Libro Cuarto de sus Instituciones de Geometría explica mediante un cubo iluminado y su sombra proyectada la perspectiva de un cubo dibujado, prolongando líneas y concurriendo en puntos.

Dentro de la perspectiva en la pintura Durero dá a conocer la construcción perspectiva sistemática reducida que el llama "construcción abreviada."

Utiliza además instrumentos para asegurar exactitud aproximada por medio de recursos mecánicos y no matemáticos. Solamente construye dibuja cónicas, polígonos regulares pero no hay demostraciones matemáticas sobre ellas.

Ilustra la aplicación de la geometría en los trabajos de arquitectura, decoración columnas conmemorativas, hace la construcción de letras góticas, desarrolla en una superficie plana los cuerpos irregulares que recortandolos y uniéndolos forman modelos tridimensionales del sólido en cuestión.

Según Durero las Instituciones de Geometría fueron casí in--dispensables a los pintores a los artesanos que trabajaban el cobre, la madera, a los canteros, estatuarios y finalmente a todos los que componen en obras con la ayuda del compás, la escuadra, el nivel o en cualquier forma con la ayuda de alguna medida.

Durero escribe "que los pintores que no hayan percibido su error se debe a que no aprendieron geometría sin la cual nin--guno puede hacerse o ser artista perfecto y es el verdadero fundamento de todo el arte del dibujo".

Durero trato de relacionar la pintura, el dibujo basado en la geometría y perspectiva.

L E O N A R D O V I N C I

Leonardo nació el 15 de abril de 1452 en Anchiano, en las proximidades del pequeño pueblo de Vinci, cerca de Florencia. Su padre Piero, era un próspero notario de la ciudad, donde más tarde adquiriría una casa. El artista pasó gran parte de su infancia en la capital de la cultura europea y vivió en un ambiente de pasión por el arte, las ideas, el ingenio, la intriga, el lujo y la ciencia. Parte de sus trabajos los escribio en sus cuadernos que llegaron a ser muy conocidos después de su muerte. Sus anotaciones sirven para comprender los esfuerzos de su inteligencia extraordinaria por alcanzar el conocimiento. Incluyen bocetos, dibujos científicos detallados, observaciones escritas, diversas notas e incluso listas de vocabulario latino que se proponía memorizar. Entre los diversos temas encontramos maquinaria civil y militar de todas clases, diseños de ingeniería, apuntes de anatomía humana y animal, óptica, botánica, matemáticas, latín, tipos humanos desde lo ideal hasta lo grotesco y acontecimientos reales mezclados con visiones apocalípticas sobre incendios y diluvios. Las notas sobre pintura, lo bastante abundantes como para publicarse aparte como un tratado independiente, suponen, sin embargo, una parte muy pequeña en comparación con la totalidad de sus escritos. Esto tal vez esté relacionado con el hecho de que su producción artística fue relativamente limitada. Si insistimos en considerarlo en primer lugar como un artista podemos llegar a la conclusión de que si no produjo más fue a causa de su curiosidad insaciable. Muere el 23 de abril de 1519 en Milan.

Leonardo decía que entre los estudios sobre las causas y efectos naturales, la luz es lo que más deleita al espectador: y entre las caracteristicas más destacadas de las matemáticas lo que tiende sobre todo lo demás a elevar el espíritu del investigador es la certeza de sus demostraciones.

En consecuencia la perspectiva debe ser preferida a todas las demás pláticas y sistemas del saber humano.

En esta rama de la ciencia se explica el rayo de luz por medio de aquellos métodos de demostración que constituyen el esplendor no tanto de las matemáticas como de la física métodos que son agraciados con los frutos de ambas ciencias.

Leonardo divide la perspectiva en tres partes:
La primera división incluye la disminución del tamaño de los objetos opacos,la segunda trata sobre la disminución y pérdida de contorno de dichos objetos,la tercera trata sobre la disminución y perdida de color en grandes distancias.

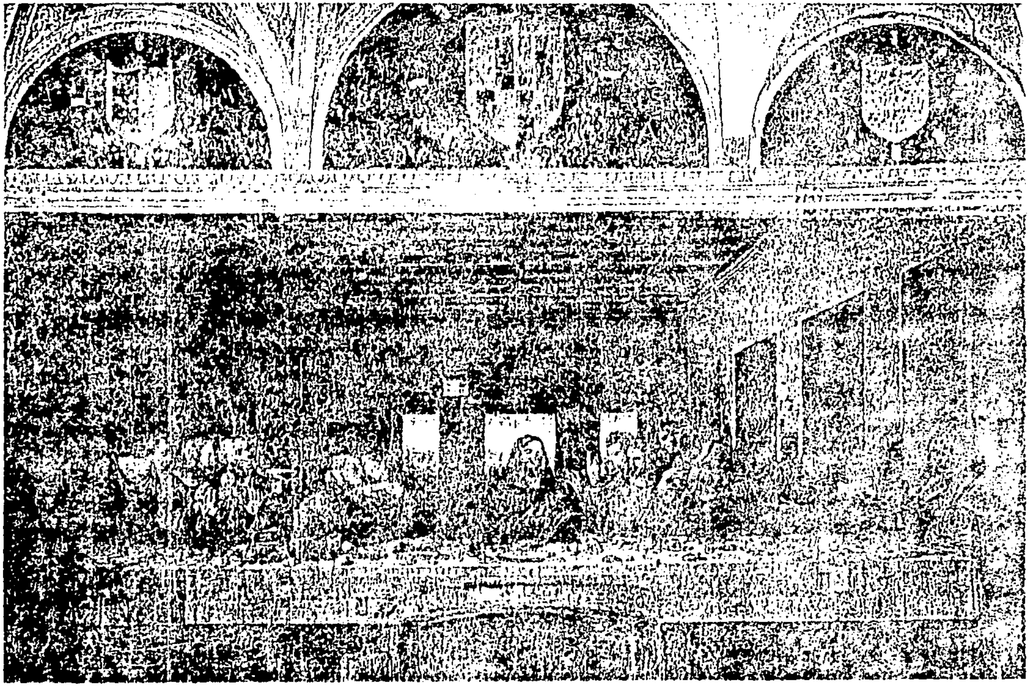
Todos los problemas de la perspectiva quedan aclarados por los cinco términos de las matemáticas que son el punto,la línea,el ángulo,la superficie y el sólido.

Leonardo en su pintura "La Ultima Cena" realizada en 1498 en una pared del refectorio de Santa Maria delle Grazie,un convento de frailes dominicos en Milan.

El procedimiento natural para la pintura mural era el fresco,técnica que consistía en aplicar colores disueltos en agua de cal sobre una pared cubierta de yeso todavía húmedo

Pero Leonardo empleó una base de arcilla y aglutinante que contenía óleo y barniz, sus inovaciones resultaron desastrosas pues los colores empezaron a borrarse y la arcilla se agrietó y se desprendió a causa de la humedad de la pared.

A pesar de todo,se han sucedido diversas restauraciones a lo largo de los siglos.

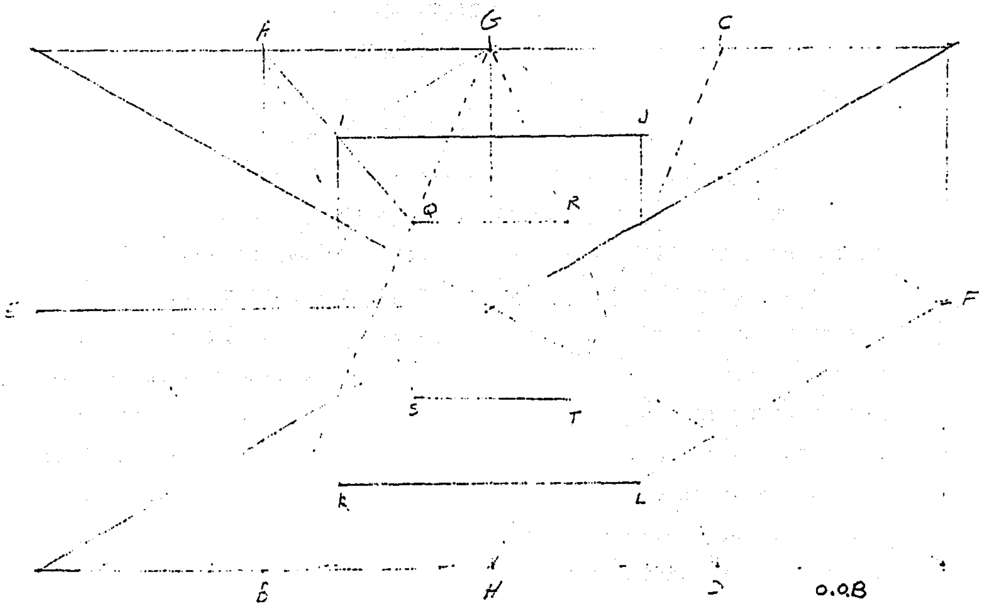


durante la segunda guerra mundial, el convento fue bombardeado pero la Última Cena sobrevivió, protegida por sacos de arena.

Después de la guerra se confió su restauración a un experto que, con los medios de la técnica más moderna, procedió a limpiar los retoques acumulados durante siglos y recuperar los restos del original. En la actualidad se encuentra en mejor estado que durante los dos últimos siglos.

Para esta pintura Leonardo eligió el momento en que Jesús acaba de anunciar que uno de sus discípulos le traicionará. Todos reaccionan con horror, asombro y protestas de inocencia. Nunca se ha visto nada semejante a esta interacción entre un grupo de personas. Siempre se ha admirado la maestría que supone la diversidad de gestos, a pesar de la cual, las manos de la mayoría de los apóstoles están dispuestas de tal forma que se extiende a lo largo de una línea de fuerza invisible que confluye en la figura serena y autoritaria de Jesús la figura dominante, algo distanciada de los demás, en el centro de la composición. Incluso la perspectiva refuerza esta impresión; la cabeza de Jesús esta situada en el punto de fuga, es decir, el punto en que las líneas paralelas que se alejan en el espacio del cuadro se encuentran y desaparecen en el horizonte. El drama humano anuncia el drama solitario del sacrificio divino y finalmente queda envuelto en él.

Leonardo en esta pintura creó un espacio que sugiere continuidad en la arquitectura con el refectorio una arquitectura ilusionista logrando la profundidad,utilizó una división de líneas en la pintura sobre un rectángulo que le sirvieron de guia para realizar los dibujos de las figuras de la pintura,se encuentra que algunas de las líneas convergen en el



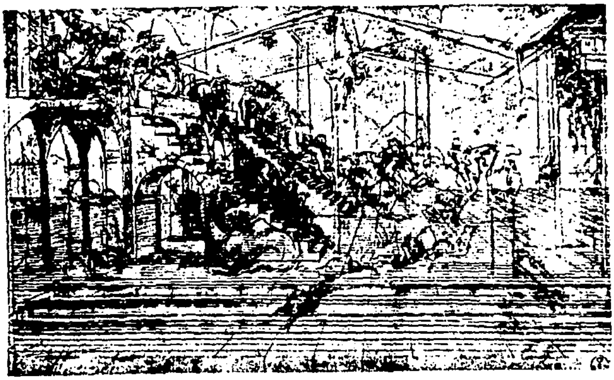
punto de fuga.

(1)La Adoración de los Magos realizada por Leonardo Vinci en el periodo de 1481 a 1482. Esta pintura fue encargada por los frailes de San Donato de Scopeto en Florencia,pero quedó sin terminar. Sus dibujos preparatorios de los que hoy solo se conserva una pequeña parte,revelan su interés por la perspectiva y demás detalles. El cuadro en su estado actual,represen ta meses de esfuerzo; tal vez Leonardo lo abandonó al ver que no lo acabaría en el plazo de dos años y medio estipulado en el contrato con los monjes.

La Adoración de los Magos a pesar de estar inacabada,es - una obra extraordinaria. La historia tradicional relata cómo los Reyes Magos llevan oro,incienso y mirra al recién nacido niño Jesus, que descansa entre animales mansos vigilado por su madre, en el pesebre de un establo. La mayoria de los cuadros representan la escena en un recinto cerrado de una manera solemne y ceremoniosa, Leonardo la llevó al aire libre fue ra del establo,situó la escena en un marco grandioso, el pa-- tio de un palacio en ruinas con unas escaleras en diagonal que parecen dirigirse al vacío,unidas al grupo central por un gran árbol que contribuye al equilibrio de la composición.

Estudio de perspectiva para la Adoración de los Magos 1481.

(1)El Arte de Leonardo Da Vinci, Douglas Manering,Barcelona,1981.



Estudio de perspectiva para "La Adoración de los Magos"

=====================================

Leonardo estudio matemáticas con el monje geómetra Luca Pacioli autor del libro La Divina Proporcion , Leonardo mantuvo interes por la ciencia, el arte,la perspectiva y una infinidad de conocimientos. Divide la perspectiva en 3 partes y señala que todos los problemas de la perspectiva quedan aclarados por los cinco términos de las matemáticas que son el -- punto,la línea, el ángulo, la superficie y el sólido.

La perspectiva la supo aplicar en pinturas como La Ultima Cena y La Adoración de los Magos.

Los Esponsales de La Virgen de Rafael.

Líneas que convergen en el punto fuga ayudaron a resolver la perspectiva en el Renacimiento.

R A F A E L

Rafael nació en 1483 en Urbino, era hijo de un modesto pintòr de esa ciudad llamado Giovani di Sante a pesar de que el padre murió cuando Rafael sólo contaba 11 años pudo transmitirle las primeras nociones de pintura.

En 1504 se halla en Florencia, realiza la pintura Los Esponzales de la Virgen, estudia la obra de Leonardo Vinci, Rafael tenia 30 años menos que Leonardo.

A finales de 1508, Rafael cuya fama se habia extendido ya por distintos lugares de Italia, fue llamado a Roma por el papa Julio II para decorar las estancias papales en el Vaticano dos de sus más famosas pinturas dentro de este lugar son La Disputa del Sacramento y La Escuela de Atenas.

En sus pinturas recurre a temas religiosos cristianos realiza vírgenes, angeles, niños, como en La Virgen del Alba, efectua retratos. Otra de sus más conocidas pinturas es La Virgen de la Silla de composición circular que originalmente se realizó sobre el fondo de un tonel.

Muere el 6 de abril de 1520 en Roma a los 37 años de edad.

La Disputa del Sacramento composicion basada en la aplicacion de la simetría y de la perspectiva lineal perfecta.Las líneas marcadas por el embaldosado del suelo,convergen en un punto fuga que esta situado en la hostia.

La Escuela de Atenas fue realizada por Rafael en 1510,las figuras corresponden a sabios y filósofos de la antiguedad el fondo de la escena está constituido por una arquitectura de grandes proporciones . En el centro de la composición aparecen dos figuras enmarcadas por una entrada con un arco,se trata de Platón quien bajo un brazo sostiene el Timeo y con el otro levantado señala al cielo con un dedo. La otra figura representa a Aristóteles,el cual porta en una mano un volumen de la Etica,mientras su otra mano señala al suelo.
Así en los gestos de ambos filósofos se expresa toda su doctrina con lo que una vez más Rafael expone las ideas complejas por medio de imágenes . Entre los personajes representados en La Escuela de Atenas se ha llegado a identificar a Pitágoras que se halla sentado algo hacia su derecha escribiendo en un libro,a Euclides que se inclina entre sus discípulos para medir una figura geométrica .

Líneas de perspectiva en "La Escuela de Atenas" de Rafael.

"La Virgen de la silla" de Rafael en 1514 .

pintura circular,en que las figuras aparecen unidas entre sí.Rafael domina el esquema circular.

==================================

El pintor Rafael de Urbino recibio la influencia de Leonardo Vinci , mantuvo correspondencia con Alberto Durero. En sus pinturas se observa que estudiaba el espacio arquitectonico,el volúmen,la distancia,el color, trató temas cristianos y de figura humana,realizó sus pinturas con belleza, armonía,proporción equilibrio,tóma elementos de geometría como ángulos,líneas,figuras geométricas,utiliza el punto de fuga y realiza la perspectiva en la pintura.

CAPITULO III

ORIGENES DE LA GEOMETRIA PROYECTIVA

Las Matemáticas en el Renacimiento

En los siglos XV y XVI surgió el Renacimiento como un movimiento cultural en Italia; vino a ser un "nuevo nacimiento" de los grandes valores griegos . Sin embargo no fue una simple copia de lo antiguo, sino que supo crear estilos y corrientes propias. Las matemáticas se fueron desarrollando con trabajos como los de Chuquet, Regiomontano, Tartaglia, Cardano, Viete, Neper.

A finales del siglo XV el bachiller de la Universidad de París, N. Chuquet introdujo el exponente fraccionario de una potencia, los exponentes negativos, los números negativos, el simbolismo algebráico.

Dentro del simbolismo todavia no hay un símbolo especial para la incógnita y la mayoría de los símbolos están formados mediante las abreviaturas de las palabras.

Por ejemplo: $5^3\bar{m}$ designa $5x^{-3}$

($\bar{m}$ es la abreviatura de la palabra minus)

Y en general: $a^k\bar{m}$ designa ax^{-k}

Como símbolo de la raíz se tiene R x (de la palabra radix esto es raíz) como símbolo de la suma, $\bar{p}$.

Así que la expresión $\sqrt[4]{24+\sqrt{37}} - 20x^{-2}$

tomada al azar en las simbología de Chuquet tendría la forma

$$\bar{R}_x^4\ 24\ \bar{p}\ \bar{R}_x^2\ 37\bar{m}\ 20^2\ \bar{m}.$$

La símbologia en el álgebra se fue perfeccionando posteriormente.

En 1461 surgio la obra "Cinco libros sobre triángulos de cualquier género". La escribió el matemático alemán Johanes Müller(1436-1476) más conocido por el nombre de Regiomontano.

Este libro trató sistemáticamente todos los problemas sobre la determinación de triángulos planos y esféricos a partir de los elementos dados. Amplió el concepto de número, incluyendo entre ellos la irracionalidad que surgió en los casos de inconmensurabilidad geométrica. Continuó el trabajo comenzado por otros científicos de confección de tablas de las funciones trigonométricas. Introdujo la práctica de dos funciones trigonométricas que posteriormente se denominarían tangentes y cotangentes.

N. Tartaglia(1500-1557) se interesó en la resolución de las ecuaciones cúbicas y su método consistía en la elección de la forma adecuada en la irracionalidad algebráica para la expreción de la raíz de las ecuaciones del tipo $x^3+px=q$ $(p>0,\ q>0)$

Suponiendo que $x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$ sustituyendo esta expresión en la ecuación y poniendo $p=3\sqrt[3]{uv}$, él obtuvo el sistema:

$$u-v=q$$
$$uv=\frac{p^3}{27}$$

Interpretando a u y v como raíces de una ecuación cuadrática Tartaglia halló

$$u=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^2}+\frac{q}{2};$$

$$v=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^2}-\frac{q}{2}.$$

pudo resolver la ecuación de la forma $x^3=px+q$ $(p>0,\ q>0)$ con la sustitución $x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$,

Finalmente comunicó que las ecuaciones de la forma $x^3+q=px$ se reducen al tipo anterior, pero no dió el metodo de reducción.

Tartaglia se dio cuenta de la imposibilidad de resolver el caso irreducible que consistió en que hay ecuaciones

$x^3 = px + q$ que tienen raíces reales positivas.

Independientemente de que tenga lugar la desigualdad

$\left(\frac{q}{2}\right)^2 \gtrless \left(\frac{p}{3}\right)^2$ ó no.

Sin embargo la fórmula de tartaglia no daba la solución en el caso irreducible, ya que no había posibilidad de interpretar correctamente los números imaginarios que se obtenian en este proceso .

El caso irreducible surgió en Tartaglia también en las ecuaciones de la forma $x^3 + q = px$

Los trabajos de Tartaglia no fueron en vano, desde 1539 las ecuaciones cúbicas las comienza a estudiar Cardano.

Cardano estudio matemáticas al oir sobre el descubrimiento de Tartaglia, dedicó muchos esfuerzos para arrancar el secreto al cauteloso y desconfiado Tartaglia y engalanar con este resultado el libro que tenia pensado "Ars Magna..." esto es "El gran arte o las reglas del álgebra" y lo consigue después . Esta contiene las reglas de las operáciones algebráicas y los métodos de búsqueda de ecuaciones de los tres primeros grados, y los elementos de la Teoría General de las ecuaciones algebráicas.

Así Cardano introdujo un método regular de reducción de la ecuación cúbica general $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

a la forma en la que falta el término cuadrado de la incógnita mediante la sustitución $x = x_1 + h$

y lo extendió a la ecuación de cuarto grado.

En Ars magna... se expresan muchos teoremas sobre la interrelación entre las raíces y los coeficientes: sobre las raices positivas y negativas por ejemplo: si en la ecuación todos los términos que están en la parte izquierda tiene grado mayor que los grados de los términos de la parte derecha, entonces la ecuación tiene una y sólo una raíz positiva.

Cardano mostró la divisibilidad del polinomio algebráico $P_n(x)$ por $(x-x_1)$ donde x_1 es una raíz de la ecuación $P_n(x)=0$.

Cardano también incluyó en su libro el método de resolución de ecuaciones de cuarto grado mediante la reducción del problema a una resolvente cúbica, descubierta por su alumno L.Ferrari (1522-1565). Aclaremos este método con el ejemplo del problema que resolvió Ferrari.

Este fué dado a Cardano por el matemático italiano J.Colla. El problema decía: "Dividir el número 10 en tres partes tales que constituyan una progresión geométrica y el producto de sus dos primeras partes sea igual a 6"

Por las condiciones:

$$\frac{6}{x} : x = x : \frac{x^3}{6} \quad ; \quad \frac{6}{x} + x + \frac{x^3}{6} = 10$$

de donde se obtiene la ecuación $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$.

Completemos ambas partes logrando que la parte izquierda sea un cuadrado perfecto: $(x^2+6)^2 = 60x + 6x^2$.

Adicionando a ambas partes $2(x^2+6)t + t^2$

donde t esta todavía por determinar. Obtenemos

$$(x^2+6+t)^2 = 60x + 6x^2 + 2(x^2+6)t + t^2$$

ó

$$(x^2+6+t)^2 = (2t+6)x^2 + 60x + (t^2+12t).$$

La condición para que el miembro derecho sea un cuadrado perfecto, como se sabe, es la anulación del discriminante.

Esto Ferrari lo escribe así: $30^2 = (2 . t + 6) (t^2 + 12 t)$ reduciendo el problema a la solución de una resolvente cúbica.

El método evidentemente es general para las ecuaciones de cuarto grado. Cardano redujo a este tipo una ecuación que no contiene términos de primer grado, con la sustitución $x = \frac{k}{y}$.

La solución de las ecuaciones de 3º 4º grado presentó ante los matemáticos el problema de la búsqueda de la solución de cualquier grado.

El problema, con el transcurso del tiempo, se transformó y comenzó a tratarse como el problema de la posibilidad ó imposibilidad de la solución de ecuaciones algebráicas de grado $n \geq 5$ en radicales.

En las búsquedas de la solución de este problema transcurrió alrededor de 300 años. Sólo en el siglo XIX N. H. Abel (1802-1829) demostró que las ecuaciones de grado $n > 4$, hablando en general , no se resuelven en radicales.
Galois (1811-1832) relacionó con cada ecuación un grupo especial de permutaciones sus raíces, el grupo de Galois y redujo el problema a la investigación de la estructura de este grupo, a su resolubilidad.

En la formulación más general de los problemas de la teoría de Galois: expresar racionalmente las raíces de una ecuación dada a través de las raíces de otra ecuación más sencilla.

En el camino de la creación de la teoría de las ecuaciones algebráicas y los métodos de su resolución se presentaba lo inexplicable del caso irreducible.

Ya Cardano menciona las raíces imaginarias denominándolas sofisticadas, muestra con el ejemplo $x+y=10$, $xy = 40$ que estas raíces se encuentran por pares, esto es $x_{1,2}=5 \pm \sqrt{-15}$

Un sistema único de símbolos algebráicos, organizado por primera vez lo dio al parecer, Viete.

El surgimiento del cálculo algebráico literal constituye una de las facetas más importantes dentro de la historia de las matemáticas las obras e ideas de Viete transmiten muy bien este momento crítico.

Francoise Viete (1540-1603) fue un matemático francés realiza un original resumen de las matemáticas de la época del Renacimiento.

Por ejemplo: cada ecuación cúbica la transforma a la forma $x^3 + 3ax = b$ y aplica a continuación la sustitución

$a = t^2 + tx$, para llegar a la ecuación

$$x^3 + 3tx^2 + 3t^2x = b$$

de las dos últimas ecuaciones transformadas a la forma:

$$(x + t)^3 - t^3 = b$$

$$t^3 (t + x)^3 = a^3$$

obtiene la ecuación cuadrática

$$a\ t^3 : (t^3)^2 + bt^3 = a^3$$

puede también ponerse

$$x = \frac{a - t^2}{y}$$

directamente en la ecuación para obtener este mismo resultado.

El caso irreducible de la ecuación cúbica Viete lo redujo al problema de la trisección del ángulo.

Mostró que cada ecuación irreducible puede ser transformada a la forma $x^3 - 3x = a$

Comparándola con la relación trigonométrica

$$(2 \cos \varphi)^3 - 3 (2 \cos \varphi) = 2 \cos 3\varphi$$

Viete demuestra esta suposición, el problema de la trisección del ángulo lo resuelve utilizando el método de intersección conocido por él de las antiguas fuentes.

Viete introduce por primera vez en la matemática el problema sobre la búsqueda del producto infinito.

Sí alrededor de un polígono regular de n lados de área Sn, se circunscribe un círculo de radio r y se inscribe en él un círculo de radio ρ_n entonces cuando se duplica el número de lados de este polígono obtenemos:

$S_n : S_{2n} = \rho_n : r = \cos\frac{\pi}{n}$ comencemos desde el cuadrado inscrito

n = 4 $S_4 = 2r^2$ poniendo sucesivamente n= 4, 8, 16,...

obtenemos: $S_4 : S_8 = \cos\frac{\pi}{4}$

$S_8 : S_{16} = \cos\frac{\pi}{8}$

Viete pasa al limite!!

El dice que cuando $n = \infty$ se obtien un circulo de área del cual es $S_\infty = 2\pi r^2$.

multiplicando toda la cadena de igualdades encuentra:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{90^\circ}{2} \cdot \cos\frac{90^\circ}{4} \cdot \cos\frac{90^\circ}{8} \cdots,$$

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \times \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \cdots$$

Viete no demuestra la convergencia del producto infinito obtenido estando intuitivamente convencido en la veracidad de su afirmación límite.

En el siglo XVI se formo el álgebra como ciencia de la solución de ecuaciones. El álgebra tomo la formulación simbólica, se trataron de resolver problemas de la teoria general de las ecuaciones algebráicas.

En el Renacimiento se utilizaba la regla de tres, Piero della Francesca lo explicó así: La regla de tres dice que uno debe de multiplicar lo que uno quiere saber por lo que sea distinto a ello y dividir el producto por la cosa restante.

Por ejemplo: siete bracci de tela valen nueve liras, ¿ Cuánto valdrán cinco bracci ?

Hagase así : multipliquese la cantidad que uno quiere saber por la cantidad que valen siete metros de tela ó sea nueve.

Cinco veces nueve hacen cuarenta y cinco , dividase por siete y el resultado es seis y tres séptimos .

Había distintas convenciones para estipular las cuatro cifras del problema:

a) $\begin{matrix} 7 & & 9 \\ 5 & / & (6\,\frac{3}{7}) \end{matrix}$

b) $7 \quad 9 \quad 5 \quad (6\ \frac{3}{7})$

c) $7 \quad 9 \quad 5 \qquad 6\ \frac{3}{7}$

d) $7 : 9 = 5 : 6\,\frac{3}{7}$

a) es la forma islámica, en el siglo XV mucha gente prefería poner los términos en una línea recta, como en b).

En algunos libros esta convención se transformó en la del Renacimiento, posteriormente se conectaron las cifras con lín - neas curvas como en c) anotaban las relaciones entre los núm - eros . Actualmente representaríamos la relación como en d)

Los términos de una serie en la regla de tres se encuentran en proporción geométrica. La regla de tres era la forma en que el Renacimiento trataba los problemas de la proporción que incluian la comisión, el descuento, adulteración de merca - ncias, ventas, cambios de moneda.

Luca Pacioli (1445-1514), estudió la geometría de los antiguos, aritmética comercial, escribió Summa de Aritmetica, y Divina Proportione. En 1498 Pacioli publica en su Suma Aritmética métodos de multiplicación, dos de estos métodos son el scachiero y el gelosía.

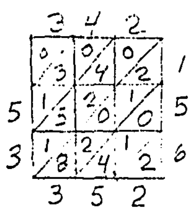
El método Scachiero era llamado el método del tablero de ajedrez por su semejanza con éste.

En la figura se muestra para 24 X 345.

```
          2
          4
    3  4  5
       2  0  = 4X5
    1  0     = 20X5
    1  6     = 4X40
    8        = 20X40
 1  2        = 4X300
 6           = 20X300
 8  2  8  0
```

El método gelosía para usar este método se forma un enrejado el número de cuyas celdas depende del número de dígitos que componen a los números que se han de multiplicar.

La figura muestra el esquema para encontrar el producto 342 X 156. Puesto que ambos factores tienen tres dígitos c/u en sus numerales, el enrejado que se usa tiene 3 X 3 = 9 celdas Los dígitos de un factor se escriben sobre las columnas de la cuadrícula y los dígitos del segundo factor se escriben a la derecha ,un dígito al lado de cada fila,en cada celda escribimos el producto de los números nombrados en cada uno de los lados. Así, en la parte superior izquierda escribimos 3(3 X 1); en la celda inferior izquierda escribimos 18(3 X 6), y así sucesivamente. La diagonal de la celda separa el dígito de las decenas del dígito de las unidades en el producto correspondiente . Sumamos a lo largo de las diagonales para encontrar el producto. Así 4+1=5 , 8 + 2 + 1 + 2 = 13 . El resultado puede leerse empezando en la parte superior izquierda de la cuadrícula y continuando a lo largo de la parte inferior.



3 X 5
4 X 5
2 X 5

3 X 6
4 X 6
2 X 6

John Neper (1550-1617) matemático inglés nació en Escocia, se le debe la invención de los logaritmos en el año de 1594, realizó sus estudios en Inglaterra, completándolos en Holanda Bélgica, Francia e Italia. Neper investigó la teoría general de los logaritmos y su aplicación a los cálculos aritméticos y trigonométricos así como el descubrimiento de reglas y formulas utilizadas en trigonometría.

Es de hacerse notar que fue Neper el que por primera vez introdujo en la escritura de los números decimales el uso del punto o de la coma para separar la parte decimal de la parte entera. Neper estudiando la relación que existe entre las progresiones aritméticas y geométricas determinó las propiedades de los logaritmos las cuales abrevian considerablemente el cálculo numérico.

Enrique Briggs (1556-1630) matemático inglés se puso de acuerdo con Neper aprovechando la Teoría general de los logaritmos. Briggs calculó los logaritmos decimales, en el año de 1618 publicó un ensayo sobre sus tablas de logaritmos, en 1620 publicó en Londres su Aritmética Logarítmica, en donde se hallan calculados los logaritmos de los números 1 a 2000 y de 9000 a 10000 con 14 decimales.

Briggs muere en el año de 1630 y en el año 1633 fue publicado su Trigonometría Británica.

Tomando en cuenta que cualquier número positivo distinto de uno puede ser base de un sistema de logaritmos tendremos que el número de sistemas es ilimitado. Sin embargo, los sistemas usados corrientemente son dos: el sistema de logaritmos decimales, vulgares o de Briggs, cuya base es 10; y el sistema de logaritmos naturales o neperianos, cuya base es el número :

$e = 2.718281 \cdots$

En los años 1632 y 1638 Galileo dio la expresión matemática de las leyes de la caida de los cuerpos, un poco antes Kepler descubrió y formuló matemáticamente sus famosas leyes del movimiento de los planetas.

Hacia el año 1686 Newton pudo formular y demostrar la ley de la gravitación universal: las leyes del movimiento de los planetas se explican por la atracción de ellos hacia el sol con fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y directamente proporcional a sus masas.

En los trabajos de Descartes y Fermat comenzó a formarse la geometría analítica como un método de expresión de las relaciones numéricas de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de las cordenadas.

René Descartes (1596-1650) fue un eminente sabio francés: filósofo, físico, matemático fisiólogo. El objetivo de Descartes en las ciencias naturales era la elaboración de un método general matemático-deductivo de estudio de todas las cuestiones de las ciencias naturales.

Sus ideas generales obtuvieron una interpretación concreta hacia el año 1637 cuando salió a la luz el famoso "Discurso del Método" de Descartes. En esta obra, junto a la característica general del método de investigación de las ciencias naturales, se destacan en apartados independientes la aplicación de este método a la dióptrica, la meteorología y a las matemáticas en esta obra en la última parte la denominaba "Geometría".

En los fundamentos de toda la geometría de Descartes se situan dos ideas: la introducción de la magnitud variable y la utilización de las coordenadas rectangulares (cartesianas).

La "Geometría consta de tres libros. El primer libro "Sobre los problemas que pueden construirse utilizando sólo círculos y líneas rectas".

El segundo libro de "Geometría"se llama:"Sobre la naturaleza delas líneas curvas". Esta dedicado a un estudio más detallado de las curvas de diferentes órdenes,su clasificación y la revelación de sus propiedades de acuerdo a los recursos que él disponía.

El objetivo del tercer libro: "Sobre la construcción de sólidos o más que sólidos", es la construcción de la teoría general de resolución de ecuaciones y la utilización para esto, junto a los recursos algebráicos,de los lugares geométricos .

Tal es el contenido de la "Geometría" de Descartes,la primera obra sobre geometría analítica, la cual jugó un importante papel en el desarrollo de las matemáticas del siglo XVII.

Los ejes coordenados en la "Geometría" aún no tenían iguales derechos; se traza sólo un eje y la otra coordenada se establece en la medida de la necesidad,el comportamiento de la curva se estudia sólo en el primer cuadrante,los otros cuadrantes no se consideran.

La interrelación del álgebra y la geometría y la ayuda del método de coordenadas,representó en las matemáticas un fenómeno revolucionario que nunca los realiza un individuo solo.

El surgimiento de la Geometría Analítica no fue el mérito solo de Descartes,fueron sus contemporaneos que continuaron las ideas elaboradas por Descartes

Simultáneamente con Descartes, el matemático francés P. Fermat (1601-1665) desarrolló un sistema análogo de ideas en una obra especial. Obtuvo notables resultados en la teoría de los números, en geometría, en la óptica. Las ideas de la geometría analítica, esto es la introducción de coordenadas rectangulares y la aplicación a la geometría de los métodos algebráicos, se concentran en una pequeña obra de Fermat "Introducción à la teoría de los lugares planos y espaciales", que fue conocida desde el año 1630, pero publicada junto con otras obras en 1679. El punto de partida de este trabajo eran las obras de los antiguos, especialmente de Apolonio, sobre el estudio de los lugares geométricos.

Aquellos lugares geométricos los cuales se representaban por rectas ó circunferencias se denominaban planos y los representados por secciones cónicas, espaciales.

La tarea de Fermat era mostrar que las ecuaciones de primer grado corresponden a rectas, y a la secciones cónicas, las ecuaciones de segundo grado.

El método de coordenadas se introduce igual que en las obras de Descartes: se da un eje, el eje de las abscisas, en el se sitúan desde un origen de los segmentos, los respectivos valores de una de las variables. Los valores de la otra variable, también representados con segmentos se reproducen desde el final del primer segmento según un ángulo elegido para el problema dado.

Fermat estudia las ecuaciones de la recta, la circunferencia y de todas las secciones cónicas.

La extensión de la geometría analítica al estudio de los lugares geométricos espaciales, Fermat lo realiza por la vía del estudio de la intersección de las superficies por planos.

Sin embargo, las coordenadas espaciales también en él están ausentes y la geometría analítica del espacio queda sin culminar.

=====================================

En los siglos XV y XVI surgió el Renacimiento como un movimiento cultural en Italia dentro de este las matemáticas se desarrollaron con trabajos como los de Chuquet, Regiomontano, Tartaglia, Cardano, Viete, Neper, Briggs.

Chuquet a finales del siglo XV introdujo el exponente fraccionario de una potencia, los exponentes negativos, los números negativos, el simbolismo algebráico.

Johanes Muller (1436-1476) escribió "Cinco libros sobre triángulos de cualquier género".

Tartaglia (1500-1557) se interesó en la resolución de las ecuaciones cúbicas y su método consistía en la elección de la forma adecuada en la irracionalidad algebraica para la expreción de la raíz de las ecuaciones del tipo $x^3 + px = q$ $(p>0, q>0)$

Cardano desde 1539 empieza a estudiar las ecuaciones cubicas, introduce un método regular de reducción de la ecuación cúbica general $a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$ a la forma en la que falta el término cuadrado de la incógnita mediante la sustitución $x = x_1 + h$ y lo extendió a la ecuación de cuarto grado.

La solución de las ecuaciones de 3º y 4º grado presento ante los matemáticas el problema de la búsqueda de la solución de ecuaciones de cualquier grado.

Un sistema único de símbolos algebráicos organizado por primera vez lo dio al parecer Viete. El caso irreducible de la ecuación cúbica Viete lo redujo al problema de la trisección del ángulo. Viete introduce por primera vez en la matemática el problema sobre la búsqueda del producto infinito.

En el siglo XVI se formó el álgebra, se trató de resolver problemas de la Teoria general de las ecuaciones algebráicas

=====================================

En el Renacimiento se utilizó la regla de tres dentro de la aritmética comercial.

Neper investigó la teoría general de los logaritmos y sus aplicaciones a los cálculos aritméticos y trigonométricos.

Enrique Briggs se puso de acuerdo con Neper, Briggs calcula los logaritmos decimales.

Dentro del Renacimiento las matemáticas avanzan; se desarrollan trabajos como los de Chuquet, Regiomentano, Tartaglia, Cardano, Viete, Neper, Briggs aportan sus investigaciones y avanzan las matemáticas.

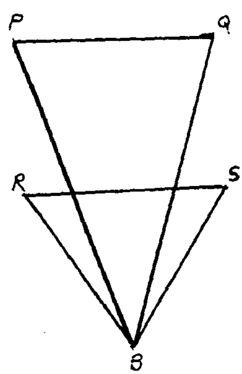
Inicio de la perspectiva en la geometría

La perspectiva empezó en el Renacimiento junto con las ciencias y las artes. Siendo la perspectiva el arte de representar en un plano los objetos del espacio que podemos ver ya desde la antiguedad Euclides escribió postulados sobre la vista, dice que los rayos visuales forman un cono alrededor del contorno del objeto como base y con el vértice del cono en el interior del ojo. Afirma que los objetos vistos por mayor cantidad de rayos son más claros.

Además dice que entre los objetos situados a cierta distancia los que se encuentran más cerca son los más claros.

Euclides toma dos segmentos lineales iguales y paralelos PQ y RS y de acuerdo a sus postulados.

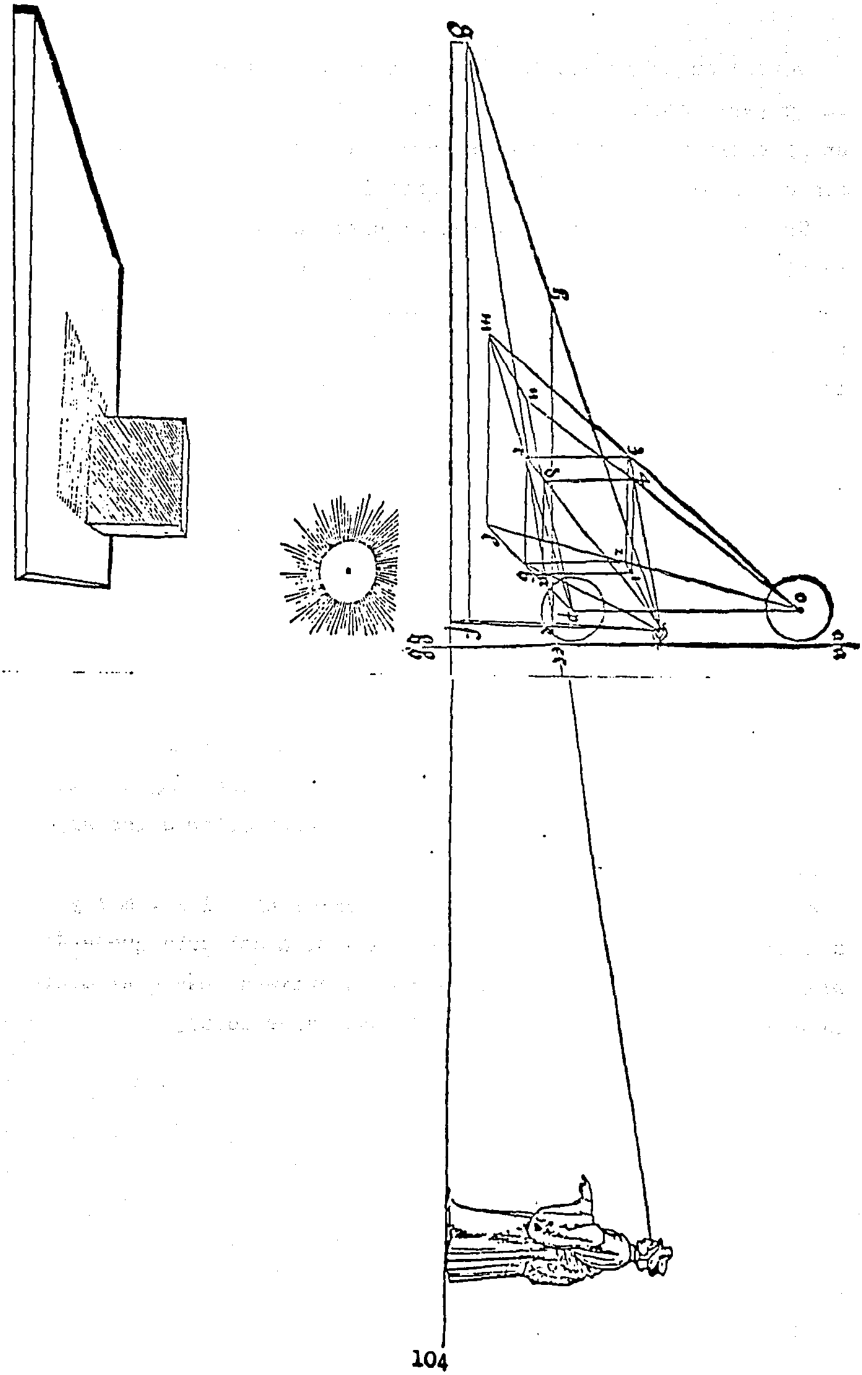
El ángulo RBS es mayor que el ángulo PBQ y por lo tanto contiene más rayos divergentes. En RS se vera más claro que en PQ.



. Durero en 1525 pública Las Instituciones Geométricas explica la perspectiva en el dibujo en el Libro IV de los Sólidos' en el explica de la siguiente manera la proyección de la sombra del cubo dada la luz ó el punto P.

Una vez que ya está dibujado el cubo en su superficie plana fija la luz, y dibuja en el plano del cubo la sombra, lo cual se lleva a cabo fácilmente así. Pon la luz arriba sobre el ojo en la parte que quisieres, y ésta sea o , muy cerca al lugar donde estuvo antes, en seguida, de la luz o llévese hacia abajo una línea perpendicular, coloquese en este el punto p, que representa la luz inferior . Sí se desea alejar la luz mucho del cubo, entonces pon más alto el punto o en la perpendicular p o ; pero sí se desea poner más cerca la luz, entonces baja más el signo p, pero pónlo a la misma distancia del cubo en que estuvo antes . Así pues, una vez puestos los puntos p o de las luces, llévense tres líneas rectas de la luz o por los tres ángulos superiores 2 3 4 del cubo y continúese estas líneas hacia abajo, hasta donde fuese necesario. Igualmente lleva después tres rayos de la luz p por los tres ángulos inferiores b c d del cubo, y donde éstos entrecortan a los superiores escribe ahí l,m,n.

Realizadas estas cosas únanse los puntos bl , l m , m n y n d mediante líneas rectas, y así la sombra del cubo quedará bien dibujada. Sin embargo, para que se entienda más claramente lo que dibujamos antes, puse aquí todas esas cosas.



La "Melancolia" muestra la preocupación de Durero por el problema de la perspectiva. Durante el Renacimiento se asocian a la melancolía con el temperamento artístico o la creatividad, y la representación de Durero se veia rodeada de los atributos de la geometría y de las artes constructivas.

En los siglos XIV y XV la perspectiva se convierte en una rama de la geometría, cuyo problema es la intersección con un plano y las rectas que partiendo de los distintos puntos del espacio, llegan hasta el ojo, en términos geométricos la intersección de un plano con un haz de rayos.

Es explicable que este problema geométrico haya surgido en el arte pictórico y en una época en que muchos pintores trataban de investigar ciertos fundamentos científicos de su propio arte.

En el Renacimiento no consideraban a la perspectiva y a la óptica como ciencias distintas. La perspectiva es de hecho en su aplicación más amplia, la ciencia de ver.

Leonardo Vinci decia: " Entre todos los estudios sobre causas y efectos naturales, la luz es lo que más deleita al espectador: y entre las caracteristicas más destacadas de las matemáticas, lo que tiende sobre todo lo demás a elevar el espiritu del investigador es la certeza de sus demostraciones".

"En consecuencia, la perspectiva debe ser preferida a todas las demas platicas y sistemas de saber humano."

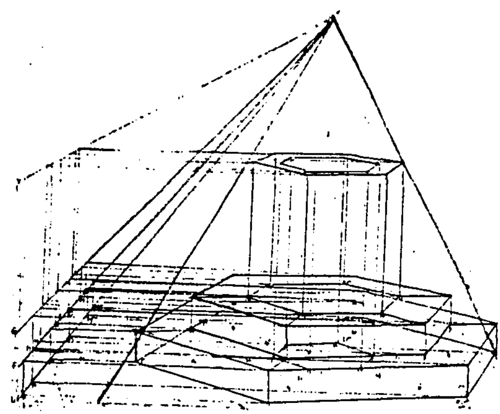
"En esta rama de la ciencia se explica el rayo de luz por medio de aquellos metodos de demostración que constituyen el esplendor no tanto de las matemáticas como de la física métodos que son agraciados con los frutos de ambas ciencias."

Leonardo divide la perspectiva en tres partes:

La primera división incluye la disminución de tamaño de los objetos opacos, la segunda trata sobre la disminución y pérdida de contorno de dichos objetos, la tercera trata sobre la disminución y pérdida de color en caso de grandes distancias.

. Todos los problemas de la perspectiva para Leonardo Vinci quedan aclarados por los cinco términos de las matemáticas que son el punto,la línea,el ángulo,la superficie y el sólido. ..El pintor Piero della Francesca se interesó en definir la perspectiva "La perspectiva es una rama de la pintura que comprende cinco partes: la primera es el órgano de la vista, es decir,el ojo, la segunda es la forma del objeto visto: la tercera es la distancia entre el ojo y el objeto;la cuarta son las lineas que se inicianen la superficie del objeto y se dirigen al ojo;la quinta es el plano que esta entre el ojo y el objeto dondequiera que uno intente colocar los objetos"

La teoría de la perspectiva se extendió considerablemente a principios del siglo XVI por un pequeño grupo de matemáticos franceses cuyo animador fue Desargues un ingeniero y arquitecto trabajó en los problemas que dieron lugar a la geometría proyectiva.



Perspectiva aplicada a una configuración regular hecha en 1576 por Piero della Francesca.

(1) Posteriormente Kepler astrónomo alemán(1571-1630) fundamentó las tres leyes sobre el movimiento de los planetas,establece que las líneas paralelas se encuentran en el infinito .

Las ideas sobre perspectiva y geometría de artistas,geometras, arquitectos,científicos influyen en Desargues(1593-1662), arqui - tecto de Lyon Francia quien comienza a interesarse en lo que más tarde se llamaría Geometría Proyectiva

La Geometría Proyectiva se inicia con trabajos de Desargues y de Poncelet (1788-1867).

(2) Apartir del siglo XVI se fue desarrollando la noción de que un conjunto de lineas paralelas puede considerarse como pasando por un punto en el infinito.

Se planteó la idea y surgió la noción de ampliar el plano eu - clideano al añadirles puntos al infinito,y se consideró a estos puntos como situados sobre una línea,la línea en el infinito.

Si tenemos ya el plano ampliado y consideramos que todos los puntos llevan implicitas las mismas condiciones, estamos cambiando radicalmente la naturaleza del plano euclideano.

Los puntos en el infinito en el nuevo plano se llaman puntos ideales se transforman en puntos corrientes y la línea ideal, la línea en el infinito,se transforma en una línea común y corri- ente .

El comportamiento de los puntos y las líneas dentro de este plano ampliado satisface ahora los teoremas ó axiomas.

1.- Dos puntos distintos dentro de un plano determinan una lí - nea única,sobre la que ambos se sitúan.

2.- Dos líneas distintas dentro de un plano determinan un punto único a través del cual ambas pasan.

Ya no existe ninguna feferencia a la posibilidad de que las líneas sean paralelas.

(1) Art. y Geometry A Study in Space Intuitions,WilliamIvins, Dover Publications,Inc. New York.

(2) La Geometría en el Arte,Dan Pedoe,Edit.Gili,Bardelona,1979.

Esta geometría del plano extendido es una geometría de puntos,líneas e intersecciones.

Cualquier teorema sobre los puntos, las líneas y las intersecciones que sea verdadero en el nuevo plano corresponden a la Geometría Proyectiva.

==================================

Siendo la perspectiva el arte de representar en un plano los objetos del espacio que podemos ver. Desde Euclides sobre la vista el decía que los rayos visuales forman un cono alrededor del contorno del objeto como base y con el vértice del cono en el interior del ojo.

Durero en sus Instituciones de Geometría analiza la perspectiva mediante el dibujo de un cubo y su sombra proyectada.

Gérard Desargues

Fue un ingeniero y arquitecto que nació en Lyons en 1593 y murió en la misma ciudad alrededor de 1662. Influido por las necesidades crecientes de los artistas y arquitectos de crear una teoría más profunda de la perspectiva, Desargues publicó en París en 1639, un notable tratado original sobre las secciones cónicas en que aprovechó la idea de la proyección.

Pero este trabajo fue despreciado por la mayoría de los demás matemáticos de aquella época, que pronto se olvidó y todas las copias de la publicación desaparecieron.

Dos siglos más tarde, cuando el geómetra francés Michel Chasles(1793-1880) escribió una historia de la geometría, no tuvo modo de estimar el valor del trabajo de Desargues.

Sin embargo, seis años después, en 1845, Chasles tuvo la suerte de encontrar una copia manuscrita del trabajo de Desargues, hecho por uno de sus seguidores y desde aquella época el trabajo fue reconocido como uno de los clásicos en el desarrollo primitivo de la geometría proyectiva.

Hay varias razones para el desprecio del trabajo de Desargues una es que fue eclipsada por la geometría analítica introducida por Descartes dos años antes.

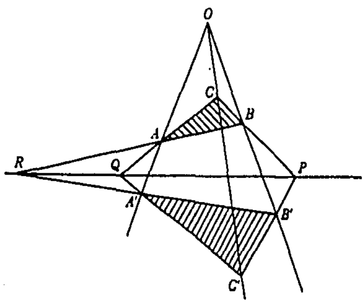
La introducción en la geometría de la noción de puntos en el infinito se acredita generalmente a Johann Kepler(1571-1630) pero fue con Desargues (1593-1662) quien en un tratado de las secciones cónicas publicado en 1639, utilizó por primera vez la idea sistemáticamente.

El teorema de Desargues para dos triángulos parece que ha sido dado por Desargues en una obra de perspectiva en 1636, tres años antes de que se publicara su "Brouillon Proyect" Este teorema se ha hecho básico en la teoría actual de la geometría proyectiva.

Definiciones. Dos triángulos ABC y A'B'C' se dice que son copolares si A A', B B', C C' son concurrentes; se dice que son coaxiales si los puntos de intersección de BC y B' C', C A y C' A' y AB y A' B' son colineales.

Teorema de Desargues de dos triángulos.

Los triángulos copolares son coaxiales y viceversa.



Sean los dos triángulos ABC y A'B'C' . Supongamos que A A', B B', C C' son concurrentes en un punto O. Sean P,Q,R, los tres puntos de intersección de BC y B'C', CA y C'A' y A B y A'B' .Considerando sucesivamente los triángulos BCO, CAO, ABO, con las transversales respectivas B'C'P, C'A'Q, A'B'R , vemos que, por el teorema de Menelao,

$$(\overline{BP}/\overline{PC})(\overline{OC}/\overline{C'O})(\overline{OB}/\overline{B'B})=-1$$

$$(\overline{CQ}/\overline{QA})(\overline{AA'}/\overline{A'O})(\overline{OC'}/\overline{C'C})=-1$$

$$(\overline{AR}/\overline{RB})(\overline{BB'}/\overline{B'O})(\overline{OA'}/\overline{A'A})=-1$$

Igualando el producto de los tres primeros miembros de las ecuaciones anteriores con el producto de los segundos miembros, obtenemos $(\overline{BP}/\overline{PC})(\overline{CQ}/\overline{QA})(\overline{AR}/\overline{RB})=-1$,

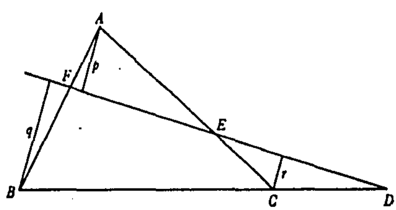
de donde P, Q, R, son colineales. Por lo tanto, los triángulos copolares son coaxiales.

Recíprocamente, supongamos que P, Q, R son colineales y que O sea el punto de intersección de AA' y BB'. Ahora, los triángulos AQA' y BPB' son copolares y, por tanto, coaxiales. Esto es, O, C, C' son colineales.

En consecuencia, los triángulos coaxiales son copolares.

Teorema de Menelao. La condición necesaria y suficiente para que sean colineales tres puntos de Menelao, D, E, F, de los lados BC, CA, AB de un triángulo ordinario ABC es que

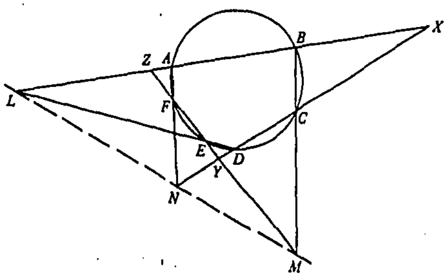
$$(\overline{BD}/\overline{DC})(\overline{CE}/\overline{EA})(\overline{AF}/\overline{FB}) = -1$$



Blas Pascal (1623-1662) a los 16 años escribió un "Ensayo sobre las cónicas" de los trabajos de Pascal sobre geometría proyectiva se conservaron solo bosquejos. En el transcurso de más de un siglo solo pueden señalarse episódicas aplicaciones de las transformaciones proyectivas. Esta rama aún no se había separado para formar una disciplina independiente. Por esto la construcción rigurosa y sistemática de la geometría descriptiva realizada por Monge hacia finales del siglo XVIII jugó el papel de premisa necesaria para la construcción de la geometría proyectiva. Un ejemplo de propiedad descriptiva, o de posición es el Teorema del "hexagrama místico" de Blaise Pascal se considera para el caso de una circunferencia y que se inspiró en el trabajo de Desargues: Sí un hexágono se inscribe en una cónica, entonces los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos son colineales, y, recíprocamente, si los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos de un hexágono son colineales, entonces el hexágono está inscrito en una cónica.

En este teorema de Pascal, un hexágono inscrito en una cónica se proyecta en un hexágono inscrito en una cónica y los puntos colineales se proyectan en puntos colineales y, en consecuencia, el teorema se conserva; y es descriptivo.

Teorema del "hexagrama místico", ó hexágono, de Pascal para una circunferencia. Los puntos L, M, N de intersección de los tres pares de lados opuestos AB y DE, BC y EF y FA y CD de un hexágono ABCDEF inscrito en una circunferencia estan en una recta, sobre la llamada recta de Pascal del hexágono.



e.

Sean X,Y,Z de la figura los puntos de intersección de AB y CD, CD y EF y AB, y considérese que DE, FA, BC son transversales que cortan a los lados del triángulo XYZ. por el teorema de Menelao tenemos :

$$(\overline{XL}/\overline{LZ})(\overline{ZE}/\overline{EY})(\overline{YD}/\overline{DX})=-1,$$
$$(\overline{XA}/\overline{AZ})(\overline{ZF}/\overline{FY})(\overline{YN}/\overline{NX})=-1,$$
$$(\overline{XB}/\overline{BZ})(\overline{ZM}/\overline{MY})(\overline{YC}/\overline{CX})=-1.$$

Igualando el producto de los tres primeros miembros de las ecuaciones anteriores al de los tres segundos, miembros y rodeando las razones, obtenemos

$$(1)\quad \left(\frac{\overline{XL}}{\overline{LZ}}\cdot\frac{\overline{ZM}}{\overline{MY}}\cdot\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}}\right)\left(\frac{\overline{XB}\cdot\overline{XA}}{\overline{XC}\cdot\overline{XD}}\right)\left(\frac{\overline{YC}\cdot\overline{YD}}{\overline{YE}\cdot\overline{YF}}\right)\left(\frac{\overline{ZE}\cdot\overline{ZF}}{\overline{ZB}\cdot\overline{ZA}}\right)=-1.$$

pero $\overline{XB}\cdot\overline{XA}=\overline{XC}\cdot\overline{XD}$, $\overline{YC}\cdot\overline{YD}=\overline{YE}\cdot\overline{YF}$,

$\overline{ZE}\cdot\overline{ZF}=\overline{ZB}\cdot\overline{ZA}$,

y en consecuencia cada uno de los tres últimos factores entre paréntesis de (1) tiene el valor 1; por lo que

$$(\overline{XL}/\overline{LZ})(\overline{ZM}/\overline{MY})(\overline{YN}/\overline{NX})=-1,$$

o sea, L, M, N, son colineales.

Philippe La Hire

L. Hire (1640-1718) fue alumno de Desargues estudió propiedades de las polares y esta teoría fue considerablemente desarrollada por Desargues en su tratado sobre secciones cónicas de 1639 y por su estudiante La Hire, este mismo hizo una copia manuscrita del libro de Desargues.

Jean Victor Poncelet

El gran geómetra francés Jean V. Poncelet (1788-1867) hizo del teorema de Desargues de los dos triángulos el fundamento de su teoría de figuras homológicas.

El resurgimiento real de la geometría proyectiva fue impulsado por Poncelet como prisionero de guerra ruso, cogido durante la retirada de Napoleón de Moscú y sin libros a la mano Poncelet planeó su gran obra sobre geometría proyectiva que después de su libertad y vuelta a Francia publicó en París en 1822 Traite de Proprietes projectives des figures. Esta obra es de gran importancia para la historia de la geometría proyectiva.

El problema de proyectar fortificaciones atrajo a Gaspar Monge hábil geómetra inventor de la geometría descriptiva, es importante observar que esta materia, aunque distinta de la geometría proyectiva, utiliza la proyección y sección. Monge fue un profesor inspirado que reunió a su alrededor un gran número de alumnos brillantes en la Ecole Politechnique, entre ellos estaban Brianchon, Carnot, y Poncelet. Estos hombres estaban muy impresionados por la geometría de Monge. Intentaron demostrar que los métodos puramente geométricos podían lograr tanto ó más que los métodos algebráicos o analíticos introducidos por Descartes. Carnot en particular deseó "liberar a la geometría de los jeroglíficos del análisis".

Fue Poncelet quien resucitó la geometría proyectiva fue de los primeros en apreciar completamente que esta materia era verdaderamente una rama de las matemáticas completamente nueva.

La idea principal de Poncelet reside en el empleo de dos operaciones: La proyección y la sección,además introdujo la teoria de homología.

Dentro de los orígenes de la geometría proyectiva estuvieron Desargues, Pascal, Poncelet quienes desarrollaron e investigaron a la geometría proyectiva.

La separación de las propiedades proyectivas de las figuras en una clase independiente y el establecimiento de las correspondencias entre las propiedades métricas y proyectivas fueron objeto de investigación .

La reintroducción delas consideraciones proyectivas a la geometría no ocurrío sino hasta finales del siglo XVIII cuando el gran geómetra francés Gaspard Monge (1746-1818) creó su geometría descriptiva. Esta ciencia que contiene una forma de representar y analizar objetos tridimensionales por medio de sus proyecciones sobre ciertos planos tuvo su origen en el proyecto de fortificaciones, el estudio de las propiedades descriptivas de las figuras geométricas se conoce como geometría proyectiva .

En el siglo XVI se fue desarrollando la noción de que un conjunto de líneas paralelas puede considerarse como pasando por un punto en el infinito.

Se planteó la idea y surgió la noción de ampliar el plano euclideano al añadirles puntos al infinito, esta geometría del plano extendido es una geometría de puntos líneas e intersecciones, cualquier teorema sobre los puntos, las líneas y las intersecciones que sea verdadero en ese plano corresponden a la geometría proyectiva.

El teorema de Desargues para dos triángulos fue dado por Desargues en una obra de perspectiva en 1636, este teorema se ha hecho básico en la teoría actual de la geometría proyectiva

Blas Pascal escribió "Ensayo sobre las conicas", escribió el teorema del "Hexagrama místico" en este teorema de Pascal, un hexágono inscrito en una cónica se proyecta en un hexágono inscrito en una cónica y los puntos colineales se proyectan en puntos colineales y en consecuencia el teorema se conserva y es descriptivo posteriormente la geometría descriptiva de Monge a fines del siglo XVIII fue necesaria para la geometría proyectiva.

Poncelet hizo del Teorema de Desargues de los dos trián - gulos el fundamento de su teoría de figuras homológicas en 1822 escribió el "Tratado de Propiedades proyectivas de las figuras".

Poncelet fue de los primeros en apreciar que esta materia era verdaderamente una rama de las matemáticas completamente nueva.

C A P I T U L O IV

G E O M E T R I A P R O Y E C T I V A

Teoremas de Geometría Proyectiva

Un teorema característico de la geometría proyectiva es decir de la geometría de puntos e intersecciones de lineas es el Teorema de Papuss ya desde la antiguedad se estudiaba este tipo de teoremas.

En el siglo III después de Cristo siendo probado por métodos euclideanos este Teorema de Papuss fue simplemente agregado a las proposiciones de la geometría de Euclides.

Posteriormente en el siglo XVII fueron establecidos los principales teoremas de esta geometría y en el siglo XIX la geometría proyectiva fue completamente libre de las nociones métricas.

Teorema de Papuss de Alejandria. Dos líneas rectas l y m se sitúan dentro de un plano y los puntos distintos A, B y C estan situados sobre L mientra que los puntos distintos A'B'yC' estan situados sobre m. Luego las tres intersecciones de las parejas de puntos AB', A'B,BC', B'C y CA',C'A se sitúan sobre una línea, como en la figura 1.

Posteriormente tiempo más tarde Blaise Pascal a la edad de 16 años, formuló un teorema, también proyectivo, que puede considerarse como una generalización del Teorema de Papuss:

Los seis puntos distintos A,B,C, A', B',C'. se sitúan en una figura cónica. luego las tres intersecciones de las parejas de lineas AB', A'B; BC', B'C; y CA', C'A se sitúan sobre una línea, como en la fig 2.

Este teorema es verdadero para cualquier figura cónica para un círculo, para una elipse, para una parábola y para una hipérbola que puedan ser todas representadas como secciones de un cono circular.

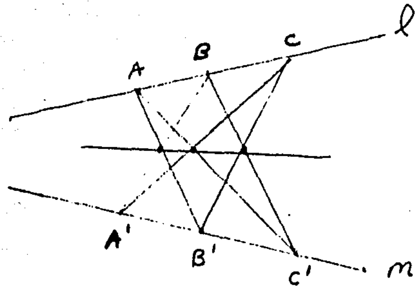


figura 1.

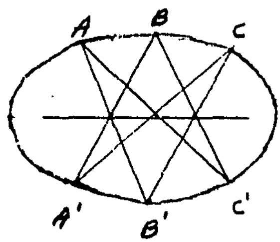


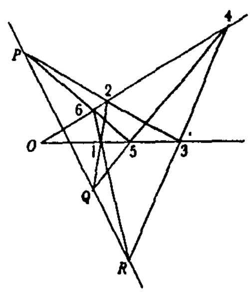
figura 2.

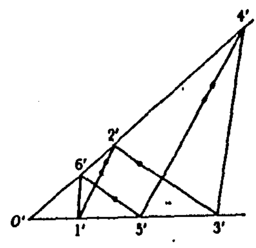
Teorema de Pappus. Sí los vértices 1,2,3,4,5,6 de un hexágono 123456 están alternativamente en un par de rectas, entonces las tres intersecciones P, Q, R, de los lados opuestos 2 3 y 5 6 , 4 5 y 1 2 , 61 y 3 4 del hexágono son colineales como en la fig.(a) . Proyéctese la recta PQ al infinito y supóngase que la intersección O delas rectas 1 3 5 y 2 4 6 no están en P Q. Entonces 1',3',5' son colineales; 2', 4',6' son colineales; O'es un punto finito; 2' 3' es paralela a 5'6' y 4'5' es paralela a 1'2'. Tenemos que demostrar que 6' 1' es paralela a 3'4'. Ahora bien fig.(b)como 2' 3'es paralela a 5'6' y 4'5' es paralela a 1' 2',

$$\overline{O'6'} / \overline{O'2'} = \overline{O'5'} / \overline{O'3'} \quad \text{y} \quad \overline{O'1'} / \overline{O'5'} = \overline{O'2'} / \overline{O'4'} .$$

Se deduce que

$$\overline{O'6'} / \overline{O'1'} = \overline{O'4'} / \overline{O'3'} \quad \text{y } \overline{6'1'} \text{ es paralela a } \overline{3'4'} .$$



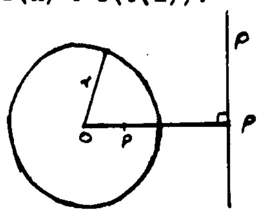


Sí O está en PQ,entonces las rectas 1'3'5' y 2'4'6' son paralelas.Pero entonces, $\overline{1'5'} = \overline{2'4'}$ y $\overline{5'3'} = \overline{6'2'}$.
Se deduce que $\overline{1'3'} = \overline{6'4'}$ y que 6' 1' es paralela a 3' 4'.

Sea $O(r)$ una circunferencia fija como en la figura y sea P un punto ordinario distinto de O. Supongamos que P' es el inverso de P en la circunferencia $O(r)$. Entonces, la recta p que pasa por P' y es perpendicular a OPP' se llama polar de P para la circunferencia $O(r)$. La polar de O se considera que es la recta del infinito, y la polar de un punto ideal P se considera que es la recta que pasa por O perpendicular a la dirección OP.

Sí la recta p es la polar del punto P, entonces el punto P se llama polo de la recta p.

La transformación polo-polar establecida por la circunferencia $K=O(r)$ se designa por $P(K)$ o $P(O(r))$.



Pueden encontrarse propiedades incipientes de las polares en las obras de Apolonio y Pappus. La teoría fue considerada y desarrollada por Desargues en su tratado sobre secciones cónicas de 1639 y por su estudiante Philippe de La Hire (1640-1718) y luego fue elaborada en la primera mitad del siglo XIX en relación con el estudio de las secciones cónicas en la geometría proyectiva. El término polo fue introducido en 1810 por el matemático francés F.J. Servois, y el término correspondiente polar, por Gergonne, dos ó tres años después. Gergonne y Poncelet desarrollaron la idea de polos y polares en un método regular a partir del cual se extendió el elegante principio de dualidad de la geometría proyectiva.

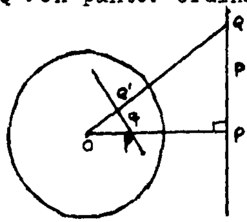
Teorema de polo y polares.

Teorema. 1) Si, respecto a una circunferencia dada, la polar de P pasa por Q, entonces la polar de Q pasa por P.

2) Sí respecto a una circunferencia dada, el polo de la recta p está en q, entonces el polo de la q está en la p.

3) Sí respecto a una circunferencia dada, P y Q son los polos de p y q, entonces el polo de la recta PQ es el punto de intersección de p y q.

1) Supongamos que P y Q son puntos ordinarios. Sea P' como en la figura.



el inverso de P y Q' el inverso de Q en la circunferencia dada y supongamos que P' y Q son distintos. Entonces $OP \cdot OP = OQ \cdot OQ'$ y por consiguiente, P, P', Q, Q' son conciclicos y $\measuredangle PP'Q = \measuredangle PQ'O$.

Pero, como Q esta en la polar de P, $\measuredangle PP'Q = 90^\circ$. Por consiguiente, $\measuredangle PQ'O = 90^\circ$, y P esta en la polar de Q. Si P'= Q, el teorema es evidente. Los casos en que P, o Q, ó ambos P y Q sean puntos i ideales, se manejan fácilmente.

2) Sean P y Q los polos de p y q. Se indica que q (la polar de Q pasa por P. se deduce por 1), que p (la polar de P) pasará por Q.

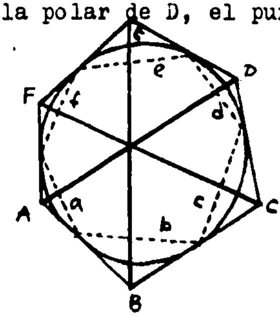
3) Supongamos que p y q se corten en R. Entonces la polar de P pasa por R, luego la polar de R pasa por P. Análogamente, la polar de R pasa por Q. Por consiguiente, la recta PQ es la polar de R.

. Teorema de Brianchon para una circunferencia , este teorema fue descubierto y publicado en un artículo de C. J. Brianchon (1785-1864) en 1806, cuando era aún estudiante en la Ecole Politectinique de París, más de 150 años después de que Pascal había establecido su famoso teorema del hexagrama místico.

El artículo de Brianchon fue una de las primeras publicaciones en que empleó la teoría de polos y polares para obtener nuevos resultados geométricos y su teorema jugó un papel principal en el reconocimiento del transcendente principio de dualidad. La siguiente demostración del teorema de Brianchon es esencialmente la dada por Brianchon mismo.

Teorema de Brianchon para una circunferencia . Si un hexágono se circunscribe a una circunferencia,las tres rectas que unen pares de vértices opuestos son concurrentes.

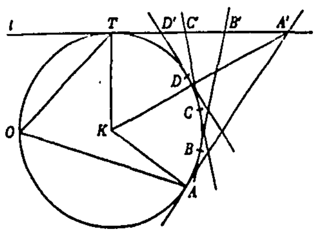
Sea ABCDEF un hexágono circunscrito a una circunferencia. Las polares respecto a una circunferencia, de los vérticesA,B,C,D,E, F, son los lados a,b,c,d,e,f de un hexágono inscrito. Como a es la polar de A y d la polar de D, el punto ad es el polo de la



recta AD. Análogamente, el punto be es el polo de la recta BE,y elpunto cf es el polo de la recta CF. Ahora bien, por el teorema del hexagrama místico de Pascal, los puntos ad, be,cf son coli - neales,se sigue que las polares AD, BE, CF son concurrentes.

Teorema de Charles. Sean A,B, C, D, cuatro puntos distintos de una cónica propia y supongamos que las tangentes a la cónica en A,B, C, D corten a una tangente fija, t, a la cónica en los puntos A',B',C',D' respectivamente. Entonces, si O es un punto de la cónica, O(AB,CD)=(A'B',C'D').

Como el teorema es proyectivo, basta establecerlo para el caso en que la cónica propia sea una circunferencia.



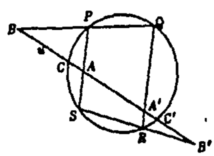
Sea K el centro de la circunferencia y T el punto de contacto de la tangente t. Entonces $\measuredangle$ A'KT $=\frac{1}{2}\measuredangle$ AKT$=\measuredangle$ AOT.

Se deduce que los haces O(ABCD) y K(A'B'C'D') son congruentes y O(AB,CD)=K(A'B',C'D') = (A'B',C'D').

Hilera de puntos en involución. Si los pares de puntos A, A'; B,B'; C,C';...están en una línea recta y sí están situados con respecto a un punto O de la línea de tal manera que OA.OA'= OB.OB'=OC.OC'..,se dice que los puntos están en involución.

El punto O es el centro de involución y los dos puntos que pertenecen al mismo par se llaman puntos conjugados de la involución. La línea misma es llamada la base de la involución.

Teorema : Si en un cuadrángulo inscrito en una circunferencia, cualquier transversal que no pasa por el vértice,interseca la circunferencia y los pares de lados opuestos del cudrángulo en una involución. Si se considera el cudrángulo PQRS inscrito en una circunferencia y la transversal u que intersecta pares de lados opuestos y la circunferencia como se indica en la figura.



Entonces,considerando las intersecciones de los haces P(CSC'Q) y R(CSC'Q)con la línea u tenemos $\{CAC'B\} = \{CB'C'A'\}$.

Permutando,tenemos $\{CAC'B\} = \{C'A'CB'\}$.

Lo cual demuestra que los pares de puntos A, A'; B,B';C C'; están en involución . Los puntos en los cuales el otro par de lados opuestos del cuadrángulo intersecan a u, pertenecen también a la involución.

Teorema de Carnot. Si una circunferencia interseca los lados BC, CA, AB del triángulo ABC en los puntos D, D'; E, E'; F, F'; respectivamente, entonces

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}=1.$$

Supongamos que DE y D'E' intersecan a AB en G y G' respectivamente. Entonces aplicando el Teorema de Menelao al triángulo ABC con transversales EG y E'G', tenemos

$$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1 \quad \ldots\ldots\ldots \ (1)$$

y

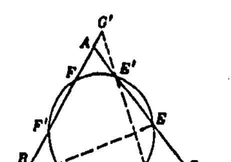
$$\frac{AG'}{G'B}\cdot\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}=-1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

también AB es una transversal que corta los lados del cuadrángulo inscrito DED'E' y la circunferencia en puntos en involución. De aquí

$$\{ABF'G'\}=\{BAFG\}=\{ABGF\}.$$

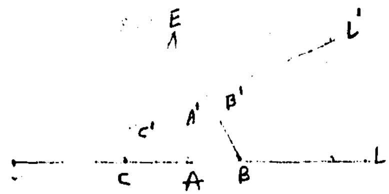
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{AF'}{F'B}=\frac{AG}{GB}\cdot\frac{AG'}{G'B}$$

Esto junto con las Ecs. (1) y (2) por multiplicación y reducción da la relación del teorema.



. Dentro de la teoría actual de la Geometría Proyectiva se define la perspectividad, la proyectividad, se da el Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva, se construye el plano proyectivo.

(1) Para la perspectividad el punto E es el centro de proyección, L es una recta en el plano π, L' es su imagen en π'.



Considerando que se lleva a cabo en el plano E, L, L'. Si, entonces tenemos en un plano dos rectas L, L', no necesariamente distintas, y un punto E que no esté en L ni en L', entonces el asociar puntos A, B, C,... en L, respectivamente, con las intersecciones A', B', C',... de EA, EB, EC,... con L' se llama perspectividad, y escribimos

$$(L)\overset{E}{\barwedge}(L'); \quad \text{TAMBIÉN } (ABC\ldots)\overset{E}{\barwedge}(A'B'C'\ldots);$$

se dice que la perspectividad es de L a L' y que tiene centro en E. Llamando T a la perspectividad, escribimos

(A)T = A ; (B)T = B' , (C)T = C,...

Definición. Un producto de perspectividades se llama proyectividad.

Notacion en el caso de una proyectividad escribimos:

$$(L)\doublebarwedge(L'); \quad \text{TAMBIÉN } (ABC\ldots)\doublebarwedge(A'B'C')$$

en donde A', B', C' ... corresponden, respectivamente, a A, B, C,... Una perspectividad es una sección transversal de la proyección vemos que las perspectividades conservan los invariantes proyectivos.

Teorema . Dados tres puntos(distintos) colineales A, B, C; y otros tres puntos (distintos) colineales A', B', C'. Entonces existe una proyectividad que convierte a A, B, C en A',B',C' respectivamente .

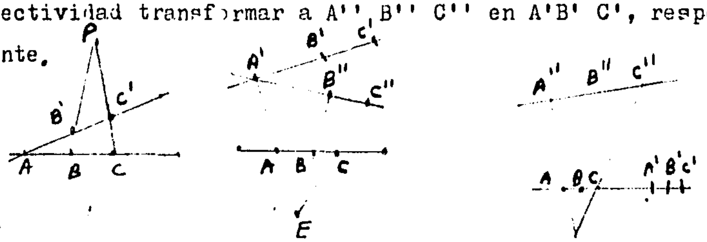
Demostración .Considerese en primer lugar el caso en el cual A=A', y en el cual la recta ABC es distinta de la recta A',B',C' (fig a). Sea P la intersección de B B' y C C'; claro está que BB' puede ser paralela a CC', suponiendo entonces que BB'yC C' se intersectan, tenemos el punto P, y claramente

$(ABC)\frac{P}{\wedge}(AB'C')$ en donde A se transforma en A'(=A), B en B', C en C', como lo requeríamos .

Supongamos ahora, como en el segundo caso, que A' no está sobre larecta ABC (Figb) . Tomemos un punto E sobre AA'(E≠A, E≠A'); y tomamos una recta L que pase por A', pero que aparte de esta condición no tenga posición especial alguna , en particular L≠A'B' y tal que L no pase por E.

Con centro en E proyéctese ABC en A'B''C'' sobre L. Ahora debido al primer caso,podemos proyectar A'B''C'' en A'B'C'.

En la figura c proyéctese a A B C en A'' B''C'' que están sobre alguna recta distinta de la recta que contiene a ABC y que no esté en una posición especial. Entonces, debido a las consideraciónes anteriores podemos mediante una proyectividad transformar a A'' B'' C'' en A'B' C', respectivamente.



(a) (b) (c)

Para cuatro puntos colineales A,B,C,D consideremos ahora el número $\dfrac{CA/CB}{DA/DB}$

Este número se llama razón cruzada de C,D con respecto a A,B y se escribe R(A,B;C,D). Veremos que dos tétradas colineales (A,B,C,D)(A′, B′, C′, D′) son proyectivamente equivalentes, es decir (ABCD) $\wedge$ (A′,B′, C′, D′), si y sólo si

R (A,B;C,D)= R(A′,B′;C′, D′).

Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva. Existe una y sólo una proyectividad que transforma a tres puntos colineales dados A,B,C en tres puntos colineales dados A′, B′, C′.

Demostración . Sean T,U proyectividades que transformen a A,B,C, respectivamente, en A′B′C′. Para demostrar que T=U, sea X cualquier punto de la recta ABC (X≠A , X≠B , X≠C).

Entonces R (A,B; C, X)= R(A′,B′; C′,(X) T);y

R (A, B;C,X)=R(A′,B′; C′,(X)U). Por lo tanto

R (A′,B′; C′,(X) T) = R(A′, B′; C′(X) U), de donde

(X)T= (X)U y T=U.

Una consecuencia del Teorema Fundamental.

Teorema. Sea T una proyectividad de una recta L a una recta L′≠L bajo la cual O= L.L′ permanece invariante,es decir, (O)T =O . Entonces T es una perspectividad.

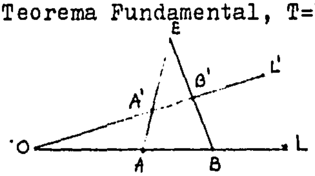
Demostración. tomemos dos puntos A, B sobre L como en la figura 1

Sea A′=(A) T , B′= (B)T . Sea E= A A′·B B′.

Sea U la perspectividad $L \overset{E}{\underset{\wedge}{}} L'$. Entonces (O)U=O ,(A)U= A′ (B)U=B′ ,

por consiguiente, T y U tienen los mismos efectos sobre tres puntos distintos, por el Teorema Fundamental, T=U , y entonces T es una perspectividad.

fig.1



Construccion del Plano Proyectivo

Se construye un plano en el que el postulado de las paralelas no debe ser válido, además dos rectas cualesquiera deben cortarse en uno y sólo un punto.

En el plano euclideano se modifica el significado de las palabras punto, recta, plano, el termino "euclideano" usualmente indica que se emplea el concepto de "distancia", para evitar este significado hablaremos del plano afín.

Definición. Punto ó punto proyectivo, es ya sea un punto común ó un punto Ideal.

Definición. Una recta ó recta proyectiva, consta de una recta común y del Punto Ideal que ésta determina; también se dice que la totalidad de los Puntos Ideales forman una Recta.

A la Recta, que consta de todos los Puntos Ideales la llamaremos Recta Ideal. Cualquier otra Recta tiene solamente un Punto Ideal .

En otras palabras, los puntos y las rectas, tal como los hemos definido, forman en conjunto un plano afín .

A este plano se le pueden añadir nuevos puntos los llamados Puntos Ideales, de tal manera que el objeto resultante sea un plano proyectivo.

Axiomas en el plano proyectivo se tomará los conceptos de punto, recta y la relación sobre como términos no definidos

Tomemos los siguientes axiomas:

0. Existe al menos un punto y al menos una recta.
1. Sí P y Q son puntos distintos , entonces existe por lo menos una recta que pasa por ambos.
2. Sí P y Q son puntos distintos, entonces existe a lo sumo una recta que pasa por ambos.
3. Sí m y n son rectas distintas, entonces existe al menos un punto que está sobre ambas.
4. Hay por lo menos tres puntos sobre cualquier recta.
5. No todos los puntos están sobre la misma recta

Teorema. 1 Sí m y n son rectas distintas,entonces existe a lo sumo un punto que esté sobre ambas.

Demostración. Supóngase que hubiera dos puntos distintos P y Q que estuvieran tanto en m como en n.

Entonces sobre estos dos puntos distintos habría más de una recta,lo cual contradice el Axioma 2.

La demostración queda completa

En esta demostración se empleó sólamente el axioma 2.

se tiene relación entre el Teorema 1 y el axioma 2.

La afirmación del Teorema 1 se puede obtener de aquella del Axioma 2 intercambiando las palabras punto y recta.

Dada una afirmación que esté redactada solamente en términos de las palabras punto recta y sobre podemos obtener otra afirmación,llamada su dual,intercambiando las palabras punto y recta

. Tratemos de dualizar los demás axiomas. Al dualizar el Axioma 0, obtenemos nuevamente el Axioma 0: es el autodual.
El dual del Axioma 1 es el Axioma 3, y éste ya lo conocemos,
El dual del axioma 2 es el teorema 1.
" " " " 3 " " Axioma 1.
" " " " 4 que todavia no conocemos es el siguiente:

Teorema 2. Por cualquier punto pasan por lo menos tres rectas, para la demostración de este Teorema 2 antes se etablecerá un Lema : Sea P un punto que no esté sobre la recta L, y sean A y B dos puntos (distintos) que estén sobre L. Sí a es una recta que pasa por P y A , y b es una recta que pasa por P y B, entonces a y b son distintas.

Demostración. Puesto que P está sobre a pero no está sobre L tenemos que a $\neq$ L como en la figura 1 .Por el Teorema 1, solamente el punto A está tanto sobre a como sobre L ; B está sobre L, y por lo tanto no está sobre a. Entonces b $\neq$ a, puesto que B está sobre b pero no sobre a.

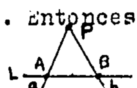


fig. 1

En esta demostración hemos empleado solamente el Teorema 1; en cuanto a los Axiomás el 2.

Demostración del Teorema 2. Sea P un punto . Se quiere demostrar que existen tres rectas distintas que pasan por P.
Sí se pudiera encontrar una recta L que no pasara por P, podríamos completar fácilmente la demostración.
De hecho, supóngase que hubiéramos encontrado una recta tal .
Tomemos tres puntos A, B, C sobre ella .
Por el axioma 4 . Sean a, b, c rectas que pasen por P y A, P y B y P y C respectivamente; se ha empleado el axioma 1 (P$\neq$A, puesto que A está sobre L pero P no lo está ; y análogamente P$\neq$B , P$\neq$C).
. Entonces por el lema a$\neq$b , a$\neq$c , b$\neq$c .

El siguiente Teorema es el dual del Axioma 5.

Teorema 3. No todas las rectas pasan por el mismo punto.

Demostración . Sea P un punto . L una recta ; se emplea el Axioma 0 puesto que si no existe alguna recta entonces no podemos tomar una; sin embargo el axioma 0 nos proporciona rectas de las cuales podemos tomar una.

Sí Lno pasa por P ,lo cual puede suceder entonces L es una recta del tipo que buscamos.

Sí L pasa por P, sea Q un punto sobre L, $Q \neq P$; hemos empleado el Axioma 4.

Y sea R un punto que no este sobre L, por el Axioma 5.

Ahora $R \neq Q$, puesto que Q esta sobre L, pero R no está .

Por el Axioma 1 existe una recta que pasa por Ry Q. Puesto que R está sobre r, pero no sobre L, tenemos $r \neq L$. Por el Axioma 2,entonces, Pno está sobre r; y r es una recta del tipo que buscamos..

En la siguiente lista se muestra en una columna los axiomas y en la otra sus duales.

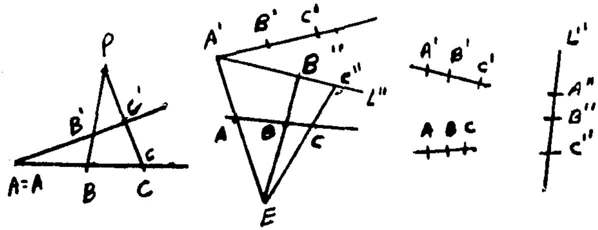
Axioma 0	Axioma 0
Axioma 1	Axioma 3
" 2	Teorema1
" 3	Axioma 1
" 4	Teorema 2
" 5	Teorema 3

Se puede enunciar el llamado principio de dualidad.

Principio de Dualidad. Si se puede deducir un teorema a partir de los axiomas,entonces su dual también se puede deducir a partir de los axiomas.

Se puede demostrar el Teorema. Dados tres puntos (distintos) colineales A, B, C y cualesquiera otros tres puntos (distintos) colineales A', B', C', entonces existe una proyectividad que transforma a A, B, C en A'', B', C' respectivamente.

Considérese el caso particular en el cual A= A, pero ABC y A'B'C' son rectas distintas como en la figura



Sean P=BB'•C C'. Por el axioma 3 sabemos que se intersectan. tenemos que $(ABC) \overset{P}{\barwedge} (A'B'C')$ En el segundo caso, sea A' $\neq$ A , y sea A' tal que no esté sobre ABC. Sea E un punto sobre A A', E $\neq$ A, E $\neq$ A'; hemos empleado el Axioma 5.

Sea L'' una recta que pase por A', pero L'' $\neq$ A'B'C', L'' $\neq$ A'AE; hemos empleado el dual del Axioma 5 , es decir, el Teorema 3.

Proyectamos ahora A, B, C dando origen a A'B'C', tal como lo hicimos en el primer caso.

Sea A'' un punto que no esté sobre ABC y tampoco sobre A'B'C'; tenemos que ver que existe un punto tal

Sea L'' una recta que pase por A'' pero no por A ni por A'; hemos empleado el Teorema 2.

Sean B'', C'' dos puntos más sobre L''. Debido al segundo caso podemos, mediante una proyectividad convertir a A, B, C en A'', B'' C'' respectivamente; y por la misma razón podemos convertir a A'', B'',C'' en A'B'C',respectivamente.

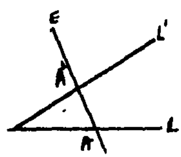
El producto de estas dos proyectividades convierte A,B,C en A'B'C'respectivamente.

Que se puede decir acerca del dual del teorema anterior Cual es su dual, para dualizar un teorema debe estar enunciado en función de conceptos primitivos de punto,recta, y sobre en cuyo caso solamente tendríamos que intercambiar las palabras punto y recta. Pero la afirmación anterior contiene la palabra proyectividad,se puede dualizar su definición.

Por definición una perspectividad es una relación entre puntos sobre una recta con puntos sobre otra recta.

Definición. Sea L', L' dos rectas, E un punto que no esté sobre L y no esté sobre L'.

Al decir perspectividad de L a L'con centro en E queremos decir transformación que asocia a cada punto A sobre L el punto A'= EA·L'sobre L'.



Cuál es el dual del concepto de perspectividad. En lugar de considerar dos rectas, L y L' trataremos con dos puntos R, R'y haremos corresponder a ciertas rectas que pasen por R'ciertas rectas que pasen por R.

Se dualizara la definición.

Definición. Sean R y R'dos puntos,e una resta que no pase por R ni por R'. Al decir perspectividad de R en R' con eje e queremos decir transformación que asocia a cada recta a que pase por R la recta a'= ea·R' que pasa por R'.

Se establecen los axiomas para el plano afín y se obtiene el plano proyectivo añadiendo los puntos ideales.

Axiomas para un plano afín

A0. Existe por lo menos un punto y al menos una recta.

A1. Por cualesquiera dos puntos pasa al menos una recta.

A2. Por cualesquiera dos puntos pasa a lo sumo una recta.

A3. Sí L es una recta y P es un punto que no esté sobre L, entonces existe una y solamente una recta L'que pasa por P y que no intersecta a L (Podemos llamar a este axioma el Postulado de las paralelas)

A4. Sobre cada recta hay al menos dos puntos

A5. No todos los puntos están sobre la misma recta.

Los axiomas anteriores se llaman axiomas de alineación y se define lo que es un plano proyectivo.

Definición. Plano proyectivo es el concepto compuesto de dos conjuntos no vacíos, los elementos de uno de los cuales se llaman puntos, aquellos del otro rectas, y de una relación sobre que existe entre los puntos y las rectas para los cuales se cumplen los axiomas de alineación

Dentro de la historia de la geometría proyectiva un teorema característico es el Teorema de Papuss, tiempo más tarde Blaise Pascal formuló un teorema proyectivo que se puede considerar como una generalización del Teorema de Papuss.

Se construye el plano proyectivo, el postulado de las paralelas no debe ser válido y dos rectas cualesquiera deben cortarse en uno y sólo un punto.

En el plano proyectivo se define el punto proyectivo ó ideal, rectas proyectivas, se enuncian los axiomas para un plano proyectivo, dada una afirmación que este redactada en términos de las palabras punto recta y sobre podemos obtener otra afirmación llamada su dual, intercambiando las palabras punto y recta.

Los axiomas para un plano proyectivo también se dualizan y se enuncia el llamado Principio de Dualidad.

Se establecen los axiomas para el plano afín y se obtiene el plano proyectivo añadiendo los puntos ideales.

En la teoría actual de la geometría proyectiva se define la perspectividad, la proyectividad, se da el Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva se construye el plano proyectivo.

CAPITULO V

CONCLUSIONES GENERALES

Ya desde la Edad Media hubo antecedentes historicos de la geometría en el dibujo y la pintura, este periodo de la Historia Universal comprendido entre 476 D. C. a 1456.

Puede decirse en general que la vida económico medieval descansó en la agricultura, la ganadería, la artesania, y el comercio, esta floreció sobre todo en la Edad Media, a través de las carreteras, los rios y el mar. Los pintores en la Edad Media - buscaban representar los temas centrales del drama cristiano su pintura tomaba aspectos bidimensionales sobre fondos dorados. Hay pruebas de la geometría en el dibujo como es el ejemplo de un testimonio del año 1240 en Florencia correspondiente al Album de Villard de Honnercourt; sus dibujos muestran conexión entre arquitectura, geometría, figuración humana y animalística.

En la Edad Media se conocían los Elementos de Euclides, los matemáticos europeos comenzaron a concer el álgebra en el siglo XII la fuente de sus conocimientos sobre el álgebra fue la obra de Al-Khuwarizmi, se introdujo la trigonometría con resultados de Ptolomeo y Menelao, las matemáticas se ampliaron con trabajos de matemáticos como Leonardo de Pisa y Oresme.

Posteriormente alrededor de los siglos XV y XVI existió el desarrollo cultural e ideológico de una serie de paises de Europa Occidental y Central este desarrollo se conocio bajo el nombre de Renacimiento. El Renacimiento se dio al terminar la Edad Media como un movimiento cultural surgido en Italia vino a ser "nuevo nacimiento" de los grandes valores griegos y latinos se se encontro en ellos inspiración y guía lo, mismo en la producción literaria que en las elaboraciones de arquitectura, escultura, pintura, filosofía o ciencias.

Dentro de la pintura se desarrollaron cambios hay admiración por la figura humana principalmente buscaban la representación física, real de las cosas sus trabajos expresaban la distancia, el volumen, el espacio; la perspectiva adquirió importancia fundamental.

Uno de los pintores más representativos fue Piero della Francesca una de sus pinturas más famosas es "Virgen con el Niño", "La Flagelación de Cristo", valora la geometría en el dibujo se sirvió de la perspectiva para perfeccionar los espacios arquitectónicos y luminosos.

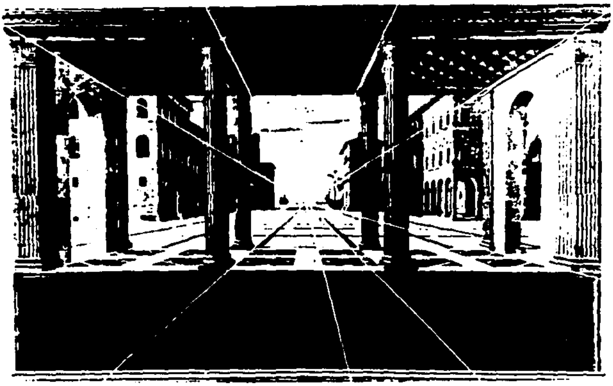
Otros pintores representativos en la pintura del Renacimiento fueron Perugino, Mantegna, Mesina, Boticelli.

La geometría adquiere un papel esencial en el ordenamiento de los grupos y los personajes en las que se ve una estructura reducida a cuerpos simples: un óvalo para la cabeza, de frente ó de perfil, un cilindro para el cuello, un volumen regular para las vestimentas ó tocados, cimeras, penachos, etc.

La geometría en la pintura del Renacimiento fue un elemento tomado en cuenta para la creación de muchos trabajos de pintura.

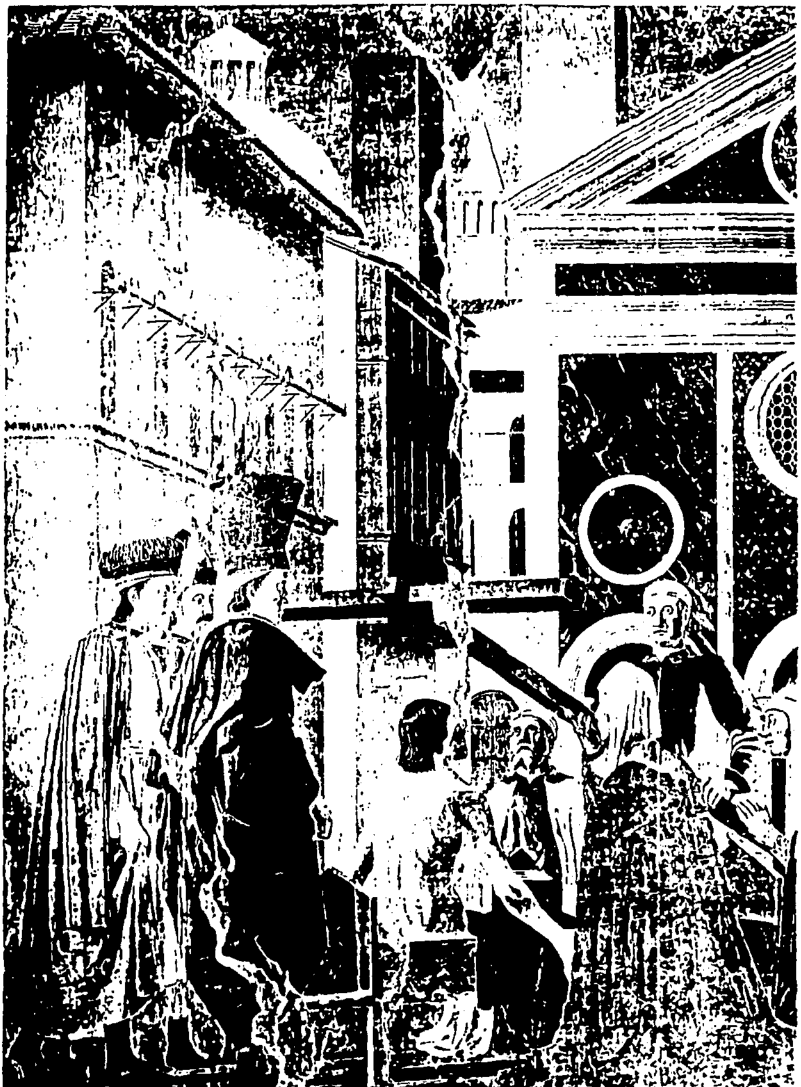
"Anunciación" de Piero della Francesca en 1455
se encuentra en Arezzo, Iglesia de San Francisco
en Florencia.

En estas pinturas Piero della Francesca muestra el interes por la perspectiva y la figura geometrica.



"Vista de la arquitectura de una ciudad" de P. Francesca.

"La Flagelación" de P. Francesca.



"La Leyenda de la Cruz",1455, Arezzo, Iglesia de San Francisco en Florencia.

Los temas principales en la pintura del Renacimiento fueron la figura humana,motivos religiosos cristianos espacios arquitectónicos, paisajes.Se caracterizó además por expresar la realidad física,el volumen,la distancia,el espacio , el color . Sus trabajos se apoyaron en la figura geométrica y en la perspectiva.

Uno delos inicios de la perspectiva en la pintura se dió con los trabajos de Piero della Francesca en el siglo XIV él definió la perspectiva. "La perspectiva es una rama de la pintura que comprende cinco partes: la primera es el órgano de la vista, es decir el ojo; la segunda es la forma del objeto visto; la tercera es la distancia entre el ojo y el objeto; la cuarta son las líneas que se inician en la superficie del objeto y se dirigen al ojo;la quinta es el plano queestá entre el ojo y el objeto donde quiera que uno intente colocar los objetos".

Leon Battista Alberti en el siglo XIV en su trabajo De Pictura intuyó que no sólo la distancia con respecto al ojo del expectador hacía variar la dimensionalidad de las figuras,sino el carácter de las mismas su materialidad,su definición,su cromatismo variaban según el aire y por tanto también la distancia que se interponía entre estas y el espectador . Alberti comparó la pintura como una "ventana transparente a través de la cual contemplamos una parte del mundo visible" Objetos de igual tamaño empiezan a disminuir en cuanto se alejan del espectador,las paredes suelos y techos que delimitan el interior o la base en la cual fueron dispuestos los elementos de un paisaje empiezan a"alejarse" hacia el fondo; y tales líneas que forman ángulos rectos en el plano pictórico evolucionaron en líneas de fuga en perspectiva que tendían a converger hacia un centro. Este centro ya había tomado carácter de único punto de fuga en el cual las "ortogonales" convergían con precisión al menos en un plano libre.

Dentro de la perspectiva en la pintura Durero en su libro IV de sus Instituciones Geométricas explica mediante un cubo, iluminado y su sombra proyectada la perspectiva de un cubo dibujado, prolongando líneas y concurriendo en puntos además Durero escribió "que los pintores que no hayan percibido su error se debe a que no aprendieron geometría sin la cual ninguno puede hacerse o ser artista perfecto y es el verdadero fundamento de todo el arte del dibujo". Durero trato de relacionar la pintura, el dibujo basados en la geometría y perspectiva.

Leonardo Vinci (1452-1519) en Florencia señala que todos los problemas de la perspectiva quedan aclarados por los cinco términos de las matemáticas que son el punto, la línea, el ángulo, la superficie y el sólido, la perspectiva la supo aplicar a sus pinturas como "La Adoración de los Magos".

Rafael (1483-1520) en Florencia realiza pinturas con belleza, armonía, proporción, equilibrio, toma elementos de geometría como ángulos, líneas, figuras geométricas, utiliza el punto de fuga, se basa en la perspectiva. En su pintura Los Esponsales de la Virgen se ve claramente como las líneas convergen en el punto fuga usado ya desde el Renacimiento.

Las matemáticas en el Renacimiento se desarrollaron con trabajos como los de Chuquet, Regiomontano, Tartaglia, Cardano, Viete, Neper, Briggs.

Chuquet a fines del siglo XV introdujo el exponente fraccionario de una potencia, los exponentes negativos, los números negativos, el simbolismo algebraico En 1461 surgió la obra "Cinco libros sobre triángulos de cualquier genero" la escribió el matemático aleman Regiomontano .

N. Tartaglia (1500-1557) se intereso en la resolución de las ecuaciones cúbicas.

Cardano (1501-1576) escribió"El gran arte o las reglas del álgebra" contiene las reglas de las operaciones algebráicas y los métodos de la busqueda de las ecuaciones de los tres primeros grados y los elementos de la Teoria general de las ecuaciones algebráicas.

Viete dio un sistema de símbolos algebráicos organizado, el caso irreducible de la ecuación cúbica Viete lo redujo al problema de la trisección del ángulo, introduce por primera vez en la matemática el problema sobre la búsqueda del producto, infinito.

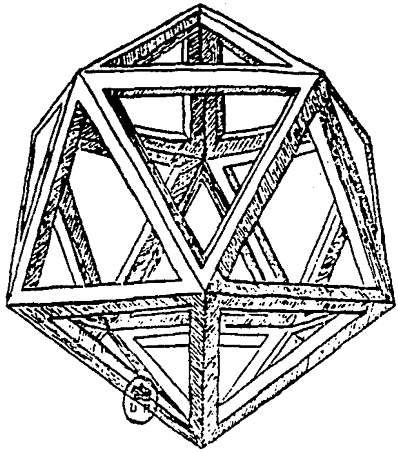
Neper investigó La teoría general de los Logaritmos" Y sus aplicaciones a los cálculos aritméticos y trigonométricos.

Enrique Briggs se puso de acuerdo con Neper, Briggs calcula los logaritmos decimales.

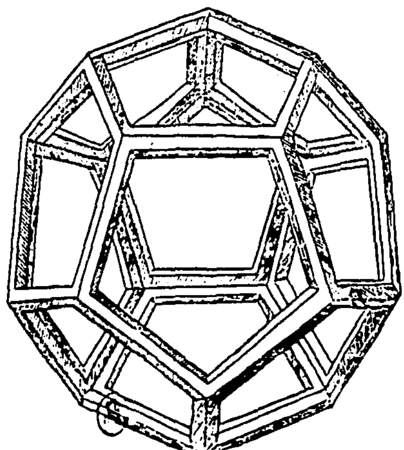
Las matemáticas en el Renacimiento avanzan y se desarrollan.

La perspectiva es el arte de representar en un plano los objetos del espacio que podemos ver . Ya desde la antiguedad el geómetra Euclides sobre la vista el decía que los rayos visuales forman un cono alrededor del contorno del objeto como base y con el vértice del cono en el interior del ojo.

En el Renacimiento pintores arquitectos utilizaron la geometria, la perspectiva posteriormente Desargues y Poncelet se interesaron en este estudio los geómetras lo sistematizan creando teoremas en la geometría .



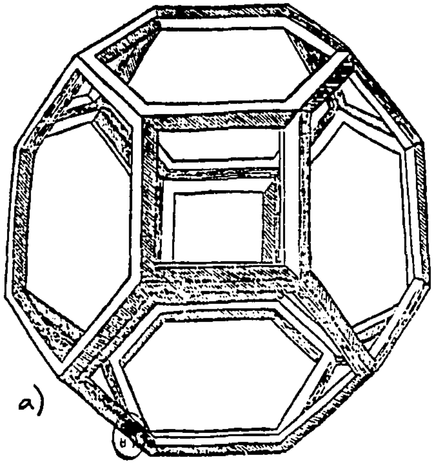
a)



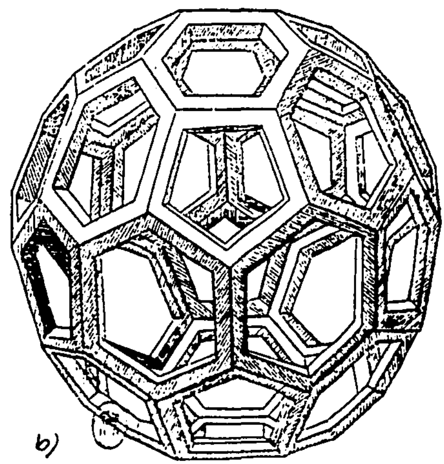
b)

a) Icosaedro dibujado por Leonardo da Vinci para De Divine Proportione de Fra Luca Paccioli.

b) Dodecaedro dibujado por Leonardo da Vinci para De Divina Proportione de Fra Luca Paccioli.

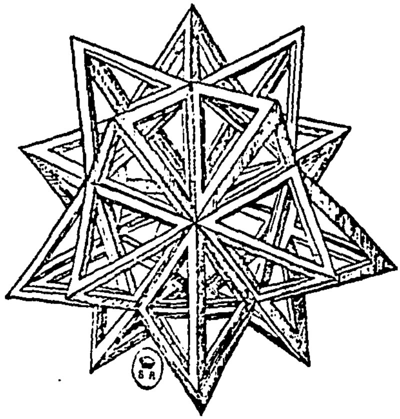


a)

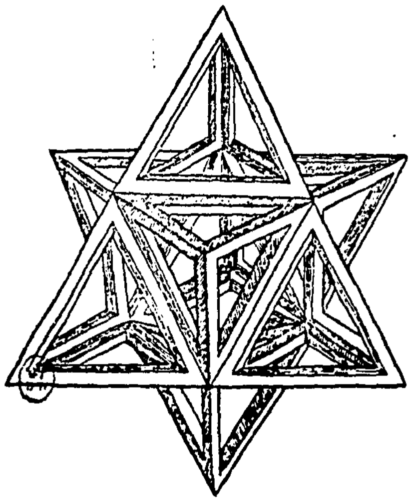


b)

a) y b) Poliedros semirregulares por Leonardo da Vinci.



a)

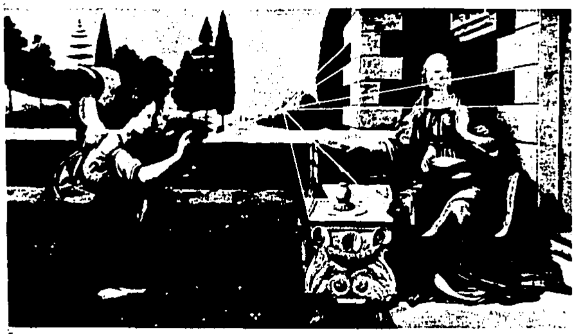


b)

a) Dodecaedro estrellado, por Leonardo da Vinci.

b) Stella Octangula, por Leonardo da Vinci.

Leonardo Vinci utilizó la geometría,la perspectiva en sus pinturas



"Anunciación" de Leonardo Vinci ,líneas de perspectiva que convergen en un punto.

Posteriormente se amplió el plano Euclideano creando la Geometría Proyectiva es decir la geometría del plano extendido es una geometría de puntos líneas e intersecciones.

Desde la Edad Media hubo interés en utilizar la geometría como elemento para realizar trabajos de dibujos y pinturas.

En el Renacimiento los pintores recurren a la perspectiva y figuras geométricas para darles a sus pinturas mayor realidad ,utilizan líneas convergentes que concurren en un punto

Diferentes artistas como Leonardo Vinci,Durero,Rafael basan sus trabajos de pintura en la perspectiva y geometría.

Desargues influenciado por necesidades de artistas y arquitectos de crear una teoría más profunda de la perspectiva escribió en 1639 un tratado sobre secciones cónicas donde aprovechó la idea de la proyección.

Dentro de la historia de la geometría proyectiva un teorema característico es el Teorema de Papus posteriormente Pascal formuló un teorema proyectivo que se puede considerar como una generalización del Teorema de Papuss. En los orígenes y desarrollo de la Geometría Proyectiva estuvieron Desargues,Pascal, Poncelet.

Blas Pascal escribió un ensayo sobre las cónicas y escribió el Teorema del "Hexagrama Místico".

Poncelet hizo del Teorema de Desargues de los dos triángulos el fundamento de su Teoría de figuras homológicas,fue de los primeros en apreciar que esta materia era verdaderamente una rama de las matemáticas completamente nueva.

En 1845 se encontró una copia manuscrita del tratado de Desargues y desde esa época el trabajo fue reconocido como uno de los clásicos en el desarrollo de la geometría proyectiva

.Las consideraciones proyectivas a la geometría suceden hasta finales del siglo XVIII cuando el geómetra Gaspard Monge(1746-1818) creó su geometría descriptiva, esta ciencia que contiene una forma de representar y analizar los objetos tridimencionales por medio de sus proyecciones sobre ciertos planos tuvo su origen en el proyecto de fortificaciones,

El trabajo de Desargues y de Poncelet y de sus seguidores condujo a los geómetras a clasificar las propiedades geométricas en dos categorias: en métricas y descriptivas.

Al estudio de las propiedades descriptivas de las figuras geométricas se le conoce como geometría proyectiva.

Ya desde el Renacimiento las ideas de querer representar el espacio tridimencional en un plano condujerón a que geómetras, arquitectos, científicos y artistas se interesaran en la perspectiva, Desargues y Poncelet se interresan en este estudio lo sistematizan creando teoremas en la geometría.

Posteriormente se amplió el plano Euclideano creando la geometría proyectiva es decir esta geometría del plano extendido es una geometría de puntos, líneas e intersecciones.

En la teoría actual de la geometría proyectiva se define la perspectividad, la proyectividad, se da el Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva, se construye el plano proyectivo en este plano el postulado de las paralelas no debe ser valido y dos rectas cualesquiera deben cortarse en uno y solo un punto. Se da el principio de dualidad, en las relaciones entre los teoremas se suponen válidos los axiomas de alineación y basandose en ellos se formulan teoremas como el Teorema de Desargues, el teorema de Papus, el teorema de perspectividad y el teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva.

En esta tesis se vio como se relacionó la geometría y la pintura en el Renacimiento y el surgimiento de la geometría proyectiva.

APENDICE

LA PROPORCION AUREA

> "Es imposible combinar dos cosas sin una tercera. Hace falta una relación entre ellas que las en - samble. La mejor unión para estas relaciones es el TODO. La suma de las partes como TODO, es la más perfecta relación de proporciones. Esta es la naturaleza de la rela - ción."
>
> Platon (1)

De la interrelación entre la geometría y las artes mención aparte merece la proporción áurea, nombrada así por Leonardo Da Vinci. En su "Tratado de la Pintura" Leonardo dice:

"Nuestra alma esta hecha de armonía y la armonía no se engendra, sino que surge espontánea de la proporción de los objetos que la hacen visible. La gracia de las proporciones esta encerrada en normas armónicas. Hace falta usar estas reglas, para corregir los errores de las primeras líneas de la composición. El pintor inventa la forma y la materia de las cosas que va a representar, luego las mide, organiza y proporciona".

La proporción áurea conocida ya desde los griegos para los cuales la armonía, el número, la proporción eran conceptos - unificadores universo-hombre-templo. Usadas en la arquitec - tura griega, barroca y del Renacimiento, tiene relación con la con la sucesión de Fibonacci, el pentagono, los cinco cuer - pos platónicos, junto con la sucesión de Fibonacci se observa en la naturaleza.

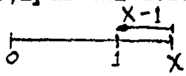
Por algo la llamó Luca Pacioli la proporción divina.

Kepler dijo "La geometría tiene dos grandes tesoros uno es el Teorema de Pitágoras, el otro la divición de una línea en proporción media y extrema. El primero puede ser comparado a una medida de oro, el segundo puede ser llamado una joya preciosa"

---

(1) La Composición Aurea en las Artes Plasticas, Pablo Tosto, Edit. Hachete, Argentina, 1964.

Pasemos a encontrar la razón áurea. Dividamos el intervalo $[0,1]$ de tal forma que $\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}$



Así obtenemos $x^2-x-1=0$

y por lo tanto $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

La solución con el signo positivo es

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.61803$$

y es a la que llamamos proporción áurea.

Dividir a un segmento AB en razón media y extrema es dividirlo en esta proporción ϕ.

Planteamos ahora la ecuación en diferencias

$$X_n=X_{n-1}+X_{n-2}\ldots \qquad (\alpha)$$

La ecuación que nos permite resolverla es de nuevo

$x^2-x-1=0$

cuyas raíces son $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad \psi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Por lo cual la solución general es (1)

$$X_n=\alpha\,\phi^n+\beta\,\psi^n$$

con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ constantes que se determinan con las condiciones iniciales.

Esto quiere decir que $a_n=\phi^n$ tiene la propiedad de ser aditiva y geométrica que es precisamente lo que han aprovechado los pintores, escultores y arquitectos para establecer proporciones dinámicas.

Veamos $\phi^{-1}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=-1+\phi$

$\Rightarrow \phi=1+\phi^{-1}$ multiplicando por ϕ^{n-1} $\Rightarrow \phi^n=\phi^{n-1}+\phi^{n-2}$

Por otro lado la sucesión de Fibonacci (2)

(1) Finite -Difference Equations on Simulations, de Francis P. Hildebrand, Ed. Prentice Hall Inc. 1968. USA

(2) Leonardo de Pisa llamado Fibonacci que es la contracción de Filius Bonacci, el hijo de Bonacci.

$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$

tiene esta propiedad con condiciones iniciales $U_0 = 0 \quad U_1 = 1$

Así que es combinación lineal de ϕ y ψ

Resolvamos $\alpha\phi^0 + \beta\psi^0 = 0$

$\alpha\phi + \beta\psi = 1$

$\Longrightarrow \alpha = -\beta \quad$ y $\quad \beta = \frac{1}{\psi - \phi} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Por lo tanto

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

que es la fórmula de Binet (1)

Consideremos una solución cualquiera de la ecuación en diferencias (a) $\quad X_n = \alpha\phi^n + \beta\psi^n \quad$ con $\alpha \neq 0$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{X_{n+1}}{X_n}}{\frac{\phi^{n+1}}{\phi^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha\phi^{n+1} + \beta\psi^{n+1}}{\phi^{n+1}}}{\frac{\alpha\phi^n + \beta\psi^n}{\phi^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha + \beta\left(\frac{\psi}{\phi}\right)^{n+1}}{\alpha + \beta\left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n}$$

$= 1$ porque $\left|\frac{\psi}{\phi}\right| < 1$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^{n+1}}{\phi^n} = \phi$$

Para cualquier solución de la ecuación en diferencias con $\alpha \neq 0$

En particular para la sucesión de Fibonacci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \phi$$

(1) The Divine Proportion de H.E Huntley

y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+2}}{U_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} \cdot \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} = \phi^2$ y así sucesivamente.

Veamos ahora otra relación de la sucesión de Fibonacci y la proporción aurea.

Consideremos la fracción continuada

$$f = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \vdots}}}}$$

Veremos que es igual a ϕ

Sean $f_0 = 1$, $f_1 = 1 + \frac{1}{1}$, $f_2 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}$, ... etc.

$\Rightarrow f_n = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}}$ donde U_n es la sucesión de Fibonacci

Por inducción sobre n

Se cumple para $n=0$ $\quad f_0 = 1 = \frac{U_2}{U_1}$

$n=1 \quad f_1 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = \frac{U_3}{U_2}$

Supongamos que se cumple para n.

Entonces para $n+1$ obtenemos: $f_{n+1} = 1 + \frac{1}{f_n} = 1 + \frac{1}{\frac{U_{n+2}}{U_{n+1}}}$

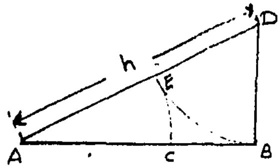
$= 1 + \frac{U_{n+1}}{U_{n+2}} = \frac{U_{n+2} + U_{n+1}}{U_{n+2}} = \frac{U_{n+3}}{U_{n+2}}$ por hipótesis de inducción

Por lo tanto

$f_n = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} = \phi$

- Dividir un segmento AB en razon áurea



Sea D tal que $DB \perp AB$ y de longitud la mitad de $\overline{AB}$

Sea E tal que $\overline{DB} = \overline{DE}$ en el segmento AD

Sea C tal que $\overline{AE} = \overline{AC}$ con el segmento AB

Entonces C divide internamente al segmento AB en razón áurea.

Supongamos para demostrarlo que $\overline{BD}=1$, $\overline{AB} = 2$

$$\Rightarrow h^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \quad \Rightarrow h = \sqrt{5}$$

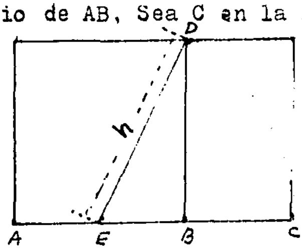
$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{5-1}$$

$$= \frac{2}{4}(1+\sqrt{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Dividir externamente a un segmento AB en proporción áurea

Sea D tal que $AB \perp BD$ y de la misma longitud

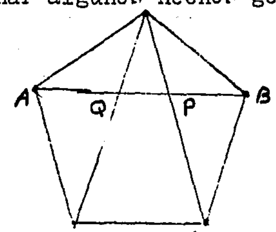
Sea E el punto medio de AB, Sea C en la recta que contiene a AB tal que $\overline{ED} = \overline{EC}$



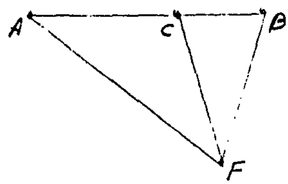
Entonces C divide externamente en Razón áurea para demostrarlo supongamos AE = 1 = $\overline{EB}$ $\overline{BD}$ = 2 $\Rightarrow h^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow h = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Podemos mencionar algunos hechos geométricos



Dado un pentágono si unimos 2 vértices no adyacentes en la forma que se indica en la figura P divide a AQ externamente en razón áurea, P divide a AB internamente en razón áurea.



Sea el segmento AB dividido internamente en proporción áurea en C . Sea F tal que $\overline{CF}=\overline{BF}$ y de longitud $\overline{AC}$ unamos F con A ,

$\measuredangle BAF = 36^{o}$

Ahora sí dividimos $\frac{360^{o}}{5} = 72^{o}$

Por lo tanto si dividimos un segmento en razón áurea podemos construir un pentágono .

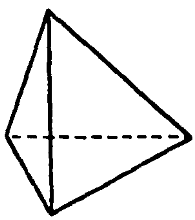
Esto explíca que la razón áurea aparesca una y otra vez en las relaciones entre los cuerpos platónicos .

Un poliedro es un sólido geométrico constituido por un cier to número de caras ,aristas y vértices. En un poliedro regular, las caras son porciones planas limitadas por polígonos regulares que tienen una misma forma y tamaño. Las caras se unen dos a dos en segmentos de línea llamados aristas,y las aristas se unen en puntos llamados vértices. Los griegos demostraron que existen tan sólo cinco poliedros regulares. Podemos considerar que hay polígonos regulares de cualquier número de lados. El número de polígonos regulares es infinito, mientras que el número de poliedros regu - lares es finito.

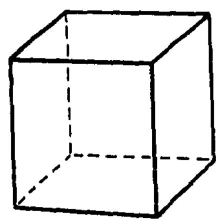
En las figuras podemos ver los cinco poliedros regulares .

Por el interés que Platón tenía en estos poliedros,vinieron a conocerse como "Sólidos Platónicos".

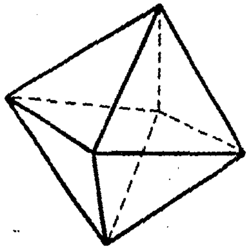
Los poliedros regulares toman su nombre del número de caras que tienen .



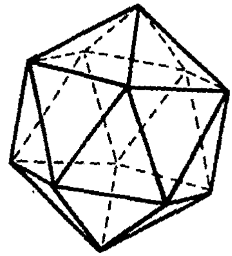
Tetraedro
v = 4
f = 4
e = 6



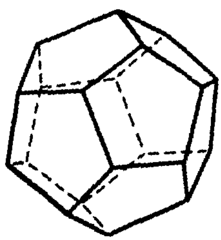
Hexaedro
v = 8
f = 6
e = 12



Octaedro
v = 6
f = 8
e = 12



Icosaedro
v = 12
f = 20
e = 30



Dodecaedro
v = 20
f = 12
e = 30

Los poliedros regulares obedecen ó satisfacen la fórmula de Euler, que es válida para cualquier poliedro. La fórmula de Euler dice que el número de caras (f), el número de vértices (v), y el número de aristas (e) de cualquier poliedro están relacionados por la fórmula $f+v=e+2$

Esta fórmula fue anunciada en 1752 por el matemático Leonard Euler, y en aquel tiempo fue aceptada como un descubrimiento nuevo.

Verificando la fórmula de Euler para el octaedro, tiene ocho caras por lo que f=8, cada cara tiene tres lados y cada arista del octaedro pertenece pertenece a dos caras, el número de aristas e es igual a $\frac{3\times f}{2}=\frac{3\times 8}{2}=12$

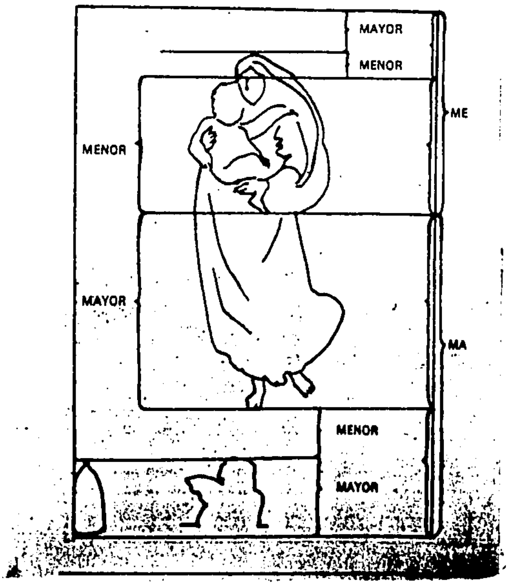
Sabemos también que cuatro caras son las que se encuentran o tocan en un vértice. Por lo tanto, el número de vértices, v, es igual a $\frac{3\times f}{4}=\frac{3\times 8}{4}=6$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de Euler tenemos

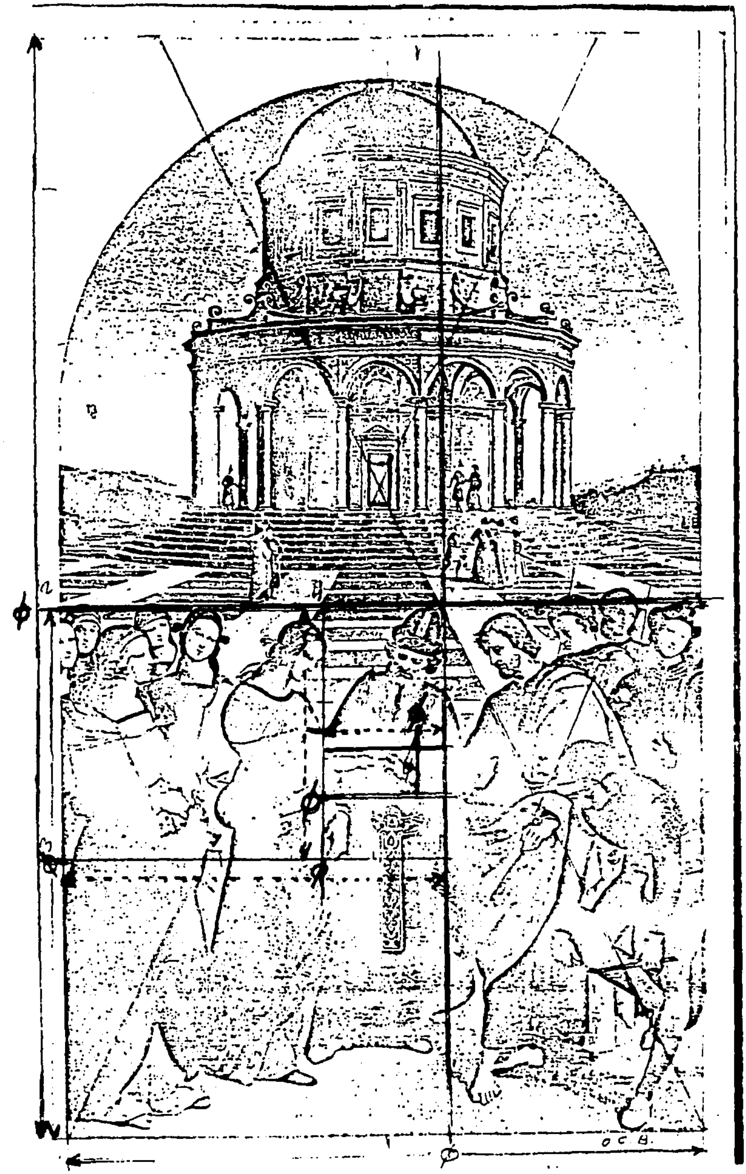
$$8+6=12+2.$$

Sin pretender adivinar el trazo de los pintores como dice Pablo Tosto eso sería muy pretencioso podemos hacer un análisis de las muchas posibilidades del uso de ϕ en las siguientes pinturas.

Para esta tesis se a incluido la razón áurea en algunas pinturas y esculturas.

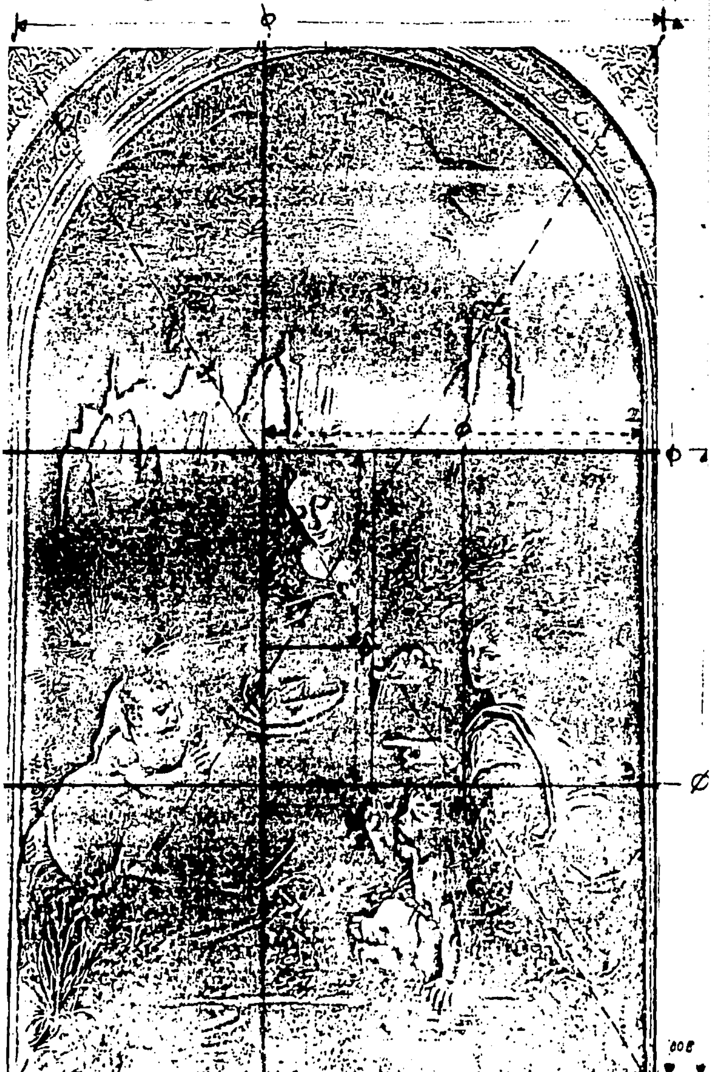


En la actualidad el aleman Putscher realizó el análisis de las proporciones áureas, de la pintura "La Virgen Sixtina" de Rafael .

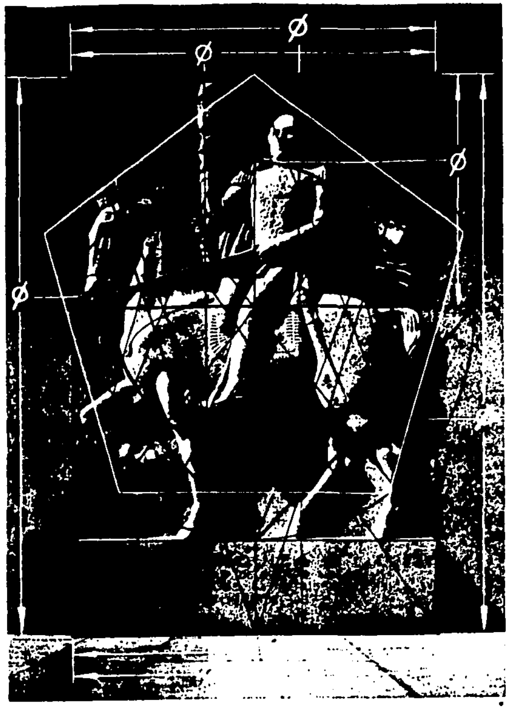


En "Los Esponsales de la Virgen" de Rafael de Urbino hecha en 1504. Sí el autor viviera le preguntariamos si realmente uso el rectángulo áureo dividido en proporción áurea. Yo como estudiante puedo suponer que sí colocando los rectángulos y los divido en proporción áurea de acuerdo a las figuras.

" La Virgen de las rocas " de Leonardo Vinci en 1483

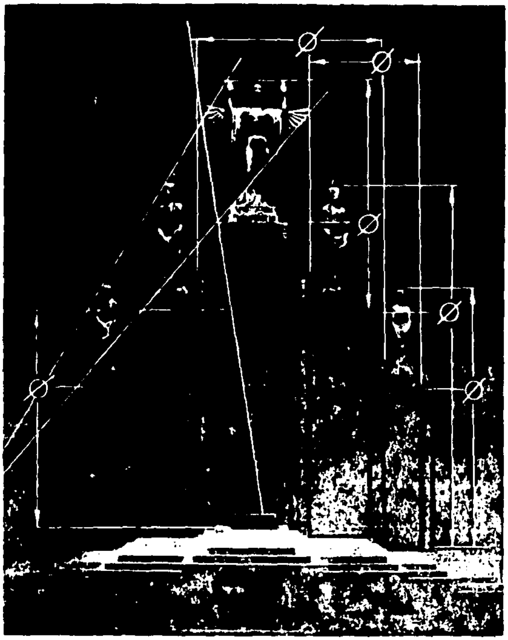


Sí coloco los rectángulos y los divido en proporción áurea podemos ver que las figuras coinciden con los rectángulos.



Monumento "Al General Urquiza",1957 del escultor Pablo Tosto. En el rectángulo se ven subdivisiones en ϕ y las trazas indicadas,la figura queda inscrita en un pentágono.

Pablo Tosto escultor argentino de este siglo usa extensivamente la proporción aurea.



"A la Independencia Argentina en la Quebrada de Huamaca" del escultor Pablo Tosto.
La composición áurea de esta obra está reconstruída, las relaciones áureas más perceptibles son las de los fustes entre sí, y de cada uno de éstos con respecto a la figura escultórica.

===================================

Desde Euclides el gran geómetra griego que escribío los Elementos y donde aparece ya definida la proporción aurea en la descripción que este hace de, la construcción de un pentágono a partir de un triángulo isosceles, y a la división áurea le llamo "dividir una recta dada en media y extrema razón"

El Número de Oro en geometría es la proporción aurea este número lo hemos visto surgir de la serie de Fibonaccí como símbolo de la constante relación armónica entre magnitudes diferentes.

Luca Pacioli la llamo la "Divina Proporción", en su libro del mismo nombre, tiene hermosos dibujos de geometría hechos por Leonardo da Vinci. Paccioli admira a Platón y a Della Francesca e igual que ellos recomienda a los arquitectos, cómo modelo y objeto de meditación, los cuerpos poliédricos y la infinita armonía aprovechable de sus proporciones.

La proporción áurea se ha transmitido através del tiempo desde Platón, Vitruvio, Euclides, Paccioli, Kepler, Descartes, etc. Llevando a encontrar la armonía en la pintura, escultura, arquitectura, musica, en el hombre, en el universo. Tomando la idea de número ó cantidad, el numero ϕ que se repite constantemente, ya Nicómaco de Gerasa ensayista pitagórico decia "Todo lo que la naturaleza ha dispuesto sistemáticamente en el universo parece haber sido, tanto en sus partes como en el conjunto, determinado y puesto en orden de acuerdo con el Número, por la previsión y el pensamiento de Aquel que creó todas las cosas; pues el modelo estaba fijado, como un bosquejo preliminar, por la dominación del Número preexistente en el espíritu del Dios creador del mundo, número-idea, puramente inmaterial en todos sus aspectos y, al mismo tiempo, la verdadera y eterna esencia de manera que de acuerdo con el Número, como de de conformidad en un plano artístico,fueron creadas todas las cosas,y el Tiempo,el movimiento,los cielos,los astros y todos los ciclos de todas las cosas".

B I B L I O G R A F I A

(1) Alvear Acevedo Carlos, Introducción a la Historia del Arte, Jus. México, 19[illegible].

(2) Alvear Acevedo Carlos, Historia Universal Contemporanea, Jus. México, 197[illegible].

(3) Baker H. Henry, Principles of Geometry.

(4) Blaschke Wilhelm, Proyective Geometry,

(5) Botticelli, Grandes Maestros del Arte, Marín, S. A. Barcelona, 197[illegible].

(6) Cirlot J. E. , Pintura Gótica Europea, Labor. S. A. Barcelona, 1969.

(7) Coxeter H.S.M., The Real Proyective Plane.

(8) Cartan Elie Joseph, Lecons Sur La Geometrie Proyective.

(9) Chasles Michel, La Dualite Et L'Homographie, París, 1[illegible].

(10) Durer The Complete Engravings Etchings and Woodcuts, Karl-Adolf Knappe, Thames and Hudson LTD, London.

(11) Durero Albert, Instituciones de Geometría, Publicaciones UNAM.

(12) Encina Juan, La Pintura Italiana, Fondo de Cultura Econo - mica Buenos Aires 1951.

(13) Eves Howard, Estudio de las Geometrías, Vol 1, UTEHA, S.A. México, 1969.

(14) Ewan D. Faulkner , Projective Geometry

(15) Flocon Albert y René Taton , La Perspectiva, Tecnos S.A. Madrid 19[illegible].

(16) Friedenthal Richard, Leonardo Vinci, Ediciones Destino S.A. Barcelona. 19[illegible]1.

(17) Franco Fernando Marías , El Arte del Renacimiento, Grupo Anaya S. A. España 19[illegible].

(18) Fishback William Thompson, Projective and Euclidean Geometry John Wiley & Sons Inc. New York 1969.

(19) Giombiní Adrian, Perspectiva Teorica, Ediciones Magazine México 19[illegible].

(20) Godeaux Lucien, Les Géometries.

(21) Historia Universal del Arte, Vol. 5, Planeta.

(22) Hayes Colin, Guía Completa de Pintura y Dibujo, Ediciones Herman Blume. España 19[illegible].

(23) Ivins M. William Jr. Art & Geometry A Study In Space Intuitions, Dover Publications, New York, 19[illegible].

(24) J. Rey Pastor y J. Babini, Historia de las Matemáticas, Espasa Calpe, Argentina 1951.

(25) Kubovy Michael, The Psychology of Perspective and Renaissance Art, Cambridge University Press.

(26) Kline Morris, Mathematics For Liberal Art, Addison-Wesley Publishing Co. United State of America 1967.

(27) Lawrence Wright, Tratado de Perspectiva, Stylos S. A. España 19[illegible]

(28) Lara Miguel Aparicio, Lecturas Universitarias No.7 Antología de Matemáticas, Dirección Gral. de Publicaciones UNA . 1971.

(29) Letts Rosa María, Introducción a la Historia del Arte, El Renacimiento, Gustavo Gili S. A. Barcelona 19[illegible].

(30) Matila C. Ghyka, El Número de Oro, Poseidon, Barcelona.1978.

(31) Mannering Douglas, El Arte de Leonardo da Vinci, Polígrafa S. A. Barcelona, 1981.

(32) Pedoe Dan, La Geometría en el Arte, Gustavo Gili S.A. Barcelona.1979.

(33) Pedoe Dan, An Introductión to Geometry Proyective,

(34) Panofsky Erwin, Vida y Arte de Alberto Durero, Alianza S.A. Madrid.1962.

(35) Radu Vero, El Modo de Entender la Perspectiva, Gili S.A., México 1981.

(36) Rafael, Grandes Maestros del Arte, Marín, S. A. España 1970.

(37) Rotgans Henk, Perspectiva. Ediciones CEAC. Barcelona 1988.

(38) K.Ribnikov, Historia de las Matemáticas, Mir, Moscu, 1957.

(39) Seidenberg A., Elementos de Geometría Proyectiva, Continental S.A. 1965.

(40) Shaver Crandell Anne, Introducción a la Historia del Arte La Edad Media, Gustavo Gili S. A. Barcelona, 1985

(41) de la Torre Carbo, Perspectiva Geométrica, Publicaciones UNAM. 1982.

(42) Tosto Pablo, La Composición Aurea en las Artes Plasticas Ediciones Libreria Hachete, S.A. Argentina, 1964.

(43) Tisseron Claude, Geometries Affine Proyective et Euclideans

(44) Veblen and Young, Proyective Geometry.